بهینه سازی استوار

میر سامان پیشوایی

گروه صنایع دانشکده فنی دانشگاه تهران

بهار ۱۳۸۸

عدم قطعیت

- در مسائل بهینه سازی (مانند مسئله ذیل) معمولاً پارامترها قطعی فرض شده و جواب بهینه محاسبه می شود.

$$\begin{aligned} \min \quad & cx + d \\ s.t. \quad & Ax \le b, \end{aligned}$$

- اما در کاربردهای واقعی به ندرت می توان مقدار پارامترها را به طور دقیق تعیین کرد.

- ضمناً مقدار بهینه متغیرها در پیاده سازی با خطا همراه است.

تاثیر عدم قطعیت پارامترها در بهینه سازی

یک مسئله بهینه سازی خطی را در نظر بگیرید. عبارت ذیل محدودیت ۳۷۲ آن است.

$$
\begin{aligned}
[a^{\mathrm{n}}]^T x = & -15.79081x_{826} - 8.598819x_{827} - 1.88789x_{828} - 1.362417x_{829} - 1.526049x_{830} \\
& -0.031883x_{849} - 28.725555x_{850} - 10.792065x_{851} - 0.19004x_{852} - 2.757176x_{853} \\
& -12.290832x_{854} + 717.562256x_{855} - 0.057865x_{856} - 3.785417x_{857} - 78.30661x_{858} \\
& -122.163055x_{859} - 6.46609x_{860} - 0.48371x_{861} - 0.615264x_{862} - 1.353783x_{863} \\
& -84.644257x_{864} - 122.459045x_{865} - 43.15593x_{866} - 1.712592x_{870} - 0.401597x_{871} \\
& +x_{880} - 0.946049x_{898} - 0.946049x_{916} \\
& \geq b \equiv 23.387405
\end{aligned}
$$

- چه اتفاقی می افتد اگر در پارامترها **تنها ۰.۰۰۱** عدم قطعیت وجود داشته باشد ؟

$$|a_i^{\mathrm{true}} - a_i^{\mathrm{n}}| \leq 0.001|a_i^{\mathrm{n}}|$$

تاثیر عدم قطعیت پارامترها در بهینه سازی

با قرار دادن جواب بهینه در مسئله خواهیم داشت:

$$\min_{a^{\text{true}}} \{[a^{\text{true}}]^T x^{\text{n}} | \, a^{\text{true}} \ \textbf{satisfies} \ (*)\} - b < -128.2 \approx 4.5|b|.$$

- یعنی مقدار بدست آمده از حد موجه محدودیت **٪۴۵۰** بیشتر می شود.

- بر اساس آزمایشات انجام شده Ben Tal & Nemerovski (2000) روی ۹۰ مسئله بهینه سازی خطی موجود در NETLIB
  - در ۱۹ مسئله عدم قطعیت ۰.۰۰۱ موجب آن شد که در یک یا تعدادی از محدودیت ها بیش از ٪۵ مقدار موجه محدودیت نقض شود.
  - در ۱۳ تا از این ۱۹ مسئله این مقدار بیش از ٪۵۰ بود.

دلائل عدم قطعیت

- خطای پیش بینی (Prediction error)
  - مانند تقاضا در آینده

- خطای اندازه گیری (Measurement error)
  - مانند اندازه گیری یک فاکتور تکنولوژیک

- خطای پیاده سازی (Implementation error)
  - مانند محل دقیق یک قطعه طراحی شده که در هنگام اجرا دقیقاً برابر مقدار طراحی نمی باشد

رویکردهای برخورد با عدم قطعیت در بهینه سازی ریاضی

- سه رویکرد برای برخورد با این موضوع تا به حال توسعه داده شده است:

- Stochastic optimization
- Fuzzy optimization
- Robust optimization

Fuzzy-stochastic optimization

مشکلات استفاده از رویکرد تصادفی و فازی

- در بهینه سازی تصادفی برای برازش تابع توزیع نیازمند داده های گذشته (Historical data) به اندازه کافی می باشیم. لذا به سختی می توان به تابع توزیع حقیقی دست یافت.

- در بهینه سازی فازی هم تعیین شکل تابع عضویت با چالش های مشابهی روبرو است.

- در بهینه سازی تصادفی جواب با احتمالی موجه است و امکان دارد برای برخی حالات واقعی (Realization)غیرموجه باشد هر چند که احتمال این امر کم است ولی در صورت وقوع هزینه بالایی را تحمیل خواهد کرد.

$$\underset{\zeta\sim p}{G(x,\zeta)\le 0} \rightarrow P\left(\underset{\zeta\sim p}{G(x,\zeta)\le 0}\right)=1 \xrightarrow[\text{soft cons.}]{\text{chsnge to}} P\left(\underset{\zeta\sim p}{G(x,\zeta)\le 0}\right)\ge 1-\alpha$$

- مشابه این مشکل برای بهینه سازی فازی هم وجود دارد. در واقع بهینه سازی تصادفی و فازی با محدودیت ها برخورد نرم (Soft) دارند.

- همچنین در این رویکرد ها پیچیدگی مسئله نیز افزایش یافته و حتی در حالت روش تصادفی مبتنی بر سناریو نیز با افزایش نعداد سناریوها این اتفاق می افتد.

بهینه سازی استوار مبتنی بر سناریو (گسسته)

- به این نوع از بهینه سازی استوار، بهینه سازی استوار تصادفی هم گفته می شود.
- در این حالت تعدادی سناریو برای پارامترهای دارای عدم قطعیت تعریف می شود ابتدا مدل بهینه سازی تصادفی مبتنی بر سناریو را مدل می کنیم.

$$\begin{aligned} Min \quad & fy + cx \\ s.t. \quad & Ax \geq d \\ & Nx = 0 \\ & y \in \{0,1\}, \quad x \in R^+ \end{aligned} \quad \Longrightarrow \quad \begin{aligned} Min \quad & fy + c_\theta x \\ s.t. \quad & Ax \geq d_\theta \\ & N_\theta x = 0 \\ & y \in \{0,1\}, \quad x \in R^+ \end{aligned}$$

- Set of potential scenarios **Ω,** $\theta \in \Omega$

بهینه سازی استوار مبتنی بر سناریو (گسسته)

$$\begin{aligned}
Min \quad & Z = fy + E[Z(x,c)] \\
s.t. \quad & Ax_\theta \geq d_\theta \\
& N_\theta x_\theta = 0 \\
& y \in \{0,1\}, \quad x_\theta \in R^+
\end{aligned}
\quad \Rightarrow \quad
\begin{aligned}
Min \quad & Z = fy + \sum_\theta \pi_\theta c_\theta x_\theta \\
s.t. \quad & Ax_\theta \geq d_\theta \\
& N_\theta x_\theta = 0 \\
& y \in \{0,1\}, \quad x_\theta \in R^+
\end{aligned}$$

- دقت کنید در این حالت متوسط (امید ریاضی) تابع هدف می نیمم می شود اما شاید در برخی سناریوها مقدار تابع هدف بسیار زیاد باشد و تصمیم گیر نخواهد این ریسک را قبول کند. (شکل)

بهینه سازی استوار مبتنی بر سناریو (گسسته)

- برای این حالت یعنی کم کردن تغییرات تحت حالات مختلف روشهایی توسعه داده شده است که از آن با بهینه سازی استوار تصادفی یاد می شود. روش ذیل توسط Mulvey et al. 1995 توسعه داده شده است.

Solution robustness

Model robustness

معمولا به مقدار ناموجه بودن جواب تعریف می شود

$$
\begin{aligned}
\text{Minimize} \quad & \sigma(x, y_1, \ldots, y_S) + \omega \rho(z_1, \ldots, z_S) \\
\text{subject to:} \quad & Ax = b, \\
& B_s x + C_s y_s + z_s = e_s, \qquad \text{for all } s \in \Omega, \\
& x \geq 0,\ y_s \geq 0, \qquad \text{for all } s \in \Omega.
\end{aligned}
$$

$$
\sigma(x, y_1, y_2, \ldots, y_S) = \sum_{s \in S} p_s \xi_s + \lambda \sum_{s \in S} p_s \Big(\xi_s - \sum_{s' \in S} p'_s \xi_{s'} \Big)^2.
$$

حالت اصلاح شده

- اشکال مدل قبل غیر خطی بودن آن است که می توان به جای آن از مدل ذیل استفاده کرد.

$$\sigma(\bullet) = \sum_{s\in\Omega} p_s \xi_s + \delta \sum_{s\in\Omega} p_s \left(\xi_s - \sum_{s'\in\Omega} p_{s'} \xi_{s'} \right)^2$$

$$\Downarrow$$

$$\sigma(\bullet) = \sum_{s\in\Omega} p_s \xi_s + \delta \sum_{s\in\Omega} p_s \left| \xi_s - \sum_{s'\in\Omega} p_{s'} \xi_{s'} \right| .$$

حالت اصلاح شده

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad & \sum_{s\in\Omega} p_s \xi_s + \delta \sum_{s\in\Omega} (Q_s^+ + Q_s^-) \\ \text{s.t.} \quad & \xi_s - \sum_{s'\in\Omega} p_{s'} \xi_{s'} = Q_s^+ - Q_s^- \quad s \in \Omega, \\ & Q_s^+, Q_s^- \geq 0, \quad s \in \Omega. \end{aligned}$$

$$\left| \xi_s - \sum_{s'\in\Omega} p_{s'} \xi_{s'} \right| = Q_s^+ - Q_s^-$$

$$\text{Min} \quad \sum_{s\in\Omega} p_s \xi_s + \delta \sum_{s\in\Omega} (Q_s^+ + Q_s^-) + \gamma \sum_{s\in\Omega} p_s \eta_s.$$

- حالتی دیگر:

$$Z_{TP}^R = \eta \cdot \max_{s\in\Omega} (\xi_s - \xi_s^*) + \lambda \cdot \sum_{s\in\Omega} p_s \xi_s$$

تاریخچه بهینه سازی استوار

- نخستین گام در توسعه تئوری بهینه سازی استوار توسط Soyster (1973) برداشته شد. هر چند که این کار با نام بهینه سازی استوار انجام نگرفت.

- دو دهه بعد Ben-Tal and Nemirovski (1998, 2000) و El-Ghaoui et al. (1998) به طور موازی تحقیقات موثری را در معرفی و توسعه تئوری بهینه سازی استوار انجام دادند.

- هم اکنون از این تئوری در زمینه های گوناگونی مانند تعیین سبد سهام (El-Ghaoui et al., 2003) ، کنترل موجودی (Adida and Perakis, 2006) و زنجیره تامین و لجستیک (Sim et al. 2008) استفاده شده است.

بهینه سازی استوار
(Robust Optimization)

- روشی است که در آن مسئله برای بدترین حالت (Worst Case)بهینه می شود.
- گویی در مقابل یک رقیب یا دشمن (Adversary) بازی می کنیم.
- در بهینه سازی استوار جواب برای تمام سناریوها موجه (Feasible) است.
- در واقع در بهینه سازی استوار بهترین جواب از بین جواب هایی که برای همه سناریوها موجه هستند انتخاب می شود.
- بهینه سازی استوار یک رویکرد سخت (Hard) و دقیق است.

بهینه سازی استوار

- مسئله زیر را در نظر بگیرید و فرض کنید

$$\begin{aligned} &\min && cx+d \\ &s.t. && Ax \le b, \end{aligned}$$

- حال فرض کنید که پارامترهای مسئله دارای عدم قطعیت باشند

$$\left\{ \min_x \left\{ c^T x + d : Ax \le b \right\} \right\}_{(c,d,A,b)\in\mathcal{U}}$$

- که به U مجموعه عدم قطعیت (Uncertainty set) گفته می شود و پارامترها در این مجموعه تغییر می کنند.

- یک جواب استوار موجه (Robust feasible solution) جوابی است که محدودیت ها را در تمام حالاتی که پارامترها می گیرند ارضا کند.

$$Ax \le b \quad \forall (c,d,A,b) \in \mathcal{U}.$$

همزاد استوار

- مقدار استوار تابع هدف (Robust Value of O.F.) عبارت است از بزرگترین مقدار تابع که یک جواب موجه برای تمامی حالات واقعی تولید می کند.

$$\widehat{c}(x) = \sup_{(c,d,A,b)\in\mathcal{U}} [c^T x + d]$$

- حال می توان بر این اساس همزاد استوار (Robust counterpart) مسئله مورد بحث را به صورت ذیل تعریف کرد.

$$\min_x \left\{ \widehat{c}(x) = \sup_{(c,d,A,b)\in\overline{c}U} [c^T x + d] : Ax \leq b \ \forall (c,d,A,b) \in \mathcal{U} \right\}$$

- جواب بهینه این مسئله جواب بهینه استوار (Robust optimal solution) مسئله می باشد. و تضمین میدهد که در هیچ شرایطی مقدار تابع هدف بیشتر از مقدار بهینه استوار نشود.

- همانطور که مشاهده می کنید در بهینه سازی استوار دیدگاه بدبینانه و کم کردن حداکثر ضرر حاکم است.

مجموعه عدم قطعیت (Uncertainty set)

- مجموعه عدم قطعیت یک مجموعه بسته و محدب است که حدود تغییر پارامترها را تعیین می کند.
- بدین ترتیب دیگر ما نیازمند شکل توزیع و یا تابع عضویت نیستیم و تنها دانستن دامنه تغییرات یا به تعبیر ادبیات فازی (Support) کافی است.

$$\mathcal{U} = \left\{ \left[\begin{array}{c|c} c^T & d \\ \hline A & b \end{array}\right] = \underbrace{\left[\begin{array}{c|c} c_0^T & d_0 \\ \hline A_0 & b_0 \end{array}\right]}_{\substack{\text{nominal} \\ \text{data } D_0}} + \sum_{\ell=1}^{L} \zeta_\ell \underbrace{\left[\begin{array}{c|c} c_\ell^T & d_\ell \\ \hline A_\ell & b_\ell \end{array}\right]}_{\substack{\text{basic} \\ \text{shifts } D_\ell}} : \zeta \in \mathcal{Z} \subset \mathbb{R}^L \right\}$$

$$= \left\{ \left[\begin{array}{c|c} c^T & d \\ \hline A & b \end{array}\right] = \underbrace{\left[D_0 + \sum_{\ell=1}^{L} p_\ell D_\ell \right]}_{\widehat{D}_0} + \sum_{k=1}^{K} \xi_k \underbrace{\left[\sum_{\ell=1}^{L} P_{\ell k} D_\ell \right]}_{\widehat{D}_k} : \xi \in \widehat{\mathcal{Z}} \right\}$$

مجموعه عدم قطعیت (Uncertainty set)

- در شرایط زیر مجموعه عدم قطعیت به شکل جعبه خواهد بود.

$$\{\xi \in \mathbb{R}^k : -1 \le \xi_j \le 1, j = 1, ..., k\}$$

$$u_{Box} = \left\{\xi \in \Re : \left|\xi_t - \overline{\xi}_t\right| \le \rho G_t, t = 1,...,n\right\}$$

مقدار واقعی

مقدار اسمی
nominal

سطح عدم قطعیت
U. level

مقیاس عدم قطعیت
U. scale

- و معمولاً $G_t = \overline{\xi}_t$
- شکل های دیگر مانند بیضی و دایره که حالت خاصی از بیضی هم است نیز می تواند استفاده شود.

$$a_i \in \mathcal{E}_i = \{\hat{a}_i + P_i^{1/2} u \ : \ \|u\|_2 \le 1\}$$

پیچیدگی مسئله استوار همزاد

- در حالت کلی مسئله همزاد استوار یک مسئله NP-Hard است.

- اما تا کنون محققان برای بسیاری از مجموعه های عدم قطعیت بسته و محدب مانند حالت جعبه و بیضی حالت رام شده (tractable) توسعه داده اند.
- برای نمونه Ben-Tal and Nemirovski (1998, 2000)

- برای حالات پیچیده نیز الگوریتم های تقریبی توسعه داده شده است

فرم رام شده (Tractable) برای استوار همزاد با مجموعه عدم قطعیت جعبه

- مسئله زیر را در نظر بگیرید.

$$\begin{aligned} \min \quad & fy + cx \\ s.t. \quad & Ax \geq b, \\ & x \in \Re^{+}, \end{aligned}$$

- فرض می کنیم c و d دارای عدم قطعیت هستند و مجموعه عدم قطعیت بشکل جعبه است. آنگاه خواهیم داشت.

$$\begin{aligned} \min \quad & z \\ s.t. \quad & fy + cx \leq z, \qquad \forall c \in u_{Box}^{c}, \\ & Ax \geq b, \qquad \forall b \in u_{Box}^{b}, \end{aligned}$$

فرم رام شده (Tractable) برای استوار همزاد با مجموعه عدم قطعیت جعبه

- برای مدل کردن عدم قطعیت c خواهیم داشت

$$cx \le z - fx, \qquad \forall c \in u^c_{Box} \middle| u^c_{Box} = \{c \in \Re : |c_t - \bar{c}_t| \le \rho_c G^c_t, t = 1, \ldots, n_c\},$$

- و در نتیجه

$$\sum_t (\bar{c}_t x_t + \eta_t) \le z - fx$$
$$\rho_c G^c_t x_t \le \eta_t, \qquad \forall t \in \{1, \ldots, n_c\}$$
$$\rho_c G^c_t x_t \ge -\eta_t, \qquad \forall t \in \{1, \ldots, n_c\}$$

- به طور مشابه برای d هم خواهیم داشت

$$a_i x \ge b_i, \qquad \forall i \in \{1, \ldots, n_b\}, \qquad \forall b \in u^b_{Box} \middle| u^b_{Box} = \{d \in \Re : |b_i - \bar{b}_i| \le \rho_d G^b_i, t = 1, \ldots, n_b\},$$

- و در نتیجه

$$a_i x \ge \bar{b}_i + \rho_b G^b_i, \qquad \forall i \in \{1, \ldots, n_b\},$$

خطای پیاده سازی

- هر محدودیت را می توان به صورت ذیل نوشت

$$a_{ij}x_j \geq b_i$$

- حال فرض کنید که خطای پیاده سازی به شکل زیر برای X_j وجود داشته باشد

$$x_j \mapsto x_j + \epsilon$$

- تاثیر این خطا می تواند به صورت زیر اعمال شود.

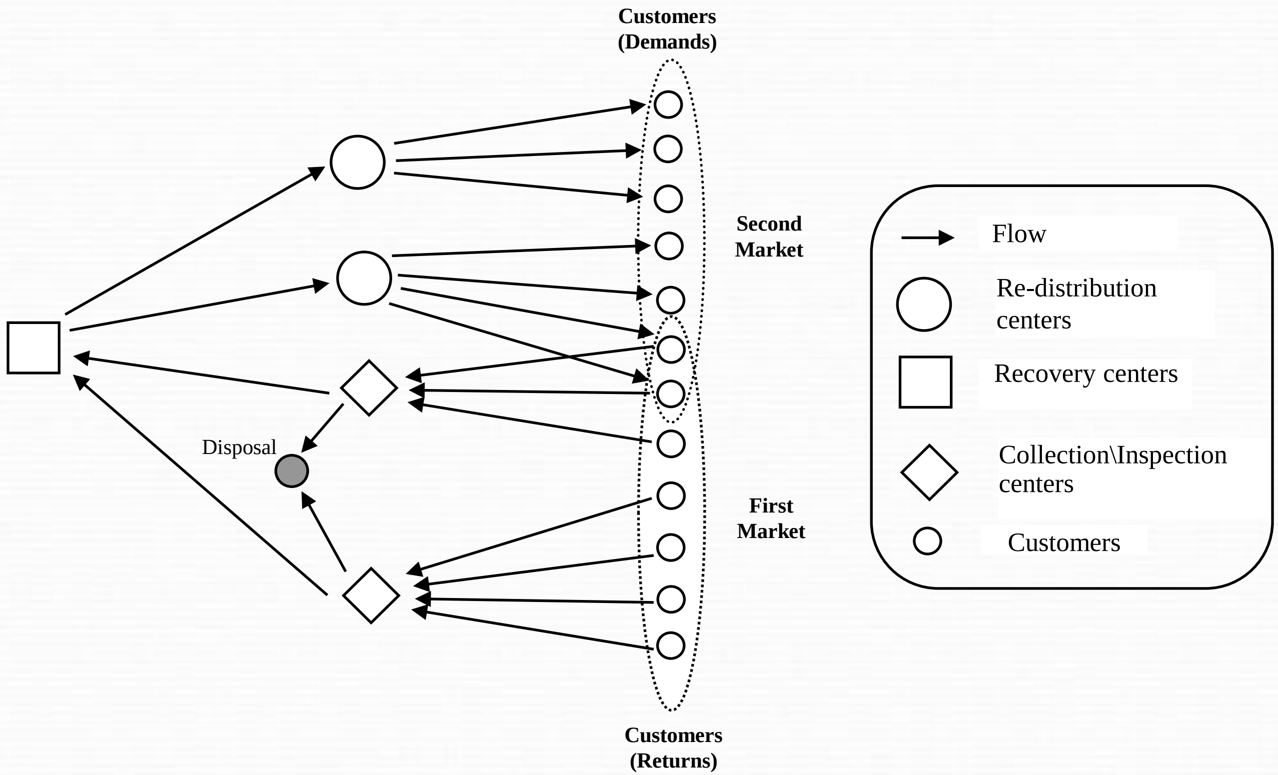
$$b_i \mapsto b_j - a_{ij}\epsilon$$

- در حالت ضربی نیز خواهیم داشت

$$x_j \mapsto (1+\epsilon)x_j \quad \Rightarrow \quad a_{ij} \mapsto (1+\epsilon)a_{ij}$$

- بدین ترتیب خطای پیاده سازی که در متغیرها اثر می گذارد قابل تبدیل به خطا در پارامترها است در تابع هدف نیز خطای در متغیرها به همین ترتیب بر d و c اثر گذار است.

کاربرد بهینه سازی استوار در طراحی زنجیره تامین حلقه بسته

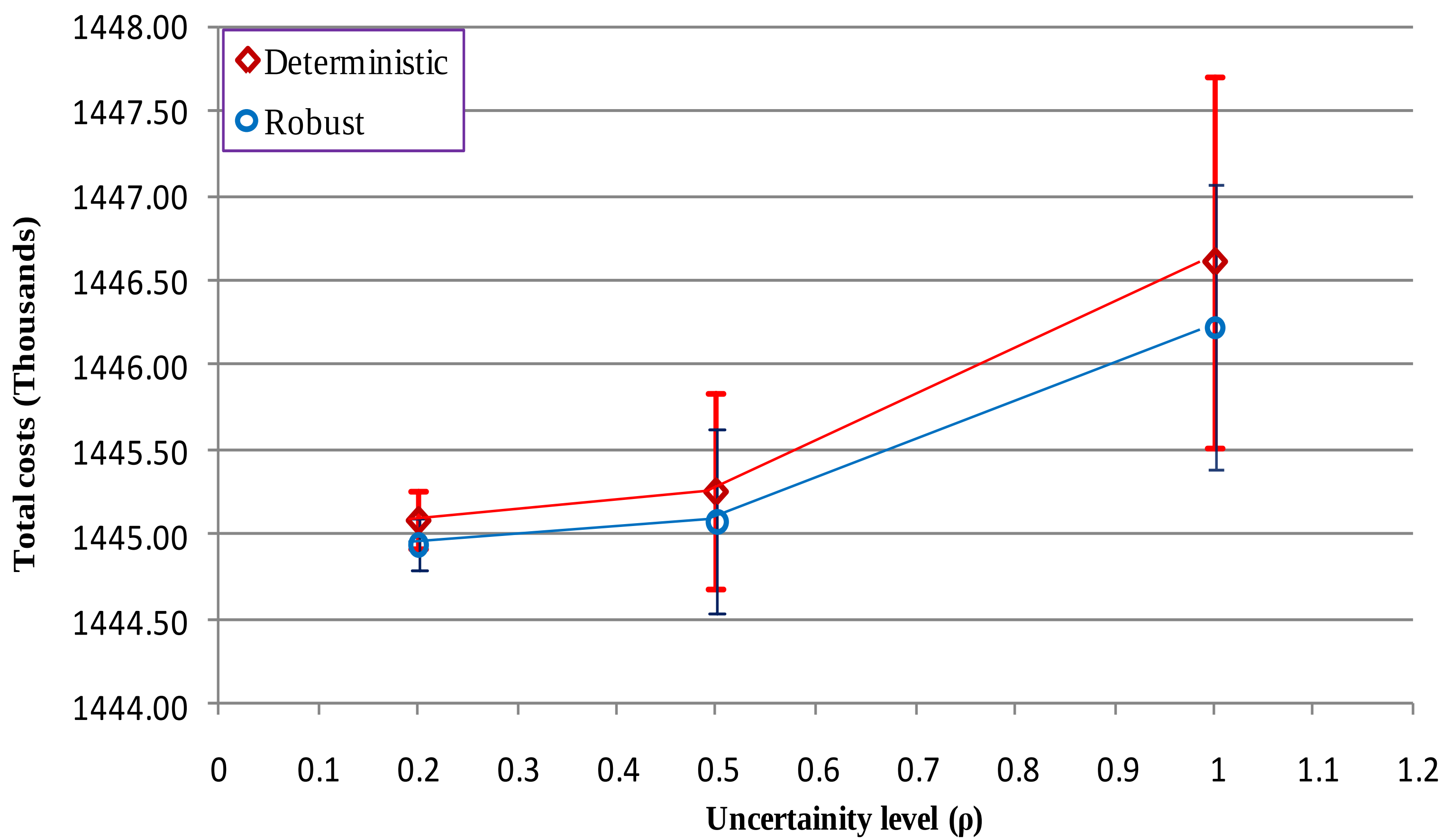


- در طراحی زنجیره تامین حلقه بسته مقدار بازگشتی ها، تقاضا برای محصولات احیا شده و همچنین هزینه حمل نقل دارای عدم قطعیت قابل توجهی می باشند.

کاربرد بهینه سازی استوار در طراحی زنجیره تامین حلقه بسته

- با این فرض ها ابتدا مدل قطعی برنامه ریزی خطی عدد صحیح آمیخته (MILP) ساخته شد.
- سپس با توجه به عدم قطعیت در پارامترها مدل استوار همزاد توسعه داده شد.
- مجموعه عدم قطعیت برای پارامترها به صورت جعبه (Box) فرض شده است.
- سپس با ساختن مدل ساده شده (Tractable) مدل تحت سطوح مختلف عدم قطعیت با تولید سناریوهای واقعی با مدل قطعی مقایسه شده است.

نتایج محاسباتی



زمینه های تحقیقات آتی در بهینه سازی استوار

- بهینه سازی استوار بر اساس حالت متوسط (Average Case)

- بهینه سازی استوار غیر خطی و گسسته

- ارائه روش حل برای مسائل پیچیده بهینه سازی استوار بخصوص در حالتی که مجموعه عدم قطعیت حالتی (General Form) کلی داشته باشد.

- کاربرد های تئوری بهینه سازی استوار در موضوعات مدیریت، مهندسی صنایع و ...

سوال و بحث