۱۲ بسم الله الرحمن الرحیم

Subject درس برنامه ریزی اکوارس
Date ۹۲/۱۱/۱۳ جلسه اول: یکشنبه

مقدمه ای بر ریسک و عدم قطعیت:

① فرض تناسب ② فرض جمع پذیری ③ بخش پذیری

فضای Convex ✓ LP ✓ قطعیت ✓

چون پیچیدگی واقعیت ∞ است پس ما Assumption هایی می‌گذاریم تا حل و مدل کنیم.

قطعیت: مقدار پارامترهای ما مقدار مشخصی دارد.

مقدار حقیقی که دسترسی نداریم

Numinal = اسمی → که در مسئله می‌گذاریم

$$|a_i^{true} - a_i^{n}| \leq 0.001\,|a_i^{n}|$$

distruption ← اختلال

dastkin کاشت گرد

اگر یکی از مراکز distribution center حذف شود چه اتفاقی می‌افتد؟ کدام یک را حذف کنیم

بدتر می‌شود؟ اول فرض می‌کنیم ظرفیت مراکز توزیع ∞ باشد (٪۱۷ Total ↑٪۵۲ حل دلخواه .

میزان هزینه اضافه شده به سیستم به عوامل زیر بستگی دارد:

۱- سهم تسهیل در ارضای تقاضا ۲- فاصله پخش مشتریان با تسهیل خاص

این مطلب با این فرض بود که ظرفیت تسهیلات ∞ بود حالا اگر ظرفیت داشته باشیم و نتوانیم

آن ظرفیت را جواب دهیم باید جریمه دهیم.

PAPCO

Subject
Date

راه حل:

افزایش تسهیلات و پراکندگی تسهیلات $\neq$ cost opt.

باید بین اهداف کلاسیک مثل حداقل کردن هزینه و حداقل کردن هزینه بحران تعادل ایجاد کرد.

عدم قطعیت و ریسک:

عدم قطعیت: فاصله بین واقعیت و آن چیزی که ما می دانیم

داده های ما با واقعیت مساله یکسان است: شرایط قطعیت

Galbraith (1973) عدم قطعیت را تفاوت و فاصله بین مقدار اطلاعات لازم برای انجام کاری و مقدار اطلاعات موجود تعریف می کنند.

عدم قطعیت بار + و − ندارد / ریسک قسمتی از عدم قطعیت است که بار − دارد

تعریف ریسک از stewart به معنای علمی غ و ق است

به معنای عرفی

Risk = probability of an accident occuring . Expected loss in case of accident

میزان انتظاری زیان حاصل از وقوع حادثه × احتمال وقوع حادثه = خطر پذیری

خطر — آسیب پذیری

Risk = Hazard . Vulnerability → در این تعریف احتمال مستتر است

و در کدام احتمال در آن مستتر است.

ریشتر — آسیب پذیری در ایران

ریسک زلزله ایران = ۳ . ۸ = ۲۴

" " ژاپن = ۸ . ۲ = ۱۶

در بعضی از فرمول ها برای Vulnerability نرخ برای ظرفیت ۱۰ کم می گذارند.

کارهایی که ما می کنیم اثر زلزله را

PAPCO

Subject
Date

disaster Management

bussiness Continuty = bcm = تداوم کسب و کار

disruption, responsiveness, reliability, ...

محیط: بخشی از سیستم نیست ولی تغییرات آن روی سیستم تأثیرگذار است.

انعطاف در اهداف و محدودیت ها : flexibility

انعطاف در داده ها و پارامترها : حالت احتمالی Randomness و Epistemic

در Randomness ماهیت پارامتر تصادفی است مثل پرتاب تاس

در Epistemic یا عدم قطعیت شناختی دچار ابهام یا Ambiguity هستیم

$Z = f(x)$

در کارهای اخیر متغیر تصمیم هم می توانند عدم قطعیت داشته باشند یعنی کسی که مسأله را Implement می کند محدوده ای را قبول دارد.

$ax \geq b$ ← عدم قطعیت در داده

از نوع

frence عدم قطعیت از جنس

سه شرط برای مدلسازی randomness :

① موجود بودن داده ها (Historical Data)

② کفایت داده ها (sufficent) ← داده ها کافی باشند.

این سه شرط برای مسائل operational و Tactical است.

③ reliability of Historical Data (قابل اعتماد بودن داده ها) ← هم داده های سال ۱۰-۸

برای مسائل استراتژیک هیچ تضمینی وجود دارد رفتار آینده از رفتار داده ها پیروی کند بلکه ممکن است کلاً pattern عوض شود.

scenario-based sto.prog می تواند سه شرط را داشته باشد.

شرایط استفاده از Epistemic :

یا آن سه شرط نباشد

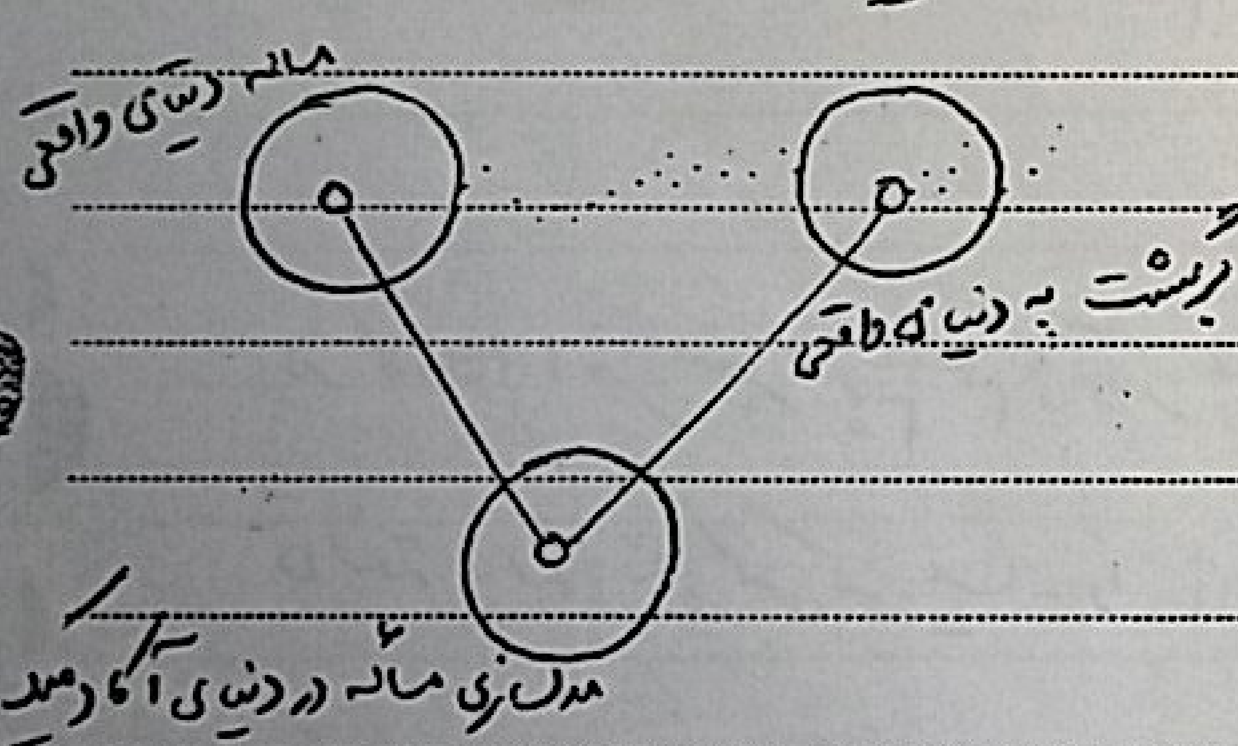
یا داده ها استراتژیک باشند.

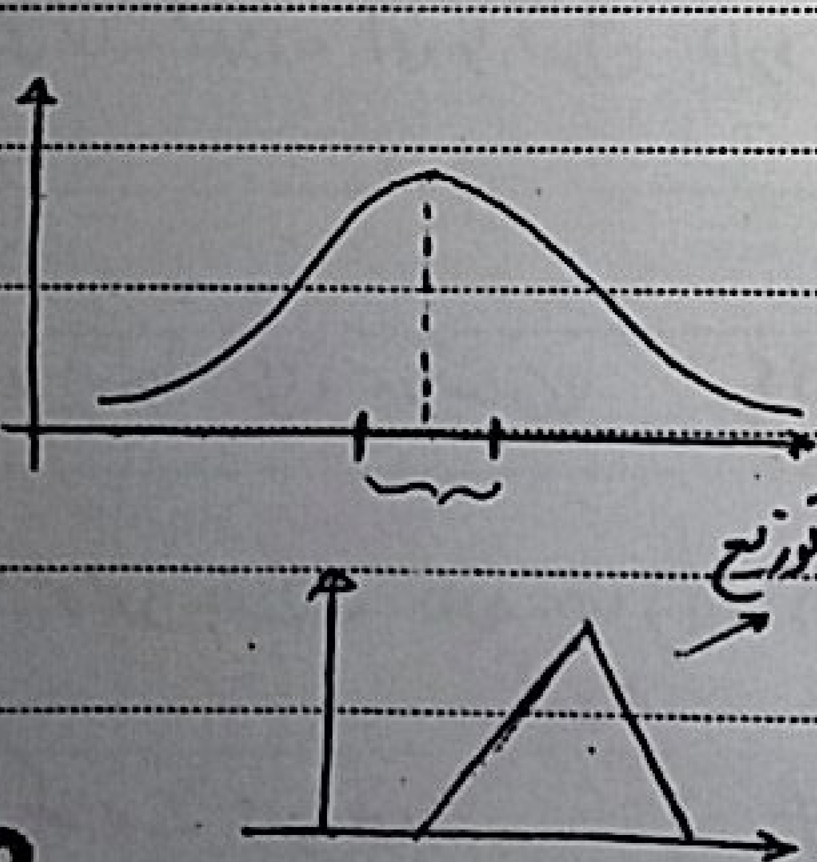
یا جنس داده دارای ابهام باشد (بحث های فازی)

عدم قطعیت معمول کسب و کار : همیشه هست با تلرانس کم

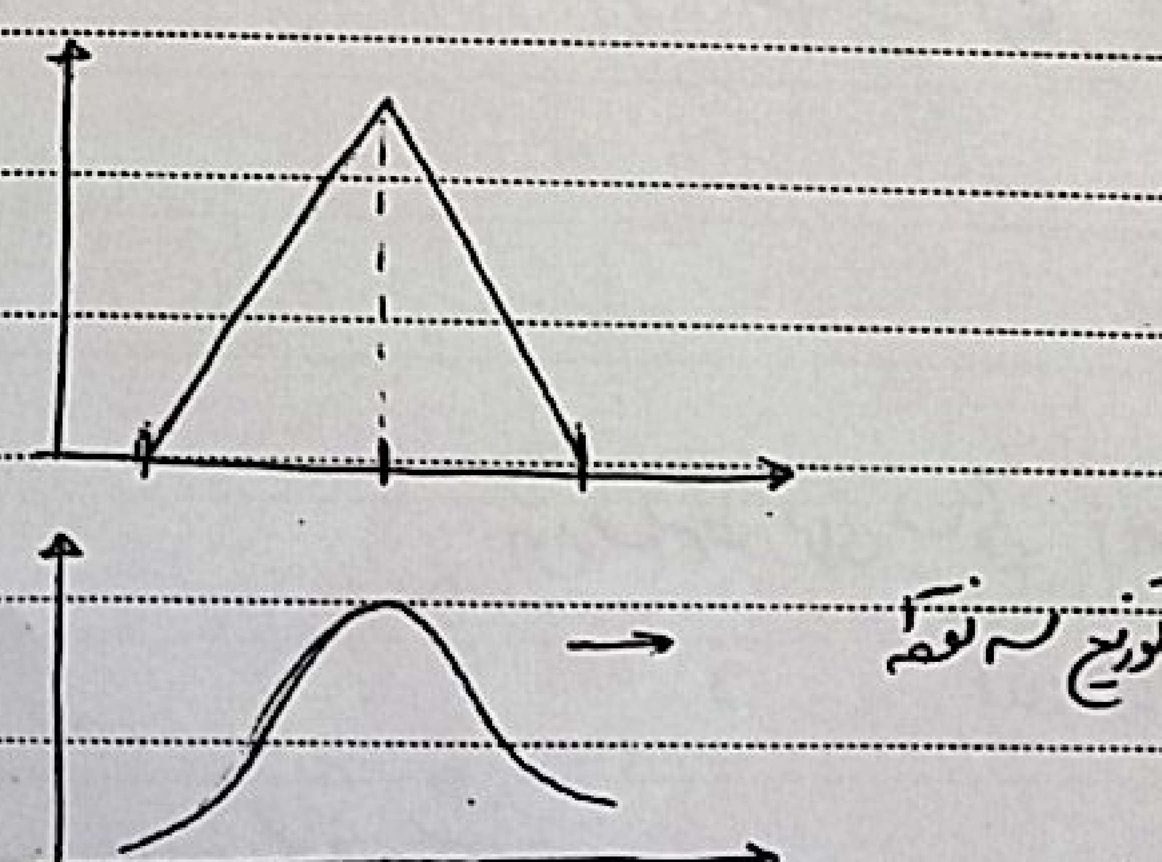
عدم قطعیت بحران : احتمال آن کم است ولی به شدت اثر زیاد

روش تحقیق V :





stochastic Fuzzy



Fuzzy stochastic

در کجا نمی‌توانیم از اصول احتمال برای مدل کردن استفاده کنیم

① قوانین مربوط به داده‌ها را نداریم.

② بعضی از وقایع اصولاً فازی هستند و در واقع syntax فازی دارند:

اصل اجتماع نقیضین برقرار نیست هرچند فازی دانان این مسئله را مطرح کردند.

دلایلی بر این مدعا:

۱- مسئله‌ای که فازی دارند در واقع به خاطر طرز بیان آن هست.

۲- در فازی هم در مرحله آخر باید فازی زدایی کرد.

۳- اگر این گزاره را بپذیریم، خود صحت آن هم زیر سوال می‌رود.

۴- جوابی به کسانی که اختیار را قبول ندارند ← بزن تو گوشش بگو من اختیار نداشتم.

هر رویکرد عدم قطعیت که تا به حال ارائه شده دو هدف داشته‌اند:

I چگونه پارامتری که دارای عدم قطعیت است تعریف گردد. (مدل کردن پارامتر)

II بعد از مدلسازی عدم قطعیت چگونه آن را بهینه کنیم ← مثل Scenario-based prog

(نحوه مواجهه)

← چیز جدیدی ارائه نداده و فقط روش بهینه‌سازی است.

Subject
Date

Soyster → Min (Max) کمینه کردن حداکثر زیان

یک جواب برای مسئله بهینه سازی، یک جواب استوار است اگر دارای دو شرط:

Feasibility Robustness استواری شدنی بودن

Optimality Robustness استواری بهینگی

رویکرد بدبینانه سخت:

شدنی بودن در تمامی حالات (در همه حالات هم بتوانند روی صندلی بنشینند)

هزینه در هیچ حالتی بزرگتر از مقدار مشخصی نشود.

✓ این رویکرد برای مواقع بدبینانه است که حاضریم هزینه زیادی بدهیم و هزینه زیاد مهم نیست مثل نیروگاه اتمی و ...

رویکرد بدبینانه نرم:

هدف و روش مشابه قبلی

کمی ریسک ~~[illegible]~~ را می پذیرد و می گویند همه حالات بدبینانه نمی توانند رخ دهند و مثلاً تعدادی حالت بدبینانه را در نظر می گیرد و در واقع کمی سر نیزه را گرد می کند.

رویکرد واقع گرایانه:

ببینیم هر حالت چقدر هزینه دارد و ما چقدر باید برای این سازی هزینه کنیم حالا ببینیم بین آن ها تعادل برقرار کنیم در این حالت ممکن است گاهی مسئله گاهی از شدنی بودن خارج شود. یعنی می پذیریم گاهی

PAPCO

گاهی به مشتری از دست می دهیم و جریمه آن را هم می دهیم.

Subject
Date

Scenario-based
Fuzzy → برای کوه مراجعه

mohamad.fazli@yahoo.com

Fuzzy Robust prog. → "آقای فضلی"

Robust in Convex-Set → "آقای شهمرادی"

hani.shahmoradi@gmail.com

PAPCO

Subject
Date ۹۲/۱۱/۲۰ یکشنبه

برنامه ریزی تصادفی : (stochastic prog.)

(گسسته) Scenario-based s.p
two - stage -
Multi-stage -

(پیوسته) probablistic s.p
chance Constrained prog. -

حالت ترکیبی

این چه حالتی است؟

$$\min \; x_1 + x_2$$

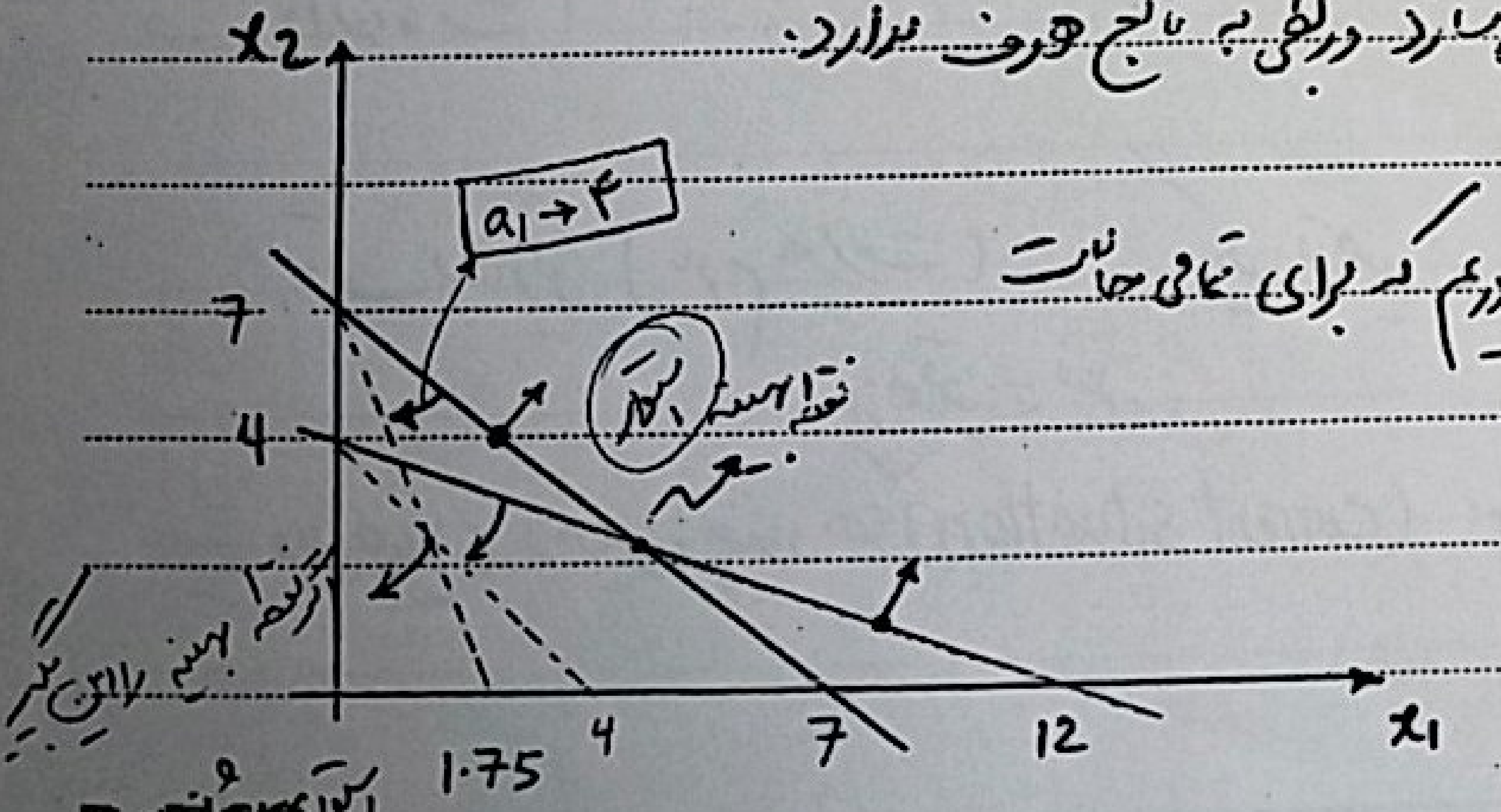
$$\tilde{a}_1 x_1 + x_2 \geq 7 \qquad a_1 \sim U[1,4]$$

$$\tilde{a}_2 x_1 + x_2 \geq 4 \qquad a_2 \sim U[1/3, 1]$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

اگر ابتدا $a_1 = 1$ و $a_2 = \frac{1}{3}$ بگذاریم و فضای جواب را رسم کنیم و سپس
$a_1 = 4$ و $a_2 = 1$ بگذاریم فضای جواب بزرگتر شده و جواب بهینه بهتر می شود.

- تصادفی بودن را فضای محدودیت ها فقط می سازد ولی به تابع هدف ربطی ندارد.



- استواری تصادفی بودن : جوابی بدست آوریم که برای تمامی حالات
↲ اغلب اوقات جواب تصادفی باشد.

استواری را ندارد.

Chance Constrained programming.

5,

$1 + 3/4\,(3)$ ✓ $\alpha_1 = 0.75$

Subject
Date

(به ازای تابع هدف دیگر به جواب بهینه شرطی است) حداکثر کردن شرطی بودن / بدترین حالت ($\alpha_1 = 1$)؛

Chance Constrained programming

کوچکترین فضای حل

حداکثر استواری شرطی بودن

$\alpha_1 = 1$

$1 \quad 4$

$P\{a_1 x_1 + x_2 \geq 7\} \geq \alpha_1 = 0.75$

Max Feasibility Robustness

توزیع احتمال

$a_1 = 1$?

Separate CCP.

$P\{a_2 x_1 + x_2 \geq 4\} \geq \alpha_2$

$P\{a_1 x_1 + x_2 \geq 7 \,،\, a_2 x_1 + x_2 \geq 4\} \geq \alpha$

Joint (integrated) CCP.

* Charners & Cooper 1959 Management Science Journal.

"Scenario-based stochastic programming"

تعریف سناریو (ادبیات): آن از جنگ و طراحی آمده: طرح کلی وضعیت طبیعی و یا مورد انتظار حوادث (داستان‌ها)

تعریف سناریو (علوم مدیریت): یک توصیف از شرایط آینده (Future Condition)

یک جریان و مسیر رخدادها از موقعیت فعلی (current situation) به موقعیت آینده (Future situation)

PAPCO

CYMERA

Subject
Date

Scenario-based S.P

Constraint — سازگار

Transparent — شفاف

Relevant — مرتبط

Important / probable — مهم / محتمل

1 → 1.1, 1.2

2 → 2.1, 2.2

3 →

سناریوها شبیه ساختار درخت

Scenario → کمی / کیفی

✓ The art of scenario & strategic planning   Tools & pitballs

ابزارها   دام‌ها

Technological & ..... Journals

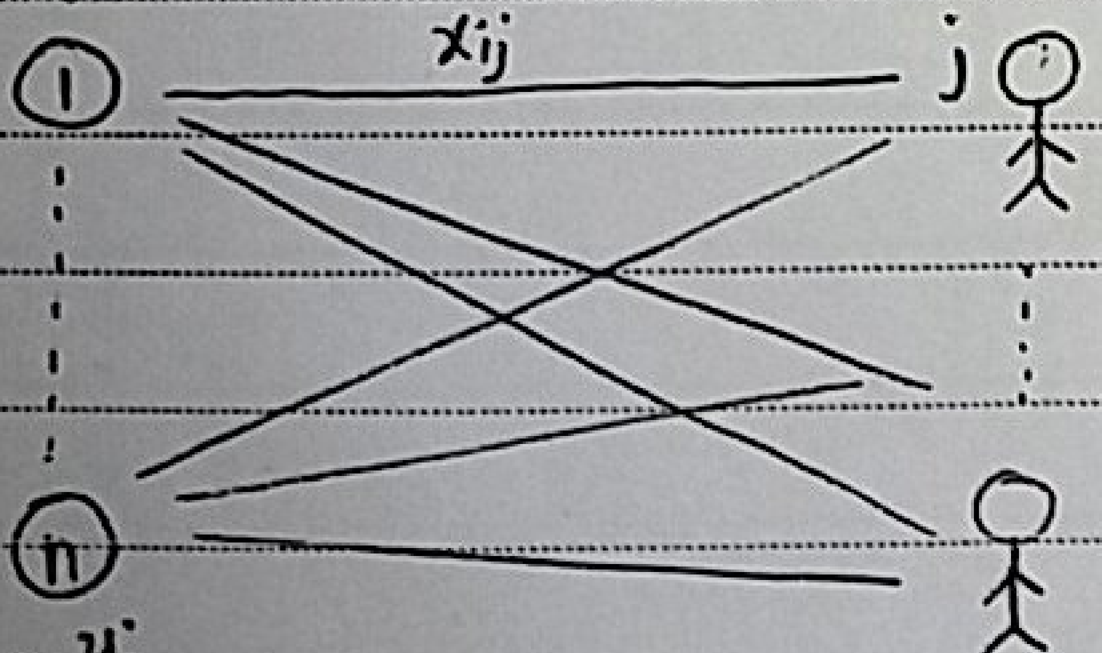
✓ مقاله دکتر شوایی (2008)

two-level
two-stage

? : two-stage Stochastic programming

✓ مسئله مکان‌یابی کارخانه در زنجیره تأمین دو سطحی (دو مرحله‌ای):

i: محل‌های بالقوه برای تاسیس کارخانه



j: محل ثابت مشتریان

f_i: هزینه‌های مربوط به احداث کارخانه در محل i

c_{ij}: هزینه حمل از کارخانه i به مشتری j

y_i: متغیر صفر و یک احداث کارخانه در محل i

PAPCO

Subject
Date

x_{ij} : متغیر پیوسته جریان کالا بین کارخانه i و مشتری j

d_j : تقاضای مشتری jام

حل مسئله مکان یابی با فرض عدم کمبود: (بدون ظرفیت)

$$\text{Min } Z = \sum_i f_i y_i + \sum_i \sum_j c_{ij} x_{ij}$$

$$\sum_i x_{ij} \geq d_{ij} \quad \forall j$$

عدد بزرگ بدون ظرفیت

$$\sum x_{ij} \leq M y_i \quad \forall i$$

$$x_{ij} \geq 0 \quad \forall i, j$$

$$y_i \in \{0, 1\} \quad \forall i$$

با فرض عدم قطعیت روی پارامتر c و d * چند سناریو داریم:

Compact form →

$$\text{Min } Z = f^T y + c^T x$$

$$x \geq d$$

$$x \geq 0 \;,\; y \in \{0, 1\}$$

θ اندیس سناریو

c_θ : هزینه حمل و نقل در سناریوی θ

π_θ : احتمال وقوع سناریوی θ

d_θ : تقاضای مشتریان در سناریوی θ

$$\sum_\theta \pi_\theta = 1$$

PAPCO

Subject جواب بهینه چطور حاصل می‌شود؟
Date

$$Z_\theta = f^T y + C_\theta^T x_\theta$$

$$E[Z_\theta] = fy + E[C_\theta x_\theta] = fy + \sum_\theta \pi_\theta C_\theta x_\theta$$

s.t: جواب نهایی Y به ازای تمام سناریوها بهینه نباشد. می‌تواند

$$A x_\theta \geq d_\theta$$

مدل همچنان انتگرال است

$$x_\theta \leq My$$

خروجی مدل : $\rightarrow x_\theta , y$

$$y \in \{0,1\} , \; x_\theta \in R^+$$

اگر هم x و هم y وابسته به سناریو باشند برنامه‌ریزی Contigency Prog. داریم

y : متغیر مرحله اول (first stage) : نمی‌تواند در سناریوهای مختلف عوض شود.

x_θ : متغیر مرحله دوم

جوابی که بدست می‌آید به ازای تمامی حالات شرنی است یعنی حداکثر شرنی بودن را می‌دهد یعنی مازاد

می‌گذارد ولی جوابی که به عنوان بهینه بدست می‌آید نمی‌توان به ازای تمام سناریو Safe Side

بهینه نباشد.

(مثل میزان موجودی ارسالی)

نکته: متغیر وابسته به هر سناریو را متغیر مرحله دوم یا Second Stage یا control Variable

گویند و متغیر مستقل از سناریو را که در هر سناریو تکرار می‌شود و قابل تغییر نیست متغیر مرحله اول یا

first stage decision یا Design Variable یا Resource گویند (مثل محل احداث کارخانه)

PAPCO

Subject
Date

روانی مسئله two-stage است که در هر مرحله حداقل یک متغیر وابسته و حداقل یک متغیر مستقل از سناریو باشد.

نکته: متغیر مرحله اول مبنای تصمیم گیری در متغیرهای مرحله دوم می باشند.

نکته: در اکثر اوقات متغیرهای استراتژیک وابسته به سناریو نیستند اما در برخی اوقات مانند مسئله وقوع بحران متغیر استراتژیک می توانند وابسته به سناریو باشند.

now and here

wait and see

$$fy + \sum_{\theta} \pi_{\theta} c_{\theta} x_{\theta}$$

نکته: احتمال سناریوها π_θ و مقدار پارامترهای وابسته به آن ها براساس اطلاعات و داده های گذشته (تاریخی) تعیین می شود. در برخی تحقیقات بیان شده که می توان مقدار پارامترها و احتمالات آن را بر مبنای نظر خبره بدست آورد.

تمرین: مرور مسئله زمین کشاورزی در کتاب bridge

یکشنبه ۹۲/۱۹/۲۷

فرق stage (مرحله) و Period (دوره)؟

stage مفهومی بالاتر از پریود می باشد و یک stage می تواند شامل چند پریود گردد.

PAPCO

$Var(x) = E[(x-\mu)^2] = E(x^2) - (E(x))^2$ واریانس

در مقاله نیست

Subject

Date $E(x) = \sum x\, p(x=x)$

چگونه متوسط عملکرد مدل را در شرایط میانگین بهینه کنیم؟ (جرقه پیدایش روبابست در سناریو.)

$\lambda \in [0,1]$

$(1-\lambda)$ $E[Z_\theta]$

$\to Z_\theta = fy + c_\theta x_\theta$ به متوسط عملکرد ربط دارد.

$\text{Min } E[Z_\theta] = fy + \sum_\theta \pi_\theta c_\theta x_\theta$

$\text{Min } \sum_\theta \pi_\theta Z_\theta +$

به کم کردن اعوجاجات ربط دارد.

$\lambda \underbrace{\sum_\theta \pi_\theta \left(Z_\theta - \sum_{\theta'} \pi_{\theta'} Z_{\theta'}\right)^2}_{Var(Z_\theta)}$

Mulvey et al 1995

$Ty + Ax_\theta \geq b_\theta$

$x_\theta \geq 0 \quad y \in \{0,1\}$

$\leq$ two-stage s.p

$Ty + Ax_\theta \leq b_\theta$

$x_\theta \geq 0 \quad y \in \{0,1\}$

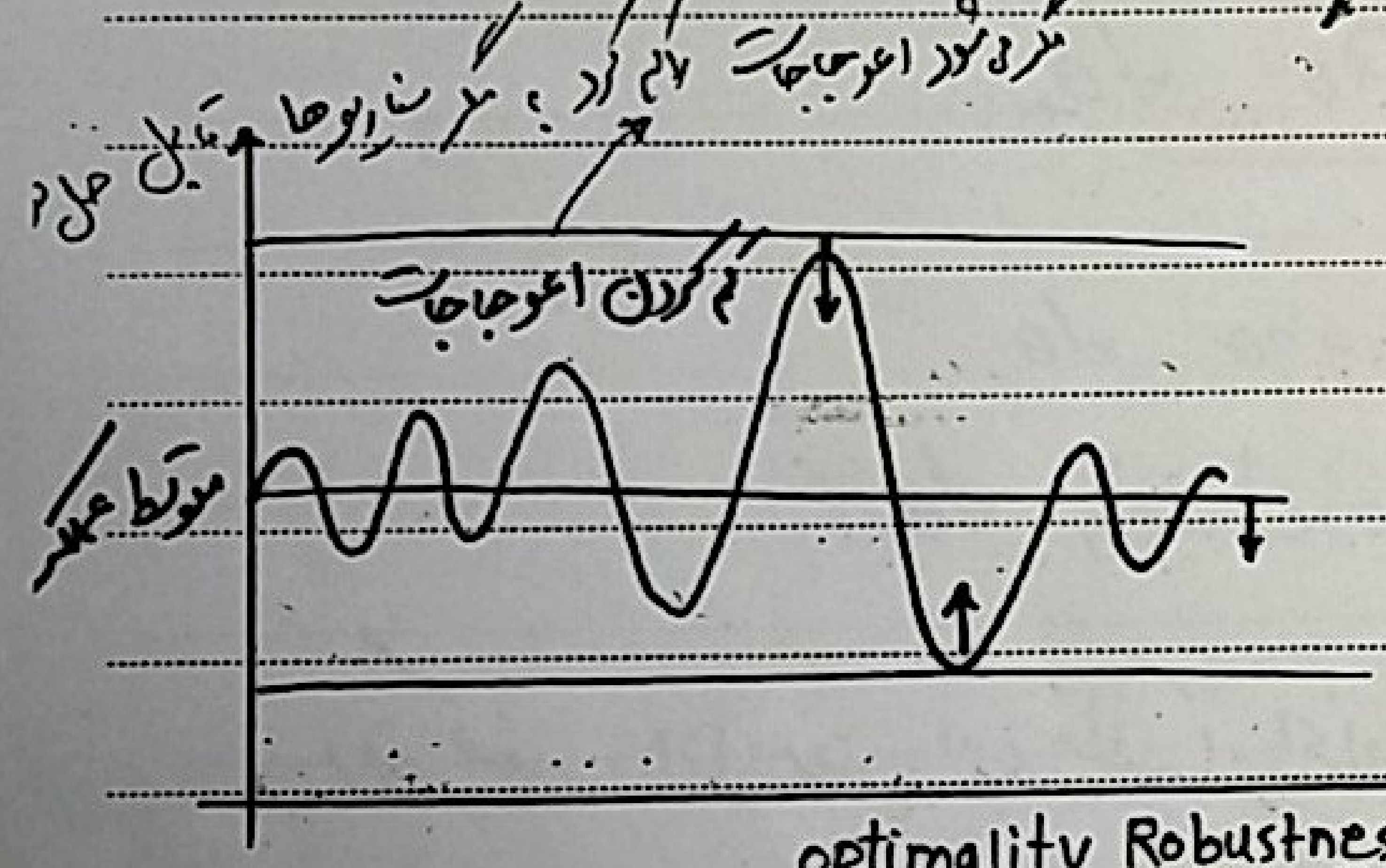
اشکالات این مدل: فقط به میانگین نگاه می‌کند.

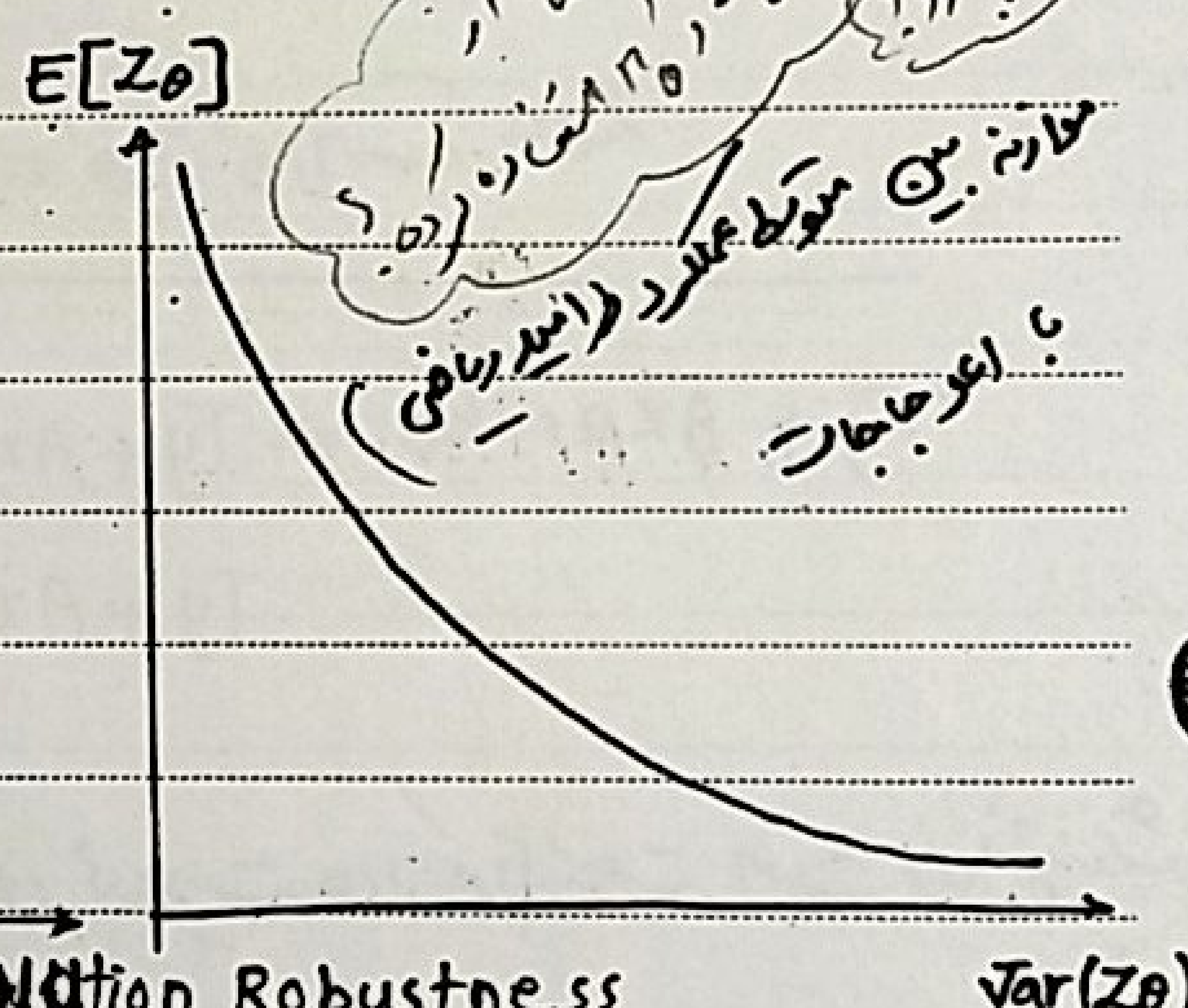
در حالاتی که حالات خوب یا بد فاصله زیادی از میانگین داشته باشد عملکرد خوب نیست.

θ' وابسته به Z_θ ، π'_θ ، Z'_θ ، π'_θ نقشی در ... ندارد

θ' جزئی از θ دارد.

مقایسه بین متوسط عملکرد (امید ریاضی) با اعوجاجات





optimality Robustness = solution Robustness

$$\text{Min } \lambda \underbrace{\sum_\theta \pi_\theta Z_\theta}_{E[Z_\theta]} + (1-\lambda) \underbrace{\sum_\theta \pi_\theta \left(Z_\theta - \sum_{\theta'} \pi_{\theta'} Z_{\theta'}\right)^2}_{Var(Z_\theta)} + w \sum_\theta \pi_\theta (\varepsilon_\theta)^2$$

$w > 0$ model Robustness

Feasibility Robustness

میزان لغو یا کمبود

مثلاً تقاضای مشتری یا بیمار و ...

$Ty + Ax_\theta + \varepsilon_\theta \geq b_\theta$

جریمه موارد نقض به ازای نقض یک محدودیت مجاز یک سناریو

مقدار خطا یا نقض شدن در سناریوهای مختلف

$\varepsilon_\theta, x_\theta \geq 0, \quad y \in \{0,1\}$

PAPCO

موازنه بین متوسط عملکرد (امید ریاضی) و انحرافات معیار از متوسط عملکرد با مقدار نقض شدن (جریمه) سناریوهای مختلف

Subject
Date

یکی از مشکلات این مدل غیرخطی بودن آن است.

Lu and Li 2000

Leung et al. 2007 $\rightarrow$ توسعه مدل قبلی برای خطی کردن آن

Lu and Li:

$$\text{Min } \lambda \sum_{\theta} \pi_\theta Z_\theta + (1-\lambda) \sum_{\theta} \pi_\theta \underbrace{\left| Z_\theta - \sum_{\theta'} \pi_{\theta'} Z_{\theta'} \right|}_{Q^+_\theta + Q^-_\theta}$$

$$+ w_\theta \sum \pi_\theta \underbrace{|\varepsilon_\theta|}_{\varepsilon^+_\theta + \varepsilon^-_\theta}$$

$$\text{s.t.:} \quad x, y \in F(x, y)$$

غیرخطی است

$$Z_\theta - \sum \pi_{\theta'} Z_{\theta'} = Q^+_\theta - Q^-_\theta \quad \forall \theta$$

$$Ty + Ax_\theta = b_\theta \Rightarrow Ty + Ax_\theta + \varepsilon_\theta = b_\theta \quad \forall \theta$$

$$Ty + Ax_\theta - b_\theta = \varepsilon^+_\theta - \varepsilon^-_\theta \quad \forall \theta$$

فرض کنید DM روی این مطلب که انحراف روی نقض محدودیت ها از کدام سمت است ذی نفع باشد.

یعنی از نظر DM فرق کند انحراف مثبت است یا منفی. اون وقت مدل زیر ایجاد می شود:

$$\sum_\theta \pi_\theta \big(\underset{\downarrow \; w^-_\theta}{w^-} \varepsilon^-_\theta + \underset{\downarrow \; w^+_\theta}{w^+} \varepsilon^+_\theta \big)$$

می شود روی علامت جریمه بحث کرد یا خیر؟ به خصوص در حالتی که دو جریمه داریم و محدودیت مساوی داریم.

PAPCO

محدودیت سازی در حالت عدم قطعیت بسیار کمک دارد و شاید بی دلیل از محدودیت سازی استفاده کرد.

Subject
Date
سه‌شنبه

عیب‌های Scenario-based S.P :

۱- تعداد سناریوها (که زیاد است و باید کم شود) چون تعداد سناریوها خیلی بالا می‌رود پس پیچیدگی مسئله بالا می‌رود
۲- گسسته مدل کردن عدم قطعیت / مدلسازی Crude = سرد و تلخ)

روش‌های کاهش تعداد سناریوها:

Sample Average Approximation (SAA)

Clustering

✓ SAA :

- چه توزیع احتمالی
تبدیل به سناریوهای گسسته از طریق مونت کارلو

- روش تکراری است یعنی الگوریتم تکرار می‌شود تا به تعداد مورد نیاز سناریو برسیم.

- مدلسازی بر اساس تعداد بسیار کم سناریوها

- SCND ، دارای ۵۰ تسهیل ، ۳ سطح محلیتی غیرقطعی (تعداد سناریوها 3^{50})

- برای حل مسائل احتمالی (Probabilistic prog.) ← انتگرال‌های چندگانه در تابع هدف

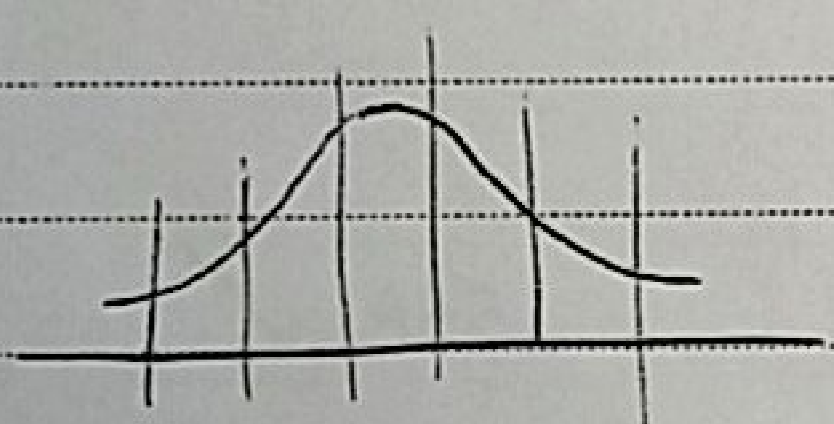
برای حل ← تبدیل به سناریوهای گسسته (شبیه‌سازی مونت کارلو نسبت به توزیع احتمالی)

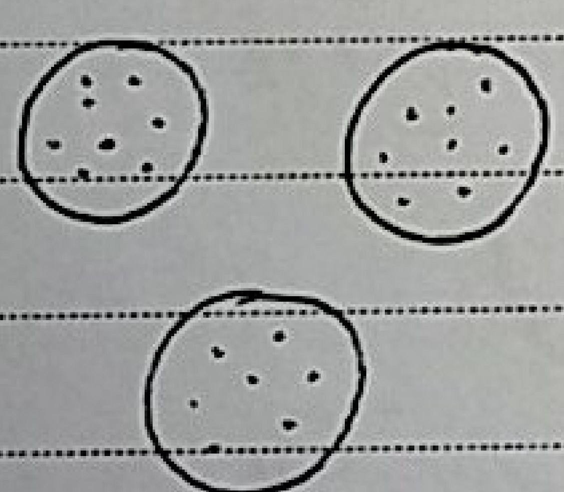
① حل دقیق این مسائل با توزیع احتمالی مشخص، نیاز به انتگرال‌گیری چندگانه است که در سطح مسائل بزرگ امکان‌پذیر نیست
② این مسائل فضای محدب غیرخطی دارند و در برخی مسائل متغیر باینری هم در مسأله داده شده و عملاً نمی‌توان
PAPCO
این مسائل را انجام داد.

- روش SAA ، روش مبتنی بر شبیه سازی مونت کارلو هست، که از آن برای کاهش تعداد سناریوها در حالتهای با توزیع احتمالی معلوم و مبتنی بر سناریو.

ایده اصلی مبتنی بر ~~...~~ تولید نمونه تصادفی و تقریب زدن امید ریاضی تابع احتمالی توسط تابع میانگین نمونه است.

براساس این که داده های غیرقطعی چه توزیعی دارد از روش مونت کارلو تعدادی سناریو تولید می کنیم و سناریوهایی که میانگین نزدیک به هم دارند را در یک خوشه قرار می دهیم





? فرض کنید مسئله "sp" بهینه سازی بصورت زیر باشد:

W : یک بردار تصادفی که توزیع احتمالی مشخص دارد.

امید ریاضی

$$\text{I)}\quad \mathrm{Min}\{g(x) = E_p\, G(x,W)\}$$

$G(x,W)$: تابع هدف (شامل دو متغیر x و W)

True problem

$x \in S$

فرض کنید جواب بهینه مسئله I) $v^*(I)$ باشد:

منبع اصلی) The Sample Average Approximation method for stochastic Discrete optimization, SIAM, opt

در این حوزه مقالات آقای shapiro خیلی خوب است.

$$E_p\, G(x,W) = \int G(x,W)\, dw$$

- فرض کنید $w^1, w^2, \dots, w^n$ نمونه تصادفی مستقل و یکسان $(i.i.d)$ از بردار تصادفی W تولید کردیم.

$$W^1 = (d^1, a^1, b^1)$$

تقاضای غیرقطعی — هزینه حمل و نقل غیرقطعی — هزینه پردازش غیرقطعی

- حال تابع میانگین نمونه را بصورت زیر در نظر بگیرید:

$$\hat{g}_N(x) = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^{N} G(x, w^j)$$

$$\text{II)} \min_{x \in S} \hat{g}_N(x) \longrightarrow \text{SAA problem} \qquad E(\hat{g}_N(x)) = g(x)$$

میانگین نمونه بهترین برآورد کننده

جواب بهینه $\hat{x}_N$ باشد.

- تعریف ε - Optimal Solution در مجموعه جوابهای S برای هر $\varepsilon \geq 0$، می‌گوییم $\bar{x}$ یک جواب ε - optimal است اگر $\bar{x} \in S$ و $g(\bar{x}) \leq v^* + \varepsilon$ باشد.

مجموعه جوابها را بصورت S^{ε} در مسئله (I) و $\hat{S}_N^{\varepsilon}$ در مسئله (II) نشان می‌دهیم.

- تخمین N برای شروع SAA:

$|S|$: اندازه مجموعه S (به عنوان مثال در یک مسئله SCND اگر تعداد تسهیلات m تا باشد آنگاه $|S| = 2^m$).

Subject
Date

چون $|S|=2^m$ است پس ضرایب log گرفتن پیچیدگی مسأله به شدت کاهش می یابد.

$$N \geq \frac{3\,\sigma_{max}^2}{(\varepsilon-\delta)^2}\log\left(\frac{|S|}{\alpha}\right)$$

$$\sigma_{max}^2 = \max Var\left[G(x^*,w) - G(x,w)\right]$$

σ_{max}^2 : حداکثر تغییرپذیری تابع هدف

α : سطح معناداری ($1-\alpha$ درصد اطمینان هست که با N سناریو جواب δ-optimal

برای مسأله II بدست می آید.)

$\delta = 0$

$\varepsilon = 0.05$

- برای تخمین N، باید موازنه بین پیچیدگی حل مسأله و صحت جوابهای بدست آمده در نظر گرفته شوند.

در ضمن N بیشتر منجر به جواب دقیق تر هم می شود.

الگوریتم "SAA":

گام اول: خوشه های مستقل M تایی هرکدام شامل N سناریو تولید می کنیم. (M خوشه N تایی)

N در ابتدا معلوم نیست و لحظه ای در نظر گرفته می شود.

$(w_j^1, w_j^2, \dots, w_j^N)$ for $j=1,\dots,M$

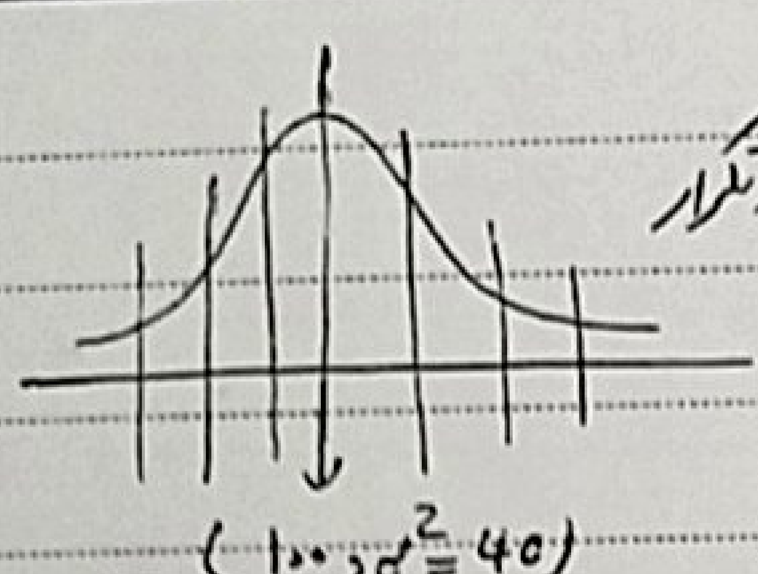
برای هر خوشه، مسأله SAA (II) حل کنید و $\hat{v}_N^j$ و $\hat{x}_N^j$ را بدست آورید.

$N=20 \quad M=30$

- انتخاب N و M بالا باعث صحت بیشتر جوابها می شود و نیز پیچیدگی حل مسأله هم بالا خواهد رفت.

PAPCO

Subject
Date



منظور از خوشه این نیست که دو خوشه مثلاً میانگین متفاوتی دارند بلکه یعنی در دو تکرار

مثلاً میانگین تعداد خوشه ها

$M = 2$
$N = 5$

۱۰۱ ۱۰۲ ۹۹ ۱۰۳ ۹۸ → $\hat{v}_5^1 = 100$

۱۰۰ ۱۰۱ ۹۹ ۱۰۲ ۹۵ → $\hat{v}_5^2 = 105$

تعداد تکرارها را می دهد

گام دوم: متوسط مقادیر دسته ها و واریانس آنها را به شرح زیر حساب کنید:

$$\bar{v} = \frac{1}{M}\sum_{j=1}^{M} \hat{v}_N^j$$

$$\sigma^2_{\hat{v}_{N,M}} = \frac{1}{(M-1)M}\sum_{j=1}^{M}\left(\hat{v}_N^j - \bar{v}_{N,M}\right)^2$$

Operation Research letter 24 (1999) 47-56 مقاله

*) ثابت شده است که متوسط مقادیر $\hat{v}_N$ (یعنی $\bar{v}_{N,M}$) کوچکتر یا مساوی با v^* مسأله (I) است. بنابراین $\bar{v}_{N,M}$ یک حد پایین برای v^* (مسأله I) خواهد بود.

گام سوم: یک جواب شدنی ($\bar{x} \in S$) انتخاب کنید. برای این منظور می توان از یکی از جوابهای $\hat{x}_N^j$ استفاده کرد که گام اول بدست آمده است. یا می توان مسأله را به ازای $N' \gg N$ یک جواب شدنی بدست آورد. این برآورد یک حد بالا برای مسأله اصلی (I) خواهد بود، زیرا یک جواب شدنی است.

گام چهارم: با توجه به تخمین هایی که برای حد پایین و بالا در گام ۲ و ۳ بدست آمده اند Gap را تعیین کنید.

Subject
Date

$$Gap_{N,M,N'} = \hat{g}_{N'}(\bar{x}) - \bar{v}_{N,M} \longrightarrow \text{Overstimate}$$

$$\sigma^2_{Gap} = \sigma^2_{N'}(\bar{x}) + \sigma^2_{\bar{v}_{N,M}}$$

$$\sigma^2_{N'}(\bar{x}) = \frac{1}{(N'-1)N'} \sum_{n=1}^{N'} \left(Gap(\bar{x}, w^n) \right)$$

<u>گام پنجم</u>: اگر تخمینی Gap و واریانس آن زیاد است، پس N و N' را افزایش دهید، گام ① تا ④ را تکرار کنید. در غیر این صورت به گام ⑥ بروید. (تعداد کل سناریوها = $M \times N$)

<u>گام ششم</u>: جواب $\bar{x}$ و $\hat{g}_{N'}(\bar{x})$ را به عنوان جواب بهینه و تخمین مقدار بهینه تابع هدف اعلام کنید.

- البته در صورت برقراری شرط خاتمه، می‌توان یک یا زیرمجموعه‌ای از جواب‌ها را انتخاب کرد.

منبع: Multiple Comparison procedure, (John Wiley 1987)

مقاله آقای Shapiro در سال "2005" به توجه روی کارهای بالا می‌باشد.

<u>نکته</u>: تخمین زننده Gap نقش اساسی در رسیدن به جواب بهینه ایفا می‌کند. به عنوان مثال تخمین کننده زیر در مقاله معرفی شده آمده است و نتایج بهتری نسبت به تخمین کننده قبلی دارد:

Subject

Date

$$\underbrace{\bar{g}_N^M(\hat{x}) - \bar{v}_N^M}$$

بنابراین به ازای M×N مسئله باید به صورت یکجا حل شود

$$\bar{g}_N^M(\hat{x}) = \frac{1}{M}\sum_{m=1}^{M} \hat{g}_N^j(\hat{x})$$

$$\hat{g}_N^j(\hat{x}) = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}\left(G(\hat{x}, w^{jj})\right)$$

$$\operatorname{Var}\left(\bar{g}_N^j(\hat{x}) - \bar{v}_N^M\right) = \frac{1}{M(M-1)}\sum_{j=1}^{M}$$

$$\left(\left(\hat{g}_N^M(\hat{x}) - \hat{v}_n^j\right) - \left(\bar{g}_N^M(\hat{x}) - \bar{v}_N^M\right)\right)^2$$

روش دوم:

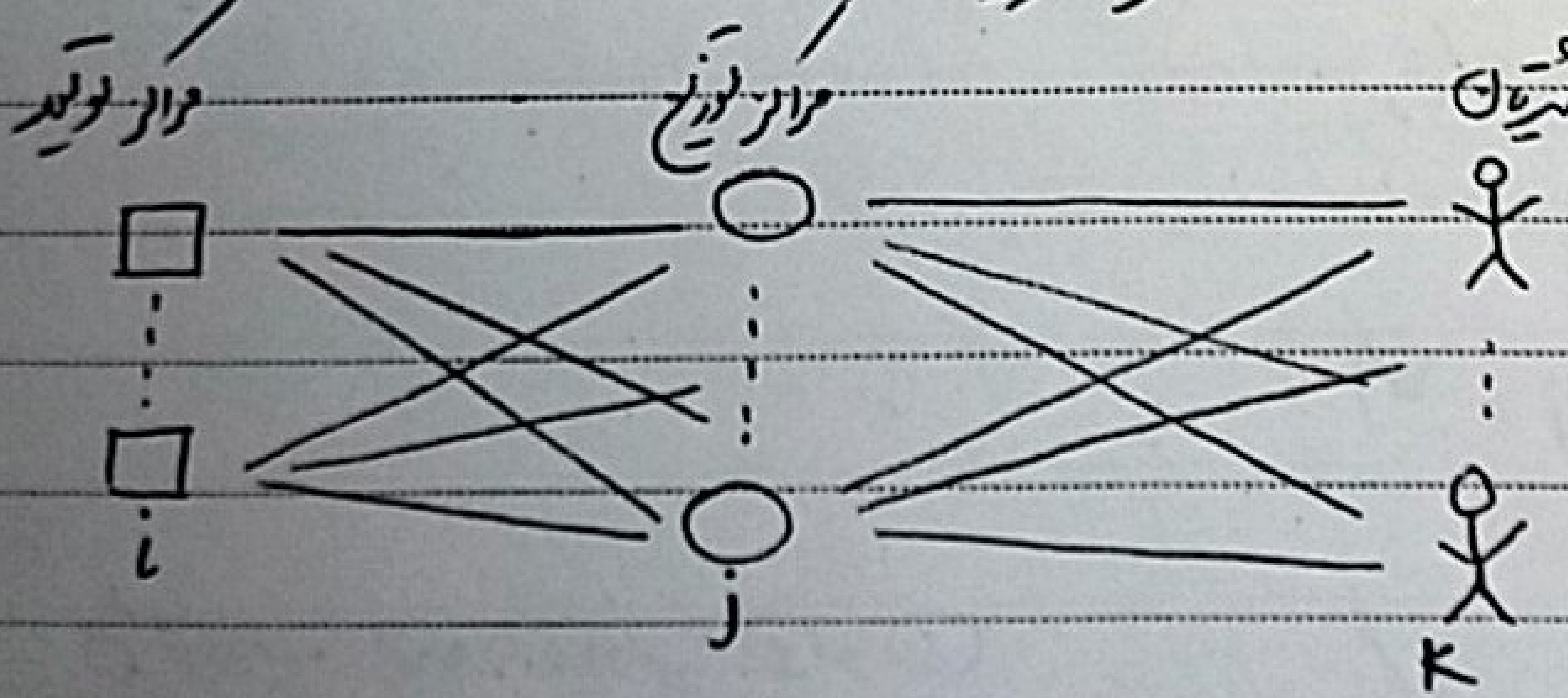
EJOR (2013) - 26-41 , Mirzapour - Al Hashem

تا اول اردیبهشت = نوشتن مدل و مشخص کردن پارامترهای عدم قطعیت + مرور ادبیات + رویکرد نقد مرور ۱

یکشنبه ۹۲/۱۲/٤

مثال کارخانه تولیدکننده الوار:

۳ تولیدکننده + به ازای استانهای کشور خودش مشتری دارد.



سه کارخانه → آذربایجان شرقی

اصفهان

کرمان

Supply chain Network Design (SCND)

یک زنجیره تامین تولید الوار MDF → کابینت

در

...

Subject
Date

۱۰ محله بالقوه در ۱۰ استان برای احداث مرکز توزیع.
در ۳۲ استان کشور مشتری دارد.

d_k : تقاضای مشتری k

g_j : هزینه ثابت احداث مرکز توزیع j — x_{ij} : جریان کالا از i به j

c_{ij} : هزینه حمل و نقل بین i و j (از i به j)

a_{jk} : " " از j به k — u_{jk} : جریان کالا از j به k

cw_i : ظرفیت مرکز تولید i

$$y_j = \begin{cases} 1 & \text{اگر مرکز توزیع در } j \text{ احداث شود} \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

cy_j : " " توزیع j

$$\text{Min} \sum_j g_j y_j + \sum_i \sum_j c_{ij} x_{ij} + \sum_j \sum_k a_{jk} u_{jk}$$

s.t:

$$\sum_j u_{jk} \geq d_k \quad \forall k,$$

$$\checkmark \sum_i x_{ij} - \sum_k u_{jk} = 0 \,, \forall j,$$

$$\sum_j x_{ij} \leq cw_i \,, \forall i,$$

$$\checkmark \sum_k u_{jk} \leq cy_j \, y_j \,, \forall j$$

$$\cancel{\sum x_{ij} \leq y_j \, cy_j \,, \forall j} \rightarrow$$ این محدودیت از روی محدودیت ۲ و ۴ ایجاد می شود و زائد است

$$y_j \in \{0,1\} \,, \forall j \qquad x_{ij} \,, u_{jk} \geq 0 \quad \forall i,j,k$$

PAPCO

Subject:
Year. Month. Date. ( )

File → option → Solver → سطر = solver

$Title = اسم مدل

option MIP = cplex (قرار بده cplex را MIP مسئله solver) → همین کار را در solver legend می‌شد درست کرد.

Gams → project directory

اگر آخر کد دستور display d را بگذاریم مقدار d را که از اکسل میخواند نتایج هم می‌دهد.

✓ دو دستور کلیدی دیگر:

deterministic.optCR = 0; → باعث می‌شود کد تا حد بهینگی مسئله را حل کند. criteria = 0

deterministic.reslim = 100000 → به صورت پیش‌فرض گمز در ۱۰۰۰ ثانیه حل مسئله را قطع می‌کند
پس باید برای مسائل نیاز خودمان این را تعیین می‌کنیم.

گزارش تولید شده با پسوند lst

البته گاهی اوقات لازم داریم تکرار دفعات تکرار Solver را بالا ببریم در صورت حل کردن (پیش‌فرض ۱۰۰۰)

---

you et al. 2009 (Elsevier) یک مسئله two stage در برنامه‌ریزی تولید

Ω مجموعه سناریوها $\theta \in \Omega$

$d_{k\theta}$ تقاضای مشتریان k در سناریوی θ

π_θ احتمال سناریوی θ

$x_{ij\theta}$
$y_{jk\theta}$ ← متغیرهای مرحله دوم

PAPCO

Subject:
Year. Month. Date. ( )

$$\text{Min} \sum_j g_j y_j + \sum_\theta \sum_i \sum_j \pi_\theta c_{ij} x_{ij\theta} + \sum_\theta \sum_j \sum_k \pi_\theta a_{jk} u_{jk\theta}$$

s.t.:

$$\sum_j u_{jk\theta} + \cancel{\delta_{k\theta}} \geqslant d_{k\theta} \quad \forall k,\theta$$

لغو

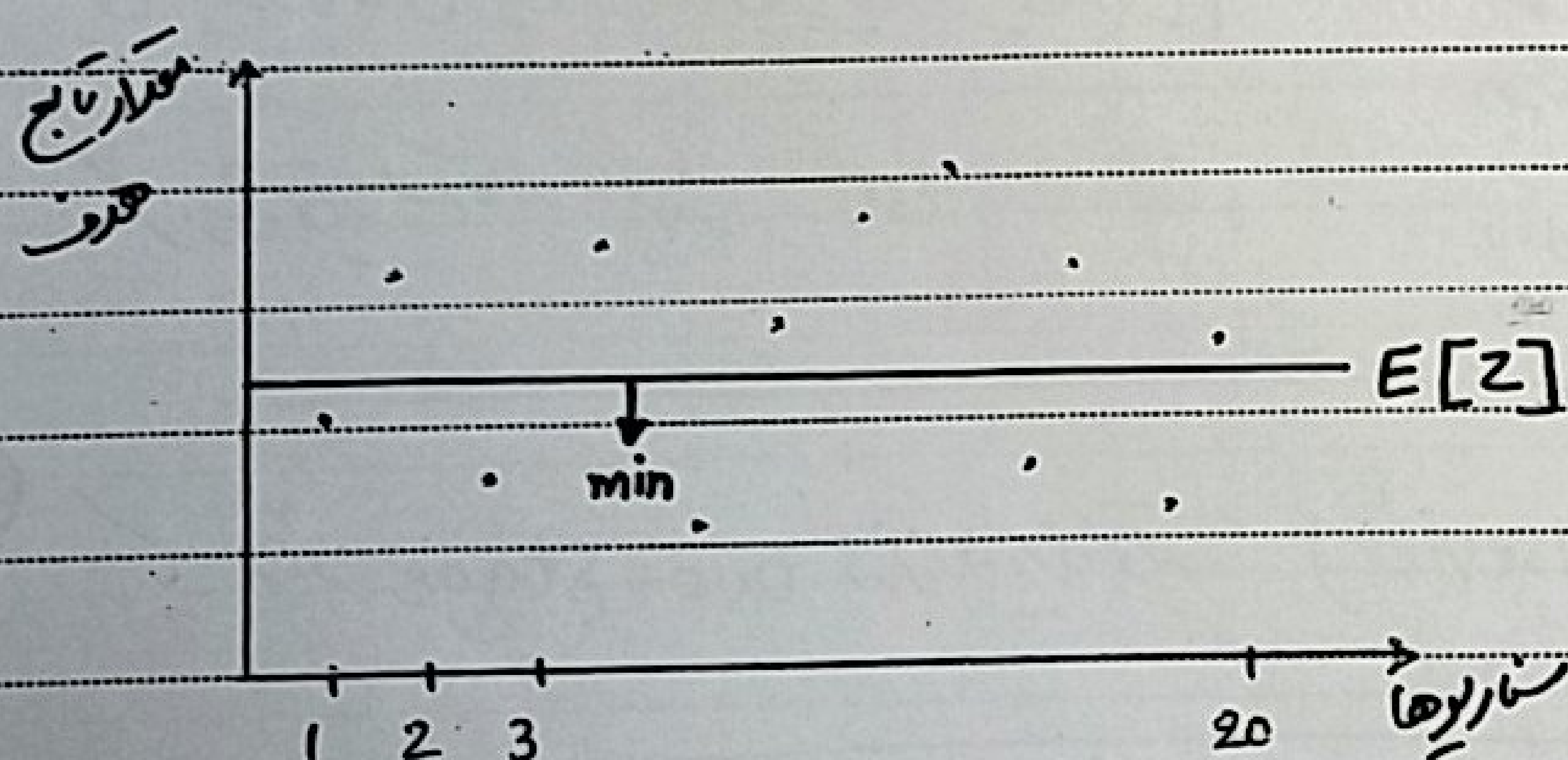
چون مدل ریالی نیست = و از آن حذف کرد.

$$\sum x_{ij\theta} \leqslant cw_i \quad \forall i,\theta$$

$$\sum_i x_{ij\theta} - \sum_k u_{jk\theta} = 0 \quad \forall j,\theta$$

$$\sum u_{jk\theta} \leqslant y_j \, cy_j \quad \forall j,\theta$$

$y_j, \dots$



"Benders Decomposition, lograngean relation & Methaheuristic design" 2009, J

PAPCO

$E[Z]$,

$$\text{Min} \sum_j g_j y_j + \sum_\theta \sum_i \sum_j \pi_\theta c_{ij} x_{ij\theta} + \underbrace{\sum_\theta \sum_j \sum_k \pi_\theta a_{jk} u_{jk\theta}}$$

کنترل استواری بهینگی ← انحراف معیار

کنترل استواری شدنی بودن

$$+ \lambda \sum_\theta \pi_\theta (\underbrace{pVar_\theta}_{Q_\theta^+} + \underbrace{nVar_\theta}_{Q_\theta^-}) + \sum_k \sum_\theta \pi_\theta b_k \delta_{k\theta}$$

$$\text{s.t.:} \quad \sum_j u_{jk\theta} + \delta_{k\theta} \geq d_{k\theta} \quad \forall k, \theta$$

$$\sum_i x_{ij\theta} = \sum_k u_{jk\theta} \quad \forall j, \theta$$

$$\sum_j x_{ij\theta} \leq cw_i \quad \forall i, \theta$$

برای خطی سازی مدل قدر مطلق :

$$\sum_i x_{ij\theta} \leq y_j \, cy_j \quad \forall j, \theta$$

θ' مثل θ است ولی چون روی θ است θ' می نویسیم در واقع روی کانتر θ می خواهیم دوباره کانتر بنویسیم.

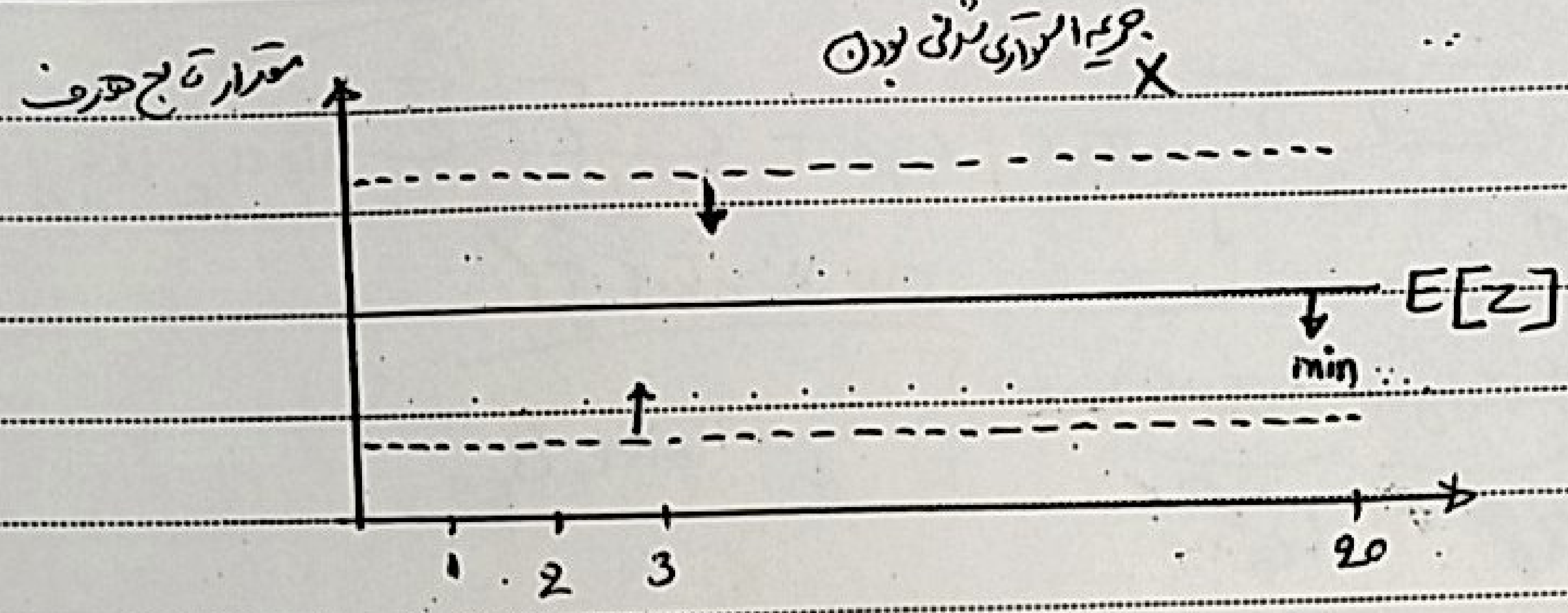
$$Z_\theta - \sum_{\theta'} \pi_{\theta'} Z_{\theta'} = pVar_\theta - nVar_\theta \quad \forall \theta$$

$$Z_\theta = \sum_j g_j y_j + \sum_i \sum_j c_{ij} x_{ij\theta} + \sum_j \sum_k a_{jk} u_{jk\theta} \quad \forall \theta$$

$$y_j \in \{0, 1\} \quad \forall j \qquad x_{ij\theta}, u_{jk\theta}, Z_\theta, pVar_\theta, nVar_\theta \geq 0$$

$$\forall i, j, k, \theta$$

Subject:
Year. Month. Date. ( )



$$Z_1 = E[Z_\theta]$$

نگر

در مدل

اگر قبل از محدودیت علامت * بگذاریم آن محدودیت غیرفعال می‌گردد و باید در برنامه کدنویسی هم غیرفعال گردد.

* Const (1)

مقاله

Leung et al 2007 (درسایت)

خطی‌سازی که ما با دو متغیر (ای) داریم را با تک متغیر (ای) داده است. (خطی‌سازی قدر مطلق)

تک متغیر

$$\text{Min} \sum_\theta \pi_\theta Z_\theta + \lambda \sum_\theta \pi_\theta \Big(Z_\theta - \sum_{\theta'} \pi_{\theta'} Z_{\theta'} + 2u_\theta \Big) + \sum_\theta \pi_\theta w_\theta \varepsilon_\theta$$

s.t:

میزان نقض محدودیت

$$Z_\theta = fy + \pi_\theta c_\theta x_\theta \quad \forall\theta$$

$$Ax_\theta + Ty \geq b_\theta \ , \forall\theta \xrightarrow[\text{لغزش}]{\text{اضافه کردن}} Ax_\theta + Ty + \varepsilon_\theta \geq b_\theta \quad \forall\theta$$

$$Z_\theta - \sum_{\theta'} \pi_{\theta'} Z_{\theta'} + u_\theta \geq 0 \quad \forall\theta$$

اگر عبارت منفی باشد u مقدار می‌گیرد

$$y \in \{0,1\} \qquad x_\theta, u_\theta \geq 0 \quad \forall\theta$$

PAPCO

Subject:
Year. Month. Date. ( )

$|x-y|$

۳ - ۱ $u=0$

۱ - ۳ $u = 2\times 2 \rightarrow$ ۲

Case 1: if $Z_\theta - \sum_{\theta'} \pi_{\theta'} Z_{\theta'} \geq 0$

then $u_\theta = 0 \rightarrow \sum_\theta \pi_\theta Z_\theta + \lambda \sum_\theta \pi_\theta \left(Z_\theta - \sum_{\theta'} \pi_{\theta'} Z_{\theta'}\right)$

Case 2: if $Z_\theta - \sum_{\theta'} \pi_{\theta'} Z_{\theta'} < 0$

then $u_\theta = \sum_{\theta'} \pi_{\theta'} Z_{\theta'} - Z_\theta$

$$\Rightarrow \sum_\theta \pi_\theta Z_\theta + \lambda \sum_\theta \pi_\theta \left(\sum_{\theta'} \pi_{\theta'} Z_{\theta'} - Z_\theta \right)$$

تمرین: برای مسئله تشریح داده شده سر کلاس (انبار تولید MDF) با در نظر گرفتن عدم قطعیت برای پارامترهای d و c (تقاضا و هزینه) در حالت سناریو-بیس با لحاظ کردن ۶ سناریو (برای d، ۶ سناریو اول گفته شده و برای c، ۶ سناریو تولید شود $10 < c < 20$ به صورت گسسته و با مدل آخر که مسئله ۲ داشت به کار گردد). نقض شدن محدودیت تقاضا از بالا و پایین فرق می‌کند. پس محدودیت به مساوی تبدیل گردد و هزینه نقض بالا و پایین متفاوت گردد. مقایسه نتایج با.

حالت two-stage

ارسال ایمیل لطفاً: hani.shahmoradi.ie@gmail.com

PAPCO

۳

15/

Subject:
Year. Month. Date. ( )

یکشنبه

۹۲/۱۲/۱۱

حالت Worst-Case (مبتنی بر سناریو)

استواری شدنی بودن را برای تمامی حالت ها تضمین می کند (حداکثر استواری شدنی بودن)

از نظر استواری بهینگی روی بدترین حالت تمرکز می کند (و این به این معنی نیست که با بهینه کردن بدترین حالت از نظر Average هم به جواب خوبی برسیم.)

- حساسیت بالا نسبت به ریسک

- درجه اطمینان حداکثری در تصمیم گیری برای ایستادن در لبه ایمن

- مناسب برای مواردی که هزینه ریسک بسیار بالاست مانند: کاربردهای نظامی، امداد و نجات و ...

$$\text{Min}\left[\max_{\theta}\left(fy + c_\theta x_\theta\right)\right]$$

s.t:

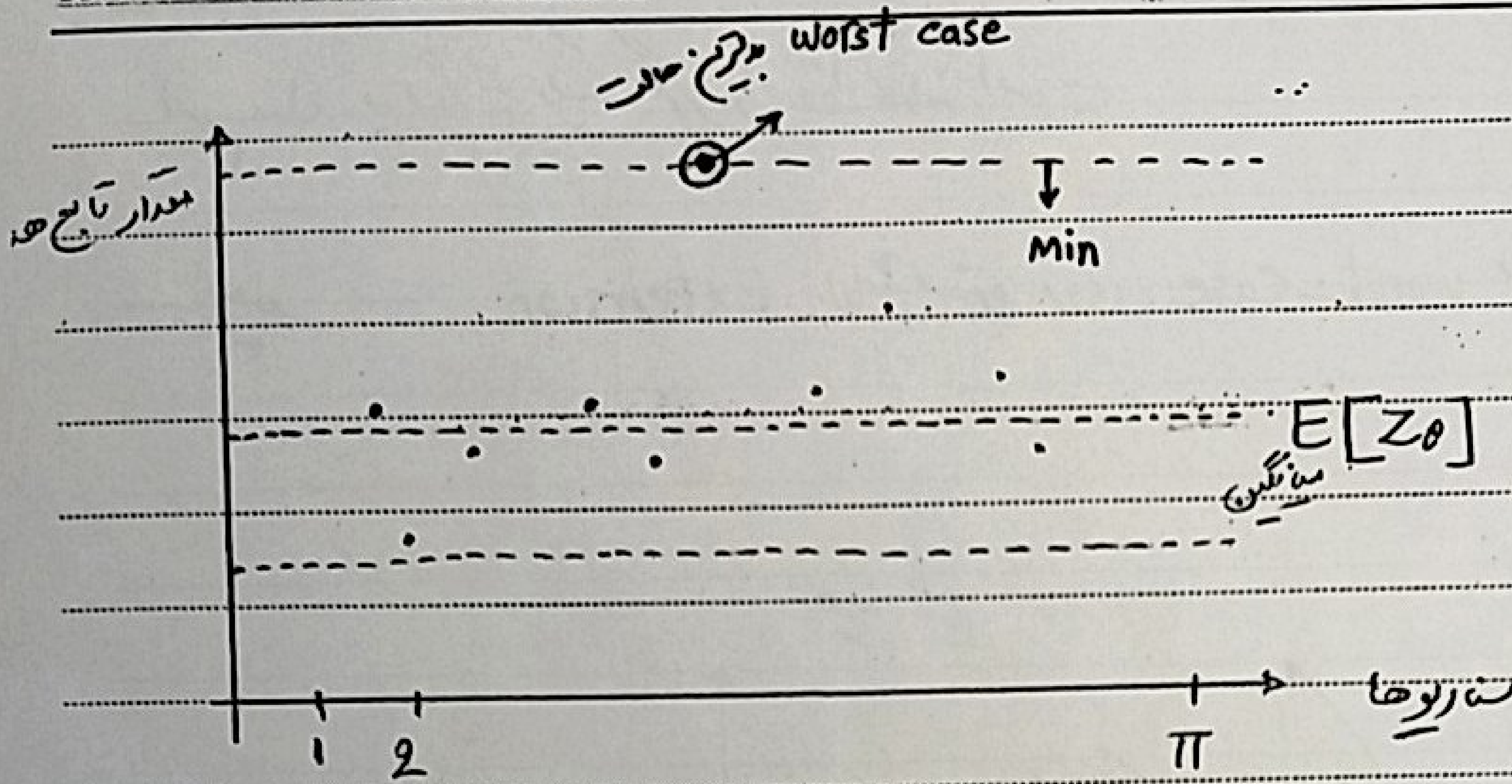
$$x, y \in F(x,y)$$ فضای شدنی مساله

$$\text{Min } Z$$

$$fy + c_\theta x_\theta \leq Z$$

$$x, y \in F(x,y)$$

Subject:
Year. Month. Date. ( )



اولین ویژگی رویکرد این است که هزینه بالایی دارد که داده های ایمنی چون بدترین حالت را بهینه می کنند:

نکته:

① هزینه تصمیم تحت پارامترهای ایمنی نسبت به مدل‌های قبلی بالاتر می رود.

اگر از این رویکرد مثلاً برای مثال قبلی استفاده کنیم (MDF) با این که هزینه زیاد می شود ولی ما دو اطمینان داریم:

I) جواب ارائه شده در تمامی حالات شدنی می باشد.

II) هزینه ای که به ازای تمامی حالات اتفاق می افتد هزینه بیشتری ایجاد نمی کند (چون ما بدترین حالت را حل کرده ایم)

② جواب حاصل از مدل و مقدار تابع هدف طوری تنظیم می شود که در هیچ سناریویی مقدار تابع هدف بیشتر از مقدار تابع هدف بدست آمده نخواهد شد.

یعنی در واقع اگر بدترین حالت رخ بدهد بهترین حالت است.

- داده هایی که در موقع تصمیم گیری داریم ایمنی یا Nominal می باشند.

این مدل به شدت ریسک گریز و محتاطانه است.

چند Extension ارائه شده روی worst-case برای منعطف کردن آن:

① $\text{Min } E[Z_\theta]$

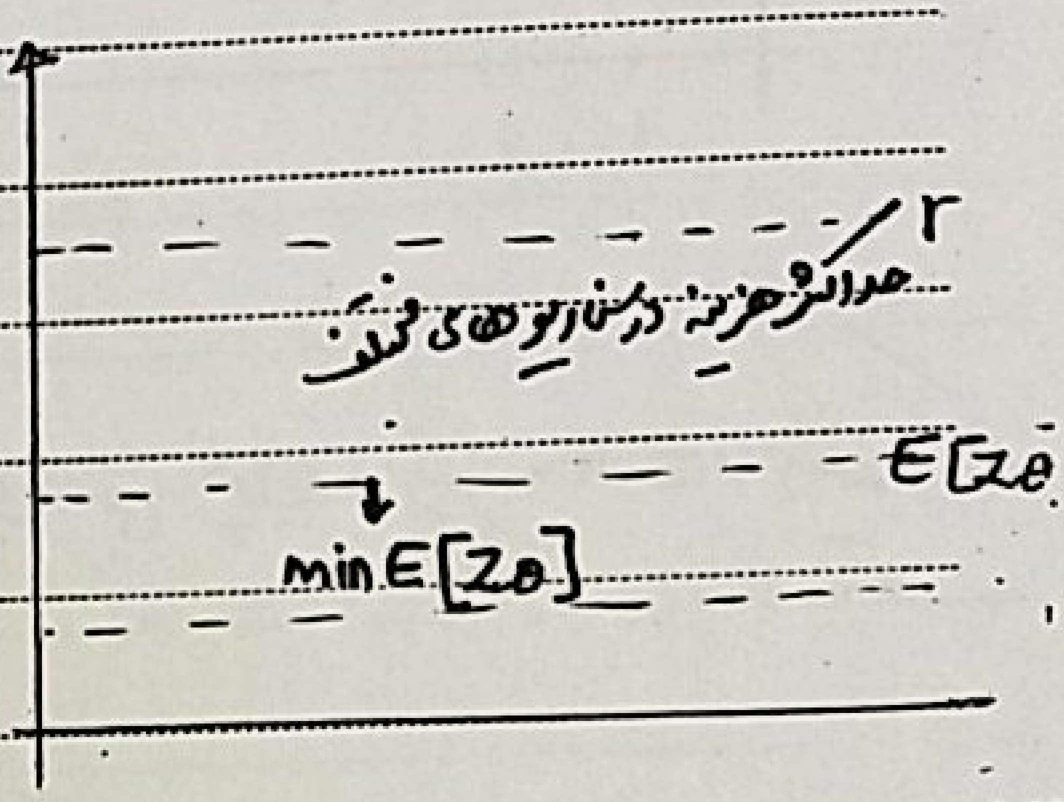
هزینه هیچ

s.t:

$fy + c_\theta x_\theta \leq r$

یک عدد ثابت که حداکثر هزینه را محدود می کند

$x, y \in F(x,y)$



۲۰۰	۱۰۰	۱۰۰	۲۰۰	۳۰۰	$E[Z_\theta]$	۱۸۰
۲۵۰	۱۵۰	۱۵۰	۲۳۰	۲۵۰		۲۰۴

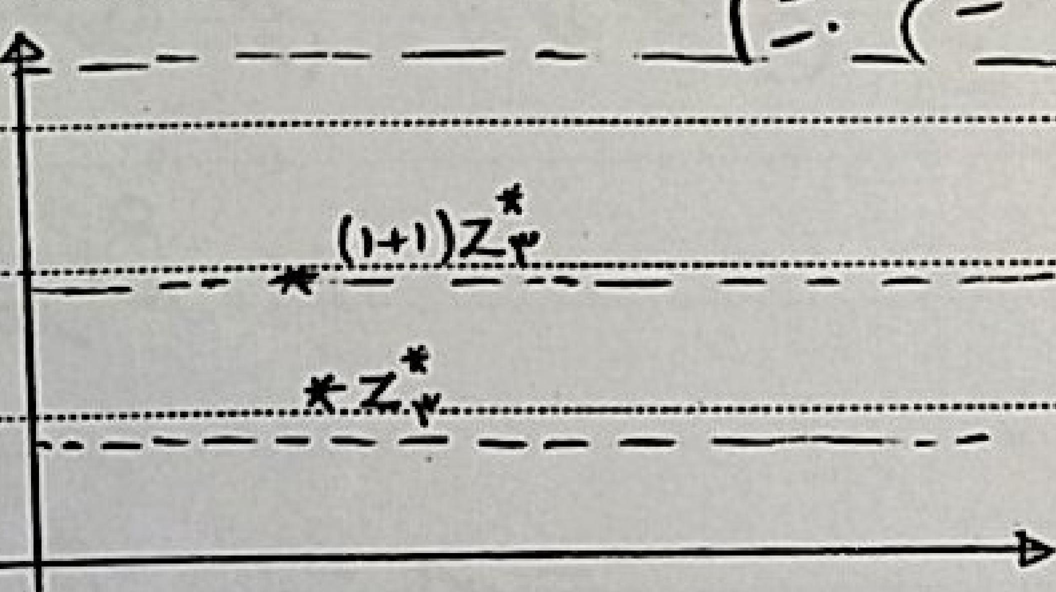
مشکل اصلی این مدل تخمین r است. مثلاً شاید در یک موقعیت بحران مقدار این r حدود ۷ باشد. اگر در یک سند بالادستی مقدار r تعیین شده باشد که میان را می گذاریم در غیر اینصورت باید آن را تخمین بزنیم

$\text{Min } E[Z_\theta]$

s.t:

$fy + c_\theta x_\theta \leq r$

$x, y \in F(x,y)$



Z^*_θ : مقدار بهینه تابع هدف به ازای سناریوی θ

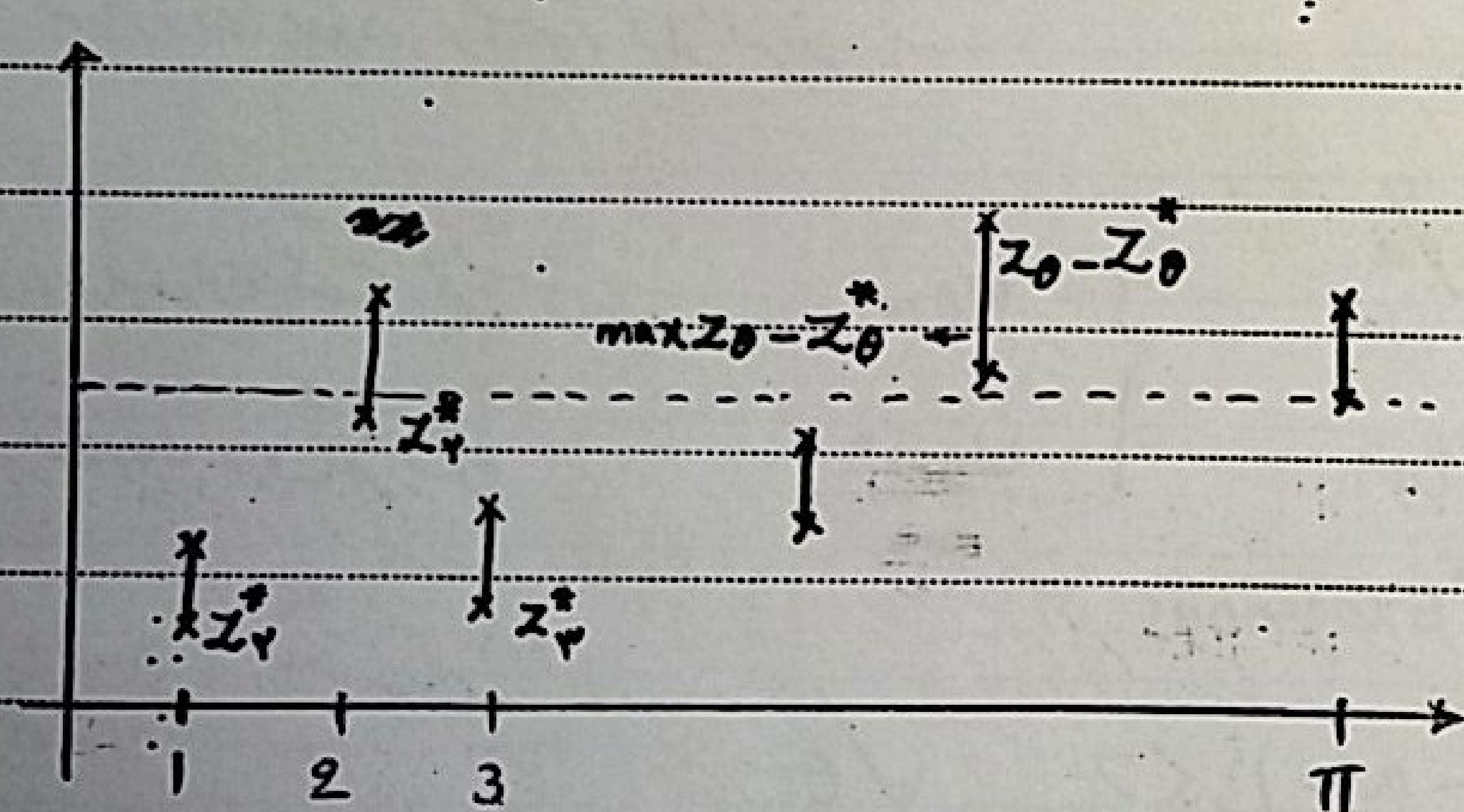
$(1+h_\theta) Z^*_\theta \leftarrow$ به ازای سناریوها

مقدار ضرر یا تأسف مطلق : $Z_\theta - Z_\theta^*$

Aghazzaf et al (2010) Models for robust tactical planning in Multi-stage production system with uncertain demands C&OR 37: 880-9

$$\underset{}{\text{Min}}\ \max_{\theta} (Z_\theta - Z_\theta^*) + \lambda E[Z_\theta]$$

$$\text{s.t.:}\quad x, y \in F(x, y)$$



Π_θ

$$\text{Min}\ \max_{\theta} (Z_\theta - Z_\theta^*) + \lambda E[Z_\theta]$$

فکر کن !

Subject:
Year. Month. Date. ( )

معیار ضرر نسبی

تأسف مطلق $R_\theta = Z_\theta - Z^*_\theta$

تأسف نسبی $= R_\theta / Z^*_\theta$

$$\min \max_\theta R_\theta / Z^*_\theta \xrightarrow{\text{یا}} \min \sum_\theta \frac{R_\theta}{Z^*_\theta}$$

s.t:

$R_\theta = fy + c_\theta x_\theta - Z^*_\theta$ مقدار بهینه سناریوها را برابر با بهترین حالت [illegible] سناریو [illegible] سال [illegible] ساختار [illegible] بهترین [illegible] هست [illegible] میبینیم

$x, y \in F(x, y)$

نکته: برخی اوقات تصمیم گیران علاقه مند نیستند تمامی سناریوها مدنظر قرار گیرند بلکه ترجیح می دهند الزاماً α درصد سناریوها مورد پوشش قرار گیرند.

$\min \{ \max_\theta \{ fy + c_\theta x_\theta \mid w_\theta = 1 \} \}$

$\min \max_\theta Z$ ← در واقع این بوده

$\min Z$

s.t:

α% سناریوها را پوشش می دهم

جواب در این حالت موجه است

$$\sum_\theta \pi_\theta w_\theta \geq \alpha \to \text{DM}, \quad \to \text{Exogenous}$$

$$\begin{cases} w_\theta = 1 & \text{سناریوی تحت پوشش} \\ w_\theta = 0 & \text{سناریوی صرف نظر شده} \end{cases}$$

تأسف در مطلق ←

$fy + c_\theta x_\theta - Z^*_\theta$

$$fy + c_\theta x_\theta - M(1 - w_\theta) \leq Z \quad \forall \theta$$

در صورتی که $w_\theta = 0$ باشد با توجه به M بزرگ سناریوی مربوط در نظر گرفته نمی شود

$x, y \in F(x, y)$, $w_\theta \in \{0, 1\}$

اجازه نقض

مثال

	d_θ	
$\theta = 1$	100	$\pi_\theta = 0.2$
$\theta = 2$	200	$\pi_\theta = 0.4$
$\theta = 3$	600	$\pi_\theta = 0.4$

$x \geq d_\theta \quad \forall \theta \to x = 600$

حال اگر α = 0.6 در نظر گرفته شود، فقط می توان سناریوهای 1 و 2 را در نظر گرفت

بنابراین بهترین x = 200 می شود

این مدل در واقع worst case است ولی الزاماً محافظه کارانه نیست چون به ما اجازه می دهد. در واقع

به ازای سناریوهایی که انتخاب می کنیم worst-case است

PAPCO

* معمولاً سناریویی را حذف می کنند که بیشترین هزینه را دارد

$\text{Min } E[Z_\theta]$ — $w_\theta = 1$ تحت پوشش قرار بگیرد

$w_\theta = 0$ 〃 〃 نگیرد

s.t.

$\sum_\theta \pi_\theta w_\theta \leq \alpha$ — α ! سناریوها را در نظر نمی‌گیرد

$f y + c_\theta x_\theta - \text{Target} \leq M w_\theta \quad \forall \theta$

$x, y \in F(x,y)$

تمرین: مدل پیشنهادی Aghazzaf را با ۴ سناریو کد کنید یکبار با در نظر گرفتن مدل اصلی

و یکبار با در نظر گرفتن π_θ کد کنید (تا پنج شنبه هفته بعد)

فرض، تابع هدف، توضیح، Area، مقالات کلیدی

تا اول اردیبهشت باید همه چیز به جز عدم قطعیت تمام شود.

Subject: استواری شرایط باید تعریف گردد ؟ Target کم است به خاطر *

Year. Month. Date. ( )

$$\text{Min } E\left[Z_\theta\right] \qquad \begin{cases} w_\theta = 1 & \text{تحت پوشش قرار بگیرد} \\ w_\theta = 0 & \text{" " " نگیرد} \end{cases}$$

s.t.:

ریسک قبلی

$$\sum_\theta \pi_\theta w_\theta \leq \alpha$$

M بزرگ

می‌خواهیم ریسک ریاضی هر سناریو را به نحوی کمینه نماییم

$$fy + c_\theta x_\theta - \text{Target} \leq M w_\theta \quad \forall \theta \rightarrow$$

که درصد مقدار هر سناریو از مقدار مشخص که به عنوان Target برای آن در نظر گرفته ایم کمتر شود.

$$x, y \in F(x,y)$$

تمرین: مدل پیشنهادی Aghazzaf را با n سناریو حل کنید یکبار با در نظر گرفتن مدل اصلی و یکبار با در نظر گرفتن π_θ حل کنید. (تا پنج شنبه هفته بعد)

فرض، تابع هدف، توضیح، Area، مقالات کلیدی

تبادل ارزنهشت باید همه چیز به جز عدم قطعیت تمام شود.

Subject:
Year. Month. Date. ( ) ۹۲/۱۲/۱۸ یکشنبه

Robust Opt. (Robust Convex opt)

Soyster (1973) → Operation. Res 21 1154-7

→ 1998

Ben-Tal 2009

Bertsimas & Sim

max $x_1 + x_2$

Column wise uncertainty

$\tilde{a}_{11} x_1 + \tilde{a}_{12} x_2 \leq 6$

$\tilde{a}_{21} x_1 + \tilde{a}_{22} x_2 \leq 4$

$x_1, x_2 \geq 0$

در مورد اعداد غیرقطعی در مورد رنج تغییرات آن اطلاع داریم ولی از توزیع آن بی خبریم (مثلاً در مورد اعداد فازی تابع عضویت را نداریم ولی از ساپورت با خبریم.

(ambigous stochastic programming)

$\tilde{a}_{11} \in [1 \quad 3]$ $\tilde{a}_{12} \in [1 \quad 2]$

$\tilde{a}_{21} \in [1 \quad 4]$ $\tilde{a}_{22} \in [1 \quad 2]$

$$\max \; c^T x$$

s.t:

$$\sum_{j=1}^{n} A_j x_j \leq b \qquad \forall A_j \in \underline{\underline{K_j}} \,,\; j=1,\dots,n$$

مجموعه عدم قطعیت

$$x \geq 0$$

در مدل اول اگر

در واقع سوپریمم بازه‌ها را اگر در محدودیت بگذاریم این مدل حاصل می‌شود

$$\rightarrow \max \; c^T x$$

s.t:

Robust counterpart $\Longrightarrow$

همتا

$$\sum \bar{A}_j x_j \leq b \qquad \bar{a}_{ij} = \sup (A_{ij})$$

$$A_j \in K_j$$

$$x \geq 0$$

$$\tilde{a}_{11} = 2 + \xi_{11}$$

$$\tilde{a}_{21} = 2.5 + 1.5\, \xi_{21}$$

$$\tilde{a}_{12} = 1.5 + 0.5\, \xi_{12}$$

ثابت

$$\tilde{a}_{22} = 1.5 + 0.5\, \xi_{22}$$

نامنفی و انحراف ثابت > 0

$$\tilde{a}_{ij} = \underline{a_{ij}} + \xi_{ij}\, \hat{a}_{ij}$$

Constant Perturbation $\forall j \in J_i$

مقدار اسمی

Nominal Value

Random Variable

مجموعه اندیس پارامترهای دارای عدم قطعیت

Subject:
Year. Month. Date. ( )

$\bar{a}$

$\tilde{2}$

توزیع این بازه را نمی‌دانیم :

0 ———— 4

اسمی

$\tilde{=}\ 2 + 2 \times \xi_{ij} \longrightarrow [-1 \quad 1]$

انحراف ثابت

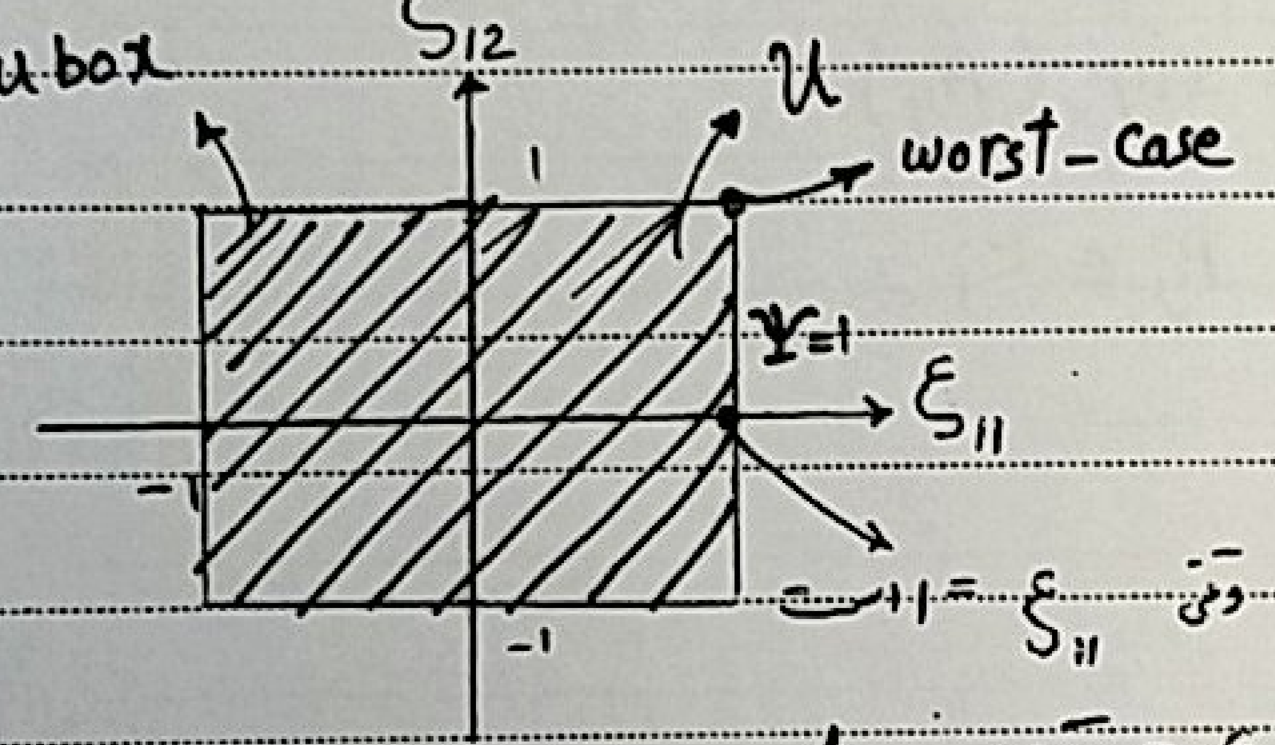
Random Variable

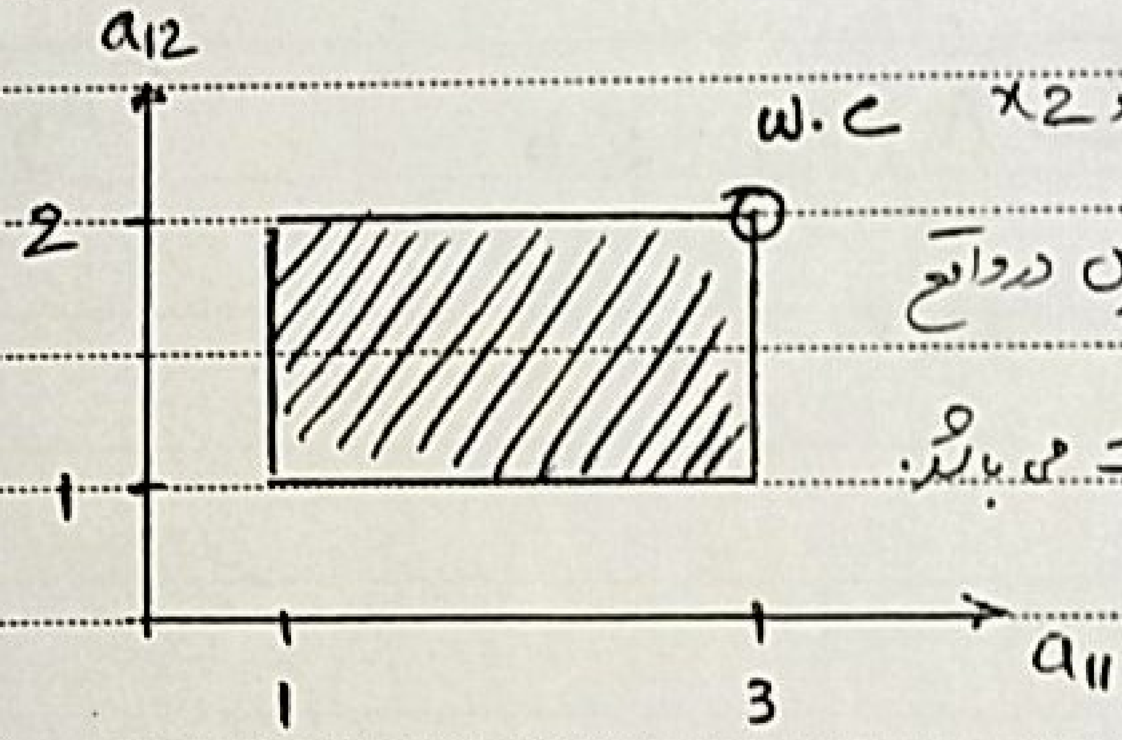
می‌شود بین $[-1,1]$ هم می‌باشد
ولی معمولاً نرمال می‌کنیم تا به
این بازه برسیم و مقدار را به
انحراف ثابت می‌دهیم.

اگر ξ_{11} و ξ_{12} برابر ① شوند در آن صورت چون ضریب x_1 و x_2 زیاد می‌گردد پس محدوده فضای شدنی مسأله کوچک می‌گردد

$$2x_1 + 1.5\,x_2 + \max_{(\xi_{11},\,\xi_{12}) \in U} \left\{ \xi_{11} x_1 + 0.5\,\xi_{12}\, x_2 \right\} \leq 6$$

در این صورت جواب بهینه بهتر نمی‌گردد و چون با قرار دادن $\xi_{12} = \xi_{11} = 1$ بیشترین ضریب x_1 و x_2 w.c پدید می‌آید پس در واقع بدترین حالت می‌باشد.





closed Convex sets.

ξ_{12} هر مقداری می‌تواند بگیرد.

$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1} |x_i|^p \right)^{1/p}$$

$p \geq 1$

$p \to \infty$

$\|x\|_\infty = \max(|x_1|, \cdots, |x_n|)$ infinity norm ①

$\tilde{a}_{ij} = a_{ij} + \xi_{ij}\, \hat{a}_{ij}$ Constant perturbation

مقدار اسمی
Nominal Value

Random Variable

Subject:
Year. Month. Date. ( )

② $\mathcal{U}_\infty = \left\{ \xi \mid \|\xi\|_\infty \leq \Psi \right\}$

کران - شعاع

①,② $\longrightarrow \quad = \left\{ \xi \mid |\xi_j| \leq \Psi \quad \forall j \in J_i \right\}$

$$\sum_{j \notin J_i} a_{ij} x_{ij} + \sum_{j \in J_i} \tilde{a}_{ij} x_{ij} \leq \tilde{b}_i \implies$$

حالت الف) عدم قطعیت در سمت چپ (ضریب متغیرها) در حالت BOX :

(Soyster) (LHS) Left Hand side

$$\sum_j a_{ij} x_j + \left[\max_{\xi \in \mathcal{U}_{BOX}} \left\{ \sum_{j \in J_i} \xi_{ij} \hat{a}_{ij} x_j \right\} \right] \leq b_i$$

مثال: max

$\tilde{a} x \leq b$

چون x مجهول است و ما عبارت max را برداشتیم پس قدرمطلق گذاشتیم.

اگر ندانیم x چیست قدرمطلق می‌گذاریم

Robust
R.C. $\Rightarrow \displaystyle\sum_j a_{ij} x_j + \left[\Psi \sum_{j \in J_i} \hat{a}_{ij} \underbrace{|x_j|}_{u_j} \right] \leq b_i$
Counterpart

$|x_j| \leq u_j \rightarrow -u_j \leq x_j \leq u_j$

$$\text{if } x_j \geq 0 \Rightarrow \sum_j a_{ij} x_j + \left[\Psi \sum_{j \in J_i} \hat{a}_{ij} x_j \right] \leq b_i$$

$$\text{if } x_j \text{ free} \Rightarrow \begin{cases} \displaystyle\sum_j a_{ij} x_j + \overset{1}{\Psi} \sum \hat{a}_{ij} u_j \leq b_i \\ -u_j \leq x_j \leq u_j \end{cases}$$

$\Rightarrow |x_j| \leq u_j$

$j \in J_i$

Subject: feasibility of solution $\Longrightarrow \sum a_{ij} x_j^* + \sum_{j \in J_i} \xi_{ij} \hat{a}_{ij} x_j^* \leqslant \sum a_{ij} x_j^* + \sum_{j \in J_i} \hat{a}_{ij} |x_j^*| \leqslant b_i \quad \forall i$

Year. Month. Date. ( )

$$2x_1 + 1.5x_2 + \Psi(|x_1| + 0.5|x_2|) \leqslant 6$$

x_1, x_2 free

حالت ب) عدم قطعیت در سمت راست (RHS)

$$\sum_j a_{ij} x_j \leqslant \bar{b}_i \rightarrow \bar{b}_i = b_i + \xi_{i0} \hat{b}_i$$

$$\sum_j a_{ij} x_j + \left[\max_{\xi \in U_{BOX}} \left\{ -\xi_{i0} \hat{b}_i \right\} \right] \leqslant b_i$$

اگر $\Psi = 1 \Rightarrow \sum_j a_{ij} x_j + \Psi \hat{b}_i \leqslant b_i$

$$\sum_j a_{ij} x_j + \left[\max_{\xi \in U_{BOX}} \left\{ \xi_{i0} \hat{b}_i \underbrace{x_0}_{x_0 = -1} \right\} \right] \leqslant b_i$$

اگر $\Psi = 1 \rightarrow \sum_j a_{ij} x_j + \Psi \hat{b}_i \leqslant b_i$

اگر هم در تابع هدف عدم قطعیت بود باید آن را به محدودیت بیاوریم به این شکل که عبارت تابع هدف را در یک محدودیت دیگر جدا می‌کنیم و متغیری مثل z می‌گذاریم و حالا تابع هدف max کردن z می‌شود و چون تابع هدف یکی از z بزرگتر مساوی است پس در واقع با ماکزیمم کردن z آن تابع هم ماکزیمم می‌شود.

در واقع کاری که در این روش "Robust" انجام می‌دهیم این است که می‌آییم و سعی می‌کنیم محدودیت‌های سوال را به دو بخش تقسیم کنیم. بخش اول قسمت قطعی و بخش دوم قسمت غیرقطعی محدودیت، و می‌آییم و قسمت غیرقطعی محدودیت را max می‌نماییم (ξ). با این کار در واقع بدترین حالت را انتخاب می‌کنیم و چون بیشترین مقدار از b کوچکتر است پس تمامی حالات دیگر هم از b کوچکتر هستند پس محدودیت همواره برقرار است پس این جواب می‌تواند "Robust" باشد.

$$Ax + \xi x \leqslant b$$

برای max کردن عبارت سمت چپ چند کار می‌کنیم: اگر متغیر نامقید داشته باشیم برای آن قدر مطلق می‌گذاریم و چون خود قدر مطلق را هم می‌توانیم خطی حل کنیم به جای $|x|$ عبارت u را می‌نویسیم که در واقع u همان بیشینه $|x|$ است و محدودیت $-u \leqslant x \leqslant u$ لازم است.

(۲-۲) اگر هم از سمت چپ پارامترهای دارای عدم قطعیت در محدودیت بود فقط حق داریم قسمت $\hat{a}$ را max کنیم و مثلاً اگر $-\hat{a}\xi$ بود آن را $\hat{a}$ می‌کنیم یعنی علامت منفی را مثبت می‌کنیم.

Subject:
Year. Month. Date. ( )

حالت ج) عدم قطعیت در سمت چپ (ضریب متغیرها) و سمت راست در حالت Box:

RHS LHS

$$\sum_{j \notin J_i} a_{ij} x_j + \sum_{j \in J_i} \tilde{a}_{ij} x_j + \tilde{b}_i x_0 \leq 0$$

متغیر مصنوعی با مقدار ۱-

$$\Rightarrow b_i x_0 + \sum_j a_{ij} x_j + \left[\max_{\xi \in U_{Box}} \left\{ \xi_{i0} \hat{b}_i x_0 + \sum_{j \in J_i} \xi_{ij} \hat{a}_{ij} x_j \right\} \right] \leq 0$$

$$\xi_i = \left[\xi_{i0} ; \{ \xi_{ij} \} \right] \qquad X = \{ x_0 ; \{ x_j \} \}$$

$$A_i = \left[b_i , \{ a_{ij} \} \right] \qquad J_i' = J_i \cup \{ 0 \}$$

$$\hat{A}_i = \left[\hat{b}_i , \{ \hat{a}_{ij} \} \right]$$

$$\sum_j A_{ij} x_j + \max_{\xi \in U_{Box}} \{ \xi_i \hat{A}_i X \} \leq 0$$

$$\Rightarrow \sum_j A_{ij} x_j + \left[\Psi \sum_{j \in J_i} \hat{A}_{ij} |x_j| \right] \leq 0$$

$$\sum_j a_{ij} x_j + \Psi \left[\sum_{j \in J_i'} \hat{a}_{ij} |x_j| + \hat{b}_i \right] \leq b_i$$

Subject:

Year. Month. Date. ( )

حالت د) عدم قطعیت در تابع هدف

$\max \ \tilde{c}x + \tilde{d}$	$\max \ \tilde{c}x$
s.t: $\tilde{A}x \leq \tilde{b}$	s.t: $\tilde{A}x \leq \tilde{b}$
	در این روش به جای $\tilde{c}x$ که غیرقطعی است می‌آییم z را max می‌کنیم با این شرط که $z \leq \tilde{c}x$
$\max \ z$	$\max \ z$
	در این صورت وقتی z ماکزیمم شود عملاً $\tilde{c}x$ هم ماکزیمم می‌شود.
s.t:	s.t:
$z - \tilde{c}x \leq \tilde{d}$	$z - \tilde{c}x \leq 0$
	چون $\tilde{c}x$ از z بزرگتر است.
$\tilde{A}x \leq \tilde{b}$	$\tilde{A}x \leq \tilde{b}$

ویژگی های رویکرد Robust_optimization به روش Ben-Tal با مجموعه عدم قطعیت BOX

① از نظر محاسباتی کارا

② توزیع پارامترهای دارای عدم قطعیت در این روش مهم نیست.

③ حداکثر استواری [illegible] بودن

Hard worst-case Robust optimization prog.

بدترین حالت را بهینه می‌کند.

PAPCO

اگر infimum عبارتی max گردد کل عبارت max گردد.

$$\max \left\{ \boxed{\inf} [cx+d] \ \text{s.t.} \ Ax \leq b \quad \forall (c,d,A,b) \in \mathcal{U} \right\}$$
$$c, d, A, b \in \mathcal{U}$$

$$\downarrow$$

$\max Z$

s.t: H.W.C

$$\left. \begin{aligned} Z &\leq cx+d \\ Ax &\leq b \end{aligned} \right\} \forall (c,d,A,b) \in \mathcal{U}$$

$$\sum_{i} \tilde{a}_{ij} x_j \leq \tilde{b}_i \quad \forall i$$

$$\begin{cases} \tilde{a}_{ij} = \overset{N.V}{a_{ij}} + \delta_{ij} \overset{R.Var}{\hat{a}_{ij}} \xrightarrow{} \underset{C.P}{\geq 0} \\ \tilde{b} = b_i + \delta_{i0} \hat{b}_i \end{cases}$$

$$\rightarrow \sum_{i} a_{ij} x_{ij} + \underbrace{\left[-\delta_{i0} \hat{b}_i + \sum_{j \in J_i} \delta_{ij} \hat{a}_{ij} x_j \right]}_{\max} \leq b_i \quad \forall i$$

برای این که مرز حالت کلی پیدا کنند

$$\rightarrow \sum_{j} a_{ij} x_j + \left[\max_{\delta \in \mathcal{U}} \left\{ -\delta_{i0} \hat{b}_i x_{i0} + \sum_{j \in J_i} \delta_{ij} \hat{a}_{ij} x_j \right\} \right] \leq b_i$$

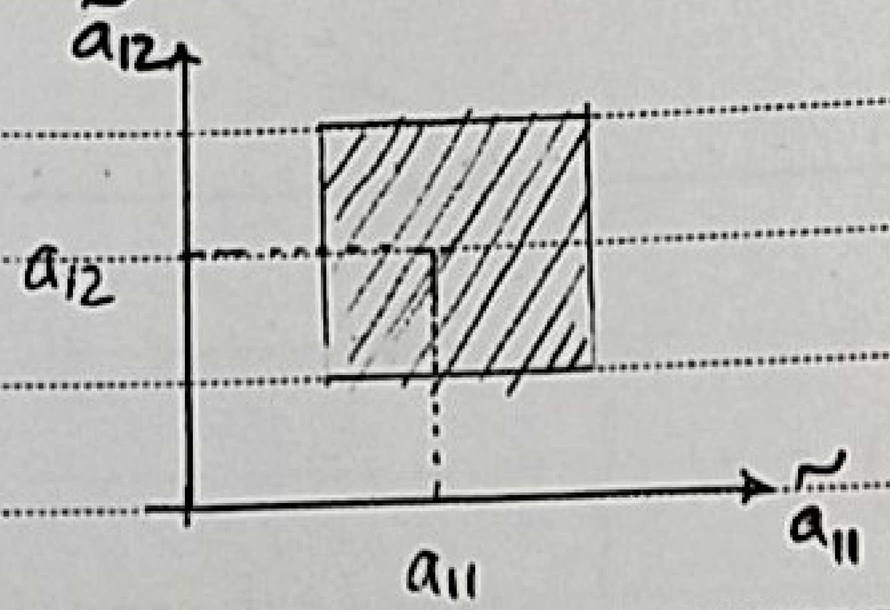
$$x_{i0} = -1$$

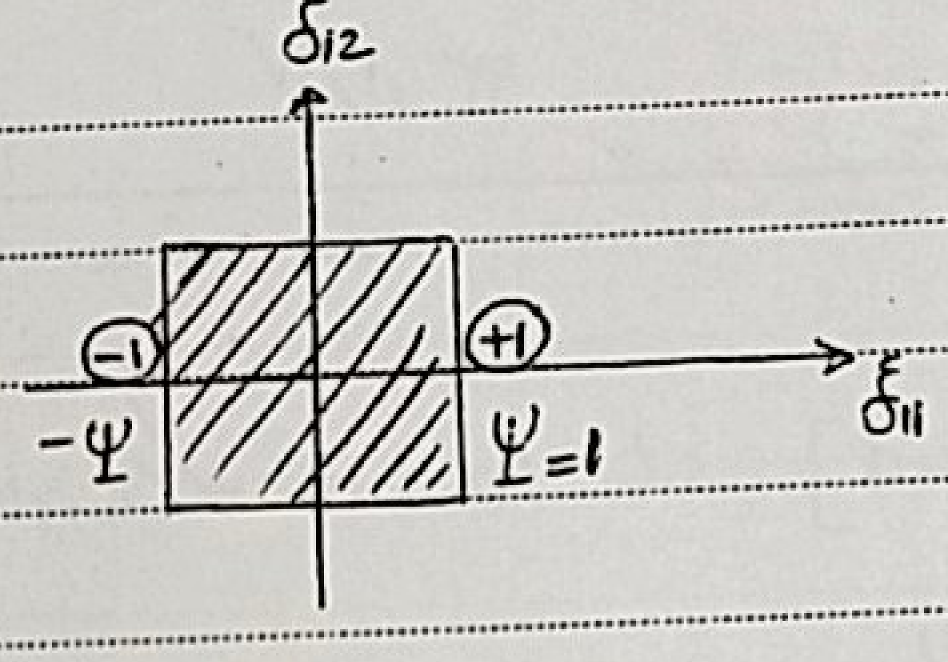
$$\mathcal{U}_\infty = \left\{ \delta \mid \|\delta\|_\infty \leq \Psi \right\} \Rightarrow \mathcal{U}_{Box} = \left\{ \delta \mid |\delta_j| \leq \Psi, \forall j \in J_i \right\}$$

Subject: Convex Optimization → MIT University Course

Conic Programming

Year. Month. Date.





با فرض مستقل بودن $\{\delta_{ij}\}$

چون نمی‌دانیم علامت x_j چیست

عدم قطعیت → قطعی

$$\max\left\{\sum_{j\in J_i}\delta_{ij}\hat{a}_{ij}x_j\right\}=\left\{\sum_{j\in J_i}\Psi\hat{a}_{ij}\underbrace{|x^*_j|}_{u_j}\right\}$$

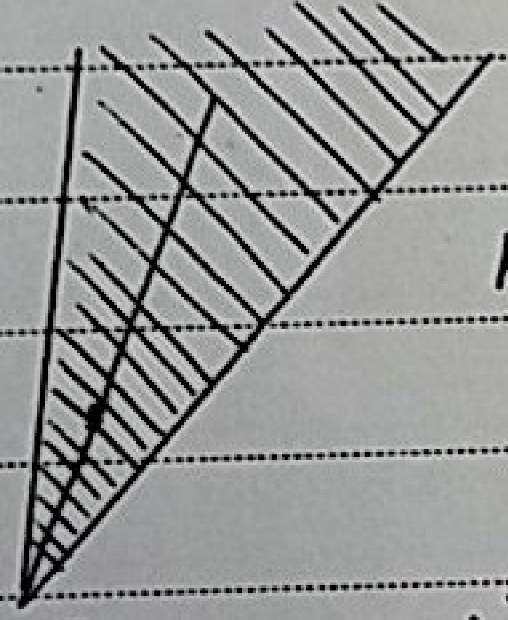
که بتوانیم آن را بیشینه کنیم

زیرا $|x^*_j|$ می‌گذاریم تا علامت مثبت شود و می‌توانیم Ψ بگذاریم و به حالت قطعی برسیم.

$$-u_j\leqslant x_j\leqslant u_j$$

$$u_j\geqslant 0$$

Conic Prog. برنامه ریزی مخروطی



$K \quad \forall x\in K \quad \theta\geqslant 0$

$\theta x\in K$

Cone مخروط

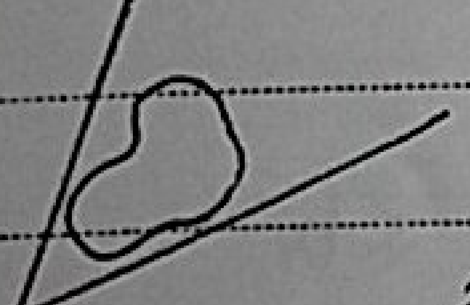
مخروط محدب $\theta_1x_1+\theta_2x_2\in K \quad \theta_1,\theta_2\geqslant 0$

Convex Cone

$x_1\neq x_2$

مخروطی محدب است اگر و تنها اگر شامل همه ترکیبات مخروطی عناصر تشکیل دهنده‌اش باشد.

Conic Hall : پوسته مخروطی



مجموعه همه ترکیبات مخروطی نقاط موجود در مجموعه K را پوسته مخروطی مجموعه K گویند.

PAPCO

مخروط : مجموعه K را یک مخروط گویند اگر به ازای هر $x\in K$ و هر $\theta\geqslant 0$ ، $\theta x\in K$ باشد

مخروط محدب از مخروط C را محدب گویند اگر شامل مبداء نقطه O باشد [illegible]

Subject:
Year. Month. Date. ( )

مخروط درجه دوم (بستنی، لورنتس) Lorentz

$$L^k = \left\{ x \in R^k : x_k \geq \sqrt{\sum_{j=1}^{k-1} x_j^2} \right\}$$

مخروط نوک دار:

مخروط هایی که شامل مبدأ باشند یا شامل نقطه صفر باشند.

دوگان یک مخروط:

$$K \subseteq R^k$$

$$K^* = \left\{ Z \in R^k : x^T Z \geq 0 , \forall x \in K \right\}$$

برنامه ریزی مخروطی Conic Prog.

برنامه ریزی مخروطی تعمیمی از برنامه ریزی خطی است که به جای محدودیت نامنفی بودن متغیرهای تصمیم گیری، باید نگاشت آفین از این متغیرها متعلق به یک مخروط بسته محدب باشند.

General form of C.P

min $c^T x + d$

s.t: $Ax - b \in K \rightarrow$ مخروط محدب بسته نوک دار

$$\min_x \left\{ \langle c, x \rangle_E : A_i x - b_i \in K_i , i = 1, \dots, m \right\}$$

$Ax = b$

حالات برنامه ریزی مخروطی محدب:

① اگر مخروط K حاصلضرب مستقیم نیم خط های نامنفی باشد (Ray)

$$\min_x \left\{ c^T x + d : a_i^T x - b_i \geq 0 \quad 1 \leq i \leq m \right\}$$

PaPCO

۲) اگر مخروط K حاصلضرب مستقیم مخروط های لورنتس (درجه دوم) باشد در این صورت منجر به بهینه سازی کوادراتیک مخروطی (Second Order C.O ، Conic Quadratic opt.) می گردد.

نرم 2

$$\min_x \left\{ c^T x : \|A_i x - b_i\|_2 \leqslant c_i^T x - d_i ,\ 1 \leqslant i \leqslant m \right\}$$

$$\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} x_j^2}$$

۳) اگر مخروط K حاصلضرب مستقیم مخروطهای نیمه معین S_+^k باشد برنامه ریزی نیمه معین خواهیم داشت.

$$\min_x \left\{ c^T x + d : A_i x - B_i \succeq 0 ,\ 1 \leqslant i \leqslant m \right\}$$

$A_i x - B_i \succeq 0$ یعنی $A_i x - B_i$ یک ماتریس نیمه معین مثبت متقارن است.

$$U_\infty = \left\{ \delta \mid |\delta_{ij}| \leqslant \Psi ,\ \forall j \in J_i \right\} \qquad \max_{\delta \in U} \left\{ \sum_{j \in J_i} \delta_{ij} \hat{a}_{ij} x_j \right\}$$

$I_{m\times m} \to$ ماتریس واحد

$O_{m\times m} \to$ ماتریس صفر

تعریف مخروط نرم بی نهایت

$$K_\infty = \left\{ [\theta_{h\times t} ; t] \in R^{L+1} \mid \|\theta\|_\infty \leqslant t \right\}$$

$P = [I_{h\times h} ; O_{L\times L}]$ تعداد پارامترهای دارای عدم قطعیت در سطر i ام $L = |J_i|$

$p = [O_{h\times h} ; \Psi]$

$P\delta \leqslant p$

$|\delta| \leqslant \Psi$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1 \rightarrow$ p و q دوآل هم هستند

دوآل نرم ∞، یک می‌باشد

$$\max_{\delta}\left\{\sum_{j\in J_i}\delta_{ij}\,\hat{a}_{ij}\,x_j : P\delta + p \in K_\infty\right\}$$

I 0 ; Ψ ; $\|\ \|_\infty$

Dual v_1 $\quad y=[w_{ij},\ \tau_i]\in R^{L+1}$

طبق تعریف $1/p+1/q=1$

Dual Convex of K_∞: $\quad K_\infty^{*}=\left\{[\theta_{h\times 1};\ t]\in R^{L+1}\ \middle|\ \|\theta\|_1\leqslant t\right\}$

حل مسئله دوآل $\quad \min_{w,\tau}\left\{\Psi\,\tau_i\ ;\ w_{ij}=\hat{a}_{ij}x_j\ \forall j\ ;\ \|w_i\|_1\leqslant\tau_i\right\}$

$\hookrightarrow \|w_i\|_1=\sum_{j\in J_i}|w_{ij}|$

s.t

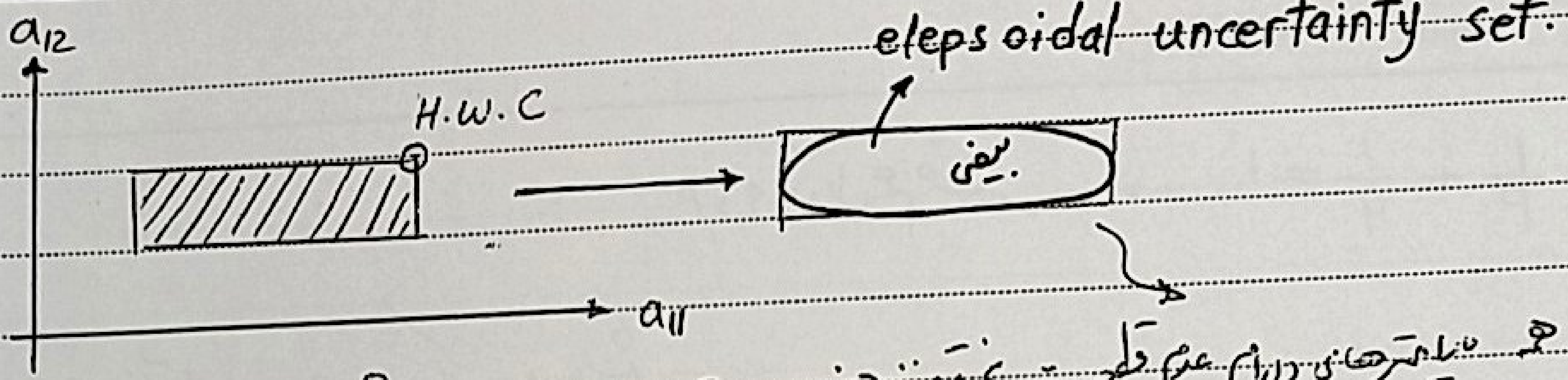
$$\min_{w}\left\{\Psi\sum_{j\in J_i}|w_{ij}| : w_{ij}=\hat{a}_{ij}x_j\ \forall j\right\}$$

چون $\hat{a}_{ij}\geqslant 0$ می‌توان نوشت:

$$\min_{w}\left\{\Psi\sum_{j\in J_i}|w_i| : w_{ij}=\hat{a}_{ij}x_j\ \forall j\right\}=\Psi\sum_{j\in J_i}|\hat{a}_{ij}x_j|$$

$$=\Psi\sum_{j\in J_i}\hat{a}_{ij}|x_j|$$

Subject:
Year. Month. Date. ( )



همه پارامترهای دارای عدم قطعیت نمی‌توانند همزمان در بدترین حالت خود باشند.

سه‌شنبه

۹۳/۱/۱۹

Box محافظه‌کاری کمتر از

مجموعه عدم قطعیت حالت بیضوی

Ellipsoidal unc. set ← چون بدترین حالت را درنظر نمی‌گیرد، بسته به نیاز را گرد می‌کند

$$\max \left\{ \inf_{(c,d,A,b)\in U} [cx+d] \quad s.t.: \ Ax \leqslant b, \ \forall (A,b,c,d) \in U \right\}$$

نقض وسیع‌تر

محافظه‌کاری بیشتر

محافظه‌کاری ↑

ریسک تصمیم ↓

$\max Z$

H.W.C

$$\left.\begin{array}{l} Z \leqslant cx+d \\ Ax \leqslant b \end{array}\right\} \forall (c,d,A,b) \in U$$

$$\rightarrow \sum_j a_j x_j + \Big[\delta_{i0} \hat{b}_i \underbrace{x_0}_{x_0=-1} + \sum_{j \in J_i} \delta_{ij} \hat{a}_{ij} x_j \Big] \leqslant b_i \qquad \forall i$$

$$* \quad \tilde{a}_{ij} = a_{ij} + \delta_{ij} \hat{a}_{ij} \qquad \hat{a}_{ij} > 0$$

PAPCO

برای این که فرم General باشد به جای -1 ← x_0 می‌گذاریم

Subject:

Year. Month. Date. ( )

$$b_i x_0 + \sum_j a_{ij} x_j + \max \left\{ \xi_{i0} \hat{b}_i x_0 + \sum_{j \in J_i} \xi_{ij} \hat{a}_{ij} x_{ij} \right\} \leq 0$$

$x_0 = -1$

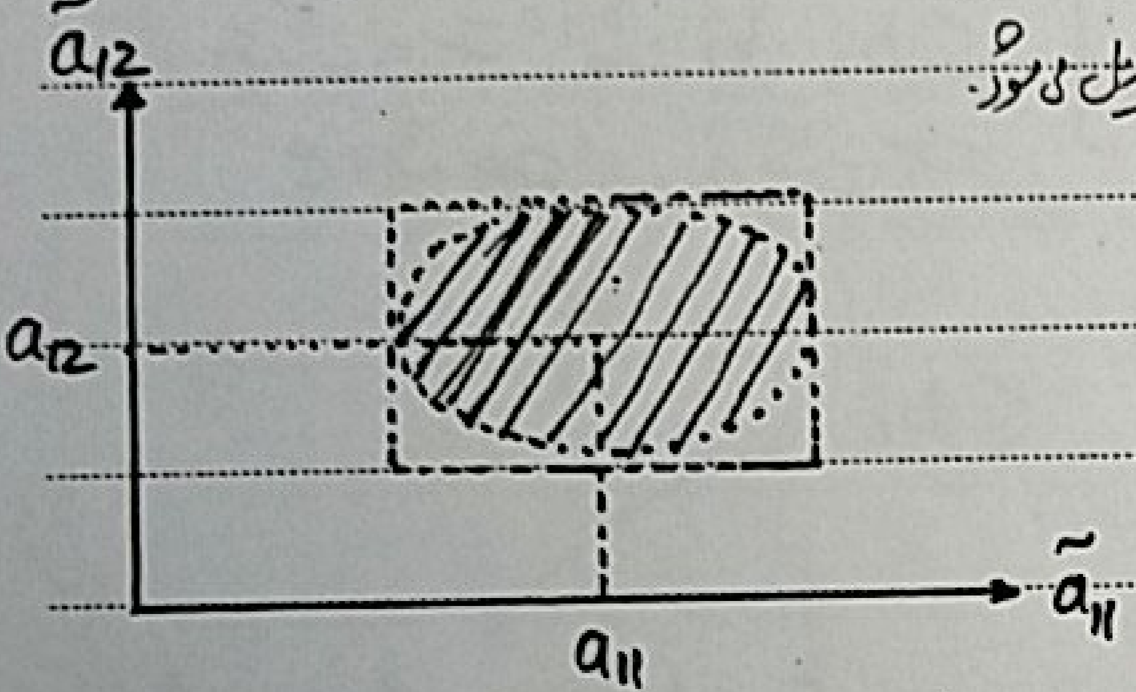
$$U_{Box} \rightarrow \sum_j a_{ij} x_j + \hat{b}_i + \sum_{j \in J_i} \hat{a}_{ij} |x_j| \leq b_i$$

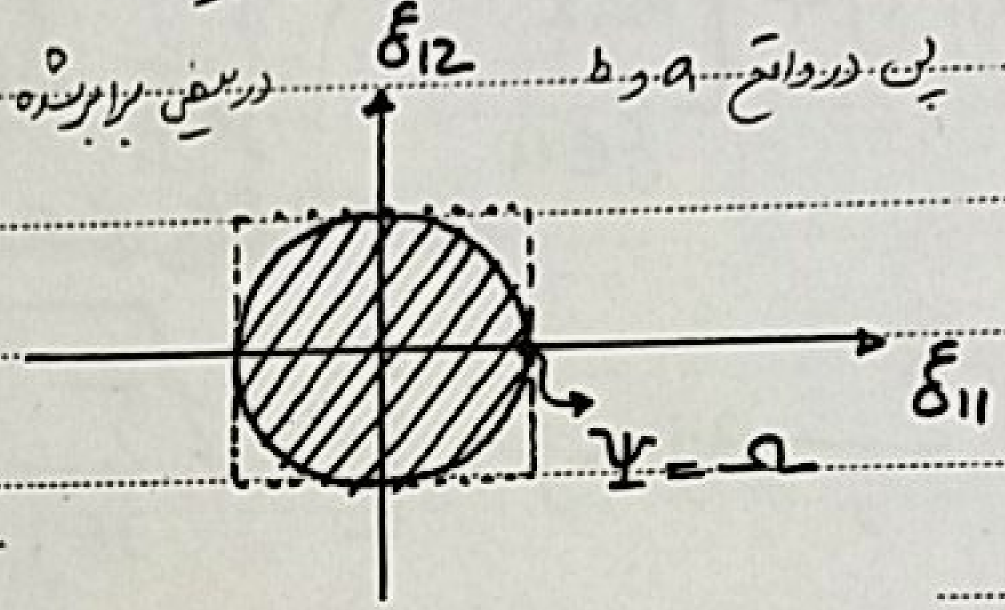
با فرض مستقل بودن ξ_{ij}

اگر نبود سوال امتحان؟

چرا شکل راست دایره می‌شود ولی چپ بیضی؟ در شکل راست، در واقع چون دامنه تغییرات هر دو متغیر موافقی و عمودی $(+1, -1)$ است $\xi_{ij} \in (-1, 1)$

پس در واقع a و b در بیضی برابر شده و بیضی به دایره تبدیل می‌شود.





حالا که دایره است از نرم 2 استفاده می‌کنیم

نرم 2 (چون دایره است) U_{Ball}

$$\xi \in R^{|J_i|} : \|\xi\|_2 \leq \Omega \; ; \; U_2 = \left\{ \xi \;\middle|\; \|\xi\|_2 \leq \Omega \right\}$$

$$= \left\{ \xi \;\middle|\; \sqrt{\sum_{j \in J_i} \xi_{ij}^2} \leq \Omega \right\}$$

اگر بدانیم چه نرمی هست از طریق می‌توانیم بفهمیم. مثلاً در دایره تنها رابطه‌ای که می‌توانیم بین ξ_{ij}ها و Ω بزنیم این است که $\sqrt{\xi_{ij}} \leq \Omega$ پس نرم 2 است.

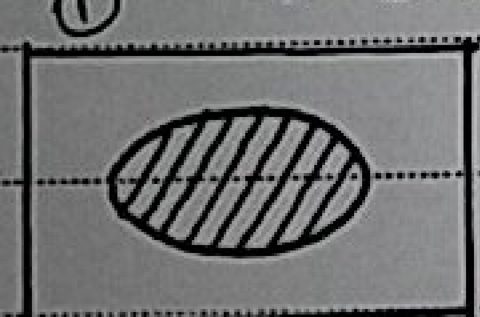
در مورد Box هم فقط می‌توانیم بگوییم $\max \xi_{ij} \leq \Psi$ پس نرم ∞ است.

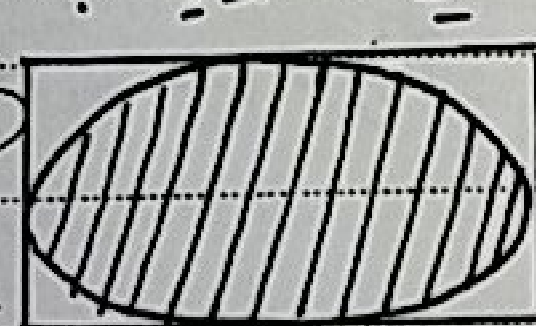
اگر سه متغیر قطعی داشته باشیم در کد نظر آن‌ها

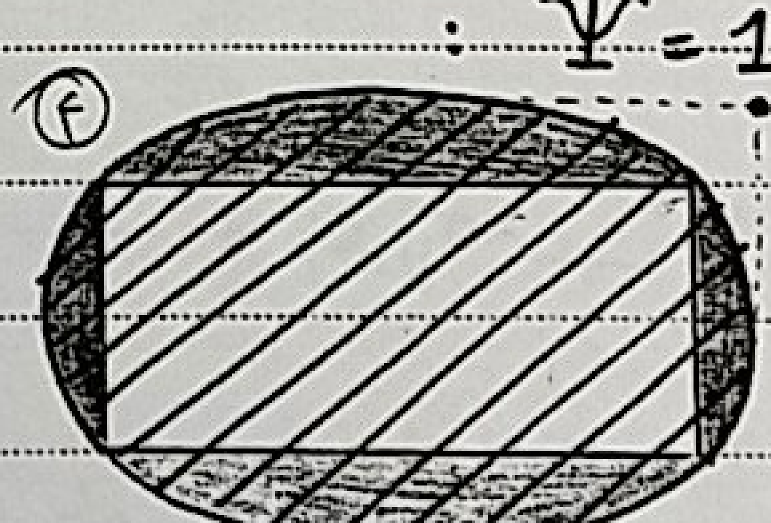
$\sqrt{\xi_{i1}^2 + \xi_{i2}^2 + \xi_{i3}^2} \leq \Omega$ معادله داخل یک کره به شعاع Ω می‌شود.

این حالت بیشترین کاربرد را دارد. پس اگر J_i بیش از ۲ عضو داشته باشد تنها بعد مسئله زیاد می‌شود.

با فرض: $\Psi = 1$

① 

② 

④ 

یعنی شعاع دایره را از $\Psi = 1$ هم کوچک‌تر بگیریم.

در شکل چپ هیچ وقت به بدترین حالت خود که همان $\xi = 1$ است نمی‌رسیم

$0 < \Omega < 1$

شعاع دایره را برابر $\Psi = 1$ بگیریم.

$\Omega = 1$

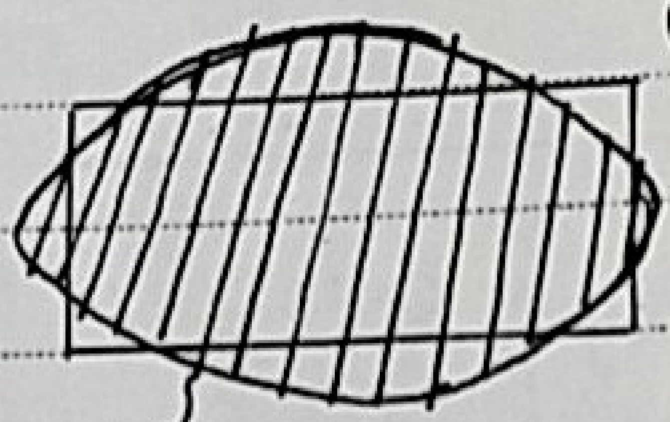
$\Omega = \sqrt{|J_i|}$

این نسبت به حالت دوم محافظه‌کارتر است چون گوشه‌ها را در بر گرفته ولی مقادیر اضافه هم دارد (مقادیر سیاه)

بیضی محیط‌تر از Box برای گردکردن تیزی‌ها

PAPCO

۳



بیضی

$$1 < \Omega < \sqrt{|J_i|}$$

نکته: وقتی $-1 \leq \xi_{ij} \leq 1$ آن گاه اگر $\Omega \geq (|J_i|)^{1/2}$ کل محدوده بوسیله بیضی پوشش داده می‌شود.

در حالت عدم قطعیت در LHS:

$$\sum_j a_{ij}x_j + \left[\max_{\xi\in U}\left\{\sum_{j\in J_i}\xi_{ij}\underbrace{\hat{a}_{ij}}_{>0}x_j\right\}\right] \leq b_i \quad \forall i$$

$$Ball = \|\xi\|_2 \leq \Omega$$

فرقی نمی‌کند علامت a و b چه باشد چون همواره $\hat{a}$ مثبت است.

$$\xrightarrow{\text{Robust}} \text{Counterpart} \quad \sum_j a_{ij}x_j + \left[\Omega\sqrt{\sum_{j\in J_i}\hat{a}_{ij}^2 x_j^2}\right] \leq b_i$$

اثبات: از طریق تبدیل به برنامه‌ریزی مخروطی درجه دوم (لورنتز) (کد کتاب Ben-Tal)

Second Order Conic Prog. (SOCP)

خواندن ؟؟

عدم قطعیت در LHS و RHS: All free $Max\ f : ax \leq b$

$$b_i x_0 + \sum_j a_{ij}x_j + \left[\max_{\xi\in U_{Ball}}\left\{\xi_{i0}\hat{b}_i x_0 + \sum_{j\in J_i}\xi_{ij}\hat{a}_{ij}x_j\right\}\right] \leq 0$$

$$\xrightarrow{R.C} b_i x_0 + \sum_j a_{ij}x_j + \Omega\sqrt{\sum_{j\in J_i}\hat{a}_{ij}^2 x_j^2 + \hat{b}_i^2 x_{i0}^2} \leq 0$$

با فرض $x_0 = -1$

$$\rightarrow \sum_j a_{ij}x_j + \Omega\sqrt{\sum_{j\in J_i}\hat{a}_{ij}^2 x_j^2 + \hat{b}_i^2} \leq b_i$$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

مثال عددی: محدودیت اول مثال قبلی:

$\tilde{a}_{11}x_1 + \tilde{a}_{12}x_2 \le \tilde{b}_1$

آب ذخیره شده در سد در حالت Box بیشتر از Ball است پس محافظه کارتر است.

$\tilde{a}_{11} = 2 + \xi_{11}$

$lb_1 \le x_1 \le lu_1$ $\quad$ $\tilde{a}_{12} = 1.5 + 0.5\,\xi_{12}$

$lb_2 \le x_2 \le lu_2$ $\quad$ $\tilde{b}_1 = 6 + \xi_{10}^{b}$

هرچه فضا بزرگتر باشد محافظه کارتر است.

مدل Box وسیع‌تر است از ... فضای شدنی بزرگتری دارد

مدل Box: $2x_1 + 1.5x_2 + |x_1| + 0.5|x_2| + 1 \le 6$

R.C

$$2x_1 + 1.5x_2 + \Omega\sqrt{x_1^2 + 1/4\,x_2^2 + 1} \le 6$$

مدل Box وسیع‌تر ولذا محافظه کارتر است چون جواب های بدتر را هم درنظر می‌گیرد.

$\xi \in R^3 : \|\xi\|_2 \le \Omega$ $\qquad$ $\Omega = 1 \quad \Psi = 1$

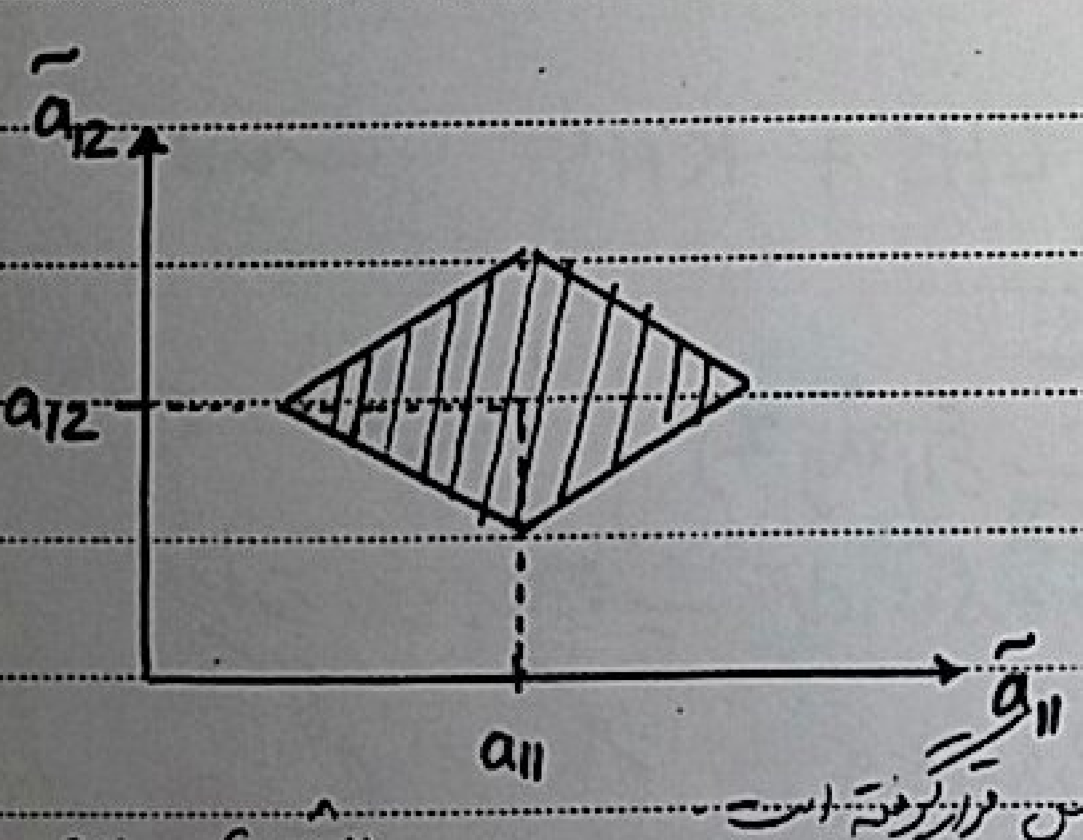
سوال: بین این مدل و مدل قبلی از حیث کدام محافظه کارانه تر و محدودتر است؟

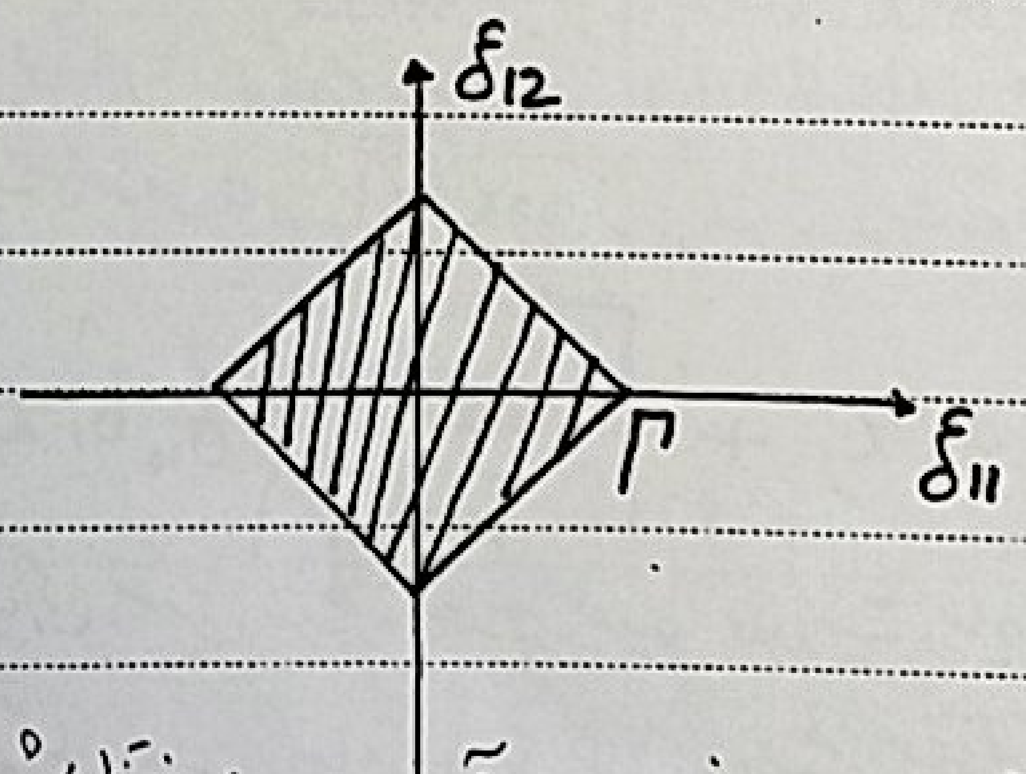
مدل Box از مدل Ball محافظه کارتر است.

$$|x_1| + |x_2| \ge \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$$

مدل در حالت بیضوی غیرخطی می‌شود.

Polyhedral unc. set $\qquad$ مجموعه عدم قطعیت در حالت چندوجهی (لوزی)





$\tilde{a}_{ij} = a_{ij} + \xi_{ij}\hat{a}_{ij}$

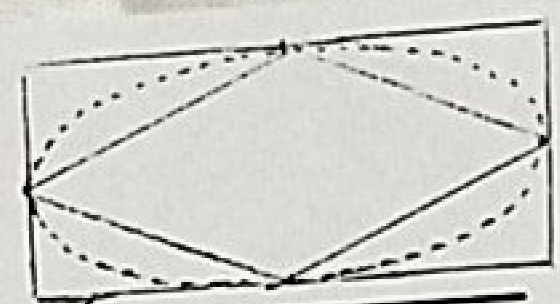
کلاً شکل ξ_{ij} (راست) نسبت به $\tilde{a}_{ij}$ (چپ) منتقل شده و در راس مرکز قرار گرفته است

چون وقتی $\hat{a}_{ij} \times \xi_{ij}$ پس در شکل سمت چپ محدوده تغییر $\tilde{a}_{ij}$ از $(-1, +1)$ به $(-\hat{a}_{ij}, +\hat{a}_{ij})$

تغییر می‌کند، همگام با مقدار ثابت a_{ij} هم جمع می‌شوند پس دیگر در مرکز نیست پس $(a_{ij} - \hat{a}_{ij}, a_{ij} + \hat{a}_{ij})$

BOX > بیضی > چندوجهی

منطقه کاری



Subject:

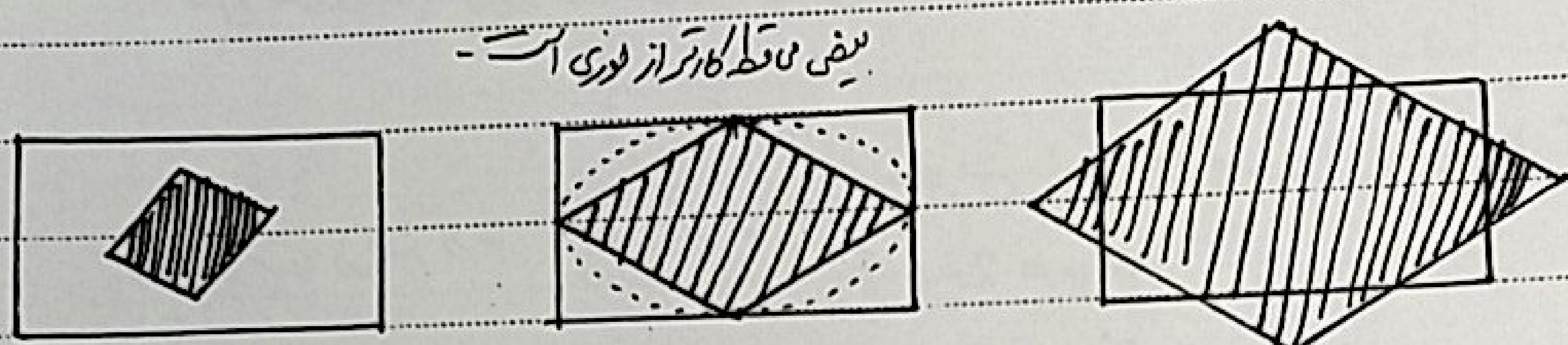
Year. Month. Date. / /

بزرگترین بیضی در منطقه کاری

$$u_1 = \left\{ \delta \;\middle|\; \|\delta\|_1 \leqslant \Gamma \right\} = \left\{ \delta \;\middle|\; \sum_{j \in J_i} |\delta_j| \leqslant \Gamma \right\}$$

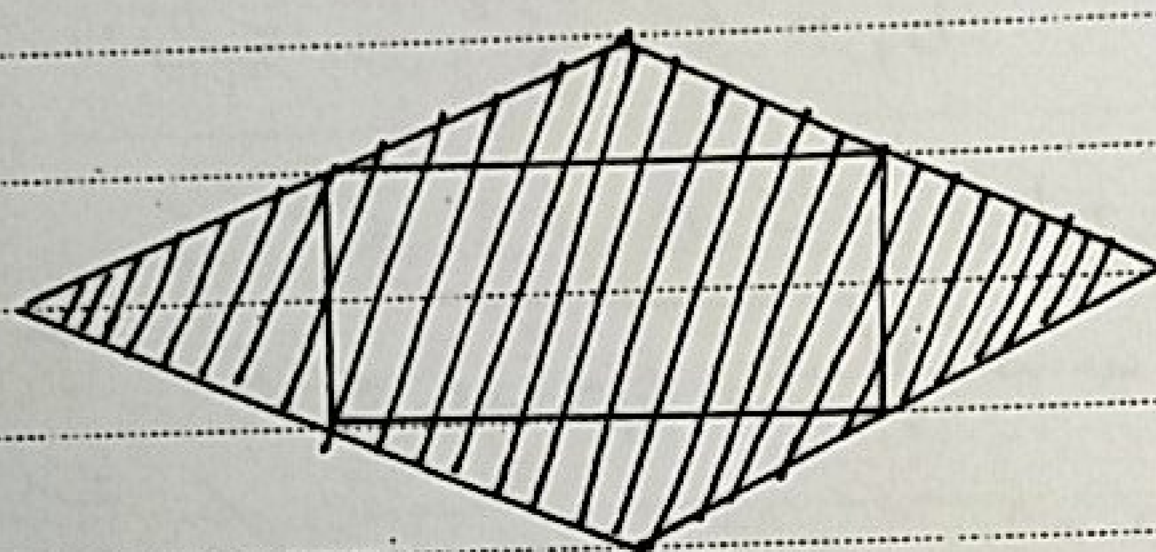
با فرض $\Psi = 1$

بیضی منطقه کارتر از لوزی است.



$0 < \Gamma < 1$ $\quad$ $\Gamma = 1$ $\quad$ $1 < \Gamma < |J_i|$

هرحالتی قابل تبدیل به این حالت است.



$\Gamma = |J_i|$

در حالت : LHS

$(\max f : ax \leqslant b \quad \text{All Free})$

$$\sum_j a_{ij} x_j + \left[\max_{\delta \in u_{PH}} \left\{ \sum_{j \in J_i} \delta_{ij} \hat{a}_{ij} x_j \right\} \right] \leqslant b_i$$

اثبات از طریق Semi definite Conic Prog.

Robust Conterpart

پارامتر

$$\xrightarrow{R.C} \begin{cases} \sum_j a_{ij} x_j + \Gamma p_i \leqslant b_i \\ p_i \geqslant \underbrace{\hat{a}_{ij} |x_j|}_{\text{این عبارت باید max گردد}} \quad \forall j \in J_i \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} \sum_j a_{ij} x_j + \Gamma p_i \leqslant b_i \\ p_i \geqslant \hat{a}_{ij} u_j \quad \forall j \in J_i \\ -u_j \leqslant x_j \leqslant u_j \quad j \in J_i \end{cases}$$

$\max(\delta_{ij} \hat{a}_{ij} x_j) \longrightarrow$ چون علامت x_j را نمی‌دانیم و می‌خواهیم عبارت را max کنیم پس $|x_j|$ می‌گذاریم و حالا مقدار u را با $|x| \leqslant u$ تعریف می‌کنیم یعنی u از $\max |x|$ بزرگتر باشد تا عبارت بالا max گردد. پس $-u \leqslant x \leqslant u$

در حالت : LHS + RHS

$$b_i x_0 + \sum_j a_{ij} x_j + \left[\max_{\delta \in u_{PH}} \left\{ \delta_{i0} \hat{b}_i x_0 + \sum_{j \in J_i} \delta_{ij} \hat{a}_{ij} x_j \right\} \right] \leqslant 0$$

طبق روش جزوه حل شده اول $\tilde{b}_i = b_i + \delta \hat{b}_{i0}$ را بازکنی و سپس بازشده راست چپ محدودیت بیاید صحیح است. اگر ابتدا $\tilde{b}$ را بازکنیم و به سمت چپ بیاوریم یا کامل (دسته) بیاریم چپ علامت آن عوض شود ولی جواب یکی می‌شود. اشکالی ندارد؟

PAPCO

فصل ۳ به بعد کتاب (Ben-Tal) را خودت بخوان، تدریس نمی‌شود.

Subject: .... Year: ...... Month: ...... Date: ...... ( )

$$\xrightarrow{R.C}\begin{cases}\sum_j A_i x_j+\Gamma p_i\leqslant 0\\ p_i\geqslant \hat{A}_i\,|x_j| \quad \forall j\in J_i\end{cases}\longrightarrow\begin{cases}b_i x_0+\sum a_{ij}x_j+p_i\Gamma\leqslant 0\\ p_i\geqslant \hat{a}_{ij}|x_j| \quad \forall j\in J_i\\ p_i\geqslant \hat{b}_i\,|x_0|\end{cases}$$

$$\begin{cases}\sum_j a_{ij}x_j+\Gamma p_i\leqslant b_i\\ p_i\geqslant \hat{a}_{ij}\,u_j \quad \forall j\in J_i\\ p_i\geqslant \hat{b}_i\\ -u_j\leqslant x_j\leqslant u_j \quad \forall j\in J_i\\ \quad u_j\geqslant 0\end{cases}$$

$$A_i=\{b_i,\{a_{ij}\}\}$$

$$\hat{A}_i=\{\hat{b}_i,\{\hat{a}_{ij}\}\}$$

مثال عددی:

$$\begin{cases}2x_1+1.5x_2+\Gamma p_1\leqslant 6\\ p_1\geqslant u_1 & -u_1\leqslant x_1\leqslant u_1\\ p_1\geqslant 0.5u_2 & -u_2\leqslant x_2\leqslant u_2\\ p_1\geqslant 1\end{cases}$$

نکته: مدل در حالت چندوجهی نسبت به حالت‌های Box و Ball (جعبه و بیضوی) در شرایط مساوی

$\Gamma = 1 = \Omega = \Psi$، کمتر محافظه‌کار است.

نکته: این مدل بر خلاف مدل بیضوی خطی است و از این جهت بر مدل بیضوی مزیت دارد.

جاهای کار در حوزه Robust:

- General Robust
- Emergency - ...
- Robust Multiobjective
- DEA Robust
- fuzzy stochastic
- Affine Robust
- Globalize Robust

حوزه ۴ی داغ در هوش مصنوعی (... , MIT , Gorgia Tech uni)

Health Care

Energy

Finance

مقاله جدید در حوزه روباست: Robust Combinatory Optimization

یکشنبه

۹۳/۱/۲۴

حالت های ترکیبی:

۱- Box + Ellepsoidal

$$U_{2\cap\infty} = \left\{ \xi \;\middle|\; \sum_{j \in J_i} \xi_{ij}^2 \le \Omega^2,\ |\xi_{ij}| \le \Psi,\ \forall j \in J_i \right\}$$

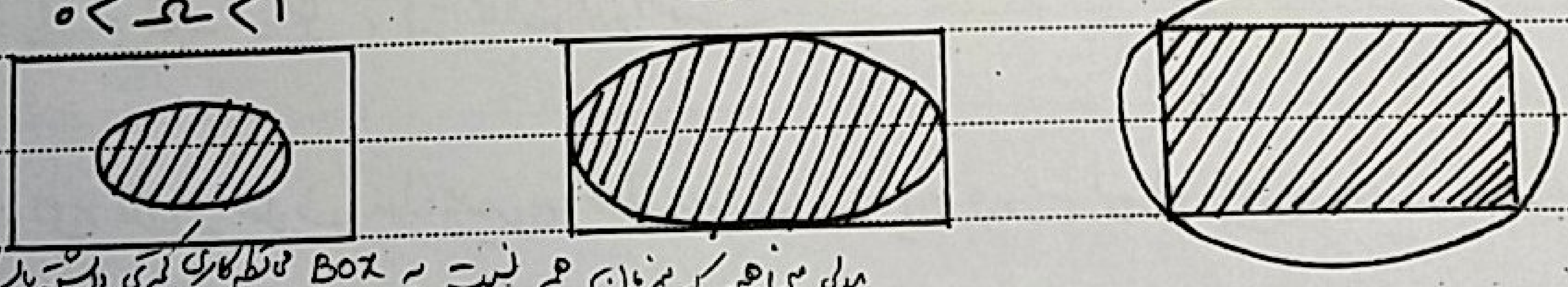
$\Psi \le \Omega \le \Psi\sqrt{|J_i|}$ → محدوده منطقی

بهبود اکید می‌بخشد.

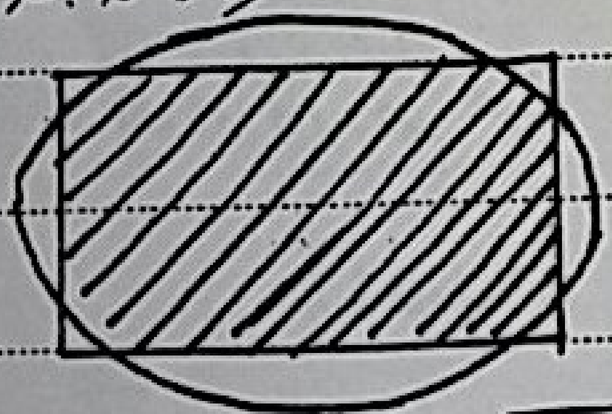
اشتراک فضای داخل مستطیل و بیضی فضای جواب است.

$\Omega = \sqrt{|J_i|}$

$\Psi = 1$ $\qquad 0 < \Omega < 1 \qquad \Omega = 1$



مدلی میخواهیم که همزمان هم نسبت به BOX محافظه کاری کمتری داشته باشد هم نسبت به بیضی



→ میخواهیم مجموعه‌ای داشته باشیم که نسبت به BOX محافظه کاری کمتری داشته باشد.

$1 < \Omega < \sqrt{|J_i|}$

Subject: ترم ۱ ست میم $\max \leq$ نرم
Year. Month. Date. ( )

Z_{ij} → متغیر تعداد متغیرهای دوال
متناسب با محدودیت ها نیست پس ز چیست؟

فرمول General (به علامت ≤ بستگی ندارد و نه به Max / Min تابع هدف و نه به ≤ یا ≥ بودن محدودیت ≤)

$\boxed{\text{General: } \max fx : ax \leq b}$

چون همه حالت های دیگر قابل تبدیل به آن هستند)

دلیل General بودن مدل

$$\sum_j \overbrace{A_{ij}}^{b_i x_{i0} + a_{ij} x_j} x_j + \left[\max_{\xi \in U_{2 \cap \infty}} \left\{ \xi_i \hat{A}_i x \right\} \right] \leq 0 \qquad x > 0$$

$$b_i x_0 + \sum_j a_{ij} x_j + \left[\max_{\xi \in U_{2\cap\infty}} \left\{ \xi_{i0} \hat{b}_i x_0 + \sum_{j \in J_i} \xi_{ij} \hat{a}_{ij} x_j \right\} \right] \leq 0$$

LHS در عدم قطعیت: $\sum_j a_{ij} x_j + \left[\Psi \sum_{j \in J_i} \hat{a}_{ij} \left| x_j - Z_{ij} \right| + \Omega \sqrt{\sum_{j \in J_i} \hat{a}_{ij}^2 Z_{ij}^2} \right] \leq b_i$

از قسمت دوال مدل بدست آمده

z_{ij} = متغیر دوگان متناظر با محدودیت i ام و پارامتر j ام غ قطعی

حالت LHS + RHS $\quad \sum_j A_{ij} x_j + \left[\overset{\Psi}{\sum_{j \in J_i}} \hat{A}_{ij} \left| x_j - Z_{ij} \right| + \Omega \sqrt{\sum_{j \in J_i} \hat{A}_{ij}^2 Z_{ij}^2} \right] \leq 0$

$\Psi = 1$

$$\Rightarrow b_i x_0 + \sum_j a_{ij} x_j + \left[\sum_{j \in J_i} \hat{a}_{ij} \left| x_j - Z_{ij} \right| + \hat{b}_i \left| 1 + Z_{i0} \right| \right. \qquad x_0 - z_{ij} = -1 - Z_{i0}$$

$$\left. + \Omega \sqrt{\sum_{j \in J_i} \hat{a}_{ij}^2 Z_{ij}^2 + \hat{b}_{i0}^2 Z_{i0}^2} \right] \leq 0$$

$$\begin{cases} \sum_j a_{ij} x_j + \sum_{j \in J_i} \hat{a}_{ij} u_{ij} + \hat{b}_i u_{i0} + \Omega \sqrt{\sum_{j \in J_i} \hat{a}_{ij}^2 Z_{ij}^2 + \hat{b}_i^2 Z_{i0}^2} \leq b_i \\ -u_{ij} \leq x_j - Z_{ij} \leq u_{ij} \\ -u_{i0} \leq 1 + Z_{i0} \leq u_{i0} \\ u_{ij}, u_{i0} \geq 0 \end{cases}$$

مثال عددی (محدودیت اول مثال مورد بحث)

$$\begin{cases} 2x_1 + 1.5x_2 + u_{11} + 0.5u_{12} + u_{10} + \Omega\sqrt{z_{11}^2 + 1/4\, z_{12}^2 + z_{10}^2} \leq 6 \\ -u_{11} \leq x_1 - z_{11} \leq u_{11} \\ -u_{12} \leq x_2 - z_{12} \leq u_{12} \\ -u_{10} \leq 1 + z_{10} \leq u_{10} \end{cases}$$

نکته: علی رغم انعطاف و مزایای این مدل، این مدل غیرخطی است و استفاده از آن می‌تواند با دشواری‌هایی همراه باشد.

حالت Box + PollyHedral

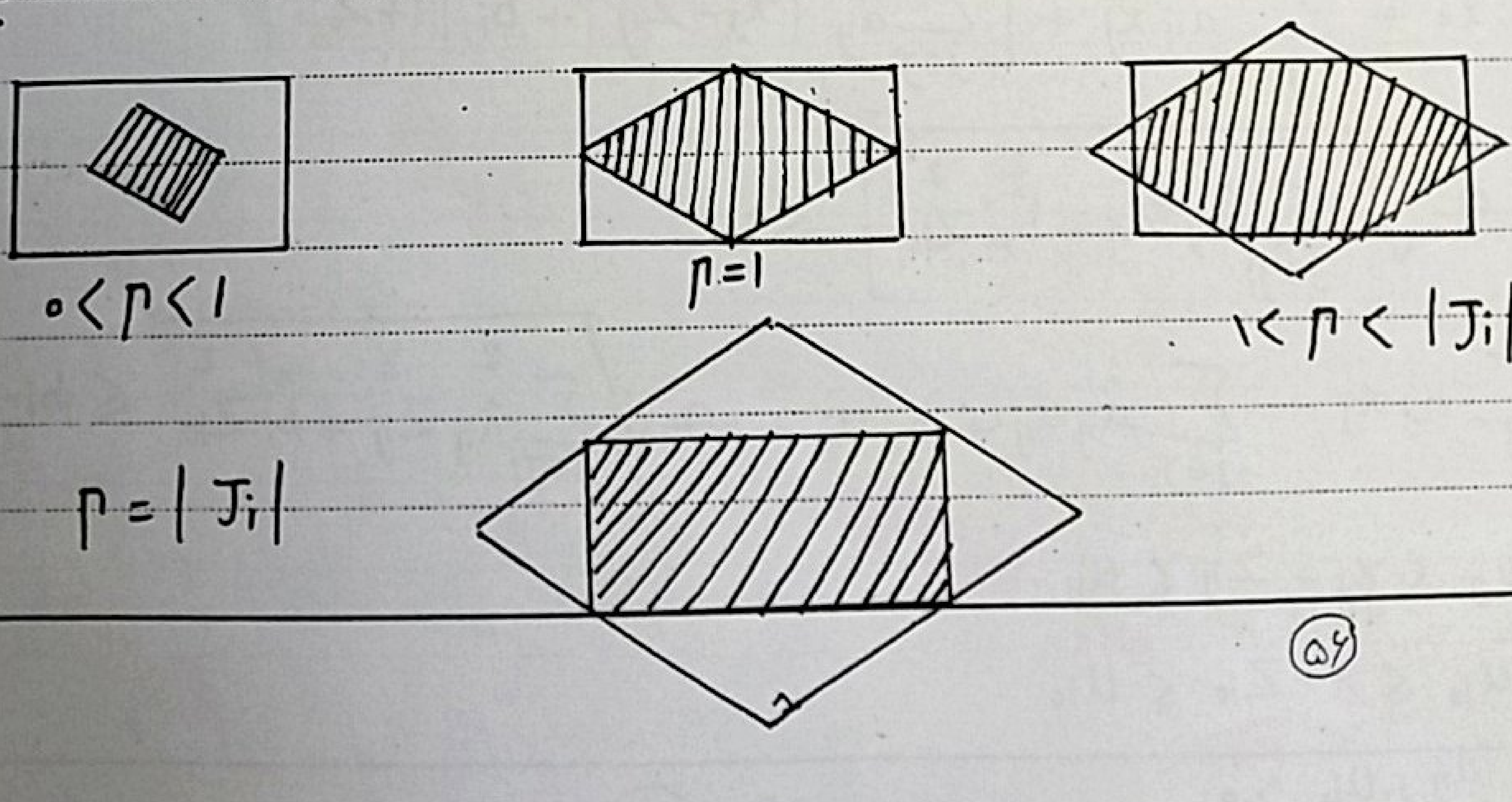
تقریباً می‌توان گفت منعطف‌ترین و بهترین حالت است.

$$U_{1\cap\infty} = \left\{ \xi \mid \sum_{j \in J_i} |\xi_j| \leq \Gamma ,\ |\xi_{ij}| \leq \Psi ,\ \forall j \in J_i \right\}$$

محدوده منطقی $\Psi \leq \Gamma \leq \Psi |J_i|$

با فرض

$\Psi = 1$



$$\rightarrow b_i x_0 + \sum_j a_{ij} x_j + \left[\Psi \sum_{j \in J_i} \max_{\xi \in \mathcal{U}_{1 \cap \infty}} \left\{ \xi_{i0} \hat{b}_i x_0 + \sum_{j \in J_i} \xi_{ij} \hat{a}_{ij} x_j \right\} \right] \leqslant 0$$

$$\text{LHS:} \begin{cases} \sum_j a_{ij} x_j + \Psi \sum_{j \in J_i} w_{ij} + \Gamma z_i \leqslant b_i & \forall i \\ z_i + w_{ij} \geqslant \hat{a}_{ij} |x_j| & \forall j \in J_i \\ z_i, w_{ij} \geqslant 0 \end{cases}$$

متغیر دوگان

$$\begin{array}{l} \text{LHS + RHS} \\ \Psi = 1 \end{array} \begin{cases} \sum_j A_{ij} x_j + \sum_{j \in J_i} p_{ij} + \Gamma z_i \leqslant 0 \\ z_i + p_{ij} \geqslant \hat{A}_{ij} |x_j| & \forall j \in J_i \\ z_i \geqslant 0, \; p_{ij} \geqslant 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} b_i x_0 + \sum_j a_{ij} x_j + \left[\sum_{j \in J_i} p_{ij} + p_{i0} + z_i \Gamma \right] \leqslant 0 \\ z_i + p_{ij} \geqslant \hat{a}_{ij} |x_j| & \forall j \in J_i \\ z_i + p_{i0} \geqslant \hat{b}_i |x_0| \\ z_i, p_{ij}, p_{i0} \geqslant 0 \end{cases}$$

قابلیت کردن در گز

$$\Rightarrow \begin{cases} \sum_j a_{ij} x_j + \left[z_i \Gamma + \sum_{j \in J_i} p_{ij} + p_{i0} \right] \leqslant b_i \\ z_i + p_{ij} \geqslant \hat{a}_{ij} u_j & \forall j \in J_i \\ z_i + p_{i0} \geqslant \hat{b}_i \\ -u_j \leqslant x_j \leqslant u_j & \forall j \in J_i \end{cases}$$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

مثال عددی:

$$\begin{cases} 2x_1 + 1.5x_2 + z_1\Gamma + p_{11} + p_{12} + p_{10} \leqslant 6 \\ z_1 + p_{11} \geqslant u_1 \\ z_1 + p_{12} \geqslant 0.5u_2 \\ z_1 + p_{10} \geqslant 1 \\ -u_1 \leqslant x_1 \leqslant u_1, \quad -u_2 \leqslant x_2 \leqslant u_2 \\ z_1, p_{11}, p_{12}, p_{10} \geqslant 0 \end{cases}$$

تمرین ۱: برای مثال زنجیره تامین MDF دو حالت Box+Ellepsoid و Box+Pollyhedral

را تا آخر که گروه، در مورد میزان محافظه کاری در مدل از طریق نتایج عددی تحلیل ارائه دهید. (۲ هفته دیگر)

تمرین ۲ (تشویقی): به صورت تحلیلی در مورد مقایسه میزان محافظه کاری دو مدل تحقیق کنید (در حالت

یکسان میزان محافظه کاری مدل B+E بیشتر از محافظه کاری مدل B+P است)

تا ۲۰ اردیبهشت)

RAPCO

Subject:
Year. Month. Date. ( )

سه شنبه

۹۳/۱/۲۴

MIT & NUS

Bertsimas & Sim (2004) Price of Robustness

$\mathcal{U}$: مجموعه عدم قطعیت

J_i : مجموعه پارامترهای دارای عدم قطعیت در سطر i ام

رنج تغییر متغیر $\left[a_{ij}-\hat{a}_{ij} \quad a_{ij}+\hat{a}_{ij}\right]$

$$\eta_{ij} = \frac{\tilde{a}_{ij} - a_{ij}}{\hat{a}_{ij}} \in [-1, 1] \rightarrow \xi$$ مثل میان ← همچنان توزیع را در این بازه نمی دانیم.

$$\max \quad c^T x$$

$$\text{s.t:} \quad \sum_j a_{ij} x_j + \sum_{j \in J_i} \hat{a}_{ij} \overset{|x_j|}{y_j} \leqslant b_i \quad \forall i$$

مثلاً اگر $|J_i| = 4$

$$-y_j \leqslant x_j \leqslant y_j$$

$$l \leqslant x_j \leqslant u$$

شبیه حالت Box

$$y_j \geqslant 0$$

در حالت بهینه x^* خواهیم داشت:

$$\sum_j a_{ij} x_j^* + \sum_{j \in J_i} \hat{a}_{ij} |x_j^*| \leqslant b_i \quad \forall i$$

(آنالیز حساسیت) inactive → + interactive ← Proactive (روباست)

Subject:

Year. Month. Date. ( )

~~Necessity protection level~~

★ دقت کنید عبارت $\sum_{j \in J_i} \hat{a}_{ij} |x_j^*|$ تعیین کننده سطح مورد نیاز ضروری حفاظت برای

محدودیت مورد نظر می باشد که در واقع نشان دهنده اختلاف بین b_i و $\sum_j a_{ij} x_j^*$ است.

⊕ فلسفه روش Bertsimas این است که فقط H.W.C نباشد و سطوح مختلف را برای ما ایجاد کند مثل

C.C.P

پارامتر دلخواه‌مان → DM

$\Gamma_i \in [0, |J_i|]$

تنظیم درجه محافظه‌کاری

اگر در یک سطح مثلاً 5 پارامتر دارای عدم قطعیت داریم نهایتاً هر 5 تا

می توانند عدم قطعیت بگیرند و یا ممکن است مثلاً 3 تا عدم قطعیت بگیرند.

✓ با استفاده از پارامتر Γ_i موجب بودن جواب یا سطح حفاظت طوری تعیین می شود که حداکثر به اندازه جزء

صحیح پارامتر Γ_i یا $\lfloor \Gamma_i \rfloor$ تعداد از ضرایب اجزء تغییر داشته باشد و یکی از ضرایب a_{it}

به اندازه $(\Gamma_i - \lfloor \Gamma_i \rfloor)\hat{a}_{it}$ تغییر می کند.

خود مسئله در optimize کردن مشخص می کند کدام پارامترها را در S_i قرار دهد و کدام را در $\{t_i\}$

$\max \; c^T x$

Box می شود مثل

به ازای ۲ پارامتر (۲ تا از ۴ تا) اتفاق بد می شود تا آخر اضافه می شود

اضافه می شود

یک پارامتر دیگر را می گیرد و به اندازه

s.t:

$$\sum_j a_{ij} x_j + \max_{\{S_i \cup \{t_i\} \mid S_i \subseteq J_i,\ |S_i| = \lfloor \Gamma_i \rfloor,\ t_i \in J_i \setminus S_i\}} \left\{ \sum_{j \in S_i} \hat{a}_{ij} y_j + (\Gamma_i - \lfloor \Gamma_i \rfloor) \hat{a}_{it_i} y_{t_i} \right\} \leqslant b_i \quad \forall i$$

پارامترهای دارای عدم قطعیت که اتفاق بد نمی افتد

یک عضو

2

0.5

t_i آن‌هایی که عضو J_i هستند و عضو S_i نیستند.

در optimization وارد نمی شوند فقط با مقدار Nominal

$-y_j \leqslant x_j \leqslant y_j$

$l_j \leqslant x_j \leqslant u_j$

$y_j \geqslant 0$

$J_i = \{1, 2, 4, 5\}$

$|J_i| = 4$

$\Gamma_i = 2.5$

$\rightarrow S_i$, $|S_i| = 2$: $\{1,2\}$, $\{1,4\}$, $\{1,5\}$, $\{2,4\}$, $\{2,5\}$, $\{4,5\}$

PAPCO

Subject:

Year. Month. Date. ( )

b_i هم مقدار فرض قطعی باشد؟

if $\Gamma_i = 0 \longrightarrow$ معادل مدل اسمی قطعی

$\Gamma_i =$ integer سطح حفاظت $\longrightarrow \beta(x, \Gamma_i) = \max \left\{ \sum_{j \in S_i} \hat{a}_{ij} |x_j| \right\}$

$\{ S_i \mid S_i \subseteq J_i , |S_i| = \Gamma_i \}$

$\Gamma_i = |J_i| \longrightarrow$ حداکثر حفاظت $\longrightarrow$ BOX

H.W.C

قضیه ۱: برای هر جواب مثل x^* تابع حفاظت محدودیت i ام به شرح ذیل خواهد بود.

$$\beta(x^*, \Gamma_i) = \max \left\{ \sum_{j \in S_i} \hat{a}_{ij} |x^*_j| + (\Gamma_i - \lfloor \Gamma_i \rfloor) \hat{a}_{i t_i} |x^*_{t_i}| \right\}$$

$$\{ S_i \cup \{t_i\} \mid S_i \subseteq J_i , |S_i| = \lfloor \Gamma_i \rfloor , t_i \in J_i \setminus S_i \}$$

پس ۲ تا پارامتر با ① ارضا می‌شوند و z_{ij} آن ۱

① می‌شود و یک پارامتر با ۰/۵ ارضا می‌شود یعنی $z_{ij} = 0.5$

مقدار تابع هدف مسئله خطی ذیل برابر با مقدار تابع فوق خواهد بود.

$\Gamma_i = 2.5$ مثلاً اگر

ضرب ارضا شدن هر پارامتر دارای عدم قطعیت

$$\beta_i(x^*, \Gamma_i) = \max \sum_{j \in J_i} \hat{a}_{ij} |x^*_j| z_{ij}$$

دقت کنید x^* معلوم است.

s.t:

$$\sum_{j \in J_i} z_{ij} \leq \Gamma_i$$

$$0 \leq z_{ij} \leq 1 \quad \forall j \in J_i$$

(اگر بدانیم x^* معلوم است)

پس احتمالاً از طریق Dual حل می‌کنند.

تئوری: مدل اصلی با توجه به قضیه ① معادل مسئله خطی ذیل خواهد بود.

$$\max \; c^T x$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_j a_{ij} x_j + z_i \Gamma_i + \sum_{j \in J_i} p_{ij} \leq b_i \qquad \forall i$$

شبیه Box + Pollyhedral

$$z_i + p_{ij} \geq \hat{a}_{ij} y_j \qquad \forall i, j \in J_i$$

$$-y_j \leq x_j \leq y_j \qquad \forall j \in J_i$$

$$l_j \leq x_j \leq u_j \qquad \forall j$$

$$p_{ij} \geq 0 \qquad \forall j \in J_i$$

$$y_j \geq 0 \qquad \forall j$$

$$z_i \geq 0 \qquad \forall i$$

۹۳,۱,۳۱

مدل اولیه:

$\max c^T x$

$\sum \bigcirc + \max \bigcirc \leq b_i$

$\equiv$

تبدیل ترم max عبارت بالا به یک برنامه‌ریزی خطی:

$\max \bigcirc$

$\equiv$

تبدیل مدل max سازی بالا به min سازی از طریق تبدیل به Dual

$\min \bigcirc$

$\equiv$

نکته: جایگزین کردن مدل آخر در مدل اولیه

$$\beta(x^*, \Gamma_i) = \max \left\{ \sum_{j \in S_i} \hat{a}_{ij} |x^*_j| + (\Gamma_i - \lfloor \Gamma_i \rfloor) \hat{a}_{i t_i} |x^*_t| \right\}$$

$$\{S_i \cup \{t_i\} \mid S_i \subseteq J_i, \; |S_i| = \lfloor \Gamma_i \rfloor, \; t_i \in J_i \setminus S_i\}$$

با فرض این که x_j^* معلوم است

$$\beta_i(x^*, \Gamma_i) = \max \sum_{j \in J_i} \hat{a}_{ij} |x^*_j| z_{ij}$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{j \in J_i} z_{ij} \leq \Gamma_i \qquad z_i$$

$$0 \leq z_{ij} \leq 1 \qquad \forall j \in J_i \qquad p_{ij}$$

Subject: ۹. چرا تبدیل به متغیر می‌شود

Year. Month. Date.

Light Robustness

Fichetti & Monaci, 2009

Dual مسئله (a):

$$\min \sum_{j \in J_i} p_{ij} + \Gamma_i z_i$$

s.t:

$$z_i + p_{ij} \geq \hat{a}_{ij} |x^*_j| \quad \forall i, j \in J_i$$

با جایگزین کردن معادل در مدل اصلی $\Rightarrow$ *

$$p_{ij} \geq 0 \quad \forall j \in J_i$$

$$z_i \geq 0 \quad \forall i$$

* $\max c^T x$ مدل اولیه

s.t:

$$\sum a_{ij} x_{ij} + z_i \Gamma_i + \sum_{j \in J_i} p_{ij} \leq b_i \quad \forall i$$

$$z_i + p_{ij} \geq \hat{a}_{ij} y_j \quad \forall i, j \in J_i$$

$$-y_j \leq x_j \leq y_j \quad \forall j$$

$$l_j \leq x_j \leq u_j \quad \forall j$$

$$p_{ij} \geq 0 \quad \forall i, j \in J_i \qquad y_j \geq 0 \quad \forall j \qquad z_i \geq 0 \quad \forall i$$

"سوال امتحان": مقایسه این مدل با مدل Box و مدل بیضی را از منظر تعداد متغیرها و تعداد محدودیت ها و ادامهٔ تکمیل :

اعتبارسنجی مدل های استوار:

✓ هر مدلی که ساخته می شود باید دو تست عمده را طی کند → Model Verification : مدل که ساختید درست کار می کند.
(صحت کارکرد مدل)

Model Validation : مدل نه تنها درست کار می کند، کار درست تر و خوب تر را انجام می دهد. (عملکرد خوبی دارد)

روش ها Verification :

- حل یک مدل کوچک که امکان بررسی دقیق تک تک محدودیت ها و عملکرد تابع هدف در آن میسر باشد.

- تست حالات حدی: در برخی حالات حدی هم مدل مورد بررسی قرار می گیرند. مانند این که اگر $\Gamma = 0$ مدل Bertsimas & Sim باید مشابه حالت قطعی باشد.

- تست تحلیل حساسیت - مقادیر برخی پارامترها را تغییر داده و رفتار مدل را مورد بررسی قرار می دهیم. (بزرگتر کردن مقدار Γ و دیدن بدتر شدن مقدار تابع هدف)

روش Validation مدل های استوار:

وقتی یک مدل استوار می سازیم برای نشان دادن عملکرد بهتر آن، آن را با مدل های دیگری که برای آن مسئله وجود دارد (در حالت قطعی و حالت غیر قطعی) مقایسه می کنیم. اما مقایسه نباید روی داده های اسمی انجام بگیرد

Subject:
Year. Month. Date. ( )

چون در حالت اسمی داده های موجود هنگام تصمیم گیری، مقایسه بی مورد خواهد بود.

سه شنبه
۹۳/۲/۲
فرض کنید مدل های ذیل برای یک مسئله توسعه داده شده اند:

مدل قطعی

$$1)\ \min Z_D = c^T x$$

$$\text{s.t:}\quad \sum_j a_{ij} x_j \leqslant b_i \quad \forall i$$

$$2)\ \min_{c \in U} \max \left\{ c^T x \right\}$$

$$\text{s.t:}\quad \sum_j a_{ij} x_j + \max_{\delta \in U} \left\{ \sum_{j \in J_i} \delta_{ij} \hat{a}_{ij} x_j \right\} \leqslant b_i \quad \forall i$$

$$3)\ \min Z_U = \bar{c}^T x$$

$$\text{s.t:}\quad \sum \bar{a}_{ij} x_j \leqslant b_i \quad \forall i$$

$\bar{c}$ و $\bar{a}_{ij}$ یک مقدار نامشخص مربوط به پارامتر های a_{ij} و c هستند که با توجه به اینکه روش مدل غیرقطعی برای ما نامعلوم است به این شکل آن ها را نشان می دهیم.

- می دانیم که تحت داده های اسمی لحظه تصمیم گیری همواره $Z_D^* \leq Z_R^*$ یعنی هرچه درجه محافظه کاری بیشتر شود تابع هدف مدل استوار بهتر خواهد شد (این عبارت به درد Validation نمی خورد ولی به درد Verification میخورد)

ضمناً فرض کنید هریک از مدل ها پس از حل جوابها و مقادیر تابع هدف ذیل را تولید کنند:

مدل قطعی	مدل استوار	مدل غیرقطعی (z معلوم)
(Z_D^*, x_D^*)	(Z_R^*, x_R^*)	(Z_u^*, x_u^*)

✓ چون ما در مدل تصمیم گیری در حال برای آینده تصمیم می گیریم تصمیمی (جوابی) بهتر خواهد بود که در آینده و در دنیای واقعیت بهترین تابع هدف را ایجاد کند. اما نکته اینجاست که Validation یا اعتبارسنجی در هنگام تصمیم گیری باید انجام شود و ما نمی توانیم تا هنگام وقوع واقعیت صبر کنیم. همچنین اجرایی کردن همه تصمیمات در واقعیت معقول نیست.

راه حل ← ماشین جادویی زمان: کارکردش واقع نمایی است یعنی تولید واقعیت محتمل آینده از آنچه که برای تست مدل ها. این کار بوسیله یک مدل واقع نمایی یا Realization انجام می گیرد.
(Realization)

چون x معلوم است پس برابر است

$$\min\ C_{real}^T x^* + \pi^T R$$

$$\sum_j a_{ij}^{real} x_j^* + R_i \leq b_i$$

چون x^* از مدل دیگری آمده اند ممکن است محدودیت نقض شود.

مقدار لقی که به محدودیت میدهیم تا محدودیت نقض نشود تبدیل شود.

$$x_{ij} \geq d_i$$

$R \geq 0$

میزان تولید

Demand

c^T_{real} و a_{ij}^{real} مقادیر محتمل برای پارامترهای دارای عدم قطعیت $\bar{c}^T$ و $\bar{a}_{ij}$ هستند که

به طور تصادفی درباره مورد نظر تولید شده اند. برای تولید تصادفی آن ها می توان از یک تابع توزیع تصادفی مثلاً تابع

توزیع یکنواخت بین $\left[a_{ij} - \hat{a}_{ij} \quad a_{ij} + \hat{a}_{ij} \right]$ استفاده کرد.

x^* همان تصمیماتی هستند که بوسیله مدل های تصمیم گیری تولید شده اند و در این مدل به عنوان پارامتر و نه متغیر وارد می شوند

$$x^* \longrightarrow (x^*_D, x^*_R, x^*_u)$$

چون ممکن است به ازای برخی x^* محدودیت ها ارضا نشوند یک متغیر کمکی در محدودیت های دارای پارامتر عدم قطعیت اضافه شده اند

تا میزان تناقض را جبران کنند. اما در مقابل جریمه ای برای این نقض در تابع هدف درنظر گرفته شده است.

پس برای validation مدل باید مراحل زیر را طی کنیم:
چون حداقل دو مدل را میخواهیم مقایسه کنیم، مثلاً هر دو روباست، یا یکی قطعی و یکی غیرقطعی یا ...

1. مدل ۴ را در حالت داده های اسمی زمان تصمیم گیری حل کنید (حداقل دو مدل نیاز داریم)

2. جواب مدل ۴ را ذخیره کنید (x^* ها).

3. مدل قطعی با استفاده از واقع حال (شبیه سازی واقعیت) تشکیل داده (که در آن پارامترهای دارای عدم قطعیت به طور تصادفی درباره مورد نظر تولید می شوند) سپس به ازای هر x^* یکبار آن را حل کنید. این گام را به تعداد مورد نیاز تکرار کنید و هر بار عملکرد x^* مدل ها را که همان مقدار $\left(z^{*(real)}_R, z^{*(real)}_D, z^{*(real)}_u\right)$

$$\left.\begin{array}{l}\pi \geq 0 \\ R \geq 0\end{array}\right\} *$$

$$ax - R \leq b$$

$$ax + R \geq b$$

تابع هدف مدل Realization (واقع نمایی) به ازاء x^* مورد نظر هست را ذخیره کنید.

(۴۰) شاخص هایی مانند میانگین مقدار تابع هدف به ازاء مدل واقع نمایی و x^* مورد نظر و یا انحراف از معیار آن (۱) می توانند به عنوان شاخص های بررسی میزان اثربخشی مدل مورد نظر مورد استفاده قرار گیرند.

نکته: در برخی موارد با توجه به ماهیت مسئله می توان به برخی متغیرها این امکان را داد که در مدل Realization خود را به روز کنند (منطق Two-stage). این متغیرها متغیرهایی هستند که در واقعیت با توجه به پارامترهای واقعی می توانند به روز شوند (مانند متغیر جریان در یک مسئله طراحی شبکه). و البته متغیرهایی هم هستند که این امکان را ندارند (مانند متغیرهای مکان بهینه تسهیلات در یک مسئله طراحی شبکه).

$$\min f_{real}^T y^* + c_{real}^T x + \pi R \longrightarrow$$

مقدار این تابع هدف نشان می دهد ارزش داشته مدل را روبابت کرده ایم یا نه.

$$A^{real} y^* + B^{real} x + R \leq d$$

$x^* = -2$ $R = -1$

$\pi = -1$

"مقدار جریمه نقض محدودیت ها در مدل واقع نمایی" و "دامنه پارامترهای دارای عدم قطعیت" نقش مهمی در عملکرد مدل ها بازی می کنند.

ممکن است در مثال مدل روبابت جواب بدتری از قطعی بدهد و این به این معنی است که ریسک در مثال مربوطه جایگاه زیادی نداشته. یک کار خوب این است که روی π آنالیز حساسیت انجام دهیم یعنی مثلاً بگوییم:

یعنی مشخص کنیم در هر سطح π کدام مدل بهترین عملکرد را دارد.

$\pi \longrightarrow$ قطعی

$\pi \longrightarrow$ روباست

$\vdots$

$\pi \longrightarrow$ غیرقطعی

سه شنبه

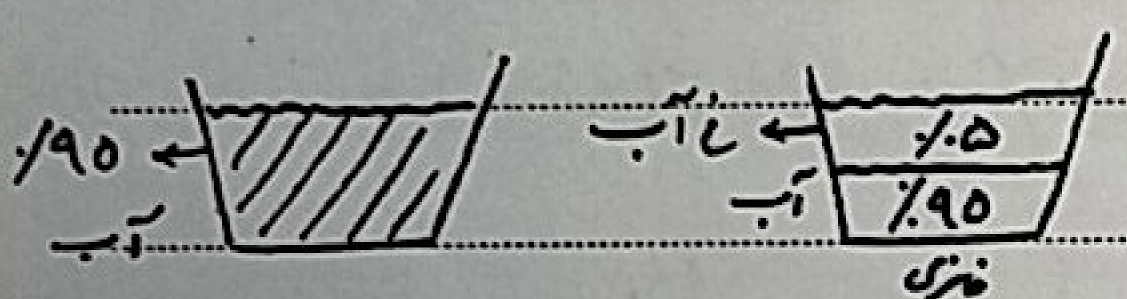
۹۳/۲/۹

برنامه ریزی (بهینه سازی) استوار فازی:

مقدمات:

- مفاهیم غیر دقیق و ابهام غالباً توسط احتمال مدل نمی‌گردد ولی فازی ادعا می‌کند که می‌تواند این مفاهیم را نیز مدل کند

- مثال معروف در مورد تفاوت فازی و احتمالی

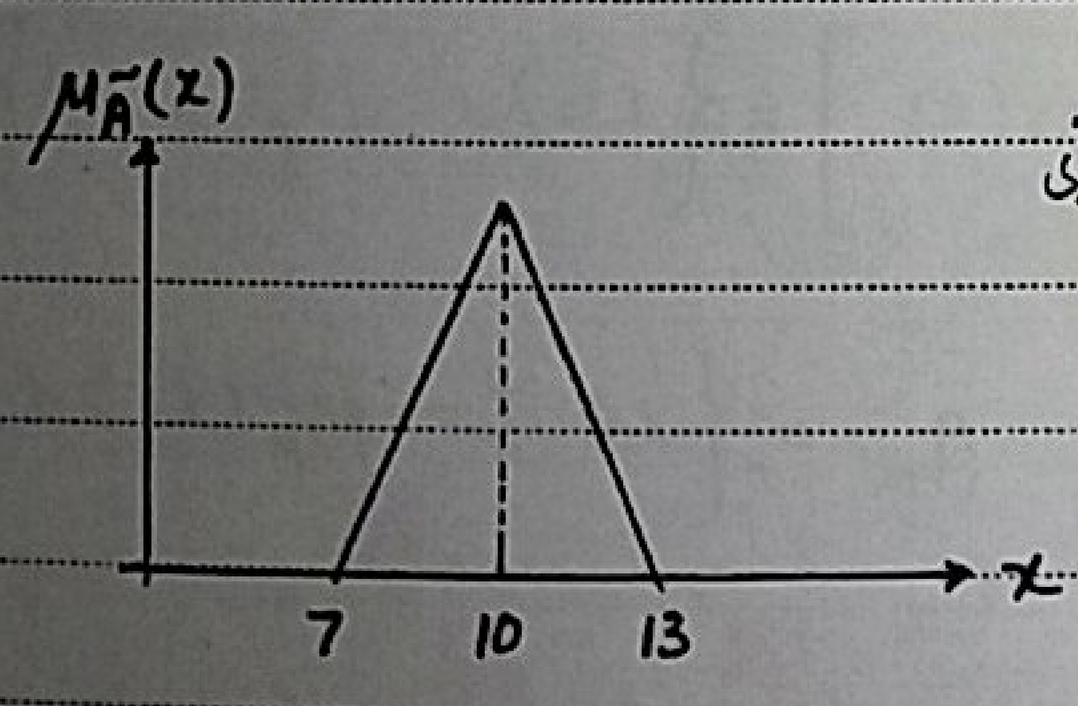


مجموعه‌ی فازی و قطعی:

قطعی

$A = \{5, \dots, 10\}$

$$5 \leqslant x \leqslant 10 \longrightarrow \mu_A(x) \begin{cases} 1 & 5 \leqslant x \leqslant 10 \\ 0 & \text{Otherwise} \end{cases}$$



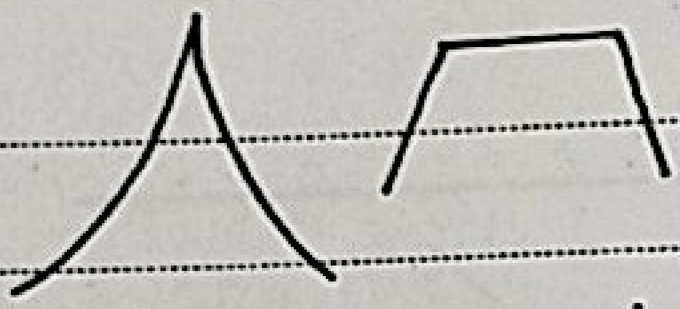
فازی

$\mu_{\tilde{A}}(x) \in [0 \quad 1]$

تابع عضویت فازی

Fuzzy Membership Function.

شکل تابع عضویت فازی ← Direct کاملاً براساس تفکر خبره



Indirect براساس وجود توأم داده‌های عینی و ذهنی

Subjective ← ذهنی → expert

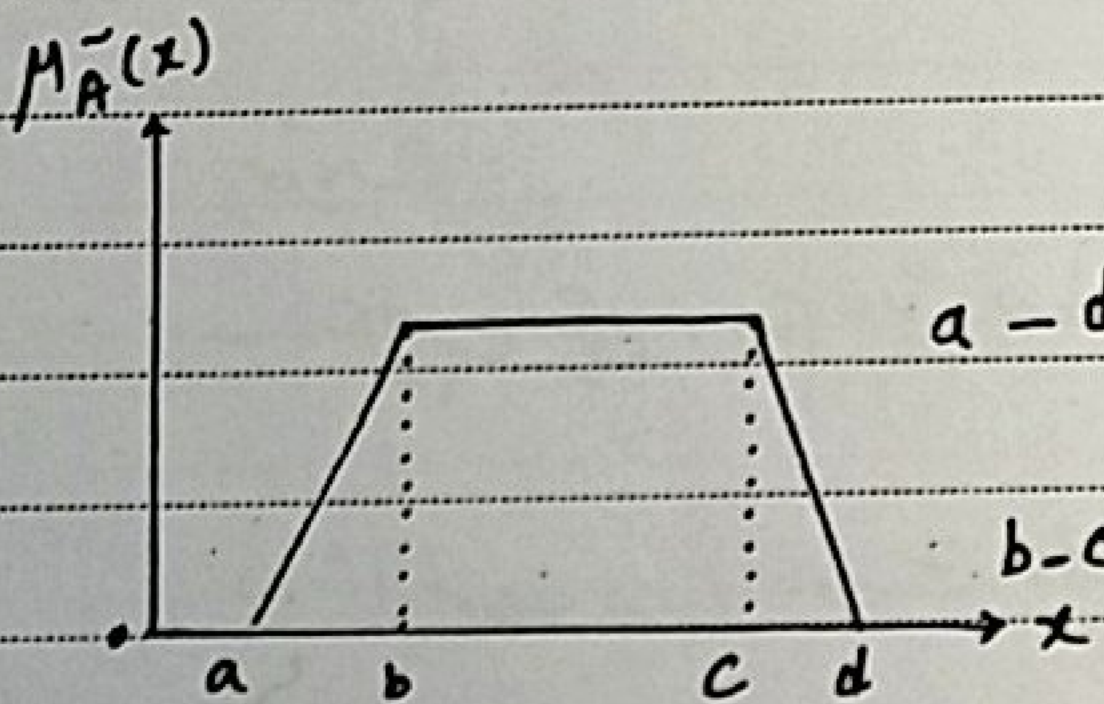
Objective ← عینی → Data

تمرین تشویقی:

مقالات درباره روش‌های مختلف برای تعیین شکل تابع عضویت فازی Membership Function Elicitation

با این keyword

چند تعریف:



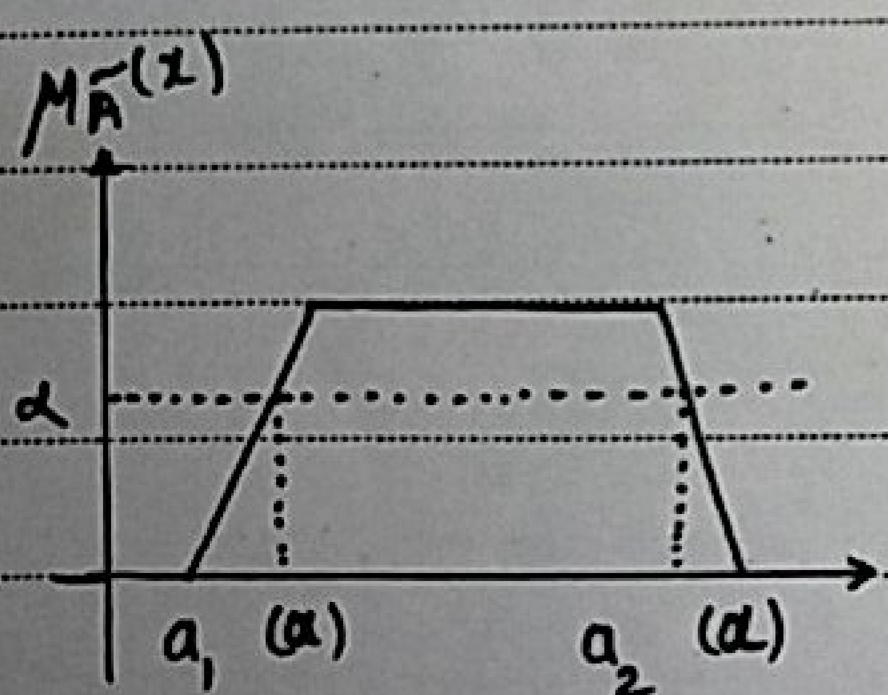
a − d $\quad Support(\tilde{A}) = \{x \in X : \mu_{\tilde{A}}(x) > 0\}$

b − c $\quad Core(\tilde{A}) = \{x \in X : \mu_{\tilde{A}}(x) = 1\}$

$hgt(\tilde{A}) = 1 \quad hgt(\tilde{A}) = \max\limits_{x \in X} \{\mu_{\tilde{A}}(x)\}$

اگر $hgt(\tilde{A}) = 1$ باشد مجموعه نرمال فازی داریم، و اگر $hgt(\tilde{A}) \neq 1$ آنگاه مجموعه Subnormal داریم

برش α یک عدد فازی α-cut (α-level)



$$A_\alpha = [a_1(\alpha) \quad a_2(\alpha)] = \{x \in X : \mu_{\tilde{A}}(x) \geq \alpha\}$$

strong α-cut $\quad A'_\alpha = \{x \in X : \mu_{\tilde{A}}(x) > \alpha\}$

Subject: Tele comminication

Year. Month. Date. ( )

چند رادار با چه قدرتی ←

رادار ، آنتن موبایل ،

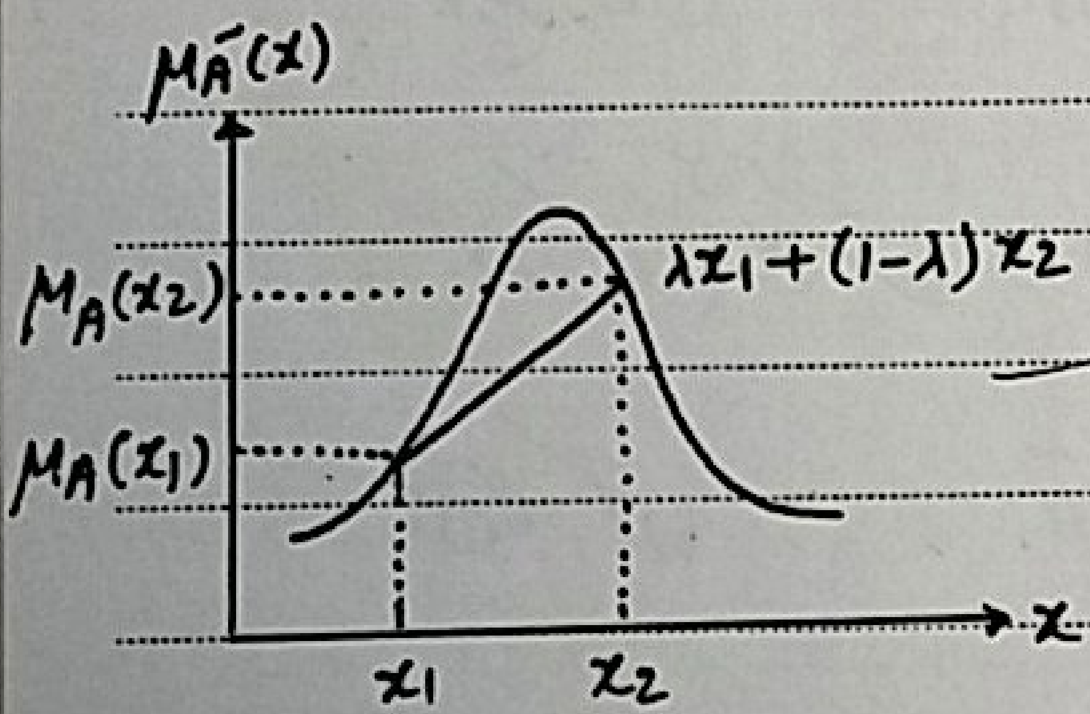
security management → covering پوشش دوربین به حداکثر برسد

مجموعه محدب فازی : Convex F.S

$\tilde{A}$ is a Convex F.S if :

$\forall x_1, x_2 \in X \ , \ \lambda \in [0 \ 1]$

$$\mu_{\tilde{A}}\left[\lambda x_1 + (1-\lambda) x_2\right] \geq \min\left[\mu_{\tilde{A}}(x_1), \mu_{\tilde{A}}(x_2)\right]$$



یعنی تابع عضویت تمام نقاط بین x_1 و x_2 در Min بزرگتر یا مساوی تابع عضویت x_1 و x_2 باشد

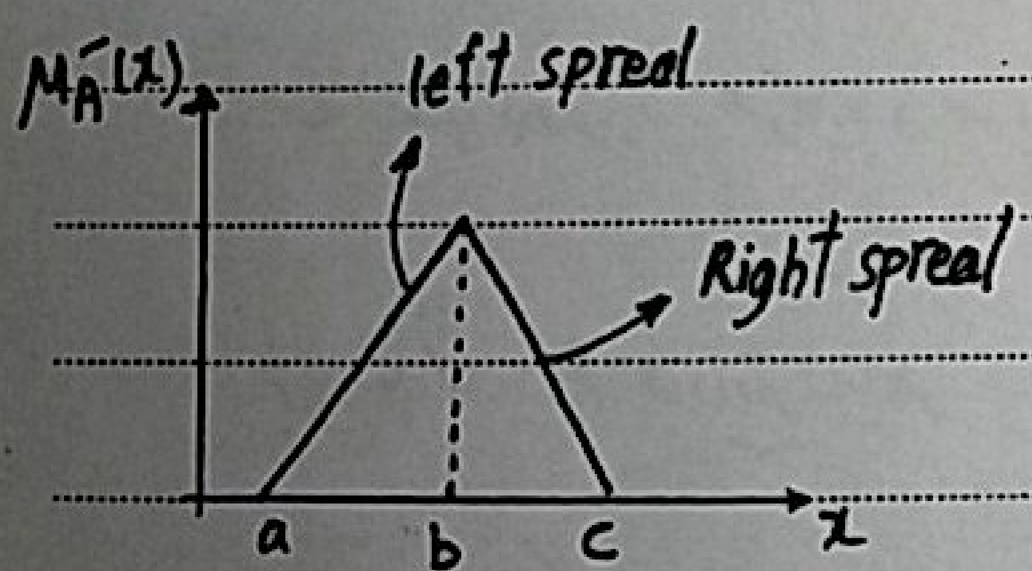
به عبارت دیگر تابع عضویت تنها یکبار صعود یا نزول کند.

اعداد فازی : Fuzzy Numbers

$\tilde{A}$ یک عدد فازی است اگر یک مجموعه فازی نرمال محدب در R باشد.

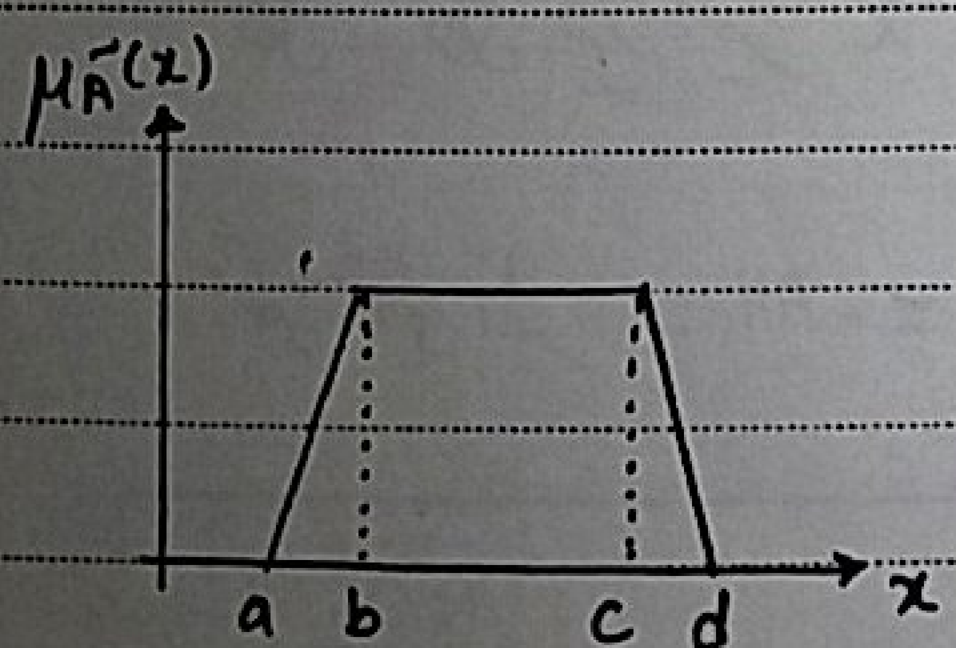
- عدد فازی مثلثی Triangular F.N

$\tilde{A} = (a, b, c)$



$$\mu_{\tilde{A}}(x) = \begin{cases} 0 & \text{if } x \geq c \text{ or } x \leq a \\ \frac{x-a}{b-a} & a \leq x \leq b \\ \frac{c-x}{c-b} & b \leq x \leq c \end{cases}$$

- عدد فازی ذوزنقه ای Trapzoidal F.N



$$\mu_{\tilde{B}}(x) = \begin{cases} 0 & x \leq a \text{ or } x \geq d \\ \frac{x-a}{b-a} & a \leq x \leq b \\ 1 & b \leq x \leq c \\ \frac{d-x}{d-c} & c \leq x \leq d \end{cases}$$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

توزیع و اندازه امکان : Possibility distribution / Measure

– توسعه ابزار مکمل تئوری احتمال برای ابهام به نام possibility prog. توسط زاده در سال 1970 در تئوری possibility theory.

یکشنبه

۹۳/۲/۱۴

توزیع امکان pos. Dis.

فرض کنید X (سن افراد) متغیری در مجموعه مرجع $\mathcal{U}$ $[0 \; 100]$ باشد حال اگر $\tilde{A}$ (young) یک مجموعه فازی تعریف شده در $\mathcal{U}$ ($u \in \mathcal{U}$) باشد

آن گاه گزاره X (Ali، کوچک) is $\tilde{A}$ که درواقع به صورت یک محدودیت فازی روی عضو $x \in X$ (Ali)

تفسیر شده و با تابع عضویت $\mu_{\tilde{A}}(x)$ مشخص می شود دارای توزیع امکان π_x به شکل ذیل خواهد بود.

$$\text{poss}\,(x = u) = \pi_x(u) = \mu_{\tilde{A}}(u) \; ; \; u \in \mathcal{U}$$

به عبارت دیگر $\text{poss}\,(x = \mathcal{U})$ میزان تطابق و سازگاری عضو $\mathcal{U}$ را با مفهوم مربوط به مجموعه $\tilde{A}$

نشان می دهد و به عنوان درجه امکان این که $x \in X$ برابر $\mathcal{U}$ باشد تعبیر می شود. لذا تابع عضویت

مجموعه فازی A درواقع بیانگر یک توزیع امکان برای گزاره x is $\tilde{A}$ می باشد.
isr → is related

مثال: فرض کنید متغیر X (سن افراد) در مجموعه مرجع $U = [0 \quad 100]$ تعریف شده است. حال

شخص خاص نظیر $x = \text{Ali}$ را درنظر بگیرید گزاره Ali is young موجود است به طوری که مجموعه

PAPCO

Subject:
Year. Month. Date. ( )

فازی $\tilde{A} = young$ دارای تابع عضویت ذوزنقه ای با پارامترهای $(15, 20, 25, 30)$

می باشد. با توجه به توضیحات فوق امکان رویدادها را می توان مطابق ذیل بدست آورد:

$$poss(Ali\ is\ 25) = \mu_{\tilde{A}}(25) = 1$$

$$poss(Ali\ is\ 28) = \mu_{\tilde{A}}(28) = \frac{30-28}{30-25} = 0.4$$

مثال ۲: مجموعه $X = \{1, 2, \dots\}$ را درنظر بگیرید. گزاره P را بصورت "علی x تخم مرغ را برای صبحانه میخورد" درنظر بگیرید. برای متغیر x می توان هم توزیع احتمال و هم امکان فراهم نمود.

u	1	2	3	4	5	6	7	8
$\Pi_x(u)$	1	1	1	1	0.8	0.6	0.4	0.2
$P_x(u)$	0.1	0.8	0.1	0	0	0	0	0

توزیع امکان به صورت درجه سهولت خوردن تخم مرغ توسط علی بیان شده است.

توزیع احتمال برمبنای اطلاعات گذشته بدست آمده.

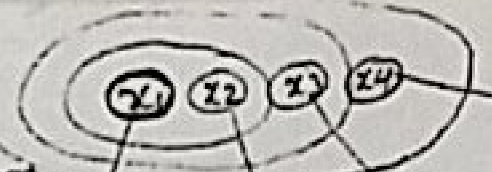
نکته ۱: درجه بالای امکان لزوماً به معنای درجه بالای احتمال نیست.

نکته ۲: یک پیشامد غیر ممکن، غیر محتمل نیز هست پس امکان یک حد بالا برای احتمال است.

$$\Pi_x(u) \geq P_x(u) \qquad \sum P_x(u) = 1$$

؟ $\boxed{\sum \Pi_x(u) \neq 1 \geq 1}$

توزیع امکان به محاسبه درجه امکان پذیری عناصر (بیشینه درهای تک عضوی) می‌پردازد.



$r(x_4)=\rho_4 \longrightarrow r=(r_1,r_2,r_3,r_4) \Rightarrow$ توزیع امکان ← حتماً یک باید داشته باشد.

$r(x_1)=\rho_1$ $\quad r(x_2)=\rho_2$ $\quad r(x_3)=\rho_3$

اندازه امکان — poss. Measure

تعمیمی بر مفهوم توزیع امکان است به طوری که به جای محاسبه درجه امکان یک عنصر خاص (بیشینه هر تک عضوی) درجه امکان وقوع یک زیر مجموعه از X محاسبه می‌گردد. درواقع توابع توزیع امکان روی X و اندازه های امکان روی مجموعه های توانی X $(P(X))$ تعریف می‌شود (2^n حالت اگر n بیانگر X باشد)

اندازه امکان درجه امکان پذیری وقوع یک زیرمجموعه از X را محاسبه می‌کند

تعریف اندازه امکان:

$$\Pi(A)=\max_{x\in A} r(x) \;;\; \forall A\in P(X) \xrightarrow{\text{مثال}} \Pi(\{x_1,x_2,x_4\})=\max(r(x_1),r(x_2),r(x_4))$$

یک اندازه امکان تابعی است به شکل $\Pi: P(X)\longrightarrow[0\ 1]$ با خواص ذیل:

1) $\Pi(\emptyset)=0 \;,\; \Pi(X)=1$

2) $\Pi(\bigcup_i A_i)=\max\{\Pi(A_i)\}$

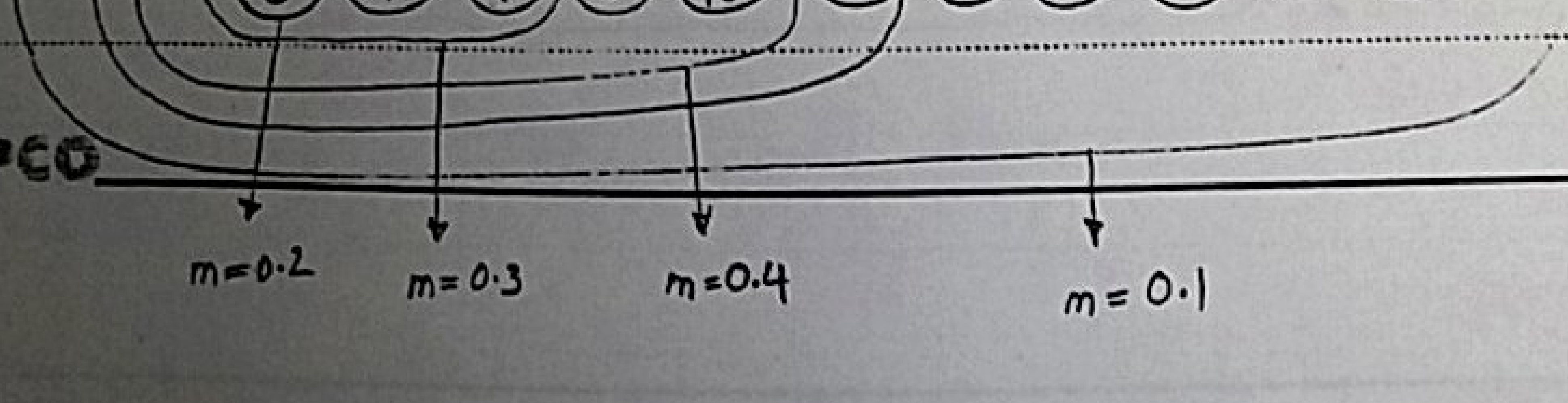
مثال: $X=\{0,\dots,10\}$ ، توزیع امکان برای x های نزدیک به 8

$\Pi(\{x\})=$ poss (x is close to 8)

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\Pi(\{x\})$	0	0	0	0	0	0.1	0.5	0.8	1	0.8	0.5

اگر $A=\{2,5,9\}$ ← مجموعه قطعی

$\Pi(A)=\max\{0,\ 0.1,\ 0.8\}=0.8$



(*)

Subject:

Year. Month. Date. ( )

تعریف: فرض کنید A یک مجموعه فازی در مجموعه مرجع U بوده و π_x نیز یک توزیع امکان برای متغیر x باشد به طوری که مقادیر $(x \in X)$ در U است. حال اندازه امکان A یعنی $\pi_x(A)$ به صورت ذیل تعریف می‌شود.

$$\pi_x(A) = poss(x \text{ is } A) = \sup_{u \in U} (\min\{\mu_A(x), \pi_x(u)\} = hgt(A \cap \pi_x)$$

مثال:

$$U = Z^+$$

$$\pi_x(u) = \left\{ \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{0.8}{3} + \frac{0.6}{4} + \frac{0.4}{5} + \frac{0.2}{6} \right\}$$

$\pi(x)$

$\frac{M(x)}{x}$

$A = \{3, 4, 5\}$ $\pi(A) = 0.8$

$$A' = \{(3, 0.2), (4, 0.4), (5, 0.6), (6, 0.8), (7, 1), (8, 1), \dots\}$$

$$poss(x \text{ is } A') = \max\{\min(0.2, 0.8), \min(0.6, 0.4), \min(0.4, 0.6), \min(0.2, 0.8), \min(1, 0)\} = 0.4$$

با توجه به توزیع $\pi_x(u)$ که $U = Z^+$ و با توجه به تعریف مجموعه فازی A' (اعداد صحیحی که کوچک نیستند) اندازه امکان این که x یک عدد صحیح کوچک نباشد برابر 0.4 است.

(*)

Subject:
Year. Month. Date. ( )

Necessity Measure

اندازه لزوم یا ضرورت

البته اگر $\Pi(A)=1$ مانع نمی‌شود که $\Pi(A')\neq 0$ یا حتی نزدیک به 1 باشد.

$$\Pi(A\cup B)=\max\{\Pi(A),\Pi(B)\}$$

$$B=A'$$

$$\Pi(A\cup A')=\max\{\Pi(A),\Pi(A')\}=1$$

از دو پیشامد مکمل حداقل یکی از آن ها کاملاً ~~محقق~~ ممکن است

اندازه لزوم که در واقع دوگان اندازه امکان است تابعی به شکل:

$$\begin{cases} N(A)=1-\Pi(A') \\ \Pi(A)=1-N(A') \end{cases}$$

N به شکل $N: p(X)\to[0,1]$ یک اندازه لزوم است اگر:

1) $N(\emptyset)=0$ و $N(X)=1$

2) $N(\bigcap_i A_i)=\inf_i N\{(A_i)\}$, $A_i\subset X$

درجه لزوم پیشامد A به معنای درجه ضرورت وقوع پیشامد A و یا حداقل درجه امکان وقوع آن بوده و از طرف دیگر معادل درجه غیرممکن بودن وقوع پیشامد مکمل A (A') می‌باشد. توابع Π و N دوگان هم هستند لذا داریم:

خاصیت ناشی از باور و موجه بودن (اینها Nested هستند)

$$N(A)=1-\Pi(A')$$

$$\Pi(A)\geq N(A)$$

$$\Pi(A)=1-N(A')$$

$$N(A)=1\to\Pi(A)=1$$

اگر $N(A)=1$ وقوع A لزوم دارد.

$$N(A)=0\to\begin{cases} P(A)=1 \\ P(A)\neq 1\end{cases}$$

اگر $N(A)=0$ وقوع A لزومی ندارد ولی امکان وقوع A وجود دارد.

Subject:
Year. Month. Date. ( )

تمرین تشویقی: در مورد خاصیت Self – Duality (خود دوگانی) اندازه های امکان و ضرورت تحقیق کنید.

برخی روابط مهم:

$N(A \cap A') = N(\emptyset) = 0$

1) $\min\{N(A), N(A')\} = 0 \longrightarrow$ اثبات = ?

۲) $N(A) \leq \Pi(A)$ — با فرض $N(A)=1$

اثبات؟ ? $N(A) = 1 - \Pi(A') = 1 \rightarrow \begin{cases} \Pi(A') = 0 \\ N(A') = 0 \end{cases}$

3) $\Pi(A) + \Pi(A') \geq 1 \ , \ \leq 2$

4) $N(A) + N(A') \leq 1$

5) if $\Pi(A) < 1 \rightarrow N(A) = 0$

سه شنبه ۹۳/۲/۱۶

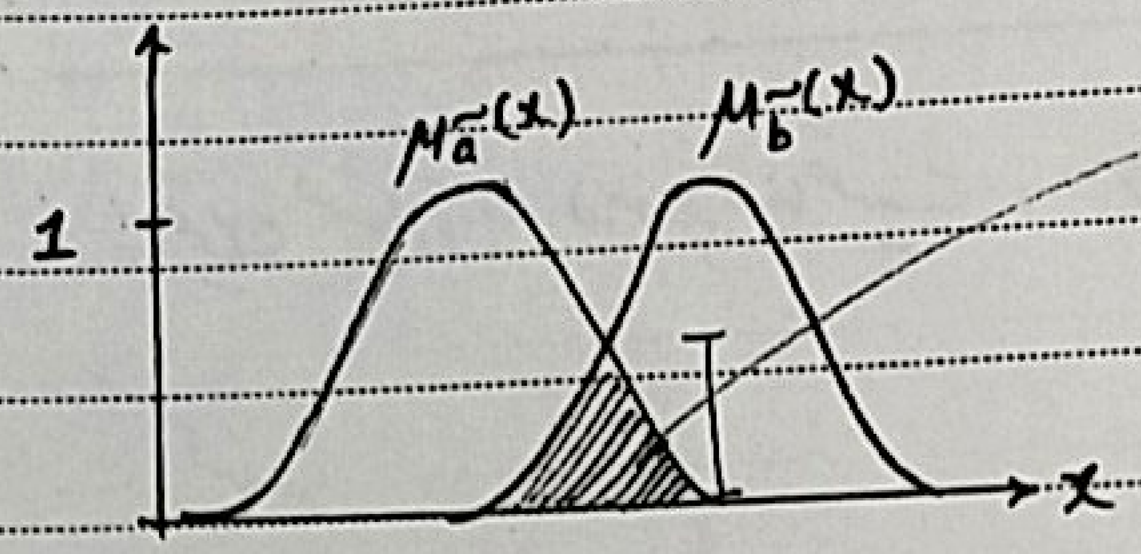
رتبه بندی به کمک اندازه های امکان و ضرورت:

$$pos\{\bar{a} \leq \bar{b}\} = \sup\{\min(\mu_{\bar{a}}(x), \mu_{\bar{b}}(y)) \mid x, y \in R, x \leq y\}$$

$$pos\{\bar{a} < \bar{b}\} = \sup\{\text{"} \quad \text{"} \quad \text{"} \mid \text{"} \quad \text{"} \ , x < y\}$$

$$pos\{\bar{a} = \bar{b}\} = \sup\{\min(\mu_{\bar{a}}(x), \mu_{\bar{b}}(x)) \mid x \in R\}$$

Subject:
Year. Month. Date. ( )



هرچه ارتفاع بیشتر نزدیک به ۱ باشد گفتن این که a بزرگتر از b یا b بزرگتر از a است سخت می شود

$$pos\{\tilde b \leqslant \tilde a\} = hgt(\tilde a \cap \tilde b) = 1$$

$$pos\{\tilde a \leqslant \tilde b\} = 1$$

یا a کوچکتر مساوی b است یا خیلی به هم نزدیکند.

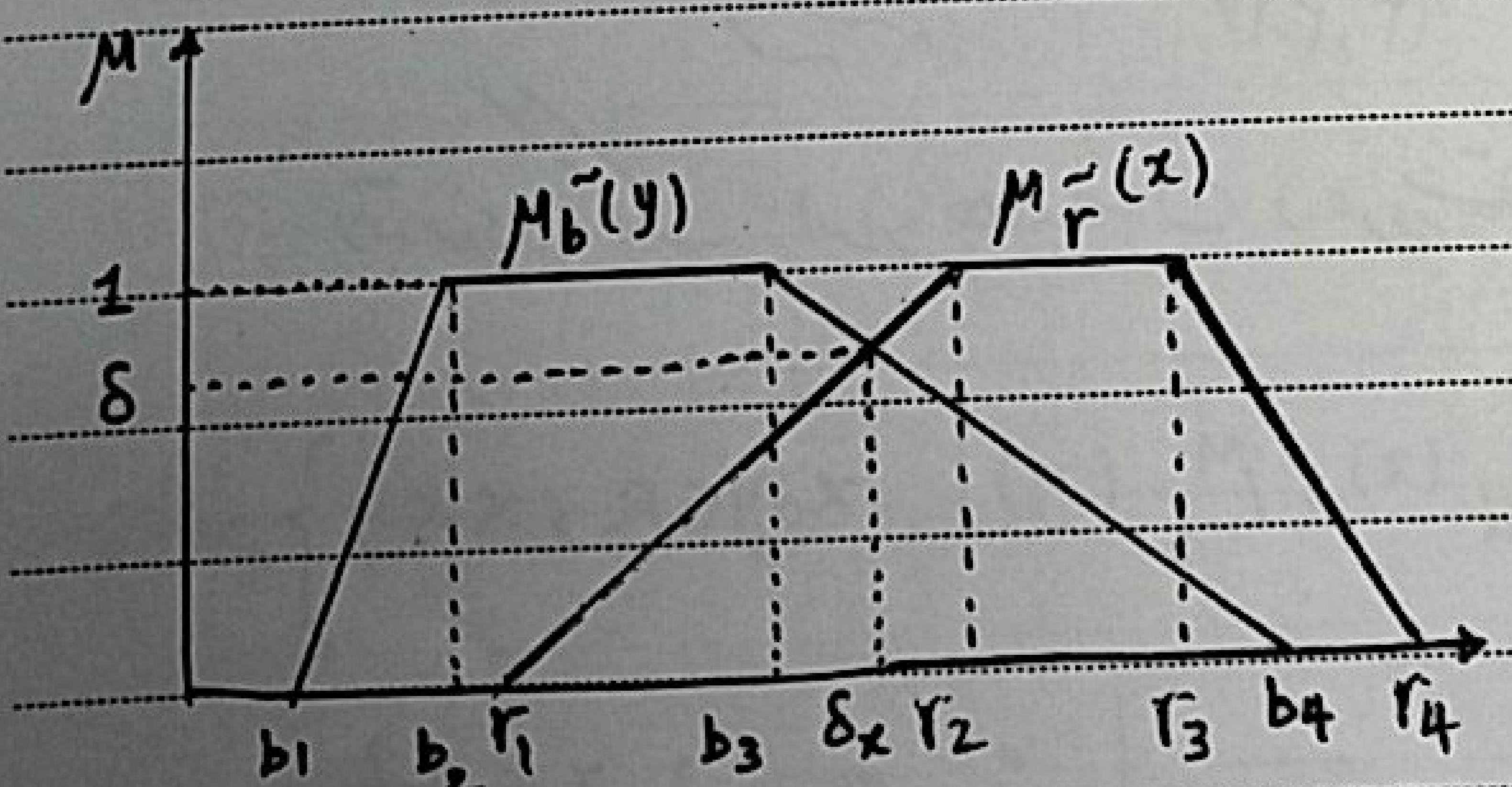
$$pos\{\tilde a \leqslant \tilde b\} \geqslant pos\{\tilde b \leqslant \tilde a\} \rightarrow$$

امکان a کوچکتر یا مساوی b، بزرگتر از امکان a بزرگتر مساوی b بودن است.

- فرض کنید دو عدد فازی ذوزنقه ای به صورت

$$\tilde b = (b_1, b_2, b_3, b_4), \quad \tilde r = (r_1, r_2, r_3, r_4)$$

$$pos\{\tilde r \leqslant \tilde b\} = \sup\{\min\{\mu_{\tilde r}(x), \mu_{\tilde b}(y)\} \mid x \leqslant y\}$$



$$\delta_x = r_1 + (r_2 - r_1)\delta$$

۱) اگر $r_2 \leqslant b_3$ آنگاه: $pos\{\tilde{r} \leqslant \tilde{b}\} = 1$

۲) اگر $r_2 > b_3$ ، $r_1 \leqslant b_4$ آنگاه: $pos\{\tilde{r} \leqslant \tilde{b}\} = \delta = \dfrac{b_4 - r_1}{(b_4 - b_3) + (r_2 - r_1)}$

۳) اگر $r_1 > b_4$ آنگاه: $pos\{\tilde{r} \leqslant \tilde{b}\} = 0$

$$\mu_{\tilde{c}}(z) = \sup\left\{\min\left(\mu_{\tilde{r}}(x), \mu_{\tilde{b}}(y)\right) \,\middle|\, x, y \in R,\ z = f(x, y)\right\}$$

$$pos\{\tilde{r} \leqslant \tilde{b}\} = \begin{cases} 1 & r_2 \leqslant b_3 \\ \delta & r_2 \geqslant b_3,\ r_1 \leqslant b_4 \\ 0 & r_1 \geqslant b_4 \end{cases}$$

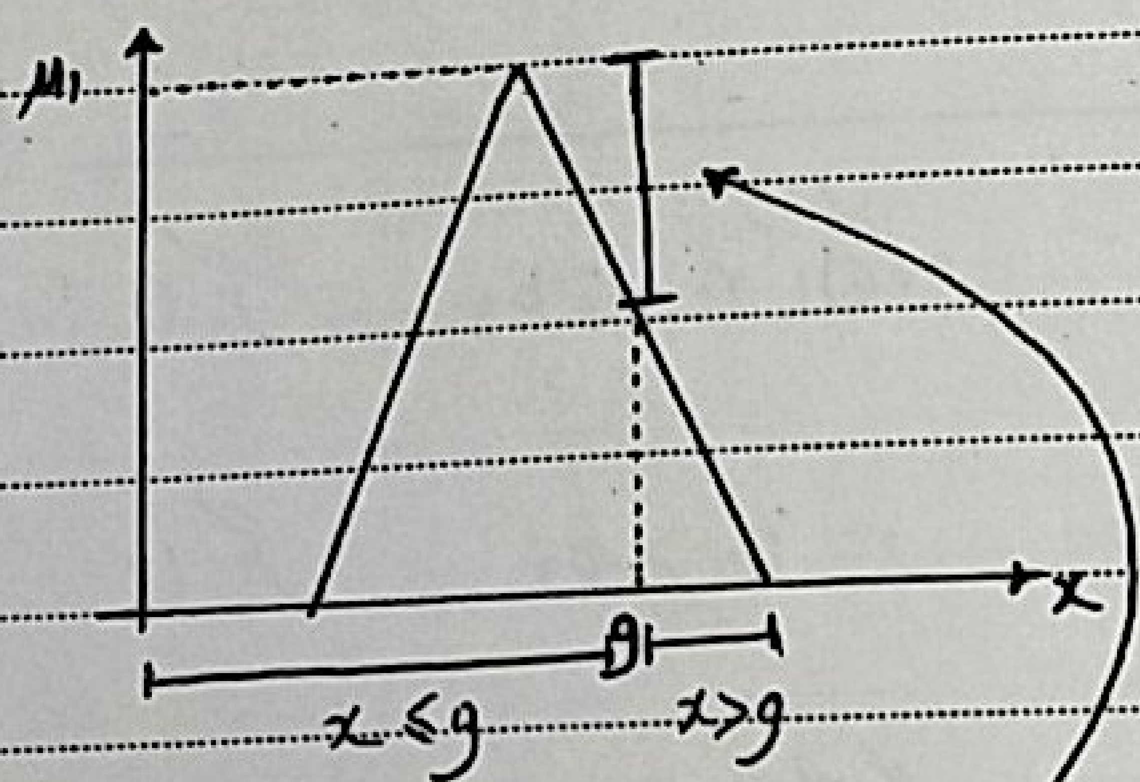
و به طور کلی برای یک عدد crisp مانند g داریم:

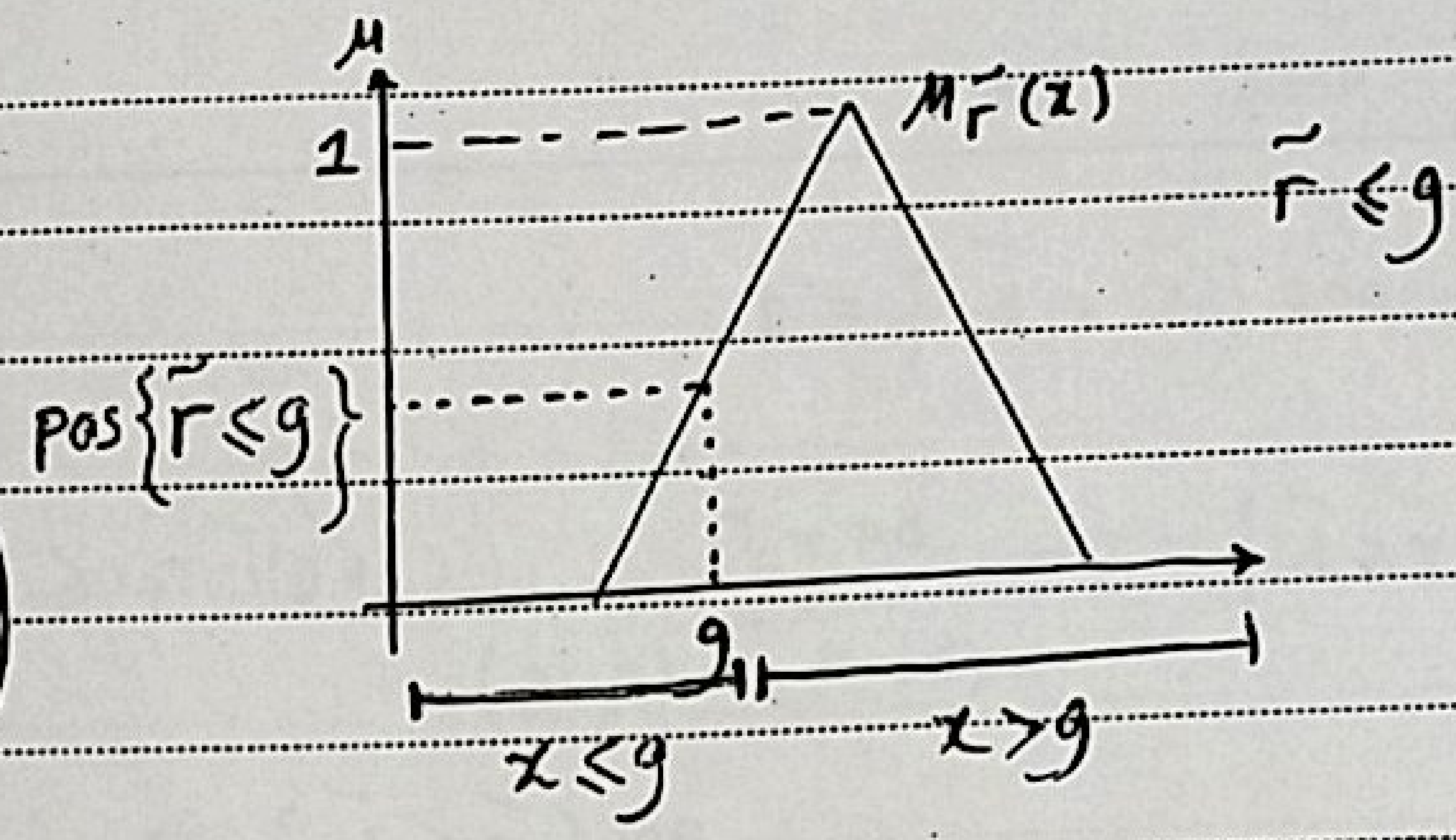
$$pos\{\tilde{r} \leqslant g\} = \sup\{\mu_{\tilde{r}}(x) \mid x \leqslant g\}$$

$$Nec\{\tilde{r} \leqslant g\} = 1 - \sup\{\mu_{\tilde{r}}(x) \mid x > g\}$$

$$pos\{\tilde{r} \geqslant g\} = \sup\{\mu_{\tilde{r}}(x) \mid x \geqslant g\}$$

$$Nec\{\tilde{r} \geqslant g\} = 1 - \sup\{\mu_{\tilde{r}}(x) \mid x < g\}$$





$pos\{\tilde r\le g\}=1$

$Nes\{\tilde r\le g\}=$

$Nes\{\tilde r\le g\}=0$

: Lemma

Con. lev.

فرض کنید $\tilde r$ یک عدد فازی ذوزنقه ای $\tilde r=(r_1,r_2,r_3,r_4)$ باشد آن گاه برای یک سطح اطمینان

مانند $0<\alpha\le 1$ ، $pos\{\tilde r\le 0\}\ge\alpha$ خواهد بود اگر و تنها اگر $(1-\alpha)r_1+\alpha r_2\le 0$

اثبات: طرف اول) اگر $pos\{\tilde r \;\; 0\}\ge\alpha$ آن گاه یا $r_2\le 0$ یا $\frac{r_1}{r_1-r_2}\ge\alpha$

اگر $r_2\le 0$ آن گاه $r_1\le r_2\le 0$ پس $(1-\alpha)r_1+\alpha r_2\le 0$

اگر $\frac{r_1}{r_1-r_2}\ge\alpha$ آن گاه $r_1\le\alpha(r_1-r_2)$ و در نتیجه $r_1<r_2$ و آن گاه داریم

$(1-\alpha)r_1+\alpha r_2\le 0$

طرف دوم) اگر $(1-\alpha)r_1+\alpha r_2\le 0$ آن گاه یکی از دو حالت ذیل پیش می آید:

Subject:
Year. Month. Date. ( )

۱) $r_2 \leq 0$ که خواهیم داشت $pos\{\tilde{r} \leq 0\} = 1$ که نشان می‌دهد $pos\{\tilde{r} \leq 0\} \geq \alpha$

۲) $r_2 > 0$ خواهیم داشت $r_1 - r_2 < 0$ که می‌توان از $(1-\alpha)r_1 + \alpha r_2 \leq 0$

که بیان $\dfrac{r_1}{r_1 - r_2} \geq \alpha$ است که نشان دهنده

$$\square \, . \; pos\{\tilde{r} \leq 0\} \geq \alpha$$

$$pos\{\tilde{r} \leq 0\} \geq \alpha \;\; \underset{\Longleftrightarrow}{\text{if and only if}} \;\; (1-\alpha)r_1 + \alpha r_2 \leq 0$$

اثبات :

$\overrightarrow{\mathrm{I}}$) $pos\{\tilde{r} \leq 0\} \geq \alpha \xrightarrow{r_2 \leq 0} r_2 \leq 0 \rightarrow r_1 \leq r_2 \leq 0 \rightarrow (1-\alpha)r_1 + \alpha r_2 \leq 0$

$pos\{\tilde{r} \leq 0\} \geq \alpha \xrightarrow{r_1 \leq 0 \leq r_2} \underbrace{\delta}_{pos} \geq \alpha \rightarrow \dfrac{\overset{\leq 0}{r_1}}{\underset{\leq 0}{r_1 - r_2}} \geq \alpha \rightarrow (1-\alpha)r_1 + \alpha r_2 \leq 0$

$\overleftarrow{\mathrm{II}}$) $(1-\alpha)r_1 + \alpha r_2 \leq 0 \xrightarrow{r_2 \leq 0} pos\{\tilde{r} \leq 0\} = 1 \geq \alpha$

$(1-\alpha)r_1 + \alpha r_2 \leq 0 \xrightarrow{r_2 > 0} r_1 - r_2 \leq 0 \rightarrow \dfrac{r_1}{r_1 - r_2} \geq \alpha \equiv pos\{\tilde{r} \leq 0\} \geq \alpha$

۹۳/۲/۲۲ یکشنبه

برنامه ریزی ریاضی فازی: Fuzzy Mathematical prog.

1. برنامه ریزی منعطف Flexible prog

- مربوط به انعطاف در ارضای محدودیت‌ها یا مقدار در نظر گرفته شده انعطاف داشته باشیم.

2. برنامه ریزی امکانی possibilistic prog.

- مربوط به عدم قطعیت شناختی (Epistemic unc.) در داده‌های مسئله می‌شود. عدم قطعیت شناختی در مقابل عدم قطعیت شانسی استفاده می‌شود.

✓ Flexible prog.

مدل زیر را در نظر بگیرید.

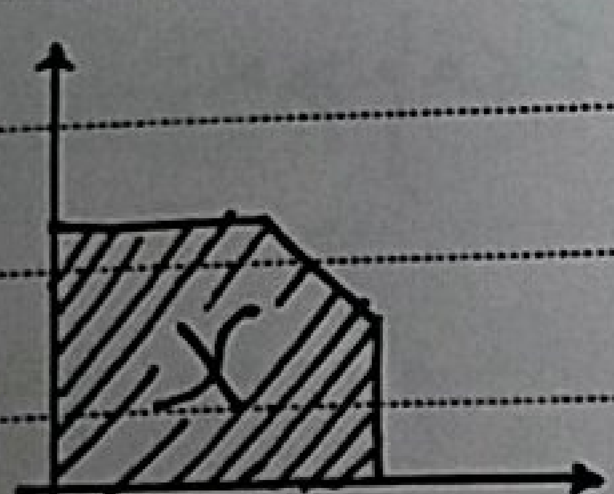
$$\max Z = cx$$

Vagueness

$$\text{s.t: } \quad A_i x \lesssim b_i \qquad \forall i = 1, \dots, m$$

$$x \geq 0$$

علامت $\lesssim$ به معنای الزاماً کوچکتر یا مساوی نیست و انحرافات کوچک مقدار سمت چپ نسبت به مقدار سمت راست مجاز است.



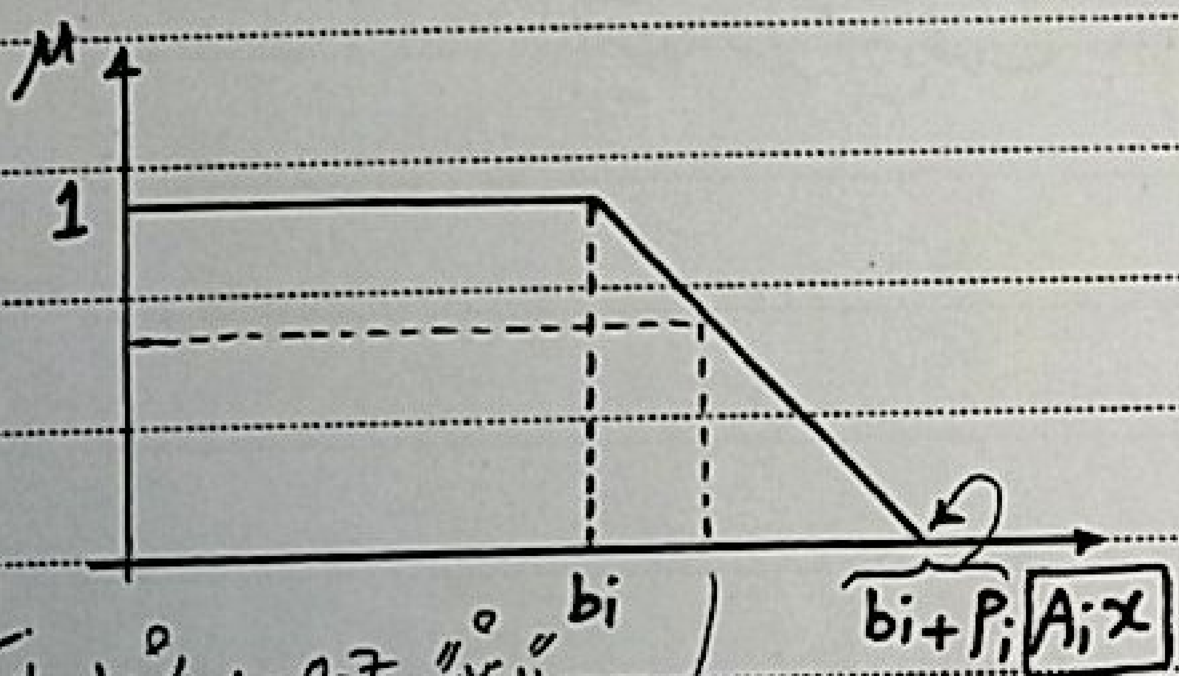
حد انحراف P_i: تلرانس محدودیت (حداکثر انحراف مجاز از b_i).

Subject .
Year . Month . Date . ( )

روش Verdegay :

۱) برای هر محدودیت تابع عضویت ذیل را مدلسازی نمایید.

$$\mu_i(x) = \begin{cases} 1 & A_i x \leqslant b_i \\ \dfrac{b_i + P_i - A_i x}{P_i} & b_i \leqslant A_i x \leqslant b_i + P_i \\ 0 & A_i x \geqslant b_i + P_i \end{cases}$$



"مثلاً" $\alpha = 0.7$ بیشترین نقطه مورد نظر

$b_i + 0.3 P_i$ می‌شود. یعنی درجه ارضای محدودیت

نسبتاً بالا است. یعنی نمی‌توانیم به $b_i + P_i$ نزدیک شویم

۲) مجموعه فازی فضای جواب $\mu_{\tilde{c}}(x) = \min_i \{\mu_i(x)\}$

با توجه به مفهوم α-cut برای این مجموعه فازی می‌توان یک مدل پارامتری برحسب برش های مختلف α مجموعه c درنظر گرفت.

$$\text{برش } \alpha \text{ مجموعه } c = \{x \in X : \mu_{\tilde{c}}(x) \geqslant \alpha\}$$

α : حداقل درجه تأمین (ارضای) محدودیت ها

$$\rightarrow \mu_i(x) \geqslant \alpha_i \quad \forall i \rightarrow \frac{b_i + P_i - A_i x}{P_i} \geqslant \alpha \rightarrow \boxed{A_i x \leqslant b_i + (1-\alpha) P_i \quad \forall i}$$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

بدترین تابع هدف / کم‌ترین نقض محدودیت‌ها و بیشترین رضایتمندی

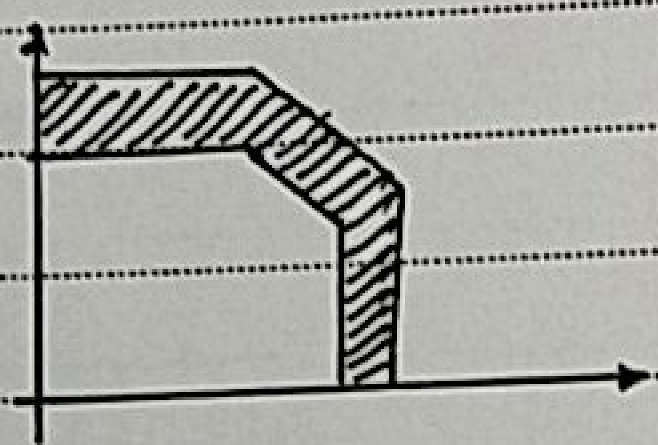
$\max Z = cx$

s.t: $A_i x \leq b_i + (1-\alpha) P_i$ $\quad \alpha \begin{cases} 1 : & \text{عدم ریسک} \\ 0 : & \text{ریسک بالا} \end{cases}$

$x \geq 0 \qquad \alpha \in [0\ 1]$

بهترین تابع هدف / بیشترین مقدار نقض محدودیت‌ها و بیشترین نارضایتی

α و P_i پارامتر هستند.



(α, Z^*_α)

α پارامتر است.

بهترین مقدار تابع هدف به ازای مقدار α معلوم

مثال:

$\max Z = 2x_1 + 3x_2$

s.t: $x_1 \leq 3$

$x_1 + x_2 \lesssim 4 \qquad P_2 = 4$

$5x_1 + x_2 \lesssim 3 \qquad P_3 = 2$

$x_1, x_2 \geq 0$

Crisp Eqlivalent M. $\rightarrow$

$\max Z_\alpha = 2x_1 + 3x_2$

s.t:

$x_1 \leq 3$

$x_1 + x_2 \leq 8 - 4\alpha$

$5x_1 + x_2 \leq 5 - 2\alpha$

$x_1, x_2 \geq 0$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

برنامه ریزی امکانی possibilistic prog.

$$\max Z = \tilde{c}x$$

$$s.t: \quad \tilde{A}x \leqslant \tilde{b} \longrightarrow \text{ambiguity}$$

$$x \geqslant 0$$

روش های مختلف برنامه ریزی امکانی:

- Li & Hwang
- Cadenas & Verdegay 1997.
- parra et al 1999.
- Peidro et al.
- Jimenez et al. 2000

برنامه ریزی شرطی فازی: Fuzzy chance Constraint Prog.

- نحوه برخورد با محدودیت ها:

$$\begin{cases} Nec(\tilde{a}_i x_1 + \tilde{b}_i x_2 \leq d_i) \geqslant \beta \\ Pos(\tilde{a}_i x_1 + \tilde{b}_i x_2 \leq d_i) \geqslant \beta \end{cases}$$

معمولاً برای محدودیتها استفاده می شود.

β: حداقل درجه اطمینان ارضاء محدودیت ها

مهم: معمولاً برای محدودیت ها از اندازه لزوم استفاده می شود چرا که مفهوم محدودیت از جنس اجبار و لزوم برقراری است.

روش برخورد با تابع هدف:

1) استفاده از امید ریاضی فازی:

PAPCO

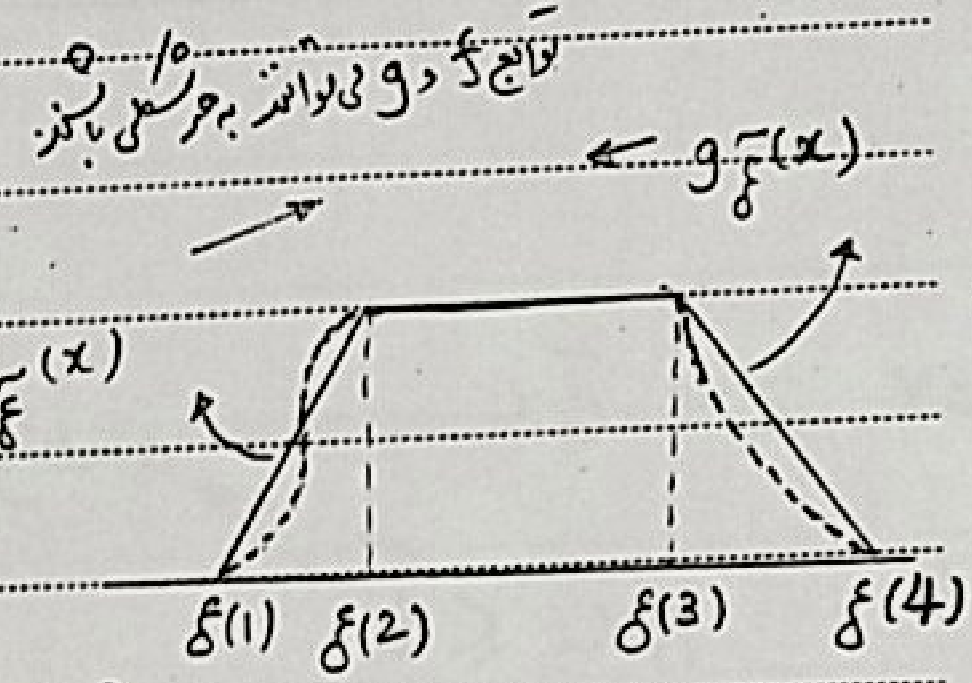
Subject:
Year. Month. Date. ( )

$$\max Z = \tilde{c}_1 x_1 + \tilde{c}_2 x_2$$

$$\max E[Z]$$

Dubois & Prade (1987)

Helipern (1992)



$$\mu_{\tilde{\xi}}(x) = \begin{cases} f_{\tilde{\xi}}(x) & \xi(1) \leq x < \xi(2) \\ 1 & \xi(2) \leq x \leq \xi(3) \\ g_{\tilde{\xi}}(x) & \xi(3) < x \leq \xi(4) \\ 0 & x < \xi(1) \text{ or } x > \xi(4) \end{cases}$$

f و g رو زدیم حتماً خطی نیست. یک حالت عام است.

براساس Choquet Integral یک حد بالا و حد پایین انتظاری برای عدد فازی می‌توان ارائه کرد.

می‌توان برای تبدیل هر عدد فازی به یک بازه استفاده کرد.

Expected Interval

حد بالای انتظاری $E^*(\tilde{\xi}) = \xi_{(3)} + \int_{\xi(3)}^{\xi(4)} g_{\tilde{\xi}}(x)\,dx$

$$EI = \left[E_*(\tilde{\xi}), E^*(\tilde{\xi})\right]$$

حد پایین انتظاری $E_*(\tilde{\xi}) = \xi_{(2)} - \int_{\xi(1)}^{\xi(2)} f_{\tilde{\xi}}(x)\,dx$

$$EV[\tilde{\xi}] = \frac{E_*(\tilde{\xi}) + E^*(\tilde{\xi})}{2}$$

اگر پارامتر دارای عدم قطعیت از نوع فازی ذوزنقه‌ای بود

$$EI[\tilde{\xi}] = \left[\frac{\xi(1)+\xi(2)}{2}, \frac{\xi(3)+\xi(4)}{2}\right]$$

$$EV[\tilde{\xi}] = \frac{\xi(1)+\xi(2)+\xi(3)+\xi(4)}{4}$$

حالت مثلثی، حالت خاص ذوزنقه‌ای با $\xi(2)=\xi(3)=1$ است.

PAPCO

Subject:
Year. Month. Date. ( )

۲)

$\max \ u$

$s.t: \quad Nec/Pos(\tilde{c}_1 x_1 + \tilde{c}_2 x_2 \geq u) \geq \beta$

$x \in X$

یعنی DM با درجه اطمینان β سعی می‌کند تابع هدف را ماکزیمم کند. (β پارامتر است)

۳) انتخاب یک target برای تابع هدف. (β یک متغیر است و خود آن هم بهینه می‌گردد.)

$\max \ \beta$

$s.t: \quad Nec/pos(\tilde{c}_1 x_1 + \tilde{c}_2 x_2 \geq target) \geq \beta$

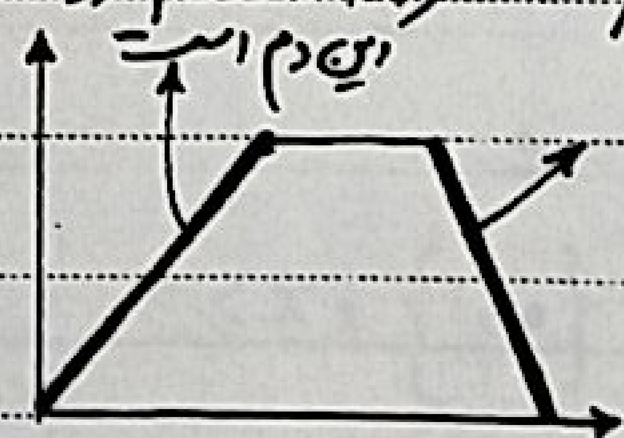
با فرض $\tilde{\xi} = (\xi(1), \xi(2), \xi(3), \xi(4))$

$$pos\{\tilde{\xi} \leq r\} = \begin{cases} 1 & \xi(2) \leq r \\ \dfrac{r - \xi(1)}{\xi(2) - \xi(1)} & \xi(1) \leq r \leq \xi(2) \\ 0 & \xi(1) \geq r \end{cases}$$

$\tilde{a}_i x \leq b_i$

$$Nec\{\tilde{\xi} \leq r\} = \begin{cases} 1 & \xi(4) \leq r \\ \dfrac{r - \xi(3)}{\xi(4) - \xi(3)} & \xi(3) \leq r \leq \xi(4) \\ 0 & \xi(3) \geq r \end{cases}$$

$= 1 - Poss$



$Pos\{\tilde{\xi} \leq r\} \geq \alpha$

$\Updownarrow$

$r \geq (1-\alpha)\xi(1) + \alpha \xi(2)$

$Nec\{\tilde{\xi} \leq r\} \geq \alpha \iff r \geq (1-\alpha)\xi(3) + \alpha \xi(4)$ $\quad \boxed{\alpha > 0.5}$

45/

فرض کنید مدلی به شکل ذیل داریم :

$$\text{Min } Z = \tilde{f}y + \tilde{c}x$$

$$\text{s.t: } Ax \geq \tilde{d}$$

$$Sx \leq \tilde{N}y$$

$$Bx = e$$

$$y \in \{0,1\} \,,\, x \geq 0$$

پارامترهای دارای عدم قطعیت دارای توزیع امکانی ذوزنقه ای هستند. براساس آنچه گفته شد می‌توان یک مدل

پایه معادل قطعی شرطی ساخت.

$$\text{Min } E[Z] = E[\tilde{f}]y + E[\tilde{c}]x$$

$$\text{s.t: } \text{Nec}\{Ax \geq \tilde{d}\} \geq \alpha$$

$$\text{Nec}\{Sx \leq \tilde{N}y\} \geq \beta$$

$$Bx = e$$

$$y \in \{0,1\} \quad x \geq 0$$

$\text{Pos}\{\tilde{\xi} \leq r\} \geq \alpha \Leftrightarrow (1-\alpha)\xi(1) + \alpha\xi(2) \leq r$
$\text{Nec}\{\tilde{\xi} \leq r\} \geq \alpha \Leftrightarrow (1-\alpha)\xi(3) + \alpha\xi(4) \leq r$
$\text{Nec}\{\tilde{\xi} \geq r\} \geq \alpha \Leftrightarrow (1-\alpha)\xi(2) + \alpha\xi(1) \geq r$
$\text{Pos}\{\tilde{\xi} \geq r\} \geq \alpha \Leftrightarrow (1-\alpha)\xi_4 + \alpha\xi(3) \geq r$
$\text{Nec}\{\tilde{\xi}x \geq r\} \geq \alpha \Leftrightarrow ((1-\alpha)\xi(2) + \alpha\xi(1))x \geq r$

$$\text{Min } E[Z] = \frac{f(1)+f(2)+f(3)+f(4)}{4} \cdot y + \frac{C(1)+C(2)+C(3)+C(4)}{4} \cdot x$$

$$\text{s.t: } Ax \geq (1-\alpha)d(3) + \alpha d(4)$$

$$Sx \leq \left[(1-\beta)N(2) + \beta N(1)\right] y$$

$$Bx = e$$

$$y \in \{0,1\} \,,\, x \geq 0$$

Subject. Year. Month. Date. ( ) ۹۳/۲/۲۸ یکشنبه

ایرادات عمده مدل ارائه شده :

۱. DM باید به طور ذهنی مقدار α و β (سطح اطمینان محدودیت های شانسی) را تعیین کند. لذا تضمین برای بهینگی آن وجود ندارد.

۲. در ادبیات پیشنهاد شده این کار به صورت تعاملی (Interactive) انجام شود یعنی یک مقدار اولیه مشخص و طی چند تکرار مقدار درجه اطمینان اصلاح شود.

۳. این روش یک روش واکنشی (reactive) نه در بهترین شرایط تعاملی (Interactive) است.

۴. وقتی تعداد محدودیت های شانسی (محدودیت های شامل پارامترهای عدم قطعیت) زیاد شوند ممکن است رویکرد تعاملی از نظر زمان و هزینه به صرفه نباشد. ضمناً DM می تواند به ازای هر محدودیت درجه اطمینان تعیین کند و معمولاً برای همه محدودیت ها یک سطح اطمینان و یا حداکثر برای دسته ای از آن ها این کار را انجام می دهد.

۵. در تابع هدف تنها به متوسط عملکرد سیستم توجه شده است و به حالاتی که ممکن است از متوسط عملکرد فاصله داشته باشند توجه نشده است. این امر در برخی اوقات منجر به تحمیل ریسک زیاد (هزینه زیاد) به DM می شود.

Subject:
Year. Month. Date. ( )

رویکرد برنامه ریزی امکانی استوار:

pishvaee et. al 2012 FSS.

استواری شدنی بودن

کنترل کننده میزان نقض محدودیت ها در حالت حدی

امید ریاضی ← متوسط عملکرد سیستم — کنترل کننده میزان انحراف

$$\mathrm{Min}\ E[Z] + \gamma\,(Z_{max} - Z_{min}) + \delta\,\big(d_{(4)} - (1-\alpha)\,d(3) - \alpha\,d(4)\big)$$

تابع هدف مدل اصلی — جریمه

$$\text{s.t:}\quad Ax \geqslant (1-\alpha)\,d(3) + \alpha\,d(4)$$

$$Sx \leqslant Ny$$ ⟶ فقط d ، f و c دارای عدم قطعیت هستند.

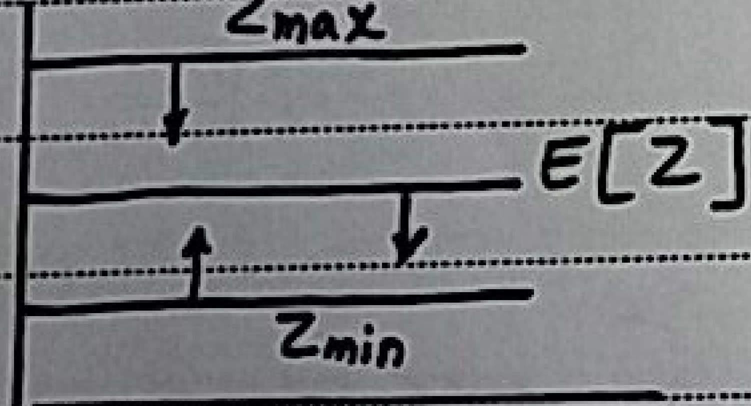
$$Bx = e$$

$$y \in \{0,1\}\ ,\ x \geqslant 0\ ,\quad 0.5 < \alpha \leqslant 1$$

عبارت $\gamma\,(Z_{max} - Z_{min})$ کنترل کننده انحراف از $E[Z]$ است که در آن:

$$Z_{max} = f_{(4)}\,y + C_{(4)}\,x \quad,\quad Z_{min} = f_{(1)}\,y + C_{(1)}\,x$$

و γ نشان دهنده اهمیت نسبی عبارت $(Z_{max} - Z_{min})$ در مقابل سایر عبارات است. پس عبارت فوق عملاً کنترل کننده استواری بهینگی Opt. ORO است.

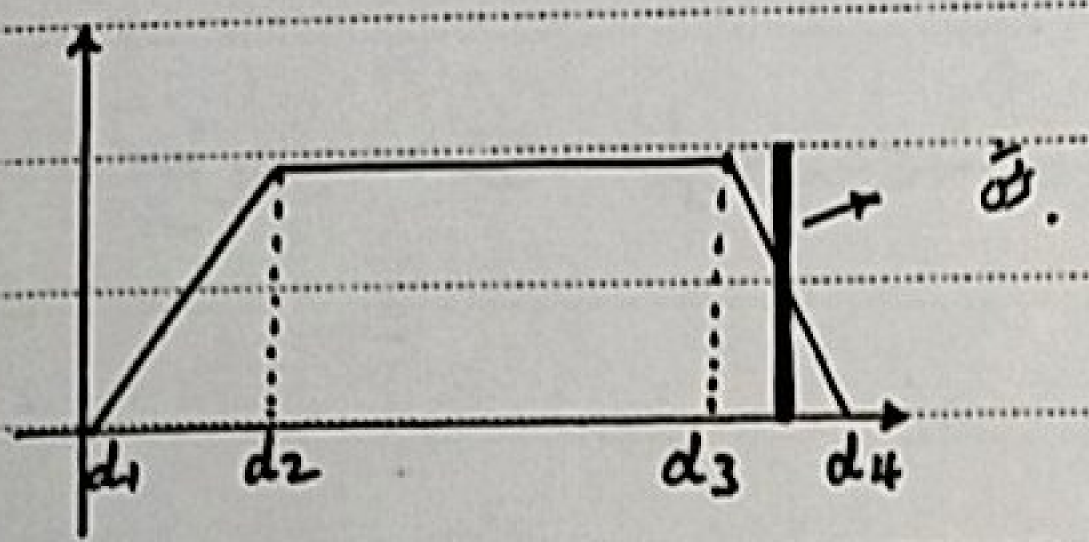


عبارت دوم تابع هدف یعنی $\delta\,[d(4) - (1-\alpha)\,d(3) - \alpha\,d(4)]$ نشان دهنده فاصله (اختلاف) بین بدترین مقدار پارامتر دارای عدم قطعیت $(d(4))$ با مقداری که برای صحت محدودیت انتخاب می شود.

نام مدل قبلی (جریمه قبلی)　　　BOPCCP

Subject:
Year.　　Month.　　Date.　( )

$((1-\alpha)d(3)+\alpha d(4))$ است. این عبارت در δ که جریمه نقض هست ضرب می‌شود در واقع این عبارت کنترل کننده استواری شدنی بودن Feas. RO است.



— در این مدل برخلاف مدل BPCCP حداقل سطح اطمینان محدودیت‌های شانسی (α) یک متغیر است و مقدار آن در مدل بهینه‌سازی می‌شود یعنی بر اساس قضاوت ذهنی تعیین نشده و می‌تواند برای تک تک محدودیت‌ها متفاوت باشد.

— این مدل به صورت فعالانه (Proactive) با موضوع عدم قطعیت و تعیین سطح اطمینان برخورد می‌کند

— در این مدل انتخاب نهایی با ایجاد یک موازنه بین (۱) متوسط عملکرد سیستم انجام می‌شود
(۲) استواری بهینگی
(۳) استواری شدنی بودن

حال در نظر بگیرید که ضرایب تکنولوژیک متغیر y دارای عدم قطعیت باشد:

$$\text{Min } E[Z] + \gamma(Z_{max} - Z_{min}) + \delta[\cdots] + \pi\left[\beta N(1) + (1-\beta)N(2) - N(1)\right] y$$

s.t.: $Ax \geq \ldots\ldots$

$$Sx \leq \left[\beta N(1) + (1-\beta) N(2)\right] y$$

P4PCO

$0.5 < \beta < 1$

— همان طور که مشاهده می‌شود در این حالت مدل پیشنهادی برای ضرایب تکنولوژیک بجز به غیر خطی شدن مدل می‌گردد. هرچند مدل غیر خطی از نوع کوادراتیک است ولیکن بازهم خطی کردن آن می‌تواند مفید باشد. در برخی موارد از جمله این که متغیر متناظر صفر و یک یا Integer باشد مدل قابل تبدیل به حالت خطی است.

پیوسته

$0-1$

$$\vartheta = \beta \cdot y$$

$$\text{Min } E[Z] + \gamma (Z_{max} - Z_{min}) + \delta \left[d(4) - (1-\alpha) d(3) - \alpha d(4) \right]$$

$$+ \pi \left[\vartheta N(1) + (y - \vartheta) N(2) - N(1) y \right]$$

s.t. مدل

$$Ax \geqslant (1-\alpha) d(3) + \alpha d(4)$$

$$Sx \leqslant \vartheta N(1) + (y - \vartheta) N(2)$$

RPP-I

$$Bx = e$$

عدد به اندازه کافی بزرگ

$$\vartheta \leqslant M y \qquad \rightarrow \beta - M(1-y)$$

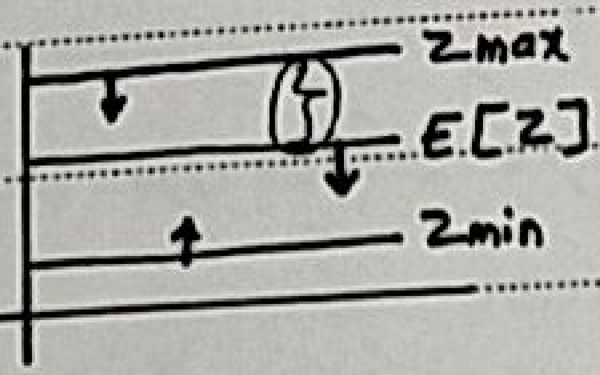
$$\vartheta \geqslant M(y-1) + \beta$$

$$\vartheta \leqslant \beta$$

$$y \in \{0, 1\}, \quad x, \vartheta \geqslant 0, \quad 0.5 < \alpha, \beta \leqslant 1$$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

همان طور که ملاحظه شد در عبارت کنترل کننده استواری همگنی انحراف از بالا و پایین نسبت به متوسط عملکرد حداقل می‌گردد. در حالی که ممکن است DM نسبت به انحرافات از پایین نه تنها حساس نبوده بلکه انحرافات از پایین برای او مطلوب باشد.



$$\text{Min } E[Z] + \gamma\,(Z_{max} - E[Z]) + \delta[\cdots] + \pi\left[\beta N(1) + (1-\beta) N(2) - N(1)\right] y$$

$$s.t.: \quad x, y, \alpha, \beta, \nu \in F \rightarrow$$ فضای شدنی مسأله عملی

مدل RRP–II

✓ عبارت $\gamma\,(Z_{max} - E[Z])$ تضمین می‌کند که مدل تنها نسبت به انحرافات بیشتر از $E[Z]$ حساس باشد و تمایلی برای انحرافات کمتر از $E[Z]$ قائل نیست.

مدل RPP-II یک ارتباط جبرانی بین Z_{max} و $E[Z]$ ایجاد می‌کند. هرچه مقدار γ بیشتر باشد این ارتباط جبرانی قوی‌تر می‌گردد. برای DM هایی که این ارتباط جبرانی مضر است می‌توان از مدل ذیل استفاده کرد.

$$\text{Min } E[Z] + \gamma Z_{max} + \delta[\cdots] + \pi\left[\nu N(1) + (y - \nu) N(2) - N(1)\, y\right]$$

بعد از خطی شدن

$$S.t.: \quad x, y, \alpha, \beta, \nu \in F$$

مدل RPP_III

PAPCO

Subject:
Year. Month. Date. ( )

✓ در مدل فوق توجه چندانی به امکان نقض محدودیت ها نشده است پس می توان برای کنترل استوارک

سختی بودن امکان آن را نیز در نظر گرفت.

✓ مدل هایی که تا کنون مورد بحث قرار گرفتند دسته ۷ مدل های بهینه سازی واقع گرایانه

Ro. Realistic opt.

قرار می گیرند. علت آن هم این است که می آید و بین هزینه و سود توازنی برقرار می کند.

سه شنبه

۹۴/۲/۳۰

مدل : MRPP

$$\text{Min } E[Z] + \gamma\underbrace{\left(Z_{max} - E[Z]\right)}_{\text{به دو طریق دیگر هم می توان نوشت}} + \overset{\alpha}{\overbrace{(1-\alpha)}}\,\delta\left(d_{(4)} - (1-\alpha)d_{(3)} - \alpha d_{(4)}\right)$$

$$+ \underbrace{(1-\beta)}_{\beta}\,\pi\left[v N_{(1)} + (y - v)N_{(2)} - N_{(1)}\,y\right]$$

$$s.t.: x, y, v, \alpha, \beta \in F$$

که رویش غیرخطی

✓ همان طور که ملاحظه می شود در مدل اصلاح شده MRPP امکان نقطه در نظر گرفته شده برای پارامتر های

دارای عدم قطعیت در مرتبه جریمه لحاظ شده است. لیکن دقت کنید تابع هدف در این حالت

غیرخطی است هرچند که نوع آن از نوع کوادراتیک است.

PAPCO

Subject:

Year. Month. Date. ( )

Hard worst case RPR HWRPP

$$\text{Min } \sup(\tilde{Z}) \qquad\qquad \text{Min } Z_{max}$$

s.t:

$$A x \geq \sup(\tilde{d}) \qquad\qquad A x \geq d_{(4)}$$

$$S x \leq \inf(\tilde{N})\, y \quad \longrightarrow \quad S x \leq N_{(1)} y$$

$$B x = e \qquad\qquad B x = e$$

$$y \in \{0,1\},\ x \geq 0 \qquad\qquad y \in \{0,1\} \quad x \geq 0$$

لم: مدل HWRPP یک حالت خاص از مدل RPP II است.

اثبات: به عهده دانشجویان (در RPP II $\alpha = \beta = \gamma = 1$ می باشد)

رویکرد HWRPP یک رویکرد بدترین حالت ممکن است که حداکثر محافظه کاری ممکن را برای DM فراهم می کند. در برخی اوقات ممکن است DM نسبت به رویکرد بدبینانه موافقت داشته باشد لیکن اجرای ممکن آن را متضمن هزینه های بسیار بالا بداند. برای این حالت می توان از مدل ذیل استفاده کرد.

Soft WRPP SWRPP

$$\text{Min } Z_{max} + \delta\left[d_{(4)} - (1-\alpha)\,d_{(3)} - \alpha\, d_{(4)}\right] + \pi\left[v N_{(1)} + (y - v) N_{(2)} - N_{(1)} y\right]$$

s.t: $x, y, v, \alpha, \beta \in F$

PAPCO