www.ieun.ir

۲ـکنترل موجودی

منظور ما از موجودی مقداری از کالاها یا مواد تحت کنترل مؤسسه هستند که برای مدتی به منظور فروش یا مصرف، در یک حالت نسبتاً راکد یا غیر تولیدی نگهداری می‌شوند.

با توجه به این تعریف وجود موجودی نشانه سکونی موقت بین دو فعالیت موسوم به جریانهای تدارک و تقاضا است. معمولاً، جریان تدارک مقدم بوده و کالاها را به صورت موجودی انباشته می‌کند، حال آنکه جریان تقاضا مؤخر بوده و همان موجودی را تخلیه می‌نماید.(کالاهای برگشتی به انبار یک حالت استثنائی است .)

در ابتدا بایستی روشن نمود که تعریف فوق شامل موجودی های خطوط لوله نیست . این موجودیها شامل مواد نفتی در خط لوله،کالاهای در حال حمل و نقل، وکالاهای در حال رشد هستند. خارج کردن این کالاها از تعریف فوق به این علت است که این کالاها در حالی که در خطوط لوله هستند برای برآورده نمودن تقاضا آماده نیستند. موقعی این کالاها به صورت موجودی در می آیند که واقعاً به حالت راکد درآیند، و موجودیهای خطوط لوله این حالت را ندارند.

ایجاد موجودیها یکی از اثرات جنبی جریان مواد در پویش تولید است . در یک سازمان تولیدی این موجودیها به صورت مواد اولیه و قطعات خریداری شده، کالاهای نیم ساخته، وکالای ساخته شده هستند. در تعمیرات و خدمات به صورت قطعات یدکی و یا مواد خریداری شده، و در خرده فروشی ها به صورت کالای خریداری شده هستند. هیچ سازمان سازمان تولیدی نمی تواند بطور کامل بدون موجودی وجود داشته باشد. در انتهای سال ۱۹۶۷ میلادی ارزش کل موجودیها در صنایع ساخت انگلستان برابر ۶۴۸۴ میلیون پوند بوده است . از این مقدار حدود ۲۲۴۸ میلیون پوند موجودیهای مواد اولیه و سوخت ، ۲۴۴۴ میلیون پوند موجودیهای مواد نیم ساخته و ۱۷۹۲ میلیون پوند موجودیهای کالای ساخته شده بوده است . در انتهای همین سال در ایالات متحده آمریکا ارزش کل موجودیها در صنایع ساخت ۸۲/۵۷ میلیارد دلار یعنی در حدود ده درصد تولید ناخالص ملی همان سال در آن کشور بوده است . موجودیها نیاز به سرمایه دارند، غیر عادی نخواهد بود اگر در شرکتی مقدار سرمایه درگیر در موجودیها برابر ۲۵٪ درصد کل سرمایه گذاری‌های آن باشد. برای مثال جدول (۱)مقدار سرمایه درگیر در موجودیها را به صورت درصدی از کل دارائی ها برای چند شرکت مختلف امریکائی نشان می دهد. در بین این شرکتها حداقل سرمایه درگیر برابر ۱۱ درصد و حداکثر برابر ۵۸ درصد کل دارائی ها است.

www.ieun.ir

جدول (۱)- موجودیها در رابطه با کل دارائی ها در چند شرکت مختلف.

نام شرکت	تاریخ (میلادی)	کل دارائی ها به دلار	موجودیها به دلار	موجودی بر حسب درصدی از دارائی ها
Abbott Laboratories	۶۵/۱۲/۳۱	۲۲۳'۶۶۶'۰۰۰	۴۲'۱۴۸'۰۰۰	۱۹
Alied Supermarkets	۶۷/۰۶/۲۴	۹۳'۳۷۷'۳۱۸	۴۲'۰۴۸'۷۹۵	۴۵
American Airlines	۶۶/۱۲/۳۱	۱'۰۸۲'۱۲۰'۰۱۱	۲۴'۶۷۰'۲۷۰	۲۳
Eastman Kodak	۶۶/۱۲/۲۵	۱'۱۹۴'۱۷۹'۰۰۰	۲۹۵'۲۱۱'۰۰۰	۲۵
Holt, Rinehart, and Winston	۶۶/۱۲/۳۱	۵۸'۶۰۳'۵۵۳	۱۹'۷۴۴'۳۶۷	۳۴
Interstate Bakeries	۶۶/۰۱/۰۱	۳۱'۰۳۷'۹۷۰	۳'۵۰۳'۶۱۳	۱۱
Lockheed Aircraft	۶۶/۱۲/۲۵	۷۲۷'۰۱۵'۰۰۰	۲۸۵'۵۴۳'۰۰۰	۳۹
May Company	۶۷/۰۱/۳۱	۷۵۷'۶۹۰'۷۴۴	۱۵۶'۱۴۷'۱۲۵	۲۱
Merck Co.	۶۶/۱۲/۳۱	۳۷۲'۶۶۴'۷۹۷	۵۱'۳۵۸'۲۸۹	۱۴
Pillsburry Mills	۶۷/۱۲/۳۱	۱۲۳'۷۸۴'۵۱۳	۷۰'۶۰۴'۶۳۱	۵۸
U.S. Steel Corp.	۶۶/۱۲/۳۱	۳'۱۷۸'۰۰۶'۲۹۲	۷۲۶'۴۸۴'۷۹۲	۲۳
John Wiley & Sons	۶۶/۱۲/۳۱	۱۹'۷۰۶'۰۲۲	۷'۹۷۴'۸۴۸	۴۰

نگهداری موجودیها مستلزم هزینه هایی است که بواسطه استفاده از انبار و تاسیسات ،درگیری سرمایه،بیمه و غیره ناشی می شوند. در پویش تولید نگهداری موجودی بواسطه تغییرات تقاضا (چه این تغییر معلوم باشد مثل تقاضای فصلی و چه به صورت تصادفی باشد)، نیاز به تولید مداوم، تولید دسته‌ای، و مواقعی که کارخانه در فاصله زیادی از مواد اولیه یا بازار قرار دارد امری ضروری است. ضرورت ایجاب می کند که توجه ویژه‌ای باین موجودیها معطوف گردد. نظارت در نگهداری سطح موجودیها در یک سطح اقتصادی به منظور کارآئی مؤثر پویش تولید "کنترل موجودیها" نام دارد. چون کنترل موجودی با کنترل تولید رابطه بسیار نزدیکی دارد، معمولاً کنترل موجودیها خود قسمتی از عملکرد کنترل تولید محسوب می شود. معهذا، بایستی توجه نمود که کنترل موجودی رابطه نزدیکی نیز با قسمت مالی دارد.

www.ieun.ir

محل های ذخیره و عملیات

در هر موسسه موجودی فیزیکی از تعدادی واحدهای موجودی یا اقلام تشکیل شده است . یک واحد موجودی قلمی از مواد است که کاملاً بوسیله نوع، اندازه، رنگ ، مکان، و غیره مشخص شده است . دو شئی فیزیکی موقعی دو قلم یکسان محسوب می شوند که از هر نظر بتوانند با یکدیگر قابل تعویض (جانشین شدن) باشند. دو کفش هم مدل در دو اندازه مختلف دو قلم جداگانه بحساب می آیند. هر ترکیبی از اندازه و درجه مفتول های فولادی در انبار قلم جداگانه‌ای بحساب می آید. یک شرکت نفتی بایستی هر ماده خام تفکیک شده را به عنوان یک قلم موجودی جداگانه بحساب آورد. یک شرکت صابون سازی بسته های صابون هم نوع و هم اندازه را در دو انبار متمایز از هم باید به عنوان دو قلم جداگانه در نظر گیرد، چون این دو قلم مستقیماً با هم قابل جانشینی نیستند، برای انتقال از یک انبار به انبار دیگر زمان و پول لازم است .

یک واحد موجودی (قلم) در یک محل ذخیره نگهداری می شود. بطور نمونه یک انبار دارای چند تا هزاران محل ذخیره است ، برای هر قلم یک محل ذخیره. معمولاً هر کارخانه سازنده دارای تعدادی محل های ذخیره است که در آنها مواد اولیه، نیمه ساخته، و اقلام شده نگهداری می شوند. مواد از یک محل ذخیره به محل دیگر بوسیله عملیات انتقال می یابند. هر عمل یک واحد موجودی را به واحد موجودی دیگری تبدیل می کند. این تبدیل یا بوسیله تغییر فیزیکی قلم (مانند ماشین کاری)، یا بوسیله مونتاژ آن با واحد های دیگر (مانند یک خط مونتاژ)، و یا بوسیله انتقال آن (مانند انتقال از انبار کارخانه به انبار ناحیه) انجام می گیرد.

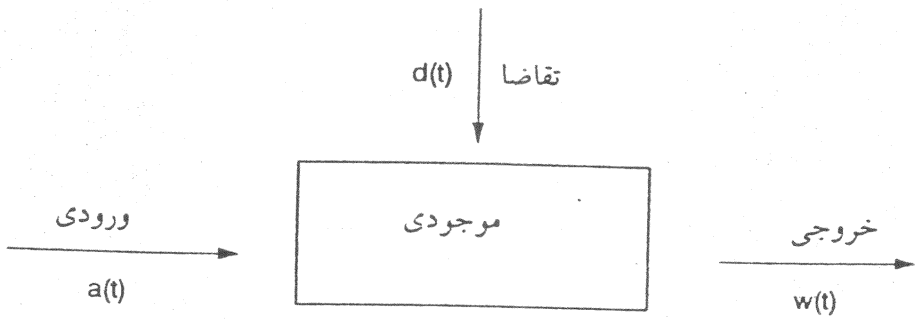
تا آنجا که مربوط به موجودیها می شود، یک سازمان را، هر چه که باشد، می‌توان مشتمل از تعدادی محل های ذخیره و تعدادی عملیات ، به اضافه یک سیستم کنترل در نظر گرفت . هر محل ذخیره بوسیله یک یا چند عمل تغذیه می شوند و بوسیله عملیات دیگر تخلیه (مصرف) می گردد، و بالاخره در آخرین محل ذخیره عمل تخلیه (مصرف) بوسیله تقاضای مشتری برای کالای ساخته شده انجام می گیرد. در اصل، می توان نموداری ساخت که جریان مواد را از منابع مواد اولیه و از میان محل های ذخیره میانی تا مشتری ها نشان دهد. بجز در موارد نادر، این جریان پایدار نیست ، عملیات بطور مدام از تغذیه یک محل ذخیره به تغذیه محل ذخیره دیگری می پردازند (برگردانده می شوند)، یا نرخ جریان از میان آنها افزایش یا کاهش یافته، یا قطع می شود. سیستم کنترل سطوح موجودیها را در محل های مختلف ذخیره، با نظارت بر نرخ و جهت جریان از بین عملیات ، اداره می کند. موجودیها نیز به نوبه خود

www.ieun.ir

سبب می شوند که هر عمل بطور موثر انجام گیرد و سیستم تولید توزیع به عنوان یک مجموعه کلی بطور یکنواخت عمل نموده و خدمت کافی را به مشتری های کالای ساخته شده بدهد.

حالت سیستم موجودی

سطح موجودی یک قلم را می توان به صورت سیستمی که تحت تأثیر دو جریان ورودی و خروجی است در نظر گرفت (شکل ۱-۲). فرض کنید که a(t) نرخ اضافه شدن مواد به موجودی و w(t) نرخ خروجی مواد از موجودی در زمان t باشد. معمولاً، فرض می کنیم، مواد خروجی به منظور برآورده نمودن تقاضائی برونی، با نرخ d(t)، است که خارج از کنترل موسسه است. در واقع، ممکن است توسط قیمت گذاری یا آگهی ها تقاضا را تحت تأثیر قرار داد، یا ممکن است تقاضا ناشی از پویش تولید در خود موسسه باشد. حالت اخیر را تقاضای درونی گوییم و آنرا بعداً مورد بررسی قرار خواهیم داد، ولی در حال حاضر فرض می کنیم که d(t) یک متغیر قابل کنترل نیست. واضح است که نرخ خروجی مواد برابر با نرخ تقاضا است، مگر آنکه موجودی مواد به صفر رسیده باشد که در آن صورت می گوییم حالت کمبود موجودی (Stockout یا Out of Stock) رخ داده است.



شکل ۱-۲. یک سیستم موجودی

حالت موجودی را می توان بوسیله متغیرهای زیر نشان داد:

I(t)= سطح موجودی در دست در زمان t

b(t)= مقدار تقاضای پس افت در زمان t (تقاضایی که تا زمان t برآورده نشده و بالاخره بعد از t با تأخیر برآورده خواهد شد)

O(t)= مقدار مواد در سفارش در زمان t

NS(t)= موجودی خالص در زمان t (Net Stock)

Y(t)= موقعیت موجودی در زمان t (Inventory Position)

www.ieun.ir

موجودی در دست مقداری از مواد است که بطور واقعی در یک زمان مشخص به صورت موجودی در انبار نگهداری می شود. وقتی که کمبود موجودی وجود دارد، یعنی $I(t)=0$، هر گونه تقاضایی که برسد جزو کمبود بحساب خواهد آمد. تقاضاهایی که با کمبود موجودی روبرو می شوند ممکن است با هم جمع شوند تا به محض اینکه مواد کافی از منبع تهیه مواد دریافت گردید آنها را برآورده نمود، که به آن حالت "*تقاضای پس افت*" (Backorder) می گوییم و یا ممکن است کمبود موجودی سبب شود که مشتری برای برآوردن احتیاجات خود به جای دیگری مراجعه کند، که در این صورت به آن حالت "*فروش از دست رفته*" (Lost Sales) می گوییم.

مقدار موجودی خالص عبارت است از مقدار موجودی در دست منهای تقاضای پس افت بنا بر این:

$$NS(t) = I(t) - b(t) \qquad (۲-۱)$$

توجه کنید که $I(t)$ یا $b(t)$ و یا هردو ممکن است در آن واحد صفر باشند.

به علت وجود "*مدت تحویل*"، یعنی فاصله زمانی از موقع دادن سفارش برای تهیه مواد تا رسیدن آن به موسسه، ممکن است برخی از مواد سفارش داده شده هنوز در موسسه دریافت نشده باشند. این امر بایستی در ارزیابی حالت سیستم موجودی در نظر گرفته شود. از اینرو موجودی خالص به اضافه مقدار مواد در سفارش، $O(t)$، را موقعیت موجودی می نامیم:

$$Y(t) = NS(t) + O(t) = I(t) - b(t) + O(t) \qquad (۲-۲)$$

این متغیرهای سیستم موجودی را می توان بر حسب نرخ های ورودی، خروجی، و تقاضا بیان نمود. در صورت تقاضای پس افت:

$$NS(t) = NS(0) + \int_0^t [a(u)-d(u)]du \qquad (۲-۳)$$

که در آن $NS(0)$ موجودی خالص در زمان صفر است. بعلاوه،

$$I(t) = \max[\,0\,,\,NS(t)\,] \qquad (۲-۴)$$

$$b(t) = \max[\,0\,,\,-NS(t)\,] \qquad (۲-۵)$$

و

$$w(t) = \begin{cases} d(t) & \text{اگر } NS(t)>0 \\ 0 & \text{اگر } NS(t)=0 \\ a(t) & \text{اگر } NS(t)<0 \end{cases}$$

www.ieun.ir

در حالت فروش از دست رفته،

$$b(t) = 0 \qquad (۲-۷)$$

$$NS(t)=I(t)=I(0)+\int_0^t [a(u)-w(u)]du \qquad (۲-۸)$$

که در آن w(t)، اگر NS(t)>0 باشد برابر است با d(t)، و اگر NS(t)=0 باشد برابر صفر است.

مسأله اصلی در هر سیستم تعیین خط مشی سفارش دهی است، یعنی چه موقع سفارش داده شود و مقدار سفارش چقدر باشد. این خط مشی بر تابع ورودی ،a(u)، تأثیر می گذارد. تابع ورودی نیز به نوبه خود بر متغیرهای موجودی و کمبود موجودی که در بالا تعریف شدند تأثیر خواهد گذاشت.

هدف نگهداری موجودی ها

الف) موجودی کالای ساخته شده:

اهداف و فواید این موجودیها عبارتند از:

(۱) مقابله با تغییرات تقاضا:

اگر تقاضا برای محصولی یکنواخت و معلوم باشد، آنوقت می توان نرخ تولید محصول را برابر نرخ تقاضا گرفت. در این صورت ممکن است احتیاجی به نگهداری موجودی نباشد. ولی اگر تقاضا در طی زمان تغییر نماید، چه این تغییر معلوم و چه تصادفی باشد، آنوقت می توان از موجودی کالای ساخته شده برای جذب این تغییرات استفاده نمود.

(۲) برآوردن سریع تقاضای مشتری:

نگهداری موجودی کالای ساخته شده، موسسه را قادر می سازد به محض در خواست مشتری یا مدت کوتاهی بعد از آن محصول را به او داده شود. به عبارت دیگر موجودی کالای ساخته شده بخش بازاریابی را مطمئن می سازد که مدت تحویل کالا به مشتری خیلی کمتر از مدت زمان ساخت و یا تهیه آن است.

(۳) مقابله با تغییرات و یا توقف تولید:

اغلب بواسطه تأخیر در رسیدن مواد اولیه، یا خرابی دستگاهی، یا به علل دیگر مقدار تولید کاهش یافته و یا برای مدتی متوقف می شود. موجودی کالای ساخته شده سبب می‌شود که، از تأثیر این حوادث بر عرضه کالا به مشتری جلوگیری نمود و یا تأثیر آنها را به تعویق انداخت.

www.ieun.ir

(۴) نرخ تولید ثابت :

در مواقعی که تقاضا دارای تغییرات زیاد یا فصلی است ، می توان بوسیله نگهداری موجودی کالای ساخته شده تولید را در نرخ ثابتی ادامه داد و در نتیجه از تغییر نیروی انسانی نیز جلوگیری و بعلاوه از ظرفیت وسایل تولید بطور موثر استفاده نمود.

ب) موجودی کالای نیمه ساخته:

فواید این موجودی ها عبارتند از:

(۱) جداکردن مراحل مختلف تولید از هم بطوریکه نقص یا از کار افتادن هر مرحله از پویش تولید موجب خوابیدن مراحل بعدی آن نشود. بعلاوه مقدار کمی از موجودی کالای نیمه ساخته از شدت تغییرات نرخ خروجی مراحل تولید مجاور می کاهد.

(۲) نگهداری مقدار بیشتری از این موجودی ها سبب می شود که نرخ تولید و تا حدی نیروی انسانی ثابت باشد. بطور مثال اگر دو ماشین مجاور در پویش تولید دارای ظرفیت های مختلف باشند، آنوقت تدارک این نوع موجودی ها در بین ماشین ها و اضافه کار یا نوبت دوم برای ماشین با ظرفیت کمتر باعث ثابت بودن نیروی انسانی و نرخ تولید می شود. در غیر این صورت توقف ماشین سریع تر حتمی خواهد بود.

ج) موجودی مواد اولیه و اقلام خریداری:

اهداف این موجودی ها عبارتند از:

(۱) استفاده از تخفیف های تجاری در صورت خرید مواد در مقادیر زیاد. بعلاوه خرید بیشتری از مواد در مواقعی که قرار است در آینده قیمت مواد افزایش یابد.

(۲) جلوگیری از توقف تولید به علت در دسترس نبودن مواد اولیه در صورت نیاز، تأخیر در رسیدن مواد که ممکن است ناشی از مشکلات حمل نقل و یا اختلالات تولیدی در موسسه فروشنده این مواد باشد.

اهداف برشمرده شده در فوق فواید نگهداری موجودی را بیان می دارند. البته، این فواید بدون تحمل هزینه و مشکلات دیگر امکان پذیر نیستند. مجزا کردن مراحل مختلف تولید در پویش تولید برای جلوگیری از توقف ناگهانی آن در موقع نرسیدن مواد و یا به منظور استفاده موثر تر از ماشین آلات و غیره بسیار مفید است ولی این امر فقط در مقابل بالا رفتن هزینه فضای انبار، کارکنان بیشتر، درگیری سرمایه در موجودی ها و غیره امکان پذیر است . طرح هر سیستم موجودی بایستی بطریقی باشد که منافع آن بیشتر از مخارجش باشد. بنابراین طرح یک سیستم کنترل موجودی مطلوب به شناخت و تعیین هزینه های مربوط به آن بستگی دارد.

www.ieun.ir

هزینه ها

بطور کلی از نقطه نظر هزینه ها می توان اهداف نگهداری موجودی را در یک هدف خلاصه نمود، هدف از نگهداری موجودی ها برطرف نمودن یا کاهش دادن هزینه هایی است که به علت فقدان موجودی ها حاصل می شوند. بنابراین توجیه نگهداری موجودی بایستی این باشد که، هزینه های صرفه جویی شده بیش از هزینه های نگهداری آن است . در زیر ابتدا هزینه های نگهداری موجودی را بررسی می نماییم، سپس هزینه هایی که در اثر نگهداری موجودی ها از بین می‌روند یا کاهش می یابند ذکر خواهند شد.

هزینه های نگهداری موجودی:

(۱) تسهیلات انبار:

برای انبار کردن مواد بایستی ساختمان ها و تاسیسات ایجاد و یا اجاره شوند. هزینه های انبار مثل استهلاک ، حرارت، و نور اغلب ثابت هستند، مقداری فضا برای انبار وجود دارد و بایستی گرم شده و نگهداری شود. بنابراین تا جایی که سطح موجودی از ظرفیت فضای موجود بیشتر نباشد معمولاً هزینه‌ای بطور مستقیم بوسیله موجودی ها ایجاد نمی شود. ولی در بعضی حالات ، فضای انبار اجاره می شود، یا فضای مورد تملک موسسه ممکن است برای استفاده های تولیدی دیگر بکار رود. در این صورت فضای مورد نیاز و در نتیجه هزینه آن، ممکن است یا به متوسط سطح موجودی یا حداکثر فضایی که در دسترس قرار گرفته است بستگی داشته باشد. در هر حالت ، چه فضا اجاره شود چه قابل استفاده برای امور تولیدی دیگری باشد، هزینه‌ای بطور مستقیم به علت نگهداری موجودی‌ها باید متحمل شد.

(۲) هزینه های انتقال:

هزینه های انتقال محصول به درون و به خارج انبار شامل خسارت ، دستمزدها، و هزینه وسایل است . هزینه های عادی انتقال محصول به درون و به خارج انبار نوعاً در مسایل موجودی مستقیماً در نظر گرفته نمی شوند. ولی، در بعضی حالات هزینه انتقال هر واحد ممکن است بستگی به سطح موجودی داشته باشد. برای مثال، افزایش بیش از حد موجودی ممکن است موجب شلوغ شدن محل کار انبار شود و گاهی مواقع لازم است که از انبارهای کمکی استفاده نمود. در این صورت عموماً هزینه های انتقال بیش از هزینه های عادی انتقال خواهد بود. بایستی مواد را بارگیری، حمل، و در انبارهای کمکی تخلیه نمود. این امر ممکن است هزینه‌ای زیاد و غیر عادی داشته باشد. چنین هزینه هایی که بیش از هزینه های عادی انتقال محصول هستند بایستی مورد توجه قرار گیرند.

www.ieun.ir

(۳) افت :

نگهداری مقادیر زیاد موجودی از محصولاتی که در معرض فساد و یا زوال قرار دارند توصیه نمی شوند. ارزش انواع بسیاری از این محصولات ، چه از نظر مالی و چه از نظر مورد استفاده، با گذشت زمان کاهش می یابد. برای روشن شدن موضوع مواد غذایی مثال خوبی است . افت موجودی ممکن است ناشی از علت های دیگری مانند ناپدید شدن، ناخنک زدن، شکستگی، تبخیر و غیره باشد.

(۴) متروک شدگی:

کالاهای موافق سبک روز مانند اتومبیل، پوشاک ، و بطور کلی محصولاتی که در اثر گذشت زمان و پیشرفت فنون نوع آنها تغییر می کند در خطر متروک شدن قرار دارند. ارزش این کالاها با گذشت زمان کاهش می یابد. در نتیجه، نگهداری مقادیر زیاد موجودی از این جور کالاها یک نوع سرمایه گذاری خطرناک (اشتباه) است . هر قلم جنسی که در معرض جانشین شدن (با مدل جدیدی) باشد مشمول خطر متروک شدگی است و بنابراین بایستی موجودی آن کمینه شود.

(۵) هزینه سرمایه:

سرمایه‌ای که برای تهیه موجودی مواد بکار می رود فرصت سرمایه گذاری در جاهای دیگر را از دست می دهد. این امر سبب ایجاد هزینه فرصت از دست رفته می شود، که معمولاً به صورت درصدی از سرمایه بیان می گردد. در هر موسسه توافق در مورد تعیین مقدار صحیح این درصد خیلی مشکل است . ولی به هر حال این هزینه یکی از مهم ترین هزینه‌های نگهداری موجودی بحساب می آید.

(۶) بیمه و مالیات :

اغلب هزینه بیمه مواد و اقلام انبار شده، که معمولاً بر حسب متوسط سطح موجودی سالیانه محاسبه می شود، مقدار قابل ملاحظه‌ای می‌باشد. بعلاوه ممکن است بر مواد موجود در انبار مالیات نیز تعلق گیرد.

یک روش معمول مدل سازی هزینه‌های نگهداری این است که آنها را متناسب با متوسط فرض نمود. اگر I(t) مقدار موجودی در زمان t باشد، متوسط موجودی در یک دوره زمانی (0,T) عبارت است از:

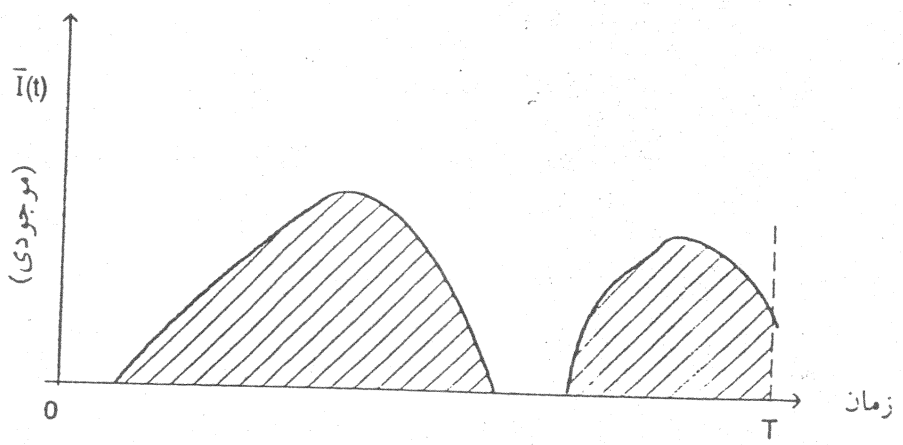
$$\bar{I} = \frac{1}{T}\int_0^T I(t)\, d(t) \qquad (۲-۹)$$

با مراجعه به شکل (۲-۲)، $\bar{I}$ عبارتا ست از سطح زیر منحنی موجودی تقسیم بر T. اگر h هزینه نگهداری یک واحد موجودی در واحد زمان باشد، متوسط هزینه نگهداری در واحد زمان در فاصله زمانی (0,T) برابر است با $h\bar{I}$.

www.ieun.ir

(توجه کنید که کل هزینه نگهداری در (0,T) برابر است با $h\bar{I}T$) غالباً فرض می شود که h شامل هزینه‌ای است متناسب با حجم پولی یک واحد محصول به اضافه هزینه‌ای که مستقل از این حجم پولی است (مثل هزینه فضای انبار). در این صورت $h=iC+W$ که در آن i هزینه نگهداری یک تومان موجودی در واحد زمان، C قیمت یک واحد محصول، و W هزینه فضای برای یک واحد متوسط موجودی در واحد زمان است. ضریب i موسوم به نرخ هزینه نگهداری است و نوعاً سالیانه بین ۱۵٪ تا ۲۵٪ است. در بسیاری از مدل های موجودی W حذف می شود و متوسط هزینه نگهداری در واحد زمان برابر است با $iC\bar{I}$.

$$\text{متوسط موجودی} = \bar{I}(t) = \frac{\text{سطح هاشور خورده}}{T}$$



شکل (۲-۲) تغییرات موجودی بر حسب زمان و متوسط موجودی

هزینه های کمبود موجودی :

موقعی که انبار خالی از موجودی باشد، نمی توان تقاضا را برآورده نمود این امر نتایجی در بردارد. اول اینکه، تقاضا (فروش) ممکن است از دست برود، حالت فروش از دست رفته. هزینه این حالت در نهایت شامل ضرر ناشی از سود از دست رفته یک واحد، و احتمالاً درآمدهای حاصل از فروش های آینده به مشتری ها است . دوم اینکه، تقاضای برآورده نشده ممکن است با تأخیر برآورده شود، حالت تقاضای پس افت. این حالت سبب ایجاد هزینه هایی مثل هزینه کاغذ بازی اضافی برای برآوردن تقاضای پس افتاده، و احتمالاً جریمه دیرکرد تحویل کالا به مشتری می شود. اگر تقاضا یک تقاضای درونی برای مواد در داخل خود موسسه تولیدی باشد، هزینه توقف تولید یا تعطیل آن ممکن است خیلی زیاد شود. سومین امکان برای هزینه کمبود موجودی حالتی است که تقاضا را بوسیله منبع دیگری ارضا نمود. این امر مستلزم هزینه اضافی سفارش برای خریدهای تعجیلی یا خرید از منابع دیگر با هزینه

www.ieun.ir

بالاتر است . در صورتی که مواد در خود موسسه تهیه شوند، این هزینه شامل هزینه سرعت بخشی به کارها و استفاده از اضافه کاری یا شیفت اضافی است . بدون توجه به اینکه کدامیک از این پیش آمدها رخ دهد، شرایطی ناجور (یا هزینه های غیر معمول) بوجود می آیند. هزینه های کمبود (یا "جریمه") غالباً جزو مهم ترین هزینه های مربوط به موجودی هستند. بعلاوه تعیین این هزینه ها خیلی دشوار است .

شاید ساده‌ترین مدل برای هزینه های کمبود این است که یک هزینه ثابت π برای هر واحد کمبود در نظر گرفت . این امر در مورد فروش از دست رفته و حالت های جانشین کردن محصول با محصولات دیگر مناسب است . ولی، در حالت تقاضای پس افتاده واقعی تر این است که هزینه کمبود را متناسب با مدت زمان تأخیر در ارضای تقاضای پس افتاده فرض نمود. بنابراین، فرض کنید که $\hat{\pi}$ هزینه یک واحد تقاضای پس افتاده در واحد زمان باشد. در این حالت وضع $\hat{\pi}$ در مورد پس افتاده ها مثل همان وضع h نسبت به موجودی ها است .

در طول زمان (0,T) ممکن است هزینه کل کمبود را با مدل زیر نشان داد:

$$\pi B + \hat{\pi} T \bar{b} \qquad (۲-۱۰)$$

که در آن B تعداد کل کمبود و $\bar{b}$ متوسط تقاضای پس افتاده در طول (0,T) است . قسمت اخیر برابر است با:

$$\bar{b} = \frac{1}{T}\int_0^T b(t)dt \qquad (۲-۱۱)$$

و b(t) وضعیت پس افتاده در زمان t می باشد. متوسط ضرر کمبود در واحد زمان در طول (0,T) عبارت است از:

متوسط هزینه کمبود: $\frac{\pi B}{T} + \hat{\pi}\bar{b}$

کل هزینه کمبود: $\pi B + \hat{\pi}\bar{b}T$

هزینه های تدارک مواد

هزینه های تدارک مواد، چه در حالتی که محصول از خارج موسسه خریداری شود و چه در حالتی که در خود موسسه تولید گردد، شامل یک مولفهٔ مستقل از مقدار هر بار تهیه مواد و یک مولفهٔ وابسته به مقدار تهیه مواد است . مولفهٔ اول هزینه ثابت هر بار تهیه مواد است و اغلب در حالت خرید آنرا "هزینه سفارش دهی" و در حالت تولید آنرا "هزینه آماده سازی" می نامند. (در اینجا ما هر دو حالت را هزینه ثابت هر بار سفارش یا بطور خلاصه هزینه سفارش دهی می نامیم.)

www.ieun.ir

هزینه سفارش دهی در حالت خرید

هر موقع که خریدی انجام می گیرد، اغلب بدون توجه به مقدار سفارش سیستم موجودی بایستی هزینه هایی را متحمل شود. به عنوان مثال، درخواست خرید باید تهیه گردد، سفارش انجام پذیرد، پرسش ها صورت گیرد، و بالاخره در موقع رسیدن کالا باید آن را دریافت ، بازرسی، قبول یا رد نمود. چون چنین هزینه هایی اغلب ثابت بوده و تابعی از مقدار سفارش و یا ارزش آن نیستند، بنابراین هر چه تعداد سفارش کمتر باشد سیستم کمتر متحمل هزینه می شود.

هزینه سفارش دهی در حالت تولید (هزینه آماده سازی)

چنین هزینه هایی در موقع آماده کردن ماشین آلات و تجهیزات برای ساختن محصول بوجود می آیند. به عنوان مثال این هزینه ها شامل هزینه تهیه ابزار جدید، هزینه محیا کردن ماشین ها، دوباره مرتب کردن وسایل، تدارک خدمات و تهیه روش های بازرسی، انتقال و غیره هستند. غالباً این هزینه ها ثابت و به مقدار سفارش بستگی ندارند، مگر در حالت های خاص که روش ها و تجهیزات مختلفی برای هر مقدار معینی از تولید نیاز باشد. چون تعداد کل واحدهایی که در طول سال تولید می شود ثابت و بستگی به دفعات تولید ندارند، بنابراین ممکن است صرفه جویی حاصل از کاهش دادن دفعات تولید به علت افزایش مقدار هر بار تولید بیشتر از هزینه نگهداری موجودی شود.

هزینه مواد

این هزینه که مولفهٔ متغیر هزینه تهیه مواد است در اکثر موارد تحت تأثیر تصمیم به نگهداری موجودی ها قرار نمی گیرد. استثناً موقعی است که تخفیف های قیمت و نوسانات قیمت ها وجود دارند. بیشتر روش های کنترل موجودی نوسانات قیمت ها را در نظر نمی گیرند. مواد یا از خارج موسسه خریداری می شوند که در این صورت هزینه هر واحد یک قلم موجودی عبارت است از قیمت خرید یک واحد آن، یا در داخل خود موسسه تولید می گردند که در این حالت هزینه هر واحد موجودی عبارت است از هزینه تولید یک واحد آن. هزینه تولید یک واحد بستگی دارد به اینکه محصول در چه مرحله‌ای از مراحل تولید قرار دارد. این هزینه در مراحل اولیه تولید کمی بیشتر از هزینه خرید واحد مواد اولیه موجود در آن است و هر چه از مراحل تولیدی بیشتری می گذرد قسمتی از هزینه های ثابت وسایل تولید، کار مستقیم و غیر مستقیم برای عملیات ، و هزینه مواد مستقیم به آن اضافه می شود.

www.ieun.ir

وضعیت تقاضا

در بعضی مواقع نمونه تقاضای آینده کاملاً معلوم است (این تقاضای معلوم ممکن است در طول زمان ثابت باشد و اگر تغییراتی هم داشته باشد این تغییرات منظم و معلوم هستند و تصادفی نیستند.) یا اینکه تغییرات تصادفی تقاضا ناچیز است بطوریکه، با تقریب کافی، می توان تقاضا را معلوم فرض نمود، مثل تقاضا برای مواد اولیه جهت ساختن کالاهایی که برنامه تولید آینده آنها معلوم است . در حالتی که تقاضا معلوم است آنرا قطعی (Deterministic) می نامیم.

عموماً نمی توان با قاطعیت نمونه تقاضای آینده را پیش بینی نمود. علت این امر وجود تغییرات تصادفی است که سبب می شود نتوان تقاضا را پیش بینی نمود. بطور کلی مهم ترین کاری که می توان در مورد تقاضا انجام داد بیان آن به صورت احتمالی است . معمولاً تقاضا (وگاهی بجز مدت تحویل) تنها مقداری است که به عنوان یک متغیر تصادفی در مدلهای تصمیم سفارش دهی در نظر گرفته می شود. غالباً نمی توان مطمئن بود که چه موقع تقاضایی خواهد رسید، و موقعی که تقاضایی می رسد، تعداد واحدهای درخواست شده ممکن است نامعلوم باشد. بنابراین تعداد کل واحدهای تقاضا شده در یک دوره زمانی ثابت یک متغیر تصادفی است که توزیع احتمالی آن بستگی به طول زمان دارد. اگر این توزیع احتمالی برای دوره های زمانی (به طول t) یکسان باشد، در این حالت البته میانگین نرخ تقاضا ثابت است ، می گوییم که جریان تقاضا ساکن (Static) است ، در غیر این صورت جریان تقاضا پویا (Dynamic)، یا غیر ساکن، می باشد.

بنابراین تقاضاها برای مواد موجودی ممکن است مقادیر معلوم یا متغیرهای تصادفی باشند. مدلهایی که در آنها تقاضا معلوم (قطعی) است موسوم به مدلهای قطعی و مدلهایی که در آنها تقاضا یک متغیر تصادفی در نظر گرفته می شود مدلهای احتمالی (Probabilistic or Stochastic) نامیده می شوند.

خط مشی موجودی

خط مشی موجودی را می توان به دو طبقه دائم و دوره‌ای تقسیم نمود. در خط مشی دائم اطلاع از سطح موجودی در هر لحظه از زمان بایستی امکان پذیر باشد. در خط مشی دوره‌ای سطح موجودی را فقط در نقاطی از زمان، به فواصل زمانی مساوی T از یکدیگر، بازدید می کنند. در این صورت T را دوره بازدید می نامند.

در خط مشی دوره‌ای، در هر نقطه از بازدید فرصتی وجود دارد که مقدار دلخواهی از مواد سفارش داده شود. فرض کنید که قاعده سفارش این است که، فقط موقعی سفارش دهید که سطح موجودی بازدید شده، I، مساوی یا کمتر از r واحد باشد. r را نقطه سفارش (Reorder Point) می نامند. اگر در یک نقطه بازدیدی بنا شود که سفارشی

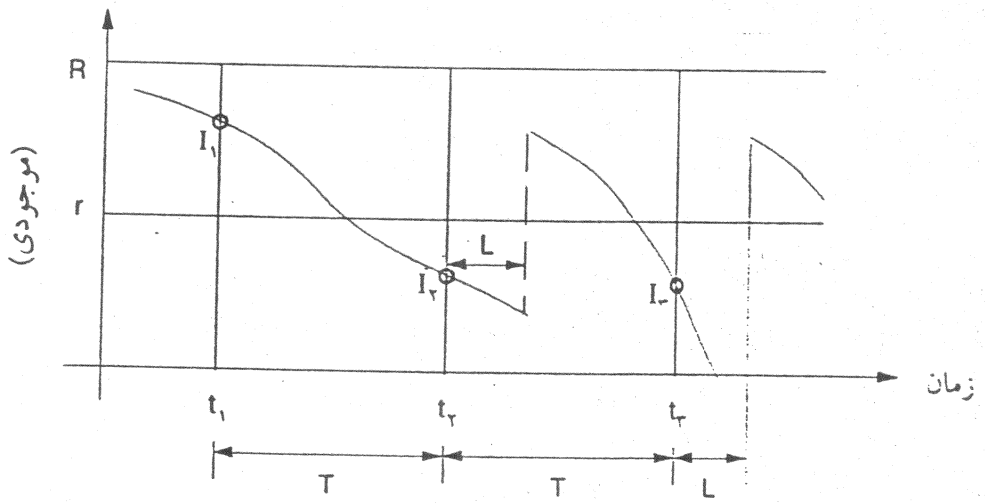
www.ieun.ir

انجام گیرد، آنوقت مقدار سفارش برابر است با تفاوت سطح موجودی بازدید شده با یک سطح مشخص شده، R. به عبارت دیگر در دوره j، مقدار سفارش Q_j، عبارت است از:

$$\left.\begin{array}{ll} \text{اگر } I_j > r & ،\ 0 \\ \text{اگر } I_j < r & ،\ R - I_j \end{array}\right\} = Q_j$$

این خط مشی از سه پارامتر R ، r ، T تشکیل شده است و آنرا با (R,r,T) نشان می دهند. در اغلب کتب موجودی این خط مشی را خط مشی بازدید دوره‌ای (R,r) می نامند. توجه کنید که این خود یک قاعدهٔ تصمیم گیری است که می گوید چه موقع سفارش داده شود و مقدار آن چقدر باشد.

شکل ۳ـ۲ وضعیت یک خط مشی (R,r) را نشان می دهد. در نقطه بازدید ۱، سطح موجودی بیش از مقدار نقطه سفارش (r) می باشد، بنابراین سفارش انجام نمی گیرد. در نقطه بازدید ۲، چون مقدار موجودی پایین تر از نقطه سفارش است ، مقدار سفارش برابر است با $Q^2 = R - I_2$ واحد. توجه کنید که به مجرد انجام سفارش ، مواد فوراً دریافت نمی شود و سطح موجودی به نزول خود ادامه می دهد تا وقتی که در انتهای مدت تحویل (L) مواد سفارش شده برسد و به سطح موجودی اضافه شود. در نقطه بازدید ۳، مواد سفارش شده موقعی می رسد که موجودی کاملاً تخلیه شده و در نتیجه کمبود رخ داده است .



شکل (۳ـ۲). خط مشی بازدید دوره‌ای (R,r).

www.ieun.ir

حالت خاصی از خط مشی (R,r,T) خط مشی می باشد که در آن R=r است ، و در هر نقطه بازدید j سفارشی انجام می گیرد و مقدار آن سفارش برابر است با $R - I_j$ یعنی بازاء تمام مقادیر j.

$$Q_j = R - I_j$$

بعضی از نویسندگان، خط مشی (R,T) را خط مشی سفارش تا سطح R می نامند. این خط مشی برای حالاتی مناسب است که مقدار هزینه ثابت هر بار سفارش دهی صفر یا ناچیز باشد.

در خط مشی دائم امکان رد یابی سطح موجودی دائماً امکان پذیر است و در نتیجه می توان در هر زمانی که مناسب باشد سفارشی انجام گیرد. می توان یک خط مشی بازدید دائم (R,r) در نظر گرفت که در آن در هر زمان ، t، که سطح موجودی I(t) مساوی یا کمتر از نقطه سفارش r باشد مقداری برابر Q(t) = R - I(t) واحد سفارش داده شود. بنابر این خط مشی (R,r) حد خط مشی (R,r,T) ، که در آن T به سمت صفر میل می کند، می باشد.

اگر محصول به صورت واحدهای تکی مورد تقاضا واقع شود، سفارش موقعی انجام می گیرد که I(t)=r باشد. بعلاوه مقدار سفارش همیشه ثابت و برابر Q=R-r می باشد. در این حالت ، معمولاً خط مشی را بجای (Q+r=R,r) با (r,Q) نشان می دهیم. خط مشی (r,Q) به خط مشی سفارش ثابت موسوم است ، که در آن Q مقدار ثابت سفارش و r نقطه سفارش می باشد.

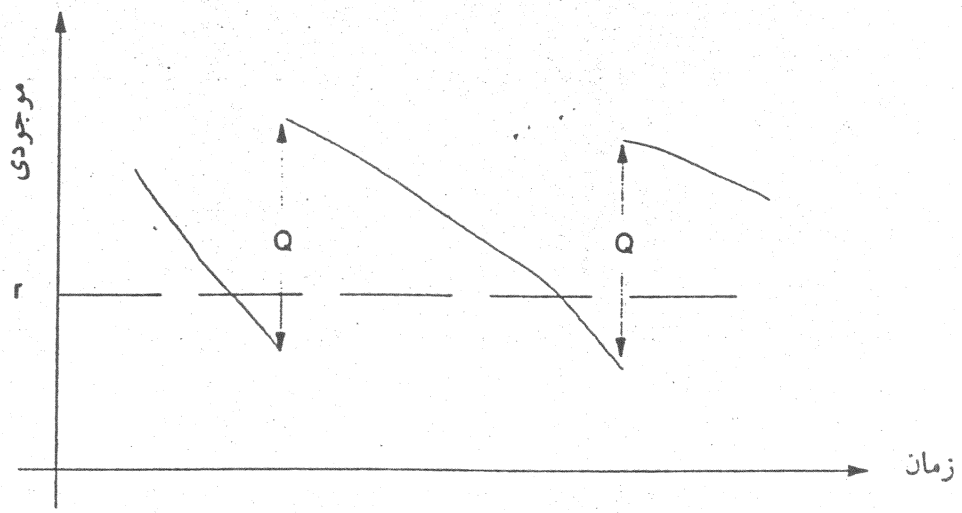
اگر r=R باشد، بعد از هر برداشتی از انبار سفارش نیز انجام می گیرد و مقدار سفارش برابر مقدار برداشت خواهد بود. معنی این امر این است که همیشه سطح موجودی در دست ودر سفارش R می باشد. این خط مشی موسوم به سیستم موجودی پایه (Base Stock System) است ، و در آن R را سطح موجودی پایه گویند.

شکل ۴-۲ سیستم (r,Q) را نشان می دهد. هر وقت سطح موجودی به نقطه سفارش می رسد سفارش انجام می گیرد، اما دریافت سفارش پس از مدت تحویل (L) انجام می گیرد. توجه کنید که اگر مقدار مصرف در طول مدت تحویل بیش از نقطه سفارش r باشد، در آن صورت کمبود رخ خواهد داد. بعلاوه فاصله زمانی بین سفارشات متوالی متغیر، ولی مقدار سفارش ثابت است.

برای اینکه دقیق تر باشیم، سطح موجودی I را در خط مشی های فوق بایستی نماینده موقعیت موجودی یعنی، موجودی خالص به اضافه مقدار در سفارش در نظر گرفت .

در حالتی که جریان تقاضا غیر ساکن (پویا) باشد، خط مشی موجودی ممکن است ساختمان توضیح داده شده در فوق را داشته باشد، ولی پارامترهای خط مشی با زمان تغییر کند.

www.ieun.ir



شکل (۴-۲) . خط مشی بازدید دائم (r,Q).

مدل‌های موجودی

در بخش های زیر چند مدل موجودی بررسی خواهند شد. در اینجا هدف این نیست که این بررسی جامع و فراگیر باشد، بلکه منظور این است که با مثال‌هایی از تجزیه و تحلیل مسائل گوناگون موجودی‌ها با مدل سازی آنها آشنایی حاصل شود. برای درک ساده تر مطلب بهتر است مسائل موجودی را طبقه بندی نمود و آنها را به ساکن یا پویا (غیر ساکن)، قطعی یا احتمالی، تک محصولی یا چند محصولی، یک طبقه‌ای یا چند طبقه‌ای تقسیم نمود.

مدل‌های قطعی

در این بخش مجموعه‌ای از مدل‌های قطعی تک محصولی مورد بررسی قرار می‌گیرد. با وجودی که تقاضا را نمی‌توان در اکثر موارد با صد در صد دقت پیش بینی نمود فرض می‌شود که نرخ تقاضا معلوم و ثابت است . بعلاوه فرض می‌کنیم که مدت تحویل (L) و سایر پارامترهای سیستم مثل هزینه‌ها معلوم و ثابت ، و مستقل از مقدار سفارش هستند. در حالی که این فرضیات عموماً غیر واقعی به نظر می رسند، ولی این مدل‌ها چارچوب ساده‌ای را برای معرفی روش های تجزیه و تحلیل مدل‌های پیچیده‌تر تهیه می‌کنند و مطالعه آنها را یک آشنایی نسبتاً ساده‌ای به مدل سازی و کنترل جریان‌های موجودی است . بعلاوه، این مدل‌ها تقریب خوبی برای بسیاری از سیستم‌های موجودی در جهان واقعی هستند. با وجودی که فرضیات ساده‌ای در بنای آنها بکار می‌رود ولی نتایج حاصل از مطالعه آنها، از نظر کیفی، نوع رفتار تقریبی سیستم موجودی را حتی وقتی که فرض دانستن تقاضا را برداریم بدست می دهد.

www.ieun.ir

ساده‌ترین مدل:

ابتدا مسئله کنترل موجودی‌های یک محصول در انبار را با تعاریف و علامات اختصاری زیر در نظر می‌گیریم.

D – نرخ تقاضا، تعداد واحدهای تقاضا در سال، معلوم و ثابت (مستقل از زمان) است .

– مقدار سفارش یکباره به صورت یک بسته می‌رسد، یعنی هرگز اتفاق نمی‌افتد که مقدار سفارش به دو بخش تقسیم شود که قسمتی در یک زمان و قسمت بعدی در زمانی دیگر برسد.

– محصول را می‌توان برای مدت های طولانی (بی‌نهایت) نگهداری نمود و هرگز متروک شدنی نیست.

L – مدت تحویل (Lead Time)، فاصله زمانی از موقع سفارش دادن تا موقعی که محصول به انبار می‌رسد ثابت و مستقل از D و مقدار سفارش است .

C – هزینه هر واحد محصول ثابت و به مقدار سفارش بستگی ندارد.

h – هزینه نگهداری یک واحد محصول در سال، معمولاً به صورت h=iC بیان می‌شود، که که در آن i نرخ هزینه نگهداری (Inventory Carrying Cost Rate) است .

– کمبود موجودی در هیچ زمانی وجود ندارد، یعنی تقاضای تمام مشتری‌ها بدون تأخیر برآورده می‌شود.

– محدودیت فضا، تعداد سفارشات و سرمایه وجود ندارد.

– پیوستگی : ابتدا فرض می‌شود که مقدار تقاضا تابع پیوسته‌ای از زمان باشد و از این واقعیت که ممکن است به صورت واحدهای گسسته باشد فعلاً صرفنظر می‌شود ولی بعداً این موضوع بررسی خواهد شد.

A – هزینه ثابت هر بار سفارش .

مسئله اصلی در هر سیستم موجودی تعیین "خط مشی" آن است ، یعنی تعیین مقدار سفارش و موقع آن.

خط مشی مطلوب : خط مشی است که حداکثر استفاده از آن حاصل شود. چون D ثابت است ، در نتیجه مقدار فروش نیز ثابت و مستقل از خط مشی انتخاب شده برای سیستم موجودی است . بنابراین خط مشی مطلوب آن است که هزینه سالیانه‌اش کمینه باشد.

از آنجا که D و L ثابت هستند بنابراین روشن است که، وقتی سیستم به صورت بهینه (اقتصادی) کار می‌کند که همیشه مقدار سفارش در هر بار ثابت و مقدار موجودی در موقع رسیدن هر بار سفارش یکسان باشد. چون مقدار

سفارش ،Q،ثابت است ، بنابراین فاصله زمانی بین هر دو بار سفارش متوالی، T موسوم به دور (Cycle) سفارش ، نیز ثابت است.

$$T = \frac{Q}{D}$$

هزینه‌های مناسب با توجه به هزینه‌هایی که قبلاً تعریف شدند، در اینجا هزینه‌هایی که به "خط مشی" سیستم موجودی مربوط می شوند عبارتند از:

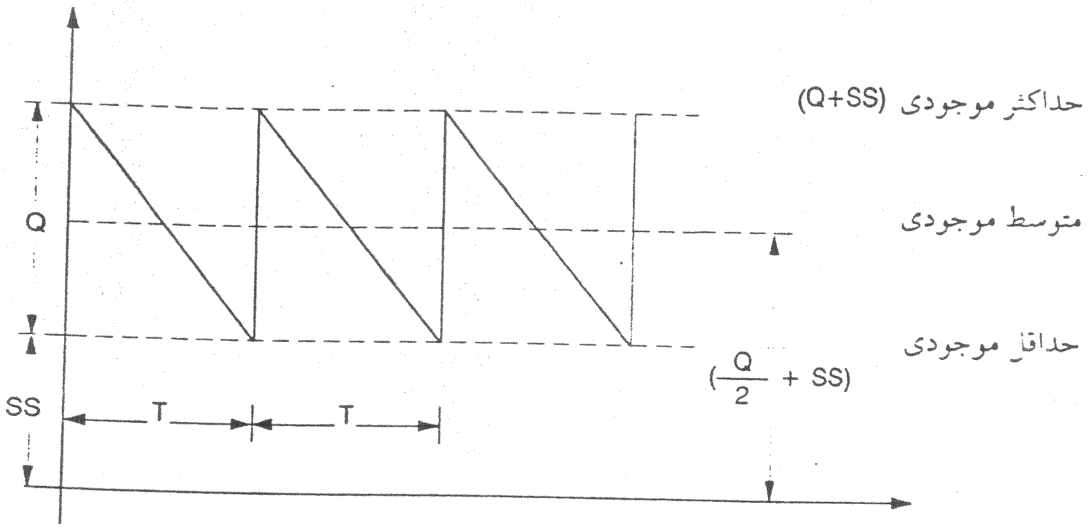
(۱) هزینه واحد محصول

(۲) هزینه سفارش دهی

(۳) هزینه نگهداری موجودی

هزینه متوسط سالیانه سیستم

هزینه متوسط سالیانه سیستم موجودی، K، برابر است با:



شکل الف

$$\text{حداکثر موجودی} = Q + SS$$

$$\text{حداقل موجودی} = SS$$

$$\text{متوسط موجودی} = \frac{(Q+SS)+SS}{2} = \frac{Q}{2} + SS$$

$$T = \frac{Q}{D}$$

$$K = (\text{هزینه‌های نگهداری موجودی در سال}) + (\text{هزینه تعداد سفارشات در سال}) + (\text{هزینه خرید محصول در سال})$$

www.ieun.ir

الف) هزینه خرید سالیانه:

چون مقدار خرید سالیانه ثابت و برابر D و هزینه هر واحد C می‌باشد، بنابراین

هزینه خرید سالیانه=CD

ب) هزینه سالیانه تعداد سفارشات :

تعداد سفارشات در سال برابر است با $\frac{D}{Q}$ و چون هزینه هر بار سفارش A می‌باشد پس :

$$\text{هزینه تعداد سفارشات در سال} = \frac{DA}{Q}$$

ج) هزینه سالیانه نگهداری موجودی:

در صورتی که حداقل موجودی برابر SS باشد، آنوقت هر بار که مقدار سفارش (Q) می‌رسد، حداکثر موجودی با توجه به شکل (الف) برابر با $\frac{Q}{2}$ +SS است . پس هزینه نگهداری سالیانه مساوی است با:

$$\text{هزینه سالیانه نگهداری موجودی} = h\left(\frac{Q}{2} + SS\right)$$

یا

$$= iC\left(\frac{Q}{2} + SS\right)$$

با توجه به قسمت های الف ، ب و ج مقدار هزینه سالیانه سیستم عبارت است از:

$$K = CD + \frac{DA}{Q} + \frac{h}{2}(Q + 2SS)$$

چون مقدار خرید سالیانه (CD) ثابت است ، بنابراین برای بدست آوردن خط مشی مطلوب ، می‌توان از CD صرفنظر نمود. بعلاوه با وجودی که مقدار حداقل موجودی (SS) بستگی به خط مشی دارد، ولی از آنجاکه این مقدار مستقل از Q است ، بنابراین برای اینکه Kکمینه شود بایستی SS=۰ باشد. در نتیجه برای تعیین خط مشی مطلوب کافی است که رابطه زیر راکمینه نمود:

$$K = \frac{DA}{Q} + h\frac{Q}{2}$$

یا

$$K = \frac{DA}{Q} + iC\frac{Q}{2} \qquad (۲-۱۲)$$

مثال (۱-۲) یکی از مواد شیمیایی مورد نیاز کارخانه‌ای به صورت دسته‌هایی ثابت (مقدار سفارش ثابت) از منبع تهیه برای مدت طولانی خریداری می‌شود. قیمت خرید هر واحد، C، برابر ۳ تومان است . سایر اطلاعات مربوط به

www.ieun.ir

این قلم موجودی در زیر داده شده است :

تومان ۶ = A = هزینه هر بار سفارش

واحد در سال ۶۰۰۰ = D = مصرف سالیانه

تومان ۰/۷۵ = ۰/۲۵ C = هزینه نگهداری هر واحد در سال.

مقدار هر بار سفارش و هزینه کل سالیانه را حساب کنید.

با توجه به جدول (۱-۲) اگر مقدار سفارش در هر بار برابر ۶۰۰۰ واحد باشد، هزینه سفارش در سال برابر ۶ تومان است. ولی هزینه نگهداری بسیار زیاد و مساوی ۲۵۰۰ تومان می باشد. هر چه تعداد دفعات سفارش در سال بیشتر شود هزینه سفارش سالیانه افزایش و بالعکس هزینه نگهداری سالیانه کاهش می‌یابد. در جدول (۱-۲) هزینه سالیانه سیستم موجودی برای خط مشی های مختلف داده شده است. در بین خط مشی‌های مختلف راه حل Q=۳۰۰ واحد کمترین هزینه را دارد.

جدول (۱-۲)

هزینه سالیانه K به تومان	هزینه سالیانه سفارش دادن	هزینه نگهداری سالیانه به تومان	متوسط موجودی به واحد	تعداد سفارشات در سال D/Q	مقدار سفارش Q
۲۲۵۶	۶	۲۲۵۰	۳۰۰۰	۱	۶۰۰۰
۱۱۳۷	۱۲	۱۱۲۵	۱۵۰۰	۲	۳۰۰۰
۴۱۱	۳۶	۳۷۵	۵۰۰	۶	۱۰۰۰
۲۵۹/۵	۷۲	۱۸۷/۵	۲۵۰	۱۲	۵۰۰
۲۴۰	۹۰	۱۵۰	۲۰۰	۱۵	۴۰۰
۲۳۲/۵	۱۲۰	۱۱۲/۵	۱۵۰	۲۰	۳۰۰
۲۳۷/۵	۱۴۴	۹۳/۷۵	۱۲۵	۲۴	۲۵۰
۲۹۶/۲۵	۲۴۰	۵۶/۲۵	۷۵	۴۰	۱۵۰
۳۳۴/۹	۲۸۸	۴۹/۶	۶۲/۵	۴۸	۱۲۵

خط مشی مطلوب

برای بدست آوردن خط مشی مطلوب بایستی مقدار Q طوری انتخاب شود که هزینه سالیانه K کمینه گردد. یعنی:

$$\text{Min } K = \frac{DA}{Q} + iC\frac{Q}{2}$$

www.ieun.ir

چون Q پیوسته است و مشتق دوم K مثبت می‌باشد یعنی :

$$\frac{\partial^2 K}{\partial Q^2} = \frac{2DA}{Q^3} > 0$$

بنابراین برای تعیین مقدار مطلوب Q، Q^* مشتق K را مساوی صفر قرار می‌دهیم.

$$\frac{\partial K}{\partial Q} = \frac{DA}{Q^2} + \frac{iC}{2} = 0$$

از حل این رابطه مقدار Q^* بدست می‌آید:

$$Q^* = \sqrt{\frac{2DA}{iC}} \qquad (۲-۱۳)$$

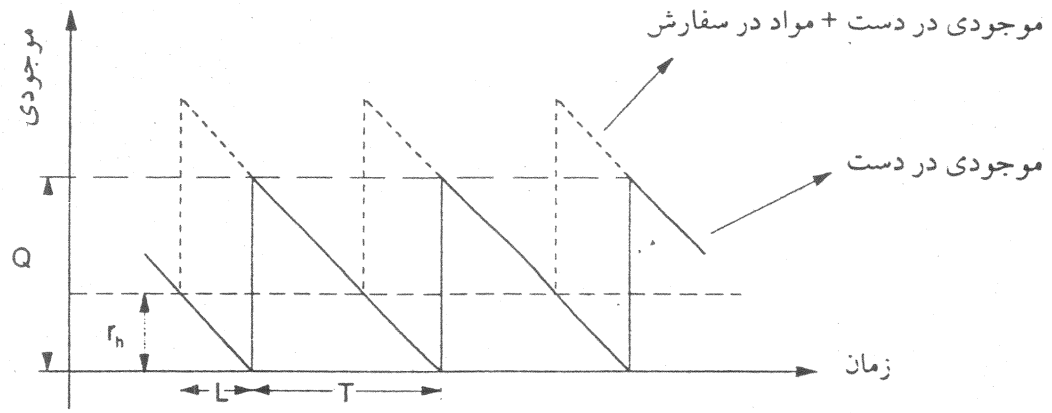
رابطه فوق به نام‌های مقدار سفارش اقتصادی {Economic Order Quantity (E.O.Q)، Economic Order Size، Lot Size Formula2، Square Root Formula}، فرمول ویلسون (Wilson) و فرمول هریس (Harris) معروف است . ویلسون و هریس هر دو این فرمول را بدست آورده‌اند. به نظر می‌رسد که هریس اولین کسی باشد که آن را در سال ۱۹۱۵۲ بدست آورده است. گاهی مواقع مقدار سفارش اقتصادی را با Q_w (w اشاره‌ای است به نام ویلسون) نشان می‌دهند. با استفاده از رابطه (۲-۱۳) مقدار سفارش اقتصادی برای مثال (۲-۱) برابر است با:

$$Q^* = Q_w = \sqrt{\frac{2(600)(6)}{0/75}} = 300 \text{ واحد}$$

نقطه سفارش

اگر مدت تحویل L و مقدار سفارش Q باشد، آنوقت برای حالتی که $L < T = \frac{Q}{D}$ [شکل (۲-۵)] باشد، نقطه سفارش موقعی خواهد بود که موجودی در دست برابر باشد با:

$$r_h = D\,L$$



شکل (۲-۵)

2.2
www.ieun.ir

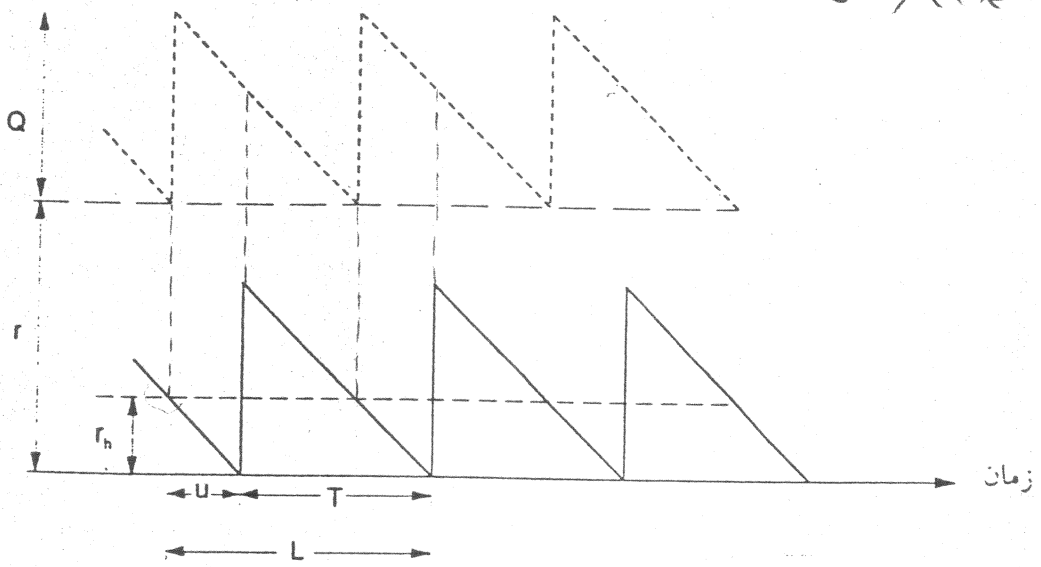
و برای حالتی که $T < L$ (شکل (۲-۶)باشد نقطه سفارش نقطه‌ای است که موجودی در دست به اضافه مواد در سفارش برابر DL (D L : مقدار تقاضا در مدت تحویل L است) باشد یعنی:

$$r = D\,L \qquad (۲-۱۴)$$

یا به عبارت دیگر موجودی در دست برابر است با:

$$r_h = Du = D\,(L - mT) = D\,L - DmT = D\,L - mQ \qquad (۲-۱۵)$$

که در آن $m=[\frac{L}{T}]$، یعنی m بزرگترین عدد صحیحی است که مساوی یا کوچکتر از $\frac{L}{T}$ می‌باشد.



شکل (۲-۶)

در شکل (۲-۶) مقدار سفارش در نقطه سفارش برابر mQ (m=1) می‌باشد.

بنابراین برای خط مشی مطلوب ، نقطه سفارش موقعی است که:

$$r_h^* = D\,L \qquad \text{برای } L \le T$$

یا

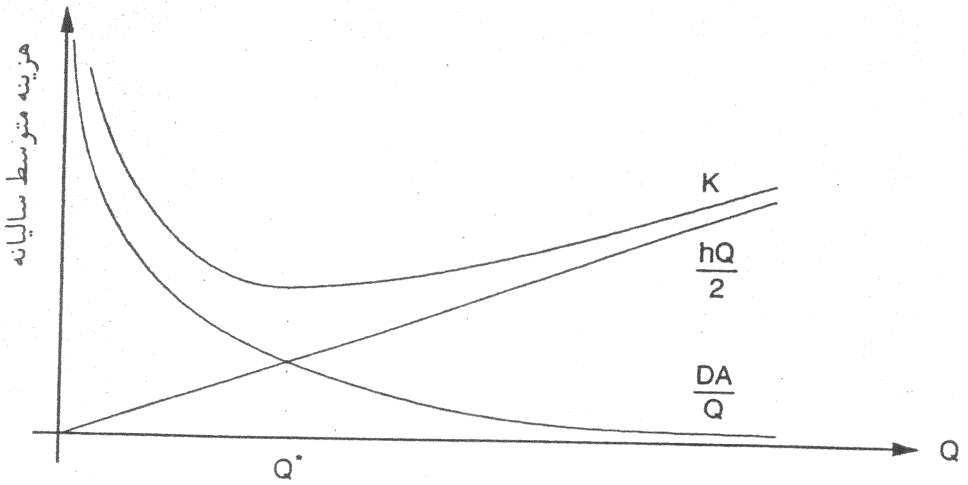
$$r_h^* = D\,L - mQ^* \qquad \text{برای } L > T$$

خواص مدل

با توجه به رابطه هزینه سالیانه $K = \frac{DA}{Q} + h\frac{Q}{2}$ ، این هزینه از هزینه نگهداری و هزینه سفارش سالیانه تشکیل شده است . با افزایش Q هزینه نگهداری افزایش و هزینه سفارش کاهش می‌یابد. (شکل (۲-۷)).

تمرین ۱) ثابت کنید که محل تلاقی دو منحنی $h\frac{Q}{2}$ و $\frac{DA}{Q}$ در نقطه Q^* می‌باشد.

23
www.ieun.ir



شکل (۲-۷)

با توجه به خط مشی مطلوب، متوسط موجودی برابر است با $\frac{Q^*}{2}$ یا:

$$\frac{Q^*}{2} = \sqrt{\frac{DA}{2iC}} = W\sqrt{D} = Z\sqrt{\frac{1}{C}}$$

که در آن $W = \sqrt{\frac{A}{2iC}}$ و $Z = \sqrt{\frac{DA}{2iC}}$ می‌باشند. بنابراین متوسط موجودی (و حد اکثر آن) بطور خطی با جذر مقدار مصرف تغییر می‌نماید. به علاوه متوسط موجودی متناسب با عکس جذر قیمت واحد محصول تغییر می‌نماید. پس، متوسط موجودی برای محصول‌های گرانتر، در صورتی که سایر پارامترهای دیگر ثابت باشند، کمتر از متوسط موجودی برای محصول‌های ارزانتر است.

هزینه سالیانه خط مشی مطلوب

با جانشین کردن Q^* در رابطه (۲-۱۲) مقدار بهینه K، K^*، یعنی هزینه سالیانه خط مشی مطلوب بدست می‌آید.

$$K^* = \frac{DA}{Q^*} + iC\frac{Q^*}{2} = DA\sqrt{\frac{iC}{2DA}} + \frac{iC}{2}\sqrt{\frac{2DA}{iC}}$$

$$K^* = \sqrt{\frac{1}{2}DAiC} + \sqrt{\frac{1}{2}DAiC} = \sqrt{2DAiC} \qquad (۲-۱۶)$$

گاهی مواقع مقدار $\sqrt{2DAiC}$ را با K_w نشان خواهیم داد.

از این رابطه معلوم است که مقدار K^* با جذر نرخ تقاضا متناسب می‌باشد، یعنی $K = y\sqrt{D}$

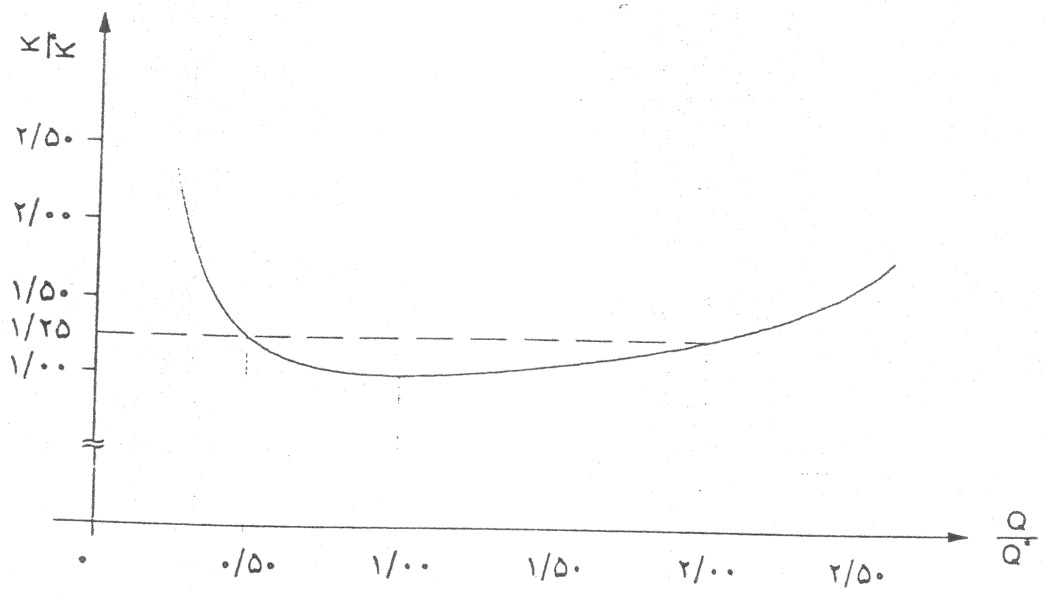
24
www.ieun.ir

مقایسه K^* با هزینه K، وقتی بجای Q^* مقدار دیگری (Q) بکار رود، نتیجه جالب زیر را می‌دهد.

$$\frac{K}{K^*} = \left(\frac{DA}{Q} + iC\frac{Q}{2}\right) / \sqrt{2DAiC} = \frac{1}{2}\left[\left(\sqrt{\frac{2DA}{iC}}\right)/Q + Q/\left(\sqrt{\frac{2DA}{iC}}\right)\right]$$

$$\frac{K}{K^*} = \frac{1}{2}\left(\frac{Q^*}{Q} + \frac{Q}{Q^*}\right) \qquad (۲\text{-}۱۷)$$

توجه کنید که این رابطه کاملاً مستقل از پارامترهای سیستم (یعنی A،D،i،C) می‌باشد. این رابطه در شکل (۲-۸) رسم شده است. ملاحظه می شود که در نزدیکی نقطه مطلوب ($Q=Q^*$)، منحنی نسبتاً پهن می‌باشد. اگر مقدار Q دو برابر Q^* یا نصف آن باشد، مقدار K فقط ۲۵ درصد از مقدار مطلوب آن یعنی K^* بیشتر است. یا اگر Q به اندازه ۴۰ درصد بیش از Q^* باشد مقدار K فقط در حدود ۶ درصد از K^* بیشتر خواهد بود. ($K=1.057\ K^*$)



شکل (۲-۸)

تمرین ۲) فرض کنید A مقدار تخمینی هزینه سفارش و A_a مقدار واقعی آن باشد. اگر K هزینه سالیانه ناشی از استفاده A بجای A_a باشد، آنرا با K^* (هزینه سالیانه بهینه واقعی) مقایسه کنید.

تمرین ۳) در تمرین ۲ با جانشین کردن h بجای A و h_a بجای A_a آن را حل کنید.

تعداد سفارشات دریافت نشده

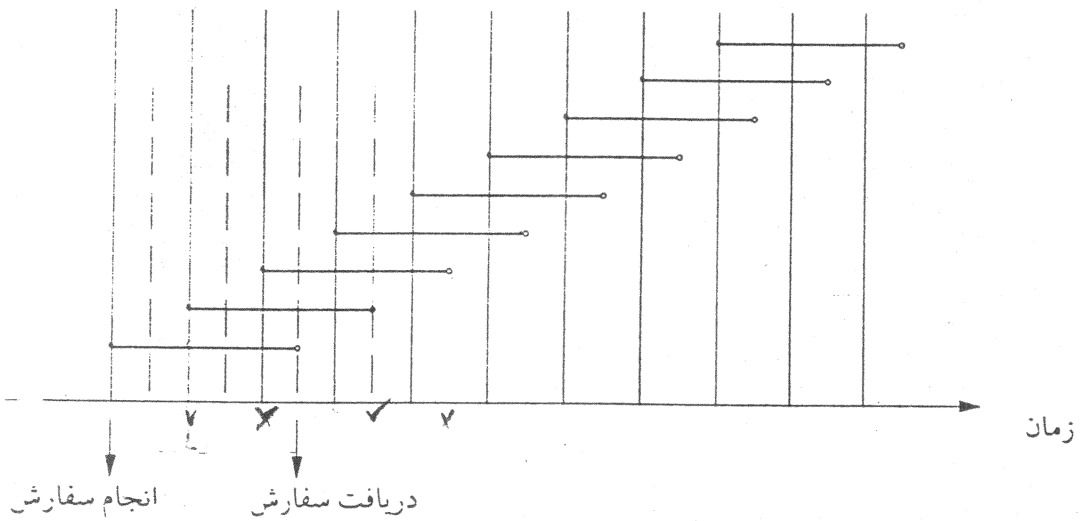
در صورتی که $T<L$ باشد، تعداد سفارشات دریافت نشده هرگز از یکی بیشتر نخواهد بود. به علاوه لحظه‌ای قبل

www.ieun.ir

از سفارش دادن ابداً سفارش دریافت نشده‌ای وجود ندارد. از طرف دیگر، اگر $T<L$ باشد، تعداد سفارشات دریافت نشده همیشه بیش از یکی خواهد بود. به عنوان مثال اگر $L=2/5T$ باشد، همانطورکه در شکل (۹-۲) نشان داده شده است ، تعداد سفارشات دریافت نشده همیشه ۲ یا ۳ عدد خواهد بود. در نصف دوره T این تعداد برابر ۲ و در نصف دیگر آن برابر ۳ می‌باشد. بنابراین بطور متوسط ۲/۵ سفارش دریافت نشده وجود دارد. در نتیجه متوسط محصول در سفارش برابر $2/5Q$ می‌باشد که دقیقاً برابر مقدار تقاضا در مدت تحویل می‌باشد.

تمرین ۴) ثابت کنید که برای هر مدت تحویل L، مقدار محصول در سفارش برابر مقدار تقاضا در مدت تحویل می‌باشد.

در شکل (۹-۲) مقدار در سفارش درست لحظه‌ای قبل از سفارش برابر $2Q$ و بلافاصله پس از انجام سفارش برابر $3Q$ می‌باشد. بطور کلی، مقدار در سفارش درست لحظه‌ای قبل از انجام هر سفارش برابر mQ (m بزرگترین عدد صحیحی است که کوچکتر یا مساوی $\frac{L}{T}$ می‌باشد.)، و بلافاصله پس از انجام هر سفارش این مقدار برابر $(m+1)Q$ می‌باشد (یا در حالتی که $\frac{L}{T}$ درست برابر m باشد همیشه مقدار در سفارش دقیقاً برابر mQ است).



شکل (۹-۲)

مقدار موجودی در دست به اضافه مقدار در سفارش

درست لحظه‌ای قبل از انجام سفارش این مقدار برابر مقدار مصرف در مدت L می‌باشد (DL) ، چون در این لحظه:

مقدار موجودی در دست : $r_h=DL-mQ$

مقدار در سفارش : mQ

www.ieun.ir

بنابراین مقدار در دست به اضافه در سفارش برابر $r=DL$ می‌باشد. لحظه‌ای پس از انجام هر سفارش ، این مقدار به اندازه Q افزایش می‌یابد (شکل (۲-۵) و (۲-۶)). بنابراین بطور کلی :

$$DL \leq \text{مقدار در دست} + \text{مقدار در سفارش} \leq DL+Q$$

مثال (۲-۲) سیستمی را از نوع سیستم شرح داده شده در فوق که محصولی را با پارامترهای زیر به صورت موجودی نگهداری می‌کند درنظر بگیرید.

$i=$ ٪۲۰　　و　　واحد در سال $D=۶۰۰$

سال $L=$ ۱　　و　　تومان $A=۸/۰$

تومان $C=۰/۳۰$

برای روشن شدن موضوع، می‌توان فرض کرد که این محصول ارزان در یک فروشگاه نگهداری می‌شود. بالا بودن هزینه ثابت سفارش دادن به علت این است که این محصول از کشورهای اروپایی خریداری می‌شود. به همین علت نیز مدت تحویل نیز طولانی است . مقدار سفارش اقتصادی برابر است با:

$$Q^* = \sqrt{\frac{۲DA}{iC}} = \sqrt{\frac{۲(۶۰۰)(۸)}{(۰/۲۰)(۰/۳۰)}} = ۴۰۰$$

فاصله زمانی بین دو سفارش متوالی (طول یک دور) برابر است با:

$$T^* = \frac{Q^*}{D} = \frac{۴۰۰}{۶۰۰} = \frac{۲}{۳} \text{ سال}$$

تقاضای مدت تحویل برابر است با:

$$DL = ۶۰۰ \text{ واحد}$$

پس نقطه سفارش برحسب مقدار در دست و مقدار در سفارش برابر است با $r^*=۶۰۰$ واحد. برای محاسبه نقطه سفارش برحسب موجودی در دست ، ابتدا در نظر داشته باشید که $\frac{L}{T} = \frac{۳}{۲}$. بزرگترین عدد صحیحی که کوچکتر از $\frac{L}{T}$ باشد برابر یک می‌باشد. بنابراین

$$r_n^* = DL - Q^* = ۲۰۰ \text{ واحد}$$

هزینه متوسط سالیانه کمینه (هزینه نگهداری به اضافه هزینه سفارش در سال) عبارت است از:

$$K^* = \sqrt{۲DAiC} = \sqrt{۲(۶۰۰)(۸)(۰/۰۶)} = \sqrt{۵۷۶} = ۲۴ \text{ تومان}$$

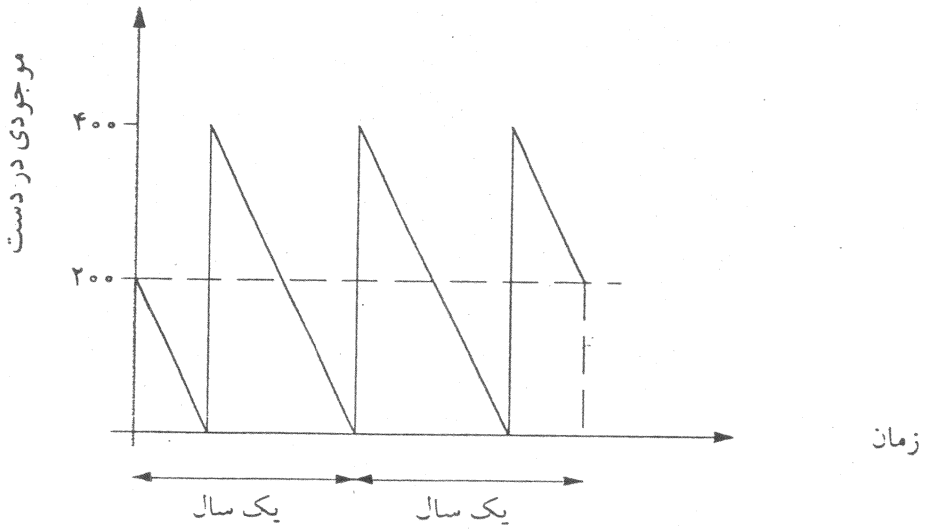
هزینه سالیانه مواد برابر است با:

$$CD = ۱۸۰ \text{ تومان}$$

www.ieun.ir

بنابراین هزینه نگهداری و سفارش جزء کوچکی از هزینه کل سالیانه (شامل هزینه مواد) می‌باشد.

هزینه واقعی سالیانه از یکسال به سال دیگر فرق می‌کند. این امر را می‌توان در شکل (۱۰ـ۲) ملاحظه نمود. فرض کنید که محاسبه هزینه سالیانه بلافاصله پس از انجام یک سفارش صورت گیرد. بنابراین در سال اول یک سفارش و در



شکل (۱۰ـ۲)

سال دوم دو سفارش صورت می‌گیرد. در سال اول (از شکل (۱۰ـ۲)) هزینه‌های واقعی سیستم عبارتند از ۸ تومان برای سفارش دادن و ۱۰ تومان برای نگهداری، یا در مجموع برابر ۱۸ تومان.

در سال دوم، هزینه‌های واقعی عبارتند از ۱۶ تومان برای سفارش دادن و ۱۴ تومان برای نگهداری، یا در مجموع ۳۰ تومان. متوسط این دو مقدار برابر ۲۴ تومان است ، که همان مقدار بدست آمده در فوق برای K^* می‌باشد.

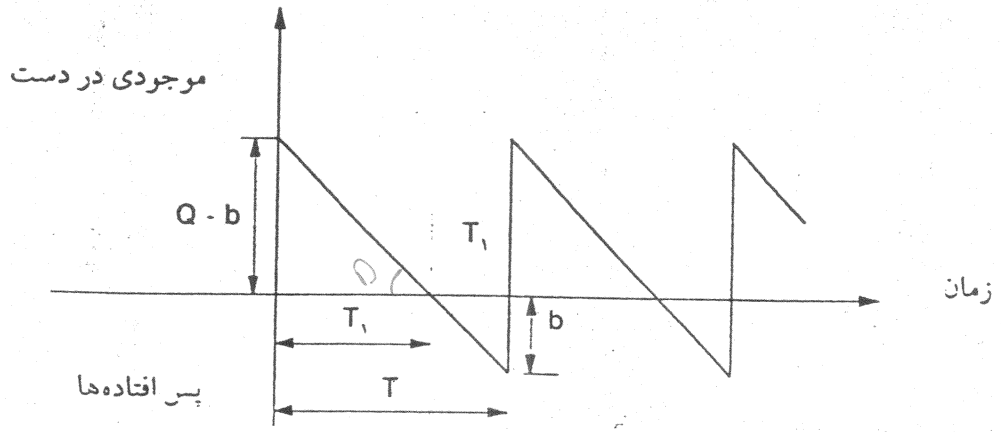
حالت تقاضای پس افت

در این حالت کمبود موجودی جایز است ولی بالاخره بایستی تمام تقاضاها ارضا شوند. تقاضاهایی که با کمبود موجودی مواجه می‌شوند با هم دیگر جمع شده و تقاضای پس افت را تشکیل می‌دهند. وقتی که سفارش به انبار می‌رسد، قبل از این که تقاضای دیگری برآورده شود ابتدا تقاضاهای پس افتاده ارضا می‌شوند.

بدیهی است که اگر تقاضاهای پس افتاده هزینه‌ای در بر نداشته باشند، آنوقت روش بهینه این است که هرگز موجودی در دست از صفر بیشتر نباشد. از طرف دیگر اگر این هزینه خیلی گران (∞) باشد، آنوقت هرگز نبایستی این

www.ieun.ir

هزینه را تحمل نمود. ولی اگر هزینه تقاضای پس افتاده بین این دو مرز باشد، روش بهینه این است که مقداری تقاضای پس افتاده در انتهای دور T وجود داشته باشد. همانطور که در قسمت هزینه‌ها گفته شد، هزینه هر واحد تقاضای پس افتاده شامل یک هزینه ثابت π به اضافه هزینه‌ای متناسب با طول زمان پس افتادن تقاضا، $\hat{\pi}t$ ، می‌باشد.



شکل (۲-۱۱)

اگر مقدار هر بار سفارش Q باشد، طول هر دور برابر است با $T = \frac{Q}{D}$. فرض کنید وقتی که مقدار سفارش Q می‌رسد، تعداد واحدهای پس افتاده برابر b باشد (b یک عدد غیر منفی است). پس از ارضای تقاضای پس افتاده، تعداد واحدهای باقیمانده برابر Q-b خواهد بود (شکل (۲-۱۱)). در هر دور T، زمان لازم برای مصرف Q-b واحد برابر $T_1 = \frac{(Q-b)}{D}$ و مدت زمانی که کمبود موجودی وجود دارد برابر $T_2 = T - T_1$ می‌باشد.

متوسط موجودی در طول یک دور برابر است با سطح زیر منحنی موجودی تقسیم بر T، یعنی:

$$\bar{I} = \frac{1}{T}\left[\frac{(Q-b)}{2D}(Q-b)\right] = \frac{(Q-b)^2}{2Q} \qquad (۲-۱۷)$$

متوسط تقاضای پس افتاده در یک دور برابر است با سطح مثلث تقاضای پس افتاده تقسیم بر T، یعنی:

$$\bar{b} = \frac{1}{T}\left[b\,\frac{b}{2D}\right] = \frac{b^2}{2Q}$$

هزینه متوسط سیستم در هر دور برابر است با جمع هزینه‌های سفارش ، نگهداری و کمبود موجودی

$$\text{هزینه متوسط هر دور} = A + h\bar{I}T + \hat{\pi}\bar{b}T + \pi b$$

در این رابطه hT هزینه نگهداری یک واحد در T و $\hat{\pi}T$ هزینه داشتن یک واحد تقاضای پس افتاده در مدت T خواهد بود. برای محاسبه هزینه متوسط سالیانه، K، هزینه هر دور را در تعداد دورهای یکسال، D/Q، ضرب می‌کنیم. بنابراین

www.ieun.ir

$$K(Q,b) = \frac{DA}{Q} + h\bar{I} + \hat{\pi}\bar{b} + \frac{\pi bD}{Q} \qquad (۲\text{-}۱۸)$$

با جانشین کردن $\bar{b},\bar{I}$ در رابطه فوق

$$K(Q,b) = \frac{DA}{Q} + h\frac{(Q-b)^2}{2Q} + \frac{\hat{\pi}b^2}{2Q} + \frac{\pi bD}{Q} \qquad (۲\text{-}۱۹)$$

در معادله (۲-۱۹) متغیرهای تصمیم گیری عبارتند از Q, b. مقادیر بهینه این دو متغیر را می‌توان با حل دو معادله زیر بدست آورد.

$$\frac{\partial K}{\partial Q} = \frac{\partial K}{\partial b} = 0 \qquad (۲\text{-}۲۰)$$

از معادله (۲-۱۸) نتیجه می‌شود:

$$\frac{\partial K}{\partial Q} = \frac{-1}{Q^2}\left[DA + \frac{1}{2}h(Q-b)^2 + \pi Db + \frac{1}{2}\hat{\pi}b^2 \right] + \frac{h}{Q}(Q-b) = 0 \qquad (۲\text{-}۲۱)$$

یا

$$\frac{-1}{2}(Q-b)^2 + Q(Q-b) = \frac{1}{h}\left[DA + \pi Db + \frac{1}{2}\hat{\pi}b^2 \right] \qquad (۲\text{-}۲۲)$$

بنابراین

$$\frac{1}{2}Q^2 = \frac{1}{h}\left[DA + \pi Db + \frac{1}{2}\hat{\pi}b^2 \right] + \frac{1}{2}b^2 \qquad (۲\text{-}۲۳)$$

در مورد $\frac{\partial K}{\partial b}$ داریم:

$$\frac{\partial K}{\partial b} = \frac{-h}{Q}(Q-b) + \frac{1}{Q}\pi D + \frac{1}{Q}\hat{\pi}b = 0 \qquad (۲\text{-}۲۴)$$

یا

$$Q = \frac{\pi D}{h} + \left(1 + \frac{\hat{\pi}}{h}\right)b \qquad (۲\text{-}۲۵)$$

برای بدست آوردن Q, b ابتدا Q را از (۲-۲۵) جانشین می‌کنیم. نتیجه زیر حاصل می‌شود:

$$[\hat{\pi}^2 + \hat{\pi}h]b^2 + 2\pi\hat{\pi}Db + (\pi D)^2 - 2DAh = 0 \qquad (۲\text{-}۲۶)$$

حال اگر $\hat{\pi}=0$ باشد، (۲-۲۶) به صورت زیر در می آید:

$$(\pi D)^2 = 2DAh$$

که عموماً درست نیست. بطور کلی، معنی این رابطه این است که اگر $\hat{\pi}=0$ باشد جوابی برای b در فاصله $0<b<\infty$ وجود ندارد. به عبارت دیگر، جواب بهینه در مرز است، یعنی $b=0$ یا $b=\infty$. در صورتی که $(\pi D)^2=2DAh$ باشد، هر مقداری از b رابطه (۲-۲۶) را ارضا می‌کند.

وقتی $\hat{\pi}=0$ است، تعیین بهینه بودن b ساده است ($b=0$ یا $b=\infty$). برای این کار فقط لازم است که هزینه‌های مربوطه بر حسب Q را مقایسه نمود.

وقتی $b=0$ باشد، معادله (۲-۱۹) به صورت معادله بدون کمبود موجودی (مدل قبلی) برمی‌گردد و مقدار بهینه Q

www.ieun.ir

همان Q_w خواهد بود. هزینه کمینه نیز برابر K_w می‌باشد. وقتی $b=\infty$ باشد، هرگز سفارشی داده نمی‌شود و هزینه کمینه سالیانه عبارت است از πD معنی این امر این است که در واقعیت سیستم موجودی نبایستی وجود داشته باشد، بهتر است که هزینه تقاضای پس افتاده را سال به سال تحمل نمود. ملاحظه می‌شود که اگر

$$\pi > \sqrt{\frac{2Ah}{D}} = \delta \quad \text{یا} \quad \pi D > K_w \qquad (۲-۲۷)$$

باشد جواب بهینه عبارت است از $b^*=0$, $Q^*=Q_w$. اگر $\pi<\delta$ ($\pi D<K_w$) باشد، هیچگونه سیستم موجودی نبایستی وجود داشته باشد. وقتی $\pi=\delta$ ($\pi D=K_w$)، هر مقداری از b، $0\le b<\infty$، بهینه است (البته مقدار بهینه Q بستگی به مقدار b انتخاب شده دارد). در این حالت هزینه سیستم مثل حالتی است که $b=0$ یا $b=\infty$ باشد. (در مسئله (۲-۲) از شما خواسته شده که نشان دهید برای هر مقدار b همان هزینه سالیانه حاصل می‌شود).

حال حالتی را در نظر بگیرید که $\hat{\pi}\neq 0$ باشد. از معادله (۲-۲۶) نتیجه می‌شود که:

$$b^* = (\hat{\pi}+h)^{-1}\{-\pi D + [2DAh(1+\frac{h}{\hat{\pi}}) - \frac{h}{\hat{\pi}}(\pi D)^2]^{1/2}\} \quad , \quad \hat{\pi}\neq 0 \qquad (۲-۲۸)$$

برای تعیین Q، از رابطه (۲-۲۵) برای حذف b از رابطه (۲-۲۳) استفاده می‌کنیم. بنابراین

$$Q^2 = \frac{2}{h}[DA + \frac{\pi Dh}{\hat{\pi}+h}Q - \frac{(\pi D)^2}{\hat{\pi}+h}] + (\frac{\hat{\pi}}{h}+1)[\frac{hQ}{\hat{\pi}+h} - \frac{\pi D}{\hat{\pi}+h}]^2$$

بنابراین Q^*، مقدار بهینه Q، عبارت است از:

$$Q^* = \left(\sqrt{\frac{\hat{\pi}+h}{\hat{\pi}}}\right)\left(\sqrt{\frac{2DA}{h} - \frac{(\pi D)^2}{h(\hat{\pi}+h)}}\right) \quad , \quad \hat{\pi}\neq 0 \qquad (۲-۲۹)$$

و

$$b^* = \frac{(hQ^*-\pi D)}{(\hat{\pi}+h)}$$

در صورتی که مقدار b بدست آمده از معادله (۲-۲۸) منفی باشد، آنوقت مقدار بهینه b در مرز می‌باشد، یعنی $b^*=0$ است (در مسئله (۲-۳) از شما خواسته شده که نشان دهید اگر $\pi D\ge K_w$ باشد، $b^*=0$ است). وقتی $\hat{\pi}\neq 0$ است، b^* نمی‌تواند بی‌نهایت باشد. معادله (۲-۲۹) موقعی برقرار است که b بدست آمده از (۲-۲۸) مثبت باشد. در غیر این صورت، $Q^*=Q_w$. به علاوه اگر b بدست آمده از (۲-۲۸) مثبت باشد، مقدار b بدست آمده بهینه می‌باشد، یعنی b^* در مرز $b=0$ قرار ندارد. برای اثبات این امر به خاطر آورید وقتی $b=0$ است، $Q^*=Q_w$ می‌باشد. ولی برای $b=0$ وقتی $Q=Q_w$ و $\pi D<K_w$ باشد مقدار $\frac{\partial K}{\partial b}<0$ است، و $b=0$ نمی‌تواند در حالت $\pi D<K_w$ بهینه باشد.

در حالتی که $\hat{\pi}=0$ باشد، معادلات (۲-۲۸) و (۲-۲۹) به ترتیب به صورت زیر در می‌آیند:

www.ieun.ir

$$b^* = \left[\frac{2DAh}{\hat{\pi}(\hat{\pi}+h)}\right]^{1/2} = K_w[\hat{\pi}(\hat{\pi}+h)]^{-1/2} \qquad (۲\text{-}۳۰)$$

و

$$Q^* = \left[\frac{\hat{\pi}+h}{\hat{\pi}}\right]^{1/2}\left(\sqrt{\frac{2DA}{h}}\right) = Q_w\left[\frac{\hat{\pi}+h}{\hat{\pi}}\right]^{1/2} \qquad (۲\text{-}۳۱)$$

با توجه به معادله (۲-۳۰)، وقتی که $\pi=0$ است ، مقدار $b^*>0$ است مگر این که $\hat{\pi}=\infty$ باشد. یعنی تحت شرایط بهینه همیشه مقداری تقاضای پس افتاده وجود دارد.

محاسبه نقطه سفارش برای این مدل، در اصل، مثل همان مدل ساده می‌باشد. ولی در اینجا ممکن است در موقع سفارش دادن موجودی در دست صفر باشد و در عوض مقداری تقاضای پس افتاده وجود داشته باشد. بنابراین در حالت تقاضای پس افتاده نقطه سفارش را برحسب موجودی خالص یا برحسب موقعیت موجودی بیان می‌دارند. نقطه سفارش ، برحسب موجودی خالص ،موقعی است که $r_h^*=DL-mQ^*-b^*$ باشد. مانند، مدل ساده، m بزرگترین عدد صحیحی است که مساوی یا کوچکتر از $\frac{L}{T}$ باشد. ممکن است r_h^* منفی باشد، یعنی موقع سفارش دادن زمانی است که مقدار تقاضای پس افتاده به سطح $|r_h^*|$ برسد. نقطه سفارش ، برحسب موقعیت موجودی، موقعی است که $r^*=DL-b^*$ باشد. r^* نیز ممکن است منفی باشد.

مثال (۲-۳) محصولی که دارای مشخصات زیر است در نظر بگیرید.

تومان ۲۵ = C	سال/واحد ۲۰۰ = D
تومان ۵ = A	در سال ۰/۲۰ = i
تومان برای هر واحد در سال ۱۰ = $\hat{\pi}$	تومان برای هر واحد ۰/۲۰ = π
ماه ۹ = L	

از معادله (۲-۲۸)مقدار b^* برابر است با:

$$b^*=[10+5]^{-1}+\{-40+[2(200)(25)(1+\frac{5}{10})-\frac{5}{10}(1600)]^{1/2}\}=5/27 = \cong 5 \text{ واحد}$$

سپس از معادله (۲-۲۹) داریم:

$$Q^*=(1+\frac{1}{2})^{1/2}\left[\left(\frac{2(200)(5)}{5}\right)-\frac{1600}{5(15)}\right]^{1/2} = 23/8 = \cong 24$$

زمان بین دو سفارش عبارت است از:

$$T^* = \frac{24}{200} = 0/12 \text{ سال}$$

تقاضا در مدت تحویل برابر است با $DL = 0/75(200)=150$ واحد. بنابراین نقطه سفارش بر حسب موقعیت موجودی سیستم برابر است با:

www.ieun.ir

$r^* = DL - b^* = ۱۵۰ - ۵ = ۱۴۵$ واحد

برای محاسبه نقطه سفارش r_h بر حسب سطح موجودی خالص، در نظر داشته باشید که m، بزرگترین عددی که کمتر از $\frac{L}{T}$ می‌باشد برابر با ۶ است. پس

$r_h^* = DL - mQ^* - b^* = ۱۵۰ - ۱۴۴ - ۵ = ۱$ واحد

حالت فروش از دست رفته

در این حالت تقاضاهایی که با کمبود روبرو می‌شوند هرگز برآورده نخواهند شد. در این صورت مقدار درآمد سالیانه بستگی به طول زمانی دارد که سیستم خالی از موجودی است و بنابراین مستقل از خط مشی سیستم موجودی نمی‌باشد. پس نمی‌توانیم مثل حالات قبل بلافاصله نتیجه بگیریم که بیشینه نمودن سود سالیانه همان خط مشی را می‌دهد که کمینه کردن هزینه سالیانه بدست خواهد داد. با این وجود، ما در اینجا با تعریف مناسبی از هزینه کمبود، نشان خواهیم می‌دهیم که کمینه کردن هزینه متوسط سالیانه همان نتایجی را می‌دهد که بیشینه کردن سود سالیانه خواهد داد. فرض کنید S قیمت فروش هر واحد، p متوسط سود سالیانه و π_0 هزینه هر کمبود (به غیر از سود از دست رفته هر واحد) باشد. بنابراین اگر f_0 را کسری از زمان باشد که سیستم خالی از موجودی است، مقدار سود سالیانه برابر است با

$p = D(S-C)(1-f_0) - \pi_0 D f_0$ - (هزینه‌های سفارش و نگهداری سالیانه)

$p = D(S-C) - (\pi_0 + S - C)Df_0$ - (هزینه‌های سفارش و نگهداری سالیانه)

واضح است که $D(S-C)$ مقدار سود سالیانه حاصل از فروش D واحد برای حالتی است که سیستم بدون کمبود موجودی باشد به علاوه این مقدار مستقل از خط مشی سیستم می‌باشد. بنابراین اگر $\pi = \pi_0 + S - C$ بطوری که π شامل هزینه کمبود یک واحد به اضافه سود از دست رفته یک واحد باشد، π را هزینه سالیانه یک واحد فروش از دست رفته در نظر بگیریم آنوقت کمینه کردن متوسط هزینه سالیانه همان خط مشی را می‌دهد که بیشینه کردن سود سالیانه خواهد داد. چون دو رابطه فوق در جمله $D(S-C)$، که مستقل از خط مشی است با هم تفاوت دارند.

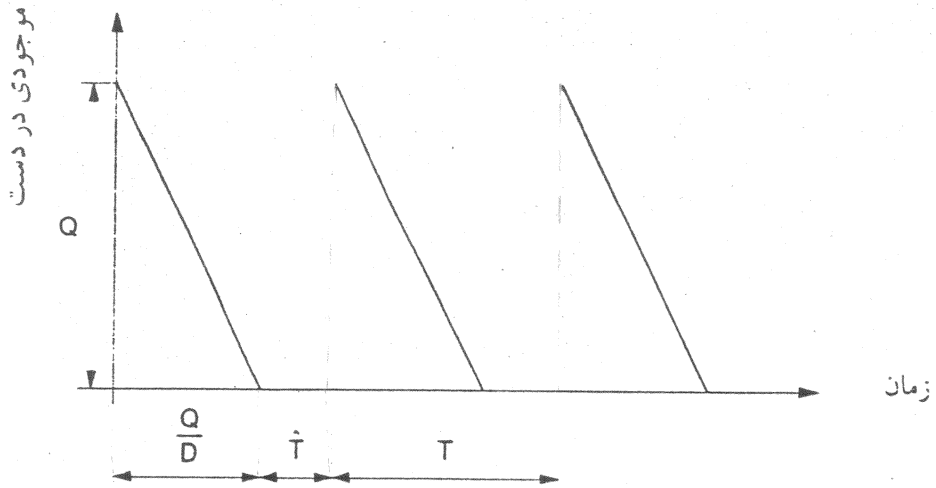
$\hat{T}$ را مدت زمانی از یک دور در نظر بگیرید که در آن کمبود موجودی وجود دارد (فروش ها از دست می‌روند). برای هر مقدار سفارش Q، طول T برابر است با (شکل (۱۲-۲))

$$T = \frac{Q}{D} + \hat{T}$$

بنابراین هزینه سالیانه متوسط برابر است با

$$K = DA / (Q + D\hat{T}) + \left(\frac{hQ^2}{2}\right) / (Q + D\hat{T}) + (\pi D^2 \hat{T}) / (Q + D\hat{T}) \qquad (۲-۳۲)$$

www.ieun.ir



شکل (۲ـ۱۲)

چون بطور متوسط تعداد سفارشات (دورها) در سال $D / (Q+\hat{T})$ می‌باشد، هزینه نگهداری در دور برابر با $\frac{hQ^2}{2D}$ است ، و هزینه فروش از دست رفته در هر دور T مساوی است با $\pi D\hat{T}$

شرط لازم برای بهینه بودن Q^* , T^* این است که رابطه‌های زیر را راضی نمایند.

$$\frac{\partial K}{\partial \hat{T}} = 0 = -(Q+D\hat{T})^{-2}\,[D^2A + \frac{Dh}{2}Q^2 + \pi D^3\hat{T}] + (Q+D\hat{T})^{-1}\pi D^2$$

یا

$$\pi D = \frac{DA}{Q} + \frac{h}{2}Q \qquad (۲ـ۳۳)$$

و

$$\frac{\partial K}{\partial Q} = 0 = -[Q+D\hat{T}]^{-2}\,[DA + \frac{h}{2}Q^2 + \pi D^2\hat{T}] + hQ[Q+D\hat{T}]^{-1}$$

یا

$$-DA + \frac{h}{2}Q^2 - \pi D^2\hat{T} + hQD\hat{T} = 0 \qquad (۲ـ۳۴)$$

بطوری که $0 < Q^* < \infty$, $0 \le \hat{T}^* < \infty$

با حل (۲ـ۳۳) برای Q نتیجه می‌شود که

$$Q = \frac{\pi D}{h} \pm [(\frac{\pi D}{h})^2 - \frac{2DA}{h}]^{1/2} \qquad (۲ـ۳۵)$$

اگر $(\pi D)^2 < 2DAh$ باشد، یک مقدار واقعی برای Q وجود ندارد که (۲ـ۳۳) را راضی نماید. اگر $(\pi D)^2 = 2DAh$

34
www.ieun.ir

یک مقدار مثبت برای Q وجود دارد که در رابطه (۲-۳۳) صدق می‌کند. وقتی $(\pi D)^2>2DAh$ باشد، دو مقدار مثبت برای Q وجود دارد که رابطه (۲-۳۳) را ارضا می‌کنند. چون در این حالت

$$\frac{\pi D}{h}>[(\frac{\pi D}{h})^2-\frac{2DA}{h}]^{1/2} \qquad (۲-۳۶)$$

در صورتی که هیچ مقدار واقعی برای Q وجود نداشته باشد که در رابطه (۲-۳۳) صادق باشد، آنوقت هیچ مقداری برای $0\le\hat{T}<\infty$ ، $\hat{T}$، وجود ندارد که K را کمینه نماید. بنابراین مقدار بهینه $\hat{T}$ بایستی یا صفر یا بی نهایت باشد. ولی از آنجا که شرط $(\pi D)^2<2DAh$ ایجاب می‌کند که هزینه‌های فروش از دست رفته برای همیشه کمتر از هزینه داشتن یک سیستم موجودی بدون فروش از دست رفته است ، بنابراین مقدار بهینه $\hat{T}$ برابر ∞ می‌باشد. در نتیجه در این حالت نبایستی هیچگونه سیستم موجودی وجود داشته باشد.

حال حالتی را در نظر بگیرید که یک یا دو مقدار مثبت از Q رابطه (۲-۳۳) را ارضا می‌کند. با جانشین کردن (۲-۳۵) در رابطه (۲-۳۴) و مرتب کردن جملات رابطه زیر بدست می آید.

$$D\hat{T}=\frac{-\pi D}{h}\pm[(\frac{\pi D}{h})^2-\frac{2DA}{h}]^{1/2} \qquad (۲-۳۷)$$

ولی به علت رابطه (۲-۳۶) نتیجه می‌شود که برای هر دو علامت (±)، $\hat{T}<0$ می‌باشد. بنابراین باز هم مقدار بهینه‌ای برای $\hat{T}$ در فاصله $0<\hat{T}<\infty$ وجود ندارد. در این حالت مقدار بهینه $\hat{T}=0$ است ، چون $(\pi D)^2>2DAh$، یعنی هزینه داشتن سیستم بدون فروش از دست رفته ارزانتر است . در حالت خاصی که $(\pi D)^2=2DAh$ باشد، هر مقداری برای $\hat{T}$ بهینه می‌باشد.

آنچه در فوق بررسی گردید، نشان می‌دهد که اگر قرار باشد سیستم موجودی وجود داشته باشد، آنوقت برای حالت بهینه نبایستی هرگز کمبود موجودی بوجود آید. حتی اگر فروش از دست رفته را در مدل نظر بگیریم برای حالت $(\pi D)^2>2DAh$ جواب بهینه همان جواب فرمول ویلسون خواهد بود.

حالتی که نرخ تولید محدود است

در مدل‌های قبلی فرض بر این بود که در هر بار مقدار سفارش در یک آن دریافت می‌شود. حال موقعیتی را بررسی می‌کنیم که در آن سیستم موجودی، انبار یک کارخانه باشد. محصول به صورت دسته‌ای تولید و مستقیماً به انبار کارخانه می‌رود. وقتی که دستگاه‌ها آماده تولید می‌شوند محصول با نرخ تولید P در سال (مستقل از مقدار هر بار تولید) ساخته می‌شود. واضح است که سیستم موقعی کار می‌کند که P>D باشد.

فرض کنید هزینه هر بار آماده کردن دستگاه (هزینه ثابت سفارش) A باشد و کمبود موجودی جایز نیست. موقعی

www.ieun.ir

که محصول در حال تولید شدن است، نرخ خالص جریان محصول به انبار کارخانه برابر P-D می‌باشد، شکل (۱۳-۲). ولی موقعی که کارخانه در حال تولید این محصول نیست، نرخ خالص موجودی جریان محصول از انبار کارخانه برابر D می‌باشد. مانند حالت مدل ساده که حداقل موجودی (SS) برابر صفر گرفته شد در اینجا نیز برای حالت بهینه حداقل موجودی مساوی صفر خواهد بود. بنابراین بایستی فقط مقدار هر بار تولید Q را طوری تعیین نمود که هزینه سالیانه کمینه شود.

با توجه به شکل (۱۳-۲) زمان لازم برای تولید هر دسته برابر است با:

$$T_p = \frac{Q}{P}$$

موجودی در انبار کارخانه در انتهای هر بار تولید به حداکثر مقدار خود می‌رسد. این تعداد حداکثر برابر است با:

$$I_{max} = (P - D)T_p = Q\left(1 - \frac{D}{P}\right) \qquad (۲-۳۸)$$

زمان لازم برای تخلیه این موجودی انبار عبارت است از:

$$T_d = \frac{Q}{D}\left(1 - \frac{D}{P}\right) \qquad (۲-۳۹)$$

و طول یک دور مساوی است با

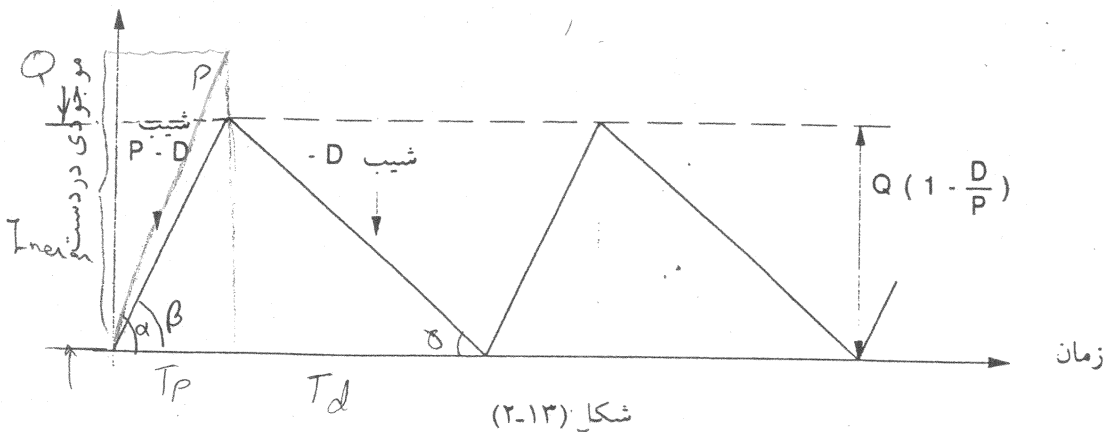
$$T = T_d + T_p = \frac{Q}{D}$$

متوسط موجودی در هر دور عبارت است از: ←

$$\frac{Q}{2}\left(1 - \frac{D}{P}\right)$$

پس هزینه نگهداری در هر دور برابر است با: ←

$$\frac{h}{2D}Q^2\left(1 - \frac{D}{P}\right)$$



شکل (۱۳-۲)

36
www.ieun.ir

$nT\bar{I} \propto \frac{D}{Q}$

بنابراین هزینه نگهداری سالیانه عبارت است از:

$$\frac{h}{2} Q \left(1 - \frac{D}{P}\right)$$

هزینه سفارش سالیانه نیز برابر است با $\frac{DA}{Q}$، پس متوسط هزینه سالیانه سیستم عبارت است از:

$$K = \frac{DA}{Q} + \frac{hQ}{2}\left(1 - \frac{D}{P}\right) \qquad (۲-۴۰)$$

برای بدست آوردن مقدار بهینه Q از رابطه فوق مشتق گرفته و آن را مساوی صفر قرار می‌دهیم.

$$\frac{\partial K}{\partial Q} = \frac{-DA}{Q^2} + \frac{h}{2}\left(1 - \frac{D}{P}\right) = 0$$

با حل این رابطه مقدار بهینه Q، Q^* بدست می‌آید.

$$Q^* = \sqrt{\frac{2DA}{h\left(1 - \frac{D}{P}\right)}} \qquad (۲-۴۱)$$

اگر مدت تحویل L باشد، زمان لازم از موقعی که انبار به کارخانه سفارش ساخت می‌دهد تا موقعی که اولین واحد تولید می‌شود، آنوقت نقطه سفارش بر حسب موجودی در دست، r_h، برابر است با:

$$r_h = DL - mQ \qquad (L - mT < T_d \text{ برای}) \qquad (۲-۴۲)$$

$$r_h = DL - PL + (m + 1)\left(\frac{P}{D} - 1\right)Q \qquad (L - mT > T_d \text{ برای})$$

تمرین ۵) رابطه فوق را بدست آورید.

حال حالتی را در نظر بگیرید که تقاضای پس افتاده جایز باشد. فرض کنید هزینه تقاضای پس افتاده $\pi + \hat{\pi}t$ باشد، t طول زمانی است که تقاضای پس افتاده است. به علاوه فرض کنید Q^* مقدار بهینه هر بار تولید و b^* مقدار بهینه حداکثر تقاضای پس افتاده در انتهای هر دور T باشد، در این صورت می‌توان نشان داد که وقتی $\hat{\pi} \neq 0$ باشد

$$Q^* = \left(\frac{2DA}{h(1 - D/P)} \cdot \frac{(\pi D)^2}{h(h+\hat{\pi})}\right)^{1/2} \left(\frac{h+\hat{\pi}}{\hat{\pi}}\right)^{1/2} \qquad (۲-۴۳)$$

$$b^* = \frac{(hQ^* - \pi D)(1 - D/P)}{(h+\hat{\pi})} \qquad (۲-۴۴)$$