محدودیت‌ها

بیشتر سیستم‌های موجودی در زندگی واقعی چندین قلم، به جای یک قلم، جنس نگهداری می‌کنند. گر هیچ محدودیتی (مثل ظرفیت انبار، تعداد سفارشات در سال، سرمایه گذاری در موجودیها) وجود نداشته باشد، می توان هر محصول را جداگانه بررسی کرد. ولی درعمل محدویت‌ها وجود دارند. ابتدا، محدودیت فضا را در نظر بگیرید:

۱ - محدودیت فضا

بگذ رید:

f = سطح انبار به مترمربع

n = تعداد محصولات

F_j = سطحی که یک واحد محصول j از فضای انبار، لازم دارد

Q_j = مقدار سفارش محصول j

دراینصورت اگر قرار باشد محدودیت فضا بر قرار باشد باید رابطهٔ زیر نیز برقرار باشد:

$$\sum f_j Q_j = f_1 Q_1 + \dots + f_n Q_n \le f \qquad (۱)$$

و تابع متوسط هزینه سالیانه کل اقلام در زیر کمینه شود:

$$K = \sum_{j=1}^{n} \left[\frac{D_j}{Q_j} . A_j + h_j \frac{Q_j}{2} \right] \qquad (۲)$$

بدون در نظرگرفتن رابطه محدودیت مقادیرحاصل از رابطه ویلسون تابع فوق راکمینه می سازد.

$$Q_w(j) = \sqrt{\frac{2DA}{h_j}} \qquad j = 1,\dots,n \qquad (۳)$$

اگر این مقادیر رابطه (۱) را راضی کند آنگاه برای تمام مقادیر j

$$Q_j^* = Q_w(j) \qquad j = ۱,\dots,n$$

درغیر اینصورت می‌گوییم رابطه محدودیت فعال است و برای بدست آوردن جواب، بهینه تابع لاگرانژ را تشکیل می دهیم.

$$J = \sum_{j=۱}^{n} \left[\frac{D_j}{Q_j} . A_j + h_j \frac{Q_j}{۲} \right] + \theta \left[\sum_{j=۱}^{n} f_j Q_j - f \right] \qquad (۴)$$

که در آن پارامتر θ یک ضریب لاگرانژ است. مجموعه Q_j , $j=1,\dots,n$ که کمینه مطلق تابع k را بدست داد:

و درعین حال رابطه (۱) را راضی میکند، جواب مجموعه معادلات زیر است:

$$\frac{\partial J}{\partial Q_i} = \cdot = -\frac{D_j}{Q_j^{\text{۲}}} A_j + \frac{h_j}{\text{۲}} + Q_j f_j = \cdot \quad j = \text{۱},\ldots,n \tag{۵}$$

$$\frac{\partial J}{\partial \theta} = 0 = \sum f_j Q_j - f \tag{۶}$$

این معادلات دارای جواب یگانه و درنتیجه بهینه زیراست:

$$Q_i^* = \sqrt{\frac{\text{۲}D_j A_j}{h_j + \text{۲}\theta^* f_j}} \quad j = \text{۱},\ldots,n \tag{۷}$$

که درآن θ^* مقداری از θ است که به ازاء آن Q_j^* بدست آمده از (۷) و روابط (۶) صدق میکنند.

تابع

$$\sum f_i \sqrt{\frac{\text{۲}D_j A_j}{h_j + \text{۲}\theta^* f_j}} - f \qquad \frac{1}{f} \cdot \frac{\sqrt{\text{۲}} \sum f_i (D_i A_j)^{1/2}}{\sum (h_i + \text{۲}\theta f_i)^{1/2}}$$

یک تابع یکنوای نزولی (Monotoin Decreasing) از θ است. بنابراین (۶) یک جواب مثبت $(\theta^* > 0)$ یگانه دارد.

حال مساله محدودیت تعداد سفارشات درسال را در نظر بگیرید.

۲ ـ محدودیت تعداد سفارش

فرض کنید نمی‌توان بیش از ℓ سفارش در سال داشت. یعنی:

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{D_i}{Q_j} \leq \ell \tag{۸}$$

ابتدا فرض می‌کنم هزینه سفارش دهی (A) برابر صفر است. حالتی که A>0 است را بصورت تمرین حل کنید. دراینصورت تابع متوسط هزینه سالیانه عبارتست از:

$$k = \sum_j h_j \frac{Q_j}{2} \tag{۹}$$

برای تعیین Q^*_j تابع لاگرانژ را تشکیل می‌دهیم.

(دراین حالت رابطه محدودیت فعال است چون با افزایش Q_j هزینه نگهداری و درنتیجه K کاهش می یابد)

$$J = \sum_j h_j \frac{Q_j}{\text{۲}} + \eta \left[\sum_j \frac{D_j}{Q_j} - \ell \right] \tag{۱۰}$$

39

که در آن η ضریب لاگرنژ است. Q_j بهینه باید مجموعه معادلات زیر را رضی کنند:

$$\frac{\partial J}{\partial Q_j} = 0 = \frac{h_j}{2} - \frac{D_j}{Q_j^2} \quad j = 1,\ldots,n \qquad (11)$$

$$\frac{\partial J}{\partial \eta} = 0 = \sum \frac{D_j}{Q_j} - \ell \qquad (12)$$

جواب یگانه عبارتست از:

$$Q_j^* = \sqrt{\frac{2D_j \eta^*}{h_j}} \quad j = 1,\ldots,n \qquad (13)$$

با جانشینی کردن (۱۳) در (۱۲) داریم:

$$\eta^* = \left[\frac{1}{\sqrt{2\ell}} \sum_j \sqrt{D_j h_j}\right]^2 \qquad (14)$$

حال محدودیت سرمایه را در نظر بگیرید.

۳ - محدودیت سرمایه

اگر حداکثر سرمایه درگیر در موجودیها X باشد آنگاه باید

$$\sum_j C_j Q_j \le X \qquad (15)$$

این مسأله شبیه حالت محدودیت فضا است. با تعویض f با X و F_j با C_j می‌توان جواب بهینه را از حل روابط (۵) و (۶) و درنتیجه از (۷) بدست آورد.

$$Q_j^* = \sqrt{\frac{2D_j A_j}{h_j + 2\theta^* C_j}}$$

برای $h_j = i_j C_j$

$$Q_j^* = \sqrt{\frac{2D_j A_j}{c_j \left(i + 2\theta^*\right)}} \qquad (7a)$$

مثال - کارگاهی را درنظربگیرید که درآن ۳ نوع محصول تولید و انبار می‌شود. مدیریت در نظر دارد که حداکثر سرمایه درگیر درموجودی از ۱۴ میلیون تومان بیشتر نباشد. محصولات بصورت دسته‌ای تولید می‌شوند. تقاضا برای تمام محصول ها ثابت و قطعی است. کمبود موجودی جایز نیست و نرخ تولید را می توان نامتناهی فرض کردو داده‌های مورد نیاز دیگر در جدول زیر آمده است. (نرخ هزینه نگهداری ۲۰ درصد در سال است).

حل: ابتدا مقدار بهینه را بدون توجه به محدودیت سرمایه بدست می‌آوریم:

$$Q_w(1)=\sqrt{\frac{2\ (1000)\ 50}{(0.20)\ (20)}}=158 \quad ,Q_w(2)=\sqrt{\frac{2(500)75}{(0.20)(100)}}=61$$

$$Q_w(3)=\sqrt{\frac{(2000)\ (100)}{(0.20)\ (20)}}=200$$

اگر این مقادیر Q_j مورد استفاده قرارگیرند آنگاه کل سرمایه مورد نیاز عبارتست از:

$$\sum C_j Q_w(j)=20(158)+100(51)+50(200)$$

$$=3150+6100+10000$$

$$= \text{۱۹۲۶۰ هزار تومان}$$

این مقدار بیشتر از حداکثر سرمایه تخصیص داده شده به موجودیهاست. بنابراین محدودیت فعال است. و با استفاده از ضریب لاگرانژ (θ). و از رابطه (۷a) داریم

$$Q_j^*=\sqrt{\frac{2D_jA_j}{C_j\ \left(i+2\theta^*\right)}} \qquad j=1,2,3$$

با جانشین کردن این رابطه در رابطه محدودیت باید θ^* رابطه زیر را راضی کند.

$$\sum_j\sqrt{\frac{2d_j C_j A_j}{i+2\theta^*}}=X$$

$$\sqrt{\frac{1\times10^6}{0.10+\theta^*}}+\sqrt{\frac{3.75\times10^6}{0.10+\theta^*}}+\sqrt{\frac{10\times10^6}{0.10+\theta^*}}=14000$$

پس

$$\sqrt{0.10+\theta^*}=\frac{1}{14}\ (1+1.935=3.16)\ =\frac{6.10}{14}=0.436 \qquad \theta^*=0.091$$

درنتیجه مقادیر بهینه θ عبارتند از:

$$Q_1^*=\sqrt{\frac{2(1000)(50)}{20(0.382)}}=114 \quad ,Q_2^*=\sqrt{\frac{2(500)(75)}{100(0.382)}}=44$$

$$Q_3^*=\sqrt{\frac{2(2000)(100)}{50(0.382)}}=145$$

هزینه سالیانه کمینه درحالت بدون در نظر گرفتن محدودیت سرمایه برابرست با:

$$K=\sum_{1}^{3}\sqrt{2D_jA_jiC_j}=632+1225+2000=3857$$ هزار تومان /سال

و درحالت وجود محدودیت سرمایه ۱۴۰۰۰ تومان

$$K=\sum_{j}\left[\frac{D_j}{Q_j}A_j+ic_j\frac{Q_j}{2}\right]=667+1292+2105=4064$$ هزار تومان / سال