مدل های تخفیف

در مدلهای موجودی قبلی فرض بر این بودکه هزینه واحد (C) ثابت و مستقل از مقدار سفارش (خرید یا تولید) است. ولی در دنیای واقعی همیشه این فرض صحیح نیست. مثلاً وقتی مواد خریداری می شوند، ممکن است فروشنده مواد بسته به مقدار خرید قیمت فروش هر واحد را تعدیل نماید و به صورت های مختلف برای خرید های با حجم زیاد تخفیف قائل شود.گاهی اوقات فروشنده ممکن است برای خریدهای با حجم زیاد جایزه‌ای، به صورت مقدار کالای آزاد، اجازه تعویق پرداخت و غیره در نظر بگیرد. این جایزه ها را معمولاً می توان به یک نرخ تخفیف معادل آن تبدیل نمود.

در تولید نیز گاهی اوقات هزینه تولید هر واحد بستگی به به مقدار تولید دارد، این تفاوت هزینه ممکن است ناشی از روش های متفاوت تولید، مثلاً استفاده از وسایل متفاوتی برای تولید مقادیر زیاد، صرفه جویی در هزینه های بارگیری یا بسته بندی یا اداری و یا کاهش هزینه های کاغذ بازی یا آماده سازی مربوط به سفارش باشد.

در این بخش دو مدل تعیین مقدار سفارش برای حالتی که هزینه هر واحد مواد بستگی به مقدار سفارش Q دارد بررسی می شود.

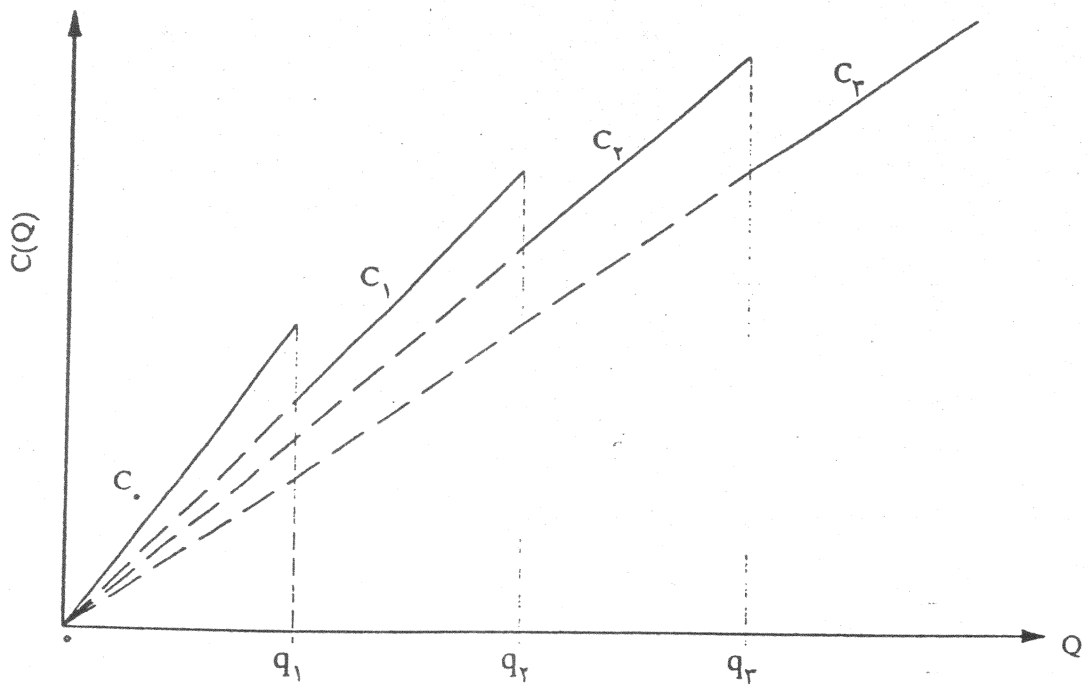
مدل تخفیف کلی

گاهی اوقات تخفیف به شکل زیر خواهد بود :

برای مقادیر معلوم q_0، q_1، ...، q_n و $q_{j-1} > q_j$ ($j = 0, 1, 2, \dots, n$)، اگر مقدار سفارش در محدوده $q_j \leq Q < q_{j+1}$ باشد قیمت هر واحد از Q واحد C_j تومان است. یعنی، این قیمت شامل تمام و حدهای Q می‌گردد. به عبارت دیگر، کل هزینه Q واحد برابر $Q\,C_j$ تومان $(C_j > C_{j+1})$ و ساختمان هزینه به صورت جدول زیر است.

C_0	برای مقادیر	$q_0 < Q < q_1$
C_1	برای مقادیر	$q_1 \leq Q < q_2$
⋮	⋮	⋮
C_{k-1}	برای مقادیر	$q_{k-1} \leq Q < q_k$
C_k	برای مقادیر	$q_k \leq Q < \infty$

نقاط q_0، q_1، ...، q_n را نقاط تخفیف خواهیم نامید. برای این ساختمان هزینه، اگر هزینه کل خرید Q واحد را بر حسب Q رسم کنیم، شکلی شبیه به شکل (۱) بدست می آید.



شکل (۱)

این نوع تخفیف را «تخفیف کلی» یا تخفیف برای تمام واحدها خواهیم نامید، جون تخفیف شامل تمام Q واحد می شود.

وجود تخفیف کلی کار محاسبه مقدار سفارش اقتصادی را مشکل تر می کند. هزینه متوسط سالیانه سیستم برابر است با مجموع هزینه های سفارش دهی، نگهداری و خرید. بنابراین وقتی هزینه هر واحد C_j باشد، هزینه متوسط سالیانه برابر است با :

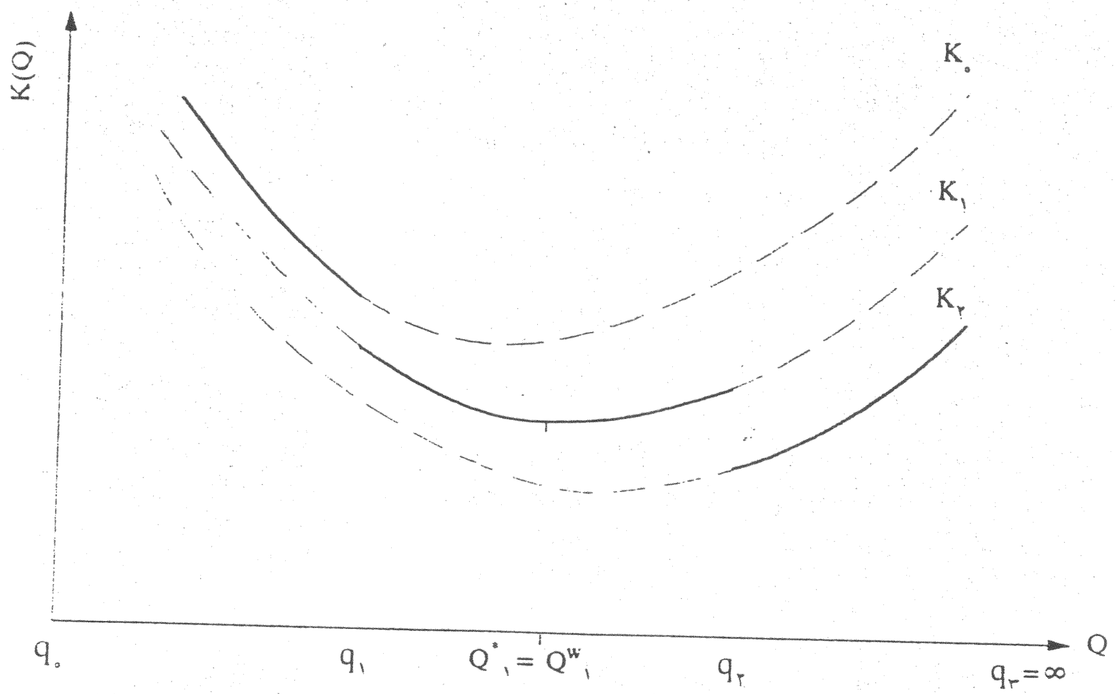
$$K_j(Q)=\frac{D}{Q}A + i\,C_j\frac{Q}{۲} + C_jD \qquad (۱)$$

اما این هزینه فقط در ناحیه $q_j \le Q < q_{j+۱}$ قابل حصول است. در صورتی که Q خارج از این ناحیه باشد، $K_j(Q)$ غیر قابل حصول است. بنابراین بطور کلی می توان هزینه متوسط سالیانه را به صورت زیر نوشت :

$$K(Q)= K_j(Q) \quad , \quad q_j \le Q < q_{j+۱} \qquad (۲)$$

و $j=1, 2, \ldots, n$

توابع $K_j(Q)$ برای حالت $n=2$ در شکل (۲) رسم شده است.



شکل (۲)

در شکل (۲) قسمتی از $K_j(Q)$ ($j=0, 1, 2$) که با خط پر کشیده شده است بخش قابل حصول این تابع و قسمتی که با خط چین رسم شده است بخش غیر قابل حصول آن، یعنی ناحیه‌ای که در آن C_j صحت ندارد، را نشان می دهد. بنابراین تمام قسمت هایی که با خط پر رسم شده‌اند منحنی واقعی هزینه سالیانه یعنی $K(Q)$ را بدست می دهند. اگر از محدوده $q_j \leq Q < q_{j+1}$ صرفنظر کرده و حداقل تابع $K_j(Q)$ را در ناحیه $0<Q<\infty$ با Q_j^w نشان دهیم آنوقت :

$$Q_j^w = \sqrt{\frac{2DA}{iC_j}} \qquad (۳)$$

است. یعنی ،

$$K_j(Q_j^w) = \underset{0 < Q < \infty}{\text{Min}}\ K_j(Q) \qquad (۴)$$

از آنجا که $C_j > C_{j+1}$ است، واضح است که :

$$Q_0^w < Q_1^w < \dots < Q_n^w \qquad (5)$$

به علاوه، به ازا تمام مقادیر Q رابطه زیر برقرار است.

$$K_0(Q) > K_1(Q) > \dots > K_n(Q) \qquad (6)$$

برای پیداکردن مقدار بهینه سفارش بایستی نقطه حداقل منحنی خط پر را به دست آورد. این امر را می توان به صورت زیر انجام داد.

فرض کنید Q_j^* مقداری از Q باشد که نقطه حداقل تابع $K_j(Q)$ را در ناحیه قابل حصول آن، یعنی محدوده $q_j \leq Q < q_{j+1}$، به دست می دهد. به عبارت دیگر

$$K_j(Q_j^*) = \underset{q_j \leq Q < q_{j+1}}{\text{Min}} \; K_j(Q)$$

حال اگر $q_j \leq Q_j^w < q_{j+1}$ باشد، آنوقت $Q_j^* = Q_j^w$ خواهد بود. اگر $Q_j^w < q_j$ باشد، $Q_j^* = q_j$، و بالاخره اگر $Q_j^w > q_{j-1}$ باشد، $Q_j^* = q_{j+1}$ خواهد بود. (در شکل (۲) ملاحظه می شود که $Q_0^* = q_1$، $Q_1^* = Q_1^w$ و $Q_2^* = q_2$ است.)

مقدار بهینه Q، (Q^*)، یعنی مقداری از Q که حداقل $K(Q)$، منحنی خط پر، را بدست می دهد از مقایسه هزینه های مربوط به این نقاط (نقاط Q_j^*، $j = 0, 1, \dots, n$) بدست می آید. به عبارت دیگر

$$K_j(Q^*) = \underset{0 \leq j \leq n}{\text{Min}} \; K_j(Q_j^*)$$

از آنجا که به ازا تمام مقادیر Q رابطه (۶) برقرار است، برای حالتی که $q_j \leq Q_j^w < q_{j+1}$ است (و در نتیجه $Q_j^* = Q_j^w$) مقدار بهینه کلی، Q^*، نمی تواند در ناحیه $Q < q_j$ قرار گیرد. به علاوه، اگر $Q_j^w < q_j$ باشد، واضح است که $Q_j^* = q_j$ است. با توجه به این نکات می توان روش زیر را برای پیدا کردن Q^* بکار برد :

گام ۱

مقادیر Q_j^* را به ترتیب برای $j = n$ ، $j = n-۱$ ، $j = n-۲$ ، . . . تا موقعی که برای اولین بار برای مقداری از j مثلاً $j = k$ مقدار $Q_k^* = Q_k^w$ باشد، محاسبه کنید.

گام ۲

مقادیر $K_j(Q_j^*)$ برای تمام مقادیر $j \geq n$ محاسبه و با هم مقایسه کنید. آن $K_j(Q_j^*)$ که حداقل این مقادیر را بدست می دهد نقطه بهینه را معین می کند.

روش فوق بوسیله مثال زیر نشان داده شده است.

مثال) مصرف سالیانه محصولی ۲۵۰۰ واحد، نرخ هزینه نگهداری این محصول ۱۰ درصد در سال، و هزینه هر بار سفارش آن ۱۰۰ تومان است. این محصول را می توان از فروشنده‌ای که جدول قیمت زیر را برای مقادیر مختلف خرید پیشنهاد نموده است خریداری نمود. مقدار اقتصادی خرید در هر بار چقدر است؟

مقدار سفارش (Q)	هزینه واحد (C_j)
$۰ < Q < ۵۰۰$	$C_۰ = ۵/۰۰$
$۵۰۰ \leq Q < ۲۵۰۰$	$C_۱ = ۴/۷۵$
$۲۵۰۰ \leq Q < ۵۰۰۰$	$C_۲ = ۴/۶۰$
$۵۰۰۰ \leq Q$	$C_۳ = ۴/۵۰$

در این مثال تعداد نقاط تخفیف $n = ۳$ است $(q_۱ = ۵۰۰ ، q_۲ = ۲۵۰۰ ، q_۳ = ۵۰۰۰)$ بنابراین چهار منحنی K_j وجود دارد. برای $q_j \leq Q < q_{j+۱}$ ، هزینه واحد C_j و هزینه متوسط سالیانه عبارت است از :

$$K_j(Q) = \frac{(۲۵۰۰)(۱۰۰)}{Q} + ۰/۱C_j\frac{Q}{۲} + ۲۵۰۰C_j \qquad j = ۰,۱,۲,۳ \qquad (۷)$$

نقطه حداقل تابع $K_j(Q)$ (در ناحیه $۰ < Q < \infty$) عبارت است از

$$Q_j^w = \sqrt{\frac{۲(۲۵۰۰)۱۰۰}{۰/۱\,C_j}} = ۵۰۰\sqrt{\frac{۲۰}{C_j}}$$

برای $j = 3$

$$Q_3^w = 1055 < q_3 = 5000$$

بنابراین نقطه حداقل هزینه در قسمت قابل حصول تابع $K_3(Q)$ در نقطه $Q_3^* = 5000$ است. برای $j = 2$

$$Q_2^w = 1040 < q_2 = 2500$$

پس $Q_2^w = 2500$ برای $j = 1$

$$Q_1^w = 1025$$

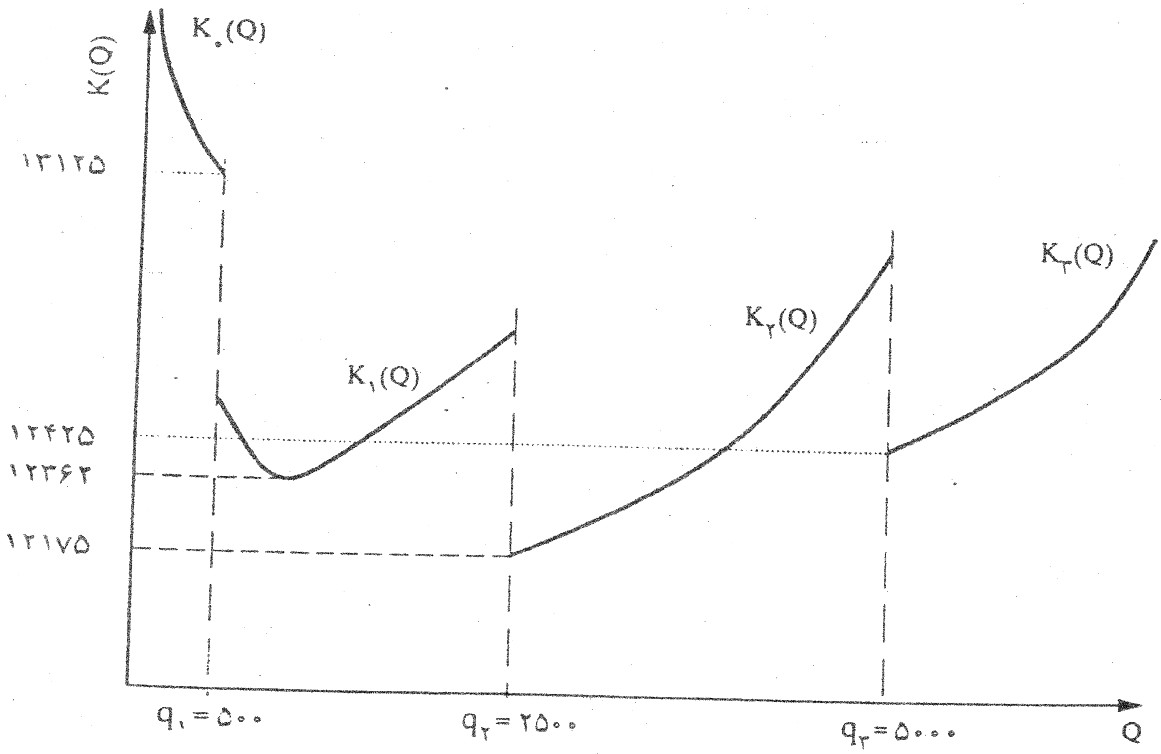
این مقدار در محدوده قابل حصول تابع $K_1(Q)$ و لذا $Q_1^* = Q_1^w = 1025$ است. بنابراین دیگر نیاز به محاسبه Q_0^w نیازی نیست. مقدار سفارش اقتصادی Q^* از مقایسه هزینه های $K_1(Q_1^*)$ ، $K_2(Q_2^*)$ و $K_3(Q_3^*)$ بدست می آید. با توجه به جدول قیمت ها و رابطه (۷) این مقادیر هزینه عبارت‌اند از :

$$K_3(5000) = 12425 \quad \text{و} \quad C_3 = 4/5$$

$$K_2(2500) = 12175 \quad \text{و} \quad C_2 = 4/6 \ \surd$$

$$K_1(1025) = 12362 \quad \text{و} \quad C_1 = 4/75$$

ملاحظه می شود که مقدار بهینه برابر است با $Q^* = 2500$. منحنی هزینه سالیانه $K(Q)$ در شکل (۳) رسم شده است.



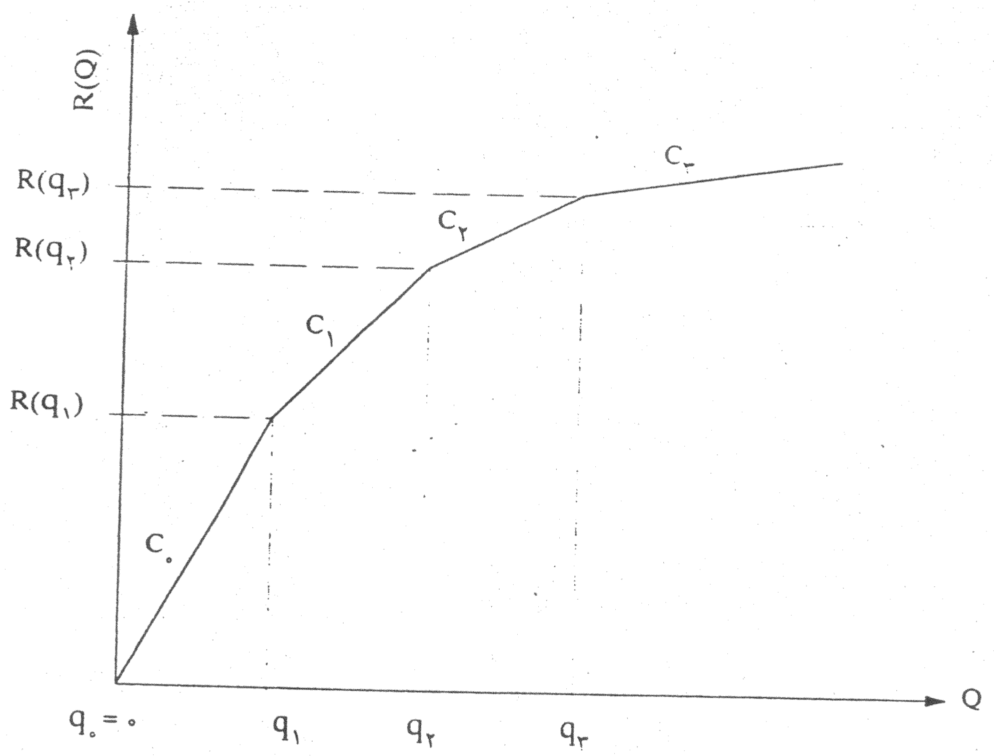
شکل (۳)

مدل تخفیف نموی

دومین نوع تخفیف که در این بخش بررسی می شود نوعی تخفیف است که در آن هزینه واحد C_j ($j=0,1,\ \dots\ ,\ n$) فقط شامل آن واحدهایی می شود که در فاصله (q_{j+1} و q_j) قرار دارند. به عبارت دیگر برنامه هزینه واحد مواد، C ، به صورت زیر است.

$$C = \begin{cases} C_0 & \text{برای هر واحد از } 1 \text{ تا } q_1 \\ C_1 & \text{برای هر واحد از } q_1+1 \text{ تا } q_2 \\ \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots \\ C_n & \text{برای هر واحد از } q_n+1 \text{ به بالا} \end{cases}$$

که در آن $C_j < C_{j-1}$ است. در اینجا نیز نقاط q_1 ، q_2 ، ... ، q_n را نقاط تخفیف خواهیم نامید. اگر هزینه کل خرید Q واحد را با $R(Q)$ نشان دهیم، آنوقت $R(Q)$ شکلی شبیه شکل (۴) را دارد.



شکل (۴)

در ناحیه $q_j < Q \le q_{j+1}$ این هزینه برابر است با :

$$R(Q) = \begin{cases} C_0 Q & \text{برای } j = 0 \\ \sum_{k=0}^{j-1} C_k (q_{k+1} - q_k) + C_j (Q - q_j) & \text{برای } j \ge 1 \end{cases}$$

و یا بطور کلی

$$R(Q) = R(q_j) + C_j(Q - q_j) \qquad j = 0, 1, \dots, n \qquad (8)$$

که در آن $q_0 = 0$ ، $q_{n+1} = \infty$ و $R(q_0) = 0$ است.

هدلی و وی تین از این نوع تخفیف بنام «تخفیف نموی» نام می برند.

مانند تخفیف کلی فرض کنید وقتی که $q_j < Q \le q_{j+1}$ است هزینه متوسط سالیانه برابر $K_j(Q)$ باشد. در این صورت $K_j(Q)$ به شکل زیر خواهد بود.

$$K_j(Q) = \frac{D}{Q} A + i \frac{R(Q)}{2} + D \frac{R(Q)}{Q} \qquad (9)$$

در رابطه (۹) مقدار $\frac{R(Q)}{Q}$ متوسط هزینه مواد را، برای وقتی که مقدار سفارش برابر (Q) است، نشان می دهد. با توجه به رابطه (۸) می توان رابطه (۹) را به صورت زیر نوشت :

$$K_j(Q) = \frac{D}{Q} [A + R(q_j) - C_j q_j] + i C_j \frac{Q}{2} + i \frac{R(q_j)}{2} - i C_j \frac{q_j}{2} + C_j D \qquad (10)$$

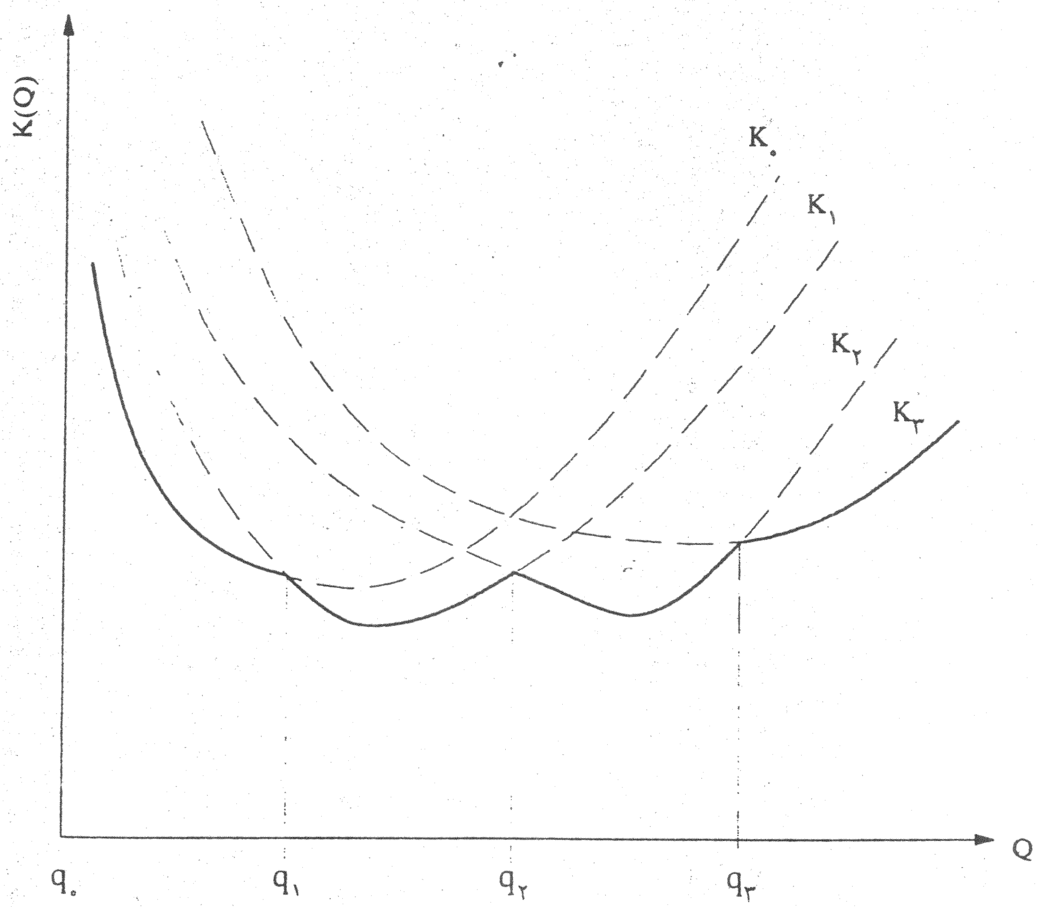
پس متوسط هزینه سالیانه برابر است با

$$K(Q) = K_j(Q) \quad \text{و} \quad q_j < Q \le q_{j+1} \quad \text{و} \quad j = 0, 1, \dots, n$$

در شکل (۵) توابع $K_j(Q)$ برای حالتی که تعداد نقاط تخفیف $n = 3$ است رسم شده‌اند. در این شکل نیز قسمت خط پر قسمت قابل حصول تابع $K_j(Q)$ و قسمت خط چین قسمت غیر قابل حصول تابع $K_j(Q)$ را نشان می دهد. متوسط هزینه سالیانه واقعی (یعنی $K(Q)$) شامل قسمت های خط پر منحنی های فوق است.

محاسبه مقدار بهینه Q برای حالت تخفیف نموی تا اندازه‌ای با روش محاسبه ای که در حالت تخفیف کلی گفته شد فرق دارد. نکته مهمی که در حالت تخفیف نموی باید در نظر داشت این است که نقطه حداقل تابع $K(Q)$

نمی تواند در نقاط تخفیف باشد.



شکل (۵)

برای روشن شدن این مطلب باید توجه داشت که منحنی کلی هزینه سالیانه پیوسته است یعنی $K_{j-1}(q_j) = K_j(q_j)$ $(j = ۰,۱, \ldots , n)$. به علاوه شیب منحنی $K_j(Q)$ در نقطه q_j کمتر از شیب منحنی $K_{j-1}(Q)$ در همان نقطه q_j است (این مطلب را ثابت کنید). بنابراین متوسط هزینه سالیانه، $K(Q)$، نمی تواند در نقطه q_j دارای یک کمینه نسبی باشد، و در نتیجه نقطه کمینه مطلق تابع $K(Q)$ نیز نمی تواند بر نقاط تخفیف q_j منطبق باشد. با توجه به این نکته روش محاسبه نقطه بهینه Q^* به صورت زیر شرح داده می شود:

فرض کنید که Q_j^w نقطه حداقل تابع $K_j(Q)$ در ناحیه $۰ < Q < \infty$ باشد. به عبارت دیگر، اگر از محدوده $q_j < Q \leq q_{j+1}$ صرفنظر نموده و تمام ناحیه مثبت Q را در نظر بگیریم، آنوقت

$$K_j(Q_j^w) = \underset{۰ < Q < \infty}{\operatorname{Min}} K_j(Q)$$

و با توجه به رابطه (۱۰)

$$Q_j^w = \sqrt{\frac{۲D[A+R(q_j)-C_j q_j]}{iC_j}} \qquad (۱۱)$$

برای محاسبه Q^* ابتدا Q_j^w را برای $j = ۰,۱,\ldots,n$ محاسبه کنید. برای آن Q_j^w هایی که در ناحیه قابل حصول تابع $K_j(Q)$ ، یعنی $q_j < Q_j^w \leq q_{j+۱}$ ، قرار دارند مقدار $K_j(Q_j^w)$ را محاسبه کنید. نقطه بهینه از Q^* مقایسه این k_j ها بدست می آید. آن Q_j^w که حداقل این هزینه ها را می دهد مقدار بهینه Q^* خواهد بود. مثال زیر کاربرد این روش را نشان می دهد.

مثال) اگر در مثال قبل ساختمان هزینه واحد مواد از نوع تخفیف نموی باشد، یعنی هزینه هر واحد مواد به صورت زیر باشد :

$$C = \begin{cases} C_۰ = ۵/۰۰ & \text{برای واحدهای } ۱، ۲، \ldots، ۵۰۰ \\ C_۱ = ۴/۷۵ & \text{برای واحدهای } ۵۰۱، ۵۰۲، \ldots، ۲۵۰۰ \\ C_۲ = ۴/۶۰ & \text{برای واحدهای } ۲۵۰۱، ۲۵۰۲، \ldots، ۵۰۰۰ \\ C_۳ = ۴/۵۰ & \text{برای واحدهای } ۵۰۰۱ \text{ به بالا} \end{cases}$$

مقدار سفارش اقتصادی ، Q^* ، را بدست آورید.

با توجه به رابطه (۱۰)

$$K_j(Q) = \frac{۲۵۰۰}{Q}[A + R(q_j) - C_j q_j] + ۰/۱\, C_j \frac{Q}{۲} + ۰/۱ \frac{R(q_j) - C_j q_j}{۲} + C_j D \qquad (۱۲)$$

$$j = ۰, ۱, ۲, ۳$$

از رابطه (۸) و با توجه به ساختمان هزینه واحد مواد

$$R(q_۰) = ۰$$

$$R(q_۱) = C_۰ q_۱ = ۲۵۰۰$$

$$R(q_۲) = ۲۵۰۰ + C_۱(q_۲ - q_۱) = ۱۲۰۰۰$$

$$R(q_۳) = ۱۲۰۰۰ + C_۲(q_۳ - q_۲) = ۲۳۵۰۰۰$$

با توجه به این مقادیر و رابطه (۱۱) مقادیر Q_j^w عبارتند از :

$$Q_0^w = ۱۰۰۰$$

$$Q_1^w = ۱۵۳۹$$

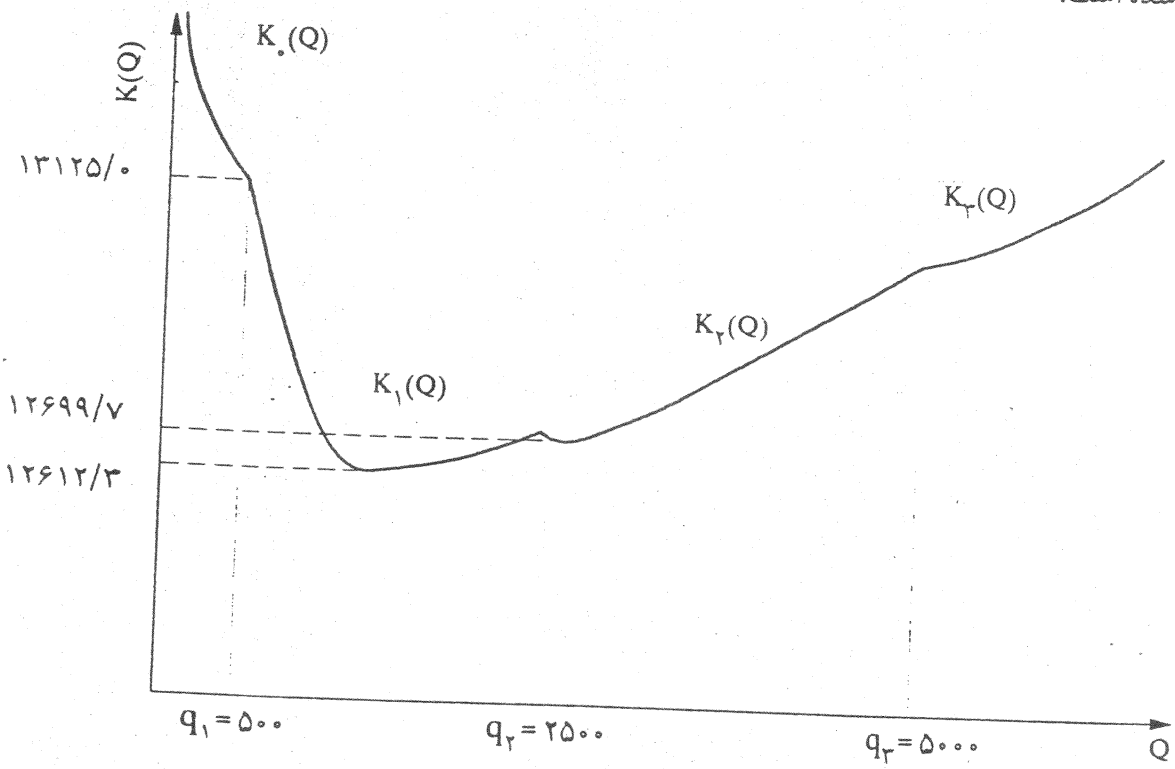
$$Q_2^w = ۲۵۵۴$$

$$Q_3^w = ۳۴۹۶$$

ملاحظه می شود که نقاط Q_0^w و Q_3^w به ترتیب در ناحیه قابل حصول تابع $K_0(Q)$ و $K_3(Q)$ قرار ندارند. بنابراین آنها نادیده می گیریم. نقطه بهینه یا Q_1^w یا Q_2^w است. برای تعیین این که کدام یک از این دو نقطه بهینه هستند، بایستی $K_1(Q_1^w)$ و $K_2(Q_2^w)$ را محاسبه و با یکدیگر مقایسه نمود. با استفاده از رابطه (۱۲) این مقادیر عبارتند از:

$$K_2(Q_2^w) = ۱۲۷۰۰ \quad \text{و} \quad K_1(Q_1^w) = ۱۲۶۱۲$$

بنابراین مقدار سفارش اقتصادی برابر با $Q^* = Q_1^w = ۱۵۳۹$ است. منحنی هزینه سالیانه $K(Q)$ در شکل (۶) رسم شده است.



شکل (۶)

مدل یک پریودی احتمالی

در این بخش یک مدل موجودی بررسی می شود که در آن تقاضا متغیری تصادفی بوده و تابع توزیع احتمالی آن معلوم است. صفت مشخصه چنین مدلی این است که در آن تنها یک پریود (دوره) زمانی در نظر گرفته شده و فرصت تهیه محصول فقط یک بار و آنهم در ابتدای پریود است. این مدل موجودی به «مسأله روزنامه فروش» (Newsboy Problem) و «مسأله درخت کریسمس» معروف است. این مدل در بسیاری از مسائل موجودی در جهان واقعی، مانند فروش روزنامه، کارت تبریک عید، قطعات یدکی که فقط یکبار تهیه و یا تولید می شوند، محصولات فاسد شدنی، کالاهای سبک روز، بعضی محصولات فصلی و غیره کاربرد عملی دارد. برای بنای این مدل موجودی از علامات اختصاری زیر استفاده خواهد شد.

D: مقدار تقاضا در طول پریود (تقاضا متغیری تصادفی و تابع توزیع آن معلوم است.)

F(D): تابع توزیع احتمالی D　($F(x)=P\{ D \leq x \}$)

f(D): تابع چگالی احتمال D　($f(D)=\frac{\partial F(D)}{\partial D}$)

E(D): میانگین D

C: هزینه خرید (یا تولید) یک واحد

ν: قیمت فروش یک واحد

H: هزینه نگهداری هر واحد باقیمانده در انتهای پریود (شامل هزینه نگهداشتن، انتقال از انبار، منهای قیمت حراج در صورت حراج واحدهای باقیمانده در انتهای پریود)[1]

π: هزینه کمبود یک واحد

I: سطح موجودی قبل از سفارش

R: سطح موجودی پس از سفارش

Z(R): سود حاصل در یک پریود

الف) ـ درآمد فروش در یک دوره ـ با توجه به علامات اختصاری فوق مقدار میانگین در آمد حاصل از فروش در طی دوره، $P_1(R)$ ، برابر است با :

$$P_1(R)= \nu\int_0^R x\, f(x)\, dx \quad +\nu\int_R^\infty R\, f(x)\, dx$$

۱- این هزینه فقط شامل واحدهای باقیمانده در انتهای پریود است. به عبارت دیگر فرض بر این است که واحدهای فرخته شده در طی پریود هیچگونه هزینه نگهداری ندارند. در صورت حراج H ممکن است منفی شود.

$$= \nu \int_{0}^{\infty} x f(x)\, dx \;-\nu \int_{R}^{\infty} (x-R)\, f(x)\, dx$$

$$P_1(R) = \nu E(D) - \nu \int_{R}^{\infty} (x-R)\, f(x)\, dx \qquad (۱)$$

(ب) ـ هزینه کل در یک دوره ـ میانگین هزینه های خرید، نگهداری، و کمبود موجودی در طی یک دوره برابر است با :

$$P_2(R) = C(R-I) + H \int_{0}^{R} (R-x)\, f(x)\, dx + \pi \int_{R}^{\infty} (x-R)\, f(x)\, dx$$

$$= C(R-I) + HR - H\,E(D) + (\pi+H) \int_{R}^{\infty} (x-R)\, f(x)\, dx \qquad (۲)$$

(ج) – سود حاصل در یک دوره – با توجه به روابط (۱) و (۲)

$$E\{ Z(R) \} = P_1(R) - P_2(R)$$

$$= (\nu+H)E(D) - \left\{ C(R-I) + HR + (\nu+\pi+H) \int_{R}^{\infty} (x-R)\, f(x)\, dx \right\}$$

$$= (\nu+H)E(D) - K(R)$$

که در رابطه فوق $K(R)$ برابر است با

$$K(R) = C(R-I) + HR + (\nu+\pi+H) \int_{R}^{\infty} (x-R)\, f(x)\, dx \qquad (۳)$$

مقدار بهینه R (R^*)

مقدار بهینه R (یعنی R^*) مقداری از R است که به ازا آن تابع $E\{ Z(R) \}$ بیشینه، یا معادل آن تابع $K(R)$ کمینه شود. بنابراین برای تعیین R^* از $K(R)$ نسبت به R مشتق گرفته و آن را برابر صفر قرار می دهند.

$$\frac{\partial K(R)}{\partial R} = (C+H) - (\nu+\pi+H)[1 - F(R)] \qquad (۴)$$

پس

$$1 - F(R^*) = \frac{C+H}{(\nu+\pi+H)}$$

یا

$$F(R^*) = \frac{(\nu+\pi-C)}{(\nu+\pi+H)}$$

در صورتی که مقدار $\pi = 0$ باشد آنوقت $F(R^*) = \frac{(\nu-C)}{(\nu+H)}$. این رابطه موقعی جواب دارد که $\nu \geq C$ است. واضح است اگر $\nu < C$ باشد از نظر اقتصادی سیستم موجودی نبایستی وجود داشته باشد.

با توجه به رابطه (۴) مشتق دوم $K(R)$ عبارت است از

$$\frac{\partial^2 K(R)}{\partial R^2} = (\nu+\pi+H)\, f(R) > 0$$

بنابراین مقدار R^* بر نقطه حداقل تابع $K(R)$ منطبق است.

خط مشی مطلوب

اگر $I < R^*$ باشد، به اندازه $R^* - I$ سفارش دهید.

اگر $R^* \leq I$ باشد، نباید سفارش داده شود.

حالتی که تقاضا متغیری گسسته است

موقعی که تقاضا پیوسته نیست، تقاضا فقط می تواند به صورت اعداد صحیح باشد، مقدار بهینه $K(R)$ به صورت زیر بدست می آید. فرض کنید

$p(x) =$ احتمال اینکه تقاضا در طی دوره برابر x باشد

$$P(x) = \sum_{j=0}^{x} P(j) = P\{D \leq x\}$$

در این صورت میانگین درآمد حاصل از فروش برابر است با

$$P_1(R) = \nu \sum_{X=0}^{R} x\, p(x) + \nu \sum_{X=R+1}^{\infty} R\, p(x)$$

$$P_1(R) = \nu E(D) - \nu \sum_{X=R+1}^{\infty} (x-R)\, p(x) \qquad (5)$$

و میانگین مجموع هزینه های خرید، نگهداری و کمبود موجودی برابر است با :

$$P_2(R) = CR + H \sum_{X=0}^{R} (R-x)\, p(x) + \pi \sum_{X=R+1}^{\infty} (x-R)\, p(x)$$

$$P_2(R) = CR + HR - HE(D) + (\pi+H) \sum_{X=R+1}^{\infty} (x-R)\, p(x) \qquad (6)$$

با توجه به روابط (۵) و (۶) میانگین سود در طی یک دوره برابر است با

$$E[\, Z(R)\,] = P_1(R) - P_2(R)$$

$$E[\, Z(R)\,] = (\nu+H)E(D) - (C+H)R - (\nu+\pi+H) \sum_{X=R+1}^{\infty} (x-R)\, p(x)$$

$$E[\, Z(R)\,] = (\nu+H)E(D) - K(R) \qquad (7)$$

که در آن

$$K(R) = (C+H)R + (\nu+\pi+H) \sum_{X=R+1}^{\infty} (x-R)\, p(x)$$

فرض کنید $\Delta K(R) = K(R+1) - K(R)$ باشد، در این صورت

$$\Delta K(R) = (C+H) + (\nu+\pi+H)\{ \sum_{X=R+2}^{\infty} (x-R-1)p(x) - \sum_{X=R+1}^{\infty} (x-R)\, p(x) \}$$

یا پس از خلاصه کردن

$$\Delta K(R) = (C+H) - (\nu+\pi+H)\, P\{ D > R \} \qquad (8)$$

مقدار اقتصادی R (یعنی R^*) بزرگترین عدد صحیحی است که به ازا آن

$$\Delta K(R) < 0$$

یا با توجه به رابطه (۸)

$$(C+H) < (\nu+\pi+H)\, P\{ D > R \}$$

یا

$$P\{ D> R \} > \frac{(C+H)}{(\nu+\pi+H)}$$

مثال ـ تقاضا برای شربتی در طول هفته متغیری تصادفی بوده و تابع توزیع چگالی آن نمایی با میانگین ۱۰۰ لیتر است، یعنی :

$$f(D)= ۰/۰۱e^{-۰/۰۱D}$$

$$F(D)= ۱ - ۰/۰۱e^{-۰/۰۱D}$$

این شربت به صورت دسته ای فقط یکبار تولید می شود. در صورتی که تمام محصول در طی هفته به فروش نرود، مقدار باقیمانده ضایع شده و قابل مصرف نیست. هزینه تولید هر لیتر ۱۰۰ ریال و قیمت فروش هر لیتر ۲۰۰ ریال است. هر لیتر باقیمانده در انتهای هفته مخارجی برابر ۱۰ ریال برای انتقال از انبار و دور ریختن دارد. کمبود هر لیتر باعث از دست رفتن تقاضا می شود.

حل:

$$F(R^*) = ۱ - e^{۰/۰۱R^*} = \frac{۲۰۰+۱۰۰}{۲۰۰+۱۰} = \frac{۱۰}{۲۱}$$

$$R^* = ۶۴/۶ \text{ لیتر}$$

در بررسی مدل یک دوره ای فرض بر این بود که هزینه سفارش دهی صفر است. حال آن که گاهی اوقات هزینه سفارش دهی بزرگتر از صفر برابر A است. با گنجاندن این هزینه سفارش دهی در هزینه کل یک دوره، میانگین هزینه یک دوره برای R ، $(R \geq I)$ ، عبارت است از

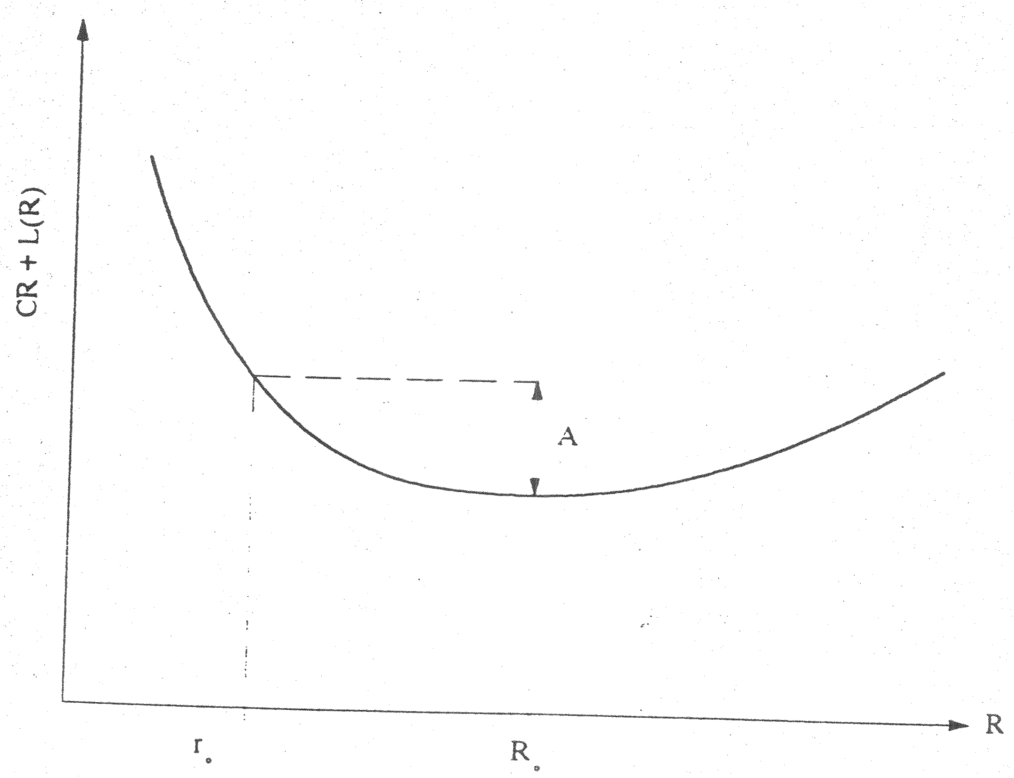
$$K(R) = \begin{cases} A + C(R-I) + L(R) & \text{برای } R > I \\ L(I) & \text{برای } R = I \end{cases}$$

که در آن

$$L(R) = HR + (\nu+\pi+H) \int_R^{\infty} (x - R)\, f(x)\, dx$$

است. اگر تابع $CR + L(R)$ بر حسب R رسم شود شکلی شبیه شکل (۷) بدست می آید. فرض کنید R_0 حداقل تابع $CR + L(R)$ را بدهد و r_0 کوچکترین مقدار R باشد که به ازا آن

$$A + CR_0 + L(R_0) = Cr_0 + L(r_0)$$



شکل (۷)

(a) با توجه به شکل (۷) واضح است که اگر $I > R_0$ باشد، آنوقت به ازا تمام مقادیر $R > I$

$$CR + L(R) > CI + L(I)$$

بنا بر این

$$A + C(R-I) + L(R) > L(I)$$

قسمت سمت راست این نا معادله هزینه حالتی است که هیچگونه سفارش داده نشود، و قسمت سمت چپ آن هزینه حالتی است که سفارش تا سطح R داده شود. پس اگر $R > I$ باشد، خط مشی بهینه عبارت است از این است که سفارش داده نشود.

(b) اگر $r_0 \le I \le R_0$ باشد، باز هم با توجه به شکل واضح است که برای تمام مقادیر $r_0 < I < R < R_0$

$$A + CR + L(R) > CI + L(I)$$

بنا بر این

$$A + C(R-I) + L(R) > L(I)$$

(c) و بالاخره اگر $I > r_{\circ}$ باشد، از روی شکل معلوم است که

$$A + CR_{\circ} + L(R_{\circ}) < CI + L(I)$$

یا

$$A + C(R_{\circ} - I) + L(R_{\circ}) < L(I)$$

بنابراین هزینه سیستم موجودی موقعی کمینه می شود که مقدار سفارش برابر $R_{\circ} - I$ باشد.

پس بطور کلی خط مشی بهینه عبارت است از

خط مشی بهینه
- اگر $I < r_{\circ}$ به اندازه $R_{\circ} - I$ سفارش دهید.
- اگر $I \geq r_{\circ}$ سفارش ندهید.

مقدار $R_{\circ}$ مانند حالت قبل (حالتی که $A = \circ$ بود) از رابطه $F(R_{\circ}) = \frac{(\mathcal{V}+\pi-C)}{(\mathcal{V}+\pi+H)}$ بدست می آید و $r_{\circ}$ کوچکترین مقداری است که به ازا آن تساوی $Cr_{\circ} + L(r_{\circ}) = A + CR_{\circ} + L(R_{\circ})$ برقرار است. این خط مشی یک خط مشی (r , R) است که در صنعت کاربرد زیادی دارد.