بسم الله الرحمن الرحیم

# طراحی سازه های هوایی

## دکتر ذاکری

دی ماه ۹۱

# مراحل طراحی :

1) Conceptual design طراحی مفهومی

2) Preliminary design طراحی اولیه

3) Detail design طراحی جزئیات

# مراجع:


1) “analysis and design of flight vehicle structure” ,E.F.branh 1973

2) “air frame structural design”, M.graw hill 1999

3) “aircraft structure for engineering student”,T.H megson,9$^{th}$ edition 2007

4) “aircraft structure” ,D.G.peery& J.J azar 1982

5) “aircraft structure”,B.K.donaldson,

# فهــرست


**۱) خمش در مقاطع نا متقارن**

- ممان اینرسی

- خمش دو محوری

- محور های اصلی و محور خنثی و ...

- خمش تیر های خمیده

**۲) توزیع جریان برش ناشی از بار برشی**

- توزیع جریان برش

- مرکز برش

**۳) تنش برشی ناشی از پیچش**

- توزیع جریان برش

- مقاطع غیر مدور (جدار نازک : باز / بسته)

- مقاطع تک سلولی

-مقاطع چند سلولی

**۴) ایده آل سازی مقاطع بال وبدنه**

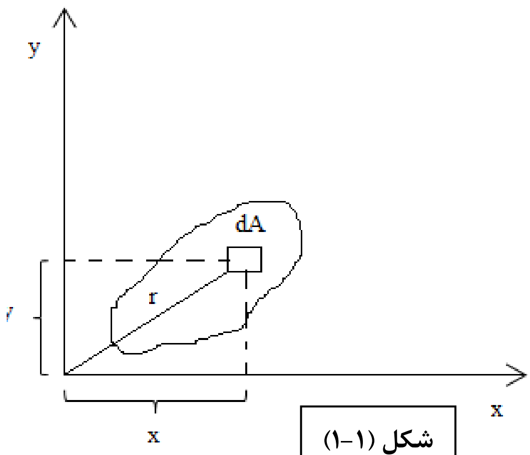
**۵) کمانش و پایداری سازه**

- نیرو ها وستون ها (کمانش کلی)
- کمانش موضعی
- عرض موثر پوسته

**۶) طراحی سازه مقطع بدنه**

- بررسی مقطع مورد نیاز برای استرینگر ها
- بررسی چیدمان استرینگر ها

## ممان اینرسی سطح : (Moment of Inertia)




شکل (۱-۱)

$$\left.\begin{aligned} I_x &= \int y^2 dA \\ I_y &= \int x^2 dA \\ I_{xy} &= \int xy dA \end{aligned}\right\}$$ فرمول (۱ -۱)

$$I_z = I_y + I_y = J = \int r^2 dA$$

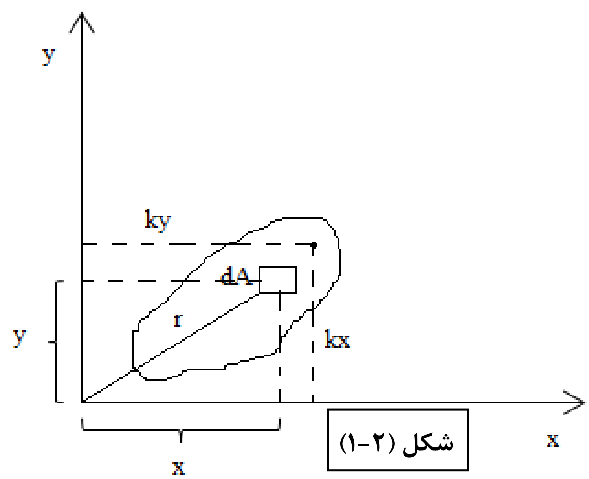
ممان اینرسی قطبی

## شعاع ژیراسیون : (Radius of Gyration)

مرکز سطح نقطه ای است که اگر کل جرم متمرکز در یک نقطه شود گشتاور حول آن نقطه با گشتاور کل جسم معادل شود.

$$J = I_x + I_y = k_0{}^2 A$$ فرمول (۲ -۱)

شعاع ژیراسون  قطبی



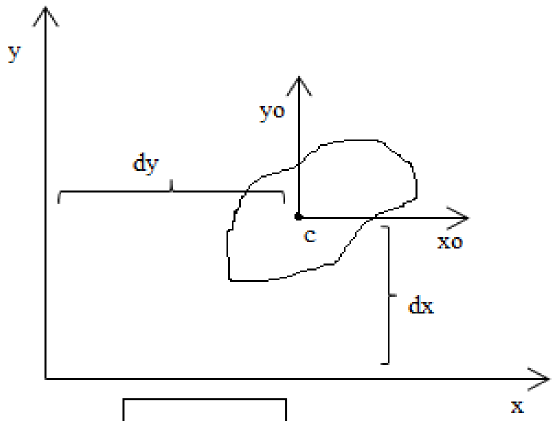

شکل (۲-۱)

$$I_x = \int y^2 dA = K_x{}^2 A \rightarrow K_x{}^2 = \frac{\int y^2 dA}{A} \rightarrow \boxed{K_x = \sqrt{\frac{I_x}{A}}}$$

$$I_y = \int x^2 dA = K_y{}^2 A \rightarrow K_y{}^2 = \frac{\int x^2 dA}{A} \rightarrow \boxed{K_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}}}$$

فرمول (۳ -۱)

## قضیه انتقال محورهای موازی:

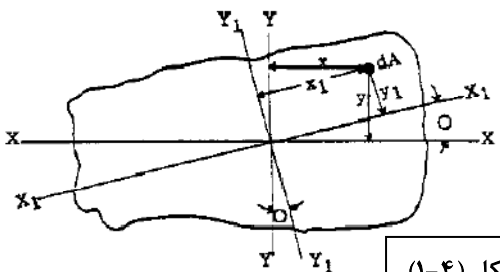



شکل (۳-۱)

$$I_x = I_{x_0} + Adx^2$$
$$I_y = I_{y_0} + Ady^2$$
$$I_{xy} = I_{x_0 y_0} + Adxdy$$
$$J = J_0 + Ar^2$$

فرمول (۴ -۱)

## دوران محورهای مختصات :




شکل (۴-۱)

$$x' = x_1 = x\cos\theta + y\sin\theta$$
$$y' = y_1 = y\cos\theta - x\sin\theta$$
$$I_{x'} = \int y'^2 dA = \int (y\cos\theta - x\sin\theta)^2 dA$$
$$= \cos^2\theta \int y^2 dA - 2\sin\theta\cos\theta \int xy dA + \sin^2\theta \int x^2 dA$$
$$= I_x \cos^2\theta - 2I_{xy}\sin\theta\cos\theta + I_y \sin^2\theta$$

$$\sin^2\theta = \frac{1-\cos 2\theta}{2} \quad , \quad \cos^2\theta = \frac{1+\cos 2\theta}{2} \quad , \; 2\sin\theta\cos\theta = \sin 2\theta$$

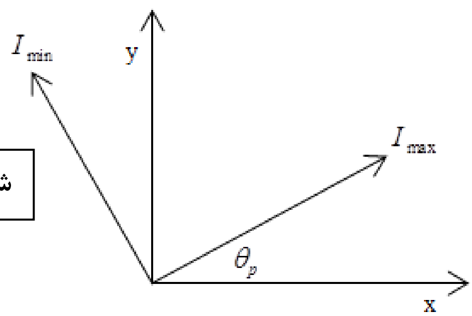
$$\left.\begin{aligned} I_{x'} &= \frac{I_x + I_y}{2} + \frac{I_x - I_y}{2}\cos 2\theta - I_{xy}\sin 2\theta \\ I_{y'} &= \frac{I_x + I_y}{2} - \frac{I_x - I_y}{2}\cos 2\theta + I_{xy}\sin 2\theta \\ I_{x'y'} &= \frac{I_x - I_y}{2}\sin 2\theta + I_{xy}\cos 2\theta \end{aligned}\right\}$$

فرمول (۵ -۱)

## محورهای اصلی اینرسی :

محورهایی هستند که ممان های اینرسی روی آنها به اکسترمم می رسند.

توجه: این ممان های اینرسی نسبت به مرکز جرم اند.




**شکل (۵-۱)**

$$\frac{dI_{x'}}{d\theta} = \left(I_x - I_y\right)\sin 2\theta - 2I_{xy}\cos 2\theta = 0$$

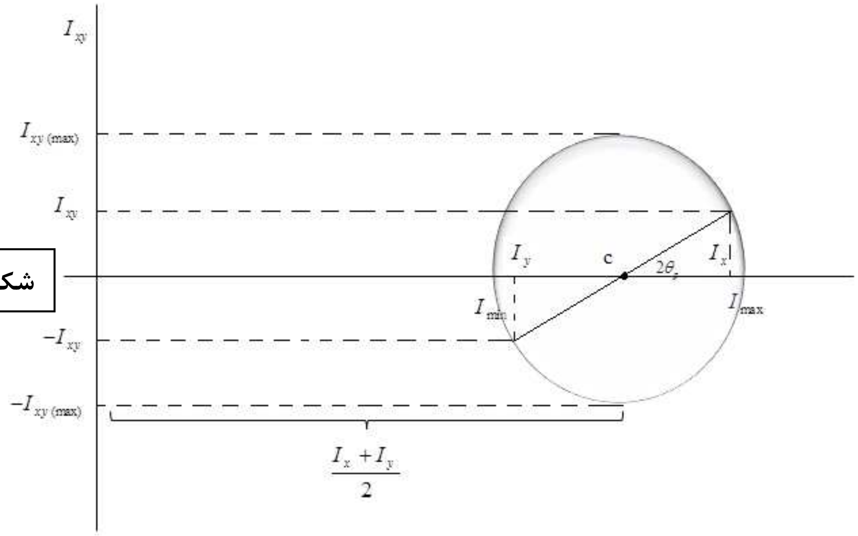
$$\rightarrow \tan 2\theta_p = \frac{2I_{xy}}{I_y - I_x}$$

$$2\theta_p \rightarrow \theta_p \qquad , \qquad 2\theta_p + \pi \rightarrow \theta_p + \frac{\pi}{2}$$

$$\boxed{I_{max}, I_{min} = \frac{I_x + I_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{I_x - I_y}{2}\right)^2 + {I_{xy}}^2}}$$

**فرمول (۶ -۱)**

نکته: محور تقارن حتما یکی از محور های اصلی است.

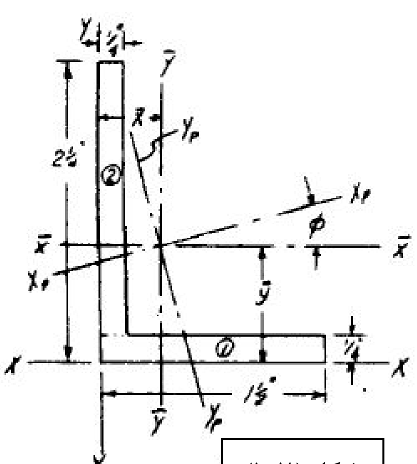



شکل (۶-۱)

$$I_{max}=OC+R$$
$$I_{min}=OC-R$$
$$R=\sqrt{\left(\frac{I_x-I_y}{2}\right)^2+I_{xy}^2}$$
$$I_x+I_y=I_{max}+I_{min}=I_{x'}+I_{y'}=cte=J$$

مثال ( ۱- ۱ ): محل محورهای اصلی را بدست آورید.

حل:در ابتدا مختصات مرکز سطح را بدست می آوریم تا محورهای مرکزی تعیین شوند.



شکل (۷-۱)

$$\bar{x}=\frac{\int x.dA}{\int dA}=\frac{\left(\frac{7}{8}\times1.25\times\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{8}\times\frac{1}{4}\times\frac{9}{4}\right)}{\left(\frac{1}{4}\times1.25\right)+\left(\frac{1}{4}\times\frac{9}{4}\right)}$$
$$\bar{x}=0.39285in$$
$$\bar{y}=\frac{\int y.dA}{\int dA}=\frac{\left(\frac{1}{8}\times1.25\times\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{9}{8}\times\frac{9}{4}\times\frac{1}{4}\right)}{\left(\frac{1}{4}\times1.25\right)+\left(\frac{1}{4}\times\frac{9}{4}\right)}$$
$$\bar{y}=0.767857142in$$

حال ممان اینرسی را در محورهای مرکزی بدست می آوریم .

$$I_{x'} = I_x + Ad^2$$

$$I_{x'} = \frac{1}{12}\times 1.25\times\left(\frac{1}{4}\right)^3 + 1.25\times\frac{1}{4}\times(0.767-\frac{1}{8})^2 +$$

$$\frac{1}{12}\times\frac{1}{4}\times(\frac{9}{4})^3 + \ \frac{9}{4}\times\frac{1}{4}\times(\frac{9}{8}-0.7678)^2$$

$$\rightarrow I_{x'} = 0.44 in^4$$

$$I_{y'} = I_y + Ad^2 = \frac{1}{12}\times\frac{1}{4}\times(1.25)^3 + \frac{1}{4}\times 1.25\times(\frac{1.25}{2}+\frac{1}{4}-0.392)^2 +$$

$$\frac{1}{12}\times\frac{9}{4}\times(\frac{1}{4})^3 + \ \frac{1}{4}\times\frac{9}{4}\times(0.392-\frac{1}{8})^2$$

$$\rightarrow I_{y'} = 0.157 in^4$$

$$I_{y'x'} = I_{xy} + Adxdy = \frac{1}{4}\times 1.25\times\left(0.767-\frac{1}{8}\right)\left(\frac{1.25}{2}+\frac{1}{4}-0.392\right)+$$

$$\frac{1}{4}\times\frac{9}{4}\times\left(\frac{9}{8}-0.767\right)(0.392-\frac{1}{8})$$

$$\rightarrow I_{y'x'} = 0.150669 in^4$$

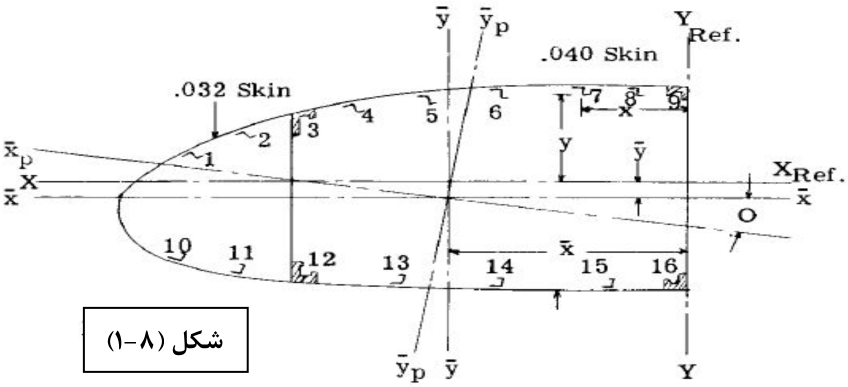
$$\tan 2\theta_p = \frac{2I_{y'x'}}{I_y - I_x}$$

$$\rightarrow \theta_p = -23.3 = 23\ ,\ 18\ minutes$$

| | |
|---|---|
| ۱درجه | ۶۰ دقیقه |
| ۰.۳ | x=? |

X = 18

مثال ( ۲- ۱ ) :  شکل زیر سطح مقطع یک بال را نشان می دهد. در جدول زیر اطلاعات مورد نیاز برای استرینگر های ۱ تا ۱۶ داده شده است. مطلوب است ممان اینرسی محورهای اصلی برای این سطح مقطع.




شکل (۸-۱)

برای محاسبه ممان اینرسی به مرکز سطح هر کدام از این استرینگر ها نیاز داریم.

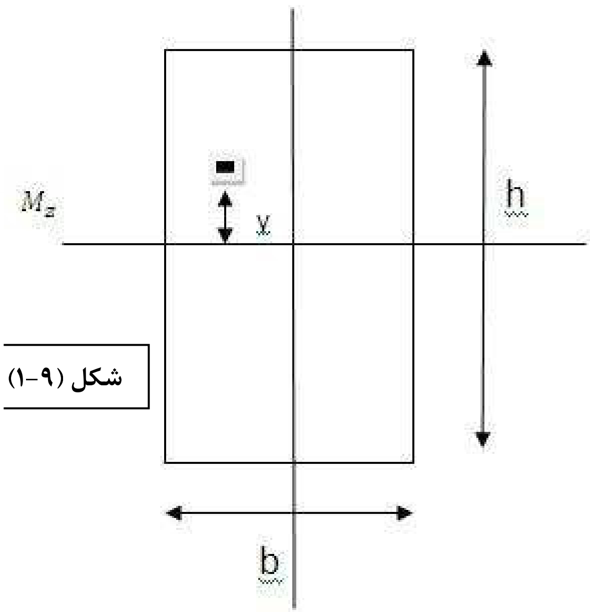
| ۱ | ۲ | ۳ | ۴ | ۵ | ۶ | ۷ | ۸ | ۹ | ۱۰ | ۱۱ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| portion | Stringer area | Effective skin | Total area A | y | Ay | $Ay^2$ | x | Ax | $Ax^2$ | $I_{xy}$- $A_{xy}$ |
| ۱ | ۰.۱۱ | ۰.۰۳ | ۰.۱۴ | ۴ | ۰.۵۶ | ۲.۲۴ | -۳۳.۱۵ | -۴.۴۶۱ | ۱۵۳.۸۵ | -۱۸.۵۶ |
| ۲ | ۰.۱۱ | ۰.۰۳ | ۰.۱۴ | ۶.۰۵ | ۰.۸۴۷ | ۵.۱۲۴ | -۲۹.۲۸ | -۴.۰۹۹ | ۱۲۰.۰۲ | -۲۴.۸ |
| ۳ | ۰.۳ | ۰.۰۸ | ۰.۳۸ | ۷ | ۲.۶۶ | ۱۸.۶۲ | -۲۴.۸۵ | -۹.۴۴۳ | ۲۳۴.۶۶ | -۶۶.۱ |
| ۴ | ۰.۱۳ | ۰.۰۴ | ۰.۱۷ | ۷.۳۷ | ۱.۲۵۳ | ۹.۲۳۴ | -۲۱.۱۸ | -۳.۶ | ۷۶.۲۵ | -۲۶.۵۳ |
| ۵ | ۰.۱۳ | ۰.۰۴ | ۰.۱۷ | ۷.۵۵ | ۱.۲۸۸ | ۹.۶۸۷ | -۱۶.۶ | -۲.۸۲۲ | ۴۶.۸۴ | -۲۱.۵۳ |
| ۶ | ۰.۱۳ | ۰.۰۴ | ۰.۱۷ | ۷.۵ | ۱.۲۷۵ | ۹.۵۶۳ | -۱۲.۶ | -۲.۱۴۲ | ۲۶.۹۹ | -۱۶.۰۶ |
| ۷ | ۰.۱۳ | ۰.۰۴ | ۰.۱۷ | ۷.۳ | ۱.۲۴۱ | ۹.۰۵۹ | -۸.۶ | -۱.۴۶۲ | ۱۲.۵۷ | -۱۰.۶۷ |
| ۸ | ۰.۱۳ | ۰.۰۴ | ۰.۱۷ | ۶.۹ | ۱.۱۷۱ | ۸.۰۸ | -۴ | -۰.۶۸ | ۲.۷۲ | -۴.۶۹ |
| ۹ | ۰.۲۴ | ۰.۰۵ | ۰.۲۹ | ۶.۵ | ۱.۸۸۵ | ۱۲.۲۵۲ | -۰.۳۵ | -۰.۱ | ۰.۰۴ | -۰.۶۵ |
| ۱۰ | ۰.۰۷ | ۰.۱ | ۰.۱۷ | -۳.۳ | -۰.۵۶۱ | ۱.۸۵۱ | -۳۳.۲۵ | -۵.۶۵۳ | ۱۸۷.۹۶ | ۱۸.۶۵ |
| ۱۱ | ۰.۷ | ۰.۱ | ۰.۱۷ | -۴.۹ | -۰.۸۳۳ | ۴.۰۸۲ | -۲۹.۲۸ | -۴.۹۷۸ | ۱۴۵.۷۶ | ۲۴.۳۹ |
| ۱۲ | ۰.۱۳ | ۰.۱۵ | ۰.۲۸ | -۵.۹۵ | -۱.۶۶۶ | ۹.۹۱۳ | -۲۴.۸۵ | -۶.۹۵۸ | ۱۷۲.۹ | ۴۱.۴ |
| ۱۳ | ۰.۱۱ | ۰.۲ | ۰.۳۱ | -۷.۴ | -۲.۲۹۴ | ۱۶.۹۷۶ | -۱۸.۷ | -۵.۷۹۷ | ۱۰۸.۴ | ۴۲.۹ |
| ۱۴ | ۰.۱۱ | ۰.۲ | ۰.۳۱ | -۸.۱۳ | -۲.۵۲ | ۲۰.۴۸۷ | -۱۲.۴۲ | -۲.۸۵ | ۴۷.۸۲ | ۳۱.۳ |
| ۱۵ | ۰.۱۱ | ۰.۲ | ۰.۳۱ | -۸.۶۲ | -۲.۶۷۲ | ۲۲.۴۳۲ | -۶.۱ | -۱.۸۹۱ | ۱۱.۵۴ | ۱۶.۳ |
| ۱۶ | ۰.۲۴ | ۰.۱۱ | ۰.۳۵ | -۸.۸۷ | -۳.۰۹۴ | ۲۷.۴۴۴ | -۰.۳۵ | -۰.۱۲۲ | ۰.۰۴ | ۱.۰۸ |
| total | | | ۳.۷ | | -۱.۴۶۵ | ۱۸۷.۰۴ | | -۵۸.۲۲۸ | ۱۳۴۸.۳۶ | -۱۳.۳۵ |

$$I_{x_p,\, y_p} = \frac{\overline{I}_x + \overline{I}_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\overline{I}_x - \overline{I}_y}{2}\right)^2 + \overline{I}_{xy}^2}$$

$$\rightarrow I_{x_p} = 181.2 in^4$$

$$\rightarrow I_{y_p} = 437 in^4$$

## خمش خالص برای تیر های با مقطع دلخواه:




شکل (۹-۱)

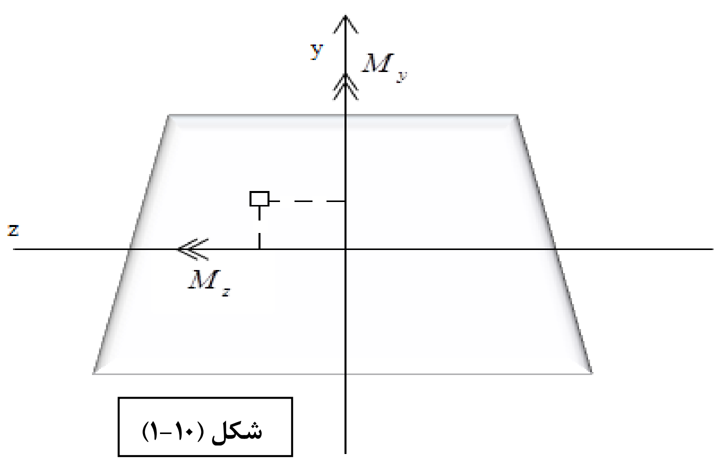
صفحه مقطع y-z است.

$$\sigma_x = \frac{-M_z y}{I_z}$$

فرمول (۷ -۱)

نکته : مرکز سطح جایی است که محوری که از آن می گذرد ، گشتاور اول سطح نسبت به آن محور صفر است.

چون الاستیک و خطی فرض کردیم می توان از سوپر پوزیشن استفاده نمود.



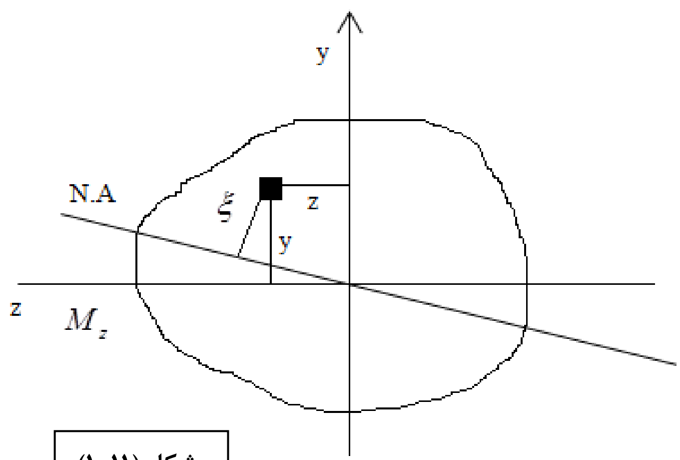

شکل (۱۰-۱)

$$\sigma_x = \frac{M_y z}{I_y} - \frac{M_z y}{I_z}$$

فرمول (۸ -۱)

# روش های محاسبه ی تنش ناشی از خمش

## روش اول : استفاده از محورهای اصلی Principal Axis Method




شکل (۱۱-۱)

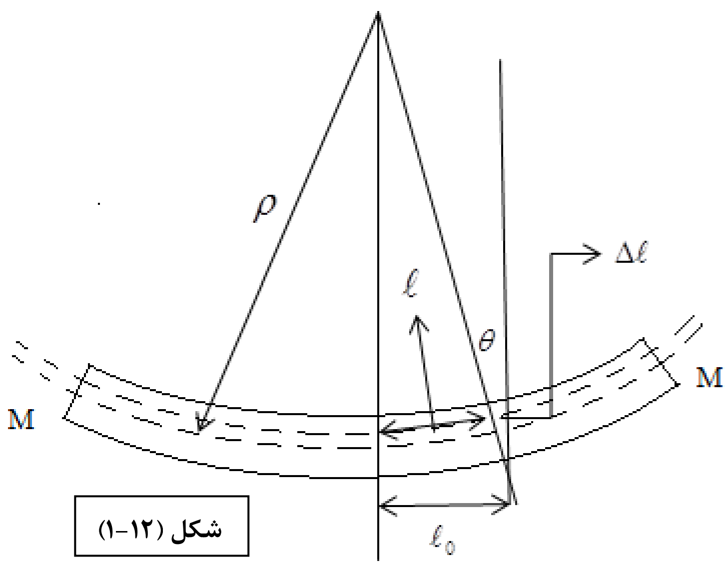
$$\sigma_x = \frac{M_{y_p} z_p}{I_{y_p}} - \frac{M_{z_p} y_p}{I_{z_p}}$$

فرمول (۹ -۱)

می دانیم که اگر محور تقارن داشته باشیم ، محورتقارن همان محور اصلی است.

می خواهیم ببینیم که محور خنثی لزوما از

محور تقارن می گذرد یا خیر.




شکل (۱۲-۱)

$$\varepsilon_x = \frac{\Delta L}{L_0} = \frac{L - L_0}{L_0} = \frac{(\rho - \varepsilon)\theta - \rho\theta}{\rho\theta} = -\frac{\xi}{\rho}$$

$$\sigma_x = E\varepsilon_x$$

$$\sigma_x = \frac{-E\,\xi}{\rho}$$

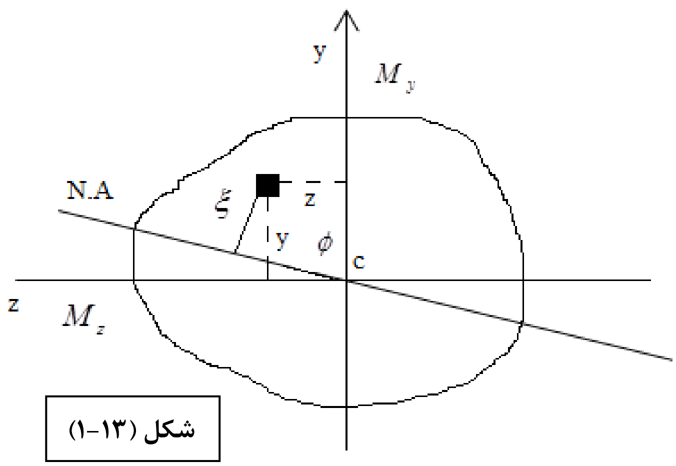
برای تعادل باید: $\sum F_x = 0$

$$\int \sigma_x dA = 0$$

$$\int \frac{-E\xi}{\rho} dA = 0 \rightarrow \int \xi dA = 0$$

گشتاور اول سطح نسبت به محور خنثی حتما باید از مرکز سطح بگذرد. بنابراین حتی اگر مقطع نا متقارن بود محور خنثی از مرکز سطح می گذرد.

**نکته: در مقاطع متقارن محور خنثی لزوما از مرکز سطح می گذرد.**




شکل (۱۳-۱)

$$\xi = y \sin\varphi - z \cos\varphi (2)$$

$$\sum M = 0$$

$$M_Z = -\int y\,\sigma_x dA$$

$$M_Y = \int Z\,\sigma_x dA$$

$$(1),(2) \Rightarrow \sigma_x = -\frac{E}{\rho}\left[-y \sin\varphi + z \cos\varphi\right](4)$$

$$(3) \Rightarrow M_Z = -\frac{E}{\rho}\int(-y^2 \sin\varphi + z\,y \cos\varphi)dA$$

$$M_y = -\frac{E}{\rho}\int(-yz\ \sin\varphi + z^2\ \cos\varphi)dA$$

$$M_Z = -\frac{E}{\rho}\left[-\sin\varphi\int y^2\, dA + \cos\varphi\int yz\ dA\right]$$

$$M_Z = -\frac{E}{\rho}\left[-\sin\varphi I_Z + \cos\varphi I_{yz}\right]$$

$$M_y = \frac{E}{\rho}\left[-\sin\varphi\int yz\ dA + \cos\varphi\int z^2\, dA\right]$$

$$M_Z = \frac{E}{\rho}\left[-\sin\varphi I_{yz} + \cos\varphi I_y\right]$$

از دو معادله بالا را بدست می آوریم ، و در رابطه ۴ قرار می دهیم.

محاسبه تنش برای هر نقطه(y,z)

$$\boxed{\sigma_x = \left(\frac{z\,I_z - y\,I_{yz}}{I_y I_z - I_{yz}^2}\right)M_y - \left(\frac{y\,I_y - z\,I_{yz}}{I_y I_z - I_{yz}^2}\right)M_z}$$

**فرمول (۱۰ -۱ )**

در این روش نیازی به محاسبه محورهای اصلی نداریم و فقط کافی است که محور اصلی باشد.

$$\boxed{\sigma_x = -\left(\frac{M_z\,I_y + M_y\,I_{yz}}{I_y I_z - I_{yz}^2}\right)y + \left(\frac{M_y\,I_z + M_Z\,I_{yz}}{I_y I_z - I_{yz}^2}\right)z}$$

**فرمول (۱۱ -۱ )**

# روش دوم : روش k-method

(این روش بر اساس محورهای غیراصلی مرکزی می باشد)

**فرمول (۱۲ -۱**

$$k_1 = \frac{I_{yz}}{I_y I_z - I_{yz}^2}$$

$$k_2 = \frac{I_y}{I_y I_z - I_{yz}^2}$$

$$k_3 = \frac{I_z}{I_y I_z - I_{yz}^2}$$

$$\Rightarrow$$

$$\sigma_x = -(M_Z k_2 + M_y k_1)y + (M_y k_3 + M_Z k_1)z$$

$$\sigma_x = 0$$

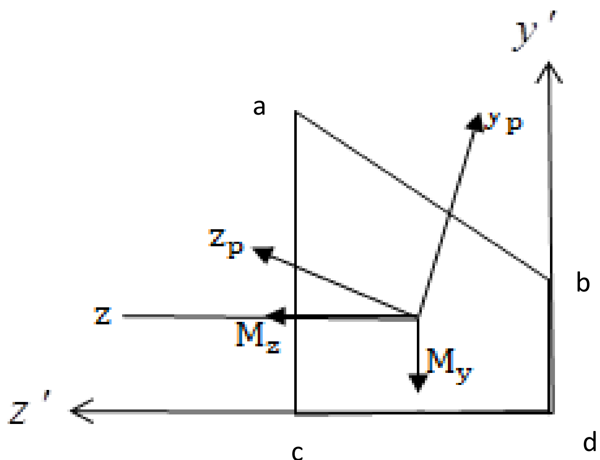
$$(M_Z k_2 + M_y k_1)y = (M_y k_3 + M_Z k_1)z$$

$$\tan\varphi = \frac{z}{y} = \frac{M_Z\ k_2 + M_y\ k_1}{M_y\ k_3 + M_Z\ k_1}$$

## روش سوم : Natural Axis method

$$\boxed{\sigma = \frac{M_N Y_N}{I_N}}$$ فرمول (۱۳ -۱)

مثال ( ۳ -۱ ) : خمش را در این مقطع با استفاده از این سه روش حساب کنید.




شکل (۱۴-۱)

bd = 8 , bc = 16 , ac = 12

$S_a = 1$

$S_b = 0.5$

$S_c = 0.8$

$S_d = 0.4$

در ابتدا مرکز سطح مقطع را پیدا می کنیم.

اثر فلنچ های روی محور خنثی صفر می شود.

مقطع نامتقارن است و محل محور خنثی معین نیست.

نسبت به $z'$ $\quad s_a*12 + s_b*8 = (s_a + s_b + s_c + s_d)\bar{y} \Rightarrow \bar{y} = 5.926 in$

نسبت به $y'$ $\quad s_a*16 + s_c*16 = (s_a + s_b + s_c + s_d)\bar{z} \Rightarrow \bar{z} = 10.667$ in

اکنون ممان اینرسی حول محور مرکزی را لازم داریم :

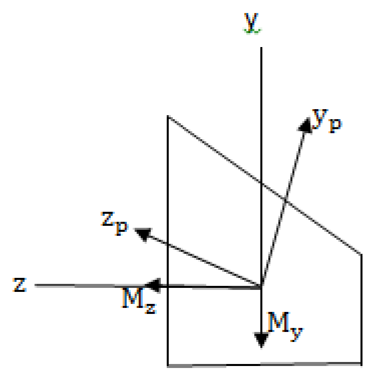
$$I_{z'} = I_z + \sum Ad^2 \Rightarrow I_Z = I_{z'} - \sum Ad^2$$
$$I_z = s_a(12)^2 + s_b(8)^2 - \sum s\,\bar{y}^2 = 81.18 in^4$$

$$I_y = s_a(16)^2 + s_c(16)^2 - \sum s\,\bar{z}^2 = 153.58\,in^4$$
$$I_{yz} = s_a * 16 * 12 - \sum s\,\overline{yz} = 21.32\,in^4$$
$$M_y = -1600 * 50 = -80000 \text{ lb.in}$$
$$M_z = 6000 * 50 = 300000 \text{ lb.in}$$
$$\tan 2\theta_p = \frac{2I_{yz}}{I_z - I_y} = \frac{2 * 21.53}{81.18 - 153.56} = -0.589$$
$$\Rightarrow \theta_p = -15.25$$

$\theta_p$ باید علامت منفی قرار داده شود.

$$I_{yp} = \frac{I_y + I_z}{2} + \frac{I_y - I_z}{2}\cos 2\theta_p - I_{yz}\sin 2\theta_p$$
$$I_{zp} = \frac{I_y + I_z}{2} - \frac{I_y - I_z}{2}\cos 2\theta_p + I_{yz}\sin 2\theta_p$$
$$\begin{cases} I_{yp} = 159.34\,in^4 \\ I_{zp} = 75.38\,in^4 \end{cases}$$
$$\sigma_x = \frac{M_{yp} z_p}{I_{yp}} - \frac{M_{zp} y_p}{I_{zp}}$$

اگر بخواهیم در سیستم اصلی ادامه دهیم، تمامی پارامترهای ممان، ممان اینرسی و مختصات، همه باید به محورهای اصلی بروند.




شکل (۱۵-۱)

$$M_{yp} = M_y \cos\theta_p + M_z \sin\theta_p = -156200\,lb.in$$
$$M_{zp} = M_y \sin\theta_p + M_z \cos\theta_p = 268700\,lb.in$$
$$\sigma_x = -980.29 z_p - 3564.606 y_p$$

حال باید مختصات هر فلنچ را در محور $z_p - y_p$ بدست آوریم تا $\sigma_x$ بدست آید.

$$\begin{cases} y_p = y\cos\theta_p - z\sin\theta_p \\ z_p = z\cos\theta_p + y\sin\theta_p \end{cases}$$

$$a\begin{cases} y_p = 6.74 \\ z_p = 4.45 \end{cases} \Rightarrow \sigma_x = -22500\,{}^{lb}\!/_{in^2}$$

$$b\begin{cases} y_p = 4.82 \\ z_p = -9.85 \end{cases} \Rightarrow \sigma_x = -7610\,{}^{lb}\!/_{in^2}$$

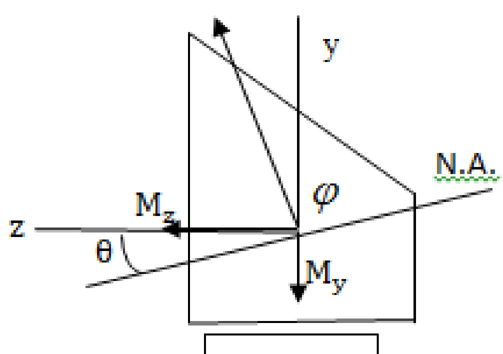
$$c\begin{cases} y_p = -7.12 \\ z_p = 3.85 \end{cases} \Rightarrow \sigma_x = 21880\,{}^{lb}\!/_{in^2}$$

$$d\begin{cases} y_p = -2.9 \\ z_p = -11.8 \end{cases} \Rightarrow \sigma_x = 21900\,{}^{lb}\!/_{in^2}$$

## روش دوم: استفاده از محور خنثی

$$\tan\varphi = \frac{M_z k_2 + M_y k_1}{M_y k_3 + M_z k_1}$$

$k_1$ و $k_3$ $k_2$ ممان های اینرسی نسبت به محور مرکزی (y-z) هستند.




شکل (۱۶-۱)

$$k_1 = 1.775*10^{-3}$$
$$k_2 = 12.784*10^{-3}$$
$$k_3 = 6.758*10^{-3}$$
$$\Rightarrow \varphi = -89.87°$$

$\varphi' = 0.13 \ll 1$

$\Rightarrow I_N \approx I_z = 81.18 in^4$

$\sigma_x = -\dfrac{M_N y_N}{I_N} \Rightarrow M_N = 300000\cos 0.13° + 80000 \sin 0.13° = 300200\, lb.in$

$y_N = y\sin\varphi + z\cos\varphi$

$\sigma_x = -\dfrac{300200 y_N}{81.18} = -3697.95 y_N$

$a) y_N = 6.081 \rightarrow \sigma_x = -22500\, psi$

b) $y_N = 2.055 \rightarrow \sigma_b = \dfrac{-300200 \times 2.055}{81.18} = -7575$

c) $y_N = -5.92 \rightarrow \sigma_b = \dfrac{-300200(-5.92)}{81.18} = 21850$

d) $y_N = -5.95 \rightarrow \sigma_b = \dfrac{-300200(-5.95)}{81.18} = 22000$

**روش سوم: (k-method)**

$\sigma_x = -(M_z k_2 + M_y k_1)y + (M_y k_3 + M_z k_1)z$

a) $\begin{cases} y = 12 - 5.926 = 6.074 \\ z = 16 - 10.667 = 5.333 \end{cases}$

$$\sigma_{x)a} = -(300000 \times 12.784 \times 10^{-3} - 80000 \times 1.775 \times 10^{-3})6.074 + (-80000 \times 6.758 \times 10^{-3} + 300000 \times 1.775 \times 10^{-3})5.333 = -22450(psi)$$

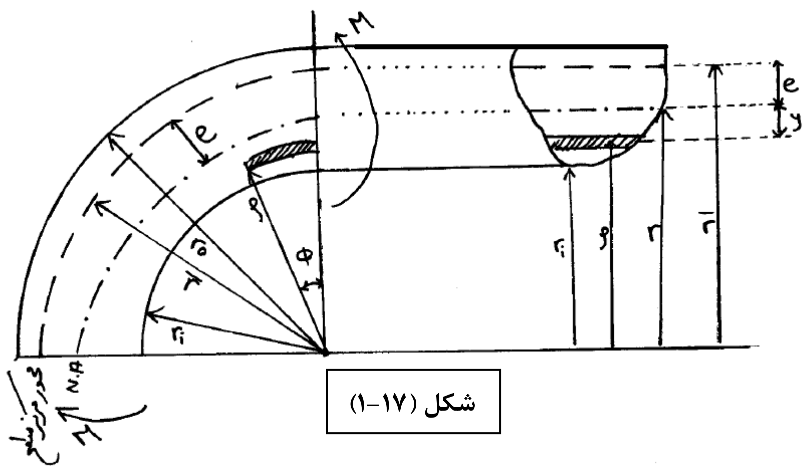
b) $\begin{cases} y = 8 - 5.926 = 2.074 \\ z = -10.667 \end{cases} \rightarrow \sigma_{x)b} = -7575(psi)$

c) $\begin{cases} y = -5.926 \\ z = 16 - 10.667 = 5.333 \end{cases} \rightarrow \sigma_{x)c} = 21862(psi)$

d) $\begin{cases} y = -5.926 \\ z = -10.667 \end{cases} \rightarrow \sigma_{x)d} = 21985(psi)$

## خمش تیرهای خمیده :

تحلیل ما تا کنون درباره‌ی تنش‌هایی بود که از خمش عضوهای راست به‌وجود می‌آمدند.در این بخش می خواهیم تنشهایی را بررسی کنیم که از وارد کردن کوپلهای برابر و مخالف بر عضوهایی که شکل منحنی یا خمیده دارند،به‌وجود می‌آیند.در این صورت،محور خنثی دیگر از مرکز سطح نمی‌گذرد و با آن فاصله دارد.



شکل (۱۷-۱)

$r_o$:شعاع خارجی

$r_i$ : شعاع داخلی

$\overline{r}$ : شعاع مرز سطح

$r$:شعاع محور خنثی

ρ : شعاع المان مورد نظر

$\rho\varphi$ =طول اولیه المان

$y d\varphi = (r-\rho) d\varphi$ =تغییر طول المان

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon &= \frac{(r-\rho)d\varphi}{\rho\varphi} \\ \sigma &= E\,\varepsilon \end{aligned}\right\} \rightarrow \sigma = E\,\frac{(r-\rho)d\varphi}{\rho\varphi} \qquad (1)$$

$$\sum F = 0 \rightarrow \int \sigma dA = 0 \rightarrow \int E\,\frac{(r-\rho)d\varphi}{\rho\varphi}dA = 0$$

$$\rightarrow \frac{E}{\varphi}d\varphi\int\frac{(r-\rho)}{\rho}dA = 0 \rightarrow \frac{E}{\varphi}d\varphi\left[r\int\frac{dA}{\rho}-\int dA\right]=0$$

$$r\int\frac{dA}{\rho}-\int dA = 0 \rightarrow r = \frac{\int dA}{\int\frac{dA}{\rho}}$$

$r_i < \rho < r_o$

$$\sum M = 0 \rightarrow M = \int \sigma(r-\rho)dA \overset{(1)}{=} \int\frac{E(r-\rho)^2 d\varphi}{\rho\varphi}dA$$

$$\left.\begin{array}{l} M = \dfrac{Ed\varphi}{\varphi}\displaystyle\int\frac{(r-\rho)^2}{\rho}dA \\ (1) \rightarrow \dfrac{Ed\varphi}{\varphi} = \dfrac{\sigma\rho}{r-\rho} \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} M = \dfrac{\sigma\rho}{r-\rho}\displaystyle\int\frac{(r-\rho)^2}{\rho}dA \\ (r-\rho)^2 = r^2 - 2r\rho + \rho^2 \end{array}\right\} \rightarrow \mathrm{M} = \frac{\sigma\rho}{r-\rho}\left[r^2\int\frac{dA}{\rho} - 2r\int dA + \int\rho dA\right]$$

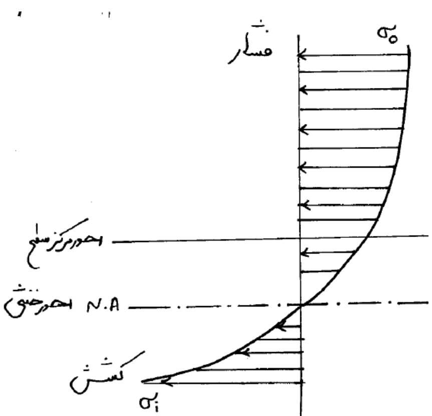
$$\left.\begin{array}{l} r^2\displaystyle\int\frac{dA}{\rho} \overset{(2)}{=} \mathrm{r}\int dA = rA \\ \displaystyle\int \rho dA = \bar{r}A \end{array}\right\} M = \frac{\sigma\rho}{r-\rho}A\left(\bar{r}-r\right) \rightarrow \sigma = \frac{M(r-\rho)}{\rho A\left(\bar{r}-r\right)} \rightarrow \sigma = \frac{My}{\rho Ae}$$

تنش در لایه‌ی درونی (تنش کششی)

$$\boxed{\sigma_i = \frac{M(r-r_i)}{r_i Ae}}$$ **فرمول (۱۴ -۱)**

تنش در لایه‌ی بیرونی (تنش فشاری)

$$\boxed{\sigma_o = \frac{M(r_o - r)}{r_o Ae}}$$ **فرمول (۱۵ -۱)**




**شکل (۱۸-۱)**

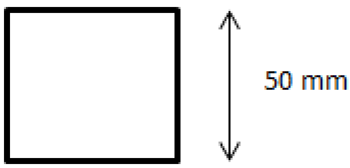
همان طورکه درنمودار بالا مشخص است ، لایه ی درونی در وضعیت تنش بدتری نسبت به لایه ی خارجی قرار دارد.

مثال ( ۴- ۱ ) : تیر خمیده ای با سطح مقطع مربعی با طول ضلع $50mm$ مانند شکل روبه رو ،تحت اثر یک کوپل به مقدار $M = 2083\ Nm$ قراردارد. شرایط تنشها را درحالات زیر بررسی نمایید:

$a)\ \bar{r} = 250mm$

$b)\ \bar{r} = 75mm$

$c)\ \bar{r} = \infty$




**شکل (۱۹-۱)**

$$r = \frac{\int dA}{\int \frac{dA}{\rho}} = \frac{bh}{\int_{r_i}^{r_o} \frac{bdl}{\rho}} = \frac{h}{\ln(\rho)\Big|_{r_i}^{r_o}} = \frac{h}{\ln(\frac{r_o}{r_i})}$$

$$a)\ \mathrm{r}_i = \bar{r} - \frac{h}{2} = 250 - \frac{50}{2} = 225\ (\mathrm{mm})$$

$$\mathrm{r}_o = \bar{r} + \frac{h}{2} = 250 + \frac{50}{2} = 275\ (\mathrm{mm})$$

$$\mathrm{r} = \frac{50}{\ln(\frac{275}{225})} = 249.16\ (\mathrm{mm})$$

$$\sigma_i = \frac{M\left(r - r_i\right)}{r_i A e} = \frac{2083(249.16 - 225)}{225 \times 50^2 \times (250 - 249.16)} = 107\ (\mathrm{MPa})$$

$$\sigma_o = \frac{M\left(r_o - r\right)}{r_o A e} = \frac{2083(275 - 249.16)}{275 \times 50^2 \times (250 - 249.16)} = 93.6\ (\mathrm{MPa})$$

b) $\mathrm{r}_i = 50$ (mm)

$\mathrm{r}_o = 100$ (mm)

r=72.13 (mm)

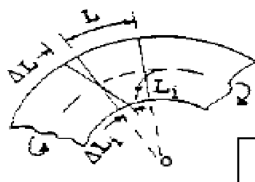
$\sigma_i$ =128 (MPa)

$\sigma_o$ =80.9 (MPa)

c) $\bar{r} \to \infty$

$$\sigma_i = \sigma_o = \frac{Mc}{I} = \frac{M\frac{h}{2}}{\frac{bh^3}{12}} = 100\ \ (\mathrm{MPa})$$

## روش ساده برای محاسبه‌ی تنش خمشی در تیر خمیده

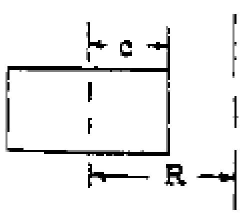
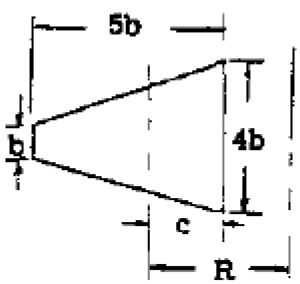



شکل (۲۰-۱)


$$\boxed{\sigma = k_c \frac{MC}{I}}$$ فرمول (۱۳-۱)

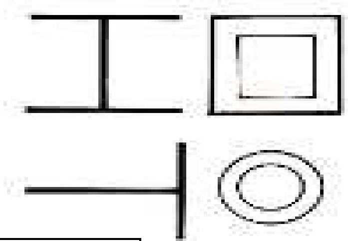
$k_c$ باعث میشود تیر خمیده به مستقیم تبدیل شود .

$k_c$ : correction factor for curvature

| Section | $\frac{R}{C}$ | Factor $k_c$ | | $\frac{\rho}{R}$ |
|---|---|---|---|---|
| | | $b_i$ | $b_o$ | |
| | | Inside fiber | Outside fiber | |
|  | ۱.۲ | ۲.۸۹ | ۰.۵۷ | ۰.۳۰۵ |
| | ۱.۴ | ۲.۱۳ | ۰.۶۳ | ۰.۲۰۴ |
| | ۱.۶ | ۱.۷۹ | ۰.۶۷ | ۰.۱۴۹ |
| | ۱.۸ | ۱.۸۳ | ۰.۷ | ۰.۱۱۲ |
| | ۲ | ۱.۵۲ | ۰.۷۳ | ۰.۰۹ |
| | ۳ | ۱.۳ | ۰.۸۱ | ۰.۰۴۱ |
| | ۴ | ۱.۲ | ۰.۸۵ | ۰.۰۲۱ |
| | ۶ | ۱.۱۲ | ۰.۹ | ۰.۰۰۹۳ |
| | ۸ | ۱.۰۹ | ۰.۹۲ | ۰.۰۰۵۲ |
| | ۱۰ | ۱.۰۷ | ۰.۹۴ | ۰.۰۰۳۳ |
|  | ۱.۲ | ۳.۱۴ | ۰.۵۲ | ۰.۳۵۲ |
| | ۱.۴ | ۲.۲۹ | ۰.۵۴ | ۰.۲۴۳ |
| | ۱.۶ | ۱.۹۳ | ۰.۶۲ | ۰.۱۷۹ |
| | ۱.۸ | ۱.۷۴ | ۰.۶۵ | ۰.۱۳۸ |
| | ۲ | ۱.۶۱ | ۰.۶۸ | ۰.۱۱ |
| | ۳ | ۱.۳۴ | ۰.۷۶ | ۰.۰۵ |
| | ۴ | ۱.۲۴ | ۰.۸۲ | ۰.۰۲۸ |
| | ۶ | ۱.۱۵ | ۰.۸۷ | ۰.۰۱۲ |
| | ۸ | ۱.۱۲ | ۰.۹۱ | ۰.۰۰۸ |
| | ۱۰ | ۱.۱۲ | ۰.۹۳ | ۰.۰۰۳۹ |

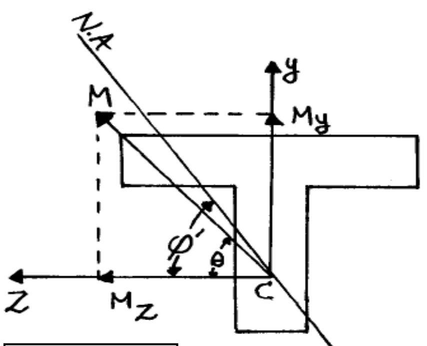
برای مقاطع زیر نیز در کتاب براون بخش "Bending Stress"، جدول (A13.3) عددهای مورد نظر وجود دارد.

هر چقدر نسبت $\frac{R}{C}$ بیشتر باشد، تیر به تیر مستقیم نزدیک‌تر می‌شود.



شکل (۲۱-۱)

## تعیین محل محور خنثی در مقاطع دلخواه با استفاده از محورهای اصلی




شکل (۲۲-۱)

$$\sigma_x = \frac{-M_z y}{I_z} + \frac{M_y z}{I_y} \quad \begin{cases} M_z = M\cos\theta \\ M_y = M\sin\theta \end{cases}$$

در محل محور خنثی خواهیم داشت:

$$\sigma_x = 0 \Rightarrow \left(\frac{M\cos\theta}{I_z}\right) y = \left(\frac{M\sin\theta}{I_y}\right) z$$

$$\frac{y}{z} = \tan\varphi' = \frac{I_z}{I_y}\tan\theta$$

$I_z$ و $I_y$ همواره مثبت هستند بنابراین، $\varphi'$ و $\theta$ همیشه هم‌علامتند.

$I_z$ و $I_y$ در روابط فوق ممان اینرسی ماکزیمم و مینیمم سطح می‌باشند.

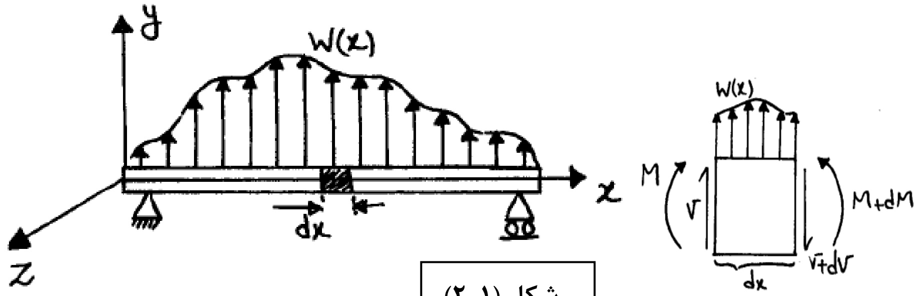
محور خنثی همواره بین محور گشتاور(M) و ممان اینرسی مینیمم (که در اینجا $I_y$ می‌باشد) است.

$$I_z \succ I_y \Rightarrow \varphi' \succ \theta$$

$$I_z \prec I_y \Rightarrow \varphi' \prec \theta$$

نکته : وقتی در شکل تقارن داریم یکی از محورهای اصلی همان محور تقارن است.

## توزیع جریان برش در یک مقطع دلخواه:




شکل (۱-۲)

$$\Sigma M = 0$$

$$-M - (V + dV)dx + M + dM + \frac{w dx^2}{2} = 0 \Rightarrow -V dx + dM = 0 \Rightarrow V = \frac{dM}{dx}$$

$$w(x) = \frac{d^2 M}{dx^2}$$

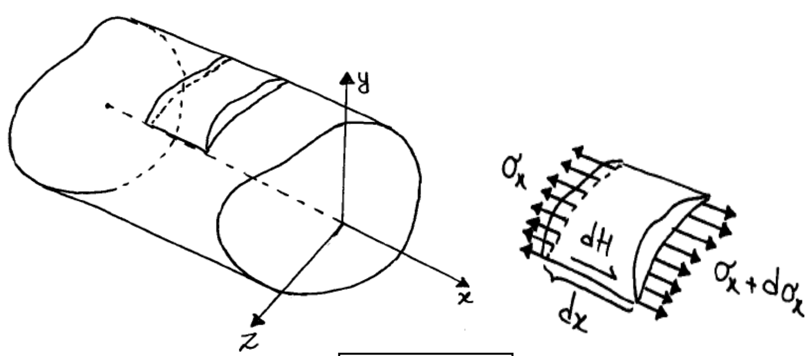
$$\begin{cases} V_y = -\dfrac{dM_z}{dx} \\ V_z = \dfrac{dM_y}{dx} \end{cases}$$

فرمول (۱-۲)

نکته: در جاهایی که تغییرات ممان داریم حتما بار برشی وجود خواهد داشت.

خمش‌ها تنش نرمال ایجاد می‌کنند.

ماهیت $dH$ یک نیروی برشی ست.




شکل (۲-۲)

$$\Sigma F_x = 0$$

$$-\int \sigma_x dA + \int (\sigma_x + d\sigma_x) dA + dH = 0 \Rightarrow dH = -\int (d\sigma_x) dA$$

### الف) محاسبه جریان برشی به روش K-Method:

$$\sigma_x = -\left(M_z K_2 + M_y K_1\right) y + (M_y K_3 + M_z K_1) z$$

$$d\sigma_x = -\left(dM_z K_2 + dM_y K_1\right) y + (dM_y K_3 + dM_z K_1) z$$

$$\begin{cases} Q_z = \int y dA \\ Q_y = \int z dA \end{cases}$$

$$\frac{dH}{dx} = -\left[ -(\frac{dM_z}{dx} K_2 + \frac{dM_y}{dx} K_1) Q_z + (\frac{dM_y}{dx} K_3 + \frac{dM_z}{dx} K_1) Q_y \right]$$

$$\begin{cases} \dfrac{dM_z}{dx} = -V_y \\ \dfrac{dM_y}{dx} = V_z \end{cases}$$

$$\frac{dH}{dx} = -\left[ -(-V_y K_2 + V_z K_1) Q_z + (V_z K_3 - V_y K_1) Q_y \right]$$

**q : جریان برشی(Shear Flow)**

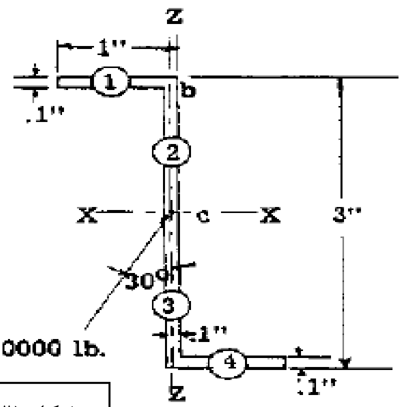
$$\frac{dH}{dx} \equiv q$$

$$q_x = -(V_y K_2 - V_z K_1) Q_z - (V_z K_3 - V_y K_1) Q_y$$ فرمول (۳ -۲ )

### ب) محاسبه جریان برشی به روش محورهای اصلی(Principal Axis Method):

$$\boxed{q_x = -\frac{V_{yp} Q_{zp}}{I_{zp}} - \frac{V_{zp} Q_{yp}}{I_{yp}}}$$ فرمول (۴ -۲ )

مثال ( ۱- ۲ ) : جریان برشی در B وC را پیدا کنید.




شکل (۳-۲)

توجه: اگر محور تقارن داشته باشیم آن محور، محور اصلی ست که در این سوال نداریم.

با توجه به روش K-Method خواهیم داشت:

$$\bar{y}=\frac{\int y\,dA}{\int dA}=\frac{0.9\times0.1\times0.05+0.9\times0.1\times2.95+0.1\times3\times1.5}{0.9\times0.1+0.9\times0.1+0.1\times3}=1.5''$$

$$\bar{z}=\frac{\int z\,dA}{\int dA}=0.95''$$

حال ممان حول مرکز سطح را بدست می آوریم:

$$I_y=\sum\bar{I}_{y'}+\sum Ad^2=\frac{1}{12}\times0.1\times(0.9)^3+0.1\times0.9\times\left(0.95-\frac{0.9}{2}\right)^2$$

$$+\frac{1}{12}\times0.1\times(0.9)^3+0.1\times0.9\times(\frac{0.9}{2}+0.05)^2+\frac{1}{12}\times3\times0.1^3+0$$

$$\rightarrow I_y=0.0574$$

$$I_z=\sum\bar{I}_{z'}+\sum Ad^2=\frac{1}{12}\times0.9\times(0.1)^3+0.1\times0.9\times(1.5-0.05)^2$$

$$+\frac{1}{12}\times0.9\times(0.1)^3+0.1\times0.9\times(1.5-0.05)^2+\frac{1}{12}\times0.1\times3^3+0$$

$$\rightarrow I_z=0.6036$$

$$I_{yz}=\sum\bar{I}_{yz}+\sum Ad_yd_z=0+0.9\times0.1\times(1.5-0.05)\left(0.95-\frac{0.9}{2}\right)$$

$$I_{yz}=0.1305$$

سپس از روش Kمتد، Kها را بدست می آوریم و در رابطه قرار داده و $q_x$ بدست می آید.

حال باید $Q_z$ و $Q_y$ را بدست آوریم.

$$I_y = \Sigma \bar{I}_y + \Sigma A z^2 = 0.0574 (in^4)$$
$$I_z = 0.6035 (in^4)$$
$$I_{yz} = 0.1305 (in^4)$$

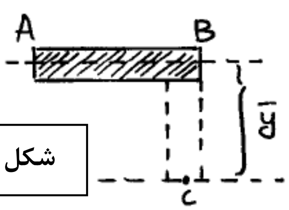
$$K_1 = \frac{I_{yz}}{I_y I_z - I_{yz}^2} = 7.704 \qquad K_2 = \frac{I_y}{I_y I_z - I_{yz}^2} = 3.257 \qquad K_3 = \frac{I_z}{I_y I_z - I_{yz}^2} = 34.25$$

$$\begin{cases} V_y = 10000 \cos 30 = 8660 lb \\ V_z = -10000 \cos 30 = -5000 lb \end{cases}$$

$$q_x = -(8660 \times 3.257 + 5000 \times 7.406) Q_z - (-5000 \times 34.25 - 8660 \times 7.406) Q_y$$

$$q_x = -65235.6 Q_z + 235385.9 Q_y$$

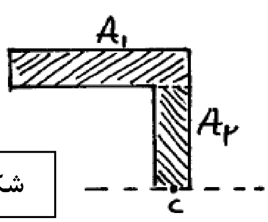
برای B:




شکل (۲-۴)

$$\begin{cases} Q_z = 1 \times 0.1 \times 1.45 = 0.145 \\ Q_y = 1 \times 0.1 \times 0.45 = 0.045 \end{cases}$$

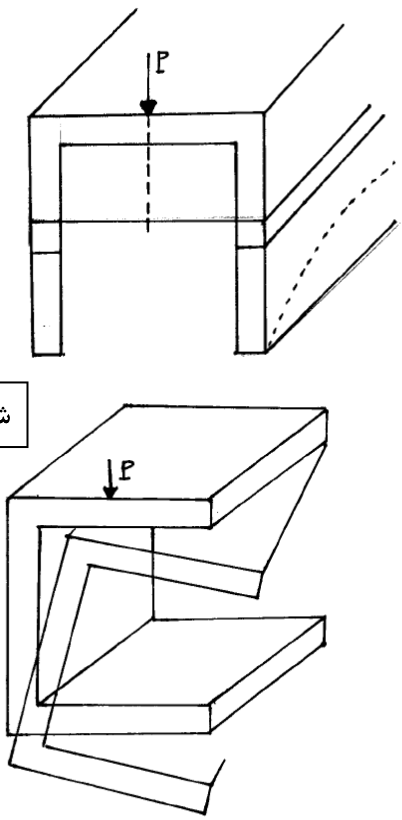
برای C:




شکل (۲-۵)

$$\begin{cases} Q_z = 0.145 + (0.1 \times 1.4)(\frac{1.4}{2}) = 0.243 \\ Q_y = 0.45 + 0 = 0.45 \end{cases}$$

## مرکز برش(**shear center**):



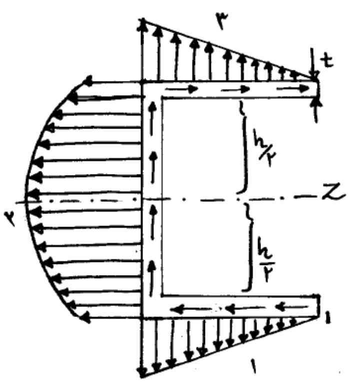

شکل (۶-۲)

در اینجا در جهت بارگذاری تیر تقارن ندارد، علاوه بر خمش پیچش هم داریم.

از نقطه ۱ شروع به حرکت می‌کنیم، جریان برش ابتدا صفر است و رفته رفته زیاد می‌شود.

تیر تحت بار P قرار می‌گیرد که این نیرو به سمت پایین است، در نتیجه عکس‌العمل به سمت بالا خواهد بود،

یعنی در جان تیر باید نیروها به سمت بالا باشد تا آن را خنثی کند.



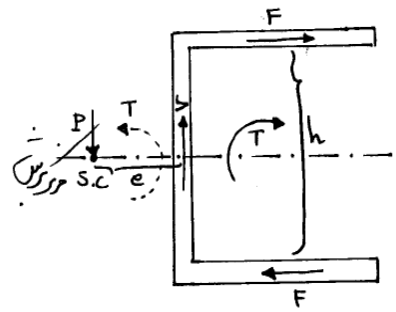

شکل (۷-۲)

$q=\frac{VQ}{I}$ (در این فرمول I و V ثابتند) q ← به Q بستگی دارد.

$Q=A\bar{y}=St\bar{y}$ که در ناحیه ۱ و ۳ ، $\bar{y}$ و t ثابت است، فقط S تغییر می‌کند در نتیجه خطی تغییر می‌کند

اما در ناحیه $2Q$، ۲ متغییر از جنس طول دارد (t ثابت است) در نتیجه تغییرات به صورت سهمی است.

در مقاطع افقی $\bar{y}$ تغییری نمی‌کند ولی در مقطع عمودی فاصله تغییر می‌کند.




شکل (۸-۲)

از نظر تعادل نیرویی ۲ نیروی F همدیگر را خنثی می‌کنند در نتیجه تعادل نیرویی برقرار است ولی یک کوپل ایجاد می‌کنند P وV باید در فاصله‌ای باشند که کوپل Tرا خنثی کند(توجه:P=V)

e فاصله خواسته شده است

q نیروی برشی بر واحد طول است و مساحت زیر نمودار q ، نیرو می‌دهد ( $\int qds$ )

$$F = \frac{1}{2} q_a b$$

کوپل=Fh

$$\left. \begin{aligned} Fh &= \frac{q_a b}{2}.h \\ q_a &= \frac{VQ_a}{I} = \frac{V(bt)\frac{h}{2}}{I} \end{aligned} \right\} \rightarrow \text{کوپل} = Pe \rightarrow Pe = \frac{VQbh}{2I} \rightarrow \quad \boxed{e = \frac{b^2 h^2 t}{4I}}$$

**فرمول** (۵ -۲)

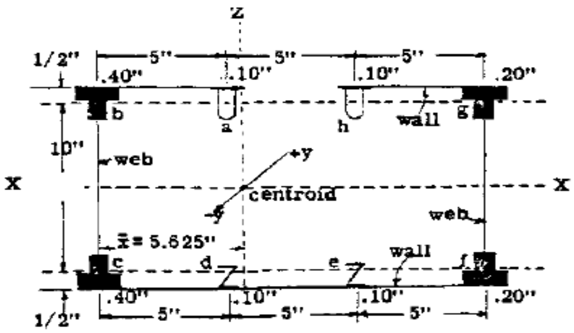
اگر تقارن داشتیم e همواره روی محور تقارن قرار می‌گیرد.

نکته :مرکز برش نقطه‌ای است که اگر برآیند بارهای خارجی از آن رد شود پیچش صفر است.

نکته : برای تعیین مرکز برش ابتدا باید جریان برش را مشخص کرده سپس بر حسب گشتاورها با صفر کردن پیچش مرکز برش پیدا می‌شود.

استیرینگر باعث تقویت پوسته می‌شود و گشتاور را نیز تحمل می‌کند.

مثال ( ۲- ۲ ) : شکل زیر یک مقطع را نشان می‌دهد که تعدادی فلنج به پوسته وصل شده است، تعداد و شکل فلنجها در شکل زیر آمده است مرکز برش را برای این مقطع بیابید.




$$\begin{cases} A_a = A_d = A_e = A_h = 0.1in^2 \\ A_b = A_c = 0.4in^2 \\ A_g = A_f = 0.2in^2 \end{cases}$$

**شکل (۹-۲)**

چون مساحت‌ها نسبت به Z متقارن‌اند مرکز سطح روی

این محور است اما باید بررسی شود که در کجای آن است:

$$\bar{z} = \frac{\sum_{i=1}^{n} A_i Z_i}{\sum_{i=1}^{n} A_i} = \frac{2\left[7.5A_b + 2.5A_a - 2.5A_h - 7.5A_g\right]}{2\left[A_a + A_b + A_h + A_g\right]} \Rightarrow \bar{z} = 1.875$$

اگر در شکل تقارن داشتیم مرکز برش روی محور تقارن قرار می‌گیرد اما در این جا مقطع متقارن نیست. از نظر توزیع جریان برش غیرمتقارن است زیرا در بالا باز و در پایین بسته است.

وسط محور $z$ را $y'$ می‌گیریم حال ممان‌های اینرسی را نسبت به محورهای مرکزی حساب می‌کنیم، چون ابعادفلنج در مقایسه با ابعاد کل مقطع ناچیز است داریم:

$$\mathrm{I}_0 = 0 \Rightarrow$$

$$\begin{cases} I_y = \sum_{i=1}^{n} A_i z_i^2 = 64.4\ in^4 \\ I_z = \sum_{i=1}^{n} A_i y_i^2 = 40\ in^4 \end{cases}$$

$$I_{\acute{z}} = I_z + \sum \mathrm{A}\bar{\mathrm{y}}^2 = \mathrm{I}_0 + \sum \mathrm{A_i d^2}$$

$$I_{yz} = 0$$

مرکز برش جایی است که اگر بار خارجی در آن وارد شود پیچش نداریم.

حال یک بار خارجی به صورت پارامتری در نظر می‌گیریم (مقدار آن اهمیت ندارد چون از مرکز برش می‌گذرد و کوپل آن صفر است.)

$$q_x = -\frac{V_y Q_z}{I_z} - \frac{V_z Q_y}{I_y}$$

اگر فقط $V_y$ اعمال شود:

$$q_x = -\frac{V_y Q_z}{I_z}$$

$$q_a = 0$$

$$q_{ab} = q_a - \frac{V_y Q_a}{I_z} \overset{Q_a = 0.1\times 5}{\Rightarrow} q_{ab} = -0.5\frac{V_y}{I_z}$$

$$q_{bc} = q_{ab} - \frac{V_y Q_b}{I_z} = -2.5\frac{V_y}{I_z}$$

$$q_{cd} = q_{bc} - \frac{V_y Q_c}{I_Z} \overset{Q_c = -5\times 0.4}{\Rightarrow} q_{cd} = -0.5\frac{V_y}{I_z}$$

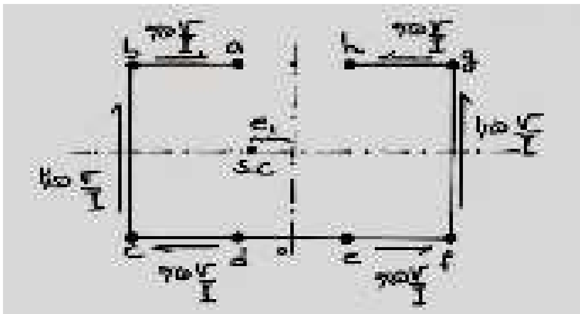
$$q_{de} = q_{cd} - \frac{V_y Q_d}{I_z} \overset{Q_d = -5\times 0.1}{\Rightarrow} q_{de} = 0$$

$$q_{ef} = q_{de} - \frac{V_y Q_e}{I_z} = 0.5\frac{V_y}{I_z}$$

$$q_{fg} = q_{ef} - \frac{V_y Q_f}{I_z} = 1.5\frac{V_y}{I_z}$$

$$q_{gh} = q_{fg} - \frac{V_y Q_g}{I_z} = 0.5\frac{V_y}{I_z}$$

$$q_{ha} = q_{gh} - \frac{V_y Q_h}{I_z} = 0.5\frac{V_y}{I_z} - \frac{V_y}{I_z}\left(0.1\times 5\right)$$




شکل (۱۰-۲)

$$\sum M_{sc} = 0$$

$$\Rightarrow \left(-0.5\frac{V}{I}\right)\times 5 - \left(2.5\frac{V}{I}\times 10\right)(7.5-e_1) + \left(1.5\frac{V}{I}\times 5\right)\times 5 + \left(1.5\frac{V}{I}\times 10\right)(7.5+e_1) +$$

$$\left(0.5\frac{V}{I}\times 5\right)\times 5 - \left(0.5\frac{V}{I}\times 5\right)\times 5 = 0 \Rightarrow e_1 = 1.875$$

اگر فقط $V_z$ اعمال شود :

$$q_x = -\frac{V_z Q_y}{I_y}$$

$$q_a = 0$$

$$q_{ab} = q_a - \frac{V_z Q_a}{I_y} = -0.0625\frac{V_z}{I_y}$$

$$q_{bc} = q_{ab} - \frac{V_z Q_b}{I_y} = -2.3125\frac{V_z}{I_y}$$

$$q_{cd} = q_{bc} - \frac{V_z Q_c}{I_y} = -4.5625\frac{V_z}{I_y}$$

$$q_{de=}q_{cd} - \frac{V_z Q_d}{I_y} = -4.625\frac{V_z}{I_y}$$

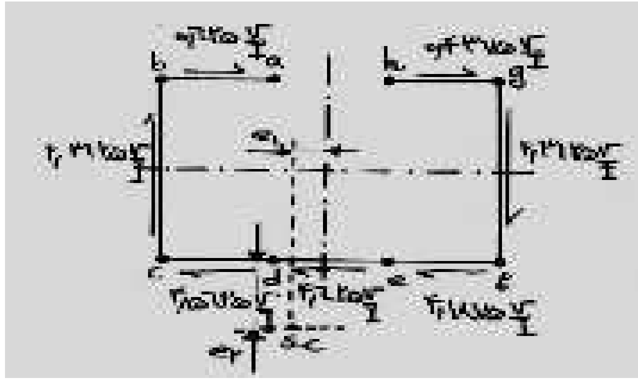
$$q_{ef} = q_{de} - \frac{V_z Q_e}{I_y} = -4.1875$$

$$q_{fg} = q_{ef} - \frac{V_z Q_f}{I_y} = -2.3125\frac{V_z}{I_y}$$

$$q_{gh} = q_{fg} - \frac{V_z Q_g}{I_y} = 0.437\frac{V_z}{I_y}$$

$$q_{ha} = 0$$

شکل (۱۱-۲)



$\sum M_{sc} = 0 \;\rightarrow\; l_2 = 6.43''$

توجه: وقتی مقطع پیچش ندارد $\sum M$ حول هر نقطه دلخواه مثل j صفر می شود ( $\sum M_j = 0$ )

نکته: نقطه A را در ابتدا در هر جای دلخواه می توانیم در نظر بگیریم. بعد از انجام محاسبات محل دقیق آن معلوم می شود.

# تنش برشی ناشی از پیچش- مقاطع غیر مدور:

$$\boxed{\tau = \frac{Tl}{j} \;\rightarrow\; \tau_{max} = \frac{Tc}{j} \;\; or \;\; \frac{TR}{j}}$$

**فرمول (۱ -۳)** فاصله ی نقطه ی مورد نظر تا مرکز تنش برشی : L

$$\boxed{\theta = \frac{Tl}{Gj}}$$

**فرمول (۲ -۳)** طول عضو سازه ای : L

تنش برشی به صورت خطی از مرکز به سمت محیط تغییر می کند و به المان بستگی ندارد.

برای مقاطع دایره ای جدار نازک $j = 2\pi t R^3$

**فرمول (۳ -۳)**

برای مقاطع مدور توخالی $j = \frac{\pi}{2}\left(R^4 - r^4\right)$

**فرمول (۴ -۳)**

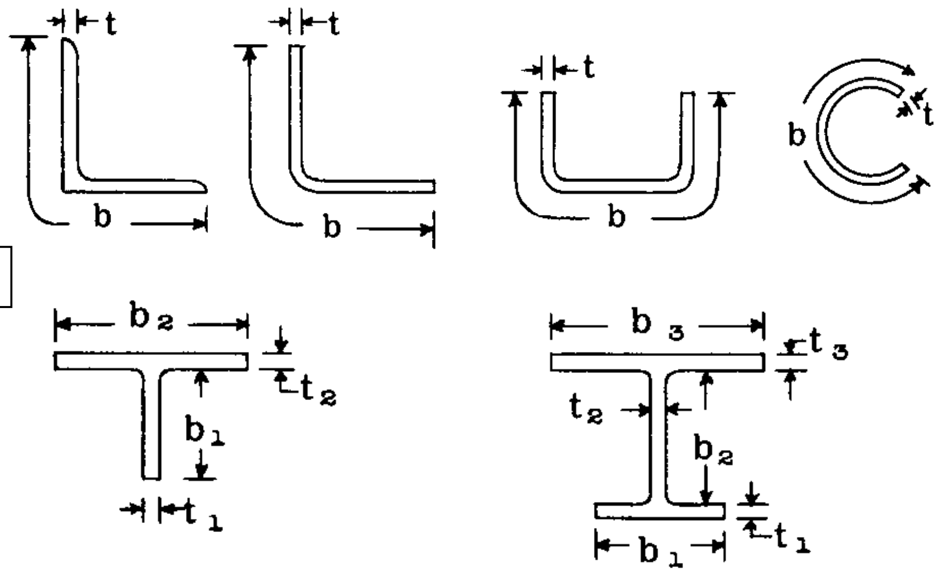
| $b/t$ | $C_1$ | $C_2$ |
|---|---|---|
| ۱ | ۰.۲۰۸ | ۰.۱۴۰۶ |
| ۱.۲ | ۰.۲۱۹ | ۰.۱۶۶۱ |
| ۱.۵ | ۰.۲۳۱ | ۰.۱۹۵۸ |
| . | . | . |
| . | . | . |
| . | . | . |
| ۵ | ۰.۲۹۱ | ۰.۲۹۱ |
| ۱۰ | ۰.۳۱۲ | ۰.۳۱۲ |
| ∞ | ۰.۳۳۳... | ۰.۳۳۳... |

## در مقاطع مستطیلی:

$$\left.\begin{array}{l}\begin{cases}\tau_{max}=\tau_{b/2}=\dfrac{T}{c_1bt^2}\\ \theta=\dfrac{Tl}{c_2bt^3G}\end{cases}\\ \text{if}\left(b/t\to\infty\right)\to c_1=c_2=\dfrac{1}{3}\\ \begin{cases}\tau_{max}=\dfrac{3T}{bt^2}\\ \theta=\dfrac{3Tl}{bt^3G}\;;\; j=\dfrac{1}{3}bt^3\quad if\;\dfrac{b}{t}>>1\end{cases}\end{array}\right\}$$

فرمول (۵ -۳ )

برای مقاطع جدار نازک باز مقادیر b و t را به ترتیبی که در شکل های زیر مشخص است یافته و از معادلات داده شده در زیر استفاده می کنیم:



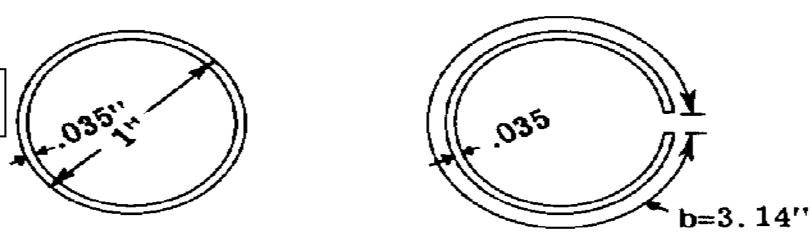

**شکل (۱-۳)**

$$j=\sum \frac{1}{3} b_i t_i^3 \quad \rightarrow \quad \begin{cases} \tau_{max}=\dfrac{T t_i}{j} \\ \theta=\dfrac{Tl}{Gj} \end{cases}$$ **فرمول (۶-۳)**

مثال ( ۱- ۳ ) :

تفاوت رفتار دو قطعه زیر در مقابل پیچش چیست؟

**شکل (۲-۳)**

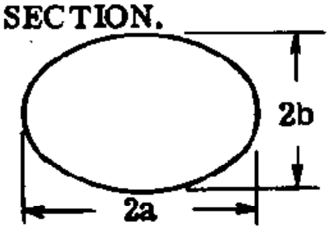
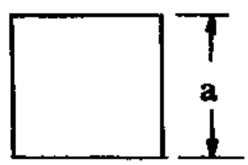
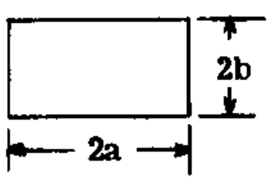
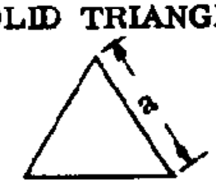



$$\begin{cases} j_1=2\pi t r^3=0.02474 \\ j_2=\dfrac{1}{3} b t^3=0.000045 \end{cases} \rightarrow \quad \theta=\frac{Tl}{Gj} \rightarrow \quad \frac{\theta_2}{\theta_1}=\frac{j_1}{j_2}=550$$

با این مثال مشاهده می کنیم که یک شیار کوچک چه تأثیر بزرگی روی سختی پیچشی دارد.

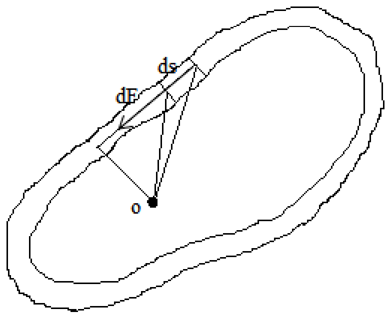
## FORMULAS FOR TORSIONAL DEFLECTION AND STRESS

$\Theta = \frac{T}{KG}$ = twist in radians per inch of length.
T = Torsional Moment (in. lb.).
G = Modulus of Rigidity.
K ($in^4$) From Table.

| SECTION | K | FORMULA FOR SHEAR STRESS |
|---|---|---|
| SOLID ELLIPITICAL SECTION.   | $K = \frac{\pi a^3 b^3}{a^2 + b^2}$ | $\tau MAX = \frac{2T}{\pi ab^2}$ (at ends of minor axis). |
| SOLID SQUARE.   | $K = 0.141 a^4$ | $\tau MAX = \frac{T}{0.208 a^3}$ (at midpoint of each side). |
| SOLID RECTANGLE.   | $K = ab^3\left[\frac{16}{3} - 3.36\frac{b}{a}\left(1 - \frac{b^4}{12a^4}\right)\right]$ | $\tau MAX = \frac{T(3a - 1.8b)}{8a^2b^2}$ midpoint of longside. |
| SOLID TRIANGLE.   | $K = \frac{1.73 a^4}{80}$ | $\tau MAX = \frac{20T}{a^3}$ at midpoint of side. |

شکل (۳-۳)

## پیچش در مقاطع جدار نازک بسته :




شکل (۴-۳)

$$dF=\tau(tds)\xrightarrow{t\tau=q}dF=qds$$

$$\left.\begin{array}{l}dM_o=dF.h=qds.h\\ hds=2dA\end{array}\right\}\rightarrow dM_o=2qdA\rightarrow\sum M_o=0$$

$$\rightarrow\int dM_o=T\rightarrow\int_A 2qdA=T\rightarrow T=2Aq$$

$$\boxed{\tau=\frac{q}{t}=\frac{T}{2At}}$$

فرمول (۷ -۳)

## محاسبه زاویه پیچش:

$$dU=\frac{1}{2}dF.\delta(1)$$

$$\delta=\ell\Gamma$$

$$if\ :\ell=1\rightarrow\delta=\Gamma=\frac{\tau}{G}=\frac{q}{tG}$$

$$(1)\rightarrow\frac{1}{2}q\delta ds\xrightarrow{q=\frac{T}{2A}}dU=\frac{T^2}{8A^2Gt}ds\rightarrow U=\oint\frac{T^2}{8A^2Gt}ds$$

تئوری کاستلیانو $\rightarrow\theta=\frac{\partial U}{\partial T}\rightarrow\oint\frac{T}{4A^2Gt}ds$

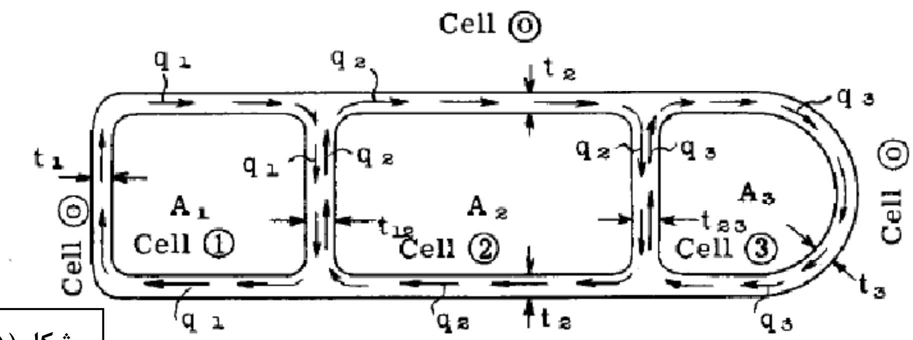
□ طول $\rightarrow\theta=\frac{T\ell}{4A^2G}\oint\frac{ds}{t}$

$$T=2Aq\xrightarrow{q=cte}\theta=\frac{q\ell}{2AG}\oint\frac{ds}{t}$$

$$\boxed{\theta=\frac{q\ell}{2AG}\sum\frac{\ell_i}{t_i}}$$

فرمول (۸ -۳)

## مقاطع بسته چند سلولی جدار نازک:




شکل (۵-۳)

اگر ضخامت در کل مقطع برابر باشد داریم :

$$t_1 = t_{12} = t_2 = t_{23} = t_3 = t$$

$$T = T_1 + T_2 + T_3$$

$$T_1 = 2A_1q_1 \quad , \quad T_2 = 2A_2q_2 \quad , \quad T_3 = 2A_3q_3$$

$$T = 2A_1q_1 + 2A_2q_2 + 2A_3q_3$$

از پیوستگی استفاده می کنیم : طول تیر = L

$$\theta_3 = \theta_2 = \theta_1 = \theta$$

$$\theta_1 = \frac{\ell}{2A_1G}\int \frac{q_i ds}{t}, \theta_2 = \frac{\ell}{2A_2G}\int \frac{q_i ds}{t}, \ldots$$

$$\theta_1 = \frac{\ell}{2A_1Gt}\int [q_1\ell_{10} + (q_1 - q_2)\ell_{12}]$$

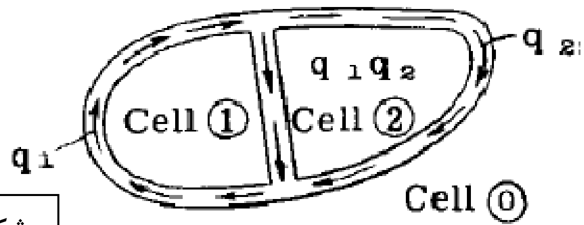
$$\theta_2 = \frac{\ell}{2A_2Gt}\int [q_2\ell_{20} + (q_2 - q_1)\ell_{12} + (q_2 - q_3)\ell_{23}]$$

$$\theta_3 = \frac{\ell}{2A_3Gt}\int [q_3\ell_{30} + (q_3 - q_2)\ell_{23}]$$

فرمول (۹ -۳)

## برای مقاطع دو سلولی:

توزیع تنش و زاویه پیچش در مقاطع دو سلولی بسته جدار نازک :



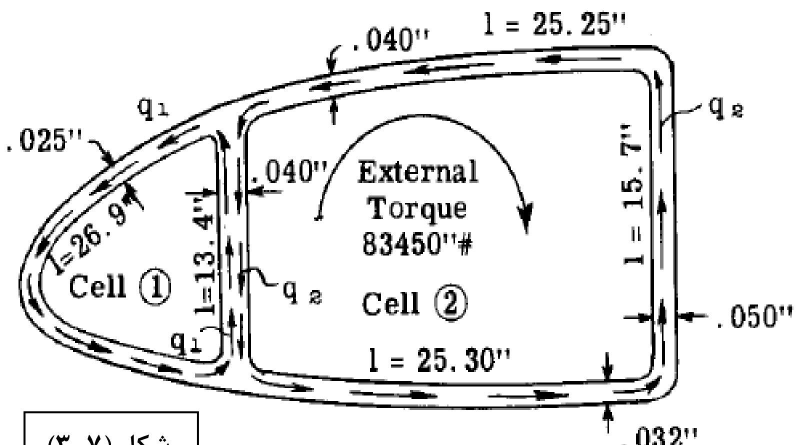

شکل (۶-۳)

$$a_{10} = \frac{\ell_{10}}{t_{10}} \quad , \quad A = A_1 + A_2$$

$$\left.\begin{aligned} q_1 &= \frac{T}{2}\left[\frac{a_{20}A_1 + a_{12}A}{a_{20}A_1^2 + a_{12}A^2 + a_{10}A_2^2}\right] \\ q_2 &= \frac{T}{2}\left[\frac{a_{10}A_2 + a_{12}A}{a_{20}A_1^2 + a_{12}A^2 + a_{10}A_2^2}\right] \end{aligned}\right\}$$ فرمول (۱۰ -۳)

مثال ( ۲- ۳ ) :

جریان برش را در مقطع زیر بدست آورید؟




شکل (۷-۳)

$$T = 83450\ lb_{in}$$
$$A_1 = 105.8\ in^2$$
$$A_2 = 387.4\ in^2$$

$$a_{ij} = \frac{\ell_{ij}}{t_{ij}} \quad ,a_{10} = 26.9 \ / \ 0.025 = 1075 \qquad ,a_{12} = 335$$

$$a_{20} = \sum \frac{\ell}{t} = \frac{25.25}{0.04} + \frac{15.7}{0.05} + \frac{25.3}{0.032} = 1735, \ \ L = 1$$

$$\theta_1 = \frac{1}{2A_1G}\int [q_1 a_{10} + (q_2 - q_1) a_{12}]$$

$$\theta_1 = \frac{1}{2G\,(105.8)}\int [-q_1(1075) + (q_2 - q_1)(335)]$$

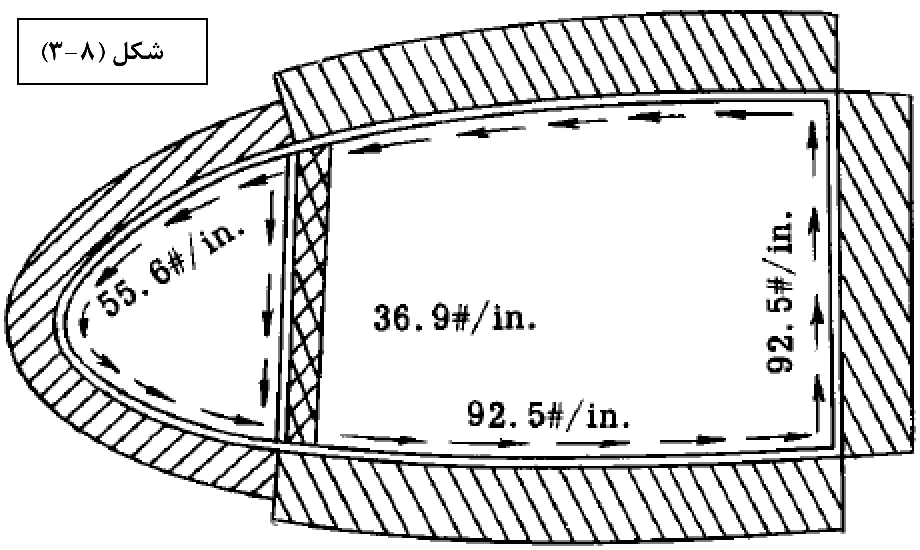
$$\theta_2 = \frac{1}{2G\,(387.4)}\int [-(1735)q_2 - (q_2 - q_1)(335)]$$

پیوستگی $\rightarrow \theta_1 = \theta_2 \rightarrow -14.195\ q_1 + 8.505\ q_2 = 0 \quad (1)$

$$T = 2A_1q_1 + 2A_2q_2 \quad \rightarrow \quad 83450 = 2 * 105.8 * q_1 + 2 * 387.4 * q_2 \qquad (2)$$

$(1) \& (2) \rightarrow q_1 = 55.6\ lb / in \qquad \& \qquad q_2 = 92.5 lb / in$

شکل (۸-۳)



## جریان برش در مقاطع بسته جدار نازک تحت نیروی برشی

- راه حل مقاطع بسته :

۱) فرض می کنیم جریان برش در یک نقطه برابر صفر باشد به عبارت دیگر در آن نقطه مقطع زده و سلول بسته را به مقطع باز تبدیل می کنیم .

۲) محاسبه جریان برش در مقطع باز با استفاده از روابط قبلی ( k-method و روش محورهای اصلی ) بدست می آوریم. با محاسبه جریان برشی اولیه ، شرایط تعادل نیروها باید برقرار باشند.اما تعادل گشتاورها لزوماً برقرار نیست.

۳) محاسبه لنگر نیروهای حاصل ار جریان برش، حول مرکز برش مقطع ( تعین محل مرکز برش باید انجام شود)

۴) توزیع این لنگر اضافی در جهت عکس توسط یک جریان برش ثابت که از رابطه $T = 2Aq_0$ محاسبه می گردد.

۵) محاسبه برآیند جریان برشی در مقطع

- برای طراحی پوسته به تنش نیاز داریم و تنش هم از جریان برش بدست می آید.

## مراحل محاسبه مرکز برش

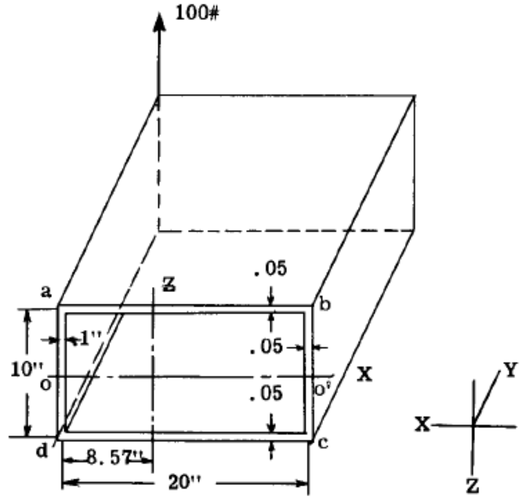
1) فرض می کنیم جریان برش در نقطه (یا نقاطی) از مقطع صفر باشد.
2) محاسبه جریان برش در مقطع باز شده
3) محاسبه میزان دوران مقطع در اثر این جریان برش با استفاده از رابطه : $\theta = \dfrac{l}{2AG}\int \dfrac{qds}{t}$
4) اعمال دورانی در خلاف جهت و محاسبه جریان برشی که این دوران را تامین می کند. در این مرحله هم از رابطه $\theta = \dfrac{l}{2AG}\int \dfrac{qds}{t}$ استفاده می شود.
5) محاسبه محل اثل نیروهای ناشی از جریان برش کل (مرکز برش) با در نظر گرفتن نقطه فرضی $S.C$ و تعیین $e$ طوری که $\sum M_{SC} = 0$ شود.

مثال ( ۳- ۳ ) :

تیری با سطح مقطع مستطیلی تحت بار برشی lb۱۰۰ قرار گرفته است . مطلوبست :

الف ) تعیین مرکز برش این مقطع

ب ) جریان برش کامل در مقطع




شکل (۹-۳)

## مراحل ۱ و ۲ :

$$\bar{z}=\frac{\sum A_i z_i}{\sum A_i}$$

$$q_x=\frac{-V_y Q_z}{I_z}$$

$$I_z=\frac{0.1+10^3}{12}+\frac{0.5+10^3}{12}+2\left[\frac{0.5\times 20}{12}+0.5\times 20\times 5^2\right]\rightarrow I_z=62.5in^4$$

$$q_A=0-\frac{-V_y Q_{OA}}{I_z}=\frac{-V_y}{I_z}\left(0.1\times 5\times 5/2\right)=-1.25\frac{V_y}{I_z}$$

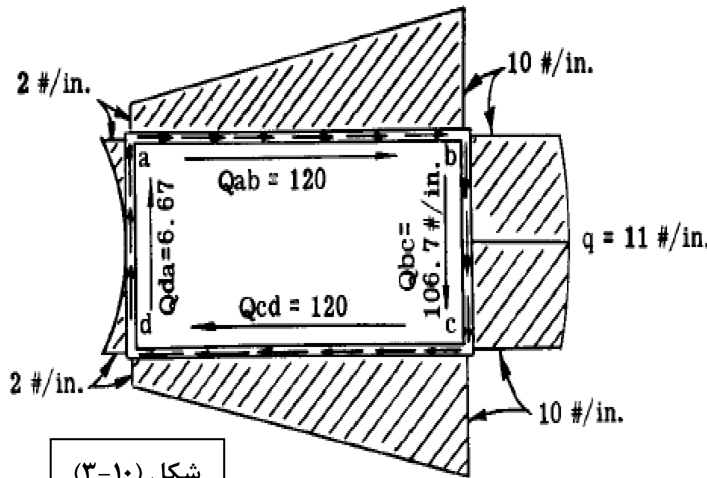
$$q_B=q_A-\frac{-V_y Q_{AB}}{I_z}=\frac{-V_y}{I_z}\left(1.25+0.05\times 20\times 5\right)=-6.25\frac{V_y}{I_z}$$

$$q_{O'}=q_B-\frac{-V_y Q_{BO'}}{I_z}=-6.875\frac{V_y}{I_z}$$

$$q_C=q_B=-6.25\frac{V_y}{I_z}$$

$$q_D=q_A=-1.25\frac{V_y}{I_z}$$

برای در نظر گرفتن $V_y$ موازی محور zها پروفیل خطی و عمود بر آن سهمی است. معادله این خط را یافته و می بینیم که در چه فاصله ای به $q_0$ می رسد.




شکل (۱۰-۳)

## مرحله ۳ و۴ –زاویه دوران (کل هدف این است که جسم نچرخد)

$$\theta = \frac{l}{2AG}\int \frac{qds}{t}$$

$$1 \rightarrow S = \frac{1}{3}ab$$

$$2 \rightarrow S = \frac{2}{3}ab$$

$$\theta = \frac{l}{2AG}\left[\begin{array}{l} \frac{1}{3}\left(5\times 1.25\frac{V_y}{I_z}\right)\times 0.1 + \frac{1}{2}\left(1.25\frac{V_y}{I_z} + 6.25\frac{V_y}{I_z}\right)\times 20\times\frac{1}{0.05} \\ +\left(6.25\frac{V_y}{I_z}\times 5\right)\times\frac{1}{0.05} + \frac{2}{3}\left(6.875 - 6.25\right)\times 5\times\frac{1}{0.05} \end{array}\right]\times 2$$

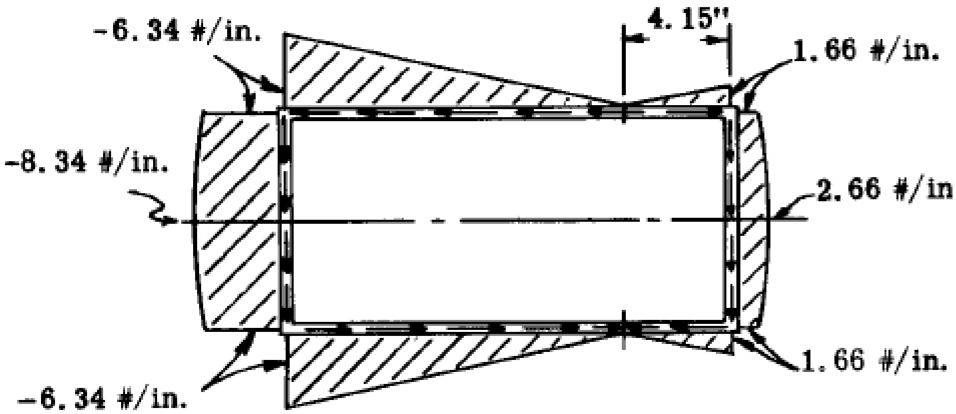
$$\theta = \frac{l}{2AG}\left(4375\right)\frac{V_y}{I_z}$$

$$\theta = \frac{l}{2AG}\left(4375\right)\frac{V_y}{I_z} = \theta = \frac{l}{2AG}\int \frac{q_0 ds}{t}$$

$$\rightarrow q_0\left[\frac{10}{0.1} + \frac{20}{0.05} + \frac{10}{0.05} + \frac{20}{0.05}\right] = 4375\frac{V_y}{I_z} \rightarrow q_0 = 3.977\frac{V_y}{I_z}$$

این فاصله را می توان از نوشتن معادله خط در قسمت قبل و تلاقی دادن آن با مقدار $q_0$ پیدا کرد.

شکل (۱۱-۳)



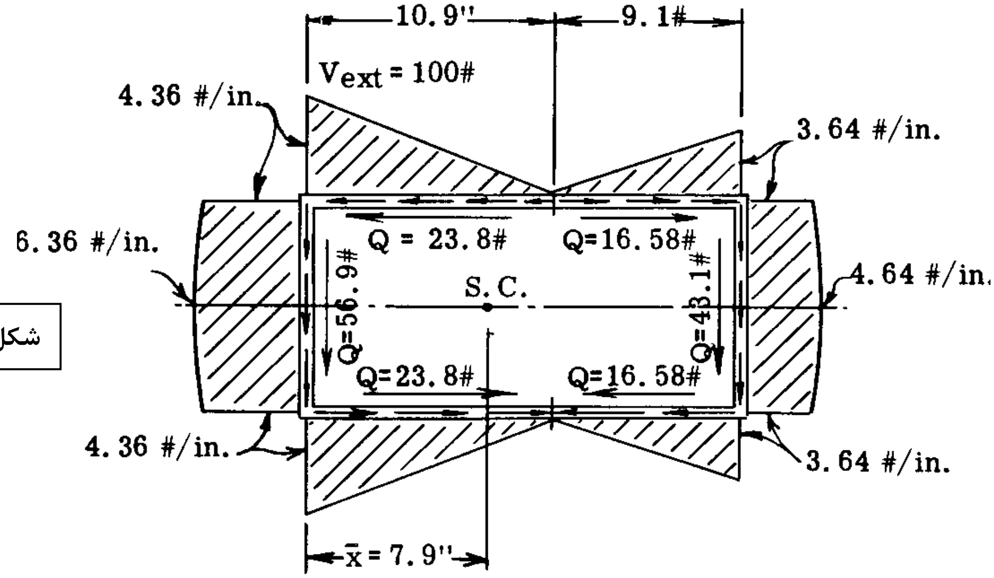

## مرحله ۵) تعیین محل مرکز برش

تعادل نیروها باید برقرار باشد که برقرار است. $\sum F_z = 0$

$$\sum F_y = 35.5625\frac{V_y}{I_z} + 26.9375\frac{V_y}{I_z} = 62.5\frac{V_y}{I_z} \rightarrow \sum F_y = V_y$$

$$\sum M_{SC} = 0 \rightarrow 35.5625\frac{V_y}{I_z} \times e - 26.9375\frac{V_y}{I_z}(20 - e)$$

$$+(14.875 - 10.3625)\frac{V_y}{I_z} \times 10 = 0$$




شکل (۱۲-۳)

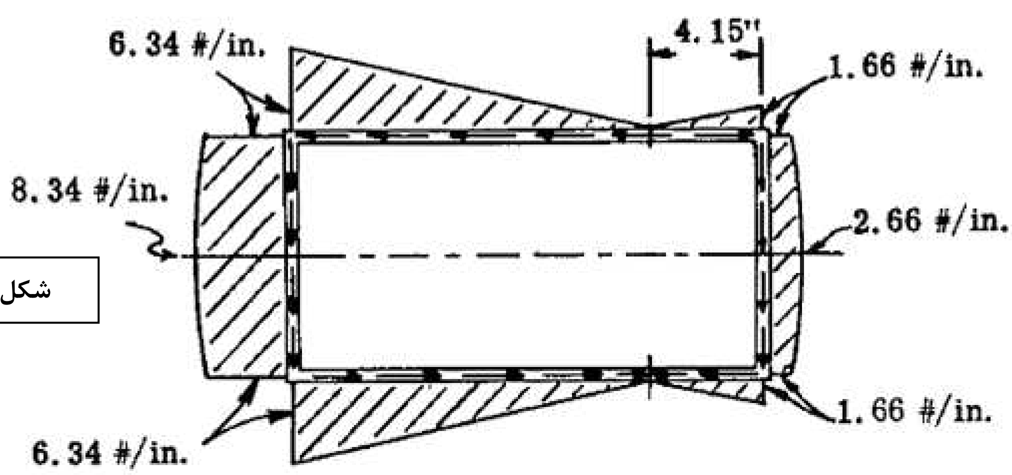
## مرحله ۶) توزیع نهایی جریان برش

$M = V \times e = 790\,lb.in$ پادساعتگرد

$T = -790\,lb.in$ ساعتگرد

$T = 2Aq_0^{'} \rightarrow q_0^{'} = -1.98\,{}^{lb}\!/_{in}$

$\frac{V_y}{I_z} = \frac{100}{62.5} = 1.6$

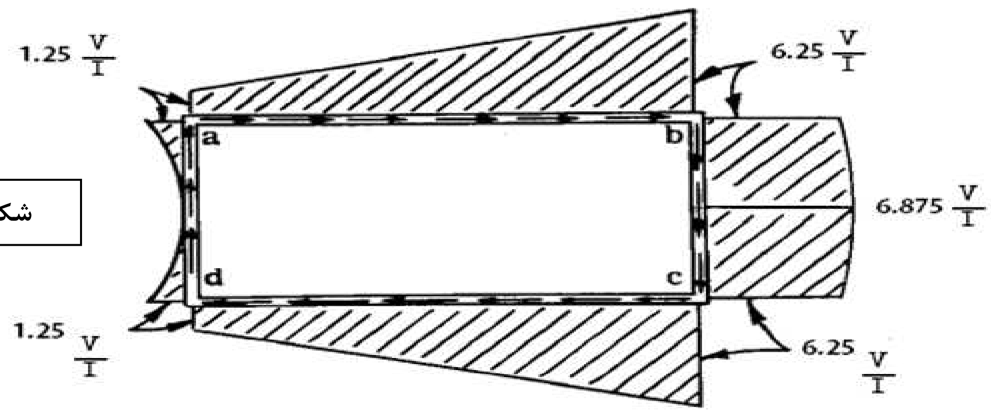



شکل (۱۳-۳)

توزیع نهایی جریان برش

## راه حل دوم: بدون استفاده از مرکز برش

با توجه به حل قسمت قبل برای توزیع اولیه با فرض صفر بودن جریان برش در نقطه Oداشتیم.




شکل (۱۴-۳)

توزیع اولیه جریان برش

### اکنون با توجه به شکل بالا و توزیع جریان برش، نیروی برشی هر قسمت را محاسبه می کنیم.

$$F_{ab} = F_{dc} = \left(1.25 + 6.25 \big/ 2\right)\frac{V}{I}20 = 75\frac{V}{I}$$

$$F_{bc} = \left(6.25\frac{V}{I}\times 10\right) + \frac{2}{3}\left(6.25\frac{V}{I}\times 10\right) = 66.67\frac{V}{I}$$

$$F_{ad} = \frac{2}{3}\left(1.25\frac{V}{I}\times 5\right) = 4.167\frac{V}{I}$$

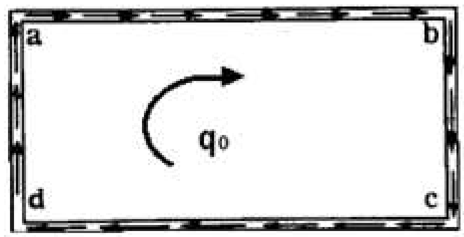
### بررسی تعادل نیروها و گشتاورها:

$$\sum F_z = 0$$

$$\sum Fy = (66.67 - 4.167)\frac{V}{I} = 62.5\frac{V}{I} \quad , \quad I = 62.5 \rightarrow \sum Fy = V \text{ خارجی}$$

باید تعادل ممان نیز در مقطع وجود داشته باشد،پس گشتاور ها را حول نقطه d می نویسیم:

$$\sum M_d = (75\frac{V}{I}\times 10) + \left(66.67\frac{V}{I}\times 20\right) = 2083.4\frac{V}{I} \quad \rightarrow T = -2083.4\frac{V}{I}$$




شکل (۱۵-۳)

جریان برش حاصل از گشتاور

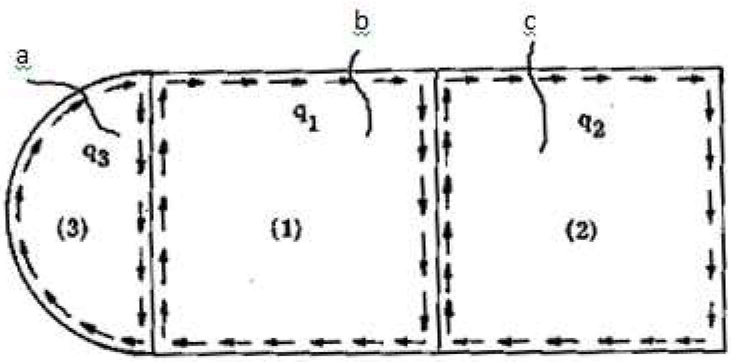
$$q_0 = \frac{T}{2A} = \frac{-2083.4 V/I}{2(200)} = -5.2085\frac{V}{I}$$

با اضافه کردن جریان برش حاصل از گشتاور به جریان برش اولیه، مقادیر و شکل جریان برش نهایی که در قسمت قبل حل کردیم، حاصل می شود.

## جریان برش در مقطع بسته جدار نازک چند سلولی:

در شکل زیر یک مقطع بال که شامل چند سلول است را مشاهده می کنیم. این مقطع نسبت به محور افقی متقارن می باشد. برای محاسبه جریان برش در هر سلول یک مقطه می زنیم و جریان را در آن قسمت برابر صفر می گیریم. گام دوم محاسبه توزیع جریان اولیه در هر سلول است. در ادامه مانند حالت قبل به استخراج گشتاور نیرو های حاصل از جریان برش و سپس توزیع گشتاور اضافی حاصل از رابطه پیچش می پردازیم.

$$\begin{cases} q_a = 0 \\ q_b = 0 \\ q_c = 0 \end{cases}$$




جریان برشدر مقطع چند سلولی

شکل (۱۶-۳)

مرحله ی ۱) در هر مقطع سلول یک برش می زنیم.

مرحله ی ۲) محاسبه ی توزییع جریان برش در هر سلول.

مرحله ی ۳) لنگر حاصل از جریان برشحوی مرکز برش.

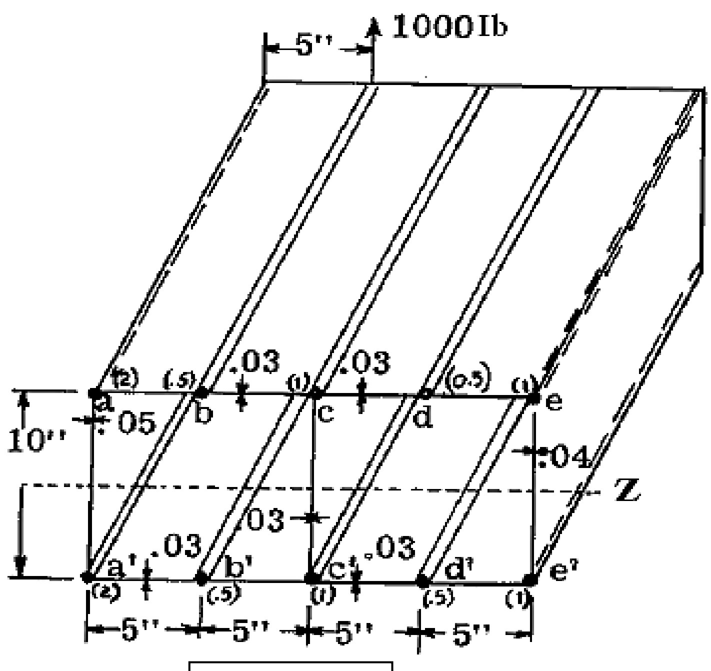
مرحله ی ۴) توزیع این لنگر اضافی در خلاف جهت ، توسط چند جریان برش حاصل از رابطه ی برش

باید توجه داشت که در مقطع چند سلولی شرایط زیر اعمال شود:

$$\left.\begin{array}{ll}(1) & T = 2A_1q_1 + 2A_2q_2 + \cdots + 2A_nq_n \\ (2) & \theta = \theta_1 = \theta_2 = \theta_3 = \cdots = \theta_n\end{array}\right\} \quad q_1, q_2, \ldots, q_n = ?$$

مثال ( ۴- ۳ ) :

در شکل زیر یک تیر با مقطع دو سلولی که شامل ۱۰ تقویت کننده است، نشان داده شده است. برای ساده سازی مسئله ضخامت موثر پوسته ها بر مساحت مقطع تقویت کننده ها اضافه نموده ایم. ضخامت پوسته های افقی ۰.۰۳ و سایر پوسته ها در شکل مشخص شدا است. مقطع بال نسبت به محور z متقارن است. به ازای اطلاعات موجود، اگر بارIb ۱۰۰۰ مطابق شکل بر آن وارد شود، جریان برش در مقطع سلول ها چگونه خواهد بود؟



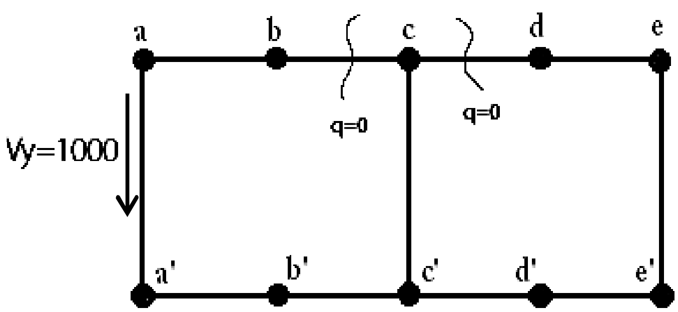

شکل (۱۷-۳)

$$\begin{cases} A_a = A_{a'} = 2in^2 \\ A_b = A_{b'} = A_d = A_{d'} = 0.5in^2 \\ A_c = A_{c'} = A_e = A_{e'} = 1in^2 \end{cases} \quad ; \quad V_y = 1000Ib$$

## روند حل:

$$I_z = \sum A d^2 = 2(5)\times 5^2 = 250\, in^2$$
$$\frac{V_y}{I_z} = \frac{V}{I} = \frac{-1000}{250} = -4\ Ib/in^4$$

## روش اول: بدون استفاده از مرکز برش




شکل (۱۸-۳)

دو قسمت مشخص شده را مقطع می زنیم و $q=0$ قرار می دهیم. اکنون به محاسبه توزیع جریان برش اولیه می پردازیم.

$$q_x = -(V_y k_2 - V_z k_1)Q_z - (V_z k_3 - V_y k_1)Q_y$$
$$I_{yz} = 0 \rightarrow q_x = \frac{-V_y \,.\, Q_z}{I_z}$$

فرض : $q_{cb} = 0$

$$q_x = -(V_y k_2 - V_z k_1)Q_z - (V_z k_3 - V_y k_1)Q_y$$
$$I_{yz} = 0 \rightarrow q_x = \frac{-V_y \,.\, Q_z}{I_z}$$
$$q_{cb} = 0$$

$$q_{ab} = 0 - \frac{V_y . Q_b}{I_z} = 4 * 0.5 * 5 = 10 \ lb / in$$

$$q_{aa'} = q_{ab} - \frac{V_y . Q_a}{I_z} = 10 + 4 * 2 * 5 = 50 \ lb / in$$

$$q_{a'b'} = q_{aa'} - \frac{V_y . Q_{a'}}{I_z} = 10 \, lb / in$$

$$q_{b'c'} = q_{a'b'} - \frac{V_y . Q_{b'}}{I_z} = 10 - 4 * 0.5 * 5 = 0 \ lb / in$$

$$q_{cc'} = 0 - \frac{V_y . Q_c}{I_z} = 4 * 1 * 5 = 20 \ lb / in$$

$$q_{d'e'} = q_{cc'} + q_{b'c'} - \frac{V_y . Q_{d'}}{I_z} = 0 - 4 * 0.5 * 5 = -10 \ lb / in$$

$$q_{e'e} = q_{d'e'} - \frac{V_y . Q_{e'}}{I_z} = -30 \, lb / in$$

$$q_{ed} = q_{ee'} - \frac{V_y . Q_e}{I_z} = -10 \, lb / in$$

$$q_{dc} = q_{ed} - \frac{V_y . Q_d}{I_z} = -10 + 4 * 0.5 * 5 = 0 \ lb / in$$

$$\sum F_z = 0$$

$$\sum F_y = -\left( 50 + 20 + 30 \right) * 10 = -1000 \ lb = V_y$$

$$\theta = \frac{\ell}{2AG} \int \frac{qds}{t}$$

$$\rightarrow \theta_1 = \frac{1}{2AG} [-q_1 (\frac{5}{0.03}) + (10 - q_1)(\frac{5}{0.03}) - (q_1 - 10)(\frac{5}{0.03}) + (50 - q_1)(\frac{10}{0.05})$$

$$-q_1 (\frac{5}{0.03}) + (-q_1 - 20 + q_2)(\frac{10}{0.03})]$$

$$\rightarrow \theta_1 = \frac{1}{2AG} [332 q_2 - 1200 q_1 + 6670]$$

$$\rightarrow \theta_2 = \frac{1}{2AG} [-4170 - 1250 q_2 + 333 q_1]$$

$$\theta_1 = \theta_2$$

$$\rightarrow 1533q_1 - 1583q_2 - 10840 = 0(1)$$

$$and: \sum M_c = 0$$

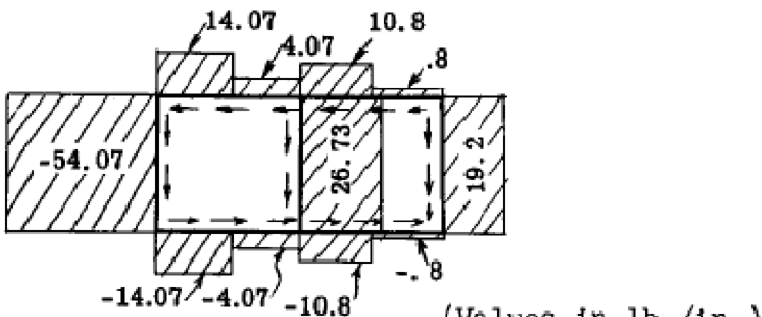
$$\rightarrow -1000*5 + 50*10*10 + 10*5*10 - 10*5*10$$

$$-30*10*10 - 2A_1q_1 - 2A_2q_2 = 0$$

$$\rightarrow 200q_1 + 200q_2 + 3000 = 0$$

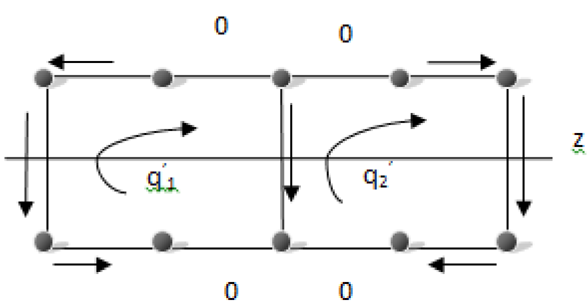
$$\rightarrow q_1 + q_2 + 15 = 0 \quad (2)$$

$$(1) and\ (2) \rightarrow \begin{cases} q_1 = -4.07 & lb/in \\ q_2 = -10.8 & lb/in \end{cases}$$




شکل (۱۹-۳)

## روش دوم: استفاده از مرکز برش



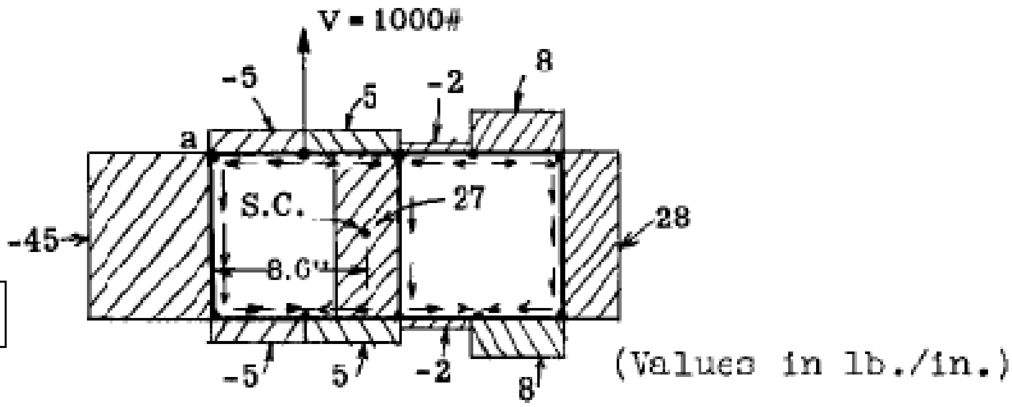

شکل (۲۰-۳)

داشتیم :

$$\theta_1 = \theta_2 = 0$$

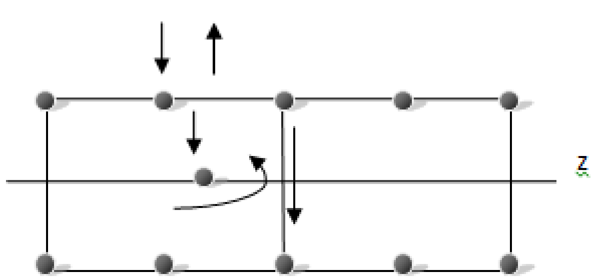
$$\begin{cases} \theta_1 = \dfrac{1}{2A_1G}\left[1200q'_1 - 333q'_2 - 6670\right] = 0 \\ \theta_2 = \dfrac{1}{2A_2G}\left[-333q'_1 + 1250q'_2 + 4170\right] = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} q'_1 = 5 \, {}^{lb}\!/_{in} \\ q'_2 = -2 \, {}^{lb}\!/_{in} \end{cases}$$




شکل (۲۱-۳)

$$\sum F_z = 0$$
$$\sum F_y = -(28+27+45)\times 10 = -1000 = V_y$$
$$\acute{O} \sum M_{a'} = 0$$
$$\rightarrow -27\times 10\times 10 - 28\times 10\times 20 + (2\times 5 - 8\times 5)\times 10 - 1000e = 0$$
$$\rightarrow e = 8.6''$$



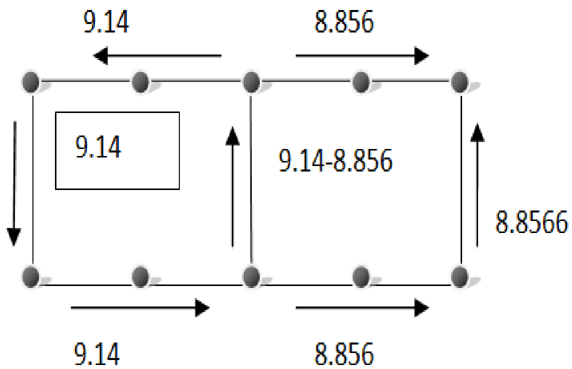

شکل (۲۲-۳)

$$M_X = 1000\times(8.6-5) = 3600\,lb\ .in$$

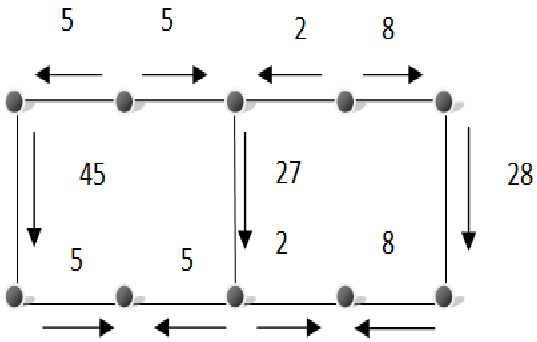
$$1)\begin{cases} T = 2A_1q_1 + 2A_2q_2 = M_x \\ \theta_1 = \theta_2 \end{cases}$$

$$2)\begin{cases} a_{ij} = \dfrac{l_{ij}}{t_{ij}} \end{cases}$$

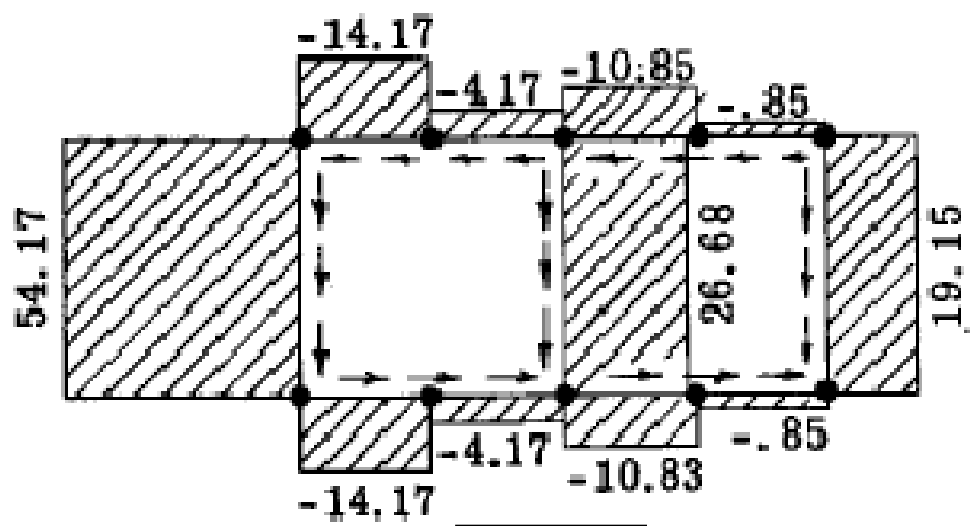
$$\xrightarrow{1 and\ 2} \begin{cases} q_1 = 9.14\,{}^{\text{lb}}\!/_{\text{in}} \\ q_2 = 8.856\,{}^{\text{lb}}\!/_{\text{in}} \end{cases}$$




شکل (۲۳-۳)

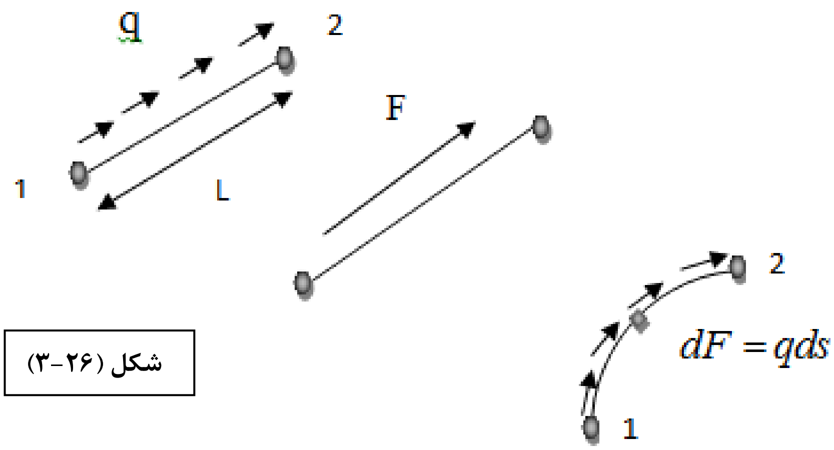



شکل (۲۴-۳)




شکل (۲۵-۳)

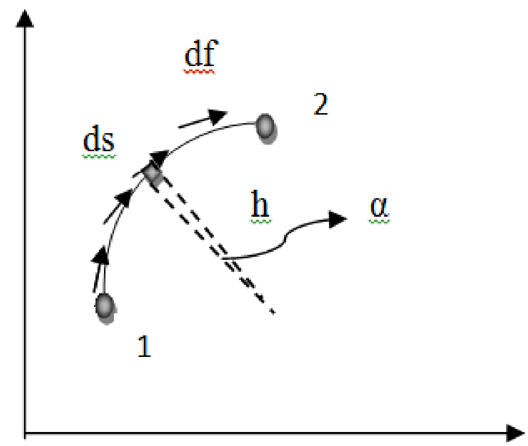
## محاسبه نیرو در مقاطع خمیده :



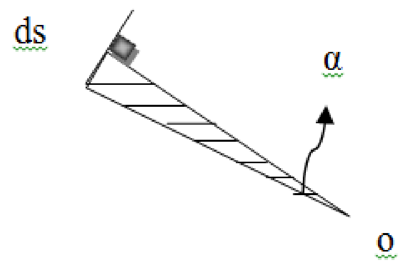

شکل (۲۶-۳)

$$F = q\ell$$
$$F = \int df = \int q ds$$
$$df_x = qds.\cos\alpha ,\ df_y = qds.\sin\alpha$$
$$\begin{cases} f_x = \int_\ell q\cos\alpha ds & ;\cos\alpha = \dfrac{d_x}{d_s} \\ f_y = \int_\ell q\sin\alpha ds & ;\sin\alpha = \dfrac{d_y}{d_s} \end{cases}$$

$$\begin{cases} F_x = \int_1^2 q dx = q(x_2 - x_1) \\ F_y = \int_1^2 q dy = q(y_2 - y_1) \end{cases} \rightarrow F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} = q\sqrt{(x_2 - x_1)^2 - (y_2 - y_1)^2} \quad \boxed{,F = qL_{12}}$$ فرمول (۱۰ -۳)

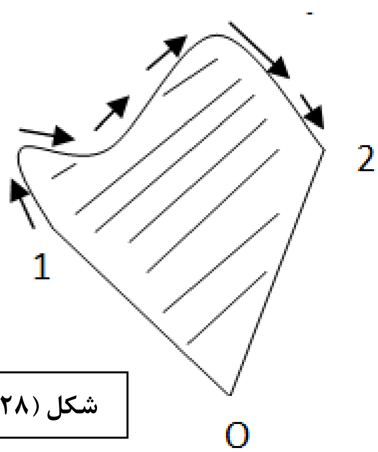



شکل (۲۷-۳)

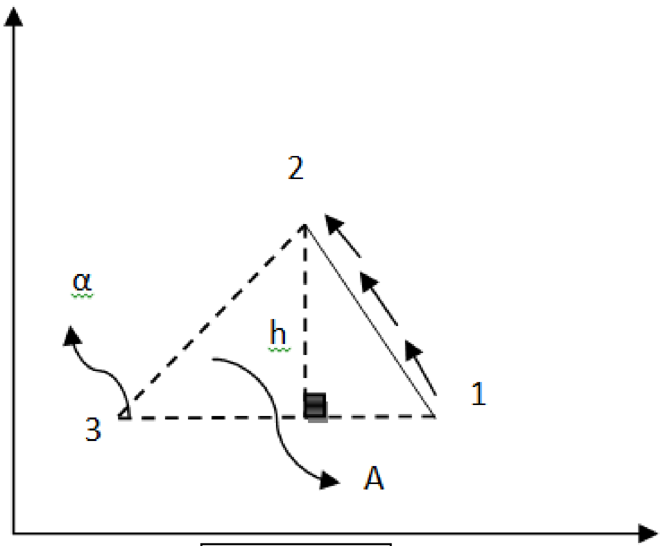



$$\begin{cases} d\overrightarrow{M_o} = \vec{l} \times \overrightarrow{df} = l\,df\,\sin\alpha \\ \qquad l\sin\alpha = h \end{cases}$$

$$\begin{cases} dM_o = h\,df \\ df = q\,ds \end{cases} \rightarrow M_o = \int_{\ell} dM_o = \int_1^2 q\,h\,ds \rightarrow \boxed{M_o = 2q_{12}A_{12}}$$ فرمول (۱۱-۳)




شکل (۲۸-۳)

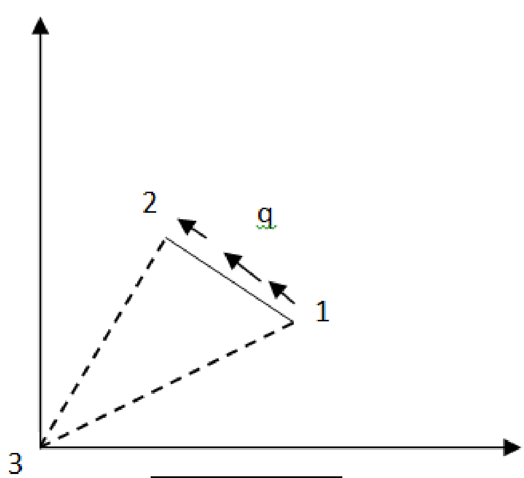



شکل (۲۹-۳)

$$M_3 = 2qA$$
$$\left|\overrightarrow{31}\times\overrightarrow{32}\right| = \left|\left(\overline{31}\right)(32)\sin\alpha\right| = \left(\overline{31}\right)h = 2A$$
$$2A = \left|\overrightarrow{31}\times\overrightarrow{32}\right| = \left|\left(x_1 - x_3\right)\left(y_2 - y_3\right) - \left(x_2 - x_3\right)\left(y_1 - y_3\right)\right|$$

فرمول (۱۲ -۳ )

**اگر نقطه ۳ در مبدا مختصات باشد.**



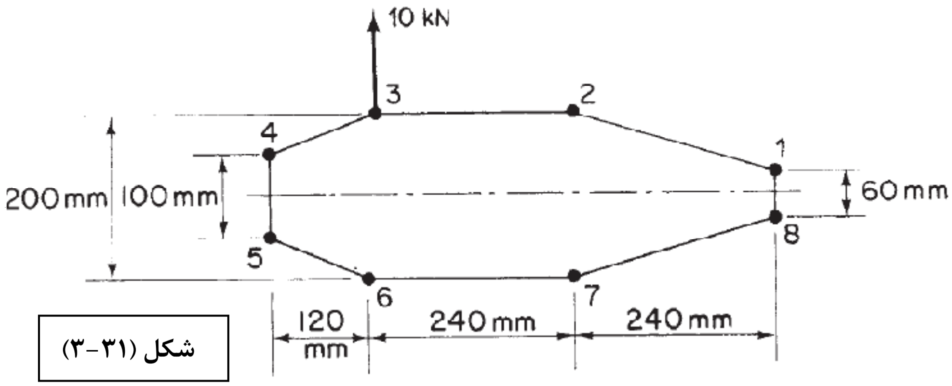

شکل (۳۰-۳)

$$x_3 - y_3 = 0$$
$$2A = \left|x_1 y_2 - x_2 y_1\right|$$
$$M_3 = q\left|x_1 y_2 - x_2 y_1\right|$$

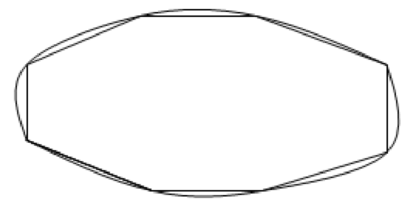
فرمول (۱۳ -۳ )

مثال ( ۵- ۳ ) :

جریان برش را در شکل نشان داده شده بدست آورید.




شکل (۳۱-۳)



$$B_1 = B_8 = 200mm^2$$
$$B_2 = B_7 = 250mm^2$$
$$B_3 = B_6 = 400mm^2$$
$$B_4 = B_5 = 100mm^2$$

## فرض اولیه

$$q_x = -\frac{\sqrt{y} \times Q_z}{I_z}, I_z = \sum Ad^2 = 13086\times10^6\ mm^4$$
$$q_{23} = 0$$
$$q_{34} = 0 - \frac{\sqrt{y} \times Q_z}{I_z} = -\frac{\sqrt{y}}{I_z}(400\times100) = -28.9\ N/mm$$
$$q_{45} = -28.9 - \frac{\sqrt{y}}{I_z}(100\times5) = -32.5\ N/mm$$
$$q_{56} = -29.8\ N/mm$$
$$q_{81} = 22.4\ N/mm$$
$$q_{67} = 0$$
$$q_{12} = 18.1\ N/mm$$
$$q_{78} = 18.1\ N/mm$$
$$q_{23} = 0$$

## بررسی تعادل ها

$$\sum F_z = 0$$
$$\sum F_y = 10KN = V_y$$

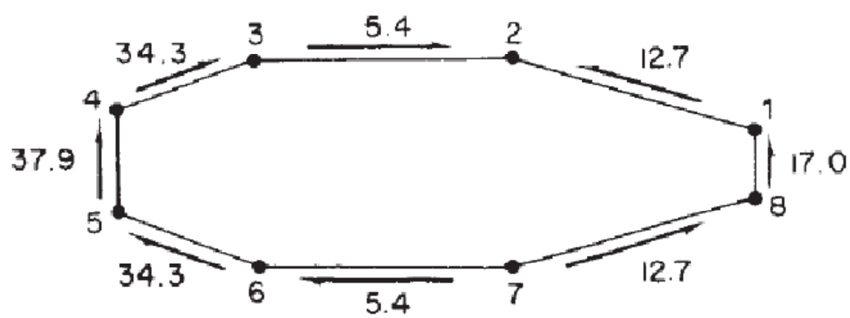
$\sum M = 1049760$ پادساعتگرد

$$\sum M_0 = q_{12\times}|y_1Z_2 - y_2Z_1| + q_{23\times}|y_2Z_3 - y_3Z_2| - q_{34\times}|y_3Z_4 - y_4Z_3|$$
$$-q_{45\times}|y_4Z_5 - y_5Z_4| - q_{56\times}|y_5Z_6 - y_6Z_5| - q_{67\times}|y_6Z_7 - y_7Z_6|$$
$$+q_{78\times}|y_7Z_8 - y_8Z_7| + q_{81\times}|y_8Z_1 - y_1Z_8|$$

$M = T = 104970$ ساعتگرد

$$T = 2Aq_0$$
$$A = 97200\,mm^2$$
$$q_0 = 504\,N/mm$$

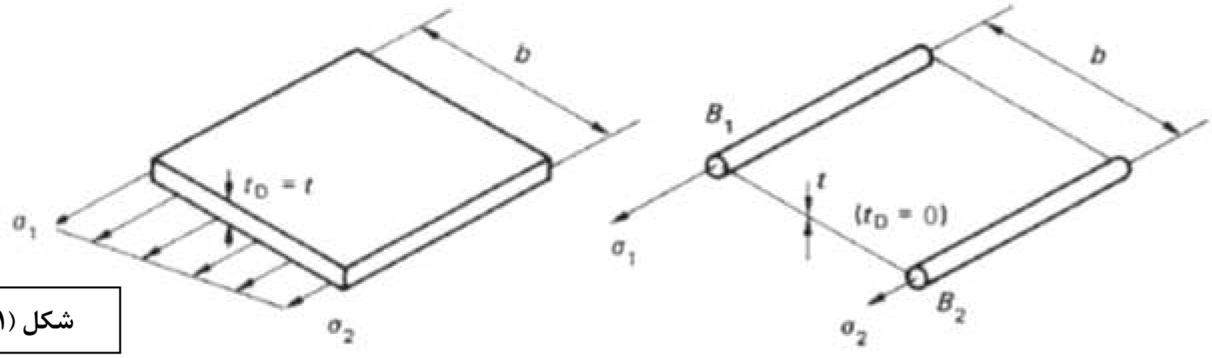
## توزیع نهایی جریان برش:




شکل (۳۲ -۳)

# ایده آل سازی مقاطع بال و بدنه

فرض کنید می خواهیم قاب شکل زیر (الف) را به صورت ترکیب تنش محوری داده شده به بوم ها و تنش برشی وارد شده به پوسته ، همانطور که در شکل (ب) نشان داده شده ایده ال سازی کنیم. در شکل زیر(الف) تنش محوری که به پوسته با ضخامت $t_D$ وارد می شود با پوسته ی به ضخامت واقعی t برابر گرفته می شود ، در حالیکه در شکل (ب)، $t_D = 0$ می باشد.




شکل (۱ -۴)

الف(سمت چپ) ب(سمت راست)

همچنین فرض کنید که توزیع تنش محوری در قاب واقعی به صورت خطی از یک مقدار نا معلوم $\sigma_1$ تا مقدار نا معلوم $\sigma_2$تغییر می کند. بدیهی است که تحلیل ها باید مقدار نهایی تنش های $\sigma_1$و $\sigma_2$را اگر چه توزیع آنها نا معلوم است ، پیش بینی کنند.

از آنجاییکه باری که تنش های محوری را در قاب های واقعی و ایده آل سازی شده تولید می کند باید یکسان باشد ، می توانیم گشتاورها را برابر گرفته تا عبارت هایی برای مساحت بوم ها $(B_1,B_2)$ بدست آوریم.همچنین در محل پروفیل طولی ( گوشه ای که می خواهیم مساحت را متمرکز کنیم) تنش ها باید ثابت نگه داشته شوند در نتیجه با گرفتن گشتاورها حول لبه راستی هر قاب داریم:

تعادل نیروها: $$\frac{\sigma_1+\sigma_2}{2}(bt) = \sigma_1 B_1 + \sigma_2 B_2$$

تعادل گشتاورها حول $B_2$ $$\sigma_1 bt\left(\frac{b}{2}\right) + \frac{\sigma_1-\sigma_2}{2}(bt)\left(\frac{2}{3}b\right) = \sigma_1 B_1 (b)$$

$$B_1 = \frac{bt}{6}\left(2 + \frac{\sigma_2}{\sigma_1}\right)$$
$$B_2 = \frac{bt}{6}\left(2 + \frac{\sigma_1}{\sigma_2}\right)$$

**فرمول (۱ -۴)**

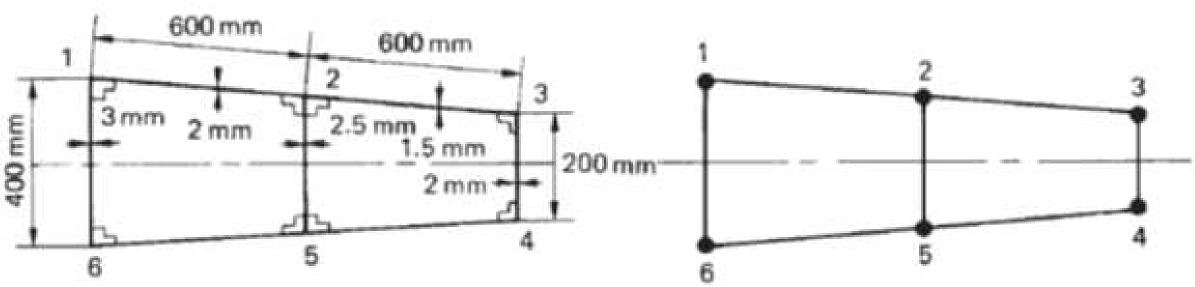
در معادله های بالا نسبت $\sigma_1$ و $\sigma_2$ اگر نا معلوم باشد ، معمولاً مقداری برای آن فرض می شود.

توزیع تنش محوری در شکل(الف) از ترکیب بار محوری و گشتاور خمشی ناشی می شود. برای بار محوری $\frac{\sigma_1}{\sigma_2} = 1$ و در نتیجه $B_1 = B_2 = \frac{bt_D}{2}$ و برای خمش خالص $\frac{\sigma_1}{\sigma_2} = -1$ و در نتیجه $B_1 = B_2 = \frac{bt_D}{6}$ .

بنابراین ایده آل سازی متفاوتی برای یک سازه با شرایط بارگذاری متفاوت نیاز است.

مثال ( ۱- ۴ ) :

قسمتی از مقطع بال به صورت یک جعبه دوسلولی در شکلزیر(الف) نشان داده شده است. که در آن هر Spar عمودی به وسیله پروفیل هایی به پوسته بال متصل شده که سطح مقطع هر پروفیل برابر۳۰۰ میلی متر مربع می باشد. این مقطع را به صورت ترکیبی از تنش محوری وارد شده به بوم ها و تنش برشی وارد شده به قاب ها ایده آل سازی کنید به گونه ای که در مقابل گشتاور خمشی وارد شده در صفحه عمودی مقاومت کند. بوم ها را در محل تقاطعSpar و پوسته قرار دهید.




**شکل (۲ -۴)**

الف(سمت چپ) -ب(سمت راست)

## حل:

مقطع ایده آل سازی شده در شکل بالا(ب) نشان داده شده است که در آن از تقارن داریم : $B_1=B_6$ و $B_2=B_5$و $B_3=B_4$ از آنجاییکه مقطع باید در مقابل گشتاور خمشی در صفحه عمودی مقاومت کند ، تنش محوری در هر نقطه از مقطع واقعی بال مستقیماً با فاصله ان نقطه از محور تقارن افقی متناسب است. بعلاوه ، توزیع تنش محوری در همه قاب ها خطی خواهد بود. باید توجه کرد که در وارد نمودن قسمت مشترک بین قاب ها مساحت بوم ها شامل فلنج Spar ها نیز می شود.

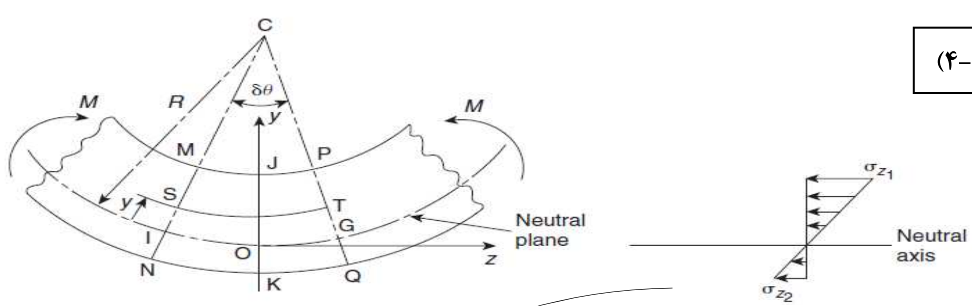
بنابراین داریم:

$$B_1 = \frac{bt}{6}\left(2 + \frac{\sigma_2}{\sigma_1}\right)$$

سهم از پوسته ۶-۱ + سهم از پوسته ۲-۱ + سطح استرینگر= $B_1$ سطح مؤثر در نقطه ۱

$$B_1 = 300 + \frac{2\times 600}{6}\left(2 + \frac{\sigma_2}{\sigma_1}\right) + \frac{3\times 400}{6}\left(2 + \frac{\sigma_2}{\sigma_1}\right)$$

شکل (۳ -۴)




$$\frac{\sigma_1}{\sigma_2} = \frac{y_1}{y_2}$$

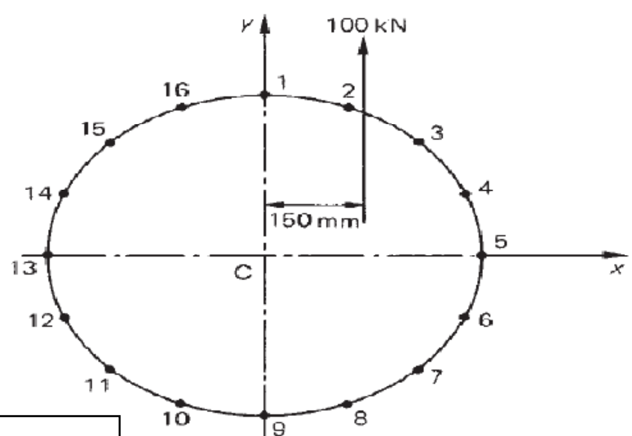
$$B_1 = 300 + \frac{2\times 600}{6}\left(2 + \frac{150}{200}\right) + \frac{3\times 400}{6}\left(2 + \frac{-200}{200}\right) = 1050\,mm^2$$

سهم از پوسته ۵-۲ + سهم از پوسته ۳-۲ + سهم از پوسته ۲-۱ × مساحت استرینگر = $B_2$

$$B_2 = 600 + \frac{2\times 400}{6}\left(2+\frac{200}{150}\right)+\frac{1.5\times 600}{6}\left(2+\frac{100}{150}\right)+$$
$$\frac{2.5\times 300}{6}\left(2+\frac{-150}{150}\right)=1795\,mm^2$$
$$B_3 = 891.7\,mm^2, B_3 = B_4, B_5 = B_2, B_6 = B_7$$

**مثال ( ۲- ۴ ) :**

مقطع بدنه هواپیما با شعاع ۳۸۱میلی متر و ضخامت ۰.۸ میلی متر تحت بار برشی به مقدار ۱۰۰ کیلو نیوتن در فاصله ۱۵۰ میلی متری از محور تقارن عمودی همانطور که در شکل نشان داده شده،قرار گرفته است.با ایده آل سازی مناسب توزیع جریان برشی را در این مقطع تعیین نمایید.(سطح مقطع هر استرینگر ۱۰۰ میلی متر مربع می باشد.)




**شکل (۴ -۴)**

با برش زدن در یکی از قسمتهای مقطع به محاسبه جریان برش می پردازیم.در جدول زیر جریان برش و مقادیر ایده آل سازی شده در هر قسمت مقطع بدست آمده است.

| Skin panel | | Boom | $B_r$ ($mm^2$) | $y_r$ (mm) | $q_b$ (N/mm) |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | – | – | – | 0 |
| 2 | 3 | 2 | 216.6 | 352.0 | −30.3 |
| 3 | 4 | 3 | 216.6 | 269.5 | −53.5 |
| 4 | 5 | 4 | 216.7 | 145.8 | −66.0 |
| 5 | 6 | 5 | – | 0 | −66.0 |
| 6 | 7 | 6 | 216.7 | −145.8 | −53.5 |
| 7 | 8 | 7 | 216.6 | −269.5 | −30.3 |
| 8 | 9 | 8 | 216.6 | −352.0 | 0 |
| 1 | 16 | 1 | 216.6 | 381.0 | −32.8 |
| 16 | 15 | 16 | 216.6 | 352.0 | −63.1 |
| 15 | 14 | 15 | 216.6 | 269.5 | −86.3 |
| 14 | 13 | 14 | 216.6 | 145.8 | −98.8 |
| 13 | 12 | 13 | – | 0 | −98.8 |
| 12 | 11 | 12 | 216.7 | −145.8 | −86.3 |
| 11 | 10 | 11 | 216.6 | −269.5 | −63.1 |
| 10 | 9 | 10 | 216.6 | −352.0 | −32.8 |

$$B_1 = \frac{bt}{6}\left(2+\frac{\sigma_2}{\sigma_1}\right)$$

$B_1=$ سطح استرینگر +سهم از پوسته ۲-۱ + سهم از پوسته ۱۶-۱

$$B_1 = 100+\frac{bt}{6}\left(2+\frac{\sigma_2}{\sigma_1}\right)+\frac{bt}{6}\left(2+\frac{\sigma_2}{\sigma_1}\right)$$

$$B_1 = 100+\frac{149.6\times 0.8}{6}\left(2+\frac{352}{381}\right)+\frac{149.6\times 0.8}{6}\left(2+\frac{352}{381}\right)$$

$$B_1 = 216.6\,mm^2$$

$$B_2 = 216.6\,mm^2, B_3 = 216.6\,mm^2$$

$$B_4 = 216.6\,mm^2$$

$$B_5 = 100+0 = 100\,mm^2$$

نکته : پروفیل های روی محور خنثی سهمی از پوسته نمی برند.

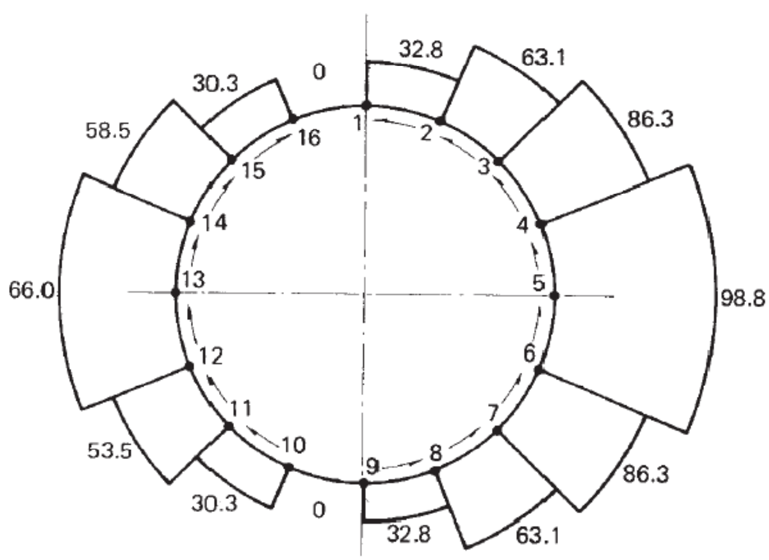
$$10\times 10^3 \times 150 = \oint q_b p ds + 2Aq_{s,0}$$
$$A = \pi \times (381.0)^2 = 4.56\times 10^5 mm^2$$
$$10\times 10^3 \times 150 = -2A_{12}q_{b,12} - 2A_{23}q_{b,23} - \ldots - -2A_{161}q_{b,161} + 2Aq_{s,0}$$
$$10\times 10^3 \times 150 = 2\times 28500\left(-q_{b,12} - q_{b,23} - \ldots - q_{b,161}\right) + 2\times 4.56\times 10^5 q_{s,0}$$
$$10\times 10^3 \times 150 = 2\times 28500\left(-262.4\right) + 2\times 4.56\times 10^5 q_{s,0}$$

$q_{s,0} = 32.8\dfrac{N}{mm}$ پادساعتگرد

با افزودن این مقدار جریان برش بدست آمده با جریان برش حاصل شده از برش زدن مقطع توزیع نهایی جریان برش بدست خواهد آمد.

$$2\begin{bmatrix}(98.8+66.0)145.8+(86.3+53.5)123.7\\+(63.1+30.3)82.5+(32.8-0)29.0\end{bmatrix}\times 10^{-3} = 99.96\text{kN}$$

## توزیع نهایی جریان برش:

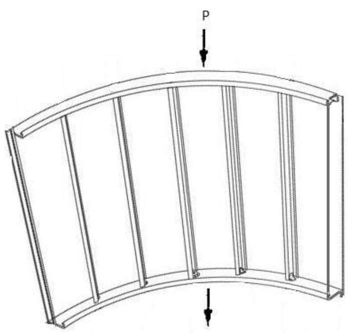



شکل (۵ -۴)

## کمانش تیرها و ستون‌ها:

سهم بزرگی از سازه هواپیما ها متشکل از سیم‌های نازکی است که توسط لانگژرون‌ها و استرینگرها تقویت شده اند. که هر دو در معرض شکست بر اثر کمانش به خاطر یک تنش کمانش یا تنش بحرانی قرار دارند.

مشخصا برای این نوع سازه، کمانش بحرانی‌ترین حالت منجر به تخریب است. از این رو پیش‌بینی بارهای کمانش در ستون‌ها، صفحات نازک و صفحات تقویت شده در طراحی هواپیما مهم است. در این بخش به بررسی کمانش تمامی این سازه‌ها می‌پردازیم.




**شکل** (۱ -۵)

دونوع ناپایداری سازه‌ای وجود دارد.

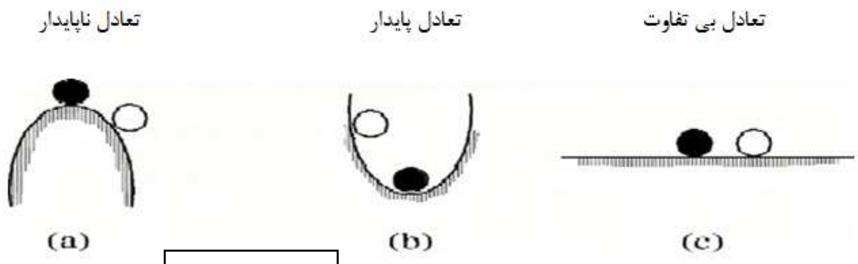
ناپایداری کلی (Primary Instability)

ناپایداری موضعی(Secondary Instability)

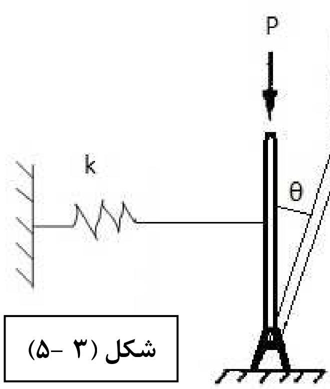
در حالت اولیه کل جزء تحت تاثیر قرار دارد و تغییری در مساحت مقطع وجود ندارد. در حالی که طول موج کمانش و طول جزء در یک مبنا هستند.

عموما ستون های با دیوار ضخیم و سخت، این نوع شکست را تجربه میکنند. در حالت ثانویه مساحت سطح مقطع تغییر میکند و طول موج کمانش با ابعاد سطح مقطع جزء هم مبنا است. ستون های دیوار نازک و صفحات تقویت شده در این حالت دچارشکست می‌شوند.

## انواع تعادل ها:




**شکل (۲ -۵)**




**شکل (۳ -۵)**

$\theta \le 6^0 \Rightarrow sin\theta = \theta$

گشتاور ناشی از نیروی فنر $\theta K l^2$

گشتاور ناشی از نیروی خارجی $Pl\theta$

از گشتاور ناشی از وزن صرف نظر می گردد.

شرط پایداری : $Kl^2\theta \ge Pl\theta$

بار بحرانی $P_{cr} = Kl$

پایدار $P < Kl$

ناپایدار $P > Kl$

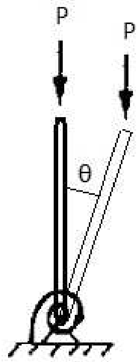
حالت گذار $P = Kl$

$\Rightarrow P \le Kl$

**فرمول (۱ -۵)**

در طراحی ما همیشه به دنبال بار بحرانی هستیم.

ممان ناشی از فنر= $K\theta$

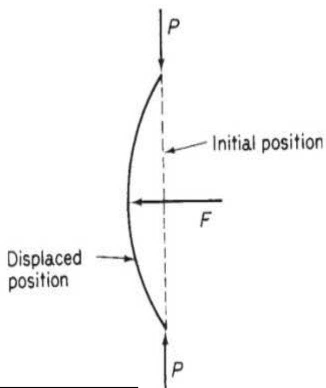



شکل (۴ -۵)

شرط پایداری فنر پیچشی: $K\theta \geq Pl\theta$

$$\boxed{P_{cr} = \frac{K}{l}}$$ **فرمول (۲ -۵ )**

می دانیم که اگر یک نیروی فشاری محوری به یک ستون باریک وارد شود، مقداری برای بار وجود دارد که در آن ستون به صورت ناگهانی در جهتی نامشخص کمانش می کند.



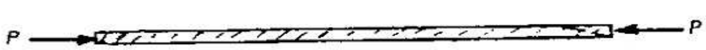

شکل (۵ -۵)

این بار همان بار کمانش یا باری بسیار نزدیک به آن است.

این جابه جایی نشان دهنده عدم تقارن موجود در صفحه‌ی کمانش است که علت آن نقص های هندسی و جنس ستون و عدم تقارن نحوه ی اعمال بار است. اما در فرض تئوری ، یک ستون بدون نقص و متقارن را درنظر میگیریم که از دید تئوری دچار کمانش ناگهانی نمی شود.

بنابراین به تعریفی دقیق از بار کمانش برای استفاده در تحلیل ستون بی نقص خود نیاز داریم.

اگر یک ستون بی نقص در معرض بار فشاری $p$ قرار گیرد طول ستون کم می شود( فشرده می شود).



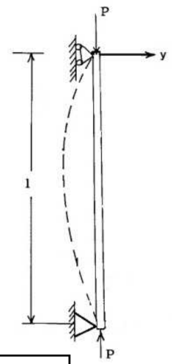

شکل (۶ -۵)

با این وجود اگر تیر بر اثر یک نیروی جانبی مقدار کمی جابه جا شود، در بارهایی کمتر از $P_{cr}$ ، برداشتن نیروی جانبی باعث برگشت تیر به حالت اولیه می شود.

در بار بحرانی، جابه جایی ایجاد شده برطرف نمی شود و باقی می‌ماند. از این رو بار کمانش با تعادل بی تفاوت ارتباط دارد. اگر $P > P_{cr}$ جابه جایی جانبی تیر زیاد می شود و تیر ناپایدار می شود.

## فرمول اویلر: برای ستون (تیر) با انتهای مفصلی.

ستون درسر مفصل را در نظر بگیرید. فرض میکنیم که $P = P_{cr}$باشد. داریم:




**شکل (۷ -۵)**

$$EI\frac{d^2V}{dz^2} = -M$$

$$EI\frac{d^2V}{dz^2} = -P_{cr}V$$

معادله دیفرانسیل آن به صورت زیر است:

$$\frac{d^2V}{dz^2} + \frac{P_{cr}}{EI}\mathrm{V} = 0$$

که پاسخ آن به صورت زیر است:

$$y'' = \frac{\mathrm{M}}{\mathrm{EI}} \rightarrow EIy'' = \mathrm{M} \xrightarrow{M=-Py} EIy'' + \mathrm{Py} = 0$$

شرایط مرزی : $y(0) = 0, y(l) = 0$

فرض : $\lambda^2 = \frac{P}{EI} \rightarrow y'' + \lambda^2 y = 0$

$$\rightarrow y = A\sin(\lambda x) + B\cos(\lambda x)$$

$$y(0) = 0 \rightarrow 0 = A\sin 0 + B\cos 0 \Rightarrow B = 0$$

$$y(l) = 0 \rightarrow 0 = A\sin(\lambda l) + 0 \rightarrow \Rightarrow \begin{cases} A = 0 \text{ wrong} \\ \sin(\lambda l) = 0 \end{cases}$$

$$\sin(\lambda l) = 0 \Rightarrow \lambda l = n\pi \xrightarrow{n=1} \lambda l = \pi$$

داشتیم : $\lambda = \sqrt{\frac{P}{EI}} \Rightarrow \sqrt{\frac{P}{EI}}\, l = \pi \Rightarrow \boxed{P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{l^2}} \rightarrow$ **فرمول (۳ -۵)**

بار بحرانی اویلر برای ستون با دو انتهای مفصلی **فرمول** (۴ -۵)

$$\sin(\lambda l) = 0 \Rightarrow \lambda l = n\pi \Rightarrow \boxed{P_{cr} = \frac{\pi^2 n^2 EI}{l^2}}$$

نکته :

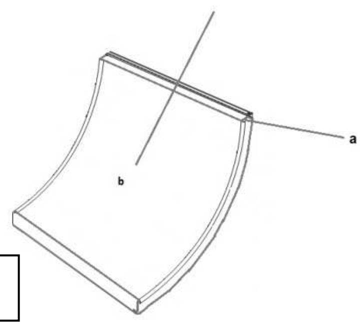
$n$: تعداد نیم موج در شکل کمانش یافته


**شکل (۸ -۵)**

نکته : $I \uparrow \;\rightarrow\; P_{cr} \uparrow \;,\; P_{cr}(\min) \rightarrow I_{min}$

$I \downarrow \;\rightarrow\; P_{cr} \downarrow$

نکته : پیدا کردن $I_{min}$




**شکل (۹ -۵)**

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 E}{l^2} I_{min}$$

## تنش بحرانی:

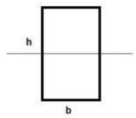
$$I = Ar^2$$

$$\sigma_{cr} = \frac{P_{cr}}{A} \rightarrow \sigma_{cr} = \frac{\pi^2 E A r^2}{l^2 A} \rightarrow \sigma_{cr} = \frac{\pi^2 E}{(\frac{l}{r})^2}$$

**نسبت طول تیر به شعاع ژیراسیون:** $\frac{l}{\mathrm{r}}$ **(ضریب رعنایی یا نسبت لاغری)**

$$\sigma_{cr} = \frac{\pi^2 E}{(\frac{l}{r})^2}$$

پوسته دایروی $I = \pi R^3 t$   میله $I = \frac{\pi}{4} r^4$   مستطیلی $I = \frac{1}{12} b h^3$



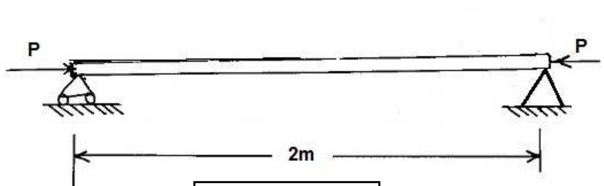

**مثال ( ۱- ۵ ) :**

تیر چوبی با مقطع مربعی با مشخصات $E = 12.5 GPa$ و $\sigma_{all} = 12 MPa$ داریم.

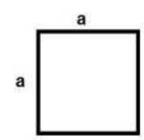
ابعاد مقطع برای تحمل نیروهای زیر را بدست آورید:

الف) $P = 100 KN$   ب) $P = 200 KN$

$F.S = 2.5$




شکل (۱۰ -۵)




الف

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{l^2} \ , \ P_{cr} = 2.5 \times 100 = 250 KN$$

$$\Rightarrow 250 \times 10^3 = \frac{\pi^2 \left(12.5 \times 10^9\right) I}{2^2} \quad \Rightarrow \ I = 8.106 \times 10^{-6} mm^4$$

$$\to \ I = \frac{1}{12} a^4 = 8.106 \times 10^{-6} m^4 \quad \to \quad a = 99.3 \cong 100 mm = 0.1 m$$

$$\sigma = \frac{P}{A} = \frac{100 \times 10^3}{(0.1)^2} = 10 MPa < \sigma_{all}$$

ب

$$P_{cr} = 2.5 \times 200 = 500 KN$$

$$I = \frac{P_{cr} l^2}{\pi^2 E} = 16.21 \times 10^{-6} m^4$$

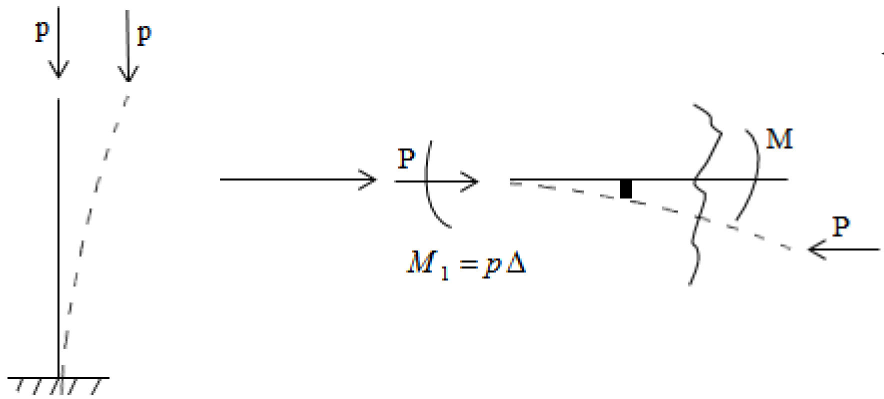
$$I = \frac{1}{12} a^4 \to a = 118.1 mm$$

$$\sigma = \frac{200 \times 10^3}{\left(118.1\right)^2} = 14.34 MPa > \sigma_{all} = 12 MPa$$

$$A = \frac{P}{\sigma_{all}} = \frac{200 \times 10^3}{12 \times 10^6} = 16.67 \times 10^{-3} m^2 \quad \xrightarrow{A = a^2} \ a = 129.1 mm$$

# بسط فرمول اویلر به ستون هایی با اتصالات دیگر

## ۱ ) تیر یک سر گیردار




شکل (۱۲ -۵)

$$EIy'' = M(x) = -p\Delta - py$$

$$\lambda^2 = \frac{p}{EI} \rightarrow y'' + \lambda^2 y = -\frac{p\Delta}{EI} = -\lambda^2\Delta$$

$$y = c_1 \cos\lambda x + c_2 \sin\lambda x + A$$

$$y = A \rightarrow y'' = 0 \rightarrow 0 + \lambda^2 A = -\lambda^2\Delta \rightarrow A = -\Delta$$

$$BC'S \begin{cases} y(0) = 0 \rightarrow c_1 = \Delta \\ y'(0) = 0 \rightarrow c_2 = 0 \end{cases}$$

$$\rightarrow y = \Delta\cos\lambda x - \Delta$$

$$= \Delta(\cos\lambda x - 1)$$

$$y_{x=\ell} = -\Delta \rightarrow \Delta(\cos\lambda\ell - 1) = \Delta$$

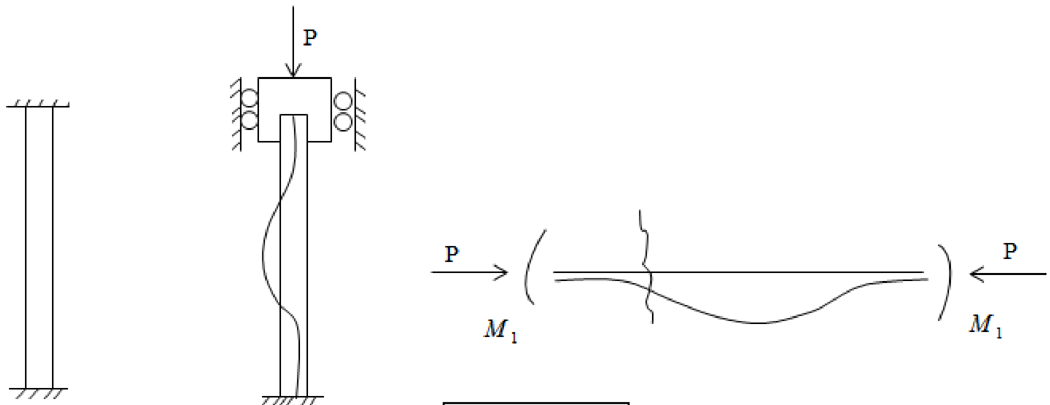
$$\rightarrow \cos\lambda\ell = 0 \rightarrow \lambda\ell = \frac{\pi}{2}$$

$$\rightarrow \frac{p_{cr}}{EI}\ell^2 = \frac{\pi^2}{4} \rightarrow p_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{4\ell^2}$$

$$\rightarrow p_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{{\ell_e}^2} \Rightarrow \ell_e = 2\ell$$

طول موثر (مقداری که باید در فرمول قرار داده شود)

## ۲ ) دو سرگیردار




شکل (۱۳ -۵)

$$EIy'' = -M_1 - py$$

$$y'' + \lambda^2 y = -\frac{M_1}{EI}$$

$$y = c_1 \cos\lambda x + c_2 \sin\lambda x + A$$

$$A = -\frac{M_1}{p}$$

$$BC'S \begin{cases} y(0) = 0 \rightarrow c_1 = \dfrac{M_1}{P} \\ y'(0) = 0 \rightarrow c_2 = 0 \end{cases}$$

$$\rightarrow y = \frac{M_1}{p}(\cos\lambda x - 1)$$

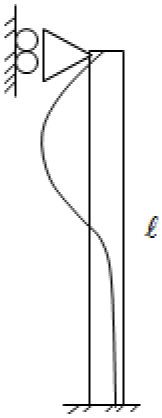
$$y_{x=\ell} = 0 \rightarrow \cos\lambda\ell = 1 \rightarrow \lambda\ell = 2\pi$$

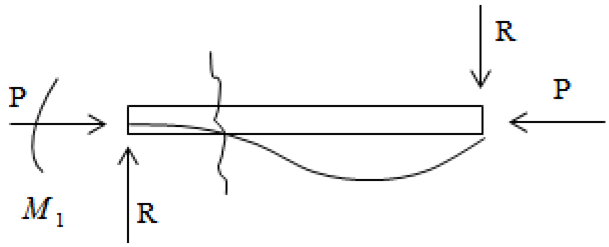
$$\rightarrow \frac{p_{cr}}{EI}\ell^2 = 4\pi^2 \rightarrow p_{cr} = \frac{4\pi^2 EI}{\ell^2}$$

$$\rightarrow p_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{\ell_e^{\,2}} \Rightarrow \ell_e = 0.5\ell$$

**طول موثر (مقداری که باید در فرمول قرار داده شود)**

## ۳ )یک سر گیردار – یک سر مفصل




شکل (۱۴ -۵)

$$M_1 = R\ell , EIy'' = M = Rx - M_1 - py$$

$$y'' + \lambda^2 y = \frac{Rx}{EI} - \frac{M_1}{EI}$$

$$y = c_1 \cos\lambda x + c_2 \sin\lambda x + A + Bx$$

$$\left.\begin{aligned} A &= -\frac{M_1}{p} \\ B &= \frac{R}{p} \end{aligned}\right\} \rightarrow y = c_1 \cos\lambda x + c_2 \sin\lambda x - \frac{M_1}{p} + \frac{Rx}{p}$$

$$BC'S \begin{cases} y(0) = 0 \rightarrow c_1 = \dfrac{M_1}{P} \\ y'(0) = 0 \rightarrow c_2 = -\dfrac{R}{p\lambda} \end{cases}$$

$$y = \frac{M_1}{p}\cos\lambda x - \frac{R}{p\lambda}\sin\lambda x - \frac{M_1}{p} + \frac{Rx}{p}$$

$$y_{x=\ell} = 0 \rightarrow \tan\lambda\ell = \lambda\ell \rightarrow \lambda\ell = 4.49$$

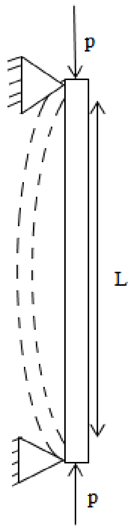
$$\rightarrow \frac{p_{cr}}{EI}\ell^2 = (4.49)^2 \rightarrow p_{cr} = \frac{(4.49)^2 EI}{\ell^2}$$

$$\rightarrow p_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{{\ell_e}^2} \Rightarrow \ell_e = 0.7\ell \Longrightarrow$$

طول موثر (مقداری که باید

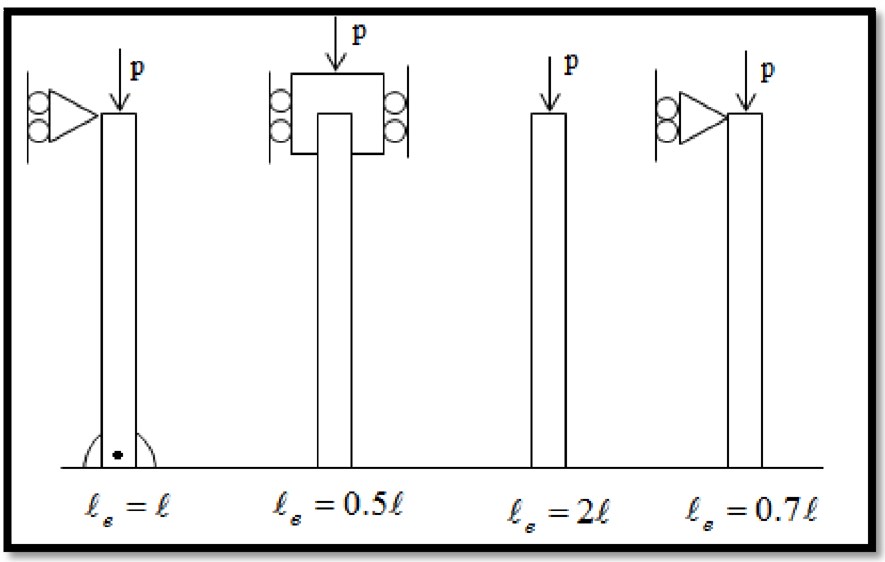
در فرمول قرار داده شود)

## ۴ ) دوسر مفصل




در حالت ، دوسر مفصل طول موثر ، همان طول میله می باشد .

شکل (۱۵ -۵)




شکل (۱۶ -۵)

مقادیر طول موثر برای حالات مختلف

**مثال ( ۲– ۵ ) :**

بار مجاز قابل اعمال؟

$$W\ 6\times15$$
$$L=24''$$
$$E_{st}=29\times10^{3}\,ksi\ \sigma_y=60\,ksi$$
$$W\ 6\times15\rightarrow\begin{cases}I_x=29.1in^4\\I_y=9.32in^4\\A=4.34in^2\end{cases}$$

در جهت x-x (دو سر مفصل):

$$l_e=0.5l=12''$$
$$P_{cr}=\frac{\pi^2EI_x}{l_e^2}=401.7\,kip$$

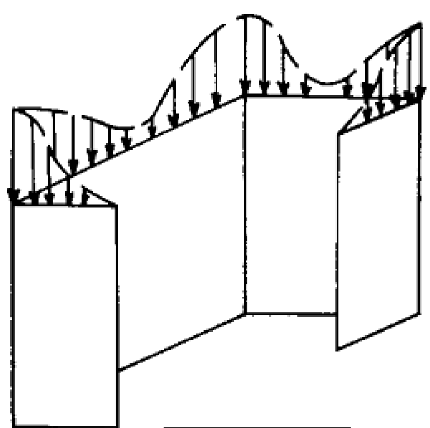
در جهت y-y(یک سر ثابت یک سر مفصل):

$$l'=l/2=12''$$
$$l_e=0.7l'=0.7(12)=8.4$$
$$P_{cr}=\frac{\pi^2EI_x}{l_e^2}=262.5\,kip$$
$$\sigma=\frac{P_{cr}}{A}=\frac{262.5}{4.43}=59.3\ ksi<\sigma_y=60\,ksi$$

# کمانش موضعی:

آزمایش بر طول‌های کوتاهی از مقاطع که از اجزای فلنج-صفحه تشکیل شده‌اند، نشان می‌دهند که مقطع طولی پس از کمانش موضعی، هنوز توانایی تحمل بار بیشتری را پیش از شکست یا تخریب دارد. به عبارت دیگر شکست یا تخریب موضعی و کمانش موضعی با هم تفاوت دارند. در مواردی که کمانش موضعی در تنش‌های پایین اتفاق می‌افتد، تنش Crippling یا شکست بیشتر می‌باشد. زمانی که کمانش موضعی در تنش‌های 0.7Fcy تا 0.8Fcy رخ دهد تنش کمانش و Crippling در عمل یکسان هستند.

شکل زیر توزیع تنش را بر یک مقطع پس از کمانش موضعی و قبل از Crippling یا شکست نشان می‌دهد.



**شکل (۱۷ -۵)**

با افزایش بار بر مقطع طولی، کمانش در قسمت های صاف بیشتر می‌شود اما بیشتر بار فزاینده بر قسمت‌های گوشه‌تر منتقل می‌شود، تا زمانی که تنش به حدی برسد که باعث خیز قابل ملاحظه و شکست شود.

یک پاسخ تئوری برای تنش Crippling در تمام شکل‌ها وجود ندارد، از آن جهت که قیدهای مرزی بین فلنج و صفحه و چگونگی افزایش تنش در گوشه‌ها معلوم نیست.

در نتیجه، روش‌های حل نیمه تجربی هستند و نتایج این روش‌ها از طریق آزمایش به اثبات رسیده‌اند. دو روش برای محاسبه‌ی تنش در این بخش نشان داده می‌شوند.

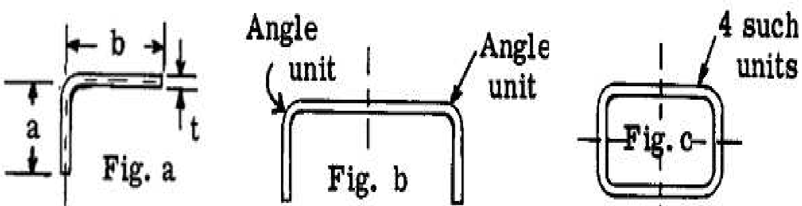
# روش۱. روش Needham، روش Angle یا روش گوشه

در این روش، هر قطعه، همانطور که در شکل صفحه قبلنشان داده شده به گوشه‌های برابر یا نابرابر تقسیم می‌شود. استحکام این قطعات را می‌توان از آزمایش یا تئوری محاسبه کرد. استحکام نهایی یا استحکام شکست را می‌توان با جمع کردن استحکام گوشه‌ها که مقطع مجموع را تشکیل می‌دهند محاسبه کرد.

نیدهام آزمایش‌های زیادی بر گوشه‌ها انجام داد و با استفاده از نتایج این آزمایش‌ها و دیگر نتایج منتشرشده در باره شکل‌های مربعی، مستطیلی، کانالی، میله‌ای و ...، او برای تنش کمانش یا تنش شکست بخش‌های گوشه به معادله زیر رسید.

$$\sigma_{cs} = (\sigma_{yc} E)^{0.5} c_c \left( \frac{1}{(\frac{b'}{t})^{0.75}} \right)$$

**فرمول (۵ –۵ )**




گوشه با دو لبه آزاد (Ce=0.316)    گوشه با یک لبه آزاد (Ce=0.342)    گوشه ی بدون لبه آزاد (Ce=0.366)

**شکل (۱۸ –۵)**

که در آن:

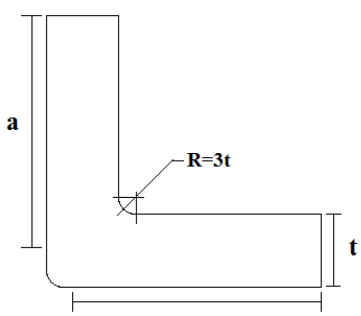
$\sigma_{cs}$ = تنش کمانش یک گوشه (psi)

$\sigma_{yc}$=تنش تسلیم فشاری (psi)

$b'/t$=هم ارز b/t در قطعه = (a+b)/2t

E= مدول یانگ الاستیسته در فشار (psi)

$c_c$ = ضریبی که به درجه آزاد بودن هر گوشه از کناره‌ها وابسته است.




**شکل (۱۹ –۵)**

تنش کمانش برای گوشه‌ها، کانال‌ها، شکل‌های مستطیلی و ... را می توان از طریق فرمول صفحه قبل محاسبه کرد. نیروی کمانش برای یک گوشه از رابطه زیر محاسبه می شود:

$$P_{cs} = \sigma_{cs} \times A$$

که در آن A مساحت یک گوشه است.

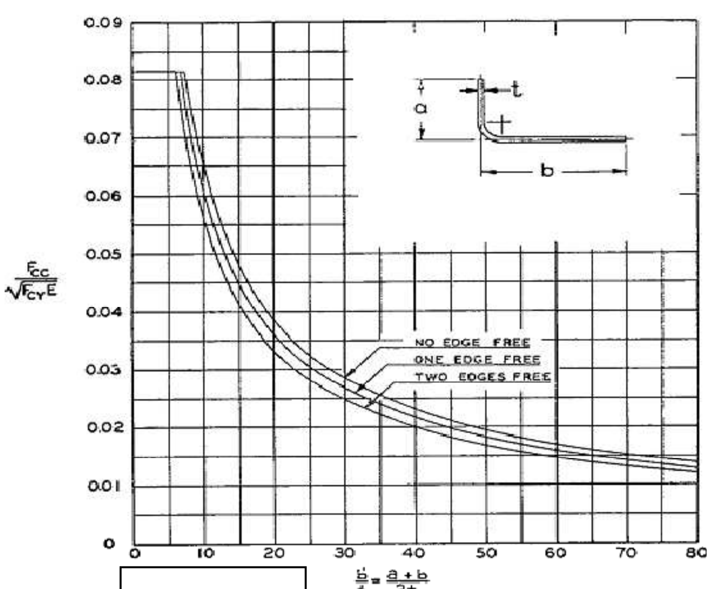
تنش کمانش در دیگر شکل‌های سازه‌ای با تقسیم کردن آن شکل به تعدادی گوشه و محاسبه بار (نیروی) کمانش برای تک تک این گوشه‌ها بدست می‌آید. تنش کمانش برای تمام سازه از معادله زیر بدست می‌آید:

$$P_{cs} = \sum P_{cs\ (i)} = \sum (\sigma_{cs\ (i)} \times A_{(i)})$$

$$\sigma_{\text{cs Total}} = \frac{\sum \text{نیروی کرنش تمام گوشه ها}}{\sum \text{مساحت تمام گوشه ها}}$$

### منحنی‌های طراحی

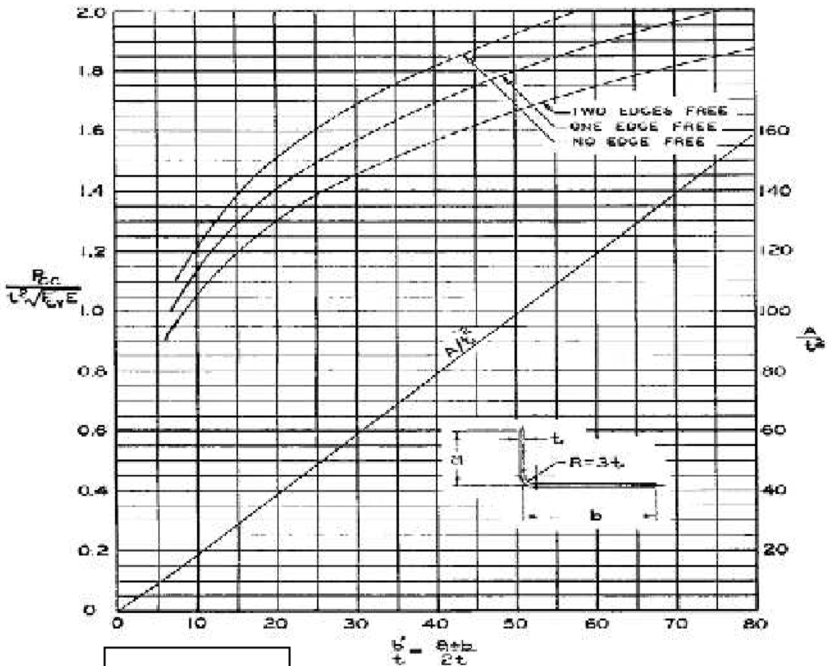
شکل C7.3 منحنی‌هایی برای محاسبه تنش هر گوشه براساس معادله C7.1 به ما می‌دهد و شکل C7.4 منحنی‌هایی برای محاسبه نیروی کمانش برای هر گوشه به ما می‌دهد. با استفاده از این منحنی‌ها و معادله C7.3، تنش شکل‌های مرکب، کانال‌ها، شکل‌های مستطیلی، لوله‌ها را می‌توان به راحتی محاسبه کرد.




**شکل (۲۰ -۵)**

(توضیح: Fcc همان $\sigma_{cs}$است و Fcr همان$\sigma_{yc}$است)

شکل C7.3 تنش کمانش بی‌بعد برحسب b'/t




**شکل (۲۱ –۵)**

(توضیح: Pcc همان Pcs است)

شکل C7.4 نیروی کمانش بی‌بعد برحسب b'/t

| توضیحات | حداکثر تنش مجاز Crippling ($\sigma_{cs}$Max) | نوع پروفیل |
|---|---|---|
| Angles | $0.7\ \sigma_{yc}$ | ┐ |
| V Groove Plates | | **V** |
| Multi-Corner Sections, Including Tubes | $0.8\ \sigma_{yc}$ | چندگوشه و قوطی |
| Stiffened Panels | | صفحات با پشت‌بند تقویتی |
| Tee, Cruciform and H Sections | $0.8\ \sigma_{yc}$ | **T , H , t** |
| 2 Corner Sections, Zee, J, Channels | $0.9\ \sigma_{yc}$ | دوگوشه‌ای، **U**، **Z** ، **J** |

در آخر باید  با توجه به مقطع سازه ، مقدار تنش بدست آمده را با مقدار ماکزیمم تنش ، که در جدول داده شده است ، مقایسه کرد .

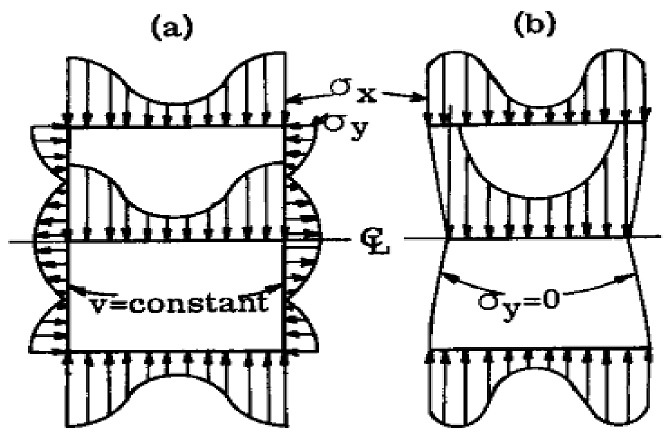
از این دو مقدار ، هر کدام کدام کوچکتر بودند ، جواب مسئله خواهد بود .

# روش ۲. روش Gerard

این روش، روشی عمومی‌تر و کاربردی‌تر از روش نیدهام است. در شکل زیر نحوه پخش تنش بر یک سطح صاف بعد از کمانش در شرایط یکنواخت در انتها، دیده می‌شود.

روش جرارد تاثیر اعوجاج لبه های آزاد بدون بار را بر استحکام شکست اعضا در نظر می‌گیرد.

شکل (۲۲ -۵)




تنش و جابجایی سطح صاف بعد از کمانش در شرایط یکنواخت در انتها

(a) لبه‌های صاف بی‌بار، (b) لبه‌های بی‌بار بی‌تنش آماده پیچش در صفحات

معادلات جرارد برای تنش Crippling در ادامه آمده است:

**الف) مقاطع L، □، V، صفحات چندگوشه و پشت‌بند تقویتی**

معادله ()
$$\sigma_{cs} = 0.56\ \sigma_{yc}\left[\left(\frac{gt^2}{A}\right)\left(\frac{E}{\sigma_{yc}}\right)^{0.5}\right]^{0.85} \rightarrow \%10\ error$$

**ب) مقاطع H، T، t و صفحه با لبه‌ی مستقیم**

معادله ()
$$\sigma_{cs} = 0.67\ \sigma_{yc}\left[\left(\frac{gt^2}{A}\right)\left(\frac{E}{\sigma_{yc}}\right)^{0.5}\right]^{0.4} \rightarrow \%5\ error$$

**ج) مقاطع دوگوشه‌ای، U، Z، J**

معادله ()
$$\sigma_{cs} = 3.2\ \sigma_{yc}\left[\left(\frac{t^2}{A}\right)\left(\frac{E}{\sigma_{yc}}\right)^{\frac{1}{3}}\right]^{0.75} \rightarrow \%10\ error$$

**فرمول** (۶ -۵)
$$\sigma_{cs} = 3.2\sigma_{yc}[{t^2}/{A}\left({E}/{\sigma_{yc}}\right)^{0.75}]$$

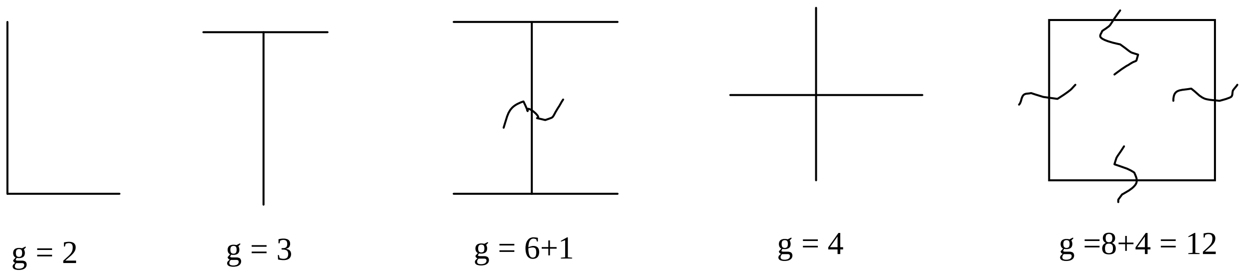
که مقادیر t , A فرمول بالا مطابق با زیر حاصل می شود:

t(in)=ضخامت پروفیل

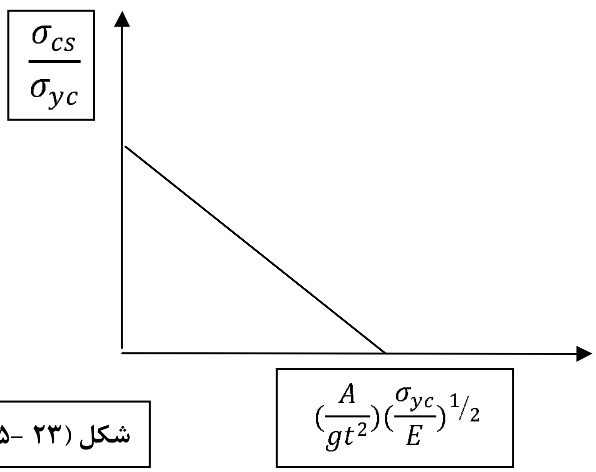
A=سطح مقطع کل پروفیل

g=تعداد بال آزاد+تعداد برش

روش بدست آوردن g برای المان های ساده:




زمانی که از روش Gerard برای بدست آوردن تنش Crippling استفاده شود می توان به جای استفاده از فرمول از نمودار زیر مقادیرتنش Crippling را بدست آورد.




**شکل (۲۳ -۵)**

## ضریب تصحیح برای روکش فلزی

در صورتی که جسم دارای روکش فلزی باشد می توان با استفاده از ضریب تصحیح زیر تنش کمانش را بدست آورد.

ضریب تصحیح: $\zeta$

$$\zeta = \frac{1+3(\sigma_{cl}/\sigma_{cr})f}{1+3f}$$ **فرمول (۷ -۵)**

تنش تسلیم پوسته: $\sigma_{cl}$

تنشBucking: $\sigma_{cr}$