Subject: (1)
Year. Month. Date. ( )

«Benyamin Esmati»

«انتقال حرارت»

انتقال حرارت →
- هدایت (conduction)
- جابه‌جایی (convection)
- تشعشع (Radiation)

Q : گرما (J)

$\dot{Q}$: $J/s = W$ (وات) $\Rightarrow \dot{Q} = q \; (J/s = W)$ → بدون استفاده از $(\dot{\ })$

$q' \left(\frac{W}{m}\right)$

$q'' \left(\frac{W}{m^2}\right)$

فصل اول : مقدمه

- آشنایی اولیه با هدایت گرمایی :

قانون فوریه :

$$q = -kA\frac{dT}{dx}$$

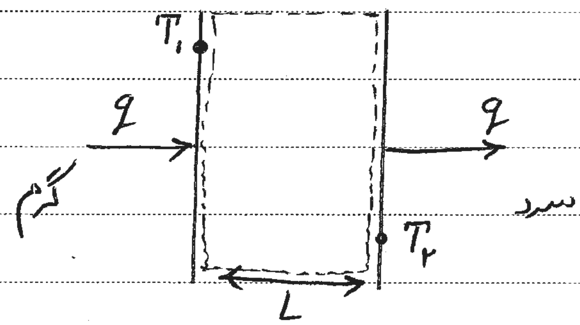
q : W

k : ضریب هدایت گرمایی $\left(\frac{W}{m.k}\right)$

T : دما (k)

A : مساحتی که گرما از آن می‌گذرد (m^2)

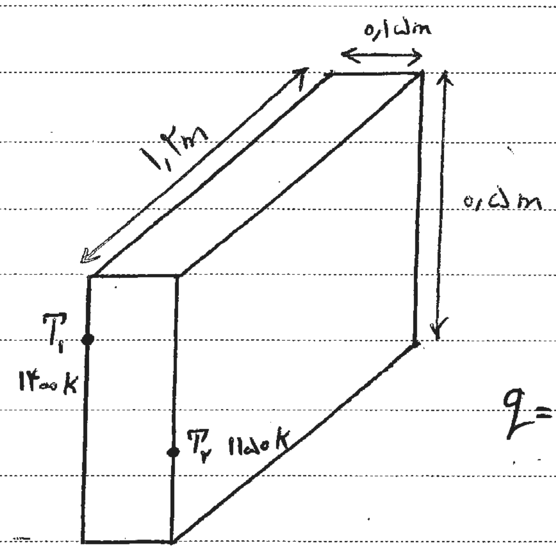
x : فاصله (m)



شرایط دائم $\Longrightarrow q = -k \cdot A \cdot \frac{\Delta T}{\Delta x}$, $\Delta x \rightarrow L$

$$q'' = -k \cdot \frac{dT}{dx}$$

مثال (۱-۱ کتاب) 8



$$q'' = -k\frac{\Delta T}{\Delta x} = -1.7 \times \frac{1150 - 1400}{0.15} = 2833 \left(\frac{W}{m^2}\right)$$

$$q = q'' \times A = 2833 \times (1.2 \times 0.5) = 1700\ W$$

$$K = 1.7\ \frac{W}{m \cdot K}$$ (آجر نسوز)

آشنایی اولیه با جابه‌جایی گرمایی:

① انتقال انرژی به خاطر تقابل و تصادف مولکولها (مانند هدایت)

② جابه‌جایی جرم ماده از یک نقطه به نقطه‌ی دیگر ← ادوکسیون (Advection)

نکته) در انتقال حرارت جابه‌جایی، عبارت convection (جابه‌جایی) هر دو صورت انتقال را در نظر می‌گیرد.

جابه‌جایی:

- آزاد: به خاطر نیروهای غوطه‌وری (خود به خود)
- اجباری: به واسطه‌ی نیروی فن یا پمپ
- ترکیبی: جابه‌جایی آزاد + اجباری
- جوشش
- میعان

(جوشش و میعان:) به واسطه‌ی تشکیل‌گیری و حرکت حباب‌ها یا قطرات جابه‌جایی گرما انجام می‌گیرد.

(آزاد → اجباری:) انتقال گرما تقریباً ۱۰ برابر می‌شود

(آزاد → جوشش و میعان:) انتقال گرما تقریباً ۱۰۰ برابر می‌شود

قانون سرمایش نیوتن:

$$q = h\cdot A\cdot (T_s - T_\infty)$$

- q: گرمای منتقل شده از یک سطح به سیال (W)
- A: مساحت سطح در تماس با سیال (m^2)
- h: ضریب انتقال حرارت جابه‌جایی $\left(\frac{W}{m^2\cdot K}\right)$
- T_s: دمای سطح (K)
- T_∞: دمای سیال (K)

$$q'' = h\cdot(T_s - T_\infty) \quad \left(\frac{W}{m^2}\right)$$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

نکته) بحث اصلی در انتقال حرارت جابجایی چگونگی محاسبه‌ی h است

چون با شرایط مختلف، مقدار h برای حتی یک ماده‌ی خاص ممکن است تغییر کند.

- آشنایی اولیه با تشعشع :

به محیط مادی برای انتقال گرما، نیازی نیست.

قانون استفن - بولتزمن :

$$q = \sigma . A . T_s^4$$

گرمای ساطع شده (w)

مساحت سطح ساطع کننده (m^2)

ثابت استفن-بولتزمن

$\left(\sigma = 5{,}67 \times 10^{-8} \left(\frac{w}{m^2 k^4}\right)\right)$

دمای سطح (k)

$$q'' = \sigma . T_s^4$$

نکته) به دلیل کوچک بودن ثابت استفن-بولتزمن عملاً مقدار تشعشع از نظر عددی کوچک است به همین دلیل در دماهای کمتر از ۵۰۰ تا ۶۰۰ درجه‌ی سانتیگراد به طور کلی از تشعشع صرف نظر می‌کنیم

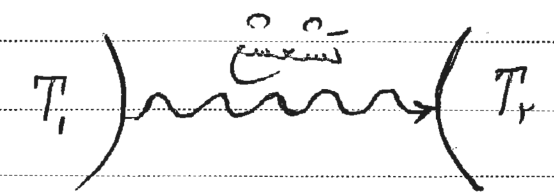
نکته) قانون استفن-بولتزمن برای جسم سیاه صادق است که می‌تواند به صورت ایده‌آل به اندازه‌ی σT_s^4 انرژی تشعشعی ساطع کند امّا در عمل اجسام معمولاً ایده‌آل نیستند به همین دلیل در قانون بالا از یک ضریب کاهنده استفاده می‌شود

$$q'' = \varepsilon . \sigma . T^4$$

ضریب صدور $(0 \leqslant \varepsilon \leqslant 1)$

PAPCO

اگر دو جسم داشته باشیم :

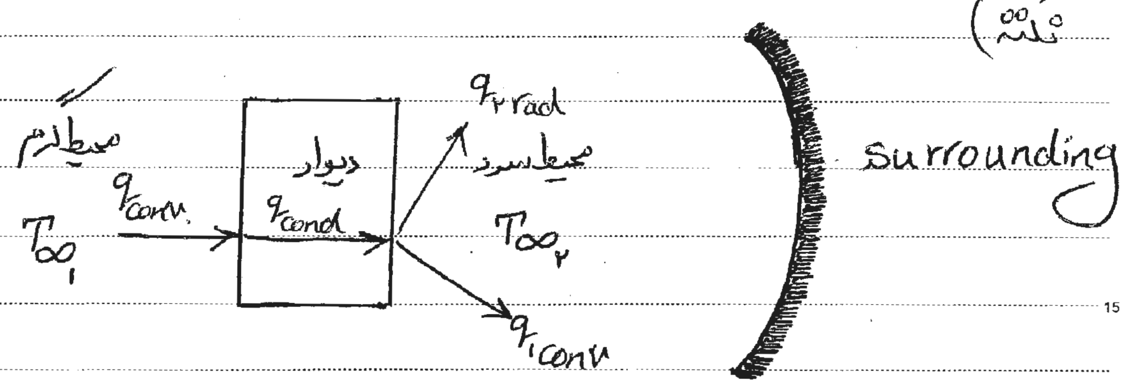


$T_1 > T_2$

$$q'' = \varepsilon.\sigma.T_s^4 - \varepsilon.\sigma.T_{sur}^4$$

$$\Longrightarrow q'' = \varepsilon.\sigma\left(T_s^4 - T_{sur}^4\right)$$

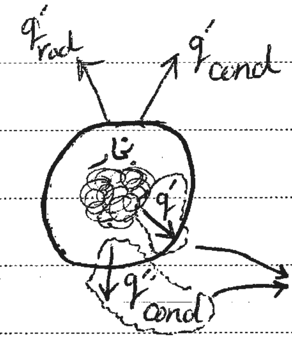
(نکته)



قانون بقای انرژی
با فرض عدم اتلاف و
یک بعدی بودن انتقال حرارت

$$q_{conv} = q_{cond} = \left(q_1\,conv + q_2\,rad\right)$$

مثال : یک لوله‌ی بخار از داخل اتاقی می‌گذرد ، هوای اتاق و دیوارهای اتاق ، دمای $25^\circ C$ دارند . قطر خارجی لوله $70\ mm$ است . دمای سطح خارجی لوله $200^\circ C$ است . ضریب صدور لوله 0.8 است . ضریب انتقال حرارت جابه‌جایی بین لوله و هوا $15\ \frac{W}{m^2K}$ است . اتلاف گرما از طول واحد لوله را بدست آورید .



نمی توانیم ازاین
دو استفاده کنیم زیرا
اطلاعات باندازه ی کافی داده نشده است

$$q' = q'_{conv} + q'_{rad}$$

$$= h \cdot \frac{A}{L}\left(T_s - T_\infty\right) + \varepsilon \cdot \frac{A}{L}\,\sigma \cdot \left(T_s^4 - T_{sur}^4\right)$$

بر واحد طول

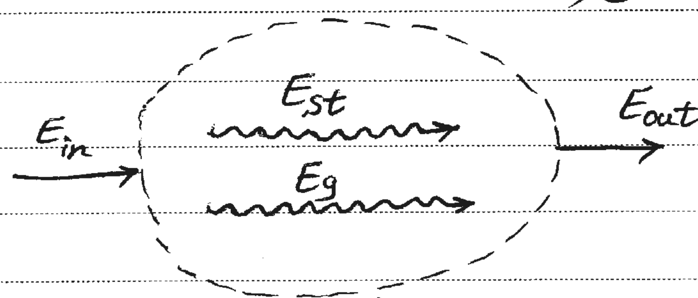
$$A = \pi D \times L \rightarrow \frac{A}{L} = \pi D \longrightarrow q' = h \times \pi D \times \left(T_s - T_\infty\right) + \varepsilon \pi D \times \sigma \left(T_s^4 - T_{sur}^4\right)$$

$$= 15 \times \pi \times 0.07 \times \left(200 - 25\right) + 0.8 \times \pi \times 0.07 \times 5.67$$

$$\times 10^{-8}\left[(200+273)^4 - (25+273)^4\right]$$

$$q' = 998 \ \frac{W}{m}$$

شکل کلی قانون بقای انرژی 8



حجم کنترل C.V

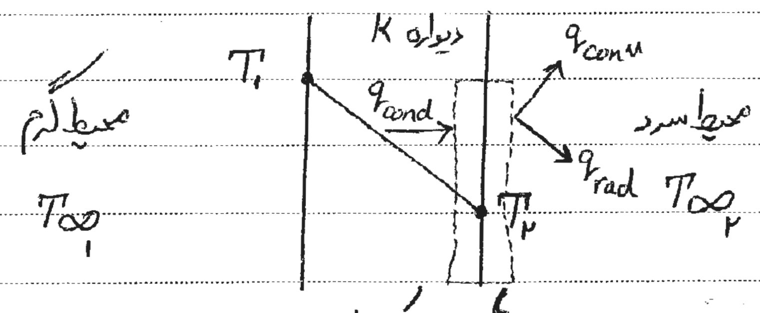
پدیده‌های سطحی (متناسب با A)
- E_{in} : ورودی
- E_{out} : خروجی

$$E_{in}-E_{out}+E_g=\Delta E_{st}$$ (واحد: J) → برای یک دوره زمانی مشخص

پدیده‌های حجمی (متناسب با ∀)
- E_{st} : ذخیره شده
- E_g : تولید شده → مثال: المنت برقی داخل جسم یا انجام یک واکنش گرماگیر یا گرمازا داخل جسم

$$\boxed{\dot{E}_{in}-\dot{E}_{out}+\dot{E}_g=\dot{E}_{st}}$$ (واحد: W) → برای یک لحظه خاص

— موازنه‌ی انرژی سطح:



سطح کنترل ⇐ یعنی حجم = صفر

قانون بقای انرژی روی سطح کنترل

$$q_{cond}=q_{conv}+q_{rad}$$

نکته) چون سطح کنترل درنظر گرفتیم دیگر نیازی به E_{st} یا E_g نیست چون پدیده‌های حجمی هستند ما حجمی نداریم

* مثال بخش موازنه‌ی انرژی سطحی در کتاب خوانده شود

فصل دوم 8 معادلات هدایت گرمایی

قانون فوریه یک بعدی $$q''_x = -k\frac{dT}{dx}$$

مؤلفه های هدایت در سه بعد

$$q''_x = -k\frac{dT}{dx}$$

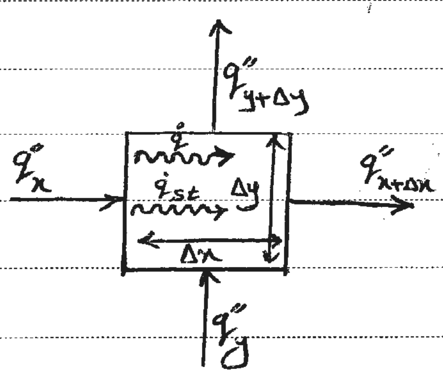
$$q''_y = -k\frac{dT}{dy}$$

$$q''_z = -k\frac{dT}{dz}$$

$$q'' = q''_x\hat{i} + q''_y\hat{j} + q''_z\hat{k}$$

$$q'' = -k\nabla T = -k\left(\frac{dT}{dx}\hat{i} + \frac{dT}{dy}\hat{j} + \frac{dT}{dz}\hat{k}\right)$$

مشکل اساسی به دست آوردن تابع ریاضی توابع دما تا بتوانیم در قانون فوریه مشتق گرفته و q را حساب می کنیم



قانون بقای انرژی $$q''_{in} - q''_{out} + \dot{q}_g = q_{st}$$

$$q''_{x+\Delta x} = q''_x + \frac{dq''_x}{dx}\Delta x$$

Subject: ٦١
Year. Month. Date. ( )

انجام ساده سازی (اثبات در کتاب موجود است) ⟵ معادله پخش گرما بدست می آید

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial T}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(k\frac{\partial T}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(k\frac{\partial T}{\partial z}\right)+\dot{q}=\rho c_p\frac{\partial T}{\partial t}}$$

$$\underbrace{\frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial T}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(k\frac{\partial T}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(k\frac{\partial T}{\partial z}\right)}_{q''_{in}-q''_{out}}+\underbrace{\dot{q}}_{\text{انرژی تولید شده}}=\underbrace{\rho c_p\frac{\partial T}{\partial t}}_{\text{انرژی ذخیره شده}}$$

$\dot{q}$: انرژی تولید شده $\frac{W}{m^3}$

با حل معادله مشتقات جزئی پخش گرما، تابع T بدست می آید.

تابع توزیع دما

$T(x,y,z,t)$

حالتهای خاص معادله پخش گرما :

① k ثابت باشد

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}+\frac{\dot{q}}{k}=\frac{\rho c_p}{k}\frac{\partial T}{\partial t}$$

⟵ با تعریف $\alpha=\frac{k}{\rho c_p}$ ⟵ unit : $\frac{m^2}{s}$

ضریب پخش گرمایی

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}+\frac{\dot{q}}{k}=\frac{1}{\alpha}\frac{\partial T}{\partial t}}$$ با فرض k ثابت

* نسبت توانایی هدایت گرمایی به ذخیره سازی گرمایی جسم

* زیاد بودن α ⟵ سریع بودن پاسخ به تغییرات دما

② شرایط دائم باشد.

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial T}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(k\frac{\partial T}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(k\frac{\partial T}{\partial z}\right)+\dot{q}=0$$

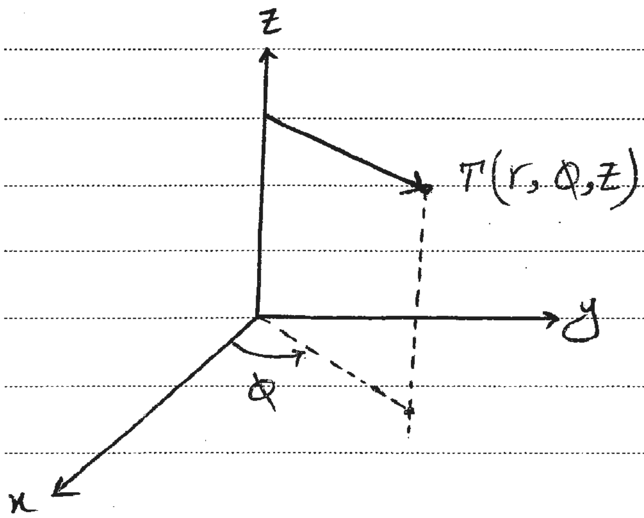
۳) شرایط دائم، یک بعدی، بدون تولید انرژی

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial T}{\partial x}\right)=0$$

۴) شرایط دائم، یک بعدی، بدون تولید انرژی و k ثابت

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}=0$$

مختصات استوانه‌ای:



$$q''_r=-k\frac{\partial T}{\partial r}$$

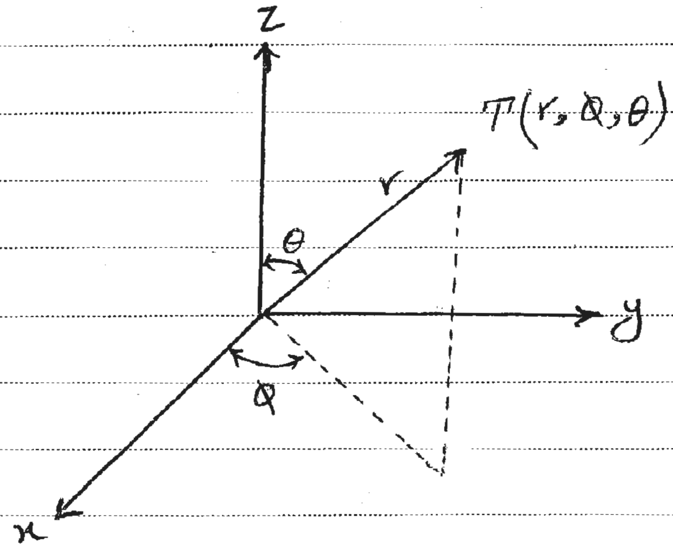
$$q''_\varphi=-\frac{k}{r}\frac{\partial T}{\partial \varphi}$$

$$q''_z=-k\frac{\partial T}{\partial z}$$

معادله پخش گرما در مختصات استوانه‌ای:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(k_r\frac{\partial T}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial \varphi}\left(k\frac{\partial T}{\partial \varphi}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(k\frac{\partial T}{\partial z}\right)+\dot{q}=\rho c_p\frac{\partial T}{\partial t}$$

— مختصات کروی :



قانون فوریه در مختصات کروی :

$$q''_r = -k\frac{\partial T}{\partial r} \quad , \quad q''_\phi = -\frac{k}{r\sin\theta}\frac{\partial T}{\partial \phi} \quad , \quad q''_\theta = -\frac{k}{r}\frac{\partial T}{\partial \theta}$$

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(kr^2\frac{\partial T}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial}{\partial \phi}\left(k\frac{\partial T}{\partial \phi}\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(k\sin\theta\frac{\partial T}{\partial \theta}\right)+\dot{q}$$
$$=\rho c_p\frac{\partial T}{\partial t}$$

— $\underbrace{\text{شرایط مرزی}}_{\downarrow}$ و $\underbrace{\text{شرایط اولیه}}_{\downarrow}$:

شرایط مکانی → ۶ تا ؛ حالت‌ها :

شرایط زمانی → یک

شرطهای مرزی

$T(x_0) = 100\,^\circ C$

$T(y_0) =$

⋮

$$\left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_{x=x_0} = 0 \rightarrow \text{عایق در } x_0 \qquad q''_x = -k\frac{\partial T}{\partial x}$$

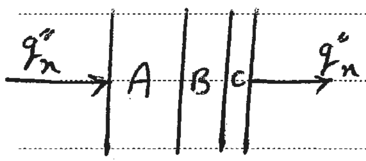
$$\left.-k\frac{\partial T}{\partial x}\right|_{x=x_0} = \text{مقدار معلوم}$$

* مقدار انتقال حرارت در نقطه‌ای خاص معلوم باشد.

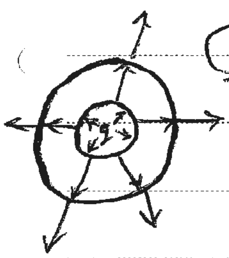
فصل سوم: هدایت گرمایی یک بعدی دائم

مصادیق (کاربردها) یک بعدی:

- دیوار مسطح با ابعاد بی‌نهایت
  - ← طول و عرض بی‌نهایت
- دیوار مسطح با ابعاد بی‌نهایت به صورت مرکب



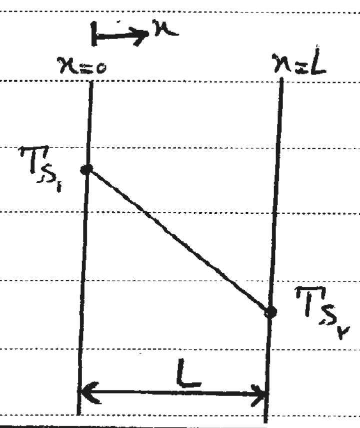
- استوانه طویل توخالی در جهت شعاعی
- کره توخالی در جهت شعاع



بدست آوردن تابع توزیع دما در دیوار مسطح، یک بعدی، شرایط دائم، k ثابت:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 0$$ معادله پخش گرما

شرایط مرزی
$$\begin{cases} T(0) = T_{s_1} & (1) \\ T(L) = T_{s_2} & (2) \end{cases}$$



حل ← $T(x) = C_1 x + C_2$

شرایط مرزی (1) ⟶ $C_2 = T_{s_1}$

شرایط مرزی (2) ⟶ $C_1 = \frac{T_{s_2} - T_{s_1}}{L}$

$$\Rightarrow \boxed{T(x) = \left(T_{s_2} - T_{s_1}\right)\frac{x}{L} + T_{s_1}}$$

تابع توزیع دما در دیوار مسطح با شرایط بالا

نتیجه: در دیوار مسطح حالت یک بعدی دائم بدون تولید داخلی و ضریب k ثابت، تابع توزیع دما خطی است.

حالا می‌توان مقدار گرما را نیز محاسبه کرد

$$q''_x = -k\frac{\partial T}{\partial x} = -k\frac{T_{s_2}-T_{s_1}}{L}$$

- مقاومت حرارتی (R_t):

یادآوری از الکتریسیته $\quad V = RI \longrightarrow I = \dfrac{V}{R}$

V: اختلاف پتانسیل ، I: جریان ، R: مقاومت الکتریکی

اختلاف پتانسیل $\quad V \xrightarrow{\text{شبیه‌سازی}} T \quad$ اختلاف دما

جریان $\quad I \xrightarrow{\text{شبیه‌سازی}} q \quad$ جریان گرما

مقاومت الکتریکی $\quad R_e \xrightarrow{\text{شبیه‌سازی}} R_t$

$$q_x = \frac{kA\,(T_{s,1}-T_{s,2})}{L} \Longrightarrow q_x = \frac{(T_{s,1}-T_{s,2})}{\frac{L}{kA}}$$

$\xrightarrow{\text{مقایسه}} R_t = \dfrac{L}{kA}$

$R_{t,cond} = \dfrac{L}{kA}$ (هدایت)

$$\frac{m}{\frac{W}{m.K}\times m^2} = \frac{K}{W}$$

- مقاومت حرارتی در حالت جابجایی:

$$q = h.A.(T_s - T_\infty)$$

$$q = \frac{(T_s - T_\infty)}{\frac{1}{h.A}} \quad , \quad I = \frac{V}{R}$$

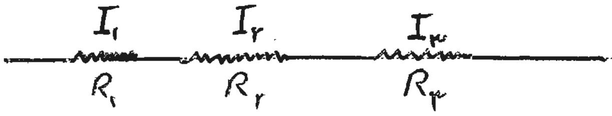
$$\Longrightarrow \boxed{R_{t,conv} = \frac{1}{h.A}}$$

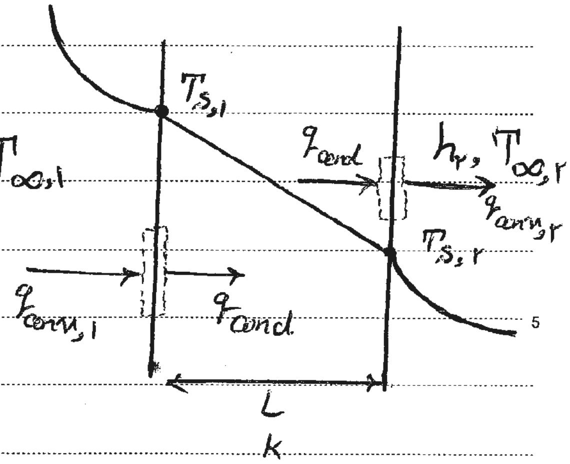
(جابجایی)

Subject:

Year. Month. Date. ( )

$$q_{conv,1} = q_{cond} = q_{conv,2} = q$$





در حالت سری $\longrightarrow$ $I_1 = I_2 = I_3 = I$

در الکتریسیته کل $R_e = R_1 + R_2 + R_3$

کل $R_t = \dfrac{1}{h_1 A} + \dfrac{L}{kA} + \dfrac{1}{h_2 A}$

$$q = q_{conv,1} = \frac{T_s - T_{\infty,1}}{\frac{1}{h_1 \cdot A}}$$

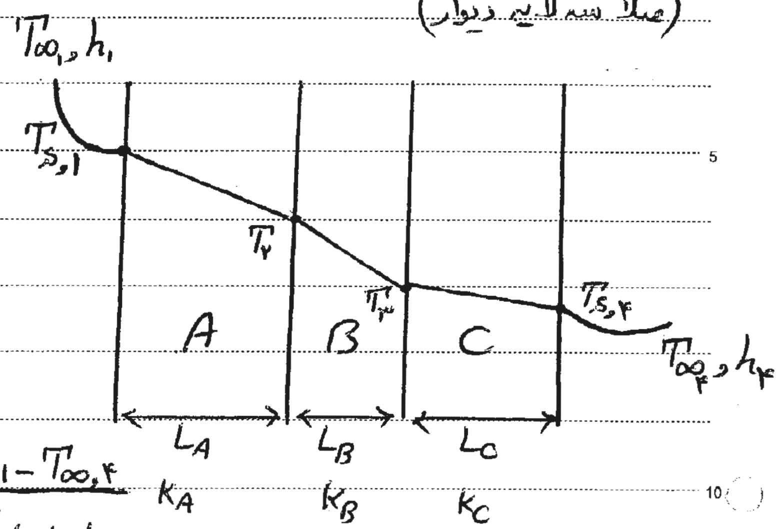
$$q = q_{cond} = \frac{T_{s,1} - T_{s,2}}{\frac{L}{kA}}$$

$$q = q_{conv,2} = \frac{T_{s,2} - T_{\infty,2}}{\frac{1}{h_2 \cdot A}}$$

$$q = \frac{T_{\infty,1} - T_{\infty,2}}{\frac{1}{h_1 A} + \frac{L}{kA} + \frac{1}{h_2 A}} \quad , \quad q = \frac{T_{\infty,1} - T_{s,2}}{\frac{1}{h_1 A} + \frac{L}{kA}} \quad , \quad q = \frac{T_{s,1} - T_{\infty,2}}{\frac{L}{kA} + \frac{1}{h_2 A}}$$

- دیوار مرکب :

(مثلاً سه لایه دیوار)



سری $\rightarrow q = q_A = q_B = q_C = q_{conv,1} = q_{conv,2}$

$$q = \frac{T_{\infty,1} - T_{s,1}}{\frac{1}{h_1 A}} = \frac{T_{s,1} - T_2}{\frac{L_A}{k_A \cdot A}} = \frac{T_2 - T_3}{\frac{L_B}{k_B \cdot A}}$$

$$= \frac{T_3 - T_{s,4}}{\frac{L_C}{k_C \cdot A}} = \frac{T_{s,4} - T_{\infty,4}}{\frac{1}{h_4 A}} = \frac{T_{\infty,1} - T_{\infty,4}}{\underbrace{R_{total}}}$$

$$\downarrow$$

$$R_{total} = \frac{1}{h_1 A} + \frac{L_A}{k_A \cdot A} + \frac{L_B}{k_B \cdot A} + \frac{L_C}{k_C \cdot A} + \frac{1}{h_4 \cdot A}$$

- شبیه سازی با قانون سرمایش نیوتن :

کاربرد ← تهویه مطبوع

دیوار مرکب شکل قبل را در نظر بگیریم :

$$q = \frac{T_{\infty,1} - T_{\infty,4}}{\frac{1}{h_1 A} + \frac{L_A}{k_A \cdot A} + \frac{L_B}{k_B \cdot A} + \frac{L_C}{k_C \cdot A} + \frac{1}{h_4 \cdot A}}$$

$$q = h \cdot A \cdot (T_s - T_\infty)$$

$$\updownarrow$$

$$q = \frac{A\,(T_{\infty,1} - T_{\infty,4})}{\frac{1}{h_1} + \frac{L_A}{k_A} + \frac{L_B}{k_B} + \frac{L_C}{k_C} + \frac{1}{h_4}} \Rightarrow q = U \cdot A \cdot (T_{\infty,1} - T_{\infty,4})$$

1

شبیه قانون سرمایش نیوتن شد. ←

ضریب کلی انتقال حرارت

$$\boxed{U = \frac{1}{\frac{1}{h_1} + \frac{L_A}{k_A} + \frac{L_B}{k_B} + \frac{L_C}{k_C} + \frac{1}{h_2}}}$$

$$\boxed{q = U \cdot A \cdot (T_{\infty_1} - T_{\infty_2})}$$

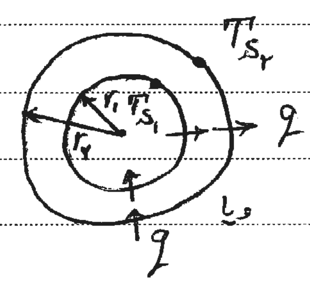
_ اگر بخواهیم به شکل مقاومت حرارتی هم نشان دهیم:

$$\boxed{R_{total} = \frac{1}{U \cdot A}}$$

_ سیستم شعاعی با انتقال حرارت یک بعدی، دائم، k ثابت:

_ استوانه طویل با انتقال حرارت شعاعی

سوال: آیا $q = \frac{kA(T_{s_1} - T_{s_2})}{r_o - r_i}$ برقرار است؟ خیر - این رابطه مختص دیواره‌ی مسطح بود



معادله پخش گرما در مختصات استوانه‌ای $\quad \frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dT}{dr}\right) = 0$

$$\text{شرایط مرزی} \begin{cases} T(r_1) = T_{s_1} \\ T(r_2) = T_{s_2} \end{cases}$$

حل) $\quad T(r) = C_1 \ln r + C_2 \xrightarrow{\text{شرایط مرزی}} \boxed{T(r) = \frac{T_{s_1} - T_{s_2}}{\ln\left(\frac{r_1}{r_2}\right)} \ln\left(\frac{r}{r_2}\right) + T_{s_2}}$

نتیجه : در استوانه ها توزیع دما خطی نیست (حتی اگر یک بعدی باشد)

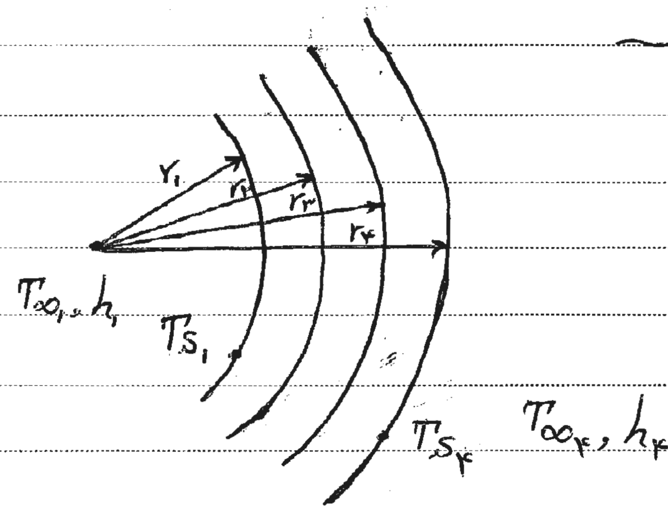
جایگذاری T در قانون فوریه $\longrightarrow q = -kA\frac{\partial T}{\partial r}$, $A = 2\pi r L$ $\Longrightarrow \boxed{q_r = \frac{2\pi L k (T_{s_1} - T_{s_2})}{\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)}}$

حفظ کردن مثبت است

پس با مقاومت الکتریکی شبیه سازی می کنیم $\left(I = \frac{V}{R}\right)$

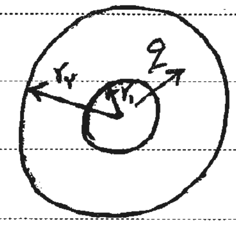
$$\boxed{R_t = \frac{\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)}{2\pi L k}}$$

- استوانه های مرکب :



$$q_r = \frac{T_{\infty_1} - T_{\infty_4}}{R_{total}} = \frac{T_{\infty_1} - T_{\infty_4}}{\left[\frac{1}{2\pi r_1 L h_1} + \frac{\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)}{2\pi L k_A} + \frac{\ln\left(\frac{r_3}{r_2}\right)}{2\pi L k_B} + \frac{\ln\left(\frac{r_4}{r_3}\right)}{2\pi L k_C} + \frac{1}{2\pi r_4 L h_4}\right]}$$

- کره:



از فصل ۲ معادله پخش گرما در مختصات کروی استخراج و حل می‌شود $\rightarrow T(r) = \dots\dots$

$$\xrightarrow{\text{جایگذاری در قانون فوریه}} q_r = -kA\frac{dT}{dr} = -k(4\pi r^2)\frac{dT}{dr}$$

$$\Rightarrow \boxed{q_r = \frac{4\pi k\,(T_{s,1} - T_{s,2})}{\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}}}$$

شبیه‌سازی با مقاومت‌ها

$$\boxed{R_t = \frac{1}{4\pi k}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)}$$ کره

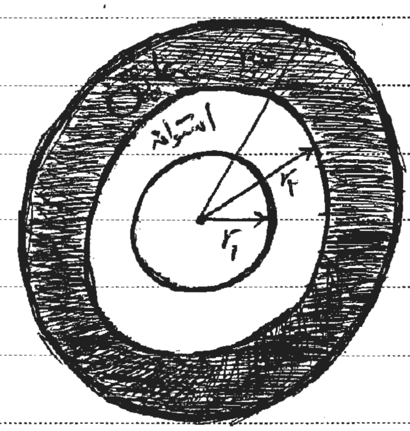
- شعاع بحرانی (درمورد استوانه و کره):

درمورد سیستم‌های شعاعی یک نکته‌ی جالب وجود دارد. در نگاه اول به نظر می‌رسد هرچه ضخامت عایق‌های استوانی یا کره بیشتر باشد مقاومت به انتقال گرما نیز بیشتر خواهد بود و جلوی انتقال حرارت را گرفته‌ایم. این بحث درمورد مکانیزم هدایت صحیح است امّا از طرفی درمورد انتقال حرارت جابه‌جایی نتیجه‌ی عکس دارد. چرا که با افزایش ضخامت عایق به خاطر طبیعت سیستم‌های استوانه و کره، مساحت بیرونی خیلی افزایش می‌یابد یعنی ناخودآگاه با عایق‌کاری سطح تبادل حرارت با محیط را زیاد کرده‌ایم و در نتیجه انتقال حرارت جابه‌جایی را افزایش داده‌ایم

این وضعیت در ضخامت های کم عایق وجود دارند به نحوی که برای سیستم های شعاعی یک شعاع بحرانی تعریف می کنیم. اگر ضخامت از این شعاع کمتر باشد، با افزایش عایق q زیادتر نیز می شود !!! اما اگر ضخامت عایق بیشتر از شعاع بحرانی باشد مشکلی وجود ندارد و وضعیت به صورت طبیعی خواهد بود یعنی با افزایش ضخامت مقاومت زیاد شده و q کمتر می شود.

$$\boxed{r_{cr} = \frac{k}{h} \rightarrow \text{شعاع بحرانی استوانه}}$$

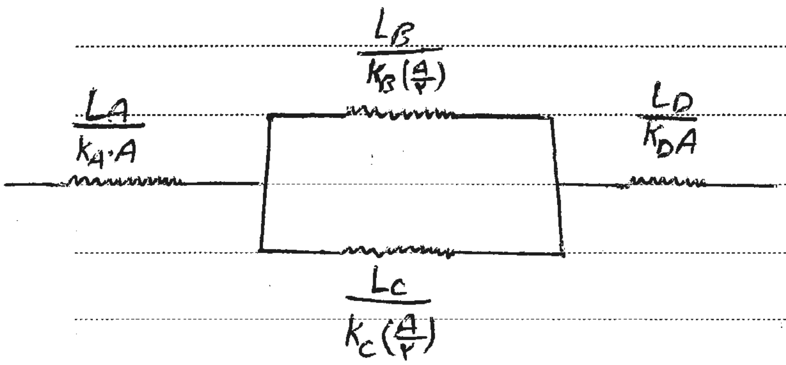
$$\boxed{r_{cr} = \frac{2k}{h} \rightarrow \text{شعاع بحرانی کره}}$$

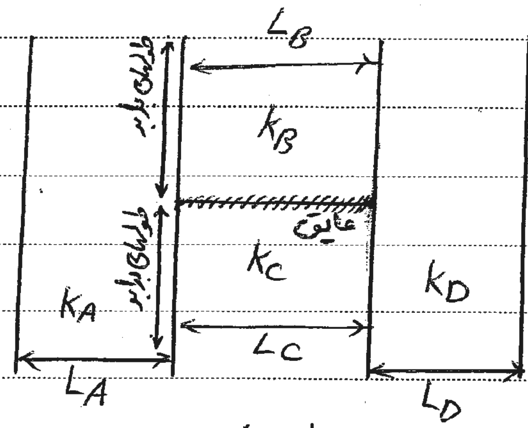


$r_{\text{عایق}} < r_{cr} \rightarrow$ افزایش ضخامت عایق نتیجه عکس می دهد

$r_{\text{عایق}} > r_{cr} \longrightarrow$ با افزایش ضخامت عایق، q کم می شود

- دیوار مرکب سری موازی :





$L_B = L_C$

$$R_t = \frac{L_A}{k_A \cdot A} + \left[\frac{1}{\frac{1}{\frac{L_B}{k_B(\frac{A}{2})}} + \frac{1}{\frac{L_C}{k_C(\frac{A}{2})}}}\right] + \frac{L_D}{k_D A}$$

موازی $\quad \frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$

- نکته ای در مورد عایق کردن دیوارهای مسطح :

کلاً عایق کاری خوب است. برای انتقال حرارت هدایتی، این عایق بندی باعث می شود درصد اتلاف حرارت کاهش یابد. برای انتقال حرارت جابه جایی هم نه ضرری به ما می زند و نه سودی می دهد چون طبق رابطه ی انتقال حرارت جابه جایی اگر دیوار مسطح عایق بندی شود مساحت دیوارها همان مساحت است و هوا هم همان هواست و خللی به کار وارد نمی شود

مثال ۸: یک مخزن کروی برای نگهداری نیتروژن مایع در دمای $77\,\mathring{k}$ استفاده شده است

قطر مخزن $0{,}5\,m$ می باشد و با عایق پودر سیلیکا پوشانده شده است. ضخامت عایق $25\,mm$:

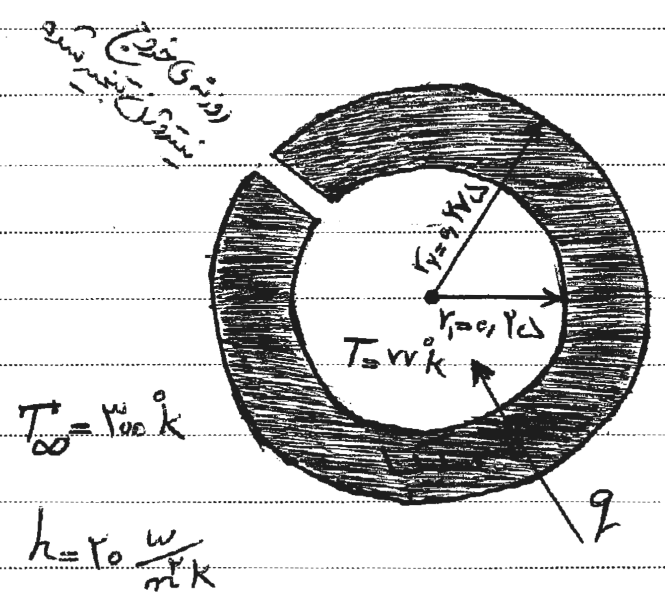
دمای هوا محیط و دمای هوای اطراف $300\,\mathring{k}$ و ضریب جابه جایی $20\,\frac{w}{m^2 k}$ می باشد گرمای

نهان تبخیر و چگالی نیتروژن مایع به ترتیب $2\times10^5\,\frac{J}{kg}$ و $804\,\frac{kg}{m^3}$ است

الف) نرخ انتقال گرما به نیتروژن مایع چقدر است؟ $\left(k_{سیلیکا} = 0{,}0017\right)$

ب) روزانه چه مقدار نیتروژن تبخیر می شود؟ (از انتقال حرارت جابجایی درون مخزن صرف نظر کنید)

حل: انتقال حرارت از بیرون به داخل است چون بیرون $300\,\mathring{k}$ و داخل $77\,\mathring{k}$ است



الف)

$77\,K$ —— $\frac{1}{h_i A_i}$ —— R_{cond} —— $\frac{1}{h_o A_o}$ —— $300\,K$

$\frac{1}{h_i A_i}$ ← فرض سؤال ← صرف‌نظر

«از داخل مخزن به خارج مخزن»

$77\,K$ —— $\frac{1}{4\pi k}\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}\right)$ —— $\frac{1}{h_o A_o}$ —— $300\,K$

$$q=\frac{T_{\infty_2}-T_{\infty_1}}{R_{total}}=\frac{300-77}{\frac{1}{4\pi k}\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}\right)+\frac{1}{h_o \times 4\pi r_2^2}}=13.6\ \frac{J}{s}\ \text{یا}\ W$$

ب) داخل مخزن گرمای نامحسوس داریم (گرمای نهان) اگر محسوس داشتیم می‌شد: $E=mc\Delta\theta$

نیتروژن

E_{st} ← $q=13.6\,W$

چون q برحسب زمان بود E هم برحسب زمان خواهد بود ← $\dot{E}_{in}=\dot{E}_{st} \rightarrow 13.6=\dot{m}L_v \rightarrow \dot{m}=6.53\times10^{-5}\ \frac{kg}{s}$

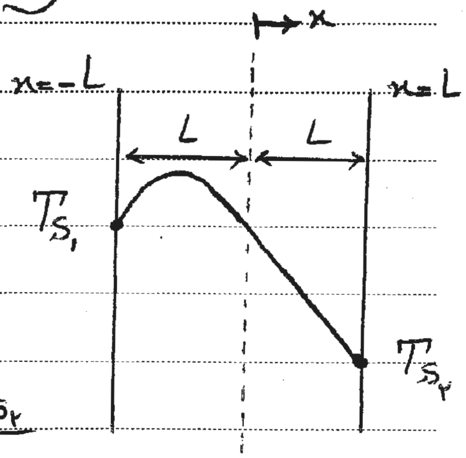
$L_v = 2\times10^{5}$

در یک روز (جرمی): $6.53\times10^{-5}\times 24\times 3600=5.64\ \frac{kg}{day}$

در یک روز (حجمی): $\frac{5.64\ \frac{kg}{day}}{804\ \frac{kg}{m^3}}=0.007\ \frac{m^3}{day}$

— هدایت یک بعدی با تولید انرژی داخلی ($\dot{q} \neq 0$) — دائم:

معادله‌ی پخش گرما: $\dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \dfrac{\dot{q}}{k} = 0$ و شرایط مرزی $\begin{cases} T(-L) = T_{s_1} \\ T(L) = T_{s_2} \end{cases}$



حل معادله: $\underset{\text{تابع توزیع دما}}{T(x)} = -\dfrac{\dot{q}}{2k}x^2 + C_1 x + C_2$

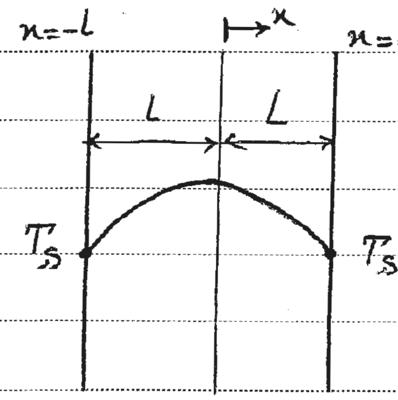
$$\rightarrow C_1 = \frac{T_{s_2} - T_{s_1}}{L} \ , \quad C_2 = \frac{\dot{q}}{2k}L^2 + \frac{T_{s_1} + T_{s_2}}{2}$$

$$\Rightarrow \boxed{T(x) = \frac{\dot{q}L^2}{2k}\left(1 - \frac{x^2}{L^2}\right) + \left(\frac{T_{s_2} - T_{s_1}}{2}\right)\frac{x}{L} + \frac{T_{s_1} + T_{s_2}}{2}}$$

با تولید انرژی، توزیع دمای خطی نیست بلکه تابع درجه ۲ است.

— حالت خاص ← دمای دو سطح برابر باشد: $T_{s_1} = T_{s_2} = T_s$

حل معادله پخش گرما: $T(x) = \dfrac{\dot{q}L^2}{2k}\left(1 - \dfrac{x^2}{L^2}\right) + \underset{\text{دمای سطح}}{T_s}$ (✻)



$\xrightarrow[\text{دمای وسط دیوار متقارن}]{x=0}$ $T(0) = T_0 = \dfrac{\dot{q}L^2}{2k} + T_s$

✻ اگر سؤال بگوید ضخامت L باید بنویسیم $L=\frac{L}{2}$.

تشکیل بی‌بعد معادله‌ی (✻): $\dfrac{T(x) - T_0}{T_s - T_0} = \left(\dfrac{x}{L}\right)^2$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

- نکات مهم قابل استخراج از بحث دیوار متقارن با تولید انرژی :

① در دیواره‌ی متقارن قله‌ی منحنی $T(x)$ در وسط دیواره بود یعنی $\left.\frac{dT}{dx}\right|_{x=0} = 0$ و با توجه به

قانون فوریه $\left.q\right|_{x=0} = -KA\left.\frac{dT}{dx}\right|_{x=0} = 0$ پس در وسط دیوار هیچ انتقال حرارتی نداریم

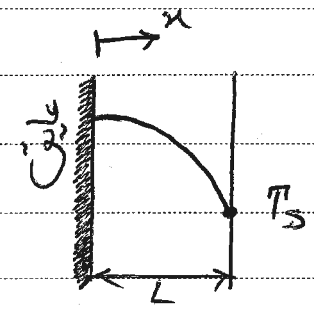
و می‌توان فرض کرد که یک لایه یا عایق در وسط دیوار قرار گرفته است. این مشکل ما در تجزیه و

تحلیل دیواره‌هایی که از یک طرف عایق و از طرف دیگر آزاد هستند نیز کمک می‌کند یعنی می‌توانیم

این گونه دیوارها را به صورت نصف دیوار متقارن در نظر بگیریم و از همان معادله‌ی (✱)

منحنی قبل، برای توزیع دما استفاده کنیم. البته در این حالت دیگر ضخامت دیوار همان L

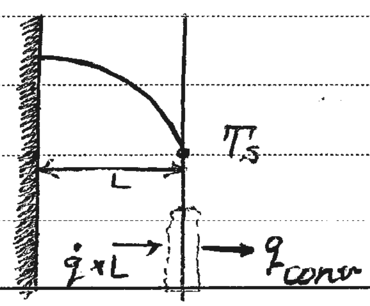
است (نه $2L$؛ یعنی در این حالت اگر صورت مسئله بگوید ضخامت $8m$ داریم $L=8m$)



② در بسیاری از اوقات این اشکال وجود دارد که دمای T_s مشخص نیست و عملاً استفاده

از رابطه‌ی توزیع دمای (✱)، ناممکن می‌شود. اما می‌توان به صورت دیگر T_s را نیز محاسبه کرد و در

همان رابطه (✱) جایگذاری نمود:



PARSIAN

موازنه‌ی انرژی روی سطح استوانه: $\dot{E}_{in} = \dot{E}_{out} \longrightarrow \dot{q} \times \overbrace{L \times A}^{\text{حجم}} = hA(T_s - T_\infty)$

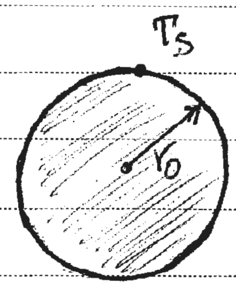
$$\longrightarrow \boxed{T_s = T_\infty + \frac{\dot{q} L}{h}}$$

خب، حالا که انرژی را برابر کردیم در رابطه‌ی فوق T_∞ را هر شرایطی T_∞ دمای جایی است که می‌خواهیم آنجا دستگاهی طراحی کنیم مثلاً اگر کوره بود دمای T_∞ آن مشخص است یا دمای هوای اطراف بوده قابل تعیین است.

«پس مقدار T_∞ معمولاً در دسترس است.»

- استوانه توپر با تولید انرژی داخلی - حالت دائم:

معادله‌ی پخش در استوانه: $\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dT}{dr}\right) + \frac{\dot{q}}{k} = 0$



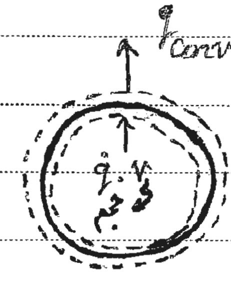
«استوانه‌ی توپر»

شرایط مرزی
$$\begin{cases} T(r_0) = T_s \\ \left.\dfrac{dT}{dr}\right|_{r=0} = 0 \longrightarrow \text{چون در مرکز استوانه تبادل انرژی نخواهیم داشت} \end{cases}$$

حل معادله $\rightarrow T(r) = \frac{\dot{q} r_0^2}{4k}\left(1 - \frac{r^2}{r_0^2}\right) + T_s$

شکل بی‌بعد $\longrightarrow \frac{T(r) - T_s}{T_0 - T_s} = 1 - \left(\frac{r}{r_0}\right)^2$ دمای محور تقارن: T_0 ؛ در $r=0$: $T(0) = T_0$

نکته: چنانچه T_s معلوم نباشد همانند حالت قبل می‌توان موازنه‌ی سطح روی سطح استوانه نوشت و T_s را بدست آورد.



موازنه‌ی انرژی روی سطح استوانه $\rightarrow \dot{E}_{in} = \dot{E}_{out}$

$$\dot{q} \times (\underbrace{\pi r^2 \times L}_{\text{حجم استوانه}}) = h \times \underbrace{A}_{2\pi r_0 L} \times (T_s - T_\infty)$$

$$\boxed{T_s = T_\infty + \frac{\dot{q} r_0}{2h}}$$

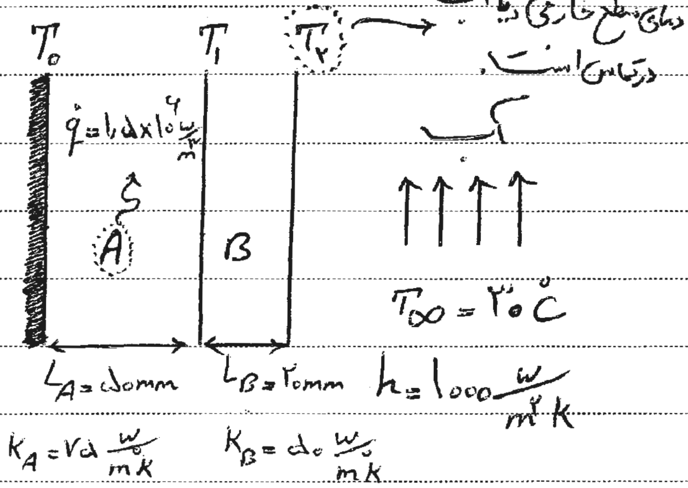
نکته‌ی مهم: در نواحی یا مناطقی که داخل جسم تولید انرژی داشته باشیم نمی‌توانیم از مقاومت حرارتی که قبلاً توضیح داده شده استفاده کرد و باید از همین روابط گفته شده استفاده کرد چرا که نرخ انتقال گرما ثابت نیست و نمی‌توان از روش سری کردن مقاومت‌ها استفاده کرد.

مثال: یک دیوار مسطح از دو ماده‌ی A و B ساخته شده است. ابعاد و ضریب هدایت دیوار در شکل نشان داده شده است. در قسمت A تولید انرژی داخلی به میزان $\dot{q} = 1.5 \times 10^6\ W$ وجود دارد. یک سمت ماده‌ی A عایق کاری شده و یک سمت ماده‌ی B به وسیله آب $30^\circ C$ و ضریب جابجایی $1000 \frac{W}{m^2.K}$ خنک می‌شود.

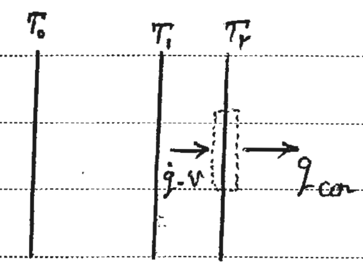
الف) به صورت تقریبی شکل توزیع دما در دیواره‌ها چگونه است؟

ب) دمای سطح عایق کاری شده، دمای سطح خارجی B، دمای نقطه‌ی اتصال A و B و سطح

عایق کاری شده را بیابید.



حل) $T_2 = ?$ (سطح بیرونی B)



موازنه سطح خارجی B : $\dot E_{in} = \dot E_{out}$

$$\dot q \times \forall = h\cdot A\,(T_2 - T_\infty)$$

$$1.5\times10^6 \times (50\times10^{-3}\times A) = 1000\times A\times(T_2 - 30) \Rightarrow T_2 = 105\,^\circ C$$

دمای تماس $T_1 = ?$

$$\xrightarrow{} T_1 \overset{R_{cond}}{\underset{\frac{L_B}{k_B A}}{\text{---}}} \overset{R_{conv}}{\underset{\frac{1}{h\cdot A}}{\text{---}}} 30\,^\circ C$$

$$q = \frac{T_1 - 30}{\frac{0.02}{150\times \cancel{A}} + \frac{1}{1000\times \cancel{A}}} = 1.5\times10^6\times(50\times10^{-3}\times \cancel{A}) \Rightarrow T_1 = 115\,^\circ C$$

$q = \dot q \times \forall$

راه دوم : مشروط بر اینکه قسمت اول مسئله را حل کرده باشیم

$$\xrightarrow{q} T_1 \overset{R_{cond}}{\underset{\frac{L_B}{k_B\cdot A}}{\text{---}}} 105$$

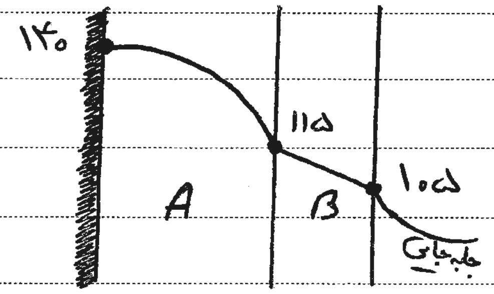
$$q = \frac{T_1 - 105}{\frac{0.02}{150\times A}} \Rightarrow T_1 = 115\,^\circ C$$

چون در B تولید انرژی نداشتیم توانستیم از روش مقاومت حرارتی حل کنیم اما در قسمت A چنین امری ممکن نیست.

دمای عایق $T_0 = ?$

$$T(x) = \frac{\dot{q} L^2}{2k}\left(1 - \frac{x^2}{L^2}\right) + T_s \xrightarrow{x=0 \text{ در عایق}} T_0 = \frac{\dot{q} L^2}{2k} + T_s \qquad T_s = 115$$

$$\Rightarrow T_0 = \frac{1.5\times10^6 \times (50\times10^{-3})^2}{2\times75} + 115 \Rightarrow T_0 = 140\ ^\circ C$$



«سؤال ۱۱ فصل ۳ کتاب حل شود»

- پره (Fin) یا سطوح گسترش یافته:

می‌خواهیم انتقال حرارت را زیاد کنیم، باید: $(q = h.A(T_s - T_\infty))$

① h را زیاد کنیم ← نیاز به یک دمنده داریم تا سرعت هوا روی سطح زیاد شود ولی این روش به صرفه نیست

(به لحاظ اقتصادی به صرفه نیست)

② A را زیاد کنیم ← استفاده از پره (مثل پره‌های موتورسیکلت که تماس آن پره‌ها با هوا بیشتر شود)

(بهترین روش)

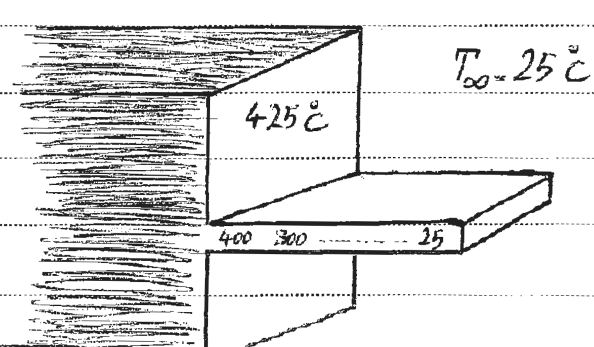
③ T_s را زیاد کنیم ← امکان‌پذیر نیست

④ T_∞ را کم کنیم ← دست ما نیست

* هرچه ضریب انتقال حرارت پره بیشتر شود می‌تواند سریع‌تر گرما را انتقال دهد

* اگر $T_\infty = T_s$ باشد ← انتقال حرارت نخواهیم داشت

* بهترین پره، پره‌ای است که به دمای پایه نزدیک‌تر باشد



- پره‌ها
  - سطح مقطع مستطیل
    - مستقیم
      - مقطع ثابت ← نصب روی سطوح
      - مقطع متغیر ← نصب روی سطوح
    - شعاعی (حلقوی) ← روی لوله‌ها نصب می‌شود
  - سطح مقطع گرد (سوزنی)
    - سطح مقطع یکنواخت ← نصب روی سطوح
    - سطح مقطع متغیر (غیریکنواخت) ← نصب روی سطوح

(جدول ۳-۴) توزیع دما و اتلاف گرما در پره‌ها با مقطع عرضی یکنواخت

حالت	شرایط نوک پره $(x=L)$	توزیع دما $\frac{\theta}{\theta_b}$	آهنگ انتقال گرما در پره q_f
الف	انتقال گرمای جابه‌جایی $h\theta(L) = -k\frac{d\theta}{dx}\Big\|_{x=L}$	$\frac{\cosh m(L-x)+\left(\frac{h}{mk}\right)\sinh m(L-x)}{\cos mL+\left(\frac{h}{mk}\right)\sinh mL}$	$M\frac{\sinh mL+\left(\frac{h}{mk}\right)\cosh mL}{\cosh mL+\left(\frac{h}{mk}\right)\sinh mL}$
ب	آدیاباتیک $\frac{d\theta}{dx}\Big\|_{x=L}=0$	$\frac{\cosh m(L-x)}{\cosh mL}$	$M\tanh mL$
ج	دمای مشخص $\theta(L)=\theta_L$	$\frac{\left(\frac{\theta_L}{\theta_b}\right)\sinh mx+\sinh m(L-x)}{\sinh mL}$	$M\frac{\cosh mL-\frac{\theta_L}{\theta_b}}{\sinh mL}$
د	پره‌ی نامتناهی $(L\to\infty)$ $\theta(L)=0$	e^{-mx}	M

جدول ۳ـ۴ ← انتقال حرارت و توزیع دما در پره‌های با سطح مقطع یکنواخت

$$\theta = T - T_\infty \qquad m^2 = \frac{hP}{kA_c}$$

① پره‌های مستقیم مستطیلی یکنواخت

② پره‌های سوزنی یکنواخت

$$\theta_b = \theta(0) = T_b - T_\infty \qquad M = \sqrt{hPkA_c}\,\theta_b$$

P : محیط پره

A_c : مساحت سطح مقطع پره

b ← base (پایه)

مثال : انتهای یک میله‌ی خیلی طویل به قطر $25\,mm$ در $100^\circ C$ نگه داشته شده است. سطح میله در معرض هوای محیط به دمای $25^\circ C$ و ضریب جابجایی $10\ \frac{W}{m^2.K}$ قرار دارد.

الف) اگر جنس میله به ترتیب از مس خالص ($k = 398\ \frac{W}{m.K}$) و فولاد زنگ نزن ($k = 14\ \frac{W}{m.K}$) باشد، اتلاف گرما را در دو حالت حساب کنید.

میله‌ی طویل ← روابط سطر آخر جدول (۳ـ۴)

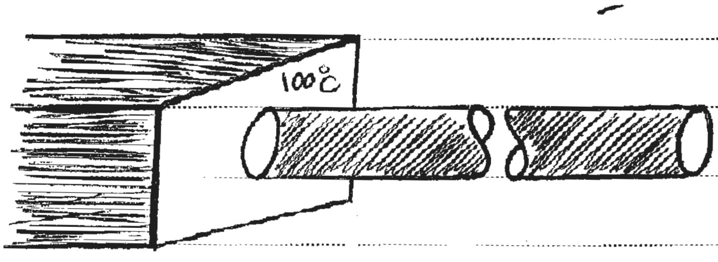
$d = 25\,mm = 0.025\,m$

$h = 10\ \frac{W}{m^2K}$

$T_\infty = 25^\circ C$

$T_b = 100^\circ C$

دیدگاه : می‌توانیم بعضی از قطعات را به صورت پره شبیه‌سازی کنیم



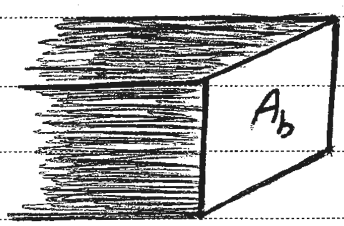
حل) $\xrightarrow[\text{سطر ۴ جدول}]{\text{پره طویل}} q_f = M \xrightarrow{\text{زیر جدول}} q_f = (h\cdot P\cdot k\cdot A_c)^{\frac{1}{2}}\,\theta_b \quad ; \quad \theta_b = T_b - T_\infty$

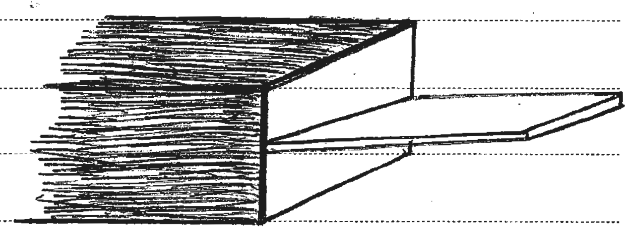
برای مس $\longrightarrow q_f = \left(10\times(\pi\times 0{,}025)\times 398\times\left(\frac{\pi\times 0{,}025}{4}\right)\right)^{\frac{1}{2}}(100-25) = 29{,}4\,W$

برای فولاد $\longrightarrow q_f = \left(10\times(\pi\times 0{,}025)\times 14\times\left(\frac{\pi\times 0{,}025}{4}\right)\right)^{\frac{1}{2}}(100-25) = 5{,}5\,W$

«به اثر k (ضریب هدایت) دقت کنید»

— کارایی پره (ε_f) :





(بدون پره) $q = h\cdot A_b\,\overbrace{(T_b - T_\infty)}^{\theta_b}$

با فرض خوشبینانه: $q_f = h\cdot A_f\,(T_f - T_\infty)$

تعریف کارایی پره: $\varepsilon_f = \dfrac{q_f}{h\cdot A_b\cdot\theta_b}$

باید: $\dfrac{q_f}{q_{(\text{بدون پره})}} > 1$

برای یک پره‌ی مناسب باید $\longleftarrow \varepsilon_f \geq 2$

به‌طور خلاصه با استفاده از کارایی پره تفاوت می‌کند آیا اصلاً با نصب پره توانسته‌ایم انتقال حرارت را نسبت به حالت بدون پره زیاد کنیم و این افزایش چند برابر بوده است.

حالت خاص :

اگر پره طویل با سطح مقطع یکنواخت باشد (مستطیلی یا سوزنی) و ξ_f را از جدول (۳-۴) استخراج کنیم و در رابطه‌ی کارایی جایگذاری کنیم خواهیم داشت :

$$\boxed{\xi_f = \left(\frac{k \cdot P}{h \cdot A_c}\right)^{\frac{1}{2}}}$$

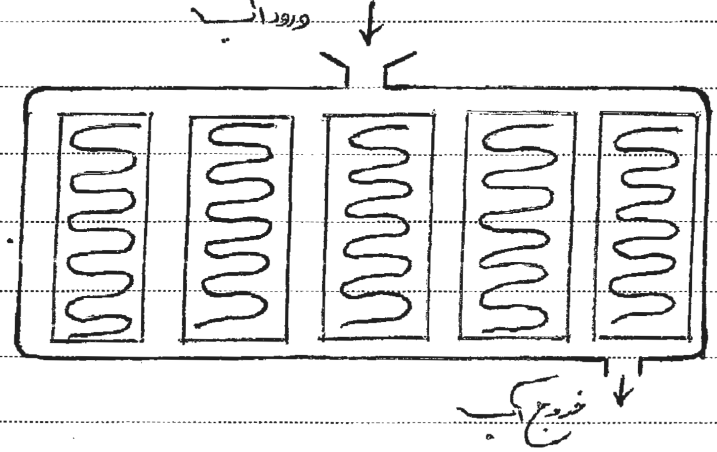
مساحت سطح مقطع پره

نتایج :

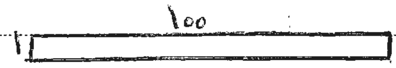
① افزایش k پره ⟵ افزایش کارایی

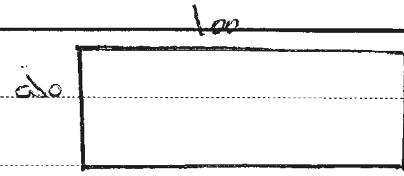
② کاهش h ⟵ افزایش کارایی

اگر برای نصب پره حق انتخاب داشته باشیم پره را سمت گاز نصب می‌کنیم تا مایع، چون که گازها h کمتری دارند مانند رادیاتور آلومینیومی منازل یا رادیاتور اتومبیل



③ افزایش نسبت $\frac{P}{A_c}$ ⟵ افزایش کارایی : از پره‌ی نازک استفاده کنیم





$$\frac{P}{A_c}=\frac{(100+1)\times 2}{100\times 1}=2$$

$$\frac{P}{A_c}=\frac{(100+50)\times 2}{100\times 50}=0.06$$

- راندمان یا بازده‌ی پره (η_f):

در پارامتر قبل (کارایی)، انتقال حرارت پره نسبت به انتقال حرارت بدون پره محاسبه می‌شد تا از مفید بودن پره اطمینان حاصل گردد. امّا در این پارامتر یعنی راندمان پره، انتقال حرارت از پره نسبت به خود پره در حالت ایده‌آل مقایسه می‌شود.

پره‌ی ایده‌آل پره‌ای است که دمای سرتاسر آن با دمای پایه برابر باشد که البته هیچگاه محقق نخواهد شد. بنابراین با توجه به توضیحات بالا کارایی همیشه عددی بزرگتر از ۱ یا ۲ می‌باشد امّا راندمان همیشه کمتر از ۱ است.

$$\eta_f=\frac{q_f}{q_{max}}=\frac{q_f}{h\cdot \underbrace{A_f}_{\text{مساحت سطح روی پره}}\cdot \theta_b}$$

کاربرد مهم این رابطه این است که می‌توانیم η_f را از جداول استخراج و با ضرب در q_{max} ($q_{max}=h.A_f.\theta_b$) مقدار q_f را حساب کنیم. بدین ترتیب به راحتی q_f محاسبه می‌شود و محدودیت جدول (۳-۴) که فقط برای پره‌های یکنواخت (سوزنی و مستطیلی) رفع می‌شود.

ـ مقدار η_f از اشکال ۳ـ ۱۸ و ۳ـ ۱۹ قابل استخراج است.

$$(\text{مستطیل})\ A_f = 2w.L$$

$$(\text{مثلث})\ A_f = 2w.\left[L^2 + \left(\frac{t}{2}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$(\text{سهمی})\ A_f = 2{,}05\,w\left[L^2 + \left(\frac{t}{2}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$(\text{پره‌ی شعاعی})\ A_f = 2\pi\left(r_{2c}^2 - r_1^2\right)$$

ـ راندمان کل سطح (η_o):

تا اینجا عملکرد یک پره به تنهایی بررسی شد اما اگر چندین پره در کنار هم قرار گرفته باشند وضعیت کمی متفاوت خواهد بود چرا که هم باید انتقال حرارت از پره‌ها را در نظر بگیریم و هم انتقال حرارت از قسمت‌های باقی‌مانده‌ی پیش (base) را. (فضای میانی پایه)

$$\boxed{\eta_o = \frac{q_t}{q_{max}}}$$

q_t: انتقال حرارت کل از پره‌ها و قسمت‌های باقی‌مانده‌ی پایه

$$q_{max} = h.A_t\,(T_b - T_\infty)$$

چون q_{max} را محاسبه می‌کنیم

$$A_t = A_b + A_f$$

A_b: جاهای خالی پایه

A_f: روی پره‌ها

Subject:

Year. Month. Date. ( )

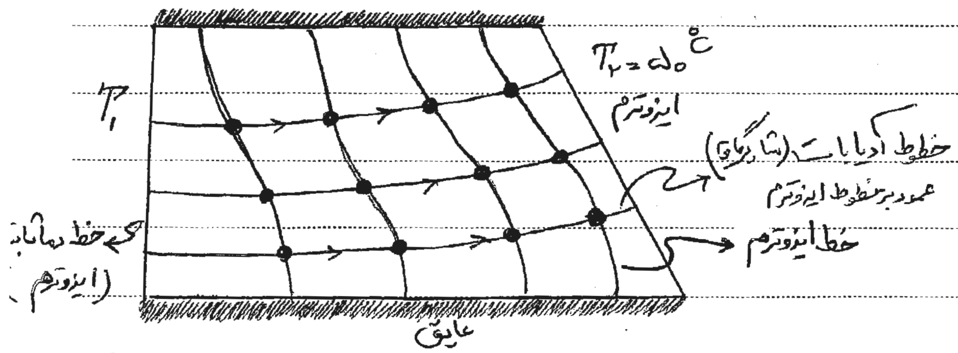
از این رابطه نیز می‌توان که گرمت و با داشتن η_o و q_{max} کل انتقال حرارت واقعی

از جسم و پره‌ها (q_t) را محاسبه نمود. η_o از رابطه‌ی زیر بدست می‌آید:

$$\eta_o = 1 - \frac{A_f}{A_t}\left(1 - \eta_f\right)$$

$\eta_f \rightarrow$ از جداول (۳-۱۸) و (۳-۱۹)

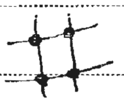
فصل چهارم : انتقال حرارت هدایتی - ۲ بعدی - دائم - k ثابت



برای حل معادله‌ی پخش گرمای $\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}=0$ می‌توان از روش جداسازی متغیرها استفاده کرد که در بخش (۲-۴) کتاب تشریح شده است اما اشکال این روش آن است که فقط در مورد مسائل بسیار ساده جواب می‌دهد به عبارت دیگر حل معادله‌ی پخش گرما به روش تحلیلی معمولاً در مسائل واقعی امکان‌پذیر نیست به همین دلیل ۲ روش دیگر نیز برای حل این معادله به کار می‌رود:

روش حل معادلات:

- تحلیلی : دقیق است، ممکن است در مسائل پیچیده حل تحلیلی نداشته باشیم، جوابهای پیوسته در تمام نقاط قابل محاسبه است.
- عددی : ممکن است که خطا داشته باشد. با تکرار جواب بالاخره بدست می‌آید. جوابها ناپیوسته و فقط در گره‌ها بدست می‌آید.



یکی از این روشها روش ترسیمی است که در بخش (۳-۴) کتاب توضیح داده شده است. این روش نیز به رسم دقیق خطوط ایزوترم و آدیابات وابسته است. این روش نیز جوابها را بصورت تقریبی

Subject:

Year. Month. Date. ( )

ونا پیوسته بدست می آورد. به تدریج با پیشرفت کامپیوترها این روش منسوخ شده است و در حال حاضر بیشتر مسائل با روش عددی حل می شود که در این بخش، حل معادلات بخش با روش عددی مورد تاکید قرار خواهد گرفت. به عنوان چند حالت خاص و متداول، روش ترسیم نیز دارای روابط ساده تری باشد به این روش، روش ضریب شکل نیز گفته می شود. ابتدا باید مقدار ضریب شکل را از جدول (۱-۴) کتاب استخراج کرد و سپس در رابطهٔ زیر قرار داد:

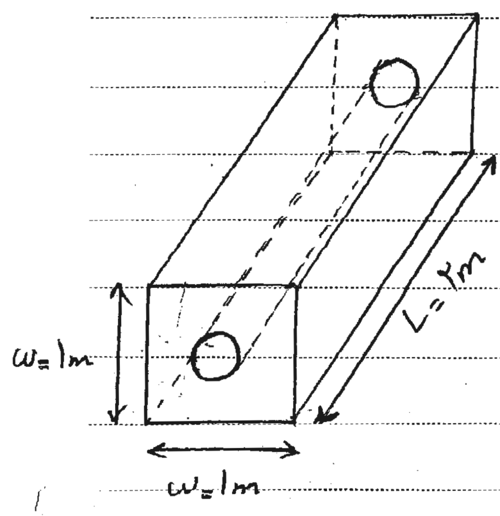
$$q = S\,k\,(T_1 - T_2)$$

گرما

ضریب هدایت جسم

ضریب شکل از جدول (۱-۴)

مثال (۱-۴ کتاب): سوراخی به قطر ۲۵ره متر در مرکز یک جسم مکعب مستطیل با مقطع مربع (1m×1m) و به طول 2m ایجاد شده است. ضریب هدایت مکعب مستطیل ۱۵۰ $\frac{w}{m^\circ k}$ می باشد. عبور سیال گرم از داخل سوراخ دمای سطح داخلی را در ۷۵°C نگه می دارد ولی دمای سطح خارجی ۲۵°C است. نرخ انتقال گرما از داخل به بیرون چقدر است؟



$$S = \frac{2\pi L}{Ln\left(1.08\,\frac{w}{D}\right)}$$ ← سطر ۶ جدول

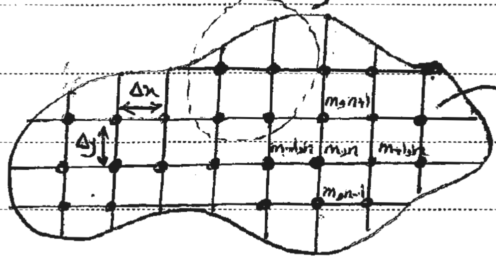
$$S = \frac{2\pi \times 2}{Ln\left(1.08 \times \frac{1}{0.2}\right)} = 8.59$$

$$q = S\,k\,(T_1 - T_2) = 8.59 \times 150 \times (75 - 25) = 64.4\ kW$$

PARSIAN

- روش عددی :

نحوه چیدمان این گره‌ها (فاصله، تعداد) ← شبکه
(mesh)
(Grid)



گره (Node)
(Node Point)

تعداد گره زیاد ← { دقت بالاتر / زمان بر }

* نامگذاری گره‌ها :

$T_{m,n}$

$m \rightarrow$ اندیس افقی

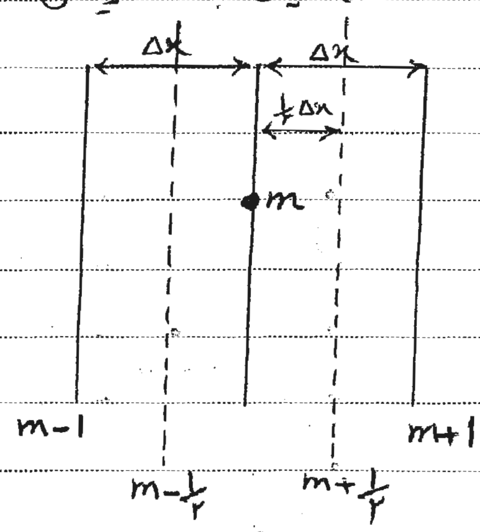
$n \rightarrow$ اندیس عمودی

تعداد گره کم ← { دقت کمتر / زمان سریعتر }

- مرحله‌ی گسسته‌سازی معادلات (Discrete) :

← یعنی عبارت ریاضی مشتق را از معادله حذف کنیم و به جای آن از مقادیر گره‌ها استفاده کنیم

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0$$



$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{\left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_{m+\frac{1}{2},n} - \left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_{m-\frac{1}{2},n}}{\Delta x} \quad \text{I}$$

$$\left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_{m-\frac{1}{2},n} = \frac{T_{m,n} - T_{m-1,n}}{\Delta x} \quad \text{II}$$

$$\left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_{m+\frac{1}{2},n} = \frac{T_{m+1,n} - T_{m,n}}{\Delta x} \quad \text{III}$$

II و III ⟹ I

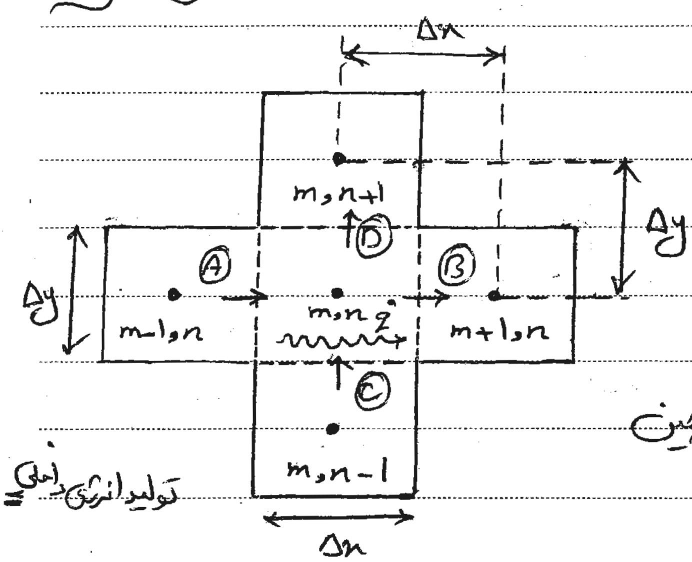
$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{T_{m+1,n} + T_{m-1,n} - 2T_{m,n}}{(\Delta x)^2}$$

به طریق مشابه $\Longrightarrow \dfrac{\partial^2 T}{\partial y^2} = \dfrac{T_{m,n+1} + T_{m,n-1} - 2T_{m,n}}{(\Delta y)^2}$

$\xrightarrow[\Delta x = \Delta y]{\text{برای سادگی فرض می‌کنیم}}$ جایگذاری در معادلهٔ پخش گرما $\Longrightarrow$ $\boxed{T_{m,n+1} + T_{m,n-1} + T_{m+1,n} + T_{m-1,n} - 4T_{m,n} = 0}$

شکل تفاضل محدود معادله پخش گرما برای گره‌ای که میان ۴ گره دیگر قرار گرفته است.

ـ روش دیگر برای گسسته سازی و نوشتن معادله تفاضل محدود : روش موازنهٔ انرژی (مناسب وقتی که در جسم تولید انرژی هم داشته باشیم)



$\dot q$ = تولید انرژی داخلی

در محدوده نقطه چین : $\dot E_{in} - \dot E_{out} + \dot E_g = 0$

$$q_A = kA\frac{\partial T}{\partial x}$$

A $q_A = k(\Delta y \cdot 1)\dfrac{T_{m-1,n} - T_{m,n}}{\Delta x}$

C $q_C = k(\Delta x \cdot 1)\dfrac{T_{m,n-1} - T_{m,n}}{\Delta y}$

B $q_B = k(\Delta y \cdot 1)\dfrac{T_{m,n} - T_{m+1,n}}{\Delta x}$

D $q_D = k(\Delta x \cdot 1)\dfrac{T_{m,n} - T_{m,n+1}}{\Delta y}$

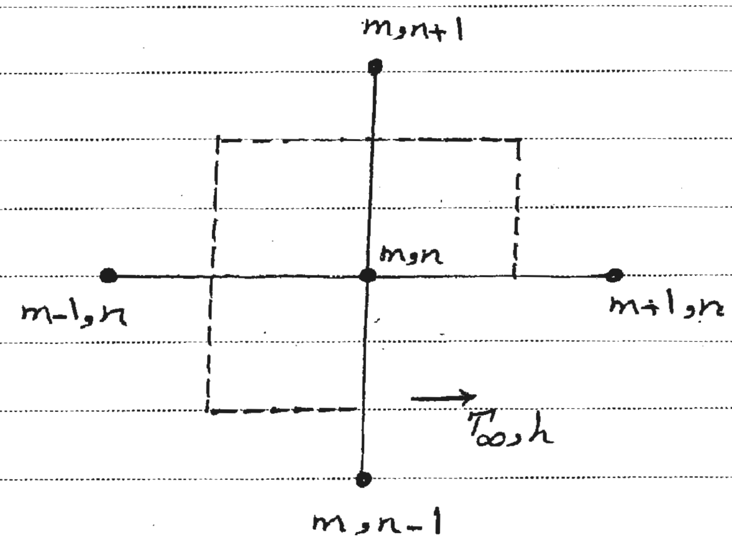
$$\dot{E}_g = \dot{q}\,(\Delta x \cdot \Delta y \cdot 1)$$

$$\xrightarrow{\text{موازنه انرژی}} q_A - q_B + q_C - q_D + \dot{E}_g = 0$$

$$\xrightarrow{\text{جایگذاری و ساده سازی}} \boxed{T_{m,n+1} + T_{m,n-1} + T_{m+1,n} + T_{m-1,n} + \frac{\dot{q}\,(\Delta x \cdot \Delta y)}{k} - 4\,T_{m,n} = 0}$$

معادله تفاضل محدود برای یک گره میان ۴ گره دیگر با تولید انرژی

همیشه این طور نیست که یک گره در میان چهار گره‌ی دیگر باشد و از معادلات بالا استفاده کنیم مثلاً در لبه‌های جسم ممکن است تعداد گره‌های اطراف کمتر باشد. در کتاب به عنوان مثال، معادله‌ی تفاضل محدود برای یک گوشه‌ی داخلی که در معرض انتقال حرارت جابه‌جایی نیز قرار دارد بدست آورده شده است.



$$\boxed{T_{m-1,n} + T_{m,n+1} + \frac{1}{2}\left(T_{m+1,n} + T_{m,n-1}\right) + \frac{h\,\Delta x}{k}\,T_\infty - \left(3 + \frac{h\,\Delta x}{k}\right)T_{m,n} = 0}$$

معادله تفاضل محدود برای گره در گوشه داخلی

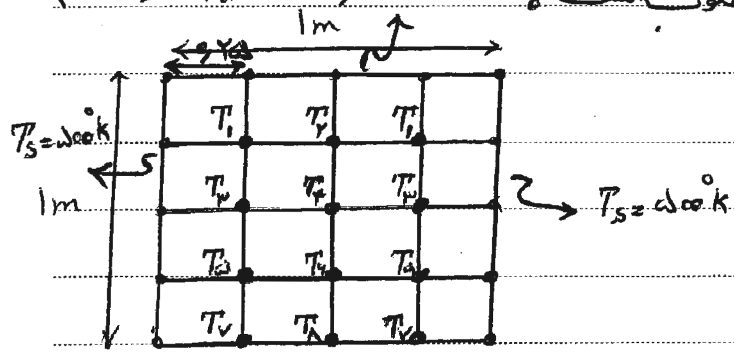
به همین ترتیب می توان انواع گره های دیگر را نیز در نظر گرفت و باید به روش های گفته شده در هر حالت برای آن گره خاص عملیات گسسته سازی را انجام دهیم البته در سطح درس انتقال حرارت ۱ معادلات گسسته شده‌ی انواع گره های متداول در جدول (۴-۲) ارائه شده است تا حل مسئله راحت تر باشد.

- دستگاه معادلات تفاضل محدود :

اگر برای گره های موجود در جسم، معادلات تفاضل محدود نوشته شوند، یک دستگاه معادلات خطی حاصل می شود. نسبت به معادله‌ی پخش گرما تعداد معادلات زیاد شده اما در عوض معادلات کاملاً خطی هستند و می توان راحت تر دستگاه معادلات را حل کرد. مثلاً اگر در مسئله‌ای N گره داشته باشیم، یک دستگاه N معادله N مجهول به صورت زیر نوشته می شود :

$$\begin{cases} a_{11}T_1 + a_{12}T_2 + a_{13}T_3 + \cdots + a_{1N}T_N = C_1 \\ a_{21}T_1 + a_{22}T_2 + a_{23}T_3 + \cdots + a_{2N}T_N = C_2 \\ \vdots \\ a_{N1}T_1 + a_{N2}T_2 + a_{N3}T_3 + \cdots + a_{NN}T_N = C_N \end{cases}$$

مثال (۴-۳): کوره‌ی بزرگی روی یک ستون بلند از آجر با ابعاد $1m \times 1m$ قرار دارد. سه سطح ستون در دمای $500 k$ و سطح دیگر در معرض جریان هوا با دمای $300 k$ و $h = 10 \frac{w}{m^2.k}$ قرار دارد
با استفاده از یک شبکه با ابعاد $\Delta x = \Delta y = 0.25 m$ مطلوب است: $T_s = 500 k$ ($k=1$ ضریب هدایت دیوار)



الف) توزیع دمای دوبعدی در ستون

ب) مقدار گرمای منتقل شده از ستون به هوا

$$\begin{cases} T_\infty = 300 k \\ h = 10 \frac{w}{m^2.k} \end{cases}$$

گره ① $\longrightarrow 500 + 500 + T_2 + T_3 - 4T_1 = 0$

گره ② $\longrightarrow$

$500 + T_1 + T_1 + T_4 - 4T_2 = 0$ از فرمول یک گره میان ۴ گره

و یا

$2T_1 + 500 + T_4 - 4T_2 = 0$ از فرمول سطح عایق در جدول

$$\boxed{2T_{m-1,n} + T_{m,n+1} + T_{m,n-1} + \frac{2h\Delta x}{k} T_\infty - 2\left(\frac{h\Delta x}{k} + 2\right) T_{m,n} = 0}$$

حالت ۳ جدول ← هم برای جابجایی کاربرد دارد و هم برای عایق ($h=0$)

گره ③ $\longrightarrow 500 + T_1 + T_4 + T_5 - 4T_3 = 0$

گره ④ $\longrightarrow$

$T_3 + T_2 + T_3 + T_6 - 4T_4 = 0$ از فرمول یک گره میان ۴ گره

می‌توانستیم از فرمول عایق نیز بنویسیم

گره ۵ $\rightarrow 500 + T_3 + T_6 + T_7 - 4T_5 = 0$

گره ۶ $\rightarrow \left\{ T_5 + T_4 + T_5 + T_8 - 4T_6 = 0 \right.$

و یا از روش عایق

گره ۷ و ۸

حالت ۳ جدول در معرض جابجایی

$h = 10$ و $\Delta x = 0.25$

$k = 1 \frac{W}{m.K}$

$$\rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 2T_5 + T_8 + 2000 - 9T_7 = 0 \\ 2T_6 + 2T_7 + 1500 - 9T_8 = 0 \end{array} \right.$$

مرتب کردن دستگاه 8

$-4T_1 + T_2 + T_3 + 0 + 0 - \quad = -1000$

$2T_1 - 4T_2 + 0 + T_4 + 0 = -500$

۸ معادله ۸ مجهول

$T_1 + 0 - 4T_3 + T_4 + T_5 + 0 = -500$

$\vdots$

$0 + 2T_6 + 2T_7 - 9T_8 = -1500$

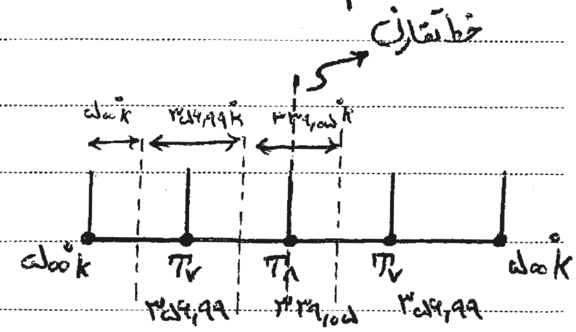
شکل ماتریس دستگاه:

$$[A][T]=[C]$$

روش های حل:
- مستقیم: روش ماتریس معکوس ← برای تعداد معادلات کم مناسب است
- تکراری: روش گوس-سایدل ← محاسبات عددی

A^{-1} را در طرفین ضرب می‌کنیم ⟵ $[T]=[A]^{-1}[C]$

قسمت دوم مسأله: انتقال حرارت از سمت پایین ستون



$$q = hA(T_s - T_\infty)$$

عمق قطعه

$$q = \Big[10 \times \left(\frac{\Delta x}{2} \times L\right)(500-300) + 10 \times (\Delta x \times L)(359.99-300) + 10 \times \left(\frac{\Delta x}{2} \times L\right)(339.05-300)\Big] \times 2$$

برای تقارن

$h=10$, $T_\infty = 300$

$q_{conv} = ?$

$$\Rightarrow \frac{q}{L} = q' = 883 \ \frac{W}{m}$$

* تمرین های ۲۰ و ۲۵ کتاب حل شود.

فصل پنجم: هدایت گرمایی لحظه‌ای

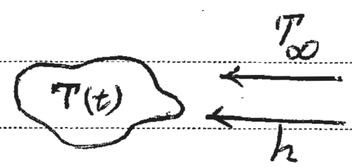
در انتقال گرما مسائلی وجود دارد که به زمان نیز وابسته‌اند. مثلاً اگر یک قطعه‌ی فلزی در فرآیند عملیات حرارتی را در نظر بگیریم ابتدا داخل یک کوره قرار گرفته تا دمای آن بالا برود در مرحله‌ی بعدی مجدداً در معرض آب یا هوای سرد قرار می‌گیرد تا سریعاً خنک شود. بنابراین باید بدانیم که چقدر طول می‌کشد تا قطعه خنک شود یعنی زمان نیز نقش پیدا می‌کند پس معادله‌ی پخش گرما نسبت به حالت‌های قبل پیچیده‌تر خواهد بود یا پارامتر $\left(\frac{\partial T}{\partial t}\right)$ در معادله ایجاد می‌گردد طبیعتاً حل تحلیلی این معادلات نیز سخت‌تر خواهد بود و معمولاً مانند انتقال حرارت دوبعدی از روش‌های عددی استفاده می‌شود. امّا به عنوان یک فرض ساده‌کننده می‌توان یک حالت خاص نیز در نظر گرفت چنانچه تابع توزیع دما فقط نسبت به T مشتق داشته باشد به عبارت دیگر $\frac{\partial T}{\partial x}=\frac{\partial T}{\partial y}=\frac{\partial T}{\partial z}=0$ باشد. حل تحلیلی معادله‌ی پخش گرما مجدداً ساده خواهد بود. یعنی باید از نظر مکانی تمام نقاط جسم هم دما باشند هر چند دمای آن‌ها در طول زمان تغییر کند یعنی دمای تمام نقاط یا هم زیاد یا کم شود به این روش، روش ظرفیت کلی گفته می‌شود یا حالت خاص از حالت هدایت گرمای لحظه‌ای می‌باشد.

① روش ظرفیت لمپ (Lumped sum) :

اشاره شد که در روش ظرفیت لمپ باید جسم حد الامکان در تمام نقاط هم دما باشد ممکن است در واقعیت این حالت کمتر ایجاد شود اما می توان با یک فرض تقریبی این حالت خاص را پذیرفت. فرض قابل قبول شدن روش ظرفیت لمپ این است که مقاومت در مقابل هدایت در داخل جسم در مقایسه با مقاومت در برابر انتقال گرما بین جسم و محیط کوچک باشد.

- روابط حاکم بر روش ظرفیت لمپ :

$$\dot{E}_{in} = \dot{E}_{st}$$



$$h \cdot A_s \left(T(t) - T_\infty\right) = \rho \cdot C \cdot V \cdot \frac{dT}{dt}$$

$$T(0) = T_i$$

حل معادله دیفرانسیل
$\theta = T - T_\infty$

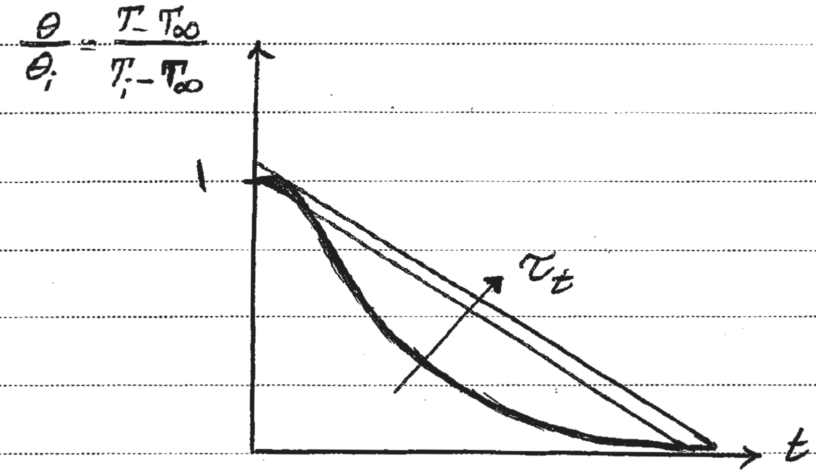
$$\boxed{\frac{\theta}{\theta_i} = \frac{T - T_\infty}{T_i - T_\infty} = \exp\left[-\left(\frac{h \cdot A_s}{\rho \cdot V \cdot C}\right) t\right]} \rightarrow$$ روش ظرفیت لمپ

$$\boxed{t = \frac{\rho \cdot V \cdot C}{h \cdot A_s} \ln \frac{\theta_i}{\theta}} \rightarrow$$ بدست آوردن زمان لازم

$$\boxed{\tau_t = \frac{\rho \cdot V \cdot C}{h \cdot A_s}} \rightarrow$$ ثابت زمانی

Subject:

Year. Month. Date. ( )



۱) با گذشت زمان دمای قطعه به صورت نمایی به دمای محیط نزدیک می شود

۲) با بزرگ شدن τ_t رسیدن به دمای محیط بیشتر طول می کشد

پاسخ کندتر

$$\tau_t = \frac{\rho . V . c}{h . A_s} = \underbrace{\left(\frac{1}{h . A_s}\right)}_{R_{conv}} \times \underbrace{(\rho . V . c)}_{\text{ظرفیت گرمایی کل}}$$

- انرژی منتقل شده (در روش ظرفیت کل):

$$Q = \int_0^t q\,dt = h . A_s \int_0^t \underbrace{\theta}_{\text{از فرمول θ در ظرفیت کل جایگذاری}} dt \longrightarrow \text{حل انتگرال}$$

$$\Longrightarrow \boxed{Q = (\rho . V . c)\, \theta_i \left[1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau_t}\right)\right]}$$

ـ شرط اعتبار ظرفیت کلی :

مقدمه : (عدد بیو)

ضریب جابجایی سیال ←

$$B_i = \frac{h \cdot L}{k}$$

طول جسم جامد ←

k جسم جامد

شرط اعتبار ظرفیت کلی $B_i < 0.1$

تعریف B_i در روش ظرفیت کلی $B_i = \frac{h \cdot L_c}{k}$ و $L_c = \frac{V}{A_s}$ مثلاً

ضخامت دیواره صاف $L_c = L$

استوانه $L_c = \frac{r_0}{2}$

کره $L_c = \frac{r_0}{3}$

ـ عدد بی بعد فوریه :

$$F_o = \frac{\alpha t}{L_c^2}$$

شکل دیگر معادله دما در روش ظرفیت کلی ← $\frac{\theta}{\theta_i} = \frac{T - T_\infty}{T_i - T_\infty} = exp(-B_i \cdot F_o)$

مثال (۱۵): یک ترموکوپل دماسنج تقریباً به شکل کره است و برای اندازه‌گیری دمای جریان یک گاز به کار می‌رود. اگر $h = 400 \frac{w}{m^2 \cdot k}$ و خواص ترموفیزیکی ترموکوپل به صورت $k = 20 \frac{w}{m \cdot k}$ و $C = 400 \frac{J}{kg \cdot k}$ و $\rho = 8500 \frac{kg}{m^3}$ باشد، قطر ترموکوپل را بدست آورید در صورتی که ثابت زمانی یک ثانیه باشد. اگر دمای ترموکوپل در ابتدا ۲۵ درجه بوده و در معرض جریان گازی با دمای ۲۰۰ درجه قرار گیرد، چقدر طول می‌کشد تا دمای آن به ۱۹۹ درجه برسد؟

$$\tau_t = \frac{\rho . C . V}{h . A_s} \Rightarrow 1 = \frac{8500 \times 400 \times \frac{4}{3}\pi r^3}{400 \times 4\pi r^2} \Rightarrow r = 3.53 \times 10^{-4}\, m$$

$$D = 7.06 \times 10^{-4}\, m$$

ابتدا باید شرط اعتبار را چک کنیم:

$$B_i = \frac{h . L_c}{k} = \frac{400 \times \left(\frac{3.53 \times 10^{-4}}{3}\right)}{20} = 2.35 \times 10^{-4} < 0.1 \rightarrow$$ پس می‌توانیم از ظرفیت کلی استفاده کنیم.

$$t = \frac{\rho . V . c}{h . A_s} \ln \frac{\theta_i}{\theta} \xrightarrow{\text{عددگذاری}} t = 5.2\, s$$

$$\begin{cases} \theta_i = 25 - 200 \\ \theta = 199 - 200 \end{cases}$$

— هدایت پایدار با در نظر گرفتن اثرات مکانی:

اگر شرط ظرفیت کلی جواب نداد و نتوانیم $\frac{\partial T}{\partial y}$ یا $\frac{\partial T}{\partial x}$ را صفر فرض کنیم.

$$\xrightarrow{\text{با فرض } k \text{ ثابت}} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t}$$

۴ تا شرط مرزی لازم داریم

۱ شرط اولیه لازم داریم.

حل پیچیده است ← روش‌های جایگزین:
- تحلیلی
- عددی
  - صریح
  - ضمنی

— روش عددی :

m : موقعیت گره در جهت x

n : موقعیت گره در جهت y

$T^{p}_{m,n}$ ← p : زمان ، m,n : مکان

$T_{m,n}$ $\xleftarrow{\text{برای اندیس زمانی}}$

$t = p.\Delta t$

$$\xrightarrow{\text{گسسته کردن مشتق زمانی}} \quad \left.\frac{\partial T}{\partial t}\right|_{m,n} = \frac{T^{p+1}_{m,n} - T^{p}_{m,n}}{\Delta t}$$ تعریف مشتق

① گسسته کردن ← روش صریح

$$\frac{1}{\alpha}\,\frac{T^{p+1}_{m,n} - T^{p}_{m,n}}{\Delta t} = \overbrace{\frac{T^{p}_{m+1,n} + T^{p}_{m-1,n} - 2T^{p}_{m,n}}{(\Delta x)^2}}^{\text{از فصل ۴ گسسته سازی مشتق دوم } \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}} + \frac{T^{p}_{m,n+1} + T^{p}_{m,n-1} - 2T^{p}_{m,n}}{(\Delta y)^2}$$

اگر در تقریب های مکانی از زمان «p» استفاده کنیم تنها یک مجهول «$T^{p+1}_{m,n}$» در معادله باقی

می ماند با فرض $\Delta x = \Delta y$ مقدار این مجهول بصورت زیر قابل محاسبه است :

$$\boxed{T^{p+1}_{m,n} = F_o\left(T^{p}_{m+1,n} + T^{p}_{m-1,n} + T^{p}_{m,n+1} + T^{p}_{m,n-1}\right) + (1-4F_o)\,T^{p}_{m,n}}$$

← دو بعدی
یک گره درمیان ۴ گره دیگر

یادآوری : $F_o = \dfrac{\alpha \Delta t}{(\Delta x)^2} = \dfrac{\alpha \Delta t}{(\Delta y)^2}$

$$\frac{1}{\alpha}\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \xrightarrow{\text{بصورت مسأله یک بعدی}} \quad \boxed{T^{p+1}_{m} = F_o\left(T^{p}_{m+1} + T^{p}_{m-1}\right) + (1-2F_o)\,T^{p}_{m}}$$

← یک بعدی
یک گره درمیان ۲ گره دیگر

همانطور که ملاحظه می شود، دمای مجهول هر گره در زمان جدید، برحسب دماهای معلوم گره در لحظه ی قبل تعیین می شود یعنی تعیین دمای جدید به راحتی از دماهای قبلی امکان پذیر است. پس با داشتن یک شرط اولیه در لحظه ی $t=0$، قدم بعدی $t=\Delta t$ را با اندیس $P=1$ بدست آورد. به همین ترتیب قدم بعدی $t=2\Delta t$ یعنی $P=2$ و ...

اما نکته ی مهم این است که برای اطمینان از پاسخ ها، نباید Δt را بیش از حد بزرگ در نظر گرفت. برای این منظور از معیار پایداری استفاده می شود. در معادلات تفاضلات محدود باید ضریب « $T_{m,n}^{P}$ » مثبت باشد. مثلاً در معادله ی دو بعدی صریح قبل باید:

$$\xrightarrow{\text{دو بعدی}} 1-4F_0 \geq 0 \longrightarrow \boxed{F_0 \leq \frac{1}{4}} \longrightarrow$$

دو بعدی
یک گره میان ۴ گره

$$F_0 \leq \frac{1}{4} \rightarrow \frac{\alpha \Delta t}{(\Delta x)^2} \leq \frac{1}{4} \rightarrow \Delta t \leq \frac{(\Delta x)^2}{4\alpha}$$

$\Rightarrow \Delta t$ پیدا می شود

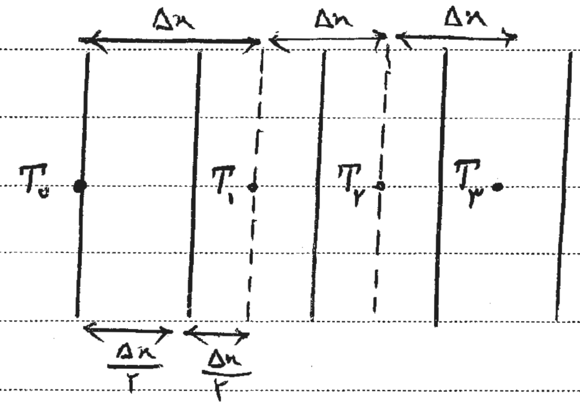
$$\xrightarrow{\text{یک بعدی}} 1-2F_0 \geq 0 \longrightarrow \boxed{F_0 \leq \frac{1}{2}} \longrightarrow$$

یک بعدی
یک گره میان ۲ گره

$$F_0 \leq \frac{1}{2} \rightarrow \dots$$

با توجه به مثال های فوق ملاحظه می شود که انتخاب Δt به صورت مستقل نیست چرا که به Δx و Δy نیز بستگی دارد یعنی باید Δx و Δt را به صورت منطقی با هم انتخاب کنیم به گونه ای که معیار پایداری برقرار باشد.

- روش دیگر بدست آوردن معادلات تفاضل محدود : موازنه انرژی



در بخش (۶-۵) کتاب، از روش موازنه انرژی، معادله تفاضل محدود یک گره سطحی

بدست آورده شده (مطالعه کنید)

- برای گره سطحی T_0 در حالت یک بعدی :

$$T_0^{P+1} = 2F_0\left(T_1^P + B_i T_\infty\right) + \left(1 - 2F_0 - 2B_iF_0\right)T_0^P$$

- برای گره های T_1 و T_2 و T_3 و ... یک گره میان ۲ گره دیگر (یک بعدی) که معادله آن را قبلاً استخراج کردیم ← پس مسأله قابل حل است

$F_0 \leq \frac{1}{4}$ ← برای گره ۱ و ۲ و ۳

$1 - 2F_0 - 2B_iF_0 \geq 0 \rightarrow F_0(1 + B_i) \leq \frac{1}{2}$ ← برای گره صفر

در بسیاری مسائل چند نوع گره داریم یعنی معادلات تفاضل محدود نیز متفاوت خواهند بود

نهایتاً چند معیار پایداری مختلف خواهیم داشت. در این شرایط سخت گیرانه ترین معیار

ملاک عمل است یعنی معیاری که Δt کوچکتر بدهد. مثلاً در مثال بالا با توجه به اینکه بیو مثبت است

مطمئناً شرط دوم سخت گیرانه تر است

مثال (۵-۶) المان سوخت یک راکتور هسته‌ای به شکل دیواری به ضخامت $2L=20mm$ ساخته شده است

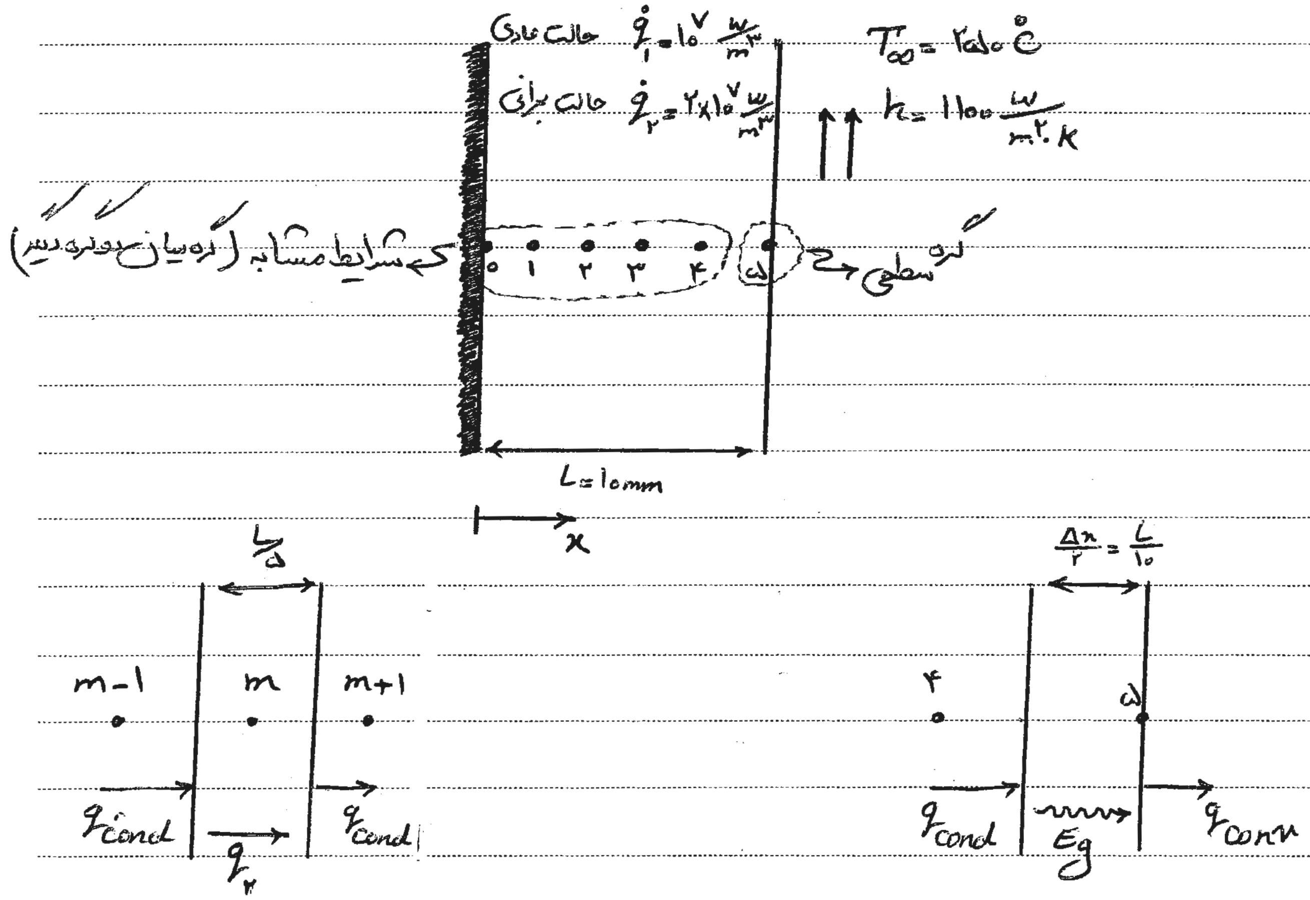
به واسطه فرآیند جابجایی با دمای $T_\infty = 250°C$ و $h = 1100 \frac{W}{m^2.K}$ از دو طرف سرد می‌شود در حالت

عادی $\dot{q}_1 = 10^7 \frac{W}{m^3}$ انرژی هسته‌ای داخل المان تولید می‌شود. اگر شرایط تولید گرما ناگهان

به $\dot{q}_2 = 2\times10^7 \frac{W}{m^3}$ برسد پس از ۱/۵ ثانیه، توزیع دمای المان سوخت را بدست آورید.

خواص گرمایی المان سوخت عبارت است از: $k = 30 \frac{W}{m.K}$ و $\alpha = 5\times10^{-6} \frac{m^2}{s}$.

فرض کنید انتقال گرما یک بعدی و فاصله گره‌ها را $\Delta x = 2mm$ در نظر بگیریم.



$$\dot{E}_{in} - \dot{E}_{out} + \dot{E}_g = \Delta \dot{E}_{st}$$

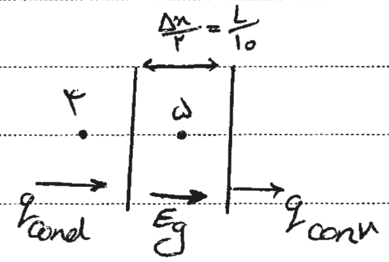
$$KA \times \frac{T_{m-1}^{p} - T_{m}^{p}}{\Delta x} - KA\,\frac{T_{m}^{p} - T_{m+1}^{p}}{\Delta x} + \dot{q}_{2}\,\underbrace{A\,\Delta x}_{\text{حجم}} = \rho c\,\overbrace{(A.\Delta x)}^{\text{حجم}}\,\frac{T_m^{p+1} - T_m^{p}}{\Delta t}$$

می‌خواهیم معادله را به شکل صریح مرتب کنیم.

$$T_m^{p+1} = F_o\left[T_{m-1}^{p} + T_{m+1}^{p} + \frac{\dot{q}\,\Delta x^2}{k}\right] + (1-2F_o)\,T_m^{p} \qquad (1)$$

معادله صریح گره ۴، ۳، ۲ داده

گره ۵



$$\dot{E}_{in} - \dot{E}_{out} + \dot{E}_g = \Delta \dot{E}_{st}$$

$$KA\,\frac{T_4^{p} - T_5^{p}}{\Delta x} - hA\left(T_5^{p} - T_\infty\right) + \dot{q}\,A\,\frac{\Delta x}{2} = \rho c A\,\frac{\Delta x}{2}\,\frac{T_5^{p+1} - T_5^{p}}{\Delta t}$$

معادله صریح گره ۵

$$T_5^{p+1} = 2F_o\left[T_4^{p} + Bi\,T_\infty + \frac{\dot{q}\,\Delta x^2}{2K}\right] + (1 - 2F_o - 2BiF_o)\,T_5^{p} \qquad (2)$$

معیار پایداری:

- معادله (1): $1 - 2F_o \geq 0 \rightarrow F_o \leq \frac{1}{2}$
- معادله (2): $1 - 2F_o - 2Bi\,F_o \geq 0 \rightarrow F_o(1+Bi) \leq \frac{1}{2}$ شرایط سخت‌گیرانه‌تر نسبت به F_o

$$Bi = \frac{h\,\Delta x}{k} = \frac{1100 \times 0.002}{30} = 0.0733$$

$$F_0(1+Bi) \leq \frac{1}{2} \rightarrow F_0 \leq 0.444 \rightarrow \frac{\alpha t}{\Delta x^2} \leq 0.444 \rightarrow t \leq 0.372\ \text{sec}$$

برای رسیدن به هدف مسئله ۱ نمی‌توانیم در یک قدم محاسبات را انجام دهیم پس برای اینکه زمان رُند شود

انتخاب کنیم ۰٫۳s جلو می‌رویم.

$$0 \rightarrow 0.3 \rightarrow 0.6 \rightarrow 0.9 \rightarrow 1.2 \rightarrow 1.5\ \text{sec}$$

با فرض $\Delta t = 0.3 \longrightarrow F_0 = \frac{\alpha(0.3)}{\Delta x^2} = 0.375$

به دلیل رُند کردن زمان دوباره فوریه را حساب می‌کنیم.

$$\dot{q}_2 = 2\times10^7 \frac{W}{m^3} \rightarrow T_0^{p+1} = 0.375(2T_1^p + 2.67) + 0.25\,T_0^p$$

* در گره صفر $T_{m-1} = T_{m+1}$

معادله ۱ $\rightarrow$

$$\begin{cases} T_1^{p+1} = 0.375(T_0^p + T_2^p + 2.67) + 0.25\,T_1^p \\ T_2^{p+1} = 0.375(T_1^p + T_3^p + 2.67) + 0.25\,T_2^p \\ T_3^{p+1} = 0.375(T_2^p + T_4^p + 2.67) + 0.25\,T_3^p \\ T_4^{p+1} = 0.375(T_3^p + T_5^p + 2.67) + 0.25\,T_4^p \end{cases}$$

معادله ۲ $\rightarrow$ $T_5^{p+1} = 0.75(T_4^p + 19.67) + 0.195\,T_5^p$

برای شروع حل عددی باید یک مقدار اولیه داشته باشیم (لحظه صفر) تا با عددگذاری جوابهای $t=0.3$ را بدست

آوریم و مجدداً با عددگذاری دوباره از نتایج $t=0.3$ اعداد $t=0.6$ را بدست آوریم و...

همانطور که ملاحظه شد، در معادلات بالا تولید انرژی $\dot{q}_2 = 2\times10^7$ در نظر گرفته شد. برای محاسبه

شرط اولیه مورد نیاز می‌توانیم از حالت عادی کارکرد یعنی قبل از شروع بحران $\dot{q}_1 = 10^7$ توزیع دمای اولیه

را بدست آورد. به همین دلیل به صورت موقت فرض می‌کنیم که بحث حل عددی وجود نداشته و یک مسئله عادی

یک بعدی را با $\dot{q}_1 = 10^7$ حل می‌کنیم تا توزیع دمای اولیه بدست آید.

حل مسئله برای پیدا کردن شرایط اولیه کارکرد $\dot{q}_1 = 10^7$ (دائم ـ یک بعدی)

توزیع دما در دیواره سطح دائم و از فصل‌های قبل

$$\begin{cases} T(x) = \dfrac{\dot{q}_1 L^2}{2k}\left(1-\dfrac{x^2}{L^2}\right) + T_s \\ T_s = T_\infty + \dfrac{\dot{q}_1 L}{h} \end{cases}$$

$$T_s = 340.91\,^\circ C \longrightarrow T(x) = 16.67\left(1-\frac{x^2}{L^2}\right) + 340.91$$

گره پنج $T_5 = T_s = 340.91$

گره صفر $T_0^0 = 357.58$

$(x=0.002)$ گره یک $T_1^0 = 356.91$

$(x=0.004)$ گره دو $T_2^0 = 354.91$

$(x=0.006)$ گره سه $T_3^0 = 351.58$

$(x=0.008)$ گره چهار $T_4^0 = 346.91$

با جایگذاری این مقادیر اولیه در معادلات تفاضل محدود مقادیر دما در $t=0.3s$ (T_0^1 و T_1^1 و T_2^1 و T_3^1 و T_4^1 و T_5^1) بدست می‌آید. با تکرار تا $t=1.8s$ (T_0^6 و T_1^6 و T_2^6 و T_3^6 و T_4^6 و T_5^6)

ـ جواب نهایی در کتاب بدست آمده است

روش ضمنی:

همانطور که دیدیم در روش صریح دمای هر گره در زمان $p+1$ از دمای همان گره و گره های همسایه در زمان قبلی (p) بدست می آمد یعنی معادلات کاملاً واضح، راحت و ساده بودند اما اشکال این بود که به خاطر شرط پایداری ناگزیر بودیم Δt را کوچک انتخاب کنیم بدین صورت مجبور می شدیم چندین بار پیاپی مسئله را حل کنیم که زمانبر است. برای کاهش زمان محاسبات می توان از روش ضمنی استفاده کرد. در این روش در هنگام گسسته سازی، دماهای سمت چپ معادله نیز در زمان $p+1$ بسط داده می شوند یعنی به صورت زیر:

$$\frac{T^{p+1}_{m+1,n}+T^{p+1}_{m-1,n}-2T^{p+1}_{m,n}}{(\Delta x)^2}+\frac{T^{p+1}_{m,n+1}+T^{p+1}_{m,n-1}-2T^{p+1}_{m,n}}{(\Delta y)^2}=\frac{1}{\alpha}\frac{T^{p+1}_{m,n}-T^{p}_{m,n}}{\Delta t}$$

روش ضمنی ← بسط مشتق در $p+1$

$\rightarrow if\ (\Delta x=\Delta y)$

$$(1+4F_o)\,T^{p+1}_{m,n}-F_o\left(T^{p+1}_{m+1,n}+T^{p+1}_{m-1,n}+T^{p+1}_{m,n+1}+T^{p+1}_{m,n-1}\right)=T^{p}_{m,n}$$

(گذرا - روش ضمنی - ۲ بعدی - یک گره میان ۴ گره دیگر)

همانطور که ملاحظه می شود دمای $T^{p+1}_{m,n}$ خود به دمای همسایه در زمان $p+1$ وابسته است که خودشان مجهولند یعنی اگر معادلات تفاضل محدود را به روش ضمنی بنویسیم به دستگاه چند معادله چند مجهول خواهیم رسید، حل آن مشکل تر است اما از نظر زمانی نسبت به حالت صریح سریع تر است

چند معادله تفاضل محدود پرکاربرد دیگر در حالت یک بعدی :

$$(1+2F_o+2F_o Bi)T_o^{P+1}-2F_o T_1^{P+1}=2F_o Bi T_\infty+T_o^P$$ گره سطحی یک بعدی ضمنی

$$(1+2F_o)T_m^{P+1}-F_o\left(T_{m-1}^{P+1}+T_{m+1}^{P+1}\right)=T_m^P$$ گره یک بعدی داخلی ضمنی

نکته) در روش ضمنی شرط پایداری وجود ندارد البته هرچقدر Δt و Δy و Δx کوچکتر انتخاب شوند جوابها دقیق‌تر خواهند بود.

در جدول ۲ـ۵ یا ۳ـ۵ برخی گره‌های معروف گره‌های ضمنی آن داده شده است.
(مثال ۹ـ۵)

ـ روش ترسیمی برای $F_o > 0{,}2$:

یک روش برای حالت خاص دیوار مسطح ، استوانه توپر و کره توپر در حالت گذرا می باشد.

نمودارهای این روش توسط هیزلر و گروبر رسم شده (کپی شده است)

مثلاً در مورد دیوار مسطح اولاً فرض کرده‌ایم که دیوار متقارن به ضخامت $2L$ می باشد یعنی در $x=0$

شرایط تقارن داریم ابتدا از شکل ۸ـ۵ دمای T_o (θ_o) یا همان صفحه میانی دیوار را بدست

می‌آوریم ، سپس از شکل ۹ـ۵ دمای نقاط دیگر دیواره قابل استخراج است. از شکل ۱۰ـ۵ می‌توان

مقدار انرژی منتقل شده را محاسبه کرد.

$$Q_o=\rho C V\left(T_i-T_\infty\right)$$ (T_i : دمای اولیه دیوار)

به همین ترتیب برای استوانه و کره نیز در شکل های ب-۱۱ تا ب-۱۶ دمای مرکز تا دمای سایر نقاط و انرژی قابل استخراج است.

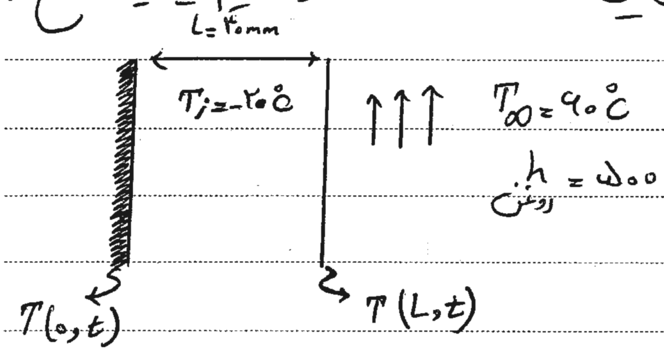
نکته) در منحنی های این روش برخلاف روش ظرفیت کل لازم نیست $L_c = \frac{r_0}{2}$ استوانه و $L_c = \frac{r_0}{3}$ کره در نظر گرفته شود بلکه به سادگی عدد $Bi = \frac{h r_0}{k}$ محاسبه می شود

مثال : خط لوله ای از جنس فولاد ($\rho = 7823$ ، $C = 434$ ، $K = 63.9$ ، $\alpha = 18.8 \times 10^{-6}$) به قطر یک متر و ضخامت دیواره $40\,mm$ را در نظر بگیریم سطح خارجی لوله عایق بندی شده است و دمای لوله در ابتدای امر $-20^\circ C$ - در لحظه خاص جریان روغن با دمای $60^\circ C$ و $h = 500$ وارد لوله می شود

① عدد Bi و F_0 را بعد از ۸ دقیقه محاسبه کنید ② در لحظه $t = 8\,min$ دمای سطح خارجی لوله که با عایق پوشانده شده را بدست آورید ③ در لحظه $t = 8\,min$ شار گرمایی از روغن به لوله چقدر است؟

④ در طول این هشت دقیقه چقدر انرژی از روغن به لوله منتقل شده است.

چون قطر از ضخامت خیلی بیشتر است به جای اینکه مسئله را استوانه فرض کنیم یک دیواره مسطح در نظر می گیریم



$$Bi = \frac{hL}{k} = \frac{500 \times 0.04}{63.9} = 0.313$$

$$F_o = \frac{\alpha t}{L^2} = \frac{18.8 \times 10^{-6} \times 8 \times 60}{(0.04)^2} = 5.64$$

$Bi > 0.1$ روش ظرفیت لاً جواب نمی دهد

$$Bi = 0.313 \longrightarrow Bi^{-1} = 3.2$$

$$\frac{\theta_o}{\theta_i} = \frac{T_o - T_\infty}{T_i - T_\infty} = 0.22 \longleftarrow$$ باتوجه به شکل ۵-۸

$$\frac{T_o - 60}{-20 - 60} = 0.22 \longrightarrow T_o = 42\,^\circ C$$ دمای مرکز بعد از هشت دقیقه (دمای سطح عایق شده)

قسمت سوم مسأله ۶

$$q'' = h(T_s - T_\infty) = h(T_L - T_\infty) = -7500\ \frac{w}{m^2}$$

از منحنی (۵-۹)

$$x = L \longrightarrow \frac{x}{L} = 1 \quad , \quad Bi^{-1} = 3.2$$ روی سطح

$$\frac{\theta}{\theta_o} = \frac{T_L - T_\infty}{T_o - T_\infty} = 0.89$$ از منحنی (۵-۹)

$$\frac{T_L - 60}{42 - 60} = 0.89 \longrightarrow T_L = 45\,^\circ C$$ دمای لوله بعد از ۸ دقیقه

قسمت چهارم مسأله ۶ انتقال انرژی کل

$$\left.\begin{aligned} Bi &= 0.313 \\ Bi^2 F_o &= 0.55 \end{aligned}\right\} \xrightarrow{\text{منحنی (۵-۱۰)}} \frac{Q}{Q_o} = 0.78$$

$$Q_o = \rho C V (T_i - T_\infty) = 7823 \times 434 \times (\pi \times 1 \times 0.04)(-20-60)$$

$$Q = 0.78\, Q_o = -2.7 \times 10^7\ J/m$$

فصل ششم :

مقدمه‌ای بر جابجایی گرما

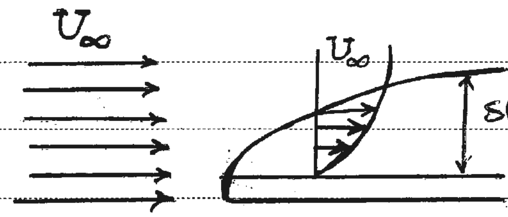
$q'' = h(T_s - T_\infty)$ $\qquad h = ?$ → موضوع در فصل آینده

$h = h(x)$ → معمولاً h یک عدد ثابت نیست و به مکان وابسته است.

$$q = \int q'' dA = (T_s - T_\infty)\int h \cdot dA_s$$

با فرض اینکه $\bar{h} = \frac{T_s - T_\infty}{A_s}\int h\, dA_s$ $\Rightarrow q = \bar{h} A (T_s - T_\infty)$

— مروری بر لایه مرزی در سیالات :

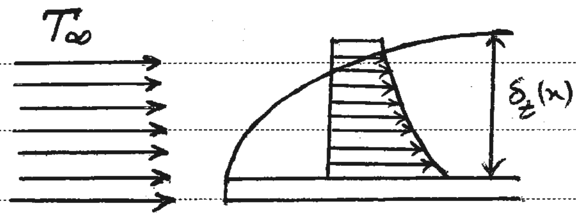


مرز لایه مرزی سرعت، جایی است که سرعت تقریباً به $0{,}99\, U_\infty$ رسیده باشد.

(پارامتر کلیدی ضریب اصطکاک ← C_f)

If $U = 0{,}99\, U_\infty \to \delta = y$

— لایه حرارتی :

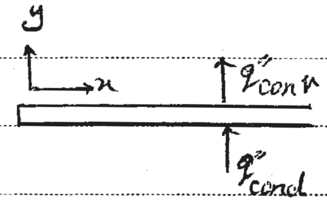


لایه مرزی گرمایی جایی است که $\frac{T_s - T}{T_s - T_\infty} = 0{,}99$

(پارامتر کلیدی ← ضریب انتقال حرارت h)

نکته:
- درون لایه مرزی سرعت ← اختلاف سرعت داریم ← تنش برشی داریم
- درون لایه مرزی حرارتی ← اختلاف دما داریم ← انتقال حرارت داریم

سؤال ۶: در قسمت های ابتدای صفحه انتقال حرارت بیشتر است یا در قسمتهای انتهای صفحه؟

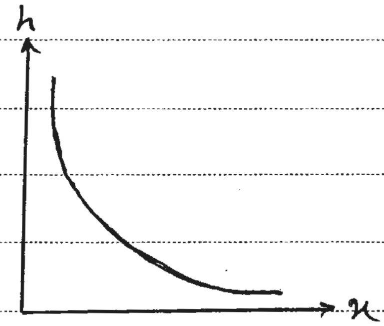


از سمت سطح $\quad q''_{cond} = -k\frac{\partial T}{\partial y}\Big|_{y=0}$

$$q''_{conv} = h\left(T_s - T_\infty\right)$$

$$q''_{cond} = q''_{conv} \rightarrow -k\frac{\partial T}{\partial y} = h\left(T_s - T_\infty\right) \rightarrow h = \frac{\overset{\text{ثابت}}{\overbrace{-k}}\frac{\partial T}{\partial y}\Big|_{y=0}}{\underbrace{\left(T_s - T_\infty\right)}_{\text{ثابت}}}$$

گرادیان دما نسبت به y در ابتدا صفحه زیادتر است چون لایه مرزی نازکتر است پس شیب تغییر دما زیادتر است ($\frac{T_s}{T_\infty}$ باید خیلی سریع برسد) در نتیجه مقدار h در اول صفحه زیاد و در انتهای صفحه کمتر است به همین ترتیب q'' در ابتدای صفحه زیادتر و در انتهای صفحه کمتر است.



- یادآوری از مباحث سیالات:

۳ ناحیه ← آرام، گذار، مغشوش $\qquad Re_c(x) = \frac{\rho V_\infty x_c}{\mu} = 5\times10^5$

- معادلاتی که برای تجزیه و تحلیل استفاده می‌شود: (صفحه ۴۲ به بعد)

معادلات اندازه حرکت ← ۶-۱۴ ، ۶-۱۶

معادلات انرژی گرمایی ← ۶-۲۸ الی ۶-۳۴ (در حالتهای مختلف نوشته شده)

معادله پیوستگی (بقای جرم) $\qquad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$

* با حل معادلات بالا C_f ، δ ، δ_t ، h ، ...

- معرفی اعداد بی بعد مشهور 8

(رینولدز) $Re_L = \frac{VL}{\nu} = \frac{\rho VL}{\mu}$ ⟵ لزجت — نسبت نیروهای اینرسی به نیروهای لزجت

(عدد بیو) $Bi = \frac{hL}{k_s}$ ⟵ سطح k — نسبت مقاومت حرارتی داخل جسم به مقاومت حرارتی لایه مرزی

(عدد فوریه) $F_o = \frac{\alpha t}{L^2}$ — زمان بی بعد — نسبت نرخ هدایت به نرخ انرژی ذخیره شده

(ضریب اصطکاک) $C_f = \frac{\tau_s}{\rho \frac{V^2}{2}}$ — ضریب اصطکاک

(عدد پرانتل) $P_r = \frac{\nu}{\alpha}$ — نسبت ضریب پخش اندازه حرکت به ضریب پخش گرما

(عدد نوسلت) $N_u = \frac{hL}{k_f}$ ⟵ سیال k — گرادیان دمای بی بعد

(نوسلت متوسط) $\bar{N_u} = \frac{\bar{h}L}{k_f}$

(عدد استانتون) $S_t = \frac{h}{\rho V c_p} = \frac{N_u}{R_e P_r}$

(ضریب ژ کولبرن) $J_H = S_t \cdot P_r^{\frac{2}{3}}$

عدد نوسلت ⟵ مهمترین این اعداد

$N_u = f(x^*, Re_L, P_r)$ ⟶ موضعی

$N_u = f(Re_L, P_r)$ ⟶ متوسط

$N_u = \frac{h.L}{k_f} \xrightarrow[\text{بادانستن}]{N_u, L, k_f} h = \frac{k_f . N_u}{L}$

* پس همیشه باید ابتدا عدد نوسلت را محاسبه کنیم

قانون تشابه رینولدز : (تشابه اندازه انتقال حرارت گرما)

فصل مشترک ارتباط دهنده نتایج مکانیک سیالات با انتقال حرارت، قانون تشابه رینولدز است یعنی پس از معادلات اندازه حرکت، معادلات انرژی گرمایی و قانون پیوستگی با استفاده از تشابه رینولدز، عدد استانتون که یک پارامتر انتقال حرارت محاسبه می شود. با داشتن عدد استانتون، عدد نوسلت بدست می آید و در انتها h قابل محاسبه می شود.

$$\text{If} \left.\begin{array}{l} P_r \simeq 1 \\ \dfrac{dp^*}{dx^*} = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \overset{\text{مکانیک سیالاتی}}{\dfrac{C_f}{2}} = \underset{\text{انتقال حرارتی}}{S_t}$$

* گازها پرانتل نزدیک ۱ دارند.

قانون تشابه رینولدز فرض محدودکننده $P_r = 1$ را دارد که باعث می شود در بسیاری اوقات نتوان از آن استفاده کرد لذا معمولاً بجای آن از تشابه رینولدز اصلاح شده یا قانون چیلتون ـ کولبرن استفاده می شود

$$\text{If} \quad 0{,}6 < P_r < 60 \longrightarrow \frac{C_f}{2} = S_t \, P_r^{\frac{2}{3}} = J_H$$

اگر جریان آرام باشد هنوز باید شرط $\dfrac{dp^*}{dx^*} = 0$ رعایت شود اما اگر جریان مغشوش باشد، معادله اصلاح شده بدون هیچ مشکلی همیشه صادق است.

$$\frac{dp^*}{dx^*} = 0 \longleftarrow$$ از لحاظ فیزیکی اختلاف فشاری نداشته باشیم

فصل هفتم : جریان خارجی

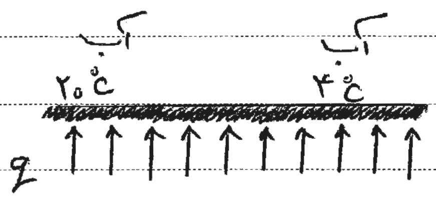
— هدف : محاسبه $h(x)$ ← ضریب انتقال حرارت موضعی

$\bar{h}$ ← ضریب انتقال حرارت متوسط

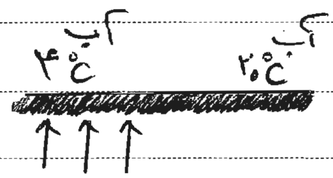
در این درس فرض این است که جریان از روی سطح مسطح در حال عبور است.

① توجه کنیم که دمای سطح ثابت است یا خیر؟ (T_s)

② توجه کنیم که شار گرمای هدایتی روی سطح ثابت است یا خیر؟



→ T_s ثابت نیست اما q_{cond} ثابت است



→ T_s ثابت

— حالت اول : دمای یکنواخت در کل سطح $T=T_s$

۱-۱) جریان آرام باشد.

$$\delta=\frac{5x}{\sqrt{Re_x}} \qquad \frac{\delta}{\delta_t}=Pr^{\frac{1}{3}}$$

$$C_{f,x}=\frac{\tau_x}{\frac{1}{2}\rho U_\infty^2}=0.664\,Re_x^{-0.5}$$ موضعی

$$Nu=\frac{h_x\cdot x}{k}=0.332\,Re_x^{0.5}\,Pr^{\frac{1}{3}} \qquad 0.6\leq Pr\leq 50$$ موضعی

نکته) در گازها $Pr\simeq 1$ در نتیجه $\delta\simeq\delta_t$

مقادیر متوسط جریان آرام با T_s ثابت :

$$\bar{C}_{f,x} = 2C_{f,x} = 1.328\, Re_x^{-0.5}$$

$$\bar{Nu} = 2\, Nu_x \rightarrow \bar{Nu} = 0.664\, Re^{0.5} \cdot Pr^{\frac{1}{3}} \qquad 0.6 \leq Pr \leq 60$$

$$\bar{h} = 2h_x$$

۲-۱) جریان مغشوش باشد.

$$\delta = 0.37 \cdot x \cdot Re_x^{-\frac{1}{5}} \quad , \quad \delta = \delta_t$$

$$C_{f,x} = 0.0592\, Re_x^{-\frac{1}{5}} \qquad 5\times10^{5} < Re_x < 10^{7}$$ موضعی

$$Nu_x = St \cdot Re_x \cdot Pr = 0.0296 \cdot Re_x^{\frac{4}{5}} \cdot Pr^{\frac{1}{3}} \qquad 0.6 \leq Pr \leq 60$$ موضعی

- تکه اول هر صفحه آرام است و این روابط برای ناحیه مغشوش است
- گاهی اوقات جریان از همان اول مغشوش است (مانند هواپیما که به طور مصنوعی جریان مغشوش می‌شود به وسیله‌ی سیم‌های مزاحم)
- مقادیر متوسط مغشوش با T_s ثابت :

$$\bar{Nu}_L = 0.037\, Re_L^{\frac{4}{5}} \cdot Pr^{\frac{1}{3}}$$

$$\bar{C}_{f,L} = 0.074\, Re_L^{-\frac{1}{5}}$$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

۱-۳) جریان مرکب (مرکب: یعنی روی صفحه قسمتی آرام و قسمتی مغشوش است)

از 10^5 تا 5×10^5 ← جریان گذر

کوچکتر از 10^5 ← جریان آرام

بزرگتر مساوی 5×10^5 ← جریان مغشوش

ـ اگر تبدیل آرام به مغشوش در ۰٫۹۵ انتهای صفحه اتفاق افتد:

$1 \geqslant \frac{x}{L} \geqslant 0{,}95$ ← از مغشوش بودن صرفنظر و کلاً با روابط آرام حل شود

ـ اگر تبدیل آرام به مغشوش در همان ابتدای صفحه اتفاق افتد:

$0{,}05 \geqslant \frac{x}{L} \geqslant 0$ ← از آرام بودن صرفنظر و کلاً با روابط مغشوش حل شود.

ـ اگر تبدیل آرام به مغشوش در میانه های صفحه اتفاق افتد:

$$\overline{Nu} = \left(0{,}037\, Re_L^{\frac{4}{5}} - 871\right) Pr^{\frac{1}{3}}$$

$$\overline{C}_{f,L} = \frac{0{,}074}{Re_L^{\frac{1}{5}}} - \frac{1742}{Re_L}$$

ـ حالت دوم: شار گرمای یکنواخت روی سطح

۱-۲) جریان آرام
$$Nu_x = 0{,}453\, Re_x^{\frac{1}{2}} \cdot Pr^{\frac{1}{3}}$$

۲-۲) جریان مغشوش
$$Nu_x = 0{,}0308\, Re_x^{\frac{4}{5}} \cdot Pr^{\frac{1}{3}}$$

نکته) اگر T_s را خواستیم ابتدا h را بدست می آوریم و سپس از روابط فصل ۳ به صورت زیر قابل محاسبه است:

$$T_s = T_\infty + \frac{q''}{h} \quad \text{یا} \quad T_s(x) = T_\infty + \frac{q''_x}{h_x}$$

تدریس: ۷-۱۶

Year : Month : Date :

تمرین: مسئله ۱۶ فصل ۷

مثال: هوا با دمای $300\,^{\circ}C$ و سرعت $10\frac{m}{s}$ روی یک صفحه تخت به طول $0.5\,m$ جریان دارد. برای آنکه دمای سطح صفحه در $27\,^{\circ}C$ ثابت بماند، نرخ گرما در واحد عرض صفحه را محاسبه کنید.

(اطلاعات هوا: $Pr = 0.687$ ، $k = 34.4\times10^{-3}$ ، $\nu = 5.21\times10^{-4}$)

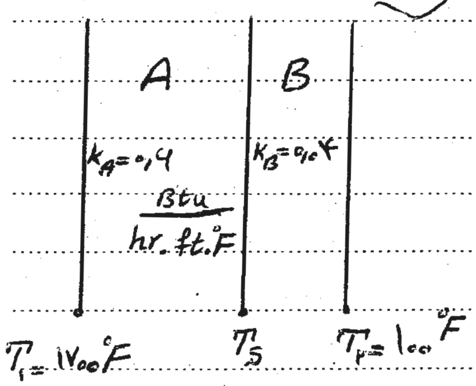
$$Re = \frac{U_\infty . L}{\nu} = \frac{10\times0.5}{5.21\times10^{-4}} = 9597 < 10^5$$ جریان آرام

$$\overline{Nu} = 0.664\, Re^{\frac{1}{2}} Pr^{\frac{1}{3}} = 0.664\times(9597)^{\frac{1}{2}}\times(0.687)^{\frac{1}{3}} = 57.4$$

$$Nu = \frac{h.L}{k_f} \longrightarrow 57.4 = \frac{h\times0.5}{0.0344} \longrightarrow h = 4.18\ \frac{W}{m^2K}$$

$$q = h.A\,(T_s - T_\infty) \longrightarrow q' = h\times L\times(T_s - T_\infty) = 4.18\times0.5\times(27-300) = -570\ \frac{W}{m}$$

مثال) دیوار A به ضخامت $0.7\,ft$ با عایق لایه B با ضخامت $0.1\,ft$ پوشیده شده است. میزان حرارت انتقال یافته در حالت دائم را محاسبه کنید و دمای T_s را به دست آورید؟



$$q'' = \frac{T_1 - T_2}{\Sigma R} = \frac{1700-100}{\frac{L_A}{k_A} + \frac{L_B}{k_B}} = \frac{1700-100}{\frac{0.7}{0.6} + \frac{0.1}{0.04}}$$

$$\Rightarrow q'' = 436\ \frac{W}{m^2}$$

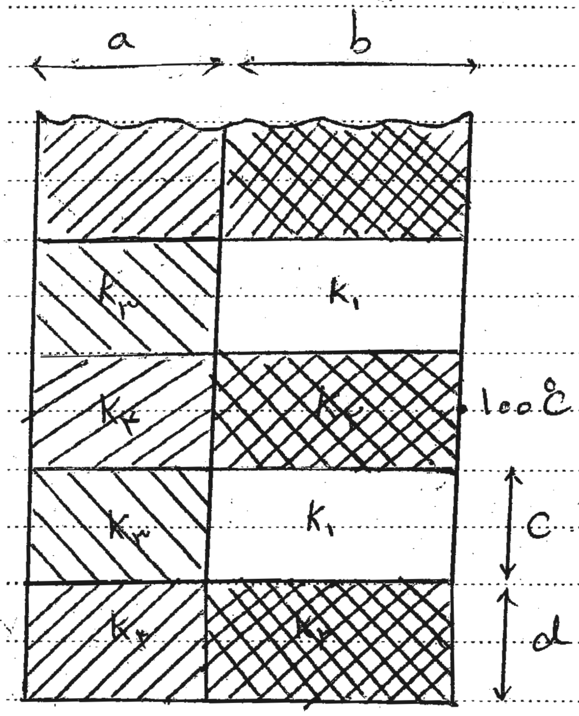
$$q'' = \frac{T_1 - T_s}{R_A} \longrightarrow 436 = \frac{1700 - T_s}{\frac{0.7}{0.6}}$$

$$R_A = \frac{L_A}{k_A}$$

$$\Rightarrow T_s = 1190.9\,^{\circ}F$$

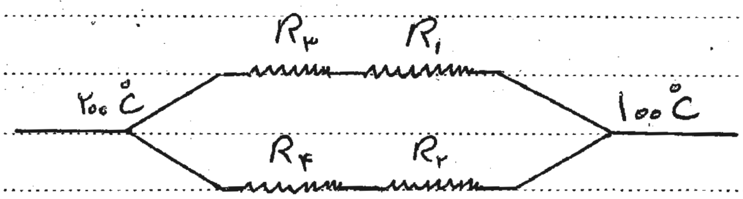
Year : Month : Date :

مثال ۵: در شکل روبرو یک دیوار تحت مرکب نشان داده شده است. با توجه به داده های روی شکل و داده های زیر و با استفاده از تحلیل انتقال حرارت یک بعدی، انتقال حرارت دائم از ۱۰ متر این دیوار را محاسبه کنید.



$$k_1 = 50,\ k_2 = 100,\ k_3 = 150,\ k_4 = 200\ \frac{W}{m.K}$$

$$a = 1,\ b = 2,\ c = 0.5,\ d = 0.25\ m$$



$$R_1 = \frac{b}{k_1 c} = \frac{2}{50 \times 0.5} = 0.08$$

$$R_2 = \frac{b}{k_2 d} = \frac{2}{100 \times 0.25} = 0.08$$

$$R_3 = \frac{a}{k_3 c} = \frac{1}{150 \times 0.5} = 0.013$$

$$R_4 = \frac{a}{k_4 d} = \frac{1}{200 \times 0.25} = 0.02$$

$$\begin{cases} R' = R_1 + R_3 = 0.093 \\ R'' = R_2 + R_4 = 0.1 \end{cases}$$

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R'} + \frac{1}{R''} = \frac{1}{0.093} + \frac{1}{0.1} \longrightarrow R = 0.048$$

$$q = \frac{\Delta T}{R} = \frac{200 - 100}{0.048} = 2083\ \frac{W}{m}$$

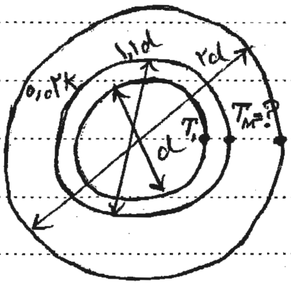
طول $0.75\ m$ $\quad 2083\ \frac{W}{m}$

Sayeh

طول $10\ m$ $\quad q = 28773\ \frac{W}{m}$?

مثال ۵: لوله‌ای به قطر داخلی d و خارجی $1.1d$ با عایقی پوشانیده شده است به طوری که قطر خارجی عایق $2d$ است. اگر ضریب هدایت لوله K و ضریب هدایت عایق $0.02K$ باشد و اگر دمای سطح داخلی لوله و سطح خارجی عایق به ترتیب T_1 و T_2 باشد دمای بین سطح خارجی لوله و عایق را برحسب T_1 و T_2 بدست آورید.

(شکل جزء حل است)



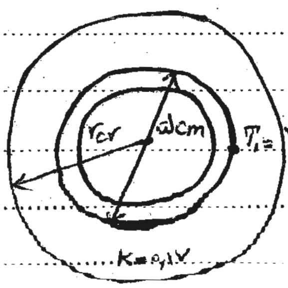
$$q_{\text{لوله}} = q_{\text{عایق}}$$

$$R_{\text{استوانه}} = \frac{\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)}{2\pi L K}$$

$$\Rightarrow \frac{T_1 - T_M}{\frac{\ln\left(\frac{1.1d}{d}\right)}{2\pi L K}} = \frac{T_M - T_2}{\frac{\ln\left(\frac{2d}{1.1d}\right)}{2\pi L \times (0.02K)}} \Rightarrow \frac{(T_1 - T_M)}{\ln\left(\frac{1.1}{1}\right)} = \frac{0.02\,(T_M - T_2)}{\ln\left(\frac{2}{1.1}\right)} \Rightarrow T_1 - T_M = 3\times 10^{-3}(T_M - T_2)$$

$$\Rightarrow T_1 - T_M = 3\times 10^{-3}\,T_M - 3\times 10^{-3}\,T_2 \Rightarrow T_M = 0.997\,T_1 + 0.003\,T_2$$

مثال ۶: روی لوله‌ای که قطر خارجی آن $5cm$ است تا شعاع بحرانی عایقی با $K = 0.17\frac{W}{mK}$ قرار دادیم در صورتی که دمای سطح خارجی لوله $200^\circ C$ و هوای محیط $20^\circ C$ و ضریب جابجایی هوا $h = 3\frac{W}{m^2K}$ باشد نسبت q' با عایق به q' بدون عایق را بدست آورید.



$T_\infty = 20^\circ C$

$h = 3$

$$r_{cr} = \frac{k}{h} = \frac{0.17}{3} = 0.0567\,m$$

$$\frac{q'_{\text{باعایق}}}{q'_{\text{بدون عایق}}} = \frac{\frac{200-20}{\sum R_{\text{باعایق}}}}{\frac{200-20}{R_{conv}}} = \frac{R_{conv}}{\sum R_{\text{باعایق}}}$$

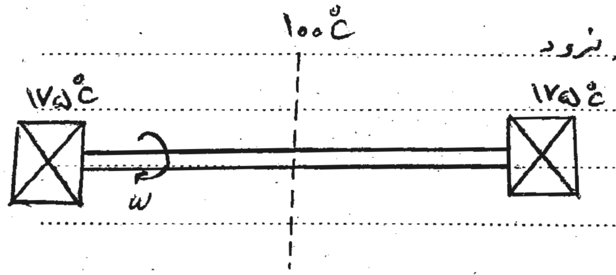
$$\text{استوانه‌ها}\quad R_{conv} = \frac{1}{2\pi r h} = \frac{1}{2\pi \times 0.025 \times 3} = 2.122$$

$$\Sigma R_{\text{باعایق}} = R_{\text{هدایتی عایق}} + (R_{conv})_2 = \frac{\ln\left(\frac{r_c}{0.025}\right)}{2\pi K} + \frac{1}{2\pi r_c h}$$

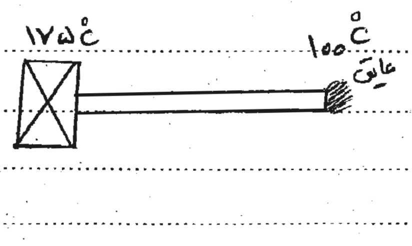
$$= \frac{\ln\left(\frac{0.0597}{0.025}\right)}{2\pi \times 0.17} + \frac{1}{2\pi \times 0.0597 \times 3} = 1.702$$

$$\Longrightarrow \frac{q'_{\text{باعایق}}}{q'_{\text{بدون عایق}}} = \frac{R_{conv}}{\Sigma R_{\text{باعایق}}} = \frac{2.122}{1.702} = 1.25$$

مثال ۵: برای قرار دادن یک پولی در وسط یک شفت لازم است به خاطر محدودیت دما برای تسمه، دمای وسط شفت از $100^\circ C$ تجاوز نکند. از طرفی درجه حرارت شفت در محل یاتاقان‌ها به $175^\circ C$ می‌رسد. دمای محیط $20^\circ C$ و ضریب جابجایی بین شفت و محیط $h = 5\ \frac{W}{m^2\,^\circ C}$ می‌باشد. قطر شفت $20mm$ و ضریب هدایت آن $40\ \frac{W}{m\,^\circ C}$ است. حداقل طول شفت چقدر باشد تا دمای وسط شفت از مقدار ذکر شده ($100^\circ C$) بالاتر نرود.



حل) نصف شفت را به صورت یک پره فرض می‌کنیم که پایه پایین آن یاتاقان می‌باشد. با توجه به متقارن بودن شکل می‌توان وسط شفت را عایق فرض کرد. یعنی یک پره مانند شکل زیر



فرض می‌کنیم

برای حالت نوک پره عایق در جدول (۳-۴) :

$$\frac{\theta}{\theta_b}=\frac{\cosh m(L-x)}{\cosh mL}$$

$\theta=T-T_\infty$

$\theta_b=T_b-T_\infty$

$$m=\sqrt{\frac{h.P}{K.A_c}}=\sqrt{\frac{h(\pi D)}{K(\frac{\pi D^2}{4})}}=\sqrt{\frac{4h}{KD}}=\sqrt{\frac{4\times 5}{40\times 0{,}02}}=5$$

$$M^2=\frac{h.P}{K.A_c}$$

دمای ۱۰۰ در طول L که x=L محقق میشود

$$\frac{T-T_\infty}{T_b-T_\infty}=\frac{\cosh m(L-x)}{\cosh mL} \rightarrow \cosh 0=1$$

طول پره

$$\Rightarrow \frac{100-30}{175-30}=\frac{1}{\cosh(5L)} \Rightarrow \frac{1}{\cosh(5L)}=2{,}07 \Rightarrow 5L=1{,}35$$

$$\Rightarrow L=0{,}271 \xrightarrow{\text{طول شفت}} 2\times 0{,}271=0{,}542m$$

مثال : گلوله‌های فولادی با ظرفیت حرارتی $C_P=490\frac{J}{Kg^\circ C}$ و $K=35\frac{W}{m^\circ C}$ و دمای $450^\circ C$ را به یکباره در ($D=5cm$ و قطر آن) محیطی که دمای آن $100^\circ C$ است قرار می‌دهیم . اگر $h=10\frac{W}{m^2 {}^\circ C}$ باشد . پس از چه مدت دمای گلوله به $150^\circ C$ می‌رسد ($\rho_{\text{فولاد}}=7800\frac{Kg}{m^3}$)

$$B_i=\frac{h.D}{K_s}\Rightarrow \dots <0{,}1 \longrightarrow$$ می‌توان از روش ظرفیت کلی استفاده کرد

$$\tau=\frac{\rho.V.C}{h.A_s}=\frac{7800\times\frac{0{,}05}{6}\times 490}{10}=2990 \text{ sec}$$

$$\frac{V}{A_s}=\frac{\frac{4}{3}\pi R^3}{4\pi R^2}=\frac{R}{3}=\frac{D}{6}$$

$$t=\tau \ln\frac{\theta_i}{\theta}=2990\times \ln\frac{450-100}{150-100}=5818 \text{ sec}$$

مثال: هوا با دمای $300\,K$ و سرعت $30\,\frac{m}{s}$ از روی صفحه ی مسطح به طول $75\,cm$ حرکت می کند اگر جریان از ابتدا مغشوش باشد، ضخامت لایه مرزی حرارت و ضریب جابجایی صفحه و هوا را محاسبه کنید. اطلاعات مورد نیاز هوا را از جداول آخر کتاب استخراج کنید.

(فرض کنید دمای سطح ثابت است)

جدول انتهای کتاب $\rightarrow$ $\rho = 1.1614\,\frac{kg}{m^3}$ و $\nu = 15.89\times10^{-6}\,\frac{m^2}{s}$

$Pr = 0.707$ و $k = 26.3\times10^{-3}\,\frac{w}{m.K}$

$$Re = \frac{30\times0.75}{15.89\times10^{-6}} = 1.416\times10^{6}$$

$$\delta = \delta_t = 0.37\,x\cdot Re_x^{-\frac{1}{5}} = 0.37\times0.75\times(1.416\times10^{6})^{-\frac{1}{5}} = 0.0163\,m$$

$$\bar{N}_u = 0.037\,Re^{\frac{4}{5}}\cdot Pr^{\frac{1}{3}} = ---$$

$$N_u = \frac{h.L}{k_f} \longrightarrow h = \frac{N_u\cdot k_f}{L} = \frac{----\times26\times10^{-3}}{0.75} = ---$$