ASEC

Aero Space Engineering Center

پایگاه مهندسی هوافضا

www.ASEC.blogfa.com

به نام خدا

مباحث درس کنترل اتوماتیک

۱- مفاهیم اولیه سیستمهای دینامیکی و کنترل :

(Basic concepts of dynamic control systems)

-تعریف و طبقه بندی سیستم ها و مدل ریاضی آنها (خطی وغیر خطی،پیوسته وغیر پیوسته، دارای پارامترهای ثابت و متغیر نسبت به زمان) .

- معرفی سیستمهای کنترلی (کنترل حلقه بازوکنترل حلقه بسته ، طراحی یک سیستم کنترلی).

-انواع و اجزای سیستمهای کنترلری (الکتریکی ، مکانیکی ، سیالاتی، حرارتی).

۲ -تبدیل لاپلاس (Laplaces transform) .

۳- نمایش و مدلسازی ریاضی سیستم های مکانیکی.

۴-رفتار سیستمهای دینامیکی :

-پاسخ زمانی حالت گذرا.

- پاسخ زمانی حالت پایدار (ماندگار).

- بررسی آثار کنترل کننده ها روی مشخصات حالت گذرا و حالت ماندگار.

۵- پایداری سیستمهای خطی:

-روش Routh-Hurwitz

۶- کنترل فیدبک:

- ساختمان یک سیستم کنترل فیدبک دار.

Feed back control system member

-کنترلرهای خطی. Linear controllers

-روش مکان هندسی ریشه ها. Root locus method

-قواعد رسم مکان هندسی ریشه ها.

-تحلیل سیستمهای کنترلی توسط روش مکان هندسی ریشه ها.

- طراحی سیستمهای کنترلی توسط روش مکان هندسی ریشه ها.

۷-تحلیل عکس العمل فرکانسی:

- ترسیم عکس العمل فرکانسی.

- ترسیم دیاگرامهای Bode & Nyquist.

- معیار پایداری Nyquist.

- طراحی سیستمهای کنترلی توسط روش عکس العمل فرکانسی.

مراجع:

۱-سیستمهای دینامیکی و کنترلی؛تالیف آقای دکتر غفاری،انتشارات؛دانشگاه خواجه نصیر ۱۳۷۴

۲-مهندسی کنترلی ؛ تالیف K.Ogata

۳ -وکتابهای کنترل Benjamin kuo و Raven و R.C Dorf و Friedland و Dazzo.

مفاهیم اولیه سیستمهای دینامیکی و کنترل :

کاربرد علم کنترل: درسیستمهای فضاپیما، هدایت موشکها ، نیروگاهها،سیستمهای رباتیکی و مکاترونیکی ، طراحی ماشینها و ماشینهای ابزار از طریق تنظیم فشار، دما،رطوبت ، جریان، ولتاژ .
علم کنترل در هر پروسه ای که درآن تنظیم مورد نیاز باشدو به اپراتور کمک کند تا به هدف خود هر چه زودتر و با کیفیت بهتر برسد کاربرد دارد.

مرور تاریخی علم کنترل:

۱-کنترل سرعت ماشین بخار در قرن هیجدهم میلادی توسط j.Watt.

۲-کنترل و پایداری خودکار کشتیها توسط Minorsky.

۳-تعیین پایداری سیستمهای حلقه بسته با توجه به پاسخ حلقه باز به یک ورودی سینوسی به توسط نایکوییست در سال ۱۹۳۲.

۴-طداحی یک سدو مکانیسم(دنبال کردن یا احساس کردن یک ورودی متغیر) در سال ۱۹۳۴ توسط هارن.(تعریف srvo : سیستمی که اگر تحت اثر یک سیگنال ورودی ثابت باشد ، خطای حالت پایدار آن صفر باشد.)

۵- ابداع مکان هندسی ریشه ها در طی سال های ۱۹۴۰ تا ۱۹۵۰ توسطEvans.

روشهای پاسخ فرکانسی ومکان هندسی ریشه ها مربوط به سیستمهای یک ورودی،یک خروجی میباشند.واین دواساس نظریه کنترل کلاسیک می باشند.(هیچ بهینه سازی در این دو روش انجام نمی شود.)

۷- پس از سال ۱۹۵۰ برروی قسمت بهینه سازی کنترل و کار با سیستمهای پیچیده تر چند- ورودی –چند خروجی کارهای قابل توجهی انجام شده است . با توجه به گسترش کامپیوترهای دیجیتال از اواسط دهه ۱۹۶۰ این موفقیت نمود بیشتری یافته است.

۸-از قسمتهای جدیدکنترل(طی سالهای۱۹۴۰ تا۱۹۶۰ و بعد) بر روی کنترل بهینه سیستمهای اتفاقی (Random optimal controlo) وکنترل مقاوم (Robust control) و کنترل وفقی (Adaptiv control) کارهای بسیار قابل توجهی انجام شده است.

۹-کاربردهای جدید و غیر مهندسی علم کنترل عبارتند از : سیستمهای زیستی ، اقتصادی ، جامعه شناسی، انسانی ، اجتماعی.

تعاریف:

-کنترل: به مقدار مطلوب رساندن یک کمیت (یک متغیر) . ویا اندازه گیری یک یا چندکمیت برای به مقدار مطلوب رساندن یک کمیت (یک متغیر).

- متغیر کنترل: کمیت تحت اندازه گیری وکنترل.

-متغیر تاثیر پذیر: کمیت تحت تاثیربخاطر ایجاد تاثیردرمتغیر کنترل واندازه گیری وکنترل ان.

-سیستم : ترکیبی ازاجزا با مشخصات و رفتار معین برای انجام یک عمل خاص وجدا شده از محیط اطراف توسط یک مرز.سیستم هم می تواندفیزیکی باشدوهم انتزاعی(مثل یک پدیده اقتصادی) .(توسط متغیر کنترل می توان از رفتار سیستم اطلاع حاصل نمود. وتوسط متغیر تاثیر پذیر می توان عامل محرک سیستم را مد نظر قرار داد.

مثالهایی از سیستم:

–سیستم ارتعاشی : نیروی زلزله (عامل محرک Actuatur) و حرکت ارتعاشی ساختمان (رفتار سیستم)

– سیستم اقتصادی : کنترل تورم کشور.

– سیستم شیمیایی : پالایشگاه وفراورده های مختلف ان.

–سیستم حرارتی :سیستم تنظیم درجه حرارت ساختمان . (درجه حرارت ساختمان = رفتار سیستم=متغیر کنترل، درجه حرارت ورودی = عامل محرک = متغیر تاثیر پذیر).

– سیستم اجتماعی :سیستم تغییر کیفیت زندگی انسان در جهان . این سیستم به صورت گراف نشان داده شده است:

سیستم (کل جهان)

متغیرهای پنج گانه

رفتار سیستم (کیفیت زندگی)

۱– جمعیت جهان

۲–منابع غیر قابق تجدید انرزی

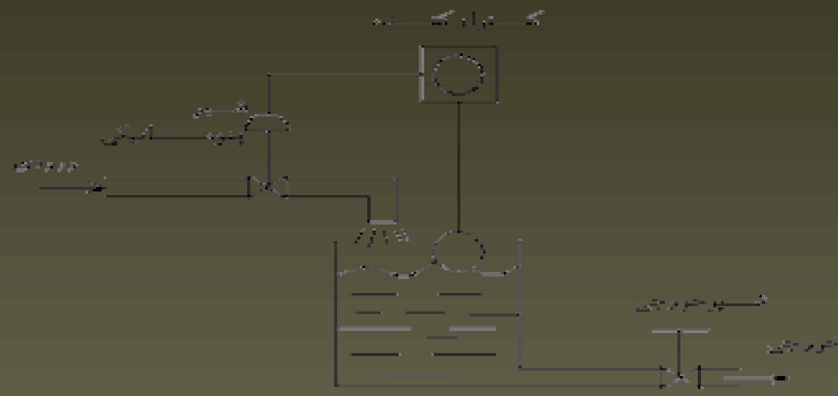
۳– منابع قابق تجدید انرزی

۴– سرمایه گذاری

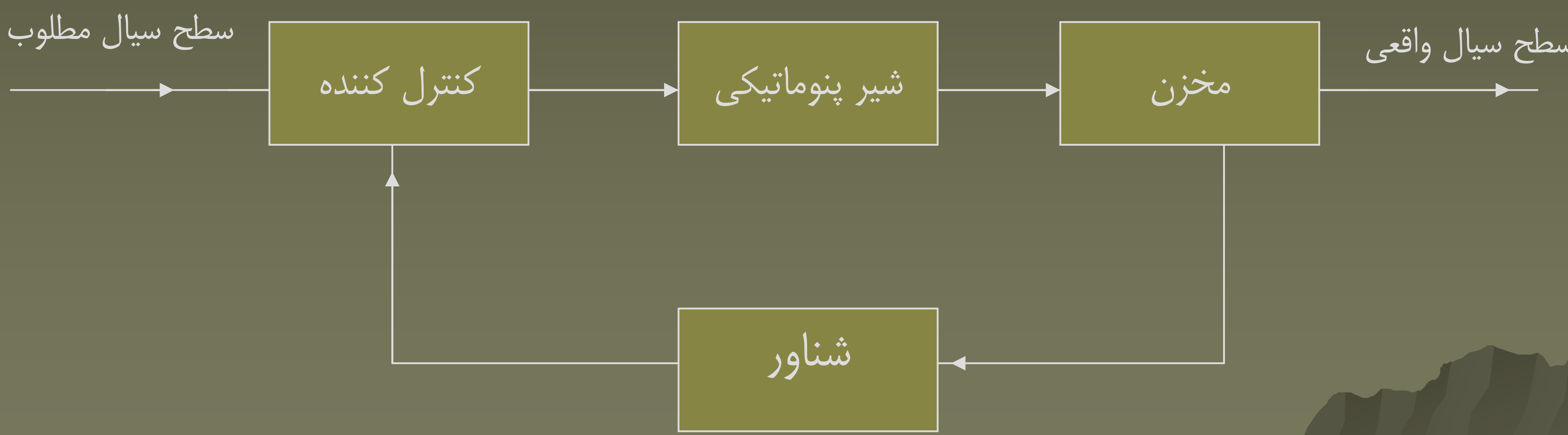
۵–الودگی محیط

عوامل موثر(تصمیمات سیاسی و اقتصادی واجتماعی)

با تعیین مقادیر این متغیر ها برای زمان های آینده می توان کیفیت زندگی در آینده را پیش بینی نماییم.
می توان برای سیستمهای کنترلی نمودار بلوکی نیز تهیه کرد،مثل سیستم کنترل سطح مایع:
مثلا سیستم کنترل سطح مایع

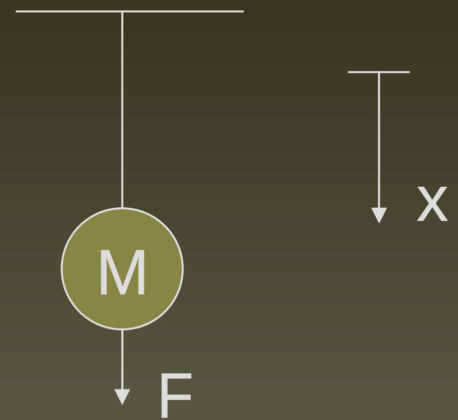


و نمودار بلوکی:



سیتم مکانیکی و متغیر های حالت (وضعیت) state-space :

متغیر حالت ،متغیری است که با معلوم بودن ان در هر لحظه ، بتوان وضعیت و رفتار سیستم را در ان لحظه مشخص نمود.مثلا درسیستم مکانیکی ،جسم به جرم Mتحت نیروی F ، با استفاده از قا نون دوم نیوتن :

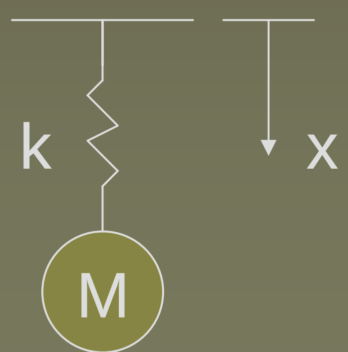


$$F = M\ddot{X}$$

$$X_{(t)} = (1/2)\frac{F}{M}t^2 + \dot{x}_0 t + x_0$$

بنابر این برای انکه وضعیت این سیستم مکانیکی معلوم شود ، باید متغیر تغییرمکان X و متغیر سرعت $\dot{X}$معلوم باشد. بنابر این متغیر های حالت این سیستم $X, \dot{X}$هستند.

یعنی اگر $X, \dot{X}$در هر لحظه مشخص باشند ، وضعبت و رفتار سیستم در تمام لحظات تعیین خواهد شد نیز اگرجرم M توسط یک فنر خطی به جایی وصل باشد و با یک جابجایی اولیه به نوسان دراید بر اساس قانون دوم حرکت نیوتون ، می توان نوشت:



$$M\ddot{X} + kx = 0$$

$$X(t) = A\sin\omega t + B\cos\omega t \qquad \omega = \sqrt{K/M}$$

A,Bضرایب ثابت هستند و با استفاده از تغییر مکان اولیه و سرعت اولیه ،یعنی$x, \dot{x}$ حاصل میشوند. و نهایتا xدرهر لحظه محاسبه خواهد شد.یعنی دراین سیستم نیز وضعیت سیستم در صورتی کاملا مشخص می شود که مقادیر $x, \dot{x}$در هر لحظه مشخص باشد . نتیجه اینکه $x, \dot{x}$ متغیر های وضعیت هستند.

سیتم استاتیکی وسیستم دینامیکی:

سیتم استاتیکی : سیستمی که وضعیت و رفتار ان بستگی به وضعیت گذشته ان نداشته باشد.

سیستم دینامیکی : سیستمی که وضعیت و رفتار ان بستگی به وضعیت گذشته ان داشته باشد.

مثلا اگر یک نیروی قابل توجه را روی وسط یک تیر با دو سر تکیه گاه ساده قرار دهیم و تیر نیز به حداکثر خیز خود برسد ، این سیستم یک سیستم استاتیکی است.حال اگر همین سیستم هنگام قرار گرفتن تحت بار پس از مرتعش شدن و انجام حرکات نوسانی به حداکثر خیز خود برسد،سیستم ، یک سیستم دینامیکی است.

اگر دو دماسنج که هر دو دمای ۱۰ درجه سلسیو س را نشان می دهند ، به محیطی با دمای ۲۰درجه سلسیو س وارد کنیم ، ان دما سنجی که بلافاصله عدد ۲۰ را نشان می دهد دارای یک سیستم استاتیکی است. ودیگری که پس از یک مدت زمان قابل توجه عدد ۲۰ را نشان می دهد تشکیل یک سیستم دینامیکی می دهد . در سیستم دینامیکی حافظه و History مهم و تاثیر گذار است. سیستم های مکانیکی مورد مثال هر دو دینامیکی هستند.

– سیستم خطی سیستمی است که اصل جمع اثار (Super position) در ان وجود داشته باشد.(تعییرمکان حاصل ازاعمال دونیرو برابربا مجموع تغییرمکانهای هریک ازدونیرو باشد.)

– سیستم با پارامترهای مجزا و غیر مجزا: اگر بتوان خاصیت الاستیسیته و اینرسی در اجزا و المانهای ایدهال درنظر گرفت،ان سیستم یک سیستم با پارامترهای مجزا نامیده می شود. (Lumped parameter system) . واگر نتوان این دو خاصیت را در اجزا و المانهای ایده ال درنظر گرفت ،ان سیستم رایک سیستم با پارامترهای غیر مجزامی نامیم. .(Distributed parameter system)

–سیستمی که پارامترهای ان با زمان تغییر نماید ،یک سیستم با پارامترهای متغییر نسبت به زمان نامیده می شود . (Time-vary parametr system) و در صورت ثابت بودن ان پارامترها نسبت به زمان، انرا یک سیستم مستقل اززمان مینامیم. (Time-invariant system)

همانطوریکه می توان بطور فیزیکی احساس نمود ، حل نمودن معادلات دیفرانسیل یک سیستم متغیر با زمان بسیار مشکل تر از یک سیستم مستقل از زمان است . مثلا ؛ کنترل یک هواپیما به علت سنگین بودن بنزین ان یک سیستم Time varying ولی کنترل یک ماشین به علت قابل صرفنظر بودن وزن بنزین ان نسبت به وزن ماشین ، یک سیستم (Time-invariant) میبا شد.

-کنترل : تحت نظم در اوردن وانتظار پاسخ مورد نظر، یا به نظم دراوردن خروجی ازطریق اعمال تغییراتی در ورودی.

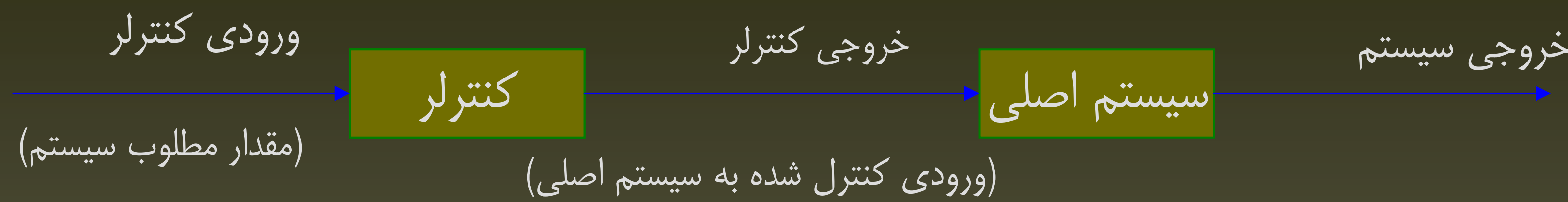
-اغتشاشDisturbanse : اگر خروجی یک سیستم (بدون کنترل) ناگهانی تغییر نماید ، به ان سیستم یک اغتشاش وارد شده است. اغتشاش ممکن است از داخل سیستم بوجود امده باشد ، اغتشاش داخلی (Internal disturbanse) و یا از بیرون وارد شده باشد ، اغتشاش خارجی (external disturbanse) خواهد بود.

– تعریف کنترل مدار باز و کنترل مدار بسته(کنترل با فیدبک) : کنترل مدار باز کنترلی است که ورودی به سیستم هیچگونه تاثیر از خروجی و ملدار ان ندارد . در کنترل مدار باز برای رسیدن به یک مقدار خاص خروجی ، یک ورودی تعریف و بدست اورده و اعمال می شود . هیچگونه اطمینانی وجود ندارد که خروجی همانی باشد که انتظار داریم. ممکن است سیستم تحت تاثیر اغتشاش اعم از داخلی یا خارجی قرار گیرد . طبیعی است در این حالت به خروجی مورد نظر نخواهیم رسید.

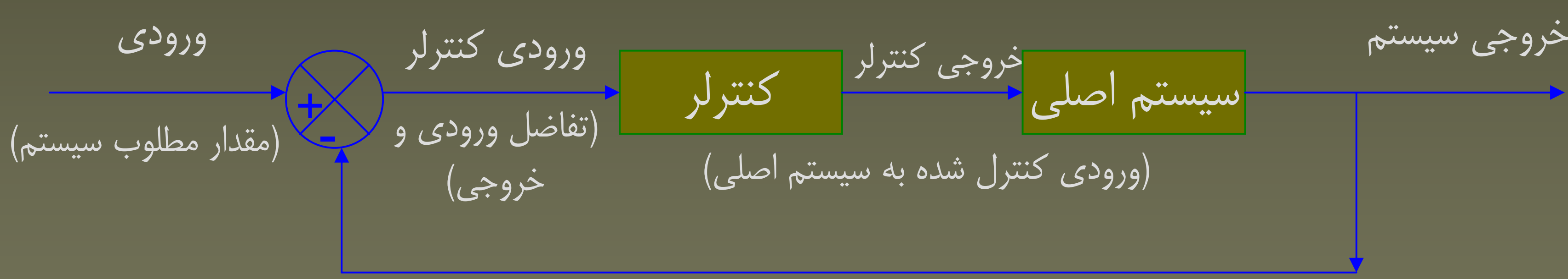
در یک سیستم کنترلی دارای فیدبک (Closed-loop control,Feed-back control)اگرهم اغتشاشی (داخلی یا خارجی) به سیستم وارد شود، کنترلرهای این سیستم سعی می کنند جواب را در حد مطلوب نگهدارند. آنچه در واقعیت سیستم های کنترلی فیدبک دار اتفاق می افتد ، این استکه سیگنال تفاضل مقادیر خروجی (یا خروجی واقعی) یک سیستم کنترلی با ورودی (یا مقدار مطلوب و مورد نظر) به کنترلر وارد شده و در ان بزرگ یا کوچک و معنی دار شده

وبه سیستم اصلی می رود تا تاثیر خود را روی خروجی بگذارد.

یک سیستم کنترلی مدار باز:



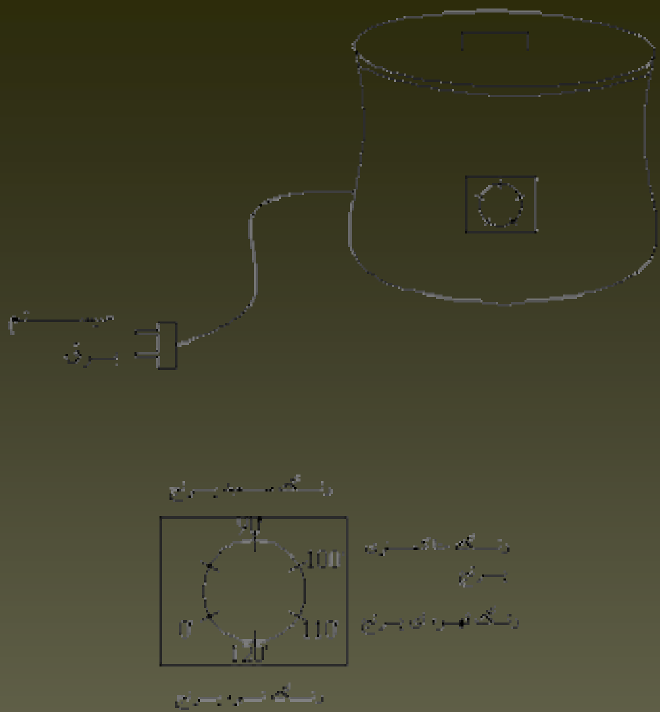
یک سیستم کنترلی مدار بسته:



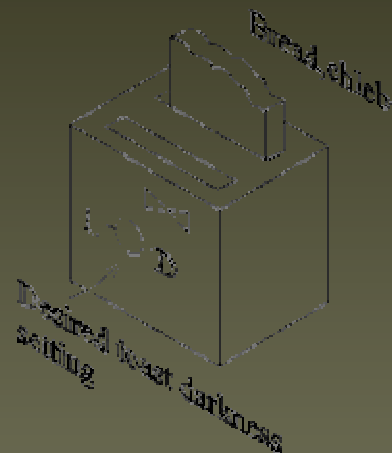
البته در بعضی سیستم های کنترلی فیدبک دار ممکن است کنترلری نیز در مدار فیدبک قرار داشته باشد.

مثالهایی از یک سیستم حلقه باز:

سیستم پلوپز،سیستم توستر



سیستم Automatic toaster



سیستم چراغهای راهنمایی درسرراه چهارراه ، ماشین لباسشویی که توانایی اندازه گیری تمییزی لباسها را ندارد.

دقت شود: سیستم کنترلی حلقه باز فقط موقعی می توان بکار برد که؛

۱-رابطه ورودی و خروجی معلوم باشد.

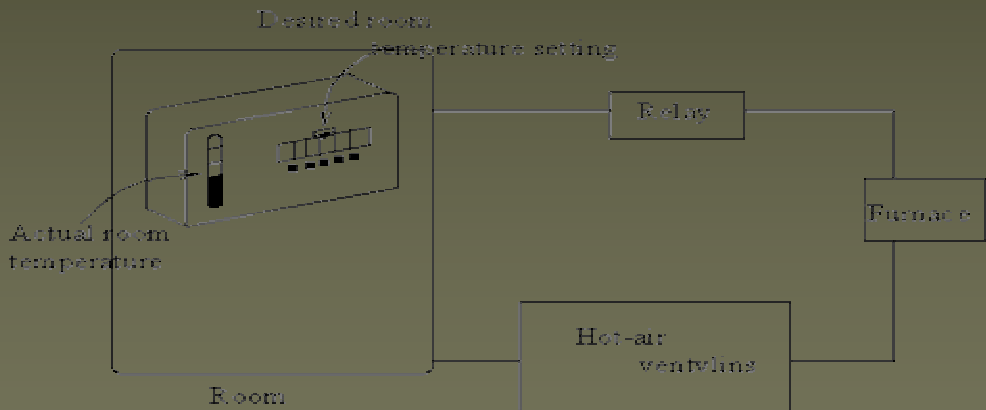
۲-اغتشاش داخلی و خارجی در سیستم نداشته باشیم.

۳-برنامه ریزی (زمان بندی) دقیق انجام شود.

در سیستم های کنترلی حلقه باز هیچ اندازه گیری انجام نمی شود.

سیستم های کنترلی مدار بسته حتما باید در حالتی که در سیستم اغتشاش وجود دارد و یا پارامترهای داخلی سیستم تغییر می کنند ، به کار برده می شوند.در سیستم های کنترلی مدار – بسته ، سیگنال خطا که تفاضل سیگنال ورودی و سیگنال فیدبک شده است ، بر روی کاهش خطا وبه مقدار مطلوب (موردانتظار) خروجی به سیستم وارد می شود. سیگنال فیدبک شده می– تواند خود خروجی یا تابعی از خروجی مثل مشتق ویا انتگرال ان باشد.مشخصات پاسخ بر حسب اینکه سیگنال خطا داده شده به سیستم اصلی دارای چه خاصیتی است ، تفاوت خواهد نمود.

مثالهای یک سیستم مدار بسته : سیستم مدار بسته کنترل درجه حرارت اتاق.



سیستم مدار بسته کنترل درجه حرارت اتاق

در یک سیستم آسانسور برای انکه توقف ها بیجا نباشد و مناسب باشد هنگام حرکت اسانسور هر کدام از مسافرین طبقه های مختلف بتوانند با دادن مقصد و تعداد ، کنترلر اسانسور تصمیم بگیرد که در چه طبقه ای اسانسور بایستدومسافر سوار نماید.

طراحی کنترلرها:
در کنترل کارشناسی راجع به روش مکان هندسی و پاسخ فرکانسی سیستم صحبت می شود.
روش مکان هندسی بر اساس چگونگی و کیفیت مشخصات پاسخ حالت گذرا و پاسخ فرکانسی بر اساس معیارهای حوزه فرکانسی (معیار پایداری نایکو ییست ، نمودارهای بودوقطبی)عمل می کنند . هر دو این روشها مربوط به حالتی است که سیستم دارای یک ورودی و یک خروجی باشدو هیچگونه بهینه سازی در انها انجام نمی شود.

در این دو روش که به انها روش های سنتی یا کلاسیک گفته می شود،معمولا با سیستم های دارای پارامتر های ثابت نسبت به زمان سرو کار داریم. طراحی سیستم های کنترلی بر اساس این دو روش بصورتی است که با استفاده از معیارهای امتهان شده (الگو های امتهان شده) و روش سعی و خطا معیارهای عملکرد را ارضا نماید.

ارضاء معیارهای عملکرد یعنی سیستم تحت تاثیر سیگنالهای ورودی ؛
۱-تا حد ممکن خطای کمتری داشته باشد.
۲-میرایی معقول داشته باشد.

یعنی سیستم کنترلی باید طوری باشدکه ، به تغییرات کوچک پارامترهای نسبتا غیر حساس باشد ، یا کمتر حساس باشدوهمچنین بتواند اغتشاشات نامطلوب را هضم نماید، یا به خوبی ضعیف نماید.

اگر مشخصات عملکرد بر حسب شاخصهای مبتنی بر متغیرهای حالت ارایه شده باشد ، باید از روشهای کنترل مدرن (Modern control methods) استفاده نمود.این روشها عبارتند از :

۱– روش جایدهی قطبها Pole-placement method .

۲–طراحی مشاهده گر حالت State observer .

۳–تحلیل پایداری لیاپانوف Lyapunov stubility analysis .

بر اساس نظریه کنترل مدرن (روشهای فضای حالت) می توان از مدلسازی مستقیم ریاضی و دقیق و اعمال نظریه های پیشرفته تر ریاضی استفاده نمود . در این حالت سیستم می تواند چند ورودی و چند خروجی نیز داشته باشدوهمچنین دارای مشخصه متغیر با زمان نیز باشد.
(Time-varying property)

نمایش اجزا سیستم های مکانیکی ، حرارتی ، الکتریکی و سیالاتی :

نهایت تلاش ماهنگامی که می خواهیم یک سیستم را تحلیل کنیم ، بدست آوردن مدل ریاضی ان است. یک روش متداول برای پیدا کردن مدل ریاضی سیستم های مهندسی شناسایی اجزا آن ویا تعیین چگونگی ارتباط ان اجزا با یکدیگر است.

سیستم های مورد مطالعه در این قسمت :

۱-سیستم های انرژی دار(یا سیستمهایی که انرژی را در خود ذخیره یا مستهلک می کنند.) دارای انواع مکانیکی ، حرارتی ، الکتریکی و سیالاتی هستند.

۲-سیستم هایی که انرژی را از یک نوع به نوع دیگر تبدیل می کنند.

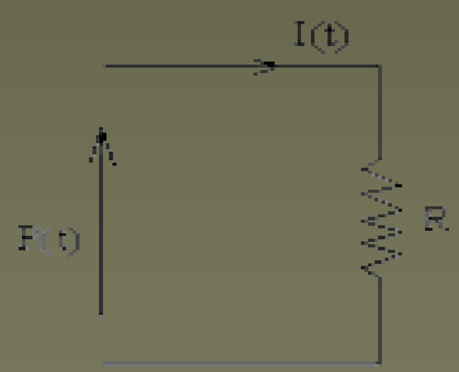
الف : اجزا سیستم های انرژی دار الکتریکی :

اجزا اساسی سیستم های انرژی دار الکتریکی عبارتند از؛ مقاومت ، خازن ، سولونویید . برای تعریف مشترک مفاهیم فیزیکی در سیستم های الکتریکی و مکانیکی تعریف می کنیم :

i(t) =جریان = شدت جریان　　　　e(t) = پتانسیل=ولتاژ

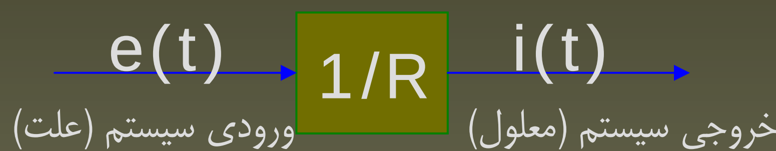
یعنی با توجه به شکل (نمایش فیزیکی) می توان نوشت :

$$e(t) = R.i(t) \Rightarrow i(t) = \frac{1}{R} e(t)$$



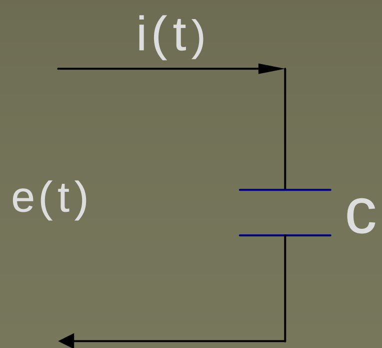
دیاگرام جعبه ای معادل با سیستم الکتریکی ؛

یعنی اگر از مقاومت R جریان $i(t)$ عبورکند ،دردوسران پتانسیل $e(t)$ ایجاد خواهد شد. همچنین با توجه به رابطه دوم(صفحه گذشته) می توان نوشت:



بنابراین در یک سیستم الکتریکی که تنها شامل مقاومت باشد ، می توان جای علت ومعلول را با هم عوض کرد.

در یک خازن : C (واحد فاراد) ضریب ثابت خازن ، رابطه بین پتانسیل و جریان عبارت است از : (با تعریف اپراتور D به صورت زیرداریم:



$$D = \frac{d}{dt} \qquad CDe(t) = i(t) \qquad \Rightarrow \qquad e(t) = \frac{1}{CD} i(t)$$

$$c\,\frac{de(t)}{dt} = i(t)$$

حالت غیر منطقی : ورودی به خازن پتانسیل و خروجی ان جریان است .

$i(t) \rightarrow \boxed{1/CD} \rightarrow e(t)$

حالت منطقی : ورودی به خازن جریان و خروجی ان پتانسیل است .

$e(t) \rightarrow \boxed{CD} \rightarrow i(t)$

چرا غیر منطقی؟ چون اگر دو سرخازن به یک اختلاف پتانسیل معین وصل شود ، د ر اثر ایجادجریان الکتریکی بسیارزیادخازن جرقه زده و سوخته و قدرت عمل اختلاف پتانسیل را ندارد.
وچرا منطقی ؟ چون می توان از یک خازن جریان الکتریکی معینی عبور دهیم ، که به این عمل در دو سر خازن اختلاف پتانسیل ایجاد می شود.

مشتق گیری از اختلاف پتانسیل یعنی خروجی مشتق و ورودی نسبت به زمان است.و انتگرال گیری ازجریان الکتریکی خروجی انتگرال وورودی نسبت به زمان است.یا سطح زیرمنحنی جریان الکتریکی نسبت به زمان از زمان صفر تا زمان معین.

ورودی $\rightarrow \boxed{D} \rightarrow$ خروجی

$\rightarrow \boxed{1/D} \rightarrow$ خروجی

در حالت منطقی (انتگرال گیرنده): حتی در صورت غیر پیوسته بودن تابع ورودی، تابع خروجی پیوسته و معین خواهد بود. (مهم : بنابراین انتگرال گیرنده دارای یک مفهوم ریاضی می باشد.)

با سه مثال نشان می دهیم که جعبه انتگرال گیرنده قابل ساخت نیز می باشد:

در سیستم الکتریکی: خازن یک منبع ذخیره (جمع سازی ntegration) انرژی الکتریکی است که عمل ذخیره سازی از طریق افزایش پتانسیل دو سر خازن بدلیل افزایش جریان الکتریکی است . وقتی - خازن دشارژ یا تخلیه است ، در واقع اختلاف پتانسیل دو سر آن صفر شده است . با عبور دادن جریان - الکتریکی ، اختلاف پتانسیل بتدریج افزایش یافته و خازن به حالت شارژ می رسد.

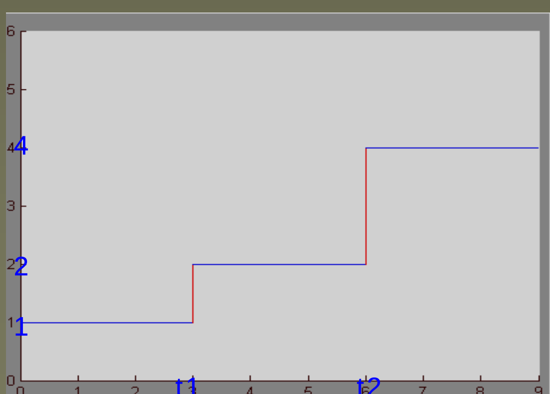
در سیستم هیدرو لیکی : پر شدن یک مخزن مایع نشاندهندهٔ ذخیره سازی و یا انتگرال گیری است . بعداً می بینیم ، اگراز دبی ورودی به مخزن انتگرال بگیریم ، نشان دهندهٔ ذخیره سازی یا افزایش ارتفاع مخزن است.یا ارتفاع مخزن همان انتگرال دبی ورودی است.

در سیستم های مکانیکی : یک وزنه هم نقش انتگرال گیرنده را دارد. اگر سیستمی با یک جرم ثابت را در نظربگیریم و نیرو ورودی آن باشد، سرعت می تواند خروجی آن باشد. یعنی سرعت جرم ثابت عبارت است از انتگرال نیری وارد به جرم .

سیستم غیر منطقی (مشتق گیرنده) یک سیستم غیرواقعی است.چرا ؟

به دو دلیل :

۱-اگر ورودی به سیستم مشتق گیرنده یک تابع به شکل مقابل باشد، خروجی یک تابع پیوسته ومعین نخواهد بود.در فواصل باز 0 تا t1 و t1 تا t2 مشکلی به نظرنمی رسد. چون مشتق تابع در این فاصله برابر صفر است. اما در نقاط t1و t2 مشتق تابع بی نهایت است.کار کردن با متغیرهاییکه ممکن است در یک موقع بینهایت شوندواقعاغیرممکن است



یا ساخت چنین دستگاهی واقعا امکان پذیر نیست. دستگاه در یک محدوده صفر تا بی نهایت مانور داشته باشد. بر این اساس هنوز سرعت سنج خطی ساخته نشده است. حرکت خطی توسط یک پتانسیومتر حس کننده بدست آمده و اندازه گیری می شود.اما از آن به هیچ وسیله ای نمی توان مشتق گرفت و سرعت - خطی را تغییر نمود. اشکال اساسی دیگر سیستمهای مشتق گیرنده اینست که در واقع به اطلاعات آینده یک تابع نیاز دارند و ارزیابی و اطلاع داشتن از اطلاعات آینده یک سیستم واقعا غیر ممکن است. البته در سیستم های کنترلی مکانیزمهایی ایجاد شده است که مشتق گیری را بطور تقریبی انجام می دهند.

-سیستم الکتریکی شامل یک سولنویید (inductor) : (H ضریب سولنویید بر حسب هانری).

$$D = \frac{d}{dt} \qquad L\frac{d}{dt}i(t) = e(t) \qquad LDi(t) = e(t) \qquad i(t) = \frac{1}{LD}e(t)$$

باتوجه به منطقی بودن سیستم های انتگرالگیرنده نسبت به سیستم های مشتق کیرنده نمایش ترسیمی عبارتست از:

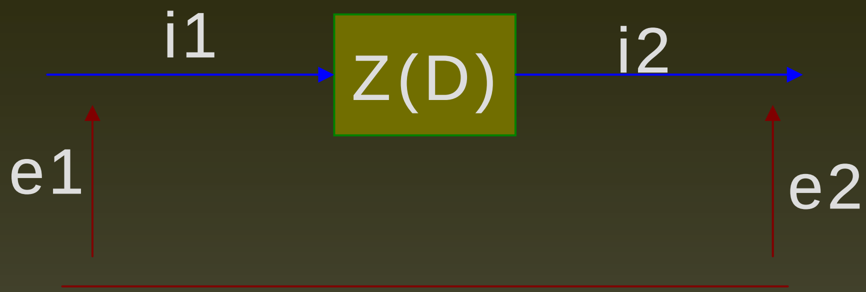
$$e(t) \longrightarrow \boxed{1/LD} \longrightarrow i(t)$$

یعنی اگر یک سولنوییدبه یک اختلاف پتانسیل وصل شود، جریان از آن عبور می نماید. همچنین میتوان نتیجه گرفت که اگر سولنویید به یک پتانسیل ثابت وصل شود ، جریان عبوری از آن بصورت خطی - افزا یش می یابد .

ترکیب اجزا سیستم های انرژی دار الکتریکی :

الف – مدار سری :

مقاومت معادل Z(D) =impedancel



در مدار سری جریانها برابرند . i1=i2

و اختلاف پتانسیل عبارتند از : e1=e2

$$e1-e2 = Z(D).i1 \longrightarrow e1 = e2+Z(D).i1$$

بنابراین می توان نوشت :

$$\begin{bmatrix} e1 \\ i1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & Z(D) \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e2 \\ i2 \end{bmatrix}$$

مشخصات نقطه ۱ = ماتریس تبدیل | مشخصات نقطه ۲

$$e(t) = R \,.\, i(t) \longrightarrow$$ R=امپدانس معادل مقاومت

$$e(t) = 1/CD \,.\, i(t) \longrightarrow$$ 1/CD= امپدانس معادل خازن

$$e(t) = LD \,.\, i(t) \longrightarrow$$ LD=امپدانس معادل سولنویید

مثال : رابطه مشخصات نقطه ۱.۲ مدار سری مقاومتهایR1,R2
امپدانس معادل دو مقاومت Z(D)=R1+R2

$$\begin{bmatrix} e1 \\ i1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & Z(D) \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e2 \\ i2 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \begin{bmatrix} e1 \\ i1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & R1+R2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e2 \\ i2 \end{bmatrix}$$

بدون استفاده از امپدانس معادل هم می توان این فرمول را بدست آورد:

$$\begin{cases} i1 = i' \\ e1 - e' = R1 \cdot i' \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} e1 \\ i1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & R1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} e' \\ i' \end{bmatrix}$$

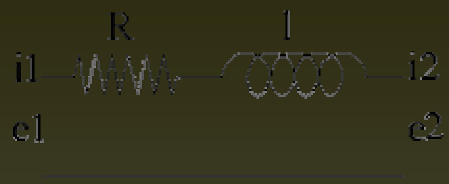
بین نقطه "پریم" و نقطه ۲ داریم :

$$\begin{cases} i2 = i' \\ e' - e2 = R2 \cdot i2 \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} e' \\ i' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & R2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} e2 \\ i2 \end{bmatrix}$$

با جایگزینی $\begin{bmatrix} e' \\ i' \end{bmatrix}$ از معادله دوم در معادله اول :

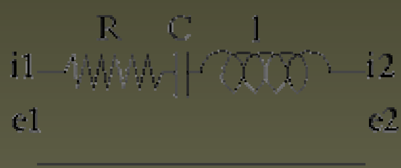
$$\begin{bmatrix} e1 \\ i1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & R1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & R2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e2 \\ i2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & R1+R2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e2 \\ i2 \end{bmatrix}$$

مثال : در سیستم مقاومت- سونلویید – خازن داریم ؛

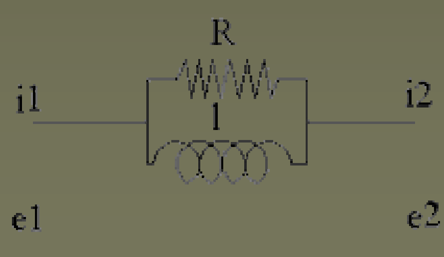


$$\begin{bmatrix} e1 \\ i1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & R+LD \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e2 \\ i2 \end{bmatrix} \quad Z(D) = R + LD \qquad D = \frac{d}{dt}$$

مثال : در سیستم شکل مقابل داریم ؛

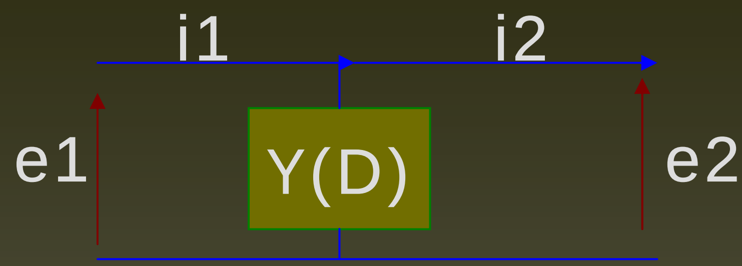


$$\begin{bmatrix} e1 \\ i1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & R+LD+1/CD \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e2 \\ i2 \end{bmatrix} \quad Z(D) = R + LD + 1/CD$$



$$\begin{bmatrix} e1 \\ i1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & RLD/(R+LD) \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e2 \\ i2 \end{bmatrix} \quad Z(D) = RLD/(R+LD)$$

ب – مدار موازی : مرسوم است در مدارهای موازی Admitance (عکس مقاومت) بدست آورده شود.



Y(D)=admitance

پتانسیل دو سر ادمیتانس با هم برابرند : e1=e2

اختلاف جریانها از ادمیتانس عبور می کند ، یعنی ؛

$$\begin{bmatrix} e1 \\ i1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ Y(D) & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e2 \\ i2 \end{bmatrix}$$

i1-i2=Y(D).e1=Y(D).e2

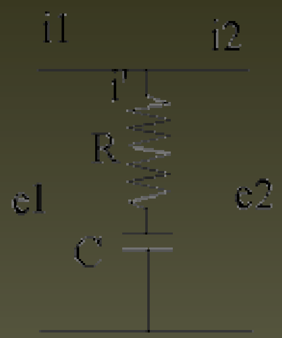
مشخصات نقطه ۲ ماتریس تبدیل = مشخصات نقطه ۱

e(t) = i(t) / (1/R) ⟶ امپدانس معادل مقاومت =1/R

e(t) = i(t)/CD ⟶ امپدانس معادل خازن =CD

e(t) =i(t)/(1/ LD) ⟶ امپدانس معادل سولنویید1/LD

مثال : مطلوب است تعیین رابطه بین مشخصات نقطه ۱و۲ ؟ یک راه بدست آوردن ادمیتانس معادل، چون مدار موازی است ، بدست آوردن امپدانس معادل و عکس نمودن آن است . داریم ؛



$$Z(D) = R + 1/CD = (RCD+1)/CD$$

یعنی ادمیتانس معادل عبارتست از :

$$Y(D) = CD/(RCD+1)$$

$$\begin{bmatrix} e1 \\ i1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ CD/(RCD+1)\_ & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e2 \\ i2 \end{bmatrix}$$

همین نتیجه را می توانستیم بصورت مستقیم نیز بدست آوریم ؛

اختلاف پتانسیل دو سر مقاومت $= i'.R$
اختلاف پتانسیل دو سرخازن $= i'.(1/CD)$

$$\begin{cases} i' = i1 - i2 \\ e1 = e2 \end{cases}$$

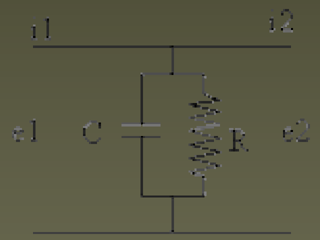
$$e1 = e2 = i'.R + i'.\frac{1}{CD} \quad \Rightarrow \quad e2 = i' \cdot (R + \frac{1}{CD}) = i'(\frac{RCD+1}{CD})$$

$$\Rightarrow i' = \frac{CD}{RCD+1} e2 \quad \Rightarrow \quad i1 - i2 = \frac{CD}{RCD+1} e2$$

$$\Rightarrow i1 = \frac{CD}{RCD+1} e2 + i2$$

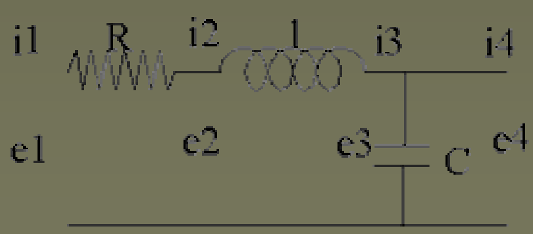
که همان معادله فرم ماتریسی می باشد .

مثال : مطلوب است تعیین ماتریس تبدیل مشخصات نقاط ۱و۲ شکل :



$$\begin{bmatrix} e1 \\ i1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ CD/(RCD+1)\_ & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e2 \\ i2 \end{bmatrix}$$

مثال : مطلوب است تعیین ماتریس تبدیل مشخصات نقاط ۱و۲ شکل :



ارتباط بین $\begin{bmatrix} e1 \\ i1 \end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix} e2 \\ i2 \end{bmatrix}$ عبارتست از:

$$\begin{bmatrix} e1 \\ i1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & R \\ 0\_ & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e2 \\ i2 \end{bmatrix}$$

ارتباط بین $\begin{bmatrix} e2 \\ i2 \end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix} e3 \\ i3 \end{bmatrix}$ عبارتست از:

$$\begin{bmatrix} e2 \\ i2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & LD \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e3 \\ i3 \end{bmatrix}$$

و ارتباط بین $\begin{bmatrix} e3 \\ i3 \end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix} e4 \\ i4 \end{bmatrix}$ عبارتست از:

$$\begin{bmatrix} e3 \\ i3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ CD & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e4 \\ i4 \end{bmatrix}$$

بنابراین می توان نوشت :

$$\begin{bmatrix} e1 \\ i1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & R \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & LD \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ CD & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e4 \\ i4 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} e1 \\ i1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+RCD+LCD^2 & R+LD \\ CD & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} e4 \\ i4 \end{bmatrix}$$

اگر در مدار شکل داشته باشیم i4=0 می توان نوشت : (می خواهیم معادله دیفرانسیل جریان i1 را بر حسب تغییرات e1 بدست آوریم)

$$\begin{cases} e1 = (1+RCD+LCD^2).e4 \\ i1 = CD.e4 \end{cases} \Rightarrow e4 = \frac{i1}{CD}$$

$$\Rightarrow e1 = (1+RCD+LCD^2).\frac{1}{CD}i1 \qquad \Rightarrow \qquad e1 = (R+\frac{1}{CD}+LD).i1$$

$$\Rightarrow C\dot{e}1 = LC.\ddot{i}1 + RC.\dot{i}1 + i1$$

اجزا انرژی دار سیستم های مکانیکی :

اجزا انرژی دار یک سیستم مکانیکی در حرکت خطی ؛ جرم M، فنر K، دمپر b هستند در سیستم-های الکتریکی پتانسیل و جریان (علت و معلول) بودند . قدرت یا توان الکتریکی حاصل ضرب جریان و پتانسیل هستند . در سیستم های مکانیکی (علت و معلول) را نیرو و سرعت انتخاب می کنیم .

علت های این انتخاب ؛

۱- حاصل ضرب علت ومعلول سیستم های مکانیکی نیز توان یا قدرت نامیده می شود.(توان مکانیکی FV) .

۲- با این انتخاب تشابه مناسبی بین سیستم باجزا الکتریکی وسیستم با اجزا مکانیکی حاصل میشود.

بنا براین ما می توانیم سیستم های مکانیکی را به سیستم های الکتریکی (یا بر عکس) تبدیل نماییم .

البته دو انتخاب وجود دارد:

۱- نیرو معادل پتانسیل و سرعت معادل جریان .

۲- نیرو معادل جریان و سرعت معادل پتانسیل .

حال درباره این دو انتخاب توضیح می دهیم :

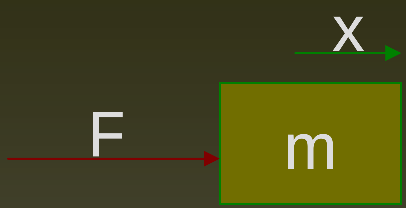
انتخاب اول : نیرو معادل پتانسیل F=e و سرعت معادل جریان الکتریکی v=i .

-مستهلک کننده یا دمپر با ضریب b .

$$F(t)=b.v(t) \quad \Rightarrow \quad e(t)=\dot{b}.i(t)$$

$$e(t)=R.i(t)$$

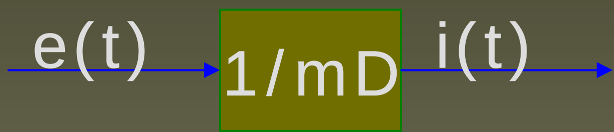
بنابراین دمپر با ضریب bدر سیستم های مکانیکی معادل مقاومت R در سیستم های الکتریکی است.$b = R$



- جرم   m :

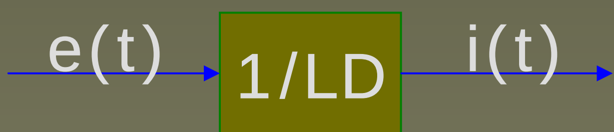
$$F(t) = m.a(t) \quad \Rightarrow \quad F(t) = m\ddot{x} = m\frac{dv}{dt} \quad \Rightarrow \quad F(t) = m.Dv(t)$$

با توجه به انتخاب ؛



$$e(t) = mDi(t) \quad \Rightarrow \quad i(t) = \frac{1}{mD}e(t)$$

قبلا در سیستم های الکتریکی داشتیم :



$$i(t) = \frac{1}{LD}e(t)$$

بنابراین جرم   mدر سیستم های مکانیکی معادل سولنویید L در سیستم های الکتریکی است .

یعنی : $m = L$

توضتح : همانطوریکه قبلا نیز متذکر شد ، برای نشان دادن نمودار از نشانگر مشتق استفاده نکردیم . چون انجام پروسه مشتق همانطوریکه ذکر شد ، انجام شدنی نیست . بنابراین نمودار بلوکی رابطه مشتقی صفحه قبل را رسم نکردیم .

- فنر خطی k :

$$F(t) = k.x(t)$$

چون می خواهیم به فرم انتگرالی برسیم ، می توان نوشت :

$$x(t) = \int v.d(t) = \frac{1}{D}v(t) \quad \Rightarrow \quad F(t) = \frac{k}{D}v(t)$$

$$e(t) = \frac{k}{D}i(t)$$

قبلا در مورد سیستم های الکتریکی داشتیم :

$$e(t) = \frac{1}{CD}i(t)$$

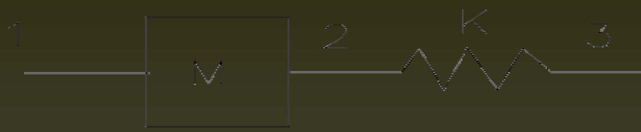
بنابراین فنر kدر سیستم های مکانیکی معادل خازن با ظرفیت c در سیستم های الکتریکی است .

یعنی :

$$k = 1/C$$

مثال : سیستم الکتریکی معادل سیستم مکانیکی شکل را ارایه نمایید .

انتخاب : نیرو معادل پتانسیل و سرعت معادل جریان .



$$\begin{bmatrix} e1 \\ i1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & LD \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e2 \\ i2 \end{bmatrix}$$

واقعیت ها : ۱- بجای جرم باید سولنویید استفاده نمود ، چون بین نقطه ۱و۲ سرعت ثابت و نیرو متفاوت است .بنابراین جریان در سولنویید باید ثابت باشد . بنابراین سولنویید به-صورت سری وصل می شود .

۲- بجای فنر باید خازن استفاده نمود ، چون بین نقطه ۲و۳ (از مدار مکانیکی) نیرو یا پتانسیل ثابت است . و سرعت یا جریان تغییر می کند . خازن (معادل الکتریکی)-بطور موازی قرار می گیرد .

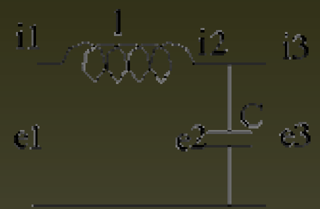
$$\begin{bmatrix} e1 \\ i1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & LD \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ CD & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e3 \\ i3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} e1 \\ i1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+LCD^2 & LD \\ CD & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e3 \\ i3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} e1 \\ i1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+\dfrac{mD^2}{k} & mD \\ \dfrac{D}{k} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e3 \\ i3 \end{bmatrix}$$

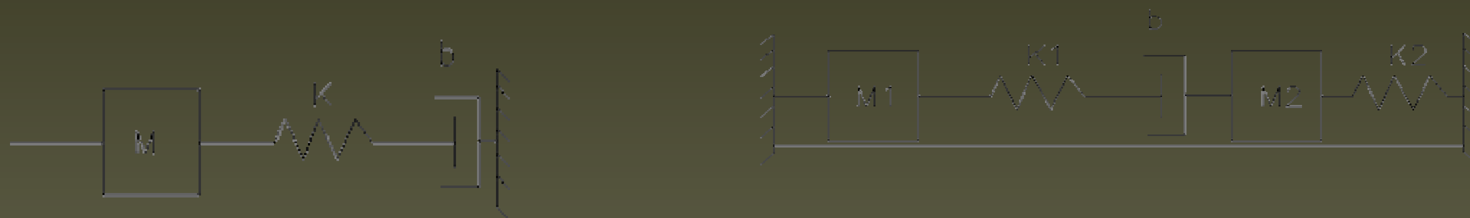
$$m \equiv L \qquad k \equiv \frac{1}{C}$$

$$\begin{bmatrix} e2 \\ i2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ CD & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e3 \\ i3 \end{bmatrix}$$

بنابراین بصورت کلی معادل سیستم مکانیکی ، سیستم الکتریکی شکل مقابل خواهد شد :



تمرین : سیستم الکتریکی معادل سیستم های مکانیکی زیر را بدست آورید .



ا نتخاب دوم : نیرو معادل جریان F=i و سرعت معادل پتانسیل v=e .

- مستهلک کننده یا دمپر با ضریب b :

$$F(t) = b.v(t)$$

$$i(t) = b.\dot{e}(t)$$

$$i(t) = \frac{1}{R}e(t)$$

بنابراین دمپر با ضریب bدرسیستم مکانیکی معادل مقاومت R درسیستم مکانیکی با ابطه $R = 1/b$ است.

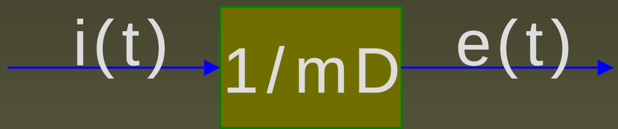
– جرم m :

$$F(t) = m.a(t) \quad \Rightarrow \quad F(t) = m\ddot{x} = m\frac{dv}{dt} \quad \Rightarrow \quad F(t) = m.Dv(t)$$

با توجه به انتخاب :

$$i(t) = mDe(t)$$

بنابراین :



$$e(t) = (1/mD).i(t)$$

قبلا در مورد سیستم الکتریکی داشتیم :

$$e(t) = (1/CD).i(t)$$

بنابراین جرم در سیستم مکانیکی معادل خازن در سیستم الکتریکی است . یعنی c=m

-فنر خطی k :

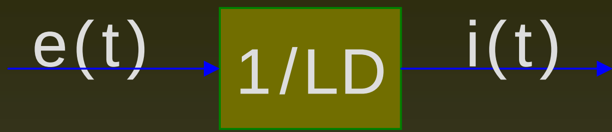
$$F(t) = k.x(t) \Rightarrow$$

$$x(t) = \int v.d(t) = \frac{1}{D}v(t) \quad \Rightarrow \quad F(t) = \frac{k}{D}v(t)$$

$$i(t) = \frac{k}{D}e(t)$$

قبلا در سیستم الکتریکی داشتیم :

Δh



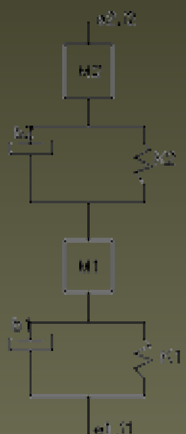
$$i(t) = (1/LD).e(t)$$

بنابراین فنر در سیستم مکانیکی معادل سولنویید در سیستم الکتریکی است . K=1/ L

در هر دو انتخاب : برای وزنه ، ورودی نیرو و خروجی سرعت است .

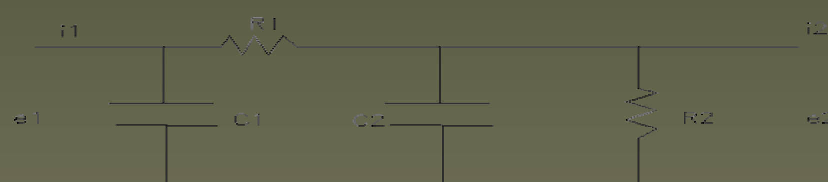
در مورد فنر، ورودی سرعت و خروجی نیرو است .

مثالهای ۲-۱۰ و ۲-۱۱و ۲-۱۲در مورد ترکیب اجزا سیستم های انرژی دار مکانیکی مورد توجه میباشند.



تمرین ۱: معادل الکتریکی سیستم مکانیکی مقابل را تعیین کنید .

تمرین۲: معادل مکانیکی سیستم الکتریکی زیر را تعیین کنید .



اجزا سیستم های انرژی دار در مسایل سیالاتی :

به نظر میرسد ، در مسایل سیالاتی بهتر است پتانسیل را با فشار و جریان را با دبی معادل سازی کنیم.
چون ارتفاع سیال نشاندهنده فشار هیدرو استاتیک نیز می باشد . بعضی جاها ارتفاع را نیز بجای فشار به- کار برده اند . در یک سیستم سیالاتی بخاطر نا صافی (اصطکاک سیالات)و جداره ها و شیرها و زانویی هاو دیگر موانع مقاومت ایجاد می شود .کاملا مشخص است اگر مانعی درسرراه مسیر سیال وجود داشته باشد، فشار دو طرف مانع تفاوت خواهد داشت . اگر دبی برابر i باشد:

$$i1 = i2 = i$$

$$\Delta P = p1 - P2 = R_p.i$$

اختلا ف ارتفاع Δh بخاطر وجود مقاومت R_h در سر راه مسیر حرکت سیال است .

P پتانسیل ، فشار ، ارتفاع .

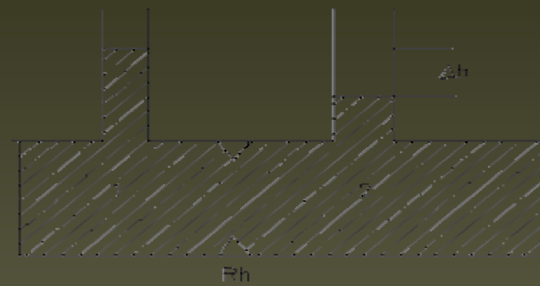
I جریان ، دبی .

ΔP فشار یا اختلا ف ارتفاع نقاط ۱و۲

$i1 = i2 = i$

$\Delta P = p1 - P2 = R_h.i$

یعنی می توان نوشت :



$$\begin{cases} \Delta p = p1 - p2 = R.i \\ i = i1 = i2 \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} P1 \\ i1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & R \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P2 \\ i2 \end{bmatrix}$$

$$\mathrm{P} = \rho gh \Rightarrow R_p.i = \rho g R_h i \Rightarrow R_p = \rho g R_h$$

قبلا برای ترکیب سری اجزا سیستم های انرژی دار الکتریکی داشتیم :

امپدانس معادل مقاومت = R

امپدانس معادل خازن = $1/CD$

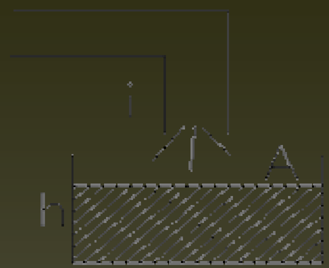
امپدانس معادل سولنویید = LD

$$\begin{bmatrix} P1 \\ i1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & Z(D) \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P2 \\ i2 \end{bmatrix}$$

بنابراین می توان نتیجه گرفت که مقاومت سیستم سیالا تی با مقاومت مدار سری معادل است .

در یک سیستم سیالاتی همچنین داریم : دبی عبارت است از تغییرات حجم مایع نسبت به زمان

I = دبی ورودی و A سطح مقطع جریان که ثابت است .



$$\frac{d}{dt}(Ah) = i \quad \Rightarrow A\frac{d}{dt}h = i$$

اگر ارتفاع معادل ، پتانسیل و دبی ورودی ، جریان باشد :

$$A\frac{d}{dt}P(t) = i(t) \quad \Rightarrow AD.P(t) = i(t) \Rightarrow P(t) = \frac{1}{AD}i(t)$$

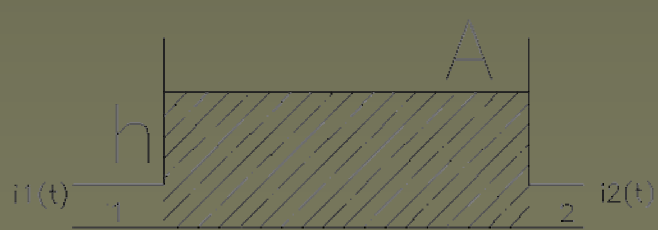
اگر مقایسه کنیم با سیستم الکتریکی خازن :

$$e(t) = \frac{1}{CD}i(t)$$

بنابراین A سطح مقطع سیستم سیال معادل C ظرفیت خازن سیستم الکتریکی است . یعنی ؛ A=C

در یک سیستم سیالاتی همچنین داریم : چون ارتفاع برای خروجی و ورودی ثابت است ، فشار (پتانسیل) نیز ثابت است .

P1=P2=P



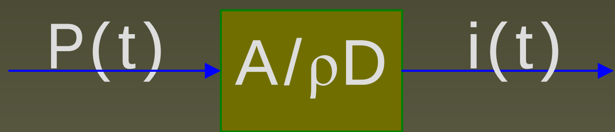
چون سطح نیز ثابت است ،

$$A\frac{d}{dt}h = i \qquad \text{و} \qquad i = i1 - i2 \quad \Rightarrow \quad i1 = i + i2 = AD.P2 + i2$$

اگر دینامیک سیالات مد نظر باشد (افزایش مد نظر باشد) معادلات دیفرانسیل مربوطه نشان می دهند ، که می توان آنها را معادل سولنویید در نظر گرفت .

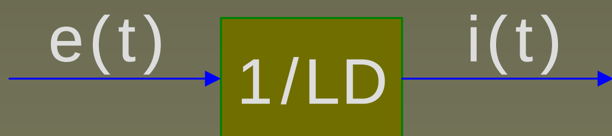
$$\begin{bmatrix} P1 \\ i1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ AD & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} P2 \\ i2 \end{bmatrix}$$

یک سیال غیر قابل تراکم در لوله در نظر می گیریم ؛



$$\sum \vec{F} = \frac{d}{dt}(m\vec{v}) \quad \text{و} \quad \mathrm{P}(t).A = \rho\frac{d}{dt}i(t) \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt}i(t) = \frac{A}{\rho}P(t) \quad \Rightarrow \quad i(t) = \frac{A}{\rho D}P(t)$$

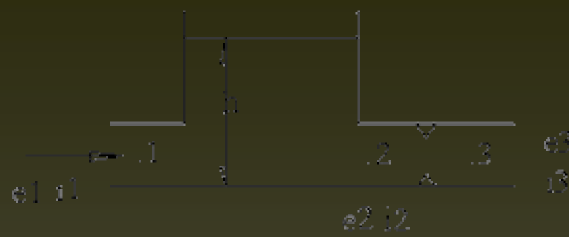
با مقایسه با سیستم الکتریکی که از قبل داشتیم ،



$$i(t) = \frac{1}{LD}e(t)$$

می توان نوشت که ضریب ρ/A معادل L درسیستم الکتریکی است .
لازم به ذکر است ، چون اثر اینرسی سیال بسیار کم است ، بنابراین معادل سولنوییدی آن قابل صرفنظر خواهد بود .

_ ترکیب اجزا انرژی دار در سیالات :



مثال : مطلوب است ، تعیین معادله دیفرانسیل سیستم سیالاتی مقابل

بین نقطه ۱و۲ داریم :

$$\begin{bmatrix} P1 \\ i1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ AD & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P2 \\ i2 \end{bmatrix}$$

همچنین بین نقاط ۲و۳ داریم:

$$\begin{bmatrix} P2 \\ i2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & R \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P3 \\ i3 \end{bmatrix}$$

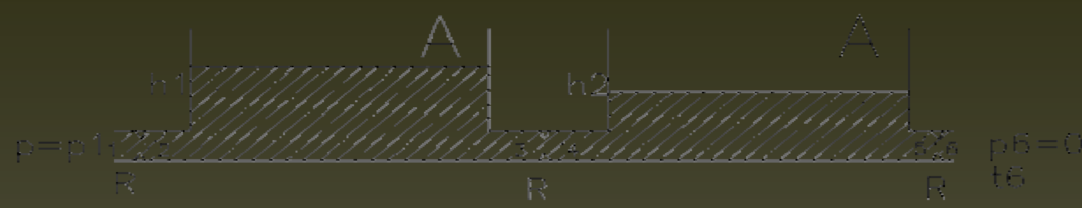
چون سیال به اتمسفر می ریزد (e3=0)

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} P1 \\ i1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ AD & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & R \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P3 \\ i3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & R \\ AD & RAD+1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P3 \\ i3 \end{bmatrix}$$

$$P3 = 0 \quad \Rightarrow \quad P1 = R.i3 \quad \text{و} \quad i1 = (RAD+1).i3 \quad \text{و} \quad P1 = P2$$

$$\Rightarrow P1 = P2 = R.\frac{i1}{RAD+1} \quad \Rightarrow \quad R.i1 = RAP_1 + P_1 \quad (\mathit{first} \quad \mathit{order})$$

مثال: مطلوب است تعیین معادله دیفرانسیل سیستم سیالاتی مقابل. و همچنین رابطه h2 بر حسب e.
نیز رابطه h1 بر حسب e ورودی .



$$\left\{\begin{array}{l}
\begin{bmatrix} P1 \\ i1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ CD & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} P2 \\ i2 \end{bmatrix} \\
\begin{bmatrix} P2 \\ i2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ CD & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} P3 \\ i3 \end{bmatrix} \\
\begin{bmatrix} P3 \\ i3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ CD & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} P4 \\ i4 \end{bmatrix} \\
\begin{bmatrix} P4 \\ i4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ CD & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} P5 \\ i5 \end{bmatrix} \\
\begin{bmatrix} P5 \\ i5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ CD & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} P6 \\ i6 \end{bmatrix}
\end{array}\right. \Rightarrow \begin{bmatrix} P1 \\ i1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1+RCD)^2 + RCD & R(1+RCD)(3+RCD) \\ CD(2+RCD) & (1+RCD)^2 + RCD \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P6 \\ i6 \end{bmatrix}$$

$$P1 = R(1+RCD)(3+RCD).i6 \qquad (1)$$

$$i1 = [(1+RCD)^2 + RCD].i6$$

$$\Rightarrow i1 = \frac{(1+RCD)^2 + RCD}{R(1+RCD)(3+RCD)} P1 \qquad (2)$$

$$P6 = 0 \Rightarrow P5 = R.i5 \Rightarrow P1 = (1+RCD)(3+RCD)P5 \Rightarrow P5 = \frac{1}{(1+RCD)(3+RCD)} P1 \qquad (3)$$

اگر $P1=P$ فشار ورودی باشد ؛

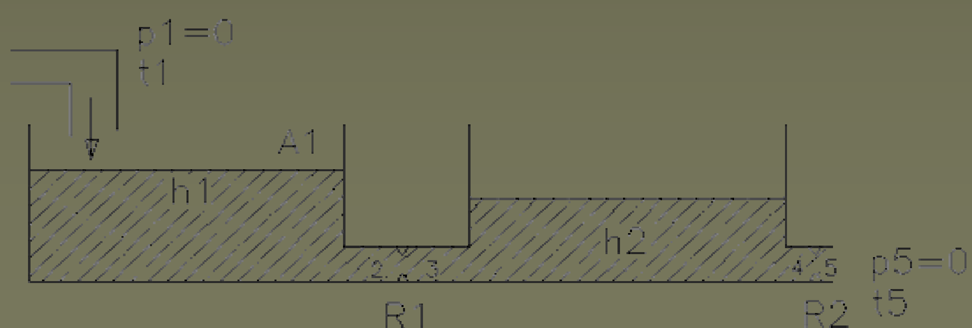
$$P2 = P3 = \rho gh1 \quad \Rightarrow \quad p4 = p5 = \rho gh2 \quad (3) \Rightarrow \quad h2 = \frac{1}{(1+RCD)(3+RCD)} \cdot \frac{P}{\rho g}$$

همچنین می توان نوشت :

$$P2 = P1 - R.i1 \quad \Rightarrow \quad \rho gh1 = P - R.i1 \quad \Rightarrow \quad \rho gh1 = P - R\frac{(1+RCD)^2 + RCD}{R(1+RCD)(3+RCD)}P$$

$$\rho gh1 = (1 - \frac{(1+RCD)^2 + RCD}{(1+RCD)(3+RCD)})P \Rightarrow h1 = (1 - \frac{(1+RCD)^2 + RCD}{(1+RCD)(3+RCD)})\frac{P}{\rho g}$$

تمرین : مطلوب است تعیین معادله دیفرانسیل سیستم سیالاتی مقابل . همچنین تعیین رابطه h1 بر حسب i1 و h2بر حسب i1 . همچنین مطلوب است تعیین مدار الکتریکی معادل .



تبدیل لاپلاس : کاربرد در حل معادلات دیفرانسیل خطی ؛
_ تبدیل توابع سینوسی ، سینوسی میرا و هیپربولیک به توابع جبری از متغیر مختلط S .
_ تبدیل عملیات مشتق گیری و انتگرال گیری به عملیات جبری از صفحه مختلط .
_ انجام عکس تبدیل لاپلاس پس از حل جبری و تعیین متغیر وابسته به S .
دو مزیت روش تبدیل لاپلاس :
۱- تخمین عملکرد یک سیستم دینامیکی با استفاده از روشهای ترسیمی بدون نیاز به حل معادله دیفرانسیل حاکم .
۲- تعیین مولفه های گذرا و ماندگار توام با استفاده از این روش .
توابع مختلط :

متغیر مختلط $S = \sigma + j\omega$
یک تابع مختلط $F(s) =$

$$\theta = \tan^{-1}\frac{Fy}{Fx} \quad \text{و} \quad |F(s)| = \sqrt{Fx^2 + Fy^2} \quad \text{و} \quad F(s) = Fx + jFy$$

زاویه θ در جهت خلاف ساعتگرد از عدد مثبت حقیقی در نظر گرفته می شود.

مزدوج تابع مختلط F(s) = $\bar{F}(s) = Fx - jFy$

تابع مختلط G(s) در صورتی در یک ناحیه تحلیلی است اگر G(s) وتمام مشتق هایش در آن ناحیه موجود باشند .اگر مشتق روی دو مسیرخاص ، یعنی Δs=j Δω و Δs= Δσ برابر باشند ، مشتق روی هر مسیر دلخواه Δs= Δσ + j Δω یکتا ست
وبنابراین مشتق وجود دارد

$$\frac{d}{ds}G(s) = \lim_{\Delta s \to 0}\frac{G(s+\Delta s) - G(s)}{\Delta s} = \lim_{\Delta s \to 0}\frac{\Delta G}{\Delta s}$$

برای مسیری مثل (مسیرروی عدد حقیقی) Δs= Δσ :

$$\frac{d}{ds}G(s)=\lim_{\Delta\sigma\to 0}\left(\frac{\Delta Gx}{\Delta\sigma}+j\frac{\Delta Gy}{\Delta\sigma}\right)=\frac{\partial Gx}{\partial\sigma}+j\frac{\partial Gy}{\partial\sigma}$$

برای مسیری مثل Δs=j Δω (مسیری روی محور موهومی) :

$$\frac{d}{ds}G(s)=\lim_{j\Delta\omega\to 0}\left(\frac{\Delta Gx}{j\Delta\omega}+\frac{\Delta Gy}{j\Delta\omega}\right)=-j\frac{\partial Gx}{\partial\omega}+\frac{\partial Gy}{\partial\omega}$$

یعنی (شرایط کشی – ریمان)

$$\frac{\partial Gx}{\partial\sigma}+j\frac{\partial Gy}{\partial\sigma}=\frac{\partial Gy}{\partial\omega}-j\frac{\partial Gx}{\partial\omega}$$

$$\frac{\partial Gx}{\partial\sigma}=\frac{\partial Gy}{\partial\omega}\quad \text{و}\quad \frac{\partial Gy}{\partial\sigma}=-\frac{\partial Gx}{\partial\omega}$$

در اینصورت مشتق dG(s)/ds یکتا (منحصربفرد) است و در اینصورت تابع تحلیلی است .البته تابع به ازای یک سری نقاط خاص تحلیلی نباشد ، که به آنها نقاط تکین گفته می شود . به نقاطی که تابع در ان نقاط تحلیلی است ،نقاط عادی گفته می شود .نقاطی که درانها تابع و یا مشتق های آن به بی نهایت میل می کنند ، قطب گفته می شود . مثلا تابع $G(s)=\frac{1}{s+1}$ در تمام نقاط بجز s=-1 شرایط کشی – ریمان بر اورده می شود .

$$G(s)=\frac{1}{s+1}\quad \text{و}\quad G(\sigma+j\omega)=\frac{1}{\sigma+j\omega+1}=Gx+jGy$$

$$Gx=\frac{\sigma+1}{(\sigma+1)^2+\omega^2}\quad \text{و}\quad Gy=\frac{-\omega}{(\sigma+1)^2+\omega^2}$$

یعنی در شرایط کشی ــ ریمان ؛

$$\frac{\partial Gx}{\partial \sigma} = \frac{\partial Gy}{\partial \omega} = \frac{\omega^2 - (\sigma+1)^2}{\left[(\sigma+1)^2 + \omega^2\right]^2}$$

$$\frac{\partial Gy}{\partial \sigma} = -\frac{\partial Gx}{\partial \omega} = \frac{2\omega(\sigma+1)}{\left[(\sigma+1)^2 + \omega^2\right]^2}$$

$$\frac{dG(s)}{ds} = \frac{\partial Gx}{\partial \sigma} + j\frac{\partial Gy}{\partial \sigma} = \frac{\partial Gy}{\partial \omega} - j\frac{\partial Gx}{\partial \omega} = -\frac{1}{(\sigma + j\omega + 1)^2} = -\frac{1}{(s+1)^2}$$

مشتق یک تابع تحلیلی، با مشتق گیری از $G(s)$ بر حسب S نیز بدست می اید ؛

$$\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{s+1}\right) = -\frac{1}{(s+1)^2}$$

قطب مرتبه nام در حالتی است که اگر s به $-p$ میل کند ، $G(s)$ به بی نهایت برود ، ولی عبارت زیر $G(s).(s+p)^n$ مقدار معین و غیر صفر داشته باشد . در اینصورت $S=-p$ قطب مرتبه n ام نامیده می شود .

$n=1$ قطب مرتبه اول یا قطب ساده . $n=2$ قطب مرتبه دوم . $n=3$ قطب مرتبه سوم .

همچنین نقاطی که در آنها $G(s)$ برابر با صفر می شود ، صفرهای تابع نامیده می شود .

مثال :

$$G(s) = \frac{k(s+2)(s+10)}{s(s+1)(s+5)(s+15)^2} \Rightarrow \begin{cases} s=-2 \quad \text{و} \quad s=-10 \\ s=0 \quad \text{و} \quad s=-1 \quad \text{و} \quad s=-5 \\ s=-15 \end{cases}$$

اگر s های بسیاربزرگ مد نظر باشند،یعنی $G(s) = \frac{k}{s^3}$ تابع در $s=0$ یک صفر مرتبه سوم دارد .

یاداوری قضیه اویلربا استفاده از سری های توانی توابع sin وcos :

$$\begin{cases} \sin\theta = \theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \frac{\theta^7}{7!} + ... \\ \cos\theta = 1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \frac{\theta^6}{6!} + ... \\ \cos\theta + j\sin\theta = 1 + (j\theta) + \frac{(j\theta)^2}{2!} + \frac{(j\theta)^3}{3!} + \frac{(j\theta)^4}{4!} + ... \\ e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + ... \end{cases} \Rightarrow \cos\theta + j\sin\theta = e^{j\theta}$$

$$e^{j\theta} = os\theta + j\sin\theta \quad \text{و} \quad e^{-j\theta} = os\theta - j\sin\theta \Rightarrow \begin{cases} \cos\theta = \frac{1}{2}(e^{j\theta} + e^{-j\theta}) \\ \sin\theta = \frac{1}{2j}(e^{j\theta} - e^{-j\theta}) \end{cases}$$

محسنات تبدیل لاپلاس :

۱- شرایط مرزی و شرایط اولیه را در نظر می گیرد .

۲- با استفاده از معادلات ساده و جبری معادلات دیفرانسیل را حل می کند .

۳- کار با این تبدیل مشخص و سرراست است .

۴-با استفاده از جدول تهیه شده می توان این تبدیل را انجام داد .

۵- حتی می توان توابع ورودی غیر پیوسته را نیز در نظر گرفت .

۶- پاسخ های گذرا و ماندگار سیستم مکانیکی همزمان بدست می ایند .

تبدیل لاپلاس : لاپلاس یک تابع زمانی f(t)به شرطی که f(t)=0 و t<0 ، عبارتست از:

$$L[f(t)] = F(s) = \int_{0}^{\infty} e^{-st}.f(t)dt$$

$$\int_{0}^{\infty} \left| f(t)e^{\sigma t} \right| dt < \infty$$

برای آنکه تابع f(t) دارای تبدیل لاپلاس باشد باید شروط زیر در آن لحاظ شده باشد .

به عبارت دیگر با در نظر گرفتن یک تابع برای f(t)

در صورتی این تابع دارای لاپلاس خواهد بود که سطح زیر منحنی شکل پایین بی نهایت نشود .

عکس تبدیل لاپلاس(c طول همگرایی است .)

$$L^{-1}[F(s)] = f(t) = \frac{1}{2\pi j}\int_{c-j\infty}^{c+j\infty} F(s).e^{st}ds$$

روش بدست آوردن طول همگرایی بصورت زیر آست .اگر به ازای σ های بزرگتر از σc حد صفر و به ازای σهای کوچکتر از σc این حد بی نهایت شود .

مثلا برای تابع : $f(t) = Ae^{-at}$

$$e^{-\sigma t} = \left| f(t) \right|$$

$$f(t) = Ae^{-at} \qquad \lim_{t \to \infty} e^{-\sigma t}\left| Ae^{-at} \right|$$

به ازای $\sigma>-a$ به صفر میل می کند . برای این تابع طول همگرایی $\sigma_c=-a$ است .

بطور خلاصه انتگرال $\int_0 f(t)e^{-st}dt$ در صورتی وجود دارد که σ بخش حقیقی s بزرگتر از طول همگرایی باشد . یعنی s باید طوری انتخاب شود که این انتگرال همگرا باشد . در نتیجه طول همگرایی برابر بخش حقیقی مثبت ترین (راست ترین) قطب تابع F(s) یعنی طول همگرایی در تابع $F(s)=\dfrac{k(s+3)}{(s+1)(s+2)}$

برابر است با -1 . یا طول همگرایی تابع $F(s)=\dfrac{1}{s+\lambda}$ که تبدیل لاپلاس تابع $F(t)=e^{-\lambda t}$ است ، برابر $-\lambda$ است.

$$f(t)=e^{-\lambda t}\Rightarrow F(s)=\int_0^\infty e^{-\lambda t}.e^{-st}.dt=\int_0^\infty e^{-(\lambda+s)t}.dt=-\frac{1}{s+\lambda}e^{-(s+\lambda)t}\Big\}\Big|_0^\infty=\frac{1}{s+\lambda}$$

ـ توابع $t\sin\omega$ و $\sin\omega t$ و t دارای تبدیل لاپلاس و طول همگرایی صفر هستند .

ـ توابع $e^{-ct}.\sin\omega$ و te^{-ct} و e^{-ct} دارای تبدیل لاپلاس و طول همگرایی -c هستند .

ـ توابع $t.e^{t^2}$ و e^{t^2} که سریعتر از تابع نمایی رشد می کنند ، طول همگرایی وجودندارد و در نتیجه تبدیل لاپلاس نیز ندارند .

دقت شود ، سیگنالهایی که قابل ساخت هستند ، دارای تبدیل لاپلاس می باشند . مثلا تابع

$f(t)=\begin{cases} e^{t^2} & 0\le t\le T\le\infty \\ 0 & t\prec 0 \text{ و } t\succ T\end{cases}$ دارای تبدیل لاپلاس می باشد ، چون e^{t^2} فقط $0\le t\le T$ تعریف شده ، نه در $0\le t\le\infty$. این تابع قابلیت ساخت فیزیکی را دارد .

بنابراین تبدیل لاپلاس تابع نمایی $f(t)=\begin{cases}0 & t<0\\ Ae^{-at} & t>0\end{cases}$ که در آن a و A ثابت هستند ، برابر با A/(s+a) می باشد .

_ تبدیل لاپلاس تابع پله ای $f(t)=\begin{cases}0 & t<0\\ A & t>0\end{cases}$. تابع پله ای در t=0 تعریف نمی شود ،

$$L[A]=\int_0^\infty Ae^{-st}.dt=\frac{A}{S}$$

در محاسبه انتگرال فرض کرده ایم بخش حقیقی S ازصفر (طول همگرایی) بزرگترست و بنابراین حد e^{-st} در $t\to\infty$ صفر می باشد .تبدیل لاپلاس بدست آمده در تمام صفحه S بجز قطب واقع در S=0 معتبرست .

_ تبدیل لاپلاس تابع پله واحد $\begin{cases}f(t)=0 & t<0\\ f(t)=1 & t>0\end{cases}$

از نظر فیزیکی تابع پله ای در t=0 رخ می دهد معادل سیگنال ثابتی است که در t=0 به طور ناگهانی به یک سیستم اعمال می شود .

$$F(s)=\int_0^\infty e^{-st}.dt=\frac{-1}{S}e^{-st}\Big|_0^\infty=1/S$$

_ تبدیل لاپلاس تابع شیب $\begin{cases}f(t)=0 & t<0\\ f(t)=At & t\geq 0\end{cases}$

داریم :

$$L[At]=\int_0^\infty At.e^{-st}.dt = A.t.\frac{e^{-st}}{-s}\Big|_0^\infty-\int_0^\infty \frac{A.e^{-st}}{-s}.dt=\frac{A}{S}\int_0^\infty e^{-st}dt = A/S^2$$

_ تبدیل لاپلاس تابع سینوسی :

$$\begin{cases} f(t)=0 & t<0 \\ f(t)=A\sin\omega t & t>0 \end{cases} \Rightarrow L[A\sin\omega t]=\int_0^\infty A\sin\omega t.e^{-st}.dt$$

$$=\frac{A}{2j}\int_0^\infty\left(e^{j\omega t}-e^{-j\omega t}\right)e^{-st}dt=\frac{A}{2j}\frac{1}{s-j\omega}-\frac{A}{2j}\frac{1}{s+j\omega}=\frac{A\omega}{s^2+\omega^2}$$

_ تبدیل لاپلاس تابع کسینوسی :

$$\begin{cases} f(t)=0 & t<0 \\ f(t)=A\cos\omega t & t>0 \end{cases} \Rightarrow L[A\cos\omega t]=\int_0^\infty A\cos\omega t.e^{-st}.dt$$

$$=\frac{A}{2}\int_0^\infty\left(e^{j\omega t}+e^{-j\omega t}\right)e^{-st}dt=\frac{A}{2}\frac{1}{s-j\omega}+\frac{A}{2}\frac{1}{s+j\omega}=\frac{As}{s^2+\omega^2}$$

-تبدیل لاپلاس یک تابع پله ای واحد جابجاشده(با تاخیر زمانی) :

$$\begin{cases} f(t)=0 & t<T \\ f(t)=1 & t>T \end{cases} \Rightarrow F(s)=L[f(t)]=\int_0^\infty f(t).e^{-st}.dt$$

$$=\int_0^T f(t).e^{-st}dt+\int_T^\infty f(t).e^{-st}dt=0+\int_T^\infty 1.e^{-st}dt=\frac{-1}{S}e^{-st}\Big|_T^\infty=\frac{e^{-st}}{S}$$

یعنی اگرتابع پله ای واحد به اندازه T انتقال داده شود ،تبدیل لاپلاس آن در e^{-ST} ضرب می شود .

$$\begin{cases} f(t) = \dfrac{A}{t_0} & 0 < t < t_0 \\ f(t) = 0 & t > t_0 \text{ و } t < 0 \end{cases}$$

_ تبدیل لاپلاس یک تابع پالس :

t_0 و A مقادیر معلوم و ثابتی هستند .

تابع پالس یک تابع پله به ارتفاع A/t_0 است که در $t = 0$ شروع شده و یک تابع پله منفی به ارتفاع A/t_0 که در $t = t_0$ شروع شده ، با آن جمع می شود .

بنابراین می توان نوشت ،

$$L[f(t)] = L\left[\frac{A}{t_0} f(t)\right] - L\left[\frac{A}{t_0} f(t - t_0)\right] = \frac{A}{St_0} - \frac{A}{St_0} e^{-St_0} = \frac{A}{St_0}(1 - e^{-St_0})$$

_ تبدیل لاپلاس تابع ضربه:تابع ضربه یک حالت حدی خاص تابع پالس است.تابع ضربه با سطح آن بیان می شود .

$$\begin{cases} g(t) = \lim\limits_{t_0 \to 0} \dfrac{A}{t_0} & 0 < t < t_0 \\ g(t) = 0 & t > t_0 \text{ و } t < 0 \end{cases}$$

با میل $t \to 0$ ارتفاع A/t_0 به سمت بی نهایت میل می کند ، اما سطح زیر ضربه برابر A باقی است.

$$L[g(t)] = \lim_{t_0 \to 0}\left[\frac{A}{St_0}(1 - e^{-St_0})\right] = \lim_{t_0 \to 0} \frac{\dfrac{d}{dt_0}\left[A(1 - e^{-St_0})\right]}{\dfrac{d}{dt_0}(St_0)} = \frac{AS}{S} = A$$

نمایش تابع ضربه واحد : تابع ضربه واحد یا تابع دلتای دیراک تابع ضربه ای است که مشاحت آن برابر ۱ باشد و آنرا با δ نشان می دهیم .

$$\delta(t) \equiv \begin{cases} g(t) = 0 & t \neq 0 \\ g(t) = \infty & t = 0 \end{cases} \quad \text{و} \quad \int_0^\infty \delta(t).dt = 1$$

نمایش دیگر تابع ضربه واحد :

$$\delta(t) \equiv \begin{cases} g(t) = 0 & t \leq 0 \\ g(t) = 0 & t \geq \varepsilon \\ g(t) = \infty & 0 < t < \varepsilon \end{cases}$$

در این رابطه عدد مثبت (زمان) خیلی کوچک است که با میل نمودن به صفر همان تعریف بالا بدست می آید .

$$F(s) = \int_0^\infty \delta(t).e^{-st}.dt = \int_0^\varepsilon \frac{1}{\varepsilon}.e^{-st}.dt + \int_\varepsilon^\infty 0.e^{-st}.dt = 1$$

البته e^{-st} در فاصله 0 تا εبخاطر کوچکی زمان ε مساوی واحد در نظر گرفته شده است .

تابع ضربه واحدی که در $(t = t_0)$ رخ می دهد ، عبارتست از $\delta(t - t_0)$.

$$\begin{cases} \delta(t - t_0) = 0 & t \neq t_0 \\ \delta(t - t_0) = \infty & t = \infty \end{cases} \Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_0).dt = 1$$

تابع با ارتفاع بی نهایت و عرض صفرفقط یک تخیل ریاضی است . و در سیستم های فیزیکی وجود ندارد . ولی اگر اندازه پالس ورودی خیلی بزرگ و مدت زمان آن نسبت به زمانهای دیگر موجود در آن مسـئله فیزیکی کم باشد ، می توان آنرا با یک تابع ضربه تقریب بزنیم .

مثلا اگر f(t) نیرو یا گشتاور یک سیستم مکانیکی باشد و نیرو یا گشتاور در یک مدت زمان بسیار کوتاه به یک سیستم مکانیکی وارد شود ، می توان آنرا یک ورودی ضربه ای دانست . دقت شود؛ مساحت خیلی مهم است . تابع ضربه واحد یا $\delta(t-t_0)$ مشتق تابع پله واحد یا $l(t-t_0)$ در نقطه ناپیوستگی $(t=t_0)$ است .یا انتگرال تابع ضربه واحد ، تابع پله واحد خواهد بود .

قضایای تبدیل لاپلاس :

۱- اگر $f(t)$ تبدیل لاپلاس داشته باشد ، $F(s)$ تبدیل لاپلاس تابع $e^{-at} f(t)$ عبارتست از :
a می تواند حقیقی یا مختلط باشد .

$$L[e^{-at} f(t)] = \int_0^\infty e^{-at}.f(t).e^{-st}.dt = F(s+a)$$

۲- تبدیل لاپلاس تابع $f(\frac{t}{a})$ برای تحلیل بعضی سیستم های فیزیکی نیاز می شود .

$$\begin{cases} L[f(\frac{t}{a})] = \int_0^\infty f(\frac{t}{a}).e^{-st}.dt = F(s+a) \\ \frac{t}{a} = t_1 \\ as = S^1 \end{cases} \qquad \Rightarrow L[f(\frac{t}{a})] = \int_0^\infty f(t_1).e^{-s_1t_1}.d(at_1) = a\int_0^\infty f(t_1)e^{-s_1t_1}.dt_1 = aF(s_1)$$

$$\Rightarrow \quad L[f(\frac{t}{a})] = aF(as)$$

۳- حد پایین انتگرال لاپلاس : اگر f(t) بصورتی باشد که برای نقطه صفر آن تمایز وجود داشته باشد ، (یعنی 0^+ و 0^- داشته باشد) تبدیل لاپلاس به ازای این دو حد متفاوت خواهد شد .

مثلا یک تابع ضربه در نقطه صفر وجود داشته باشد ،

$$L_+[f(t)] = \int_{0+}^{\infty} f(t).e^{-st}.dt$$

$$L_-[f(t)] = \int_{0-}^{\infty} f(t).e^{-st}.dt = L_+[f(t)] + \overbrace{\int_{0-}^{0+} f(t).e^{-st}.dt}^{\neq 0}$$

اگر f(t) در t=0 تابع صربه نداشته باشد ، $L_+[f(t)] = L_-[f(t)]$

۴- قضیه مشتق گیری :

برای مشتق اول ؛

$$\int_0^\infty f(t).e^{-st}.dt = f(t).\frac{e^{-st}}{-S}\Big|_0^\infty - \int_0^\infty \left[\frac{d}{dt}f(t)\right]\frac{e^{-st}}{-S}dt \Rightarrow F(s) = \frac{f(0)}{S} + \frac{1}{S}L[\frac{d}{dt}f(t)]$$

$$\Rightarrow L[\frac{d}{dt}f(t)] = S.F(s) - f(0)$$

برای مشتق دوم ؛

$$\frac{d}{dt}f(t) = g(t) \Rightarrow L[\frac{d^2}{dt^2}f(t)] = L[\frac{d}{dt}g(t)] = S.L[g(t)] - g(0) = S.L[\frac{d}{dt}f(t)] - \dot{f}(0)$$

$$\Rightarrow L[\frac{d^2}{dt^2}f(t)] = S^2.F(s) - S.f(0) - \dot{f}(0)$$

اگر $f(0^-) = f(0^+)$ باشد ، داریم ؛

$$L_+[\frac{d}{dt}f(t)] = S.F(s) - f(0^+) \quad \text{و} \quad L_-[\frac{d}{dt}f(t)] = S.F(s) - f(0^-)$$

توجه شود برای مشتق های بعدی :

$$L\left[\frac{d^n}{dt^n}f(t)\right] = S^n + F(s) - S^{n-1}.f(0) - S^{n-2}.\dot{f}(0) - .... - S.f^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0)$$

برای آنکه تبدیل لاپلاس مشتقهای $f(t)$ رابدست آوریم، باید ؛ $\frac{d^n}{dt^n}f(t)$ تبدیل لاپلاس داشته باشد.
معلوم است اگرمقدار اولیه $f(t)$ ومشتقهای آن برابرصفر باشد ؛تبدیل لاپلاس مشتق n ام برابر $S^n.F(s)$ میشود.

۵- قضیه انتگرال گیری :

$$L[\int f(t).dt] = \frac{F(s}{S}) + \frac{f^{-1}(0)}{S} \quad \text{و} \quad f^{-1}(0) = \int f(t).dt \ \Big|_{t=0}$$

مجددا اگر $f(t)$ در $t = 0$ تابع ضربه داشته باشد ؛

$$f^{-1}(0^+) \neq f^{-1}(0^-) \Rightarrow L_+[\int f(t).dt] = \frac{F(s)}{S} + \frac{f^{-1}(0^+)}{S}$$

$$L_-[\int f(t).dt] = \frac{F(s)}{S} + \frac{f^{-1}(0^-)}{S}$$

برای اثبات فرمول فوق داریم :

$$L\,[\int f(t).dt] = \int_0^\infty \left[\int f(t).dt\right] e^{-st}.dt = \left[\int f(t).dt\right]\frac{e^{-st}}{-S}\ \Big|_0^\infty - \int_0^\infty f(t).\frac{e^{-st}}{-s}.dt$$

$$= \frac{1}{s}\int f(t).dt\ \Big|_{t=0} + \frac{1}{S}\int_0^\infty f(t).e^{-st}.dt = \frac{f^{-1}(0)}{S} + \frac{F(s)}{S}$$

۵- قضیه مشتق گیری فرکانسی :

$$L[t.f(t)] = -\frac{d}{dt}F(s) \quad \text{و} \quad L[t^2.f(t)] = -\frac{d^2}{dS^2}F(s) \quad \text{و} \quad L[t^n f(t)] = (-1)^n.\frac{d^n}{ds^n}F(s)$$

برای اثبات می توان نوشت ؛

$$L[t.f(t)] = \int_0^\infty t.f(t).e^{-st}.dt = -\int_0^\infty f(t)\frac{d}{ds}e^{-st}.dt = -\frac{d}{ds}\int_0^\infty f(t)e^{-st}.dt = -\frac{d}{ds}F(s)$$

$$t.f(t) \equiv g(t) \Rightarrow L\left[t^2.f(t)\right] = L[t.g(t)] = -\frac{d}{ds}G(s) = -\frac{d}{ds}[-\frac{d}{ds}F(s)] = \frac{d^2}{ds^2}F(s)$$

$$L[t^n f(t)] = (-1)^n.\frac{d^n}{ds^n}F(s)$$

۶- قضیه انتگرال کانولوشن: می خواهیم تبدیل لاپلاس انتگرال مقابل را بدست آوریم ،(با فرض اینکه تابع های $f_2(t)$ و $f_1(t)$ دارای تبدیل لاپلاس باشند.)

$$\int_0^t f_1(t-\tau).f_2(\tau).d\tau$$

برای $\tau > t$ می توان نوشت ، $f_1(t-\tau).l(t-\tau)=0$ که در آن $l(t-\tau)$ تابع پله واحد در $t=t_0$ است.

$$\Rightarrow \int_0^t f_1(t-\tau).f_2(\tau).d\tau = \int_0^\infty f_1(t-\tau).l(t-\tau).f_2(\tau).d\tau$$

$$\Rightarrow L\left[\int_0^t f_1(t-\tau).f_2(\tau).d\tau\right] = L\left[\int_0^\infty f_1(t-\tau).l(t-\tau).f_2(\tau).d\tau\right] = \int_0^\infty e^{-st}\left[\int_0^\infty f_1(t-\tau).l(t-\tau).f_2(\tau).d\tau\right].dt$$

با جایگذاری $t-\tau=\lambda$ و تعویض ترتیب انتگرالگیری ؛

$$\Rightarrow L\left[\int_0^t f_1(t-\tau).f_2(\tau).d\tau\right] = \int_0^\infty f_1(t-\tau).l(t-\tau).e^{-st}.dt.\int_0^\infty f_2(\tau).d\tau = \int_0^\infty f_1(\lambda).e^{-s(\lambda+\tau)}.d\lambda.\int_0^\infty f_2(\tau).d\tau$$

$$= \int_0^\infty f_1(\lambda).e^{-s\lambda}.d\lambda.\int_0^\infty f_2(\tau).e^{-s\tau}d\tau = F_1(s).F_2(s)$$

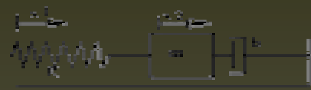
برعکس اگر تبدیل لاپلاس تابعی برابر حاصلضرب تبدیل لاپلاسهای دو تابع باشد ، یعنی $F_1(s).F_2(s)$،تابع

زمانی (عکس تبدیل لاپلاس) با انتگرال کانولوشن $f_1(t).f_2(t) = \int_0^t f_1(t-\tau).f_2(\tau).d\tau$ برابر می باشد.

عکس تبدیل لاپلاس : عکس تبدیل لاپلاس را می توان با استفاده از انتگرال ارائه شده بدست آورد.اماچون کارکردن با انتگرال اشاره شده بسیار سخت است ، عکس تبدیل لاپلاس را با استفاده از جدول تبدیل - لاپلاس پیدا میکنیم.غالباتبدیل لاپلاس یک تابع زمانی بصورت کسری $F(s)=\dfrac{B(s)}{A(s)}$ بدست آورده میشود.

مثلا در سیستم مقابل اگر X_1 ورودی و X_2 خروجی باشد ،

$$MD^2x_2+BDx_2+Kx_2=Kx_1$$



باگرفتن تبدیل لاپلاس از معادله فوق :

$$L[Kx_1]=L[MD^2x_2+BDx_2+Kx_2]$$

$$\Rightarrow KX_1(s)=M(S^2X_2(s)-Sx_2(0)-Dx_2(0))+B(SX_2(s)-x_2(0))+KX_2(s)$$

$$\Rightarrow KX_1(s)=(MS^2+BS+K).X_2(s)-[MS+MD+B].x_2(0)$$

$$initial \quad condition:\begin{cases} x_2 \equiv initial \quad positition \\ Dx_2(0)\equiv initial \quad velocity \end{cases}$$

$$X_2(s)=\underbrace{\frac{K}{MS^2+BS+K}X_1(s)}_{system \quad transfer \quad Function}+\underbrace{\frac{[MS+MD+B].x_2(0)}{MS^2+BS+K}}_{Initial \quad condition \quad component}$$

یعنی تابع تبدیل سیستم : عبا رتست از نسبت تبدیل لاپلاس خروجی سیستم به تبدیل لاپلاس ورودی آن ، وقتی که تمام شرایط سیستم مساوی صفر در نظر گرفته شود . { G(s) }

$$G(s)=\frac{X_2(s)}{X_1(s)}=\frac{K}{MS^2+BS+K}$$

اگر ورودی ، یک تابع پله در نظر گرفته شود ، یعنی $X_1(s)=\frac{1}{S}$ بنابراین ؛

$$X_2(s)=\frac{K/M}{S(S^2+B/M\,S+K/M)}=\frac{\omega_n^{\,2}}{S(S^2+2\xi\omega_n S+\omega_n^{\,2})} \quad \text{و} \quad \omega_n=\sqrt{K/M} \quad \text{و} \quad \xi=\frac{B}{2\sqrt{KM}}$$

$$\Rightarrow x_2(t)=L^{-1}[X_2(s)]=L^{-1}[\frac{\omega_n^{\,2}}{S(S^2+2\xi\omega_n S+\omega_n^{\,2})}]$$

بنابراین لاپلاس معکوس گرفتن بایستی از حاصلضرب دو یا چند کسر انجام شود .

بسط به کسرهای جزئی :

حالت اول : قطبهای مجزا :

$$F(s)=\frac{B(s)}{A(s)}=\frac{k(S+Z_1)(S+Z_2)(S+Z_3)\ldots(S+Z_m)}{(S+P_1)(S+P_2)(S+P_3)\ldots(S+P_n)} \qquad m<n$$

$$F(s)=\frac{B(s)}{A(s)}=\frac{a_1}{S+P_1}+\frac{a_2}{S+P_2}+\frac{a_3}{S+P_3}+\ldots+\frac{a_n}{S+P_n}$$

Pها و Z ها حقیقی یا مختلط هستند و اگر مختلط باشند ، حتما مزدوج آنها نیز در همین کسر وجود دارد . a_kباقیمانده قطب $S=-P_k$ می باشد وبه روش زیر بوجود می آید .

$$a_k=[(S+P_k)\frac{B(s)}{A(s)}]_{s=-P_k}$$

چون $f(t)$ یک تابع حقیقی است ، اگر P_2 و P_1 مزدوج مختلط هم باشند ، باقیمانده های a_2 و a_1 نیزمزدوج مختلط هم می باشند ودر صورت تعیین یکی، دیگری معین می شود .بنابراین در اینحالت داریم؛

$$f(t) = L^{-1}[F(s)] = a_1 e^{-P_1 t} + a_2 e^{-P_2 t} + \dots + a_n e^{-P_n t} \qquad t \geq 0$$

چون ؛

$$L^{-1}\left[\frac{a_k}{S + P_k}\right] = a_k e^{-P_k t}$$

مثال ۱ :

$$F(s) = \frac{S+3}{(S+1)(S+2)} = \frac{a1}{S+1} + \frac{a2}{S+2} \Rightarrow \begin{cases} a1 = 2 \\ a2 = -1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow L^{-1}[F(s)] = f(t) = L^{-1}\left[\frac{2}{S+1}\right] + L^{-1}\left[\frac{-1}{S+2}\right] = 2e^{-t} + (-1)e^{-2t}$$

مثال ۲ : چون توان صورت از مخرج بزرگتر است ، با تقسیم خواهیم داشت ؛

$$F(s) = \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{S^3 + 5S^2 + 9S + 7}{(S+1)(S+2)} = S + 2 + \frac{S+3}{(S+1)(S+2)}$$

چون تبدیل لاپلاس تابع ضربه در $t = 0$ or $\delta(t)$ برابر ۱ و تبدیل لاپلاس مشتق یا $\frac{d\delta(t)}{dt}$ برابر با S است ، بنابراین ؛

$$f(t) = \frac{d\delta(t)}{dt} + 2\delta(t) + 2e^{-t} + (-1)e^{-2t}$$

مثال ۳ :

$$F(s)=\frac{2S+12}{S^2+2S+5}=\frac{2S+12}{(S+1+2j)(S+1-2j)}=\frac{2S+12}{(S+1)^2+2^2}=\frac{10+2.(S+1)}{(S+1)^2+2^2}$$

$$=5\frac{2}{(S+1)^2+2^2}+2\frac{S+1}{(S+1)^2+2^2}\Rightarrow f(t)=5L^{-1}\left[\frac{2}{(S+1)^2+2^2}\right]+2L^{-1}\left[\frac{S+1}{(S+1)^2+2^2}\right]$$

$$=5e^{-t}\sin 2t+2e^{-t}\cos 2t \qquad t\geq 0$$

چون داریم :

$$L^{-1}\left[\frac{\omega}{(S+a)^2+\omega^2}\right]=e^{-at}\sin\omega t \qquad \text{و} \qquad L^{-1}\left[\frac{S+a}{(S+a)^2+\omega^2}\right]=e^{-at}\cos\omega t$$

ازطریق بسط به کسرهای جزئی نیز می توانستیم مسئله را حل کنیم ؛

$$F(s)=\frac{2S+12}{S^2+2S+5}=\frac{2S+12}{(S+1+2j)(S+1-2j)}=\frac{a}{(S+1+2j)}+\frac{b}{(S+1-2j)}$$

$$=\frac{a(S+1-2j)+b(S+1+2j)}{(S+1+2j)(S+1-2j)}=\frac{S(a+b)+(a-2aj+b+2bj)}{(S+1+2j)(S+1-2j)}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}a+b=2\\ a-2aj+b+2bj=12\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}b=1-2.5j\\ a=1+2.5j\end{cases}\Rightarrow f(t)=(1+2.5j)e^{-(1+2j)t}+(1-2.5j)e^{-(1-2j)t}$$

$$\begin{cases}\cos\theta=\frac{1}{2}(e^{j\theta}+e^{-j\theta})\\ \sin\theta=\frac{1}{2j}(e^{j\theta}-e^{-j\theta})\end{cases}\Rightarrow \qquad f(t)=5e^{-t}\sin 2t+2e^{-t}\cos 2t \qquad t\geq 0$$

حالت دوم : قطبهای تکراری ؛

$$F(s)=\frac{S^2+2S+3}{(S+1)^3}=\frac{b1}{(S+1)}+\frac{b2}{(S+1)2}+\frac{b3}{(S+1)^3}$$

$$b_k=\frac{1}{(n-k)!}\{\frac{d^{(n-k)}}{ds^{(n-k)}}(S-P)^n.F(s)\}_{s=p}$$

$$\begin{cases} b1=\frac{1}{2!}\{\frac{d^2}{ds^2}(S+1)^3.\frac{B(s)}{A(s)}\}_{s=-1}=\frac{1}{2!}\{\frac{d^2}{ds^2}(S^2+2S+3)\}_{s=-1}=1 \\ b2=\frac{1}{1!}\{\frac{d}{ds}(S+1)^3.\frac{B(s)}{A(s)}\}_{s=-1}=\frac{1}{1!}\{\frac{d}{ds}(S^2+2S+3)\}_{s=-1}=0 \\ b3=\frac{1}{0!}\{(S+1)^3.\frac{B(s)}{A(s)}\}_{s=-1}=(S^2+2S+3)_{s=-1}=2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \qquad f(t)=L^{-1}(\frac{b1}{S+1})+L^{-1}(\frac{b2}{(S+1)^2})+L^{-1}(\frac{b3}{(S+1)^3})=e^{-t}+0+t^2.e^{-t} \qquad t\geq 0$$

حال می توانیم مسئله چند صفحه قبل را تکمیل کنیم ؛

$$x_2(t)=L^{-1}[X_2(s)]=L^{-1}[\frac{\omega_n{}^2}{S(S^2+2\xi\omega_n S+\omega_n{}^2)}]$$

$$\frac{\omega_n{}^2}{S(S^2+2\xi\omega_n S+\omega_n{}^2)}=\frac{a}{S}+\frac{bS+c}{S^2+2\xi\omega_n S+\omega_n{}^2}=\frac{a(S^2+2\xi\omega_n S+\omega_n{}^2)+(bS+c)S}{S(S^2+2\xi\omega_n S+\omega_n{}^2)}$$

در نتیجه داریم :

$$\begin{cases} a+b=0 \\ a.2\xi\omega_n + c = 0 \\ a.\omega_n{}^2 = \omega_n{}^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=-1 \\ c=-2\xi\omega_n \end{cases} \Rightarrow x_2(t) = 1 - \frac{e^{-\xi\omega_n t}}{\sqrt{1-\xi^2}} \sin(\omega_n\sqrt{1-\xi^2}\,t + \cos^{-1}\xi)$$

$$\omega_n = \sqrt{K/M} \quad و \quad \xi = \frac{B}{2\sqrt{KM}} \quad و$$

این مسئله در ارتعاشات بصورت زیر جل می شود :

معادله ویژه را تشکیل می دهیم ؛ (از قانون دوم نیوتن) :

$$m^2 + 2\xi\omega_n m + \omega_n{}^2 = 0 \Rightarrow m_{1,2} = -\xi\omega_n \pm \omega_n\sqrt{\xi^2-1}$$

transiant solution depends on damping ratio ξ

$$\begin{cases} \xi > 1 \Rightarrow roots \quad real \Rightarrow x_2(t) = A_1 \exp\left[\left(-\xi + \sqrt{\xi^2-1}\right)\omega_n t\right] + A_2 \exp\left[\left(-\xi - \sqrt{\xi^2-1}\right)\omega_n t\right] \\ \xi > 1 \Rightarrow roots \quad real\ \&\ equal \Rightarrow x_2(t) = A_1 e^{-\xi\omega_n t} + A^2 t e^{-\xi\omega_n t} \\ \xi < 1 \Rightarrow m_{1,2} = -\xi\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\xi^2} \Rightarrow x_2(t) = Ae^{-\xi\omega_n t}\sin(\omega_n\sqrt{1-\xi^2}\,t + \phi) \end{cases}$$

برای جواب کامل $x_2(t)$ در حالتی که ورودی یک تابع پله باشد ؛

$$x_2(t) = 1 + Ae^{-\xi\omega_n t}\sin(\omega_n\sqrt{1-\xi^2}\,t + \phi) \qquad *$$

چون سیستم از حالت سکون شروع به حرکت نموده است ؛

$$x_2(0) = 0 \quad و \quad \dot{x}_2(0) = 0$$

با مشتق گیری از معادله * می توان نوشت ؛

$$\Rightarrow 0 = 1 + A\sin\phi \rightarrow 0 = -\xi\omega_n A\sin\phi + \omega_n\sqrt{1-\xi^2}\,A\cos\phi$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A = \dfrac{-1}{\sqrt{1-\xi^2}} \quad \text{و} \quad \phi = \tan^{-1}\dfrac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi} = \cos^{-1}\xi \\ x_2(t) = 1 - \dfrac{e^{-\xi\omega_n t}}{\sqrt{1-\xi^2}}\sin(\omega_n\sqrt{1-\xi^2}\,t + \cos^{-1}\xi) \end{cases}$$

یک راه حل بسیار ساده موقعی که کسرهای جزئی نسبتا پیچیده تری داریم ، استفاده از MATLAB می باشد .

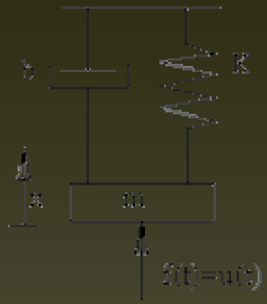
$$\frac{B(s)}{A(s)} = \frac{num}{den} \quad , \quad [r, p, k] = residue(num, den)$$

$$\frac{B(s)}{A(s)} = \frac{2S^3 + 5S^2 + 3S + 6}{S^3 + 6S^2 + 11S + 6} \quad , \quad \begin{cases} num = [2 \quad 5 \quad 3 \quad 6] \\ den = [1 \quad 6 \quad 11 \quad 6] \end{cases}$$

$$[r, p, k] = residue(num, den)$$

$$\left.\begin{array}{lll} r = & P = & k = \\ & & \quad 2 \\ \quad -6 & \quad -3 & \\ \quad -4 & \quad -2 & \\ \quad 3 & \quad -1 & \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{-6}{S+3} + \frac{-4}{S+2} + \frac{3}{S+1} + 2$$

مثال دیگری از بدست آوردن تابع تبدیل :



$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = f(t) = u(t)$$

باگرفتن تبدیل لاپلاس ازاین معادله می توان نوشت :

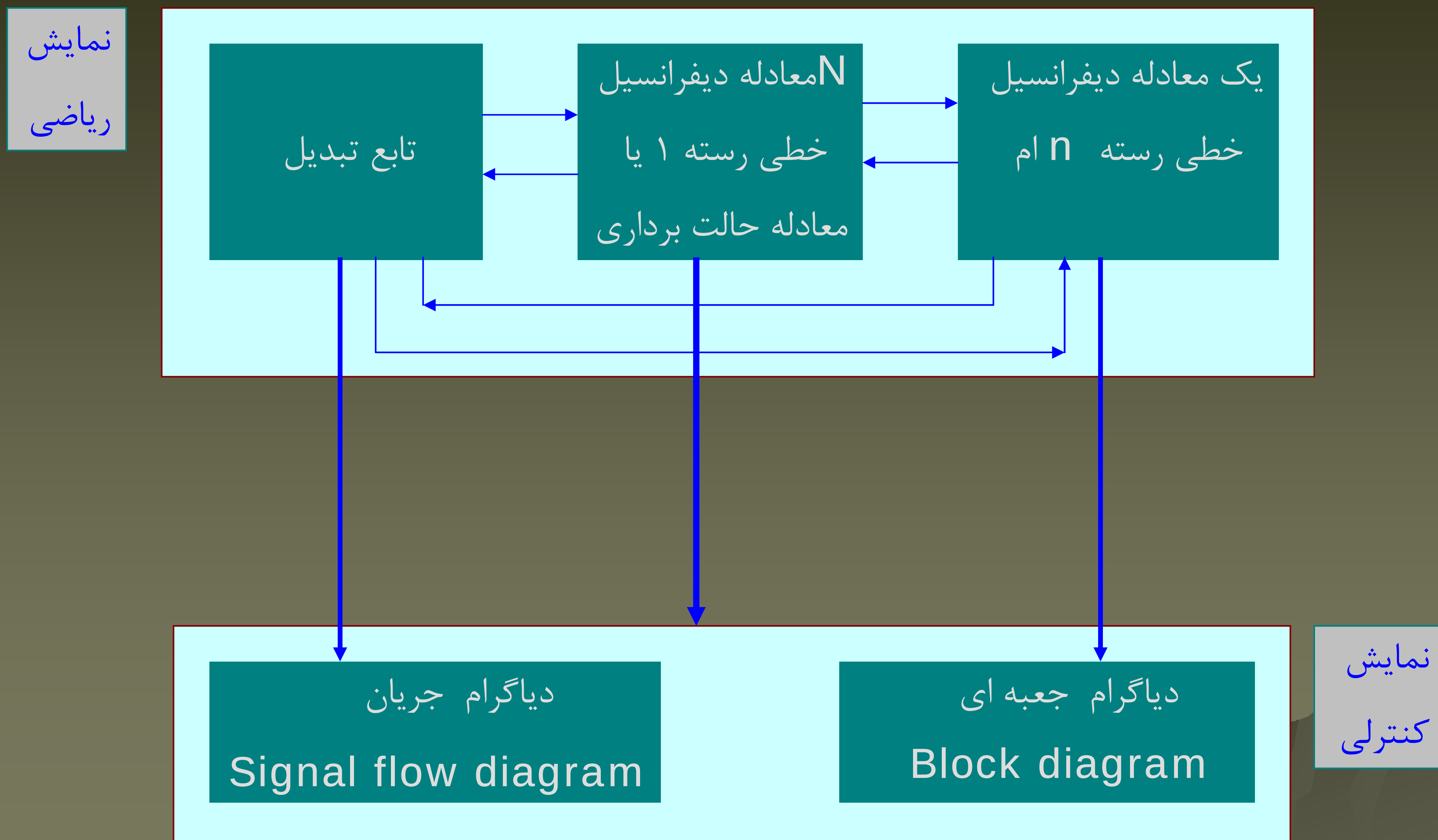
$$m[S^2X(s) - Sx(0) - \dot{x}(0)] + b[SX(s) - x(0)] + kX(s) = U(s)$$

$$\Rightarrow \left[mS^2 + bS + k\right]X(s) = mSx(0) + m\dot{x}(0) + bx(0) + U(s)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x(0) = 0 \\ \dot{x}(0) = 0 \end{cases} \Rightarrow \left(mS^2 + bS + k\right)X(s) = U(s)$$

$$\frac{output}{input} = \frac{X(s)}{U(s)} = G(s) = \frac{1}{mS^2 + bS + k}$$

تا اینجا با استفاده از معادله (معادلات) دیفرانسیل (عمدتا معادله دیفرانسیل خطی از رسته n ام) نمایش ریاضی یک سیستم دینامیکی را نشان دادیم . دیدید تابع تبدیل ، یک ابزار بسیار مناسب برای نشان دادن یک سیستم دینامیکی است .



بنابراین برای نمایش ریاضی یک سیستم خطی پیوسته ۳ روش داریم :

۱- معادله دیفرانسیل خطی رسته nکه قبلا بحث شده است. nth order Differential equition

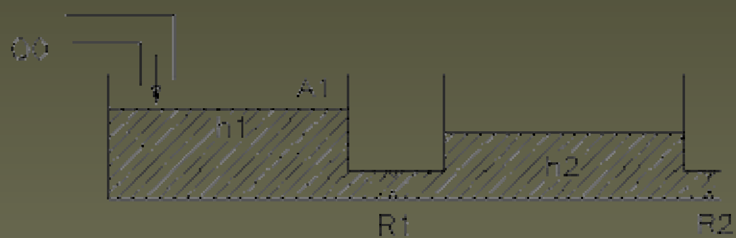
۲-معادله برداری حالت (نمایش فضای حالت). state_space Representation

۳-تابع تبدیل . transfer Function

- معادله برداری حالت (نمایش فضای حالت): در اینجا بجای نوشتن یک معادله دیفرانسیل مرتبه n از چند معادله دیفرانسیل خطی استفاده می کنیم . دو مثال زیر این موضوع را روشنتر می کند ؛

مثال ۱ : رابطه ای که منجر به معادله دیفرانسیل شد ،

دبی خروجی – دبی ورودی = تغییر حجم مایع



برای ظرف اول :
$$A_1 \frac{dh_1}{dt} = Q_0 - \frac{h_1 - h_2}{R_1}$$

برای ظرف اول :
$$A_2 \frac{dh_2}{dt} = Q_0 - \frac{h_1 - h_2}{R_1} - \frac{h_2}{R_2}$$

بنابراین می توان نوشت (تقسیم معادله اول بر A1 و معادله دوم بر A2) .

$$\begin{cases} \dfrac{dh_1}{dt} = \dfrac{1}{A_1}Q_0 + \dfrac{h_2}{R_1A_1} - \dfrac{h_1}{R_1A_1} \\ \dfrac{dh_2}{dt} = \dfrac{h_1}{R_1A_2} - \left(\dfrac{1}{R_1A_2} + \dfrac{1}{R_2A_2}\right)h_2 \end{cases} \Rightarrow \frac{d}{dt}\begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dfrac{1}{R_1A_1} & \dfrac{1}{R_1A_1} \\ \dfrac{1}{R_1A_2} & -\left(\dfrac{1}{R_1A_2} + \dfrac{1}{R_2A_2}\right) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dfrac{1}{A_1} \\ 0 \end{bmatrix} Q_0$$

دبی خروجی از ظرف اول به ظرف دوم

$$Q_1 = \frac{h_1 - h_2}{R_1} \Rightarrow Q_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{R_1} & -\frac{1}{R_1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix} + 0.Q_0$$

$$h = \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix} \text{ و } \quad A = \begin{bmatrix} -\frac{1}{R_1 A_1} & \frac{1}{R_1 A_1} \\ \frac{1}{R_1 A_2} & -(\frac{1}{R_1 A_2} + \frac{1}{R_2 A_2}) \end{bmatrix} \text{ و } \quad b = \begin{bmatrix} \frac{1}{A_1} \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{ و } \quad c = \begin{bmatrix} \frac{1}{R_1} & -\frac{1}{R_1} \end{bmatrix} \text{ و } \quad d = 0$$

برای یک سیستم از مرتبه n بردار حالت نیز دارای n عنصر خواهد بود . اگر بردار حالت را با X نشان داده شود ،

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

برای این سیستم معادله حالت مرتبه nام را می توان بصورت n معادله دیفرانسیل مرتبه یک خطی نوشت .(در صورتی که سیستم دارای یک ورودی باشد .)

$$\dot{x}_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n + b_1 u$$

$$\dot{x}_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n + b_2 u$$

$$\dot{x}_n = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \cdots + a_{nn}x_n + b_n u$$

خروجی نیز می تواند تابعی از متغیر های حالت یا ورودی باشد ؛

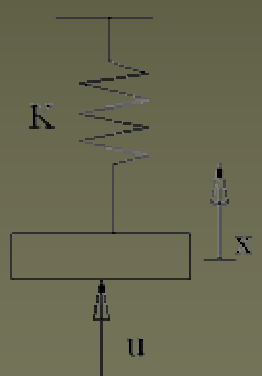
$$y = c_1 x_1 + c_2 x_2 + c_3 x_3 + \cdots + c_n x_n + du$$

$$\frac{d}{dt} X = AX + bu \qquad y = cX + du$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \\ a_{n1} & a_{n2} & & a_{nn} \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \qquad c = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 & \cdots & c_n \end{bmatrix}$$

مثال ۲ :

$$m\ddot{x} + kx = u(x)$$



اگر تغییر مکان و سرعت متغیر در نظر گرفته شود (یا متغیر حالت) می توان نوشت :

$$x_1 = x \text{ و } x_2 = \dot{x} \Rightarrow \dot{x}_1 = x_2 \Rightarrow \ddot{x} = \dot{x}_2$$

با انتخاب این دو متغیر بعنوان متغیرهای حالت ، رفتار و وضعیت سیستم کاملا مشخص می شود .

بنابراین می توان نوشت ؛

$$m\dot{x}_2 + kx_1 = u(t) \Rightarrow \dot{x}_2 = \frac{-k}{m} x_1 + \frac{1}{m} u(t)$$

چون x) تغییر مکان m) بعنوان خروجی مد نظر قرار گرفته است :

$$y = x_1$$

بنابراین می توان نوشت ؛

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = \dfrac{-k}{m}x_1 + \dfrac{1}{m}u \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \dfrac{-k}{m} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \dfrac{1}{m} \end{bmatrix} u$$

$$y = x_1 \Rightarrow y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + [0]u \Rightarrow A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \dfrac{-k}{m} & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ \dfrac{1}{m} \end{bmatrix} \quad c = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \quad d = 0$$

حال می توان با استفاده از معادله حالت ، تابع تبدیل را برای این سیستم یک ورودی – یک خروجی بدست آورد . یعنی می خواهیم از معادله حالت مقابل ، تبدیل لاپلاس بگیریم .

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}x(t) = Ax(t) + bu(t) \\ y(t) = cx(t) + du(t) \end{cases} \qquad L[x(t)] = X(s) \qquad L[u(t)] = U(s) \qquad L[y(t)] = Y(s)$$

$$\left. \begin{aligned} & L[\frac{d}{dt}x(t)] = L[Ax(t) + bu(t)] \\ & L[y(t)] = L[cx(t) + du(t)] \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{cases} SX(s) - x(0) = AX(s) + bU(s) \\ Y(s) = cX(s) + dU(s) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (SI - A)X(s) = bU(s) + x(0) \Rightarrow X(s) = (SI - A)^{-1}[bU(s) + x(0)] \\ Y(s) = c(SI - A)^{-1}[bU(s) + x(0)] + dU(s) \end{cases}$$

چون می خواهیم تابع تبدیل را بدست آوریم ، طبق تعریف شرایط اولیه برابر صفر باید باشند ، بنابراین می توان نوشت .

$$\begin{cases} x(0)=0 \Rightarrow X(s)=(SI-A)^{-1}[bU(s)] \\ Y(s)=c(SI-A)^{-1}[bU(s)]+dU(s) \Rightarrow Y(s)=[c(SI-A)^{-1}b+d].U(s) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{Y(s)}{U(s)}=c(SI-A)^{-1}b+d=G(s)$$

تابع تبدیل ، حاصل تقسیم خروجی به ورودی هنگامی که شرایط اولیه برابر صفر باشند . بعدا خواهیم دید که رفتار و عکس العمل سیستم بستگی به معکوس ماتریس $(SI-A)$ دارد .

$$(SI-A)^{-1}=\frac{adjoint(SI-A)}{\det ermiaant(SI-A)}$$

معادله مشخصه Charactristic Equation معادله حاصل از دترمینان ماتریس $(SI-A)$ میباشد.

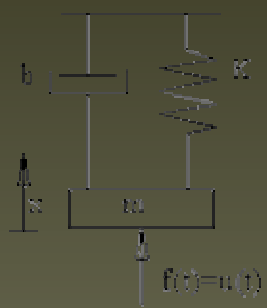
$$\det(SI-A)=charactristic \quad Equation$$

ریشه های این معادله قطبهای سیستم نامیده می شود .این معادله را برای مثال مورد نظر بدست میاوریم:

$$G(s)=c(SI-A)^{-1}b+d \qquad SI-A=\begin{bmatrix} S & -1 \\ \frac{k}{m} & S \end{bmatrix} \qquad (SI-A)^{-1}=\frac{\begin{bmatrix} S & +1 \\ -\frac{k}{m} & S \end{bmatrix}}{\begin{vmatrix} S & -1 \\ \frac{k}{m} & S \end{vmatrix}}$$

بنابراین می توان نوشت ؛

$$G(s)=[1 \quad 0]\frac{\begin{bmatrix} S & +1 \\ -\frac{k}{m} & S \end{bmatrix}}{S^2+\frac{k}{m}}\begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{bmatrix}+0=[1 \quad 0]\frac{\begin{bmatrix} \frac{1}{m} \\ \frac{S}{m} \end{bmatrix}}{S^2+\frac{k}{m}}=\frac{1/m}{S^2+\frac{k}{m}}=\frac{1}{mS^2+k}$$



مثال دیگر : قبلا در مثال با استفاده از تبدیل لاپلاس مستقیم معادله حرکت ، تابع تبدیل را بدست آورده بودیم .

$$\frac{output}{input}=\frac{X(s)}{U(s)}=G(s)=\frac{1}{mS^2+bS+k}$$

حال می خواهیم با استفاده از معادلات حالت اینکار را انجام دهیم ،

$$\begin{cases} m\ddot{x}+b\dot{x}+kx=u(t) \\ (x_1=x \quad x_2=\dot{x}) \Rightarrow (\dot{x}_1=x_2 \quad \dot{x}_2=\ddot{x}) \end{cases} \Rightarrow m\dot{x}_2+bx_2+ux_1=u \Rightarrow \dot{x}_2=\frac{-k}{m}x_1-\frac{b}{m}x_2+\frac{1}{m}u$$

$$y=x_1$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dot{x}_1=x_2 \\ \dot{x}_2=\frac{-k}{m}x_1-\frac{b}{m}x_2+\frac{1}{m}u \\ y=x_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -k/m & -b/m \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 0 \\ 1/m \end{bmatrix}u$$

$$y=[1 \quad 0]\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}+[0]u$$

بنابراین می توان نوشت ؛

$$A=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -k/m & -b/m\end{bmatrix}\qquad B=\begin{bmatrix}0\\ 1/m\end{bmatrix}\qquad c=\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}\qquad d=0$$

$$(SI-A)=\begin{bmatrix}S & -1\\ k/m & S+b/m\end{bmatrix}\qquad (SI-A)^{-1}=\frac{\begin{bmatrix}S+b/m & 1\\ -k/m & S\end{bmatrix}}{\begin{vmatrix}S & -1\\ k/m & S+b/m\end{vmatrix}}=\frac{\begin{bmatrix}S+b/m & 1\\ -k/m & S\end{bmatrix}}{S^2+b/m\,S+k/m}$$

$$G(s)=\frac{Y(s)}{U(s)}=c(SI-A)^{-1}b+d=\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}.\frac{\begin{bmatrix}S+b/m & 1\\ -k/m & S\end{bmatrix}}{S^2+b/m\,S+k/m}\begin{bmatrix}0\\ 1/m\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\end{bmatrix}=\frac{1}{mS^2+bS+k}$$

یادآوری چند تعریف :

۱- سیستم وقتی کنترل پذیراست که ورودی روی همه متغیرهای حالت تاثیرداشته باشدو سیستم وقتی مشاهده پذیر است که خروجی از همه متغیرهای حالت تاثیر گرفته باشد .

۲- ریشه های صورت کسر تابع تبدیل $c(SI-A)^{-1}b+d$ همان صفرهای سیستم وریشه های مخرج آن قطبهای سیستم می باشند .

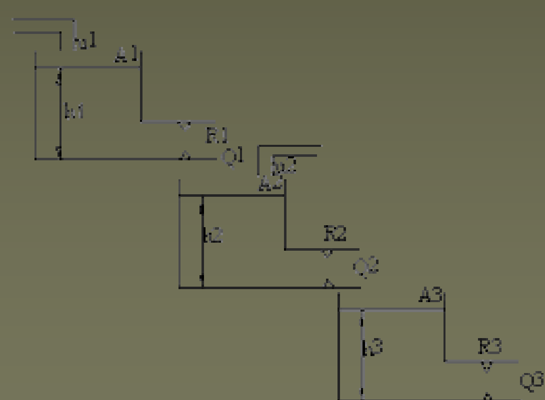
۳- راجع به تعداد صفر ها و قطبها :

چون برای یک سیستم رسته nماتریس الحاقی $(SI - A)$ از درجه n-1 می باشد ، در صورت صفر بودن ماتریس d=0 تعداد قطبها از تعداد صفرها حداقل یکی بیشتر است .

۴- صفرهای سیستم مقادیری هستند که به اندازه آنها تابع تبدیل G(s)=0 می شود و قطبهای سیستم مقادیری هستند که به اندازه آنها تابع تبدیل G(s)=∞می شود .(همان مقادیری که به ازای آنها $\det(SI - A) = 0$ است .) یعنی قطبهای سیستم مقادیر ویژه ماتریس A هستند . برعکس این مسئله ، یعنی هر مقدار ویژه همان قطب سیستم است ، هنگامی درست است که سیستم کنترل پذیر و مشاهده پذیر باشد .

سیستم فضای حالت برای یک سیستم چند ورودی- چند خروجی :

با استفاده از یک مثال این کار را انجام می دهیم . سیستم سیالاتی دارای سه ظرف با دو ورودی و سه خروجی زیر را در نظر می گیریم :



از آنجایی که ارتفاعهای متغیر h1,h2,h3 وضعیت سیستم را نشان می دهند ، بنابراین همانها را بعنوان متغیرهای حالت سیستم در نظر می گیریم :

سیستم دارای دو ورودی u1,u2 (به ظرف اول و ظرف دوم)و سه خروجی Q1,Q2,Q3 از سه ظرف:

$$\begin{cases} h_1 = x_1 \\ h_2 = x_2 \\ h_3 = x_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A_1\dot{x}_1 = u_1 - x_1/R_1 \\ A_2\dot{x}_2 = u_2 + x_1/R_1 - x_2/R_2 \\ A_1\dot{x}_1 = x_2/R_2 - x_3/R_3 \end{cases} \qquad \begin{cases} y_1 = Q_1 = x_1/R_1 \\ y_2 = Q_2 = x_2/R_2 \\ y_3 = Q_3 = x_3/R_3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -\dfrac{x_1}{R_1A_1} + \dfrac{u_1}{A_1} \\ \dot{x}_2 = \dfrac{x_1}{R_1A_2} - \dfrac{x_2}{R_2A_2} + \dfrac{u_2}{A_2} \\ \dot{x}_3 = 0.x_1 + \dfrac{x_2}{R_2A_3} - \dfrac{x_3}{R_3A_3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \\ \dot{X} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} \\ U = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \\ Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{X}(t)_{n*1} = A_{n*n}X(t)_{n*1} + B_{n*r}U_{r*1}(t)_{r*1} \\ Y(t)_{m*1} = C_{m*n}X(t)_{n*1} + D_{m*r}U(t)_{r*1} \end{cases} \qquad (*)$$

می توان نوشت ؛

$$A=\begin{bmatrix} -\frac{1}{R_1A_1} & 0 & 0 \\ \frac{1}{R_1A_2} & -\frac{1}{R_2A_2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{R_2A_3} & -\frac{1}{R_3A_3} \end{bmatrix} \quad و \quad B=\begin{bmatrix} \frac{1}{A_1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{A_2} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad و \quad C=\begin{bmatrix} \frac{1}{R_1} & & \\ & \frac{1}{R_2} & \\ & & \frac{1}{R_3} \end{bmatrix} \quad و \quad D=0$$

حال برای بدست اوردن تابع تبدیل از معادله حالت یک سیستم MIMO داریم :
می توان از معادلات (❋) صفحه قبل تبدیل لاپلاس بگیریم ؛

$$\begin{cases} SX(s)-x(0)=AX(s)+BU(s) \\ Y(s)=CX(s)+DU(s) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} X(s)=(SI-A)^{-1}(x(0)+BU(s)) \\ Y(s)=C(SI-A)^{-1}(x(0)+BU(s))+DU(s) \end{cases}$$

با فرض x(0)=0 برای بدست آوردن تابع تبدیل G(s) می توان نوشت :

$$\frac{Y(s)}{U(s)}=G(s)\Rightarrow G(s)=C(SI-A)^{-1}B+D \qquad Y(s)_{m*1}=G(s)_{m*r}.U(s)_{r*1}$$

$$\begin{bmatrix} Y_1(s) \\ Y_2(s) \\ \vdots \\ Y_3(s) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} G_{11}(s) & G_{12}(s) & \cdots & G_{1r}(s) \\ G_{21}(s) & G_{22}(s) & \cdots & G_{2r}(s) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ G_{m1}(s) & G_{m2}(s) & \cdots & G_{mr}(s) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} U_1(s) \\ U_2(s) \\ \vdots \\ U_r(s) \end{bmatrix}$$

یعنی می توان گفت : هر کدام از خروجی های سیستم بوسیله r تابع تبدیل با r ورودی سیستم ارتباط دارند . یعنی ؛

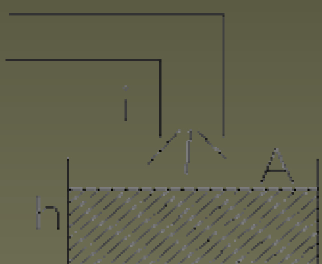
$$Y_i(s) = G_{i1}(s).U_1(s) + G_{i2}(s).U_2(s) + \cdots + G_{ir}(s).U_r(s) \qquad i = 1,2,3,.....,m$$

$$Y_i(s) = \sum_{j=1}^{r} G_{ij}(s).U_j(s) \qquad i = 1,2,3,.....,m$$

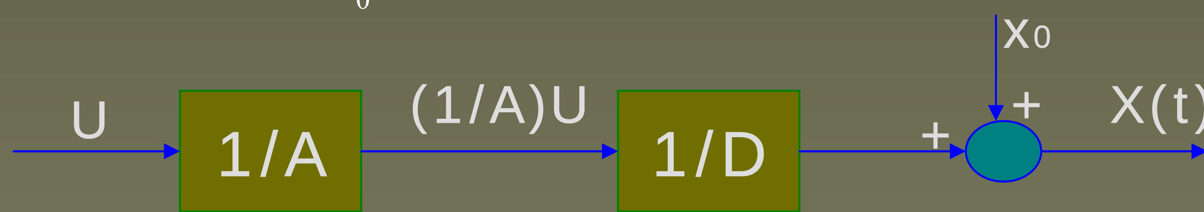
مخرج کلیه توابع تبدیل G_{ij} عبارت $\det(SI - A)$ می باشد که تساوی آن با صفرهمان معادله مشخصه سیستم می باشد .

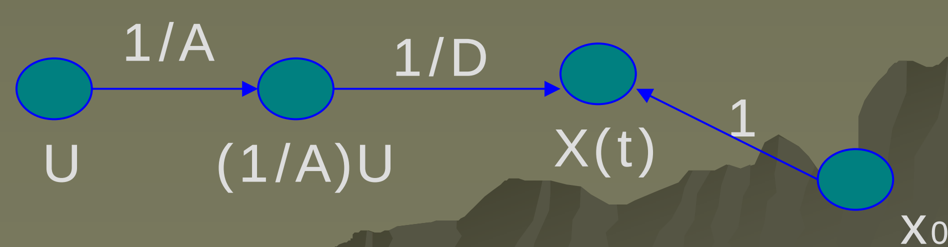
دیاگرام های جعبه ای و جریانی (signal flow diagram & Block diagram) :

توسط مثال : برای یک مخزن مایع (سیستم سیالاتی) بعنوان انتگرال گیرنده ؛



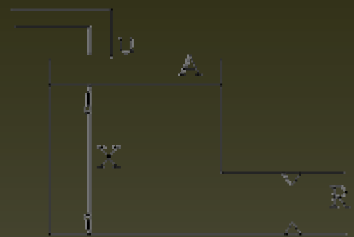
$$x(t) = x_0 + \int_0^t \frac{1}{A} u(t).dt = x_0 + \frac{1}{D}\frac{1}{A} u(t)$$





استفاده از یک مثال (یک سیستم رسته یک) برای توضیح دیاگرامهای جعبه ای و جریانی در میدان زمان و لاپلاس :

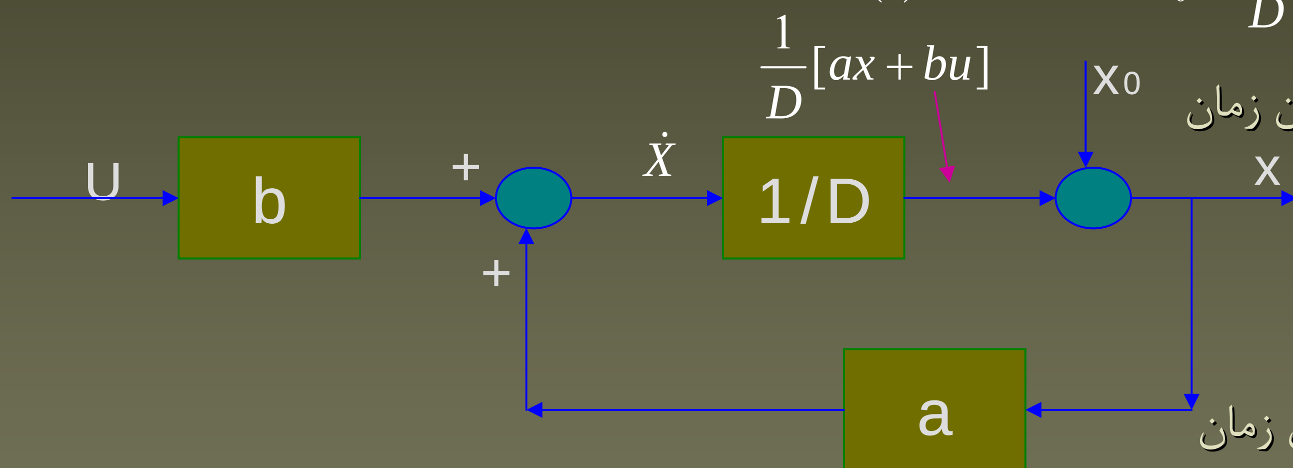
$$A\dot{x}(t) = u(t) - \frac{x(t)}{R} \qquad \dot{x}(t) = \frac{-1}{RA}x(t) + \frac{1}{A}u(t)$$



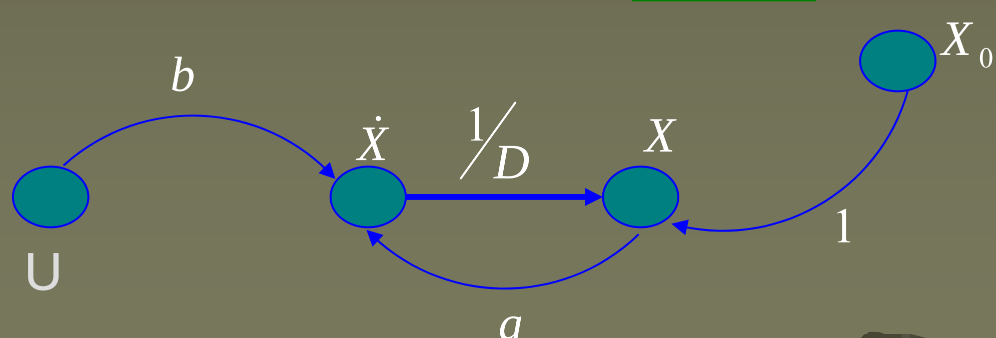
با در نظر گرفتن $\frac{-1}{RA} = a$ $\frac{1}{A} = b$ می توان نوشت ،

$$\dot{x}(t) = ax(t) + bu(t) \qquad (*) \quad \Rightarrow x(t) = x_0 + \frac{1}{D}[ax(t) + bu(t)]$$

دیاگرام جعبه ای در میدان زمان



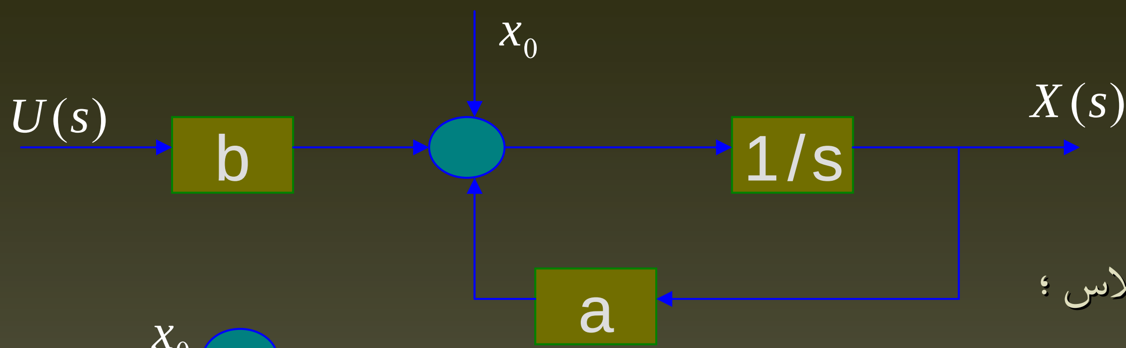
دیاگرام جریانی در میدان زمان



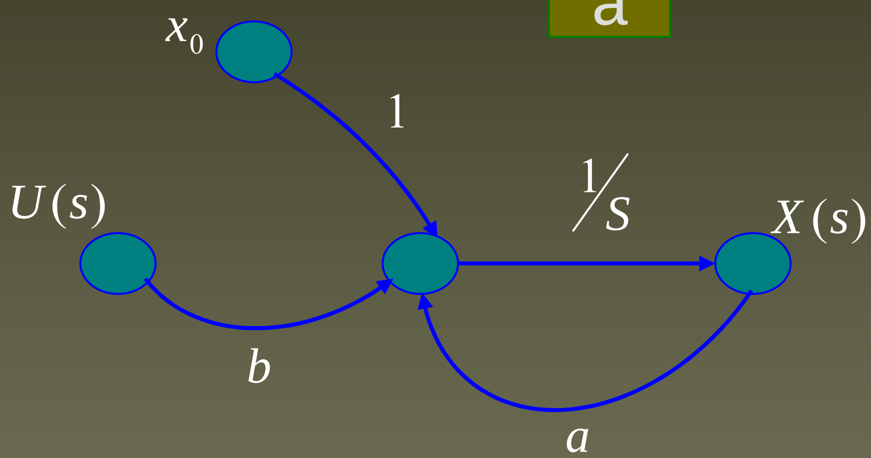
با لاپلاس گرفتن از معادله (*) داریم :

$$SX(s) - x(0) = aX(s) + bU(s)$$

دیاگرام جعبه ای در میدان لاپلاس ؛



دیاگرام جعبه ای در میدان لاپلاس ؛



تفاوت دیاگرام های جعبه ای و جریانی :

	دیاگرام جعبه ای	دیاگرام جریانی
سیگنال	خط ثابت	دایره کوچک
تابع	جعبه	خط منحنی

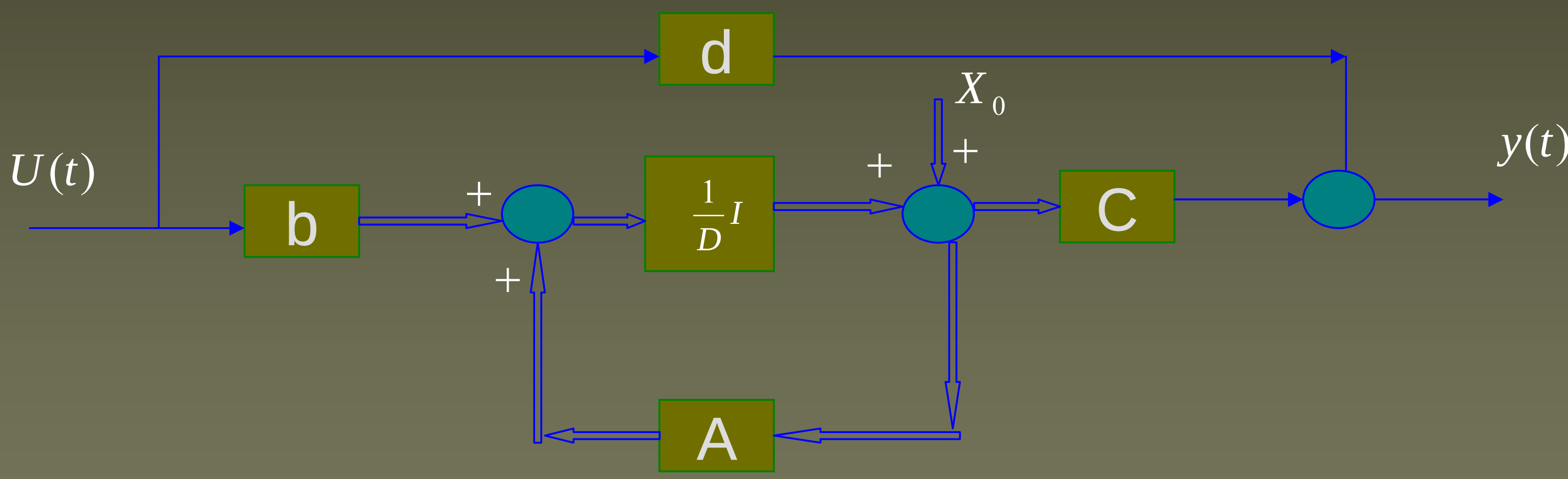
طرز نمایش یک سیستم رسته Nبا یک ورودی و یک خروجی :

$$\frac{d}{dt}X_{n*1} = A_{n*n}X_{n*1} + b_{n*1}U_{n*1} \quad , \quad \frac{d}{dt} = D \Rightarrow X(t) = X(0) + \frac{1}{D}I(AX + bU) \qquad I : n*n$$

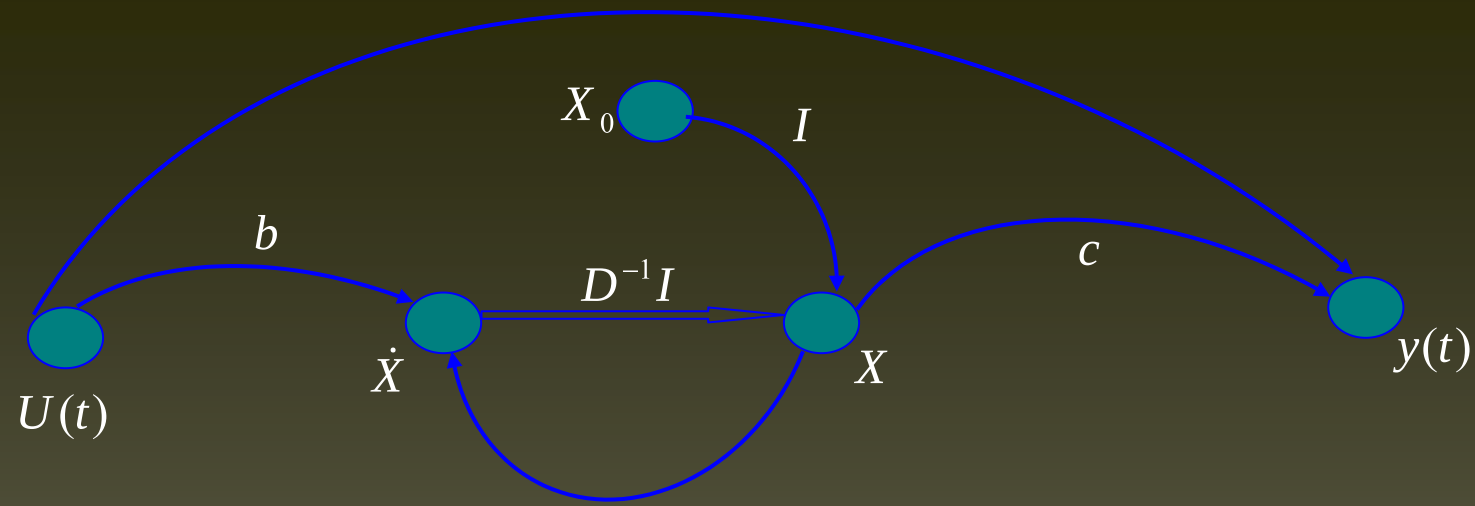
$$y_{1*1} = C_{1*n}X_{n*1} + d_{1*1}U_{1*1}$$

خط ضخیم در دیاگرام جعبه ای نشان دهنده سیگنالهای برداری .

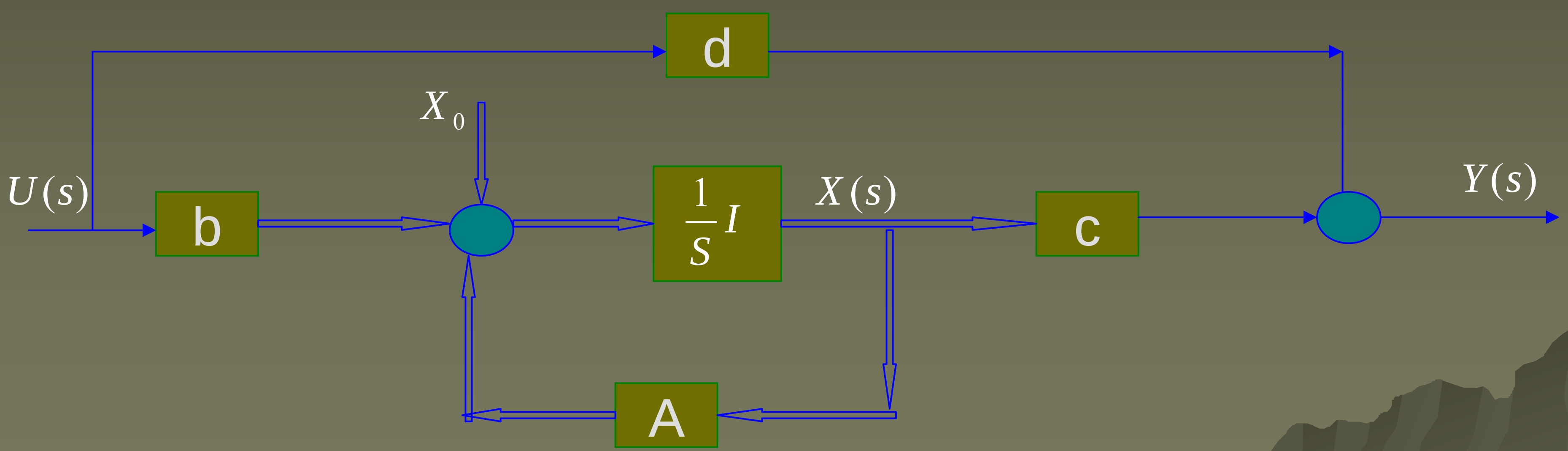
خط ضخیم در دیاگرام جریانی نشان دهنده توابع برداری .



(دیاگرام جعبه ای در میدان زمان بصورت برداری)



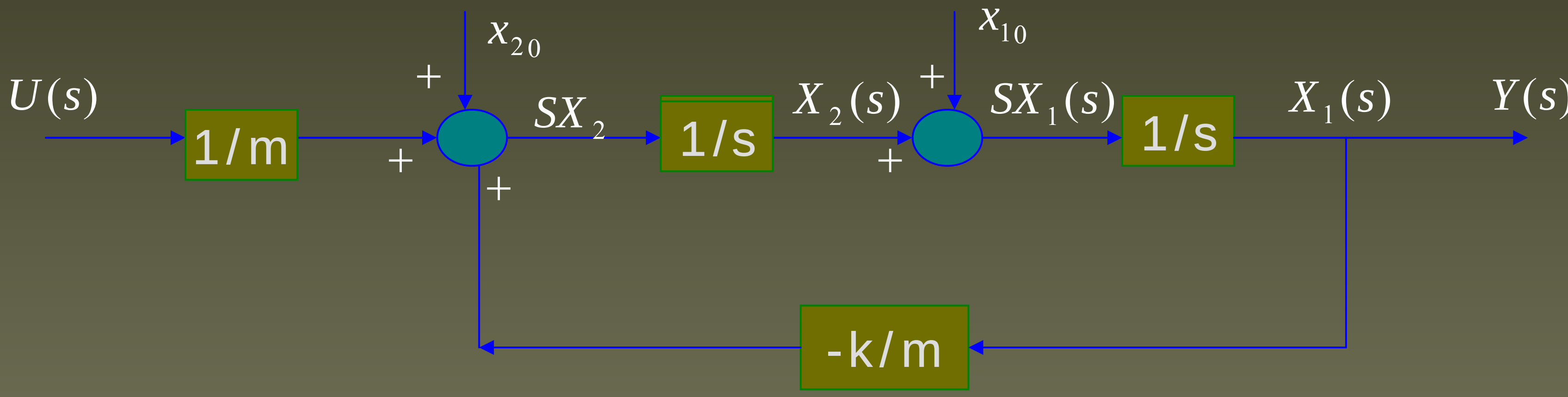
(دیاگرام جریانی در میدان زمان بصورت برداری)



(دیاگرام جعبه ای در میدان لاپلاس بصورت برداری برای ین سیستم خطی رسته n با
یک ورودی و یک خروجی)

مثال : مطلوب است ترسیم دیاگرام جعبه ای برای سیستم مثال :

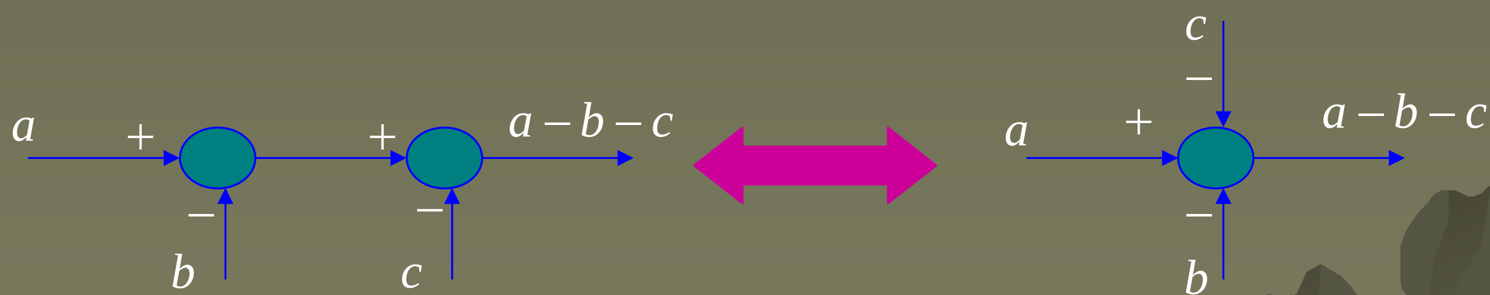
$$\left.\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -\frac{k}{m}x_1 + \frac{1}{m}u \\ y &= x_1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{aligned} & SX_1(s) - x_1(0) = X_2(s) \\ & SX_2(s) - x_2(s) = -\frac{k}{m}X_1(s) + \frac{1}{m}U(s) \\ & Y(s) = X_1(s) \end{aligned}\right.$$



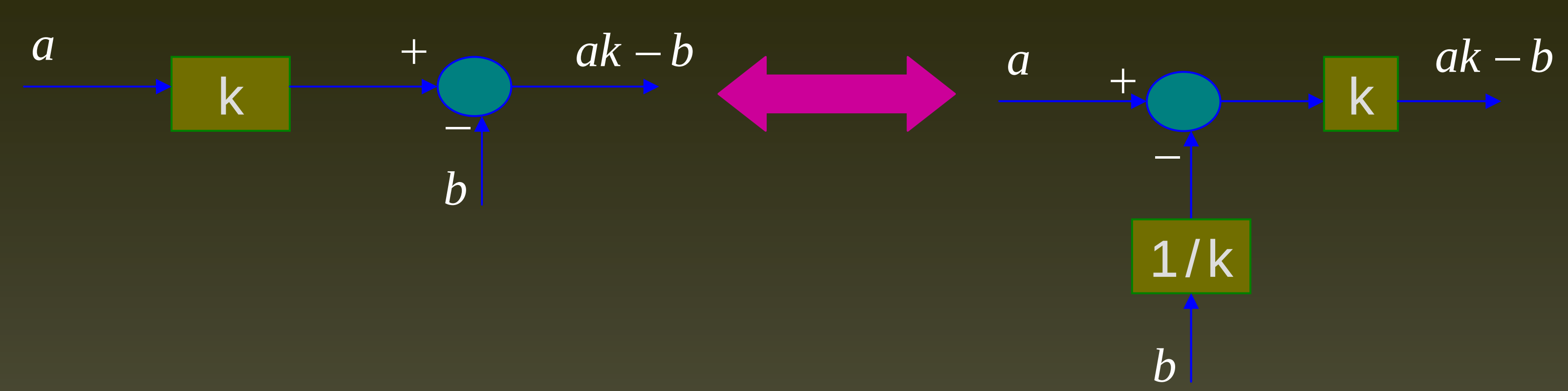
(دیاگرام جعبه ای در فضای لاپلاس سیستم جرم و فنر)

روش ساده نمودن دیاگرام های جعبه ای یا جریانی :

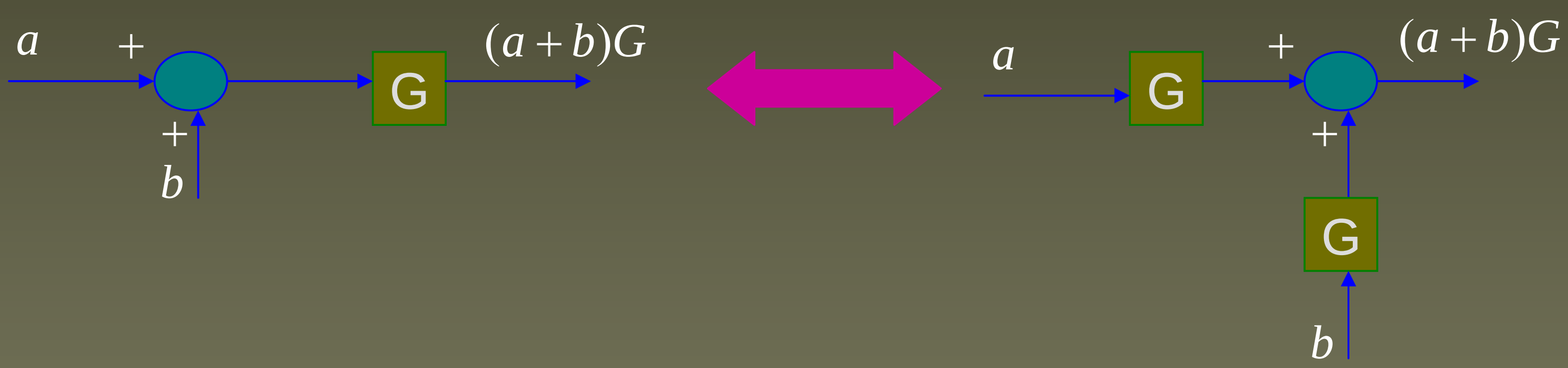
۱-



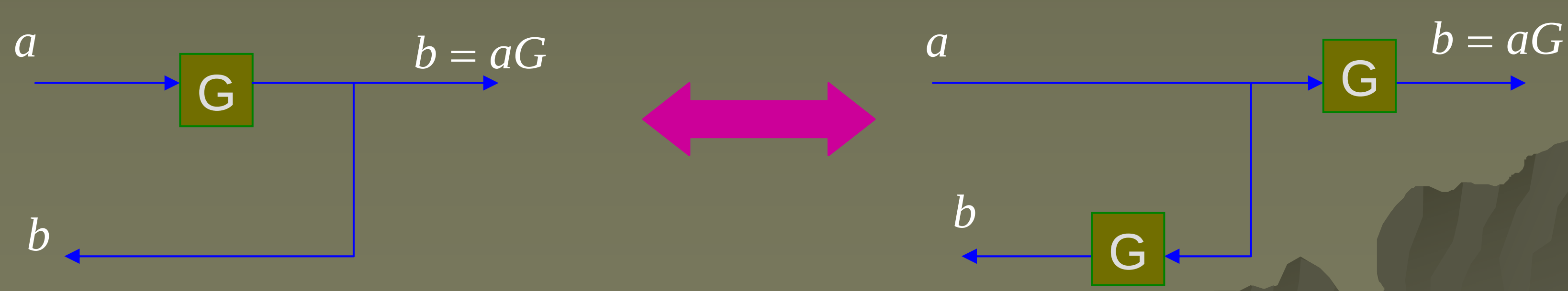
-۲



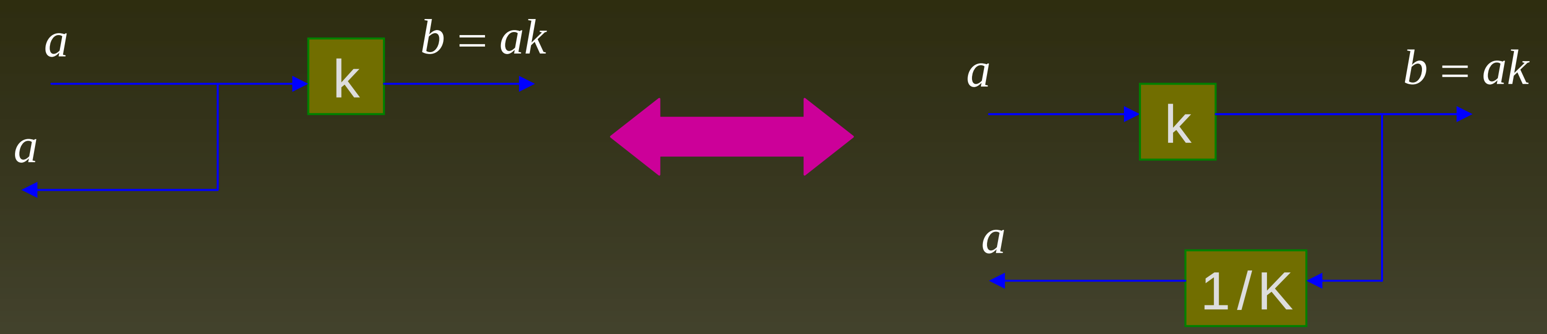
-۳



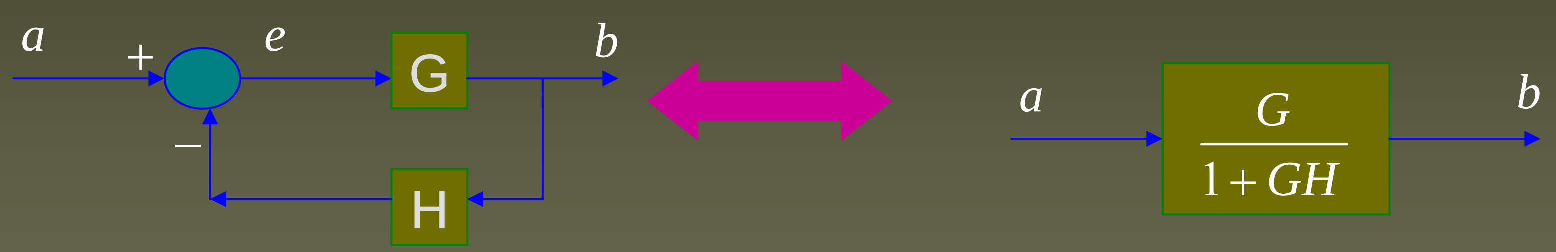
-۴



۵-



۶-



۷-

اثبات قواعد ساده نمودن دیاگرامهای جعبه ای ردیفهای ۱ تا ۵ ساده است . فقط ۶و۷ که مثل هم هستند توضیح داده می شوند .

در ردیف ۶ داریم :

$$b = Ge \quad \text{و} \quad e = a - bH \Rightarrow b = G(a - bH) = aG - bGH \Rightarrow b(1 + GH) = aG$$

$$\Rightarrow \frac{b}{a} = \frac{G}{1 + GH}$$

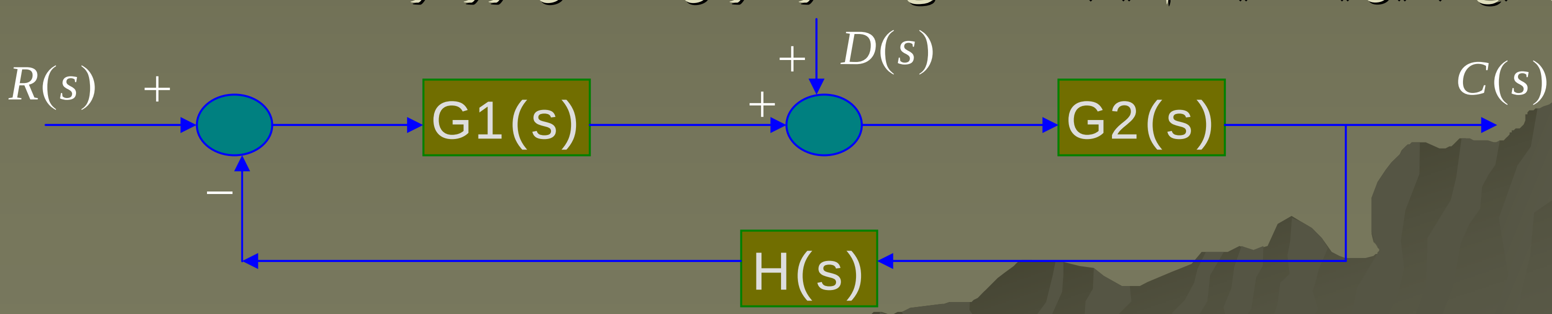
یعنی : =ورودی/ خروجی=تابع تبدیل مدار باز یک مدار فیدبک با فیدبک منفی

(تابع تبدیل فقط مدار بسته)+۱ / مسیر مستقیم بین ورودی و خروجی

و همچنین =ورودی/ خروجی=تابع تبدیل مدار باز یک مدار فیدبک با فیدبک منفی

(تابع تبدیل فقط مدار بسته)-۱ / مسیر مستقیم بین ورودی و خروجی

تعیین تابع تبدیل یک سیستم فیدبک هنگامی که در معرض اغتشاش قرار گرفته است :



در این حالت با توجه به شکل سیستم تحت تاثیر ورودی R(s) و اغتشاش D(s) قرار گرفته است . و یا می توان گفت سیستم تحت تاثیر دو ورودی R(s),D(s) قرار گرفته است .)

حال می توان تاثیر خروجی از هر ورودی را بدست آورد و برای تعیین خروجی نهائی آن دو را با هم جمع نمود . برای بدست اوردن تاثیر اغتشاش D(s) بر خروجی فرض می کنیم ورودی برابر صفر است .

$$\frac{C_{R(s)}}{R(s)}=\frac{G_1(s).G_2(s)}{1+G_1(s).G_2(s).H(s)} \qquad (1)$$

$$\frac{C_{D(s)}}{D(s)}=\frac{G_2(s)}{1+G_1(s).G_2(s).H(s)} \qquad (2)$$

خروجی ناشی از اعمال همزمان ورودی و اغتشاش عبارتست از :

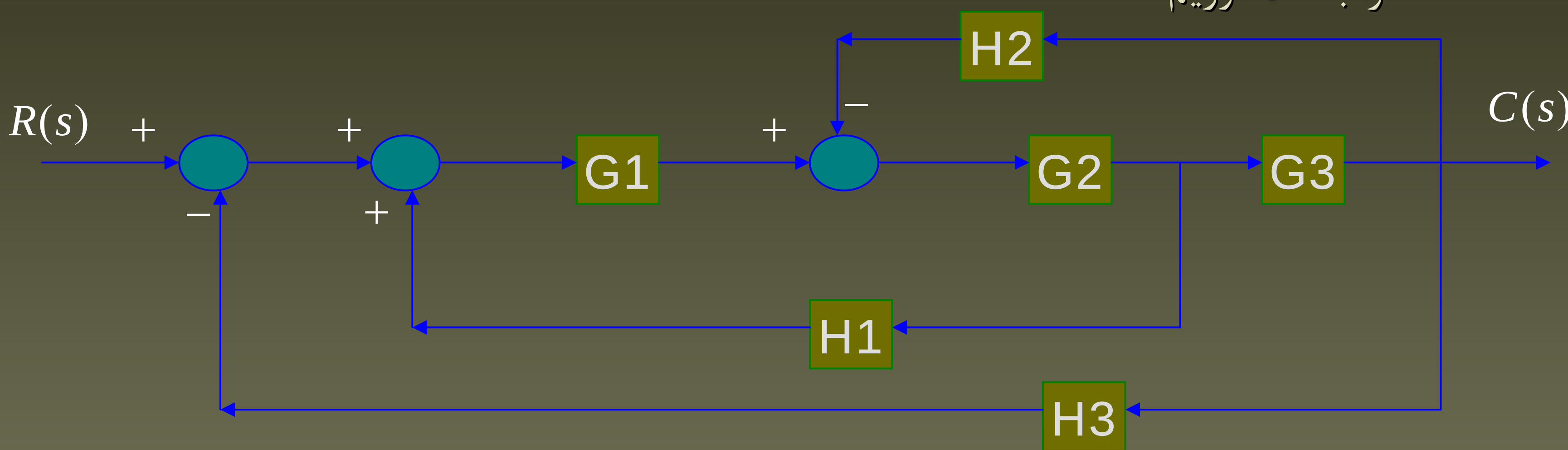
$$C(s)=C_{R(s)}+C_{D(s)}=\frac{G_2(s)}{1+G_1(s).G_2(s).H(s)}[G_1(s)R(s)+D(s)] \qquad (2)$$

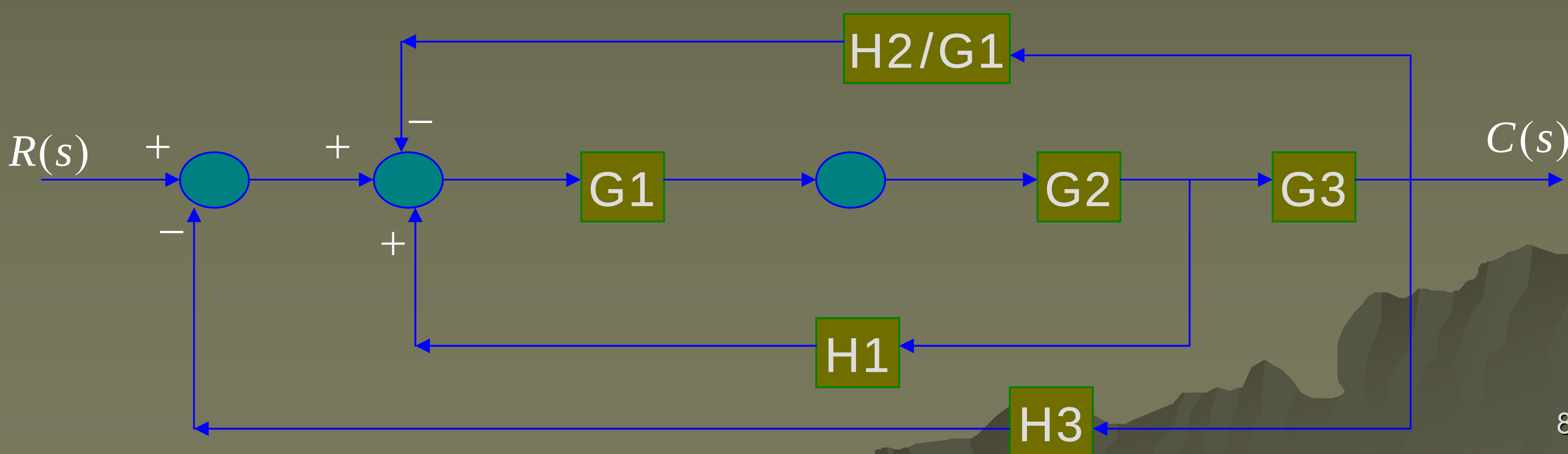
ازانجاییکه ما می خواهیم تاثیراغتشاش برخروجی هر چه کمتر باشد،می توان ادعا نموداگر $|G_1(s).H(s)|>>1$

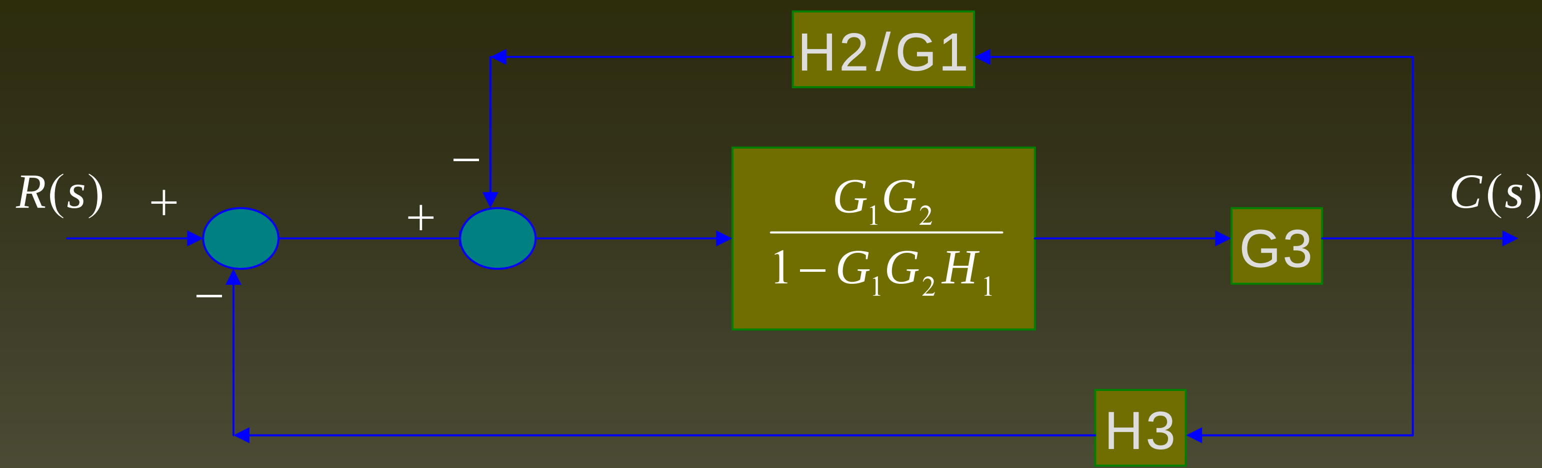
و همینطور اگر $|G_1(s).G_2(s).H(s)|>>1$ باشد، با توجه به رابطه (۲) $\frac{C_{D(s)}}{D(s)}$ تقریبا صفر است و هدف براورده شده است .(یعنی اثر اغتشاش از بین رفته است) .این مزیت یک سیستم حلقه بسته است .

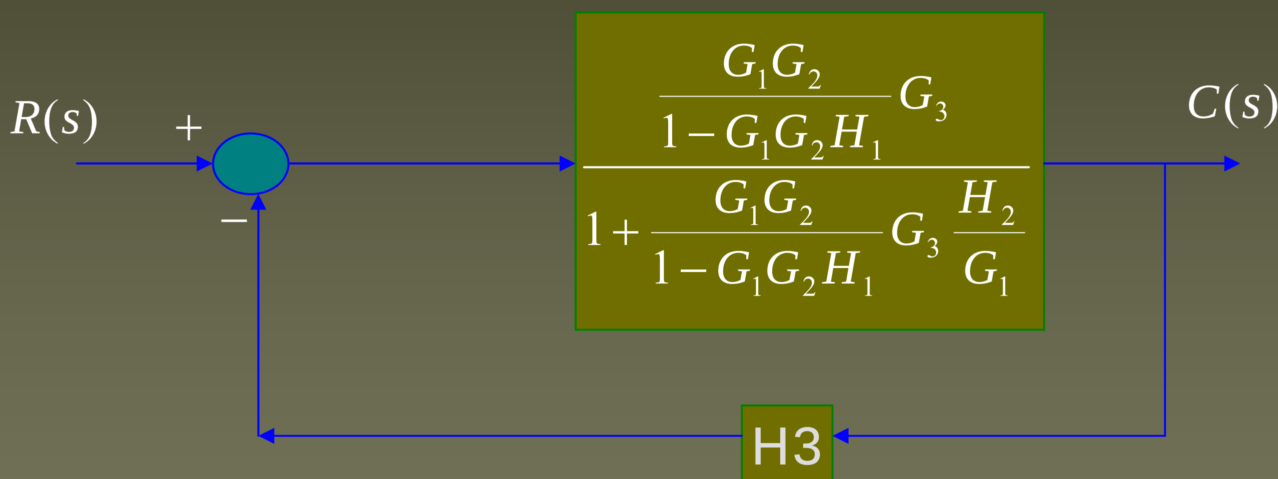
همچنین چون $|G_1(s).G_2(s).H(s)| >> 1$ است ، با توجه به رابطه (۱) می توان نوشت ؛ $\frac{C_{R(s)}}{R(s)} \cong \frac{1}{H(s)}$
یعنی در اینجا ست تابع تبدیل سیستم حلقه بسته بستگی به ندارد و فقط بستگی به تابع تبدیل فیدبک ، یعنی H(s) دارد .این مزیت دیگر سیستم های حلقه بسته می باشد .

یک مثال – چگونگی ساده کردن سیستم های فیدبک دار ؛ می خواهیم تابع تبدیل معادل سیستم مقابل را بدست آوریم .





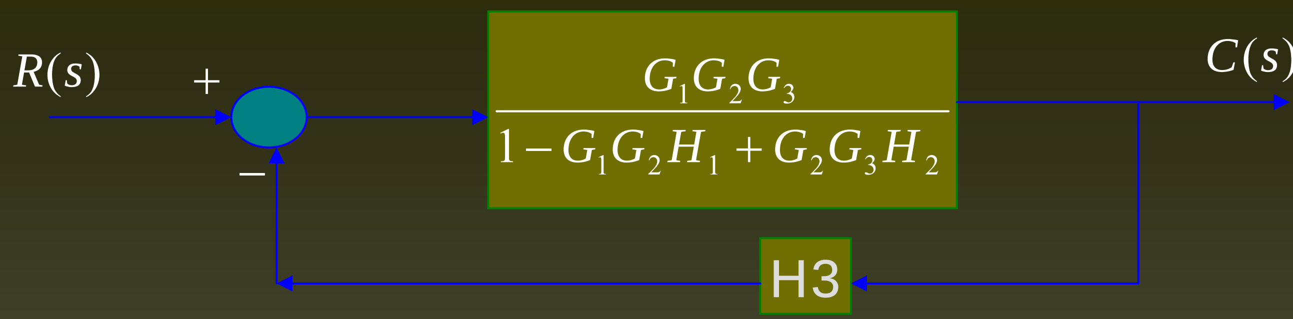




با ساده نمودن عبارت جعبه می توان نوشت :

$$\frac{\dfrac{G_1G_2}{1-G_1G_2H_1}G_3}{1+\dfrac{G_1G_2}{1-G_1G_2H_1}G_3\dfrac{H_2}{G_1}}=\frac{\dfrac{G_1G_2G_3}{1-G_1G_2H_1}}{1+\dfrac{G_2G_3H_2}{1-G_1G_2H_1}}=\frac{G_1G_2G_3}{1-G_1G_2H_1+G_2G_3H_2}$$

یعنی ؛



و بالاخره ؛

$$R(s) \longrightarrow \boxed{\dfrac{\dfrac{G_1G_2G_3}{1-G_1G_2H_1+G_2G_3H_2}}{1+\dfrac{G_1G_2G_3H_3}{1-G_1G_2H_1+G_2G_3H_2}}} \longrightarrow C(s)$$

$$R(s) \longrightarrow \boxed{\dfrac{G_1G_2G_3}{1-G_1G_2H_1+G_2G_3H_2+G_1G_2G_3H_3}} \longrightarrow C(s)$$

روش بدست آوردن معادلات برداری حالت با استفاده از تابع تبدیل :

در اینجا فرض بر این است که می خواهیم با داشتن تابع تبدیل ، معادلات حالت را بدست آوریم . یعنی با داشتن G(s) در یک سیستم یک ورودی – یک خروجی ماتریسهای A,b,c و کمیت اسکالر d را تعیین کنیم :

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = c(SI - A)^{-1} b + d$$

c_{n*n} و b_{n*n} و A_{n*n}براین اساس این سه ماتریس منحصر بفرد نیستند و تنها مورداینست که مقادیر ویژه ماتریس A باید همان قطبهای تابع تبدیل باشد .

همچنین اگر چند جمله ای صورت G(s)دارای توان برابر با چند جمله ای مخرج باشد d≠0 و اگرتوان صورت کمتر از مخرج باشد d=0 است . یعنی ؛

d≠0 : G(s)= چند جمله ای از رسته n / چند جمله ای از رسته n

d=0 : G(s)= چند جمله ای از رسته n / چند جمله ای از رسته کمتر n

اگر حالت دوم برقرار باشد که شکل برای d حل شده است . اگر حالت دوم برقرار باشد ، می توان دو چند جمله ای صورت و مخرج را بر هم تقسیم نمود ؛

G(s)= چند جمله ای از رسته n-1 / چند جمله ای از رسته n +d

بنابراین برای حل مسئله می توان حالتی را در نظر گرفت که چند جمله ای صورت از درجه n-1 و چند-جمله ای مخرج از درجه n باشد :

$$G(s) = \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{b_n s^{n-1} + b_{n-1} s^{n-2} + \cdots + b_2 s + b_1}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + a_{n-2} s^{n-2} + \cdots + a_1 s + a_0}$$

یعنی اینکه ما می خواهیم این مسئله را حل کنیم :

$$G(s)=\frac{B(s)}{A(s)}=\frac{b_n s^{n-1}+b_{n-1}s^{n-2}+\cdots+b_2 s+b_1}{s^n+a_{n-1}s^{n-1}+a_{n-2}s^{n-2}+\cdots+a_1 s+a_0} \quad \text{و} \quad \dot{X}=AX+bU \quad \text{و} \quad Y=cX$$

به سه صورت می توان ماتریسهای A , b , c را انتخاب نمود :(یعنی اینکه به این سه صورت می توان متغیرهای حالت و مشتق های آنها را در نظر گرفت .)

انتخاب اول :

$$A=\begin{bmatrix} -a_{n-1} & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -a_{n-2} & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -a_{n-3} & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \quad , \quad b=\begin{bmatrix} b_{n-1} \\ b_{n-2} \\ b_{n-3} \\ \vdots \\ b_1 \\ b_0 \end{bmatrix} \quad , \quad c=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

انتخاب دوم :

$$A=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & -a_3 & \cdots & -a_{n-1} \end{bmatrix}, \quad b=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad c=\begin{bmatrix} b_0 & b_1 & b_2 & b_3 & \cdots & b_{n-1} \end{bmatrix}$$

همچنین اگر تابع تبدیل دارای n ریشه حقیقی و مجزا باشد (که همان قطبهای سیستم هستند) میتوان ماتریسهای A , b , c بصورت زیر ارایه نمود .(دلیل این انتخاب در ادامه آمده است .)

$$A=\begin{bmatrix} P_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & P_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & P_n \end{bmatrix} \quad , \quad b=\begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_n \end{bmatrix} \quad , \quad c=\begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

چون می توان نوشت :

G(s)= (n-1) تا توان s چند جمله ای بر حسب / (s-P1)(s-P2)….(s-P3)

ریشه های مجزا هستند : P1≠P2≠….. ≠Pn

و همچنین ؛

$$G(s)=\frac{B(s)}{A(s)}=\frac{K_1}{S-P_1}+\frac{K_2}{S-P_2}+\cdots+\frac{K_n}{S-P_n}$$

$$K_i=\lim_{S\to P_i}\left[(S-P_i)\frac{B(s)}{A(s)}\right]$$

توضیح در م.رد انتخاب سوم :

طبق تعریف قطبهای سیستم ، مقادیر ویژه ماتریس A هستند . برعکس مسئله یعنی اینکه هر مقدار ویژه همان قطب سیستم است . هنگامی درست است که سیستم کنترل پذیر (تاثیر ورودی روی همه متغیرهای حالت) و مشاهده پذیر (خروجی از همه متغیر های حالت تاثیر گرفته است) باشد .

همانطوریکه مشاهده می شود ، در انتخاب سوم این انتخاب افتاده است . با توجه به ماتریس b

و ماتریس C . مثالهای انتخابهای ۱ و۲و۳ در فصل سوم کنترل آقای دکتر غفاری و فصل سوم کنترل ogata وجود دارد .

پاسخ سیستم های دینامیکی (Response of Dynamic systems) :

با اینجا توانستیم سیستم های کنترلی را مدلسازی کنیم . نمایش ریاضی سیستم های کنترلی (شامل معادلات دیفرانسیل ، معادلات حالت ، توابع تبدیل) . حال باید ببینیم عکس العمل یا رفتار سیستم نسبت به ورودی های متفاوت چیست ؟ در واقع پاسخ سیستم به یک ورودی خاص چیست ؟

معمولا چون ایده ای از ورودی واقعی به سیستم کنترلی وجود ندارد ، سعی می کنیم از ورودی های از قبل تعیین شده استفاده کنیم . (مثل تابع پله ، تابع شیب ، تابع ضربه و تابع سینوسی) .

روش حل اینست که ایده ای ازورودی داشته باشیم وسیستم را تحت ورودی شبیه آن قراردهیم .اما چون رفتار سیستم ارتباط چندان با ورودی ندارد ، سیستم اگر تحت تاثیر هر ورودی قرار گیرد ، رفتار تقریبا یکسانی ، هنگامی که تحت تاثیر ورودی واقعی قرار گرفته است ، از خود نشان می دهد .

بنابراین انواع ورودی آنقدر مهم نیست . در عین حال سعی می شود ؛

۱- اگر ورودی تابعی باشد که به تدریج تغییرمیکند ، برای تست سیستم ازتابع شیب استفاده میشود .
۲- اگر درورودی آشفتگی وجود دارد ، برای تست سیستم از تابع پله استفاده می شود .
۳- اگر درورودی تغییرات ناگهانی وجود دارد ، برای تست سیستم از تابع ضربه استفاده می شود .

پاسخ سیستم های دینامیکی را از نظر زمانی در دو قسمت محزا می توان بررسی نمود :

پاسخ حالت گذرا Transient Response : بررسی پاسخ در زمانی بلافاصله پس از اعمال یک ورودی خاص به سیستم .

پاسخ حالت ماندگار Steady state Response بررسی پاسخ در زمانی نسبتا دور پس از اعمال یک ورودی خاص به سیستم .

ضمنا برای تحلیل چگونگی مشخصات حوزه زمان سیستم های کنترلی از پاسخ های گذرا (مثل ؛ پاسخ پله ، پاسخ ضربه ، پاسخ شیب) استفاده می کنند .

سیستم کنترلی متعادل :سیستم کنترلی متعادل است که خروجی آن هنگامی که ورودی و اغتشاشی روی ان وجود ندارد یک مقدار ثابت باشد .

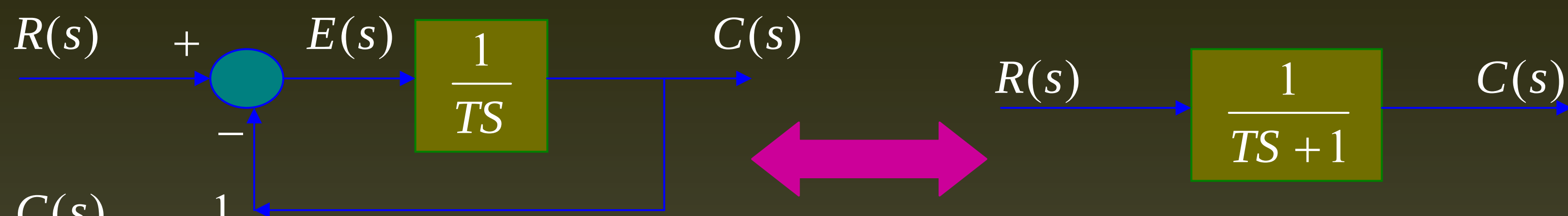
سیستم کنترلی پایدار : سیستم کنترلی که در صورت اعمال ورودی جدید یا یک اغتشاش بتواند به حالت تعادل خود بارگشت نماید .

سیستم کنترلی ناپایدار : سیستمی که در آن تحت یک ورودی یااغتشاش واقعی نوسانات خروجی با زمان افزایش یابد و با طول زمان به بی نهایت برود .

سیستم کنترلی پایدار بحرانی : سیستمی که در آن دامنه نوسانات خروجی (بین دو مقدار خاص) ادامه یابد و خروجی به مقدار خاصی میل نکند .

بعدا هنگام توضیح روش مکان هندسی ریشه ها(که یکی از ابزارهای تصحیح رفتار سیستم است) خواهیم دید ، چطور می توان با اضافه نمودن یک صفرو یا یک قطب و یا با در نظر گرفتن پارامترهای خاص برای هر کدام از صفر و یا قطب مورد اشاره یک سیستم پایدار بحرانی را و یا یک سیستم ناپایدار را به یک سیستم پایدار تبدیل نمود .

رفتار یک سیستم مرتبه اول :



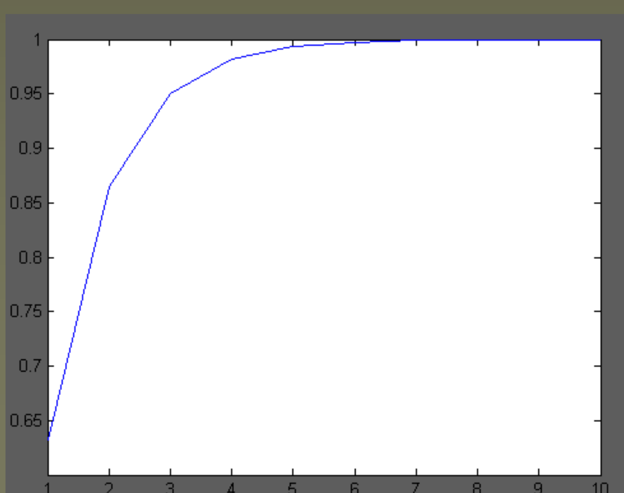
$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{1}{TS+1}$$

T عدد ثابت است . (ثابت زمانی)

– پاسخ جله یک سیستم مرتبه اول : تابع تبدیل تابع پله واحد برابر با $R(s) = \frac{1}{S}$ می باشد . بنابراین ؛

$$C(s) = \frac{1}{S}\frac{1}{TS+1} = \frac{1}{S(TS+1)} = \frac{A}{S} + \frac{B}{TS+1} = \frac{A(TS+1)+BS}{S(TS+1)} = \frac{S(AT+B)+A}{S(TS+1)} \Rightarrow \begin{cases} A=1 \\ B=-T \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{S(TS+1)} = \frac{1}{S} - \frac{T}{TS+1} = \frac{1}{S} - \frac{1}{S+\frac{1}{T}}$$

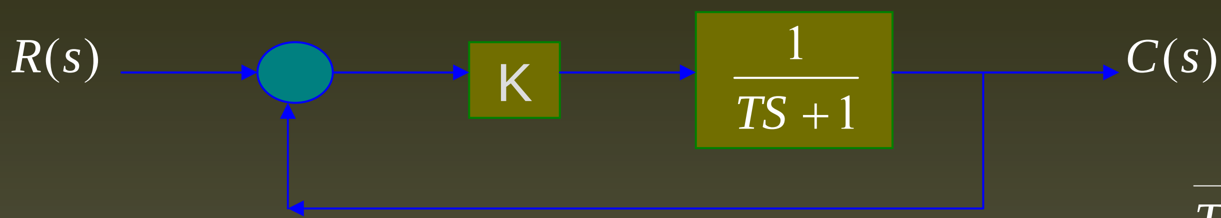


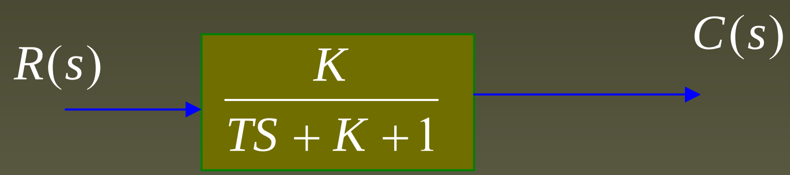
بنابراین با لاپلاس معکوس گیری از C(s) می توان نوشت :

$$C(t) = 1 - \exp(\frac{-t}{T})$$

حال می توان این پاسخ را ترسیم نمود :
همانطوریکه از C(4T) مشخص است ،
منحنی پاسخ در این نقطه و پس از آن کمتر از ۲٪ خطا دارد .

برای آنکه بتوان offset یا خطای ماندگار سیستم کنترلی را نشان داد ، فرض می کنیم یک ضریب بهره ثابت نیز در مدار بلوک دیاگرام یصورت شکل وجود دارد و همچنین تابع تبدیل سیستم بصورت $\dfrac{1}{TS+1}$ می باشد .(در سیستم صفحه قبل offset برابر صفر است .)





$$\frac{\dfrac{K}{TS+1}}{1+\dfrac{K}{TS+1}}=\frac{K}{TS+K+1}$$

$$\frac{C(S)}{R(S)}=\frac{K}{TS+K+1}\Rightarrow C(S)=\frac{K}{TS+K+1}\frac{1}{S}=\frac{K}{S(TS+K+1)}=\frac{A}{S}+\frac{B}{TS+K+1}$$

$$\Rightarrow\frac{K}{S(TS+K+1)}=\frac{A(TS+K+!)+BS}{S(TS+K+1)}=\frac{S(AT+B)+AK+A}{S(TS+K+1)}\Rightarrow\begin{cases}A=\dfrac{K}{K+1}\\ B=-\dfrac{K}{K+1}T\end{cases}$$

$$C(S)=\frac{K/K+1}{S}-\frac{TK/K+1}{TS+K+1}=\frac{K/K+1}{S}-\frac{K/K+1}{S+K+1/T}\Rightarrow c(t)=\frac{K}{K+1}\left(1-\exp(-t\frac{K+1}{T})\right)$$

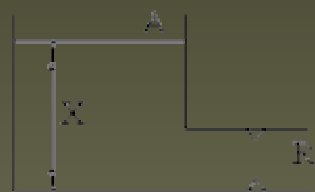
$c(0)=1$ $\qquad c(\infty)=\dfrac{K}{K+1}=offset$

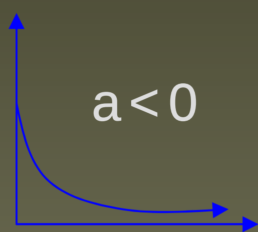
هر قدر ضریب بهره K بزرگتر باشد ، مقدار offset کوچکتر خواهد شد .

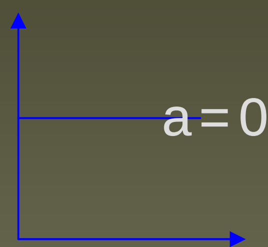
برای تشخیص اینکه یک سیستم مرتبه اول است یا نه،می توان منحنی $\log|C(t)-C(\infty)|$ برحسب t یا منحنی $\dfrac{|C(t)-C(\infty)|}{|C(0)-C(\infty)|}$ بر حسب t را رسم نمود ،اگر منحنی یک خط راست باشد ، آنگاه سیستم مربوطه از رسته (مرتبه) اول می باشد .

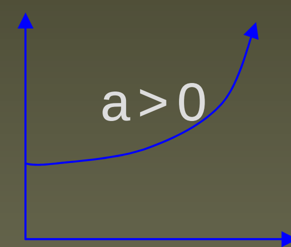
همچنین سیستم بدون ورودی یک مخزن مایع زیر نیز از رسته یک می باشد :

$$A\dot{x} = \frac{-x}{R} \qquad x(0) = x_0 \Rightarrow \dot{x} = ax \qquad , a = -\frac{1}{RA} \Rightarrow x(t) = x_0 .\exp(at)$$







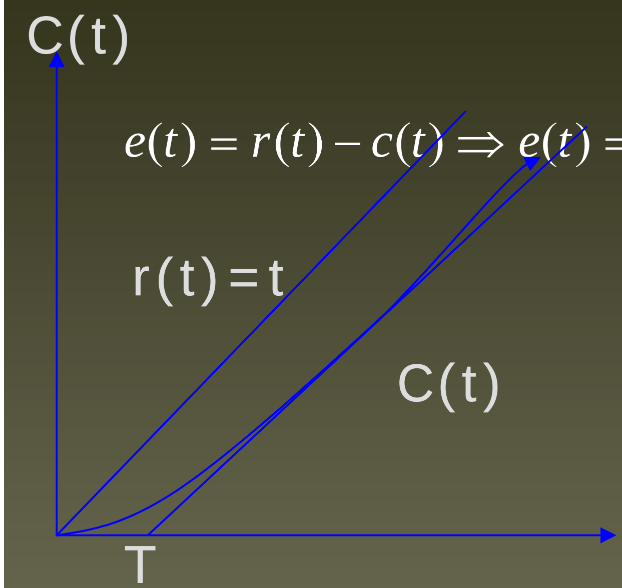


- پاسخ تابع شیب یک سیستم مرتبه اول (Ramp Function) :

$$f(t) = t \Rightarrow F(s) = \frac{1}{S^2} \Rightarrow C(s) = \frac{1}{S^2}\frac{1}{TS+1} = \frac{A}{S^2} + \frac{B}{S} + \frac{C}{TS+1}$$

$$= \frac{A(TS+1) + BS(TS+1) + CS^2}{S^2(TS+1)} \Rightarrow \begin{cases} A = 1 \\ B = -T \\ C = T^2 \end{cases}$$

$$C(s)=\frac{1}{S^2}-\frac{T}{S}+\frac{T^2}{TS+1}=\frac{1}{S^2}-\frac{T}{S}+\frac{T}{S+{}^{1}\!/_{T}}\Rightarrow c(t)=t-T+T\exp(\frac{-t}{T})$$



سیگنال خطا عبارتست از :

$$e(t)=r(t)-c(t)\Rightarrow e(t)=T(1-e^{\frac{-t}{T}})\Rightarrow\left(e(\infty)=T \qquad e(0)=0\right)$$

$$\begin{cases} e(T)=T(1-e^{-1})=0.632T \\ e(2T)=T(1-e^{-2})=0.865T \\ e(3T)=T(1-e^{-4})=0.982T \end{cases}$$

- پاسخ تابع ضربه سیستم مرتبه اول :

$$C(s)=\frac{1}{TS+1}(1)=\frac{{}^{1}\!/_{T}}{S+{}^{1}\!/_{T}}\Rightarrow c(t)=\frac{1}{T}e^{\frac{-t}{T}}$$

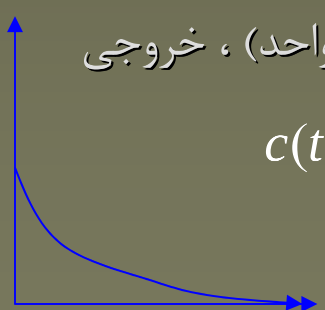
نتیجه : در سیستم های خطی مستقل از زمان ؛

به ازای ورودی شیب واحد ، خروجی

$$c(t)=t-T+T\exp(\frac{-t}{T})$$

به ازای ورودی پله واحد(مشتق شیب واحد) ، خروجی

$$c(t)=1-e^{\frac{-t}{T}}$$

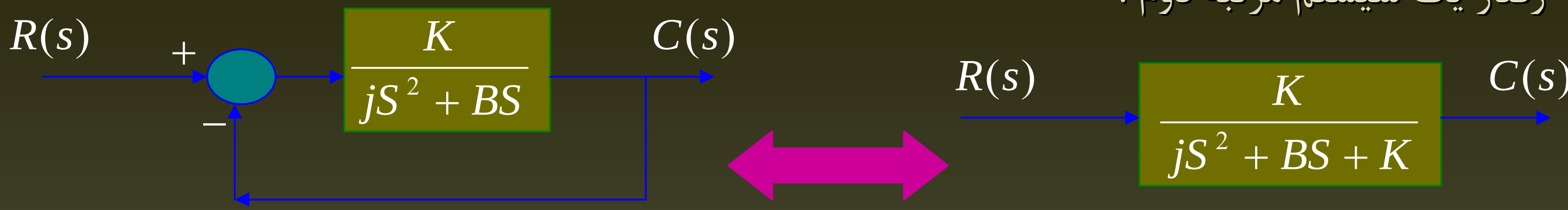


به ازای ورودی ضربه واحد(مشتق پله واحد) ، خروجی

$$c(t)=\frac{1}{T}e^{\frac{-t}{T}}$$

در سیستم های غیر خطی و یا سیستم متغیر با زمان این ویژگی وجود ندارد .

رفتار یک سیستم مرتبه دوم :



یعنی تابع تبدیل حلقه بسته یک سیستم مرتبه دوم عبارتست از :

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{K}{jS^2 + BS + K}$$

همینطور می توان مخرج را بصورت زیر بازنویسی نمود ؛

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{K/j}{[S + \frac{B}{2j} + \sqrt{\left(\frac{B}{2j}\right)^2 - \frac{K}{j}}][S + \frac{B}{2j} - \sqrt{\left(\frac{B}{2j}\right)^2 - \frac{K}{j}}]}$$

اگر $B^2 - 4Kj < 0$ قطبهای مدار بسته سیستم دینامیکی مختلط می باشند .

و اگر $B^2 - 4Kj \geq 0$ قطبهای مدار بسته سیستم دینامیکی حقیقی می باشند .

برای تعیین پاسخ گذرا می توان در نظر گرفت (یا معمولا در نظر می گیرند .)

$$\frac{K}{J} = \omega_n{}^2 \qquad \frac{B}{J} = 2\xi\omega_n = 2\sigma \qquad \sigma = \xi\omega_n$$

σتضعیف یا ضریب میرایی و ξنسبت میرایی و ω_n فرکانس طبیعی نامیرا .

$2\sqrt{jK} = B_c$ میرایی بحرانی است و داریم :

$$\xi = \frac{B}{B_C} \Rightarrow \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\omega_n{}^2}{S^2 + 2\xi\omega_n + \omega_n{}^2}$$

اگر $0 < \xi < 1$ آنگاه قطبهای حلقه بسته مزدوج مختلط هستند با مقادیر حقیقی منفی . سیستم زیر میرا و پاسخ گذرا نوسانی است .

اگر $\xi = 1$ آنگاه قطبهای حلقه بسته حقیقی و برابر هستند . و سیستم میرای بحرانی است .

اگر $\xi > 1$ آنگاه قطبهای حلقه بسته حقیقی و منفی و نامساوی هستند و سیستم فوق میرا ست .

و در نهایت اگر $\xi = 0$ قطبها برابر $\left(\pm\omega_n\right.$ و $\left.B = 0\right)$ هستند .

- پاسخ یک سیستم مرتبه دو به ورودی پله :

سه حالت متفاوت برای اینکار در نظر می گیریم :

۱- سیستم زیر میرا و پاسخ نوسانی ، $0 < \xi < 1$

۲- سیستم دارای میرائی بحرانی ، $\xi = 1$

۳- سیستم فوق میرا ، $\xi > 1$

۱- سیستم زیر میرا و پاسخ نوسانی :

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{{\omega_n}^2}{(S + \xi\omega_n + j\omega_d)(S + \xi\omega_n - j\omega_d)}$$

$$C(s) = \frac{{\omega_n}^2}{(S^2 + 2\xi\omega_n S + {\omega_n}^2)S} = \frac{1}{S} - \frac{S + 2\xi\omega_n}{S^2 + 2\xi\omega_n S + {\omega_n}^2} \quad , \quad \omega_d = \omega_n\sqrt{1-\xi^2}$$

$$= \frac{1}{S} - \frac{S + \xi\omega_n}{\left(S + \xi\omega_n\right)^2 + {\omega_d}^2} - \frac{\xi\omega_n}{\left(S + \xi\omega_n\right)^2 + {\omega_d}^2}$$

$$\Rightarrow c(t) = 1 - e^{-\xi\omega_n t}(\cos\omega_d t + \frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}\sin\omega_d t) = 1 - \frac{e^{-\xi\omega_n t}}{\sqrt{1-\xi^2}}\sin(\omega_d t + \tan^{-1}\frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi})$$

سیگنال خطا عبارتست از :

$$e(t) = r(t) - c(t) = e^{-\xi\omega_n t}(\cos\omega_d t + \frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}\sin\omega_d t) \qquad t \ge 0 \qquad e(\infty) = 0$$

$$if\ \xi = 0 \Rightarrow c(t) = 1 - \cos\omega_n t$$

یعنی ω_n فرکانس طبیعی سیستم نا میرا است . یعنی دراین حالت $\xi = 0$ سیستم با فرکانس ω_n نوسان می کند .

۲- سیستم دارای میرائی بحرانی ؛ (دو قطب نسبت $\frac{C(s)}{R(s)}$ برابرند .)

$$\xi = 1 \Rightarrow R(s) = 1/S \qquad \Rightarrow C(s) = \frac{\omega_n^{\ 2}}{(S+\omega_n)^2 S} \Rightarrow c(t) = 1 - e^{-\xi\omega_n t}(1 + \omega_n t) \qquad t \ge 0$$

۳- سیستم فوق میرا : در اینحالت $\frac{C(s)}{R(s)}$ دارای دو قطب حقیقی منفی و نامساوی است .

$$\xi > 1 \Rightarrow \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\omega_n}{(S + \xi\omega_n + \omega_n\sqrt{\xi^2 - 1})(S + \xi\omega_n - \omega_n\sqrt{\xi^2 - 1})} \qquad و \qquad R(s) = \frac{1}{S}$$

$$\Rightarrow c(t) = 1 + \frac{1}{2\sqrt{\xi^2 - 1}(\xi + \sqrt{\xi^2 - 1})} e^{-(\xi + \sqrt{\xi^2 - 1})\omega_n t} - \frac{1}{2\sqrt{\xi^2 - 1}(\xi + \sqrt{\xi^2 - 1})} e^{-(\xi - \sqrt{\xi^2 - 1})\omega_n t}$$

$$c(t) = 1 + \frac{\omega_n}{2\sqrt{\xi^2 - 1}}(\frac{e^{-s_1 t}}{S_1} - \frac{e^{-s_2 t}}{S_1}) \qquad و \qquad t \ge 0$$

$$S_1 = \left(\xi + \sqrt{\xi^2 - 1}\right)\omega_n \qquad و \qquad S_2 = \left(\xi - \sqrt{\xi^2 - 1}\right)\omega_n$$

مشخصات پاسخ گذرا (که با توجه به خروجی یا پاسخ یک سیستم کنترلی به ورودی پله می دهد .)

۱- زمان تاخیر t_d : مدت زمانیکه طول می کشد تا پاسخ برای باراول به نصف مقدار نهایی خود برسد.

۲- زمان صعود t_r : مدت زمانیکه طول می کشد تا پاسخ برای باراول به مقدار نهایی خود برسد .

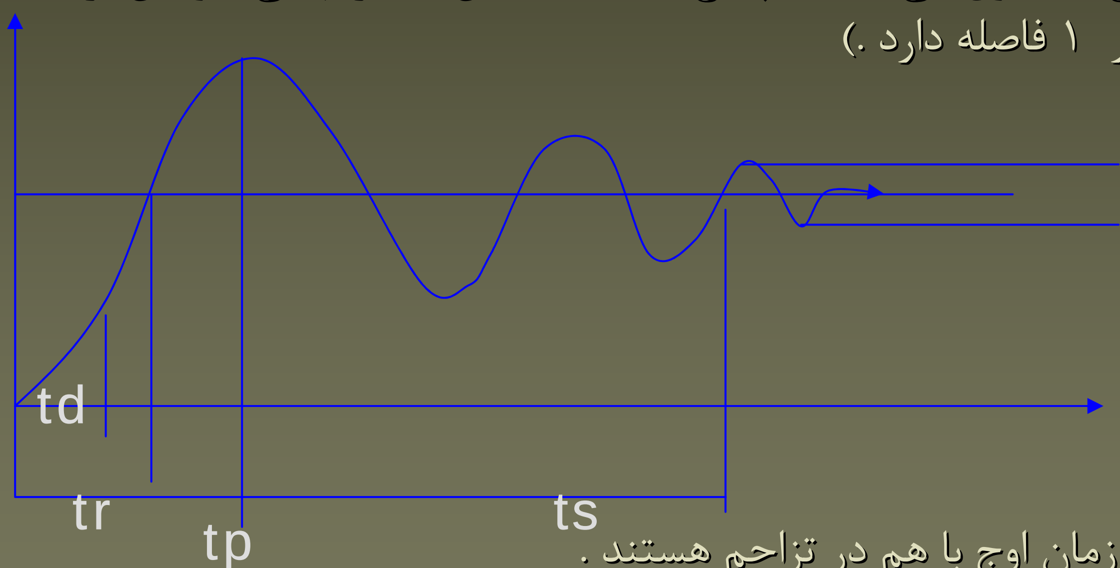
۳- زمان اوج t_p: مدت زمانیکه طول می کشد تا پاسخ برای باراول به مقدار اوج خود برسد .

۴- ماکزیمم درصد فراجهش M_p مقدار اوج فراجهش نسبت به یک .

$$M_p = \frac{C(t_p) - C(\infty)}{C(\infty)} * 100$$

۵- زمان نشست t_s : مدت زمانی که طول می نشد تا پاسخ به دامنه معین مقدار نهایی خودش برسد .

(این دامنه از ۲٪ تا ۵٪ با مقدار ۱ فاصله دارد .)



2%or5%

توضیح : ۱- ماکزیمم فراجهش و زمان اوج با هم در تزاحم هستند .

۲- سریع بودن پاسخ گذرا و داشتن میرایی کافی امری مطلوب است .

۳- پاسخ گذرای مطلوب $.8 > \xi > .4$ است . $.4 > \xi$ فراجهش بسیار زیادو $.8 > \xi$ سیستمی کند است .

حال می خواهیم مشخصات پاسخ حالت گذرا یک سیستم مرتبه دوم را محاسبه کنیم : (برای یک سیستم زیر میرا underdamping .

۱- زمان صعود tr (یا مدت زمانی که پاسخ برای اولین بار به مقدار نهایی خود می رسد .)

$$C(tr) = 1 = 1 - e^{-\xi\omega_n tr}(\cos\omega_d tr + \frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}\sin\omega_d tr)$$

$$e^{-\xi\omega_n tr} \neq 0 \Rightarrow \cos\omega_d tr + \frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}\sin\omega_d tr = 0 \Rightarrow \tan\omega_d tr = -\frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi} = -\frac{\omega_d}{\sigma}$$

$$\Rightarrow tr = \frac{1}{\omega_d}\tan^{-1}\left(-\frac{\omega_d}{\sigma}\right) = \frac{\pi-\beta}{\omega_d}$$

۲- زمان اوج tp (مدت زمانی که پاسخ به اولین اوج خودش برسد .)

$$\frac{dC}{dt} = \xi\omega_n e^{-\xi\omega_n t}(\cos\omega_d t + \frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}\sin\omega_d t) + e^{-\xi\omega_n t}(\omega_d \sin\omega_d t - \frac{\xi\omega_d}{\sqrt{1-\xi^2}}\cos\omega_d t)$$

$$\frac{dC}{dt}\Big|_{t=tp} = (\sin\omega_d tp)\frac{\omega_n}{\sqrt{1-\xi^2}}e^{-\xi\omega_n t} = 0 \Rightarrow \sin\omega_d tp = 0 \Rightarrow \omega_d tp = 0, \pi, 2\pi, 3\pi, ...$$

چون زمان اوج در اولین تناوب اتفاق می افتد ، می توان نوشت ؛

$$\omega_d tp = \pi \Rightarrow tp = \frac{\pi}{\omega_d}$$

۳- ماکزیمم فراجهش یا overshoot :

$$t = tp = \frac{\pi}{\omega_d} \Rightarrow Mp = c(tp) - 1 = -e^{-\xi\omega_n\left(\frac{\pi}{\omega_d}\right)}(\cos\pi + \frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}\sin\pi) = e^{\left(\frac{-\sigma}{\omega_d}\right)\pi} = e^{-\left(\frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}\right)\pi}$$

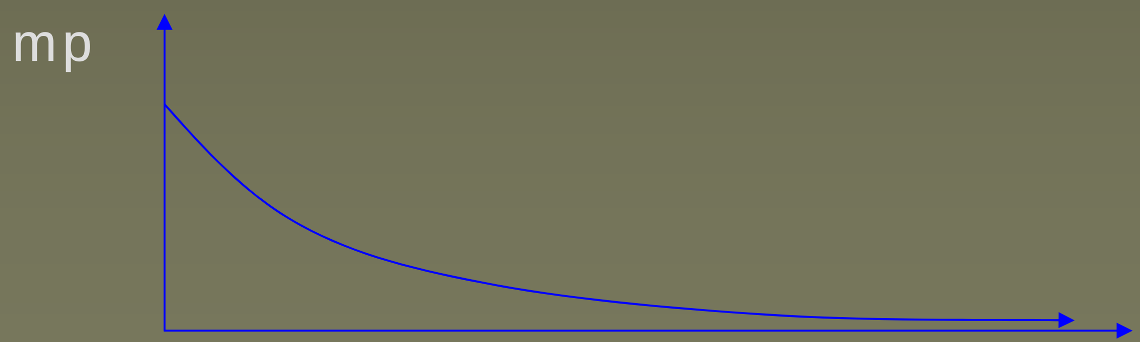
$$Mp = e^{-\left(\frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}\right)\pi} * 100$$

۴- زمان نشست ts :

$$c(t) = 1 - \frac{e^{-\xi\omega_n t}}{\sqrt{1-\xi^2}}\sin(\omega_d t + \tan\frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi}) \qquad t \geq 0 \qquad T = \frac{1}{\xi\omega_n}$$

$$for \quad 2\% \quad ts = 4T = \frac{4}{\sigma} = \frac{4}{\xi\omega_n} \qquad for \quad 5\% \quad ts = 3T = \frac{3}{\sigma} = \frac{3}{\xi\omega_n}$$

منحنی Mpبر حسب ξ عبارتست از :



پاسخ یک سیستم مرتبه دو به ورودی ضربه :

چون تبدیل لاپلاس تابع ضربه برابر ۱ است R(s)=1 می توان نوشت ؛

$$C(s)=\frac{{\omega_n}^2}{S^2+2\xi\omega_n+{\omega_n}^2}$$

$$for \qquad 0\le\xi<1 \qquad t\ge 0\Rightarrow c(t)=\frac{\omega_n}{\sqrt{1-\xi^2}}e^{-\xi\omega_n t}.\sin\omega_n\sqrt{1-\xi^2}\,t$$

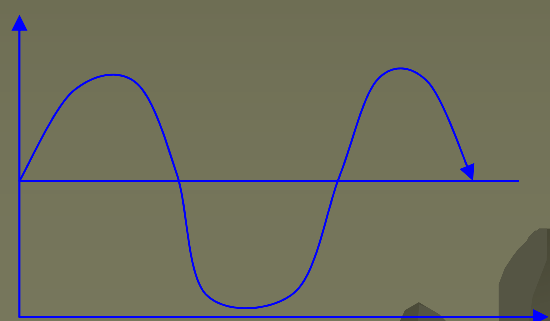
$$for \qquad \xi=1 \qquad t\ge 0\Rightarrow c(t)={\omega_n}^2te^{-\xi\omega_n t}\ge 0$$

$$for \qquad \xi>1 \qquad t\ge 0\Rightarrow c(t)=\frac{\omega_n}{2\sqrt{1-\xi^2}}(e^{-(\xi-\sqrt{\xi^2-1})\omega_n t}-e^{-(\xi+\sqrt{\xi^2-1})\omega_n t})\ge 0$$

البته چون پاسخ ضربه مشتق زمانی پاسخ پله است ، می توانستیم این پاسخ را نیز دتعیین کنیم

برای حالت $\xi>1$ و $\xi=1$ داریم ؛ $c(t)\ge 0$

و برای $\xi<1$ حالت نوسانی کجود دارد .



ماکزیمم فرا جهش پاسخ ضربه یک سیستم رسته دو در حالت زیر میرا در زمان زیر رخ می دهد ؛

$$t = \frac{\tan^{-1}\dfrac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi}}{\omega_n\sqrt{1-\xi^2}} \qquad 0<\xi<1$$

و مقدار ماکزیمم فرا جهش در زمان بالا عبارتست از :

$$c(t)_{\max} = \omega_n e^{-\frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}\tan^{-1}\frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi}} \qquad 0<\xi<1$$

مثال : بدست آوردن پاسخ پله یک سیستم بیان شده توسط تابع تبدیل زیر .

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{25}{S^2+4S+25} \Rightarrow \begin{cases} num = [0 \quad 0 \quad 25] \\ den = [1 \quad 4 \quad 25] \end{cases} \Rightarrow step(num, den, t)$$

$$or \qquad step(A,B,C,D) \qquad or \qquad [y,x,t] = step(num,den,t)$$

$$or \qquad [y,x,t] = step(A,B,C,D,iu) \qquad or \qquad [y,x,t] = step(A,B,C,D,iu,t)$$

تعیین پاسخ یک سیستم بیان شده توسط معادلات حالت :

$$\dot{X} = AX + BU \qquad\qquad Y = CX + DU$$

ما بدنبال تابع تبدیل سیستم هستیم :

ورودی / خروجی = تابع تبدیل سیستم $\quad \Rightarrow G(s) = \dfrac{Y(s)}{U(s)}$

با تبدیل لاپلاس گیری از معادله حالت ؛

$$SX(s) - x(0) = AX(s) + BU(s) \Rightarrow Y(s) = CX(s) + DU(s)$$

$$x(0) = 0 \Rightarrow X(s) = (SI - A)^{-1} BU(s) \Rightarrow Y(s) = [C.(SI - A)^{-1} B + D]U(s)$$

$$\Rightarrow G(s) = C(SI - A)^{-1} B + D$$

مثلا برای سیستم مقابل : (۲ متغیر حالت ، ۲ ورودی ، ۲خروجی)

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 6.5 & 0 \end{bmatrix}_{2*2} \quad \text{و} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}_{2*2} \quad \text{و} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}_{2*2} \quad \text{و} \quad D = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_{2*2}$$

$$G(s) = C(SI - A)^{-1} B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S+1 & 1 \\ -6.5 & S \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{S^2 + S + 6.5} \begin{bmatrix} S & -1 \\ 6.5 & S+1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} Y_1(s) \\ Y_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{S-1}{S^2+S+6.5} & \dfrac{S}{S^2+S+6.5} \\ \dfrac{S+7.5}{S^2+S+6.5} & \dfrac{6.5}{S^2+S+6.5} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{Y_1(s)}{U_1(s)} = \dfrac{S-1}{S^2+S+6.5} & \dfrac{Y_2(s)}{U_1(s)} = \dfrac{S+7.5}{S^2+S+6.5} \\ \dfrac{Y_1(s)}{U_2(s)} = \dfrac{S}{S^2+S+6.5} & \dfrac{Y_2(s)}{U_2(s)} = \dfrac{6.5}{S^2+S+6.5} \end{cases}$$

توجه : وقتی سیگنال U1بعنوان ورودی در نظر گرفته می شود ، سیگنال U2 برابر صفر در نظر گرفته می شود .و برعکس .

$$\begin{cases} A=[-1 \quad 1; \quad 6.5 \quad 0]; \\ B=[1 \quad 1; \quad 1 \quad 0]; \\ C=[1 \quad 0; \quad 0 \quad 1]; \\ D=[0 \quad 0; \quad 0 \quad 0]; \end{cases} \Rightarrow step(A,B,C,D) \qquad \text{و} \qquad \begin{cases} Graph: & Input1, Output1 \\ Graph: & Input2, Output1 \\ Graph: & Input1, Output2 \\ Graph: & Input2, Output2 \end{cases}$$

تحلیل پاسخ ضربه نیز توسط دستورهای زیر انجام می شود :

$impulse(num, den)$

$impulse(A, B, C, D)$

$[y, x, t] = impulse(num, den)$

$[y, x, t] = impulse(num, den.t)$

$[y, x, t] = impulse(A, B, C, D)$

$[y, x, t] = impulse(A, B, C, D, iu)$

$[y, x, t] = impulse(A, B, C, D, iu, t)$

- تحلیل رفتار یک سیستم رسته n :

$$\dot{X} = AX + BU \quad \Rightarrow \quad \dot{X} - AX = BU \Rightarrow f(X, \dot{X}) = BU \quad (*)$$

هدف از تحلیل یک سیستم مرتبه n بیان دقیق و حل معادله دیفرانسیل بالا (*) می باشد . می توان حل این معادله دیفرانسیل را در قالب حل همگن (بدون طرف ثانی ، Homogenous solution) و حل خصوصی (Particular solution) دانست .

حل سیستم آزاد ، همان حل معادله همگن با u(t)=0 می باشد و یا بررسی رفتار آزاد می باشد . یعنی می توان نوشت :

$$\dot{X} = AX \quad or \quad \dot{X}(t) = AX(t) \quad x(0) = x_0$$

فرض می کنیم حل این معادله عبارتست از :

$$x(t) = \phi(t).x(0) = (I + C_1 t + c_2 t^2 + \cdots + c_k t^k + \cdots).x_0$$

$$\Rightarrow \phi(t) = I + C_1 t + c_2 t^2 + \cdots + c_k t^k + \cdots$$

این ماتریس ، یعنی Φ(t)ماتریس گذر یا Transient Matrix یا ماتریس حل Solution Matrix نامیده می شود .

با در نظر گرفتن این فرض می توان نوشت :

$$\frac{d}{dt}x(t) = \frac{d}{dt}\left(\phi(t).x(0)\right) = A\phi(t).x_0 \Rightarrow (C_1 + 2c_2 t + 3c_3 t^2 + \cdots + kc_k t^{k-1} + \cdots).x_0 =$$

$$\left(A + AC_1 t + Ac_2 t^2 \cdots + Ac_k t^k + \cdots\right)x_0$$

با برابر قرار دادن ضرایب توانهای مشابه t در طرفین تساوی می توان نوشت :

یعنی می توان نوشت :

$$\begin{cases} c_1 = A \\ c_2 = \frac{1}{2}Ac_1 = \frac{1}{2}A^2 = \frac{1}{2!}A^2 \\ \vdots \\ c_k = \frac{1}{k!}A^k \end{cases} \Rightarrow \phi(t) = I + At + \frac{1}{2!}A^2t^2 + \cdots + \frac{1}{k!}A^kt^k \cdots = e^{At}$$

یعنی حل همگن معادله $\dot{X} = AX$ عبارتست از : $x(t) = \phi(t).x_0 = e^{At}x_0$

بدست آوردن ماتریس e^{At} از روی ماتریس A کار راحتی نیست ، زیرا باید ماتریس A تعداد n بار به توان برسد . اگر ماتریس A قطری باشد ، می توان نوشت ؛

$$A = \begin{bmatrix} P1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & P2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & Pm \end{bmatrix} \Rightarrow A^2 = \begin{bmatrix} P1^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & P2^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & Pm^2 \end{bmatrix} \Rightarrow A_k = \begin{bmatrix} P1^k & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & P2^k & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & Pm^k \end{bmatrix}$$

$$\phi(t) = e^{At} = I + At + \frac{1}{2!}A^2t^2 + \cdots + \frac{1}{k!}A^kt^k \cdots = e^{At} = \begin{bmatrix} e^{P1^k} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e^{P2^k} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & e^{Pm^k} \end{bmatrix}$$

$$e^{-P_it} = 1 + P_it + \frac{1}{2!}P_i^{\,2}t^2 + \cdots + \frac{1}{k!}P_i^{\,k}t^k \cdots$$

اگر ماتریس A دارای مقادیر ویژه تکراری باشد ، می توان نوشت ؛

$$A=\begin{bmatrix}P & 0\\ 0 & P\end{bmatrix}$$

در اینصورت باید برای e^{At} فرمول خاصی را تعیین نمود ؛

$$A=\begin{bmatrix}P & 0\\ 0 & P\end{bmatrix}\Rightarrow A^2=\begin{bmatrix}P^2 & 2P\\ 0 & P^2\end{bmatrix} \quad \text{و} \quad A^3=\begin{bmatrix}P^3 & 3P^2\\ 0 & P^3\end{bmatrix} \quad \text{و} \quad A^k=\begin{bmatrix}P^k & kP^{k-1}\\ 0 & P^k\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow e^{At}=I+At+\frac{1}{2!}A^2t^2+\cdots+\frac{1}{k!}A^kt^k\cdots=$$

$$\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}Pt & t\\ 0 & Pt\end{bmatrix}+\frac{1}{2!}\begin{bmatrix}P^2t^2 & 2Pt^2\\ 0 & P^2t^2\end{bmatrix}+\cdots+\frac{1}{k!}\begin{bmatrix}P^kt^k & kP^{k-1}t^k\\ 0 & P^kt^k\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}e^{pt} & te^{pt}\\ 0 & e^{pt}\end{bmatrix}$$

در حالت کلی نیز برای ماتریس های A می توان آنها را در ابتدا قطری نمود و سپس e^{At} را با استفاده از فرمول مورد بحث در این قسمت بدست آورد .

$$\phi(t)=e^{At}=I+At+\frac{1}{2!}A^2t^2+\cdots+\frac{1}{k!}A^kt^k\cdots$$

فرض می کنیم متغیر حالت جدید $X^*(t)$ بصورتی است که ماتریس حالت آن قطری است و ارتباط بین $X(t)$ و $X^*(t)$ از طریق ماتریس تبدیل T ایجاد شده است ، یعنی ؛

$$X(t)=TX^*(t) \qquad or \qquad X^*(t)=T^{-1}X(t)$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}X^*(t)=T^{-1}ATX^*(t)=\lambda X^*(t) \qquad\qquad X^*(0)=T^{-1}X_0$$

فرض بر اینست که $T^{-1}AT$ قطری باشد .

با فرض قطری بودن $\lambda = T^{-1}AT$ می توان نرشت :

$$\lambda = T^{-1}AT = \begin{bmatrix} P1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & P2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & Pm \end{bmatrix}$$

حال می توان حل معادله را بصورت مقابل ارائه نمود :

$$X^*(t) = e^{\lambda t} x^*(0) \quad and \quad e^{\lambda t} = \begin{bmatrix} e^{P_1 t} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e^{P_2 t} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & e^{P_m t} \end{bmatrix}$$

$$X(t) = TX^*(t) = T\left[e^{\lambda t} x^*(0)\right] = Te^{\lambda t}T^{-1}X_0$$

با توجه به معادله $X(t) = e^{At}X_0$ می توان نوشت ؛ $e^{At} = Te^{\lambda t}T^{-1}$

می توان نشان دادکه ماتریس قطری λ یک ماتریس مربع قطری است که اجزای قطری آن همان مقادیر ویژه ماتریس A و ماتریس مربع T ماتریس متشکل از n ستون است که هر ستون آن یک بردار ویژه ماتریس A است .

اثبات تین موضوع و مثالهای مربوط به آن در فصل ۴ کتاب آقای دکتر غفاری آمده است .

همچنین یک راه کلی دیگر برای تعیین e^{At} استفاده از تبدیل لاپلاس می باشد :

$$\frac{d}{dt}X(t) = A.X(t) \quad \text{و} \quad X(0) = X_0$$

$$\Rightarrow SX(s) - X_0 = AX(s) \Rightarrow X(s) = \left[(SI-A)^{-1}X_0\right] \Rightarrow x(t) = L^{-1}\left[(SI-A)^{-1}X_0\right] = L^{-1}\left[(SI-A)^{-1}\right]X_0$$

قبلا نیز داشتیم : $x(t) = \phi(t).x_0 = e^{At}x_0$

با مقایسه دو رابطه اخیر می توان نوشت : $e^{At} = L^{-1}\left[(SI-A)^{-1}\right]$

مقادیر ویژه در صفحه مختلط و رفتارهای مربوطه به هر کدام از آنها : همانطوریکه قبلا گفته شده است ، معادله $\det(SI-A)=0$ یا $\det(\lambda I - \lambda) = 0$ رابطه مشخصه یک سیستم کنترل می باشد .

فرض کنید λ ها همانی است که معادله را برابر صفر می کند و با X روی شکل نشان داده شده است .

-

رفتار سیستم با در نظر گرفتن ورودی (تعیین جواب خصوصی) :

اول : سیستم مرتبه یک :

$$\dot{x}(t) = ax + bu(t) \qquad x(0) = x_0$$

$$x(t) = x_h(t) + x_p(t) \qquad x_h(t) \equiv \text{hom}\,ogenous = e^{at}x_0 \quad \text{و} \quad x_p(t) \equiv particular$$

یک جواب خصوصی می تواند عبارت مقابل باشد ؛ $x_p(t) = e^{at}P(t)$

برای تعیین $P(t)$ می توان نوشت (جایگذاری می کنیم) :

$$ae^{at}P(t) + e^{at}\dot{P}(t) = ae^{at}P(t) + bu(t) \Rightarrow \dot{P}(t) = e^{-at}bu(t) \Rightarrow P(t) = \int_0^t e^{-a\tau}bu(\tau)d\tau$$

$$\Rightarrow x_p(t) = e^{at}\int_0^t e^{-a\tau}bu(\tau)d\tau = \int_0^t e^{a(t-\tau)}bu(\tau)d\tau$$

$$\Rightarrow x(t) = e^{at}x_0 + \int_0^t e^{a(t-\tau)}bu(\tau)d\tau$$

در این قسمت برای مثال ، مثالهای ۴-۷و۴-۸و۴-۹وتفسیر انتگرال کانولوشن (ثفحات ۱۸۲ تا ۱۹۱ کتاب آقای دکتر غفاری توضیح داده شود .)

دوم : برای یک سیستم مرتبه n ام :

فعلا فرض می کنیم سیستم SISO (یک ورودی – یک خروجی) است : (می توانیم چند متغیر حالت داشته باشیم .)

$$\dot{X} = AX + bU \qquad y = CX + dU \qquad X(0) = X_0$$

$$X(t) = e^{At}X_0 + X_p(t)$$

$$X_p(t) = \phi(t).P(t) = e^{At}P(t)$$

حال باید $P(t)$ که یک تابع برداری است را بدست آوریم : با مشتق گیری داریم ؛

$$\begin{cases} \dot{X}_p(t) = Ae^{At}P(t) + e^{At}\dot{P}(t) \\ \dot{X}_p(t) = AX_p(t) + bU(t) \end{cases} \Rightarrow Ae^{At}P(t) + e^{At}\dot{P}(t) = Ae^{At}P(t) + bU(t)$$

$$\Rightarrow \dot{P}(t) = e^{-At}bU(t) \Rightarrow P(t) = \int_0^t e^{-A\tau}bU(\tau)d\tau$$

با قرار دادن در معادله اصلی می توان نوشت ؛

$$X_p(t) = e^{At}\int_0^t e^{-A\tau}bU(\tau)d\tau = \int_0^t e^{A(t-\tau)}bU(\tau)d\tau$$

$$X(t) = \underbrace{e^{At}X_0}_{\text{اثر شرایط اولیه با جواب همگن یا رفتار سیستم با ورودی صفر}} + \overbrace{\int_0^t e^{A(t-\tau)}bU(\tau)d\tau}^{\text{اثر ورودی بر رفتار سیستم یا جواب خصوصی یا رفتار سیستم با شرایط اولیه صفر}}$$

اثر ورودی بر رفتار سیستم یا جواب خصوصی یا رفتار سیستم با شرایط اولیه صفر

اثر شرایط اولیه با جواب همگن یا رفتار سیستم با ورودی صفر

خروجی نیز بصورت زیر تعیین می شود : $y(t) = Cx(t) + du(t) = ce^{At}X_0 + c\int_0^t e^{A(t-\tau)}bu(\tau)d\tau + du(t)$

- حل معادلات حالت کلی سیستم با استفاده از تبدیل لاپلاس : قبلا دیدیم که برای معادله حالت $\dot{X} = AX + bU$ می توان نوشت ؛

$$X(s) = (SI-A)^{-1}X_0 + (SI-A)^{-1}bU(s) \Rightarrow x(t) = e^{At}x_0 + L^{-1}\left[(SI-A)^{-1}bU(s)\right]$$

$$L^{-1}\left[(SI-A)^{-1}bU(s)\right] = \int_0^t e^{A(t-\tau)}bu(\tau)d\tau \Rightarrow x(t) = e^{At}x_0 + \int_0^t e^{A(t-\tau)}bu(\tau)d\tau$$

داشتیم ؛ $y = cx + du$

بنابراین ؛

$$Y(s) = \underbrace{c(SI-A)^{-1}x_0}_{\text{رفتار سیستم وقتی که ورودی صفر باشد .}} + \underbrace{c(SI-A)^{-1}bu(s)}_{\text{رفتار سیستم وقتی شربیط اولیه صفر باشد .}} + dU(s)$$

اگر شرایط اولیه صفر باشد ، یعنی $X_0 = 0$ می توان تابع تبدیل سیستم که همان $G(s)$ است را بدست آورد :

$$G(s) = c(SI-A)^{-1}b + d$$

پایداری سیستم های خطی :
همانطوریکه قبلا پایداری تعریف شد ،اگرخروجی یک سیستم دینامیکی به بی نهایت میل نکند و یک عدد معین شود ، این سیستم با توجه به خروجی مربوطه پایدار است . اگر خروجی در بین دو عدد معین تغییر کند و سیستم نتواند برای یک یا چند خروجی خود عدد خاصی را گزارش نماید ، سیستم پایدار نسبی یا پایداری بحرانی است .سیستم پایدار نسبی یا پایدار بحرانی می تواند تحت تاثیر یک عامل کوچک به یک سیستم پایدار نیز بدل شود .
پایداری یاناپایداری خاصیتی وابسته به خود سیستم است وبه ورودی یا پارامترهای اغتشاش ارتباطی ندارد البته قطبهای تابع ورودی یا تابع اغتشاش تاثیر مستقیم روی پاسخ حالت ماندگار دارد .
برای انکه یک سیستم کنترلی پایدار باشد ، باید قطبهای مدار یسته آن در سمت چپ صفحه اعداد مختلط قرار گیرد . اما همانطوریکه قبلا نیز توضیح داده شد ، اگر این قطبها خیلی نزدیک به محور موهومی باشند باعث ایجاد حالت پایدار بحرانی با پایدار نسبی خواهد شد و اگرقطبها خیلی به محوراعدادحقیقی ،درسمت چپ صفحه مختلط ، نزدیک باشند ، باعث ایجاد میرایی سریع خواهد شدکه این نیز مورد نظر طراح نیست بنابراین برای داشتن یک پاسخ مطلوب قرار گرفتن قطبهای مدار بسته در ناحیه نشان داده شده در شکل الزامی است . یک راه برای پایداری سیستم بدست آوردن و تغییرتمامی خروجی ها توسط معادلات ریاضی است . مثلا قبلا دیدیم که برای یک سیستم خطی مرتبه n که معادلات آن توسط معادلات حالت State-space Representation بیان شده است ،
می توان متغیرهای حالت وخروجی راباستفاده از فرمولهای مربوطه محاسبه نمود :

$$\dot{X} = AX(t) + BU(t) \qquad y(t) = CX(t) + DU(t) \qquad X(0) = X_0$$

$$X(t) = e^{At}X_0 + \int_0^t e^{A(t-\tau)}bU(\tau)d\tau \qquad y(t) = ce^{At}X_0 + c\int_0^t e^{A(t-\tau)}bU(\tau)d\tau + DU(t)$$

با استفاده از این دو معادله در صورتی که همه متغیر های حالت و خروجی ها بی نهایت نشوند و یک عدد معین بدست آید ، سیستم پایدار خواهد بود .درصورتیکه هرکدام از ایندو مثلا توابع سینوسی یا کسینوسی باشند ، سیستم دارای شرایط پایدار بحرانی یا پایدار نسبی خواهد بود .

در مورد سیستم های خطی ، پایداری زا می توان توسط تست روث – هارویتز Routh-Horwitz test نیز مورد بررسی قرار داد .

- پایداری یک سیستم خطی توسط روش روث- هارویتز :

همانطوریکه قبلا نیز اشاره شد ، معادله مشخصه یک سیستم نقش بسیار مهم در تحلیل یک سیستم کنترلی دارد . charactristic equation . $\det(SI - A) = 0$

همانطوریکه قبلا نیز گفته شد ، باید ریشه های این معادله دارای قسمت حقیقی منفی باشد تا سیستم پایدار شود . این معادله برای یک سیستم از مرتبه n بصورت چند جمله ای از درجه n نوشته شود .

$$a_0S^n + a_1S^{n-1} + a_2S^{n-2} + \cdots + a_{n-1}S^1 + a_n = 0$$

شرط اول یا لازم برای پایداری اینست که تمام ضرایب مثبت باشند :

$$a_0, a_1, a_2, \cdots, a_{n-1}, a_n \qquad a_i \quad ; i = 0,1,2,....,n$$

شرط دوم برای پایداری در ادامه ارائه می شود .

قدم اول : ضرایب بصورت زیر نوشته شوند ؛

$$\begin{matrix} a_0 & a_2 & a_4 & \cdots & a_n & 0 \\ a_1 & a_3 & a_5 & \cdots & 0 & 0 \end{matrix}$$

یعنی اگر n زوج باشد، a_n در سطر اول و اگر n فرد باشد ، a_n در انتهای سطر دوم قرارمیگیرد.

قدم دوم : سطر سوم را بصورت زیر می نویسیم ؛

$$\left.\begin{matrix} a_0 & a_2 & a_4 & \cdots & a_n & 0 \\ a_1 & a_3 & a_5 & \cdots & 0 & 0 \\ b_1 & b_2 & b_3 & \cdots & b_n & 0 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow b_1 = \frac{a_1 a_2 - a_0 a_3}{a_1} \qquad b_2 = \frac{a_1 a_4 - a_0 a_5}{a_1} \qquad b_3 = \frac{a_1 a_6 - a_0 a_7}{a_1}$$

قدم سوم :سطر چهارم را نیز مثل سطر سوم می نویسیم ؛

$$\left.\begin{matrix} a_0 & a_2 & a_4 & \cdots & a_n & 0 \\ a_1 & a_3 & a_5 & \cdots & 0 & 0 \\ b_1 & b_2 & b_3 & \cdots & b_n & 0 \\ c_1 & c_2 & c_3 & \cdots & c_n & 0 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow c_1 = \frac{b_1 a_3 - a_1 b_2}{b_1} \qquad c_2 = \frac{b_1 a_5 - a_1 b_3}{b_1} \qquad c_3 = \frac{b_1 a_7 - a_1 b_4}{b_1}$$

قدم چهارم تا آخر : قدم سوم را به تعداد n+1 بار تکرار نموده تا اولین عنصر سطر n+2 صفر شود .
شرط دوم برای پایداری اینست که تمامی اعداد ستون اول از سطر اول با سطر n+1 ام مثبت باشند .
اگر همه اعداد ستون اول مثبت نباشند به تعداد تغییر علامتها ، از مثبت به منفی ، و از منفی به مثبت ، نشاندهنده ریشه های ناپایداری می باشند .

مثال : مطلوب است تعیین پایداری سیستمی که معادله مشخصه آن عبارتست از :

$$9S^7+3S^6+48S^5+14S^4+64S^3+14S^2+14S+2=0$$

برای حل می توان نوشت ؛

S^7	9	48	64	14	0
S^6	3	14	14	2	0
S^5	6	22	8	0	
S^4	3	10	2	0	
S^3	2	4	0		
S^2	4	2	0		
S^1	3	0			
S^0	2	0			

بنابراین سیستم پایدار است .

مثال : یک سیستم ناپایدار ؛

$$S^4+2S^3+S^2+4S+4=0$$

S^4	1	1	4	0
S^3	2	4	0	0
S^2	-1	4	0	
S^1	12	0		
S^0	4	0		

شرط لازم براورده شده است . ستون اول دو بار تغییر علامت داده است ،
بنابراین دو ریشه دارای مقدار حقیقی مثبت می باشند .

اگر برای مسئله ای اولین عضو یک سطر برابر صفر شود ، نشان می دهد که سیستم حداقل یک ریشه ناپایدار روی محور موهومی دارد (پایداری بحرانی) . همچنین اگر برای مسئله ای اولین عضو یک سطر برابر صفر شود ، آنوقت نمی توان روش روث – هارویتز را ادامه داد . چون تقسیم بر صفر (یا بی نهایت) بوجود می اید .بر اساس این روش می توان مشکل را به سه طریق حل نمود :

روش اول : قرار دادن مقدار بسیار کوچک مثبت ε بجای صفر .

مثال :
$$S^5 + 2S^4 + 4S^3 + 8S^2 + 3S + 2 = 0$$

S^5	1	4	3	0
S^4	2	8	2	0
S^3	ε	2	0	0
S^2	$8-\frac{4}{\varepsilon}$	2	0	
S^1	$2-\frac{24}{8-\frac{4}{\varepsilon}}$	0		
S^0	2	0		

ستون اول دو بار تغییر علامت داده است .
بنابراین دو ریشه دارای مقدار حقیقی مثبت می باشند .

روش دوم : تبدیل S به 1/p در معادله مشخصه و حل آن .

مثال :
$$S^5 + 2S^4 + 4S^3 + 8S^2 + 3S + 2 = 0$$

این بار این مسئله را از این روش حل می کنیم ؛

جایگذاری می کنیم ؛

$$S \to 1/\rho \Rightarrow 1/\rho^5 + 2\,1/\rho^4 + 4\,1/\rho^3 + 8\,1/\rho^2 + 3\,1/\rho + 2 = 0$$

$$\Rightarrow 2\rho^5 + 3\rho^4 + 8\rho^3 + 4\rho^2 + 2\rho + 1 = 0$$

بنابراین ؛

ρ^5	2	8	2	0
ρ^4	3	4	1	0
ρ^3	$16/3$	$4/3$	0	0
ρ^2	$13/3$	1	0	
ρ^1	$-4/3$	0	0	
ρ^0	0	0	0	

دو بار تغییر علامت داده است ، بنابراین دارای
دو ریشه با مقدار حقیقی مثبت و ناپایدار ی سیستم .

روش سوم : ضرب نمودن معادله مشخصه در عبارت S+1 .

مثال : حال مسئله قبل را با روش سوم حل می کنیم ؛ $S^5 + 2S^4 + 4S^3 + 8S^2 + 3S + 2 = 0$

$$\begin{cases} S^5 + 2S^4 + 4S^3 + 8S^2 + 3S + 2 = 0 \\ \xrightarrow{*(S+1)} S^6 + 3S^5 + 6S^4 + 12S^3 + 11S^2 + 5S + 2 = 0 \end{cases}$$

S^6	1	6	11	2	0
S^5	3	12	5	0	0
S^4	2	$28/3$	2	0	
S^3	-12	2	0	0	
S^2	$29/3$	2	0		
S^1	$130/3$	0	0		
S^0	2	0	0		

ستون اول دو بار تغییر علامت داده ،
بنابراین دو ریشه دارای مقدار حقیقی مثبت داریم وسیستم
ناپایدار می باشد .

اگر در یک مثال همه اعضای یک سطر برابر صفر شوند ، برای ادامه دادن باید از معادله تشکیل دهنده سطر قبل از این سطر مشتق گرفته و آنرا (ضرایب آن معادله را) بجای سطر صفر قرار داده و روش را ادامه دهیم .

مثال : پایداری سیستم با معادله مشخصه مقابل را بررسی نمایید .

$$S^4 + 2S^3 + 11S^2 + 18S + 18 = 0$$

S^4	1	11	18	0
S^3	2	18	0	0
S^2	2	18	0	
S^1	0	0		
S^0	0	0		

سطر چهارم صفر است ، در نتیجه ؛

$$S^2 \quad 2 \quad 18$$

$$\Rightarrow 2S^2 + 18 = 0 \Rightarrow \frac{d}{ds}\left(S^2 + 9 = 0\right) \Rightarrow 2S + 0 = 0 \Rightarrow 2 \quad 0$$

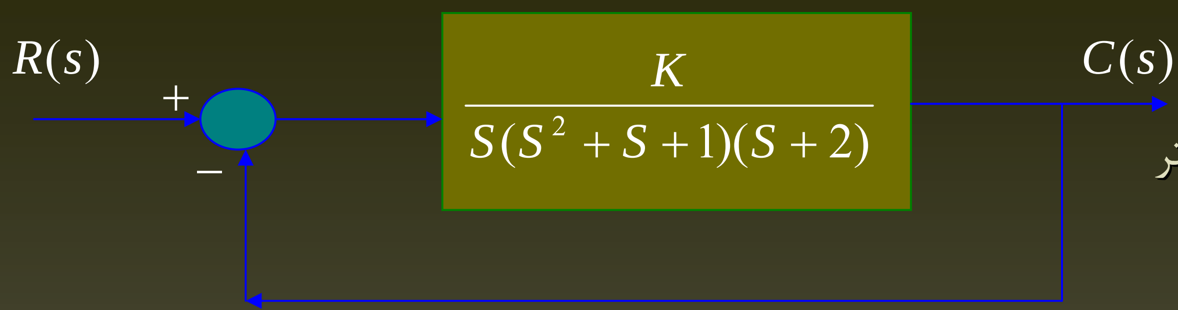
S^4	1	11	18	0
S^3	2	18	0	0
S^2	2	18	0	
S^1	2	0		
S^0	0	0		

بنابراین این سیستم پایدار می باشد .

کاربرد معیار پایداری روث – هارویتز در تحلیل سیستم های کنترلی :

چون این معیارراهی رابرای پایدار شدن سیستم های پایدارنسبی با ناپایدار ارائه نمی کند ،کاربرد معدودی دارد .ولی این معیار می تواند اثریک پارامترخاص (ضریب چند جمله ای معادله مشخصه) را روی پایداری

بررسی نماید . بعنوان مثال ؛



در این سیستم می خواهیم بازه پارامتر k را برای پایداری بدست آوریم :

$$\frac{C(s)}{R(s)}=\frac{K}{S(S^2+S+1)(S+2)+K} \Rightarrow S^4+3S^3+3S^2+2S+K=0$$

S^4	1	3	K	0
S^3	3	2	0	0
S^2	$7/3$	K	0	
S^1	$2-9/7\,K$	0		
S^0	K			

باید برای پایداری $K>0$ و همچنین :

$$2-\frac{9}{7}K>0 \Rightarrow 14/9 > K > 0$$

اگر $K=\frac{14}{9}$ باشد ، یک عضو از ستون اول برابر صفر ایت .
یعنی سیستم دارای شرایط پایداری بحرانی است ودامنه نوسانات (بصورت ثابت) تا بی نهایت ادامه دارد .

مثال : برای بررسی پایداری ؛

$$S^5+S^4+10S^3+72S^2+152S+240=0$$

$$S^6+3S^5+2S^4+9S^3+5S^2+12S+20=0$$

$$S^4+S^3+2S^2+2S+5=0$$

$$S^5+2S^4+3S^3+4S^2+7S+5=0$$

$$S^4+2S^3+11S^2+18S+18=0$$

$$S^4+7S^3+15S^2+(25+k)S+2k=0$$

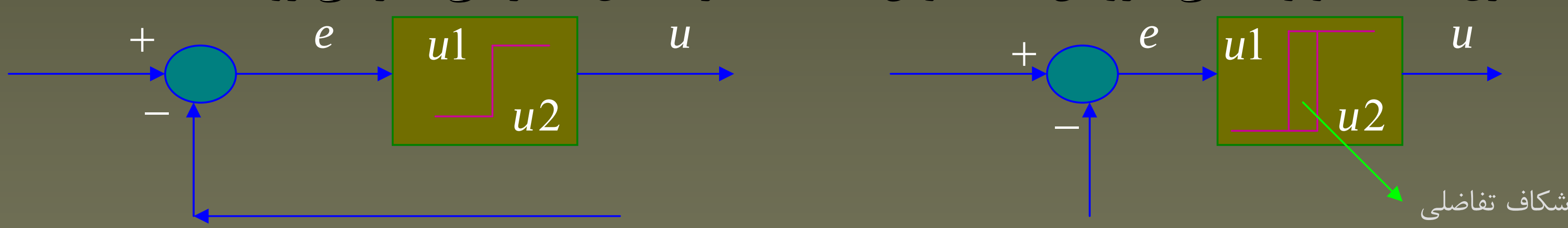
کنترل مدار بسته :قبل ازهر چیزی باید انواع کنترل کننده ها ی یک سیستم کنترلی مدار بسته را شناخت

انواع کنترل کننده ها بر حسب عملکرد کنترلی :

یک سیستم کنترلی مدار بسته صنعتی در شکل مقابل نشان داده شده است :

انواع کنترل کننده ها عبارتند از :

۱- کنترل کننده دو وضعیتی (روشن – خاموش): عمدتا در مسائل الکتریکی بکار می روند .

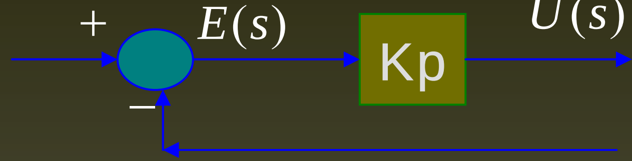


$$u(t) = u1 \quad ; \quad e(t) > 0$$

$$u(t) = u2 \quad ; \quad e(t) < 0$$

شکاف تفاضلی : فاصله ای که سیگنال خطا باید طی کند تا تغییرحالت رخ دهد .قرار دادن شکاف تفاضلی به این علت است که بایدحالت اشباع برای وضعیتهای خاموش یاروشن ایجاد شود و بعد حالت عوض شود. اگر شکاف تفاضلی کم باشد،تعداد روشن و خاموش بیشتری اتفاق می افتدوالبته به سیستم لطمه می زند.

۲- کنترل کننده تناسبی : عمل یک کنترل کننده تناسبی بصورت زیر می باشد :



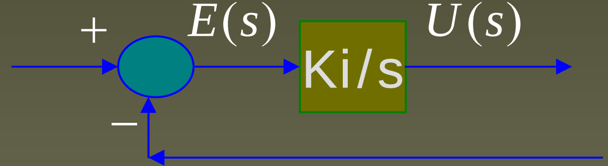
$$u(t) = Kp.e(t) \Rightarrow \frac{U(s)}{E(s)} = Kp$$

Kp بهره تناسبی Proportional Gain است .

این کنترل کننده در واقع یک تقویت کننده با بهره قابل تنظیم است .

۳- کنترل کننده انتگرالی :

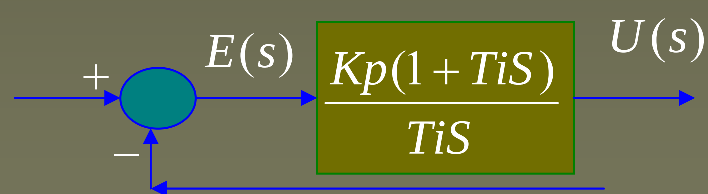
عمل یک کنترل کننده انتگرالی بصورت زیر می باشد :



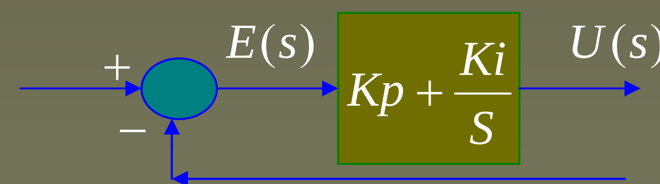
$$du(t) = Ki.e(t)dt \Rightarrow u(t) = Ki\int_0^t e(t).dt \Rightarrow \frac{U(s)}{E(s)} = \frac{Ki}{S}$$

Ki ضریب بهره انتگرالی که قابل تنظیم است .

۴- کنترل کننده تناسبی- انتگرالی :

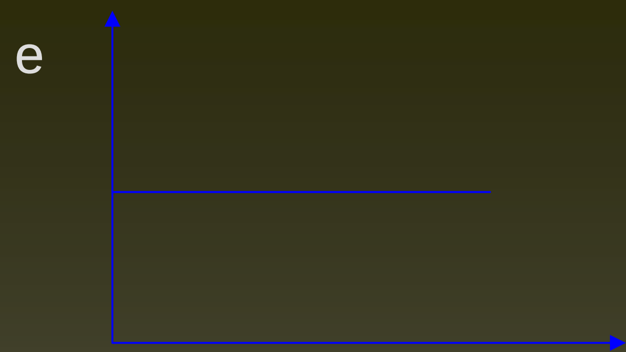


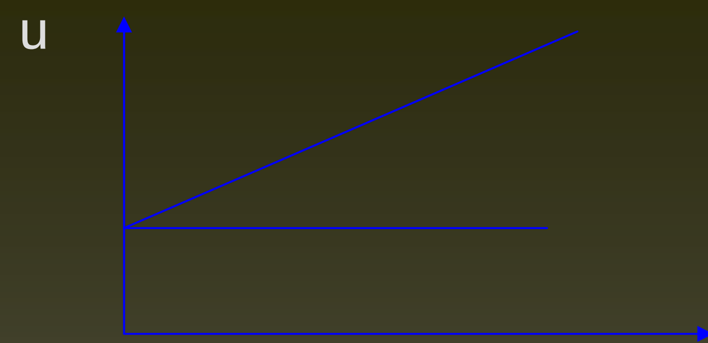
یا



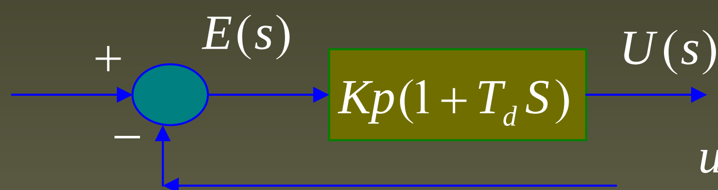
Kp بهره تناسبی و Ti زمان انتگرال گیری و هر دو پارامتر قابل تنضیم هستند .

$$u(t) = Kp.e(t) + \frac{Kp}{Ti}\int_0^t e(t)dt \Rightarrow \frac{U(s)}{E(s)} = Kp(1+\frac{1}{TiS})$$





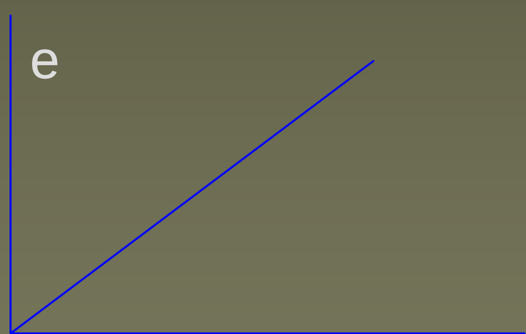
۵- کنترل کننده تناسبی – مشتقی :

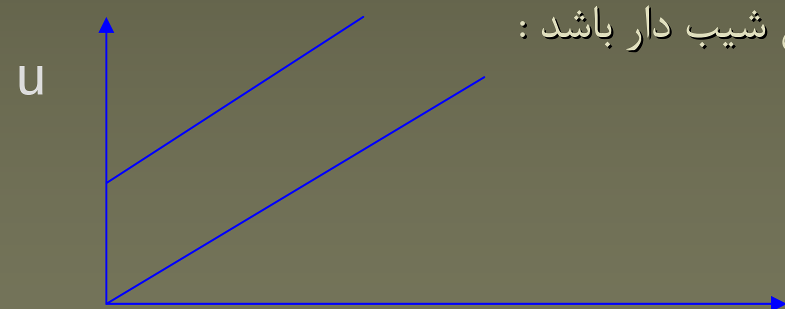


$$u(t) = Kpe(t) + Kp.T_d S \frac{de(t)}{dt} \Rightarrow \frac{U(s)}{E(s)} = Kp(1+T_d S)$$

Kp بهره تناسبی و T_d زمان مشتق و هر دو پارامتر قابل تنظیم هستند .

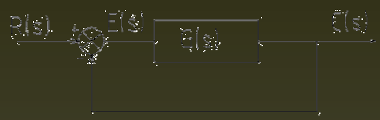
اگر سیگنال خطا تابع شیب دار باشد :





چون اثر کنترل کننده مشتقی فقط در حالت گذرا می باشد ، کنترل کننده مشتقی تنها استفاده نمیشود.

مثال- سیستم ارائه شده در شکل زیر را در نظر بگیرید، برای
این سیستم :



$$G(s)=\frac{K}{(s+1)(s+2)(s+3)(s+6)}$$

می باشد و نسبت میرائی آن ۰.۷۰۷ می باشد
. کنترلر PD را بگونه ای طراحی کنید که زمان نشست را با ضریبی از ۲ کاهش دهد
و سپس پاسخ حالت ماندگار و گذرا سیستم جبران شده و جبران نشده را مقایسه کنید .

حل :

$$\zeta = 0.707$$

$$G(s)=\frac{K}{(s+1)(s+2)(s+3)(s+6)}$$

حال با توجه به تابع تبدیل فوق، قطب غالب را از طریق نوشتن معادل سیستم رتبه دو آن، به فرم زیر را بدست میآوریم:

$$\frac{C}{R}=\frac{K}{s^4+12s^3+47s^2+72s+36+K}=\frac{A}{s+p}+\frac{B}{s+q}+\frac{\omega_n^2}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}$$

$$\rightarrow \quad \omega_n = 1.47 (rad/s)$$

قطب غالب = $-\zeta\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2} = -1.04 \pm 1.04j$

: حال Kرا با توجه به شرط اندازه به صورت زیر بدست می آوریم

$$\left|\frac{K}{(s+1)(s+2)(s+3)(s+6)}\right|_{-1.04+1.04j} = 1$$

$$\rightarrow K = 16.6$$

با توجه به اینکه زمان نشست باید با ضریبی از ۲ کاهش یابد و با توجه به ثابت بودن
ζ پسω باید ۲ برابر شود

$$\omega_n)_{new} = 2\times 1.47 = 2.94$$

در کنترلر PD

$$G_c = K_c(1+T_d s)$$

$$\zeta = 0.707$$

$$\omega_n = 2.94$$

در سیستم جبران شده $\frac{C}{R}=\frac{G_cG}{1+G_cG}$

$$\rightarrow \frac{C}{R}=\frac{G_cG}{1+G_cG}=\frac{K\cdot K_C(1+T_ds)}{(s+1)(s+2)(s+3)(s+6)+K\cdot K_C(1+T_ds)}=\frac{A}{s+q}+\frac{B}{s+p}+\frac{\omega_n^{\,2}}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^{\,2}}$$

$$12=2\zeta\omega_n+p+q \qquad \rightarrow p+q=7.84$$

$$47=\omega_n^{\,2}+(p+q)2\zeta\omega_n+pq \qquad \rightarrow pq=5.76$$

$$72+K\cdot K_CT_d=\omega_n^{\,2}(p+q)+2\zeta\omega_n pq \qquad \rightarrow K\cdot K_CT_d=19.71$$

$$36+K\cdot K_C=pq\omega_n^{\,2} \qquad \rightarrow K\cdot K_C=13.787 \qquad \rightarrow Gain=13.787$$

Gain = 13.787

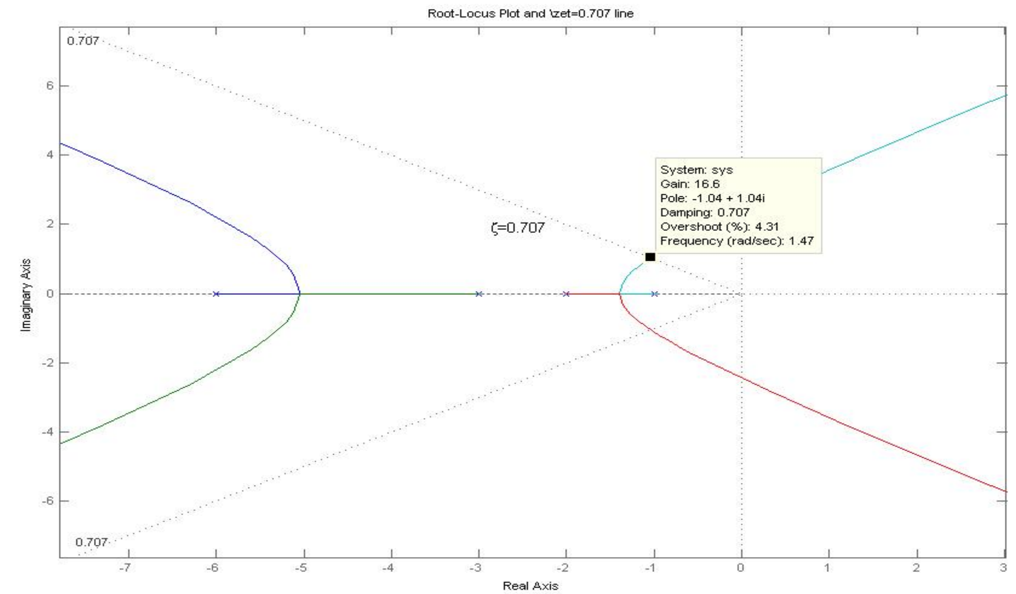
$$\Rightarrow \begin{cases} T_d=\dfrac{19.71}{13.787}=1.43 \\ K_C=\dfrac{13.78}{16.6}=0.83 \end{cases}$$

$$\Rightarrow G_c\big|_{PD}=K_c(1+T_ds)=0.83(1+1.43s)$$

سیستم بدون کنترلر

حال برنامه زیر را با مطلب نوشته و نتایج زیر را می گیریم

```
num=[0  0  0  0  1];
den=[1  12  47  72  36];
rlocus(num,den);
v=[-8 8 -8 8];axis(v);axis('squar')
sgrid(0.707,[])
title('Root-Locus Plot and
\zet=0.707 line')
gtext('\zeta=0.707')
```



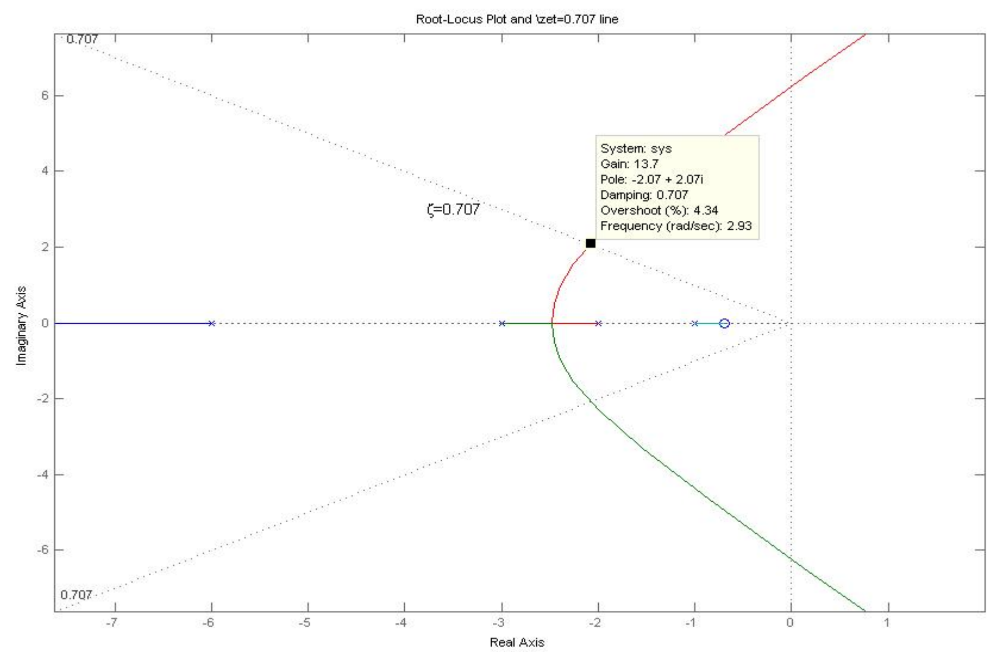
که همان طور که از نمودار پیداست

$$\rightarrow K = 16.6$$
$$\omega_n = 1.47 (rad/s)$$
$$pole = -1.04 \pm 1.04 j$$
$$\zeta = 0.707$$
$$overshoot = 4.31\%$$

سیستم با کنترلر PD

حال برنامه زیر را با مطلب نوشته و نتایج زیر را می گیریم:

```
num=[0  0  0  1.43 1];
den=[1  12  47  72  36];
rlocus(num,den);
v=[-8 8 -8 8];axis(v);axis('squar')
sgrid(0.707,[])
title('Root-Locus Plot and
\zet=0.707 line')
gtext('\zeta=0.707')
```



که همان طور که از نمودار پیداست :

$$\rightarrow K = 13.7$$

$$\omega_n = 2.93 (rad/s)$$

$$pole = -2.07 \pm 2.07 j$$

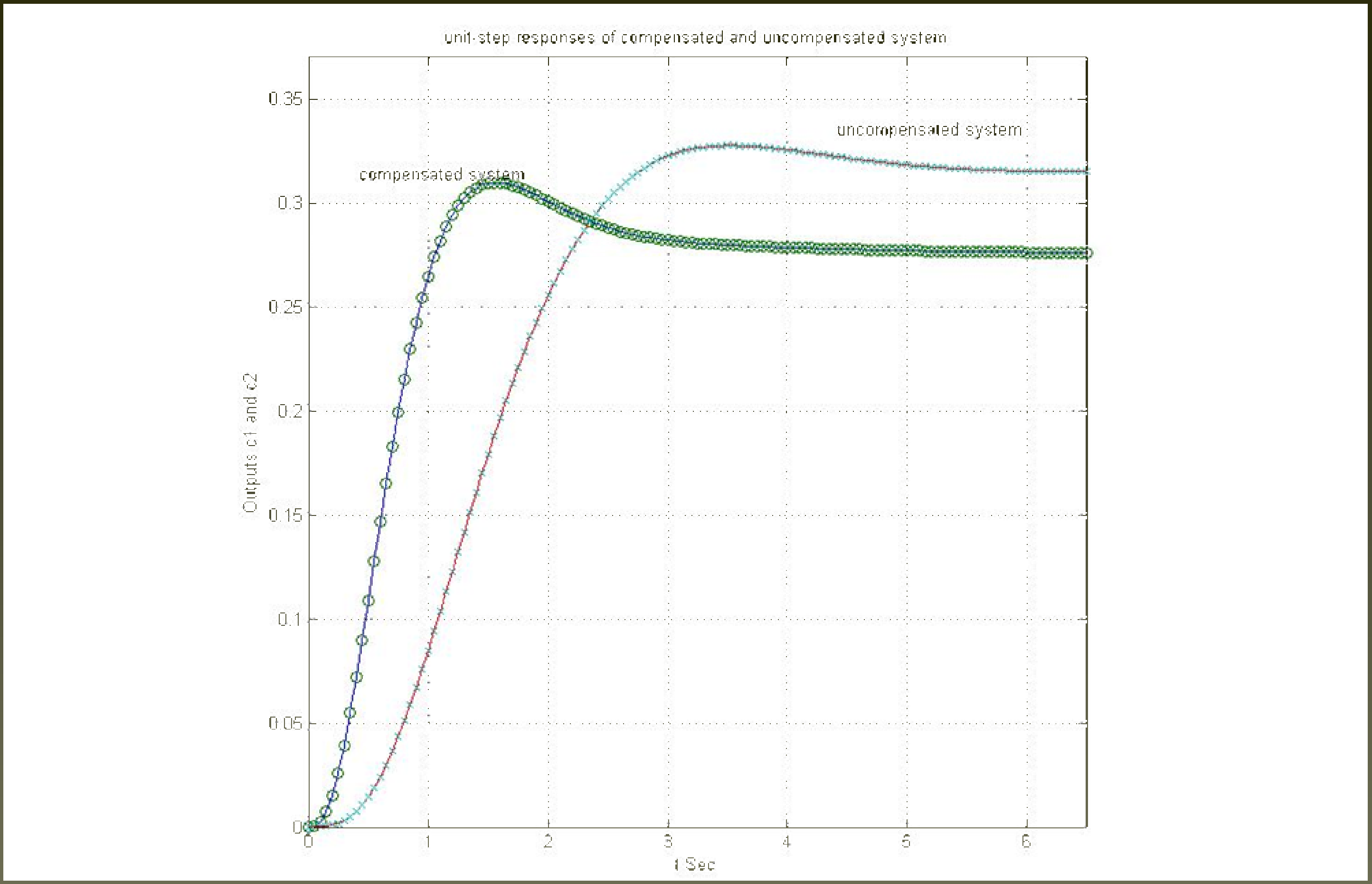
$$\zeta = 0.707$$

$$overshoot = 4.34\%$$

که با نتایج حل دستی یکی می باشد.

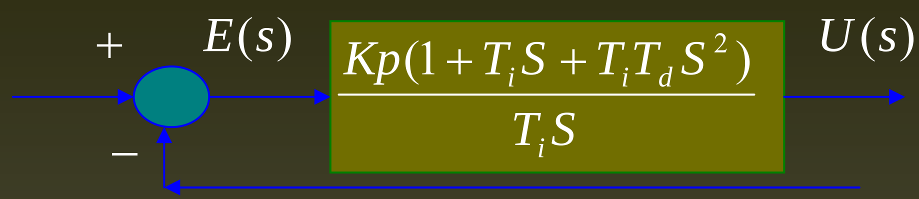
با توجه به برنامه زیر پاسخ پله سیستم با کنترلر و بدون کنترلر را رسم می کنیم :

```
numc=[0  0  0  19.6  13.7];
denc=[1  12  47  91.6  49.7];
num=[0  0  0  0  16.6];
den=[1  12  47  72  52.6];
t=0:0.05:6.5;
[c1,x1,t]=step(numc,denc,t );
[c2,x2,t]=step(num,den,t );
plot(t,c1,t,c1,'o',t,c2,t,c2,'x')
v=[0 6.5 0 0.37];axis(v);axis('square')
grid
title('unit-step responses of compensated and uncompensated system')
xlabel('t Sec')
ylabel('Outputs c1 and c2')
gtext('compensated system')
gtext('uncompensated system')
```



که همان طور که از نمودار پیداست زمان نشست سیستم جبران شده نسبت به زمان نشست سیستم جبران نشده کمتر است وسرعت پاسخ نیز زیادتر شده است . و ارتعاش ، سریع damp می شود .

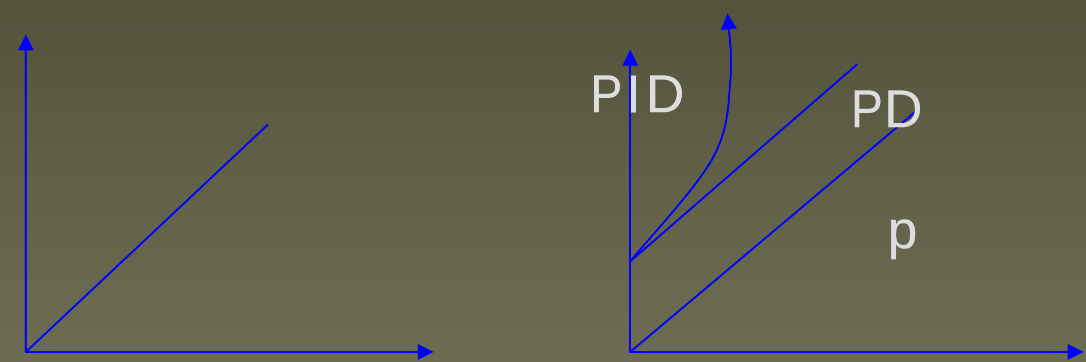
۶- کنترل کننده تناسبی – انتگرالی – مشتقی :



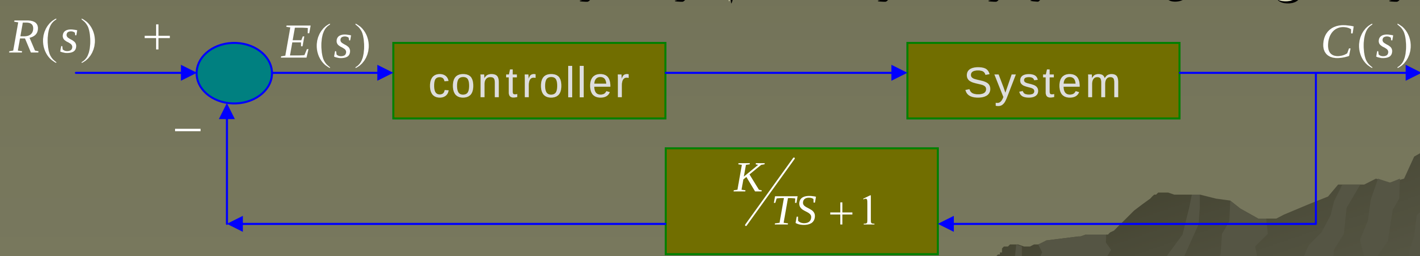
$$u(t) = Kp.e(t) + \frac{Kp}{T_i}\int_0^t e(t).dt + KpT_d\frac{de(t)}{dt} \Rightarrow \frac{U(s)}{E(s)} = Kp(1 + \frac{1}{T_iS} + T_dS)$$

Kp بهره تناسبی ، Ti زمان انتگرالگیری ، T_d زمان مشتق گیری و هر سه قابل تنظیم هستند .

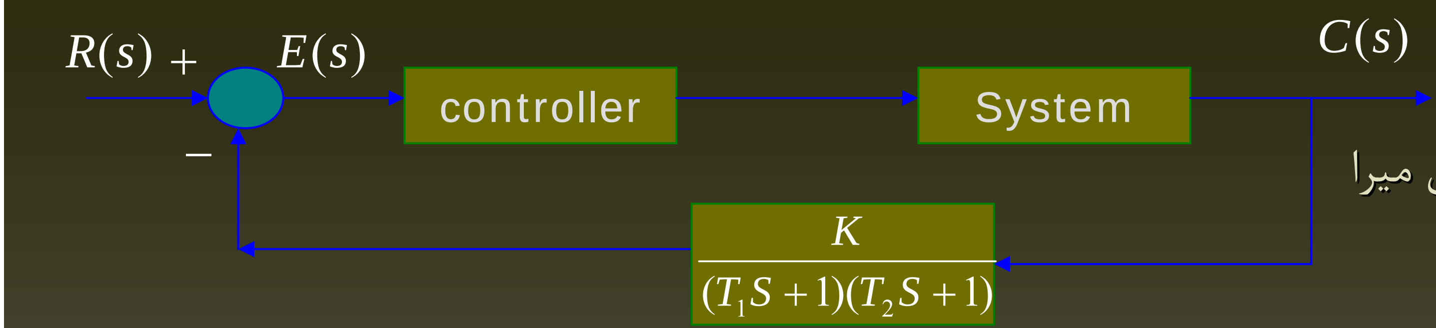
اگر سیگنال خطا تابع شیب باشد ؛



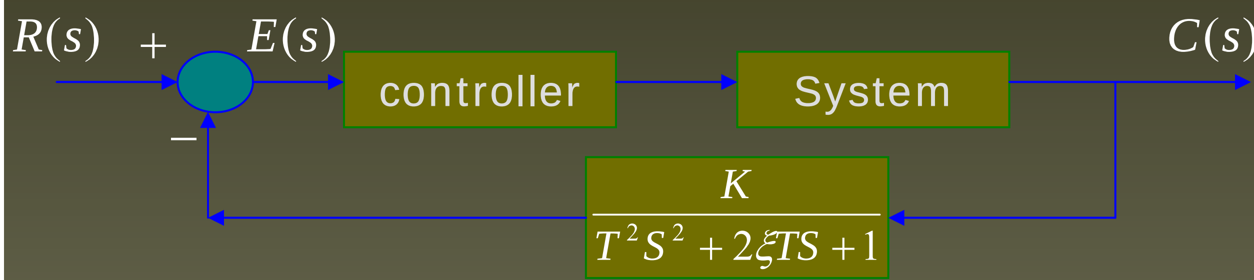
اثر ابزار اندازه گیری : ابزار اندازه گیر (حس کننده ها sensor) که درمدار فیدبک قرار می گیرند نیز خودشان ممکن است دارای تابع تبدیل باشند و بر عملکرد سیستم اثر بگذارند .



سنسور مرتبه اول

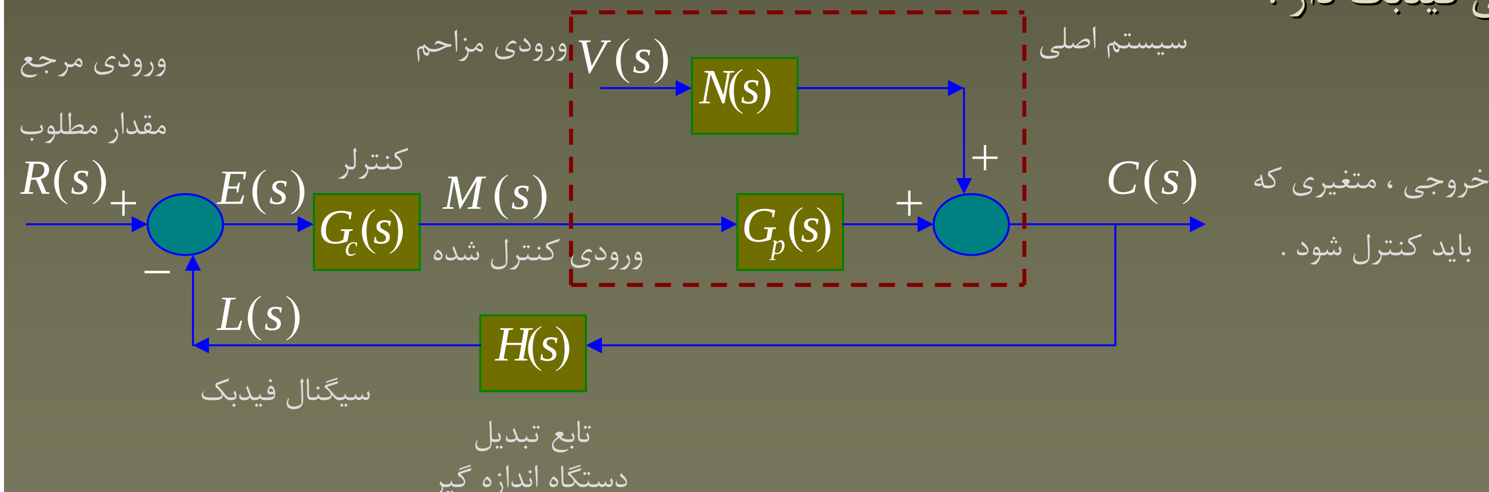


سنسور مرتبه دوم فوق میرا



سنسور مرتبه دوم زیر میرا

یک سیستم کنترلی فیدبک دار :



هدف : نزدیک شدن هرچه بیشترخروجی (متغیریکه بایدکنترل شود)به ورودی(مقدار مطلوب یاورودی مبنا).

سیستم کنترل فیدبک وقتی فعال می شود که خروجی به عللی از مقدار مطلوب دور شود . به این جهت به این جهت به ان سیستم کنترل خودکار یا اتوماتیک گفته می شود.چرا عکس العمل سیستم با خروجی از مقدار مطلوب خود دور می شود ؟به علت تعییر پارامترهای سیستم اصلی ونیزبه علت تاثیرورودی مزاحم درکنترل فیدبک ازطریق کم یازیاد نمودن ورودی کنترل شده با M(s) خروجی سیستم به مقدار مطلوب ان باز گردانده می شود . سیستم کنترلی فیدبک دار طوری طراحی می شود که :

۱- اثر ورودی مزاحم در ان کمتر از اثر ورودی مزاحم در سیستم مدار باز باشد .

۲- حساسیت سیستم کنترلی مداربسته نسبت به تغییرپارامترها کمترازحساسیت آن درمداربازباشد .

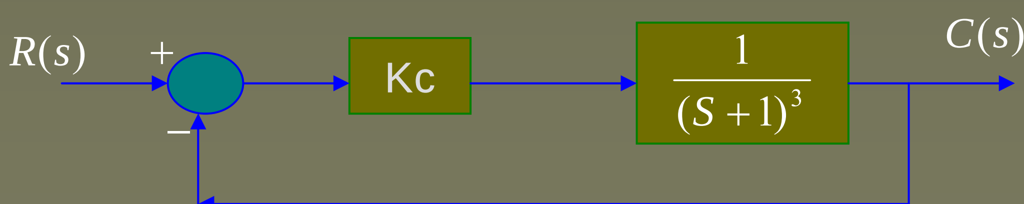
قبلا مثالی در صفحات ۸۳و۸۴و۸۵در این زمینه ارائه شده است.براساس ان می توان با بزرگ انتخاب کردن یک ضریب بهره اثر ورودی مزاحم را به حداقل رساند .

همچنین می توان توسط یک مثال نشان داد که : حساسیت سیستم مدار بسته نسبت به تغییر پارامترها بسیار پایین تراز حساسیت سیستم کنترلی مدار باز می باشد . (مثال صفحه ۲۷۸ کتاب دکتر غفاری)

همچنین می توان ادعا نمود که با استفاده از مدار فیدبک می توان پاسخ پایداریک سیستم غیر ارتعاشی را به ارتعاشی تبدیل نمود تا حول نقطه تعادل خود به ارتعاش با دامنه کم شونده برسد .

یک سیستم کنترلی فیدبک دارخطی هنگامی پایدار است که قطبهای حقیقی یاقسمتهای حقیقی قطبهای مختلط ان منفی باشند .

مثال : پایداری سیستم مدار بسته و خطای حالت ماندگار سیستم فیدبک دار زیر را بررسی نمایید .



$$C(s) = \frac{\dfrac{Kc}{(S+1)^3}}{1 + \dfrac{Kc}{(S+1)^3}} R(s) = \frac{Kc}{(S+1)^3 + Kc}$$

اگر ورودی یک تابع پله ای واحد باشد ، یعنی r(t)=1 یا R(s)=1/S یعنی نهایی خروجی مقدار C(t) باید برابر واحد شود .یعنی ؛

$$\lim_{t\to\infty} c(t)=\lim_{S\to 0} SC(s)= \lim_{S\to 0} S\frac{Kc}{(S+1)^3+Kc}\frac{1}{S}=\frac{Kc}{1+Kc}$$

اگر $Kc\to\infty$ ، خروجی با ورودی برابرخواهدشد .

Kc	1	4	9	99	999	∞
مقدار نهایی Kc	0.5	0.8	0.9	0.99	0.999	1

قسمت دوم مثال ؛ برای آنکه سیستم مدار بسته پایدار شود باید ریشه معادله مشخشه در سمت چپ محور موهومی قرار گیرد :

$$1+\frac{Kc}{(S+1)^3}=0\Rightarrow (S+1)^3+Kc=0\Rightarrow (S+1)^3=Kc(-1)=K_c e^{j(2n+1)\pi}$$

$$S+1=\sqrt[3]{Kc}e^{j\frac{(2n+1)}{3}\pi}\Rightarrow\begin{cases} n=0\Rightarrow P1=-1+\sqrt[3]{Kc}(\frac{1}{2}+j\frac{\sqrt{3}}{2}) \\ n=1\Rightarrow P2=-1-\sqrt[3]{Kc} \\ n=-1\Rightarrow P3=-1+\sqrt[3]{Kc}(\frac{1}{2}-j\frac{\sqrt{3}}{2}) \end{cases}\Rightarrow -1+\frac{1}{2}\sqrt[3]{Kc}<0\Rightarrow Kc<8$$

تحلیل خطای حالت ماندگار : طبق تعریف ؛ خطای حالت ماندگار ، تفاوت در حالت ماندگار مقادیر ورودی (در سیستم های کنترلی با فیدبک واحد) مبنا و خروجی است :

$$e_{ss} = \lim_{t \to \infty}[r(t) - c(t)] = r_0 - c(\infty) \Rightarrow e_{ss} = \lim_{t \to \infty} e(t) = \lim_{S \to 0} SE(s)$$

E(s) درحالت کلی(برای شکل بلوک دیاگرام سیستم نشان داده شده درصفحه ۱۲۶ همین جزوه)بصورت زیر بدست می اید :

$$E(s) = \frac{1}{1+G(s)}R(s) - \frac{N(s)}{1+G(s)}V(s) \qquad H(s) = 1$$

$$C(s) = \frac{G_c(s)G_p(s)}{1+G(s)}R(s) + \frac{N(s)}{1+G(s)}V(s)$$

همچنین داریم $G(s) = G_c(s)G_p(s)$ تابع تبدیل سیستم مدار باز .

بنابراین برای محاسبه خطای حالت ماندگار می توان مقدار رابطه فوق را به ازای $S \to 0$ بدست آورد .

حال برای حالت H(s)=1 می توان تابع تبدیل را به صورت زیر نیز ارائه نمود ؛

$$G(s) = K\frac{\prod(1+t_jS).\prod[1+2\xi_j(t_jS)+(t_jS)^2]}{S^n\prod(1+t_iS)\prod[1+2\xi_i(t_iS)+(t_iS)^2]}$$

T_j و T_i ثابتهای زمانی و اگر $\xi < 1$ باشند ،عوامل درجه ۲صورت و مخرج دارای ریشه های موهومی یعنی سیستم دارای قطبهای (مخرج) و صفرها (صورت) مختلط هستند .

در این رابطه اگر $N=0$ باشد ، تابع $G(s)$ را تابع نوع صفر می نامیم .
اگر $N=1$ باشد ، تابع $G(s)$ را تابع نوع یک می نامیم .
اگر $N=2$ باشد ، تابع $G(s)$ را تابع نوع دو می نامیم .
اگر $N=n$ باشد ، تابع $G(s)$ را تابع نوع N می نامیم .
بنابراین براساس این تعریف توابع پله ای (مثل ورودی های پله ای) توابع نوع یک هستند .

بنابراین اگر $R(s) = r_0/S$ تابع پله ای ورودی مبنا به مقدار r_0 و اگر $V(s) = V_0/S$ تابع پله ای ورودی به مقدار V_0 باشند ؛ می توان نوشت :

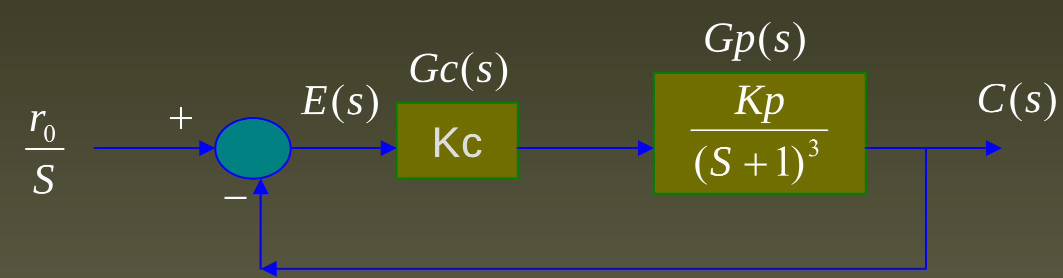
$$\lim_{t\to\infty} r(t) = \lim_{S\to 0} SR(s) = r_0 \qquad \lim_{t\to\infty} V(t) = \lim_{S\to 0} SV(s) = V_0$$

بنابراین می توان ادعا نمود که : خطای حالت ماندگار موقعی ایجاد می شود که در یک سیستم فیدبک با تابع تبدیل مدار باز از نوع صفر که تحت تاثیرورودی مبنا از نوع یک قرار گرفته است و مقدار آن برابر است با :

$$e_{ss} = e(\infty) = \lim_{S\to 0}[SE(s)] = \lim_{S\to 0} S\frac{R(s)}{1+G(s)} = \frac{r_0}{1+K}$$

تعریف offset: مقدارخطای حالت ماندگار یک سیستم کنترلی فیدبک داراباتابع تبدیل نوع صفرکه تحت ورودی مبنا تابع نوع یک قرار گرفته است ، offset نامیده می شود . البته با یک مثال نشان می دهیم که اگر در تابع تبدیل کنترلر Gc(s) یک کنترلر انتگرالگیر قرار دهیم ، می توان offset را از بین برد.

مثال : با لنتخاب یک کنترلر انتگرالگیر برای سیستم مقابل خطای حالت ماندگار را به صفر برسانید .



$$F(s) = Gc(s).Gp(s) = \frac{Kc.Kp}{(S+1)^3}$$

چون تابع تبدیل مدار باز از نوع صفر و ورئدی مبنا از نوع یک است ، بنابراین Offset داریم و مقدار آن بصورت زیر محاسبه می شود :

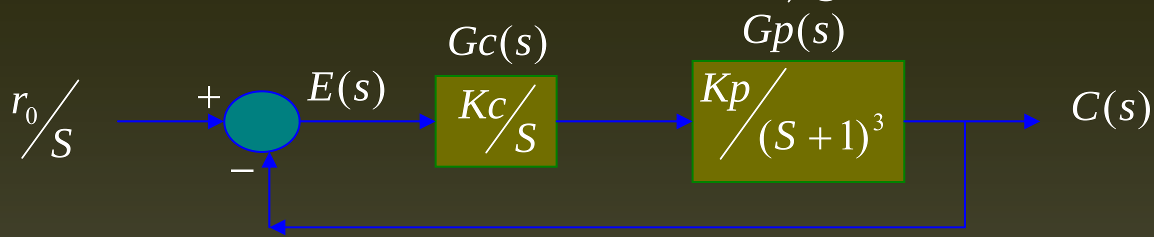
$$E(s) = R(s) - C(s) \Rightarrow \frac{E(s)}{R(s)} = 1 - \frac{C(s)}{R(s)} = 1 - \frac{G(s)}{1+G(s)} = \frac{1}{1+G(s)} \Rightarrow E(s) = \frac{1}{1+G(s)}.R(s)$$

$$\Rightarrow E(s) = \frac{1}{1+G(s)}\frac{r_0}{S} \Rightarrow SE(s) = \frac{r_0}{1+G(s)} \Rightarrow SE(s) = \frac{r_0}{1+\frac{KcKp}{(S+1)^3}}$$

$$e_{ss} = e(\infty) = \lim_{S \to 0}[SE(s)] = \frac{r_0}{1+KcKp}$$

$$c(\infty) = r_0 - e_{ss} = r_0 - \frac{r_0}{1+KcKp} = \frac{KcKp}{1+KcKp} r_0$$

حال بجای کنترلر تناسبی Kc یک کنترلر انتگرالگیر Kc/S در نظر می گیریم :



$$G(s)=Gc(s).Gp(s)=\frac{Kc.Kp}{S(S+1)^3}\Rightarrow e_{ss}=e(\infty)=\lim_{S\to 0}[SE(s)]$$

$$SE(s)=\frac{r_0}{1+G(s)}=\frac{r_0}{1+\dfrac{Kc.Kp}{S(S+1)^3}}=\frac{r_0S(S+1)^3}{KcKp+S(S+1)^3}$$

$$\Rightarrow \lim_{S\to 0}[SE(s)]=0 \qquad C(\infty)=r_0-e_{ss}=r_0$$

بطور کلی اگر تابع تبدیل مدار باز G(s) از نوع یک یابالاترباشدخطای حالت ماندگار برابرصفرخواهد شد .

انواع کنترلر های خطی :

proportional-Derivative , proportional &roportional – Derivative-Integral

ساختمان کنترلرهای خطی ارائه شوند .(برای نیمسال آینده)

توسط کنترلر proportional و بزرگ انتخاب نمودن ضریب بهره خروجی به ورودی نزدیکتر می شود.

(مثال ۲-۶ دکتر غفاری)

توسط کنترلرIntegral خطای حالت ماندگار سیستم را می توان صفر نمود .

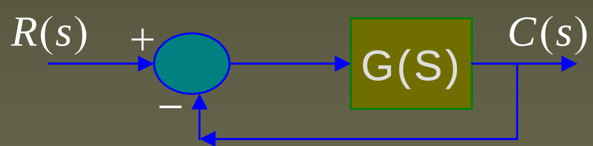
توسط کنترلر Derivativ سیستم مدار بسته را می توان پایدار نمود .

توسط توضیح مثالهای ۶-۷ و ۶-۸و ۶-۹ صفحات ۳۰۸ تا ۳۱۲ متاب دکتر غفاری .

روش مکان هندسی ریشه ها : The root-Locus Method

همانطوریکه قبلا نیز ذکر شد ، قطبهای حلقه بسته(یاریشه معادله مشخصه)نشاندهنده پایداری و رفتار دقیق یک سیستم کنترلی است .

معمولا در داخل معادله مشخصه پارامتری وجود دارد که با استفاده از آن مشخصات تابع تبدیل مدار باز (مثل صفرهاوقطبهای مدارباز) به مشخصات تابع تبدیل مداربسته مربوط می شود واین همان ضریب بهره یا K(Gain) می باشد .



$$1+G(s)=0$$

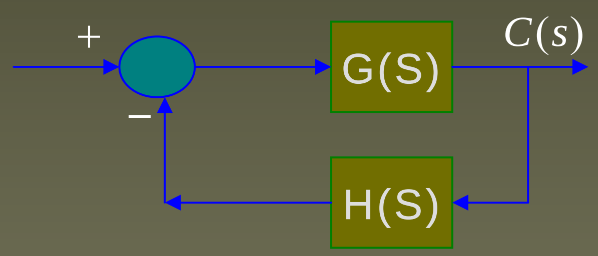
$$1+kG_0(s)=0 \qquad ; \qquad G_0(s)=\frac{\prod_{j=1}^{m}\left(S+Z_j\right)}{\prod_{i=1}^{n}\left(S+P_i\right)}$$

قبلا در مورد پایداری یک روش (روث-هارویتز) ارائه شد که براساس آن فقط متوجه می شویم که سیستم پایداراست یا نه؟ویا اینکه سیستم دارای شرایط پایداری مرزی می باشد یا خیر؟ اما حالا نیاز به این داریم که سیستم تا چه میزان به شرایط پایداری مرزی نزدیک است ؟ آیا با افزایش آن پارامتر به شرایط پایداری واقعی خواهیم رسید ؟ با افزایش آن پارامتر رفتار سیستم به چه صورتی تغییر می کند ؟ همانطوریکه از معادله معلوم است باتعویض ضریب بهره ریشه های معادله نیزعوض می شود و رفتار سیستم عوض میشود. قبلا چگونگی رفتار سیستم به ازای اینکه ریشه های معادله مشخصه در کدام نقاط از صفحه مختلط قرار بگیرند ، توضیح داده بودیم .

واقعیت اینستکه (دراین فصل خواهیم دید) با افزایش ضریب (یا کاهش آن) ممکن است شرایط پایداری ایجاد شود(یا قوی شود) ، اما این تغییر در ضریب (پارامتر) مطمعنا باعث می شود مشخصات رفتاری سیستم مناسب نباشد .اولین جاییکه بحث بهینه سازی درمهندسی کنترل ایجاد می شود در همین مطلب است .انتخاب ضریب بهینه بطوریکه سیستم پایدارباشد و ضمنا مشخصات رفتاری مناسب نیز داشته باشد، یکی از اهداف مهندسین کنترل همین است .

به منحنی ایجاد شده برای معادله مشخصه $1+KG_0(s)=0$ به ازای Kهای مختلف (از صفر تا ∞) منحنی مکان هندسی ریشه های سیستم مدار بسته یا Root-Locus می گوییم .

تذکر : اگر در مدار فیدبک تابع تبدیل H(s) وجود داشته باشد ، معادله مشخصه بصورت زیر خواهد بود:



$$1+G(s)H(s)=0$$

$$0r \qquad 1+KG(s)H(s)=0$$

$$1+KG_0(s)=0 \Leftrightarrow \left(G_0(s)=G(s).H(s)\right)$$

بنابراین میتوان نوشت ؛

$$G_0(s)=-\frac{1}{K} \qquad k\geq 0$$

چون $G_0(s)$ یک عدد مختلط است می توان نوشت :

$$(1) \quad \angle G_0(s)=-180^\circ \pm 360N \qquad , \qquad N=0,\pm1,\pm2,\pm3,\cdots(N\in Z)$$

$$(2) \quad \left|G_0(s)\right|=\frac{1}{K}$$

مکان هندسی ریشه هادرواقع ارضا نمودن شرط زاویه یا معادله(۱) است .اما چون ما میخواهیم ریشه های معادله مشخصه (یا قطبهای مداریاز) را بدست آوریم بایدشرط اندازه (یا معادله (۲)) را نیز ارضا نماییم .
اگر $G_0(s)$ بصورت زیر باشد :

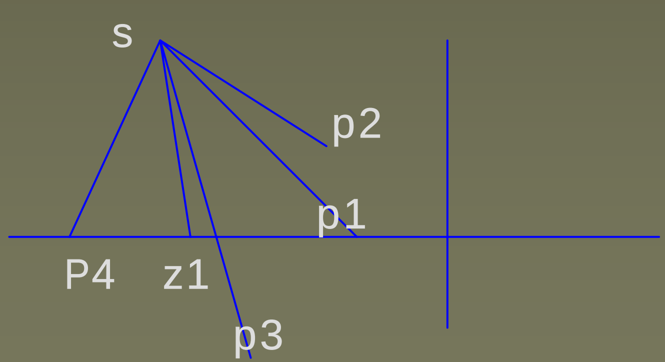
$$G_0(s) = \frac{(S - Z_1)}{(S - P_1)(S - P_2)(S - P_3)(S - P_4)}$$

که در آن Z_1 صفر و p_1 , p_2 , p_3 , p_4 قطب هاو p_2 , p_3 قطبهای مزدوج مختلط هستند .

اگر زاویه $\begin{matrix} Z_1 & P_1 & P_2 & P_3 & P_4 \\ \phi_1 & \theta_1 & \theta_2 & \theta_3 & \theta_4 \end{matrix}$ در جهت مثلثاتی باشند داریم :

$$(3) \quad \angle G_0(s) = \varphi_1 - \theta_1 - \theta_2 - \theta_3 - \theta_{41} = -180^\circ \pm 360N \qquad , \qquad N = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \cdots (N \in Z)$$

و همینطور با توجه به موقعیت مکانی احتمالی $p_1 , p_2 , p_3 , p_4 , z_1$ می توان نوشت :



$$(2) \quad |G_0(s)| = \frac{B_1}{A_1 A_2 A_3 A_4} = \frac{1}{K} \qquad (4)$$

بر این اساس نقاطی جزء نمودار هستند که هر دو شرط ۳و۴ در آنها صدق نماید . با در نظر گرفتن نقاط بسیار زیادی و تست آنها بخاطر اینکه باید در شروط ۳و۴ صدق نمایند ، معادله مشخصه تحلیل می شود .

سه مرحله یافتن ریشه معادله $1+KG_0(s)=0$:

الف : تعیین موقعیت قطبهای و صفرهای مدار باز .

ب: در نظر گرفتن یک نقطه S بطوریکه شرط ۳ در آن ارضاء شود .

ج : یافتن بهره مربوطه یا K با استفاده از معادله $|G_0(s)|=\frac{1}{K}$ یا شرط ۴ .

محل قطبهای حقله باز با ٭ و محل صفرهای حلقه باز با o نشان داده می شود .

قواعد رسم مکان هندسی ریشه ها :

۱- مکان هندسی نسبت به محور حقیقی قرینه است .

۲- اگر G(s) دارای n قطب باشد ، مکان هندسی از n شاخه تشکیل می گردد ،که البته بعضی ازآنها ممکن است یکدیگر را قطع کنند .

۳- تمام شاخه ها به ازای k=0 ازمحل قطبهای مدار باز شروع وبه ازاء $K\to 0$ به محل صفرهای مدار باز ختم می شوند.اگر $n>m$ باشد $n-m$ شاخه در جهت مجانبها به سمت بی نهایت میل میکنند.

(n تعداد قطب های مدار باز و m تعداد صفرهای مدار باز است .)

۴- زاویه مجانبها با محور حقیقی عبارتست از ؛

تعداد مجانبها = $n-m$

$$=\pm 180\frac{q}{n-m} \quad ; \quad q=1,3,5,7,....$$

۵- اگر $n-m\geq 2$ باشد ، فقط تمرکز مجانبها از رابطه زیر بدست می آید :

$$h=\frac{\sum_{i=1}^{n}Pi-\sum_{j=1}^{m}Zi}{n-m}$$

۶- اگر $n-m \geq 2$ باشد ، مرکز ثقل قطبها یا ریشه های مدار بسته بصورت زیر تعریف می شود :

$$c.g.=\sum_{i=1}^{n}\frac{Pi}{n}$$

البته مقدار .c.g مستقل از K تعویض نخواهد شد .

۷- آن نقاطی ازمحورحقیقی جزو مکان هندسی هستند که مجموع قطبها و صفرهای مدار بازواقع شده در روی محور حقیقی ودرسمت راست آن نقاط برابرصفرشود .

۸- اگر همه قطبها و صفرهای مدار باز حقیقی باشند ، مختصات نقطه ای که در آن مکان هندسی از محور حقیقی جدامی شود ، از معادله زیر بدست می آید :

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{b-Pi}=\sum_{j=1}^{m}\frac{1}{b-zi}$$

۹- در جایی که سیستم مدارباز دارای قطب های مختلط است ، مکان هندسی با زاویه زیراز قطب مدار باز Pi جدا می شود .

$$\theta_i=-180-\psi_j \quad ; \quad i\neq j$$

ψ_j زاویه ای که توسط سایر قطبهاو صفرهای مدار باز در P_i تشکیل می شود .

۱۰- تعیین نقاط شکست (نقاطی که درمسیر از هم جدا می شوند.) $\frac{dk}{ds}=0$

۱۱- می توان نقاط برخورد مکان هندسی با محور موهومی را با قرار دادن $S=j\omega$ و حل معادله حاصل بدست آورد .

۱۲- زاویه خروج از قطب مختلط و زاویه ورود به صفر مختلط :

(جمع زاویه بردارهای رسم شده از بقیه قطب ها به آن قطب)- ۱۸۰ = زاویه خروج از قطب مختلط

(جمع زاویه بردارهای رسم شده از بقیه صفرها به آن قطب) +

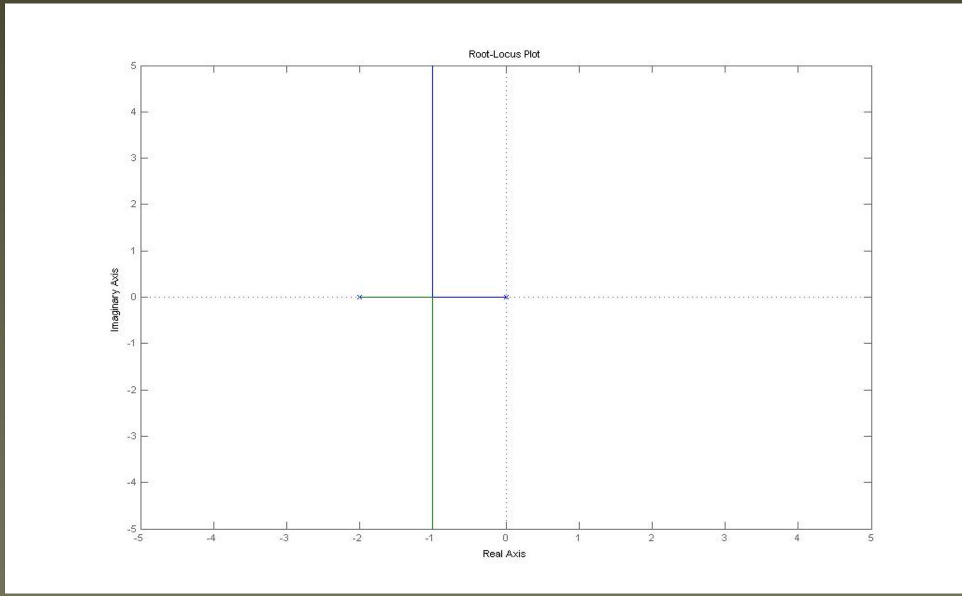
۱۲- زاویه خروج از قطب مختلط و زاویه ورود به صفر مختلط :

(جمع زاویه بردارهای رسم شده از بقیه صفر ها به آن صفر)- ۱۸۰ = زاویه ورود به صفر مختلط

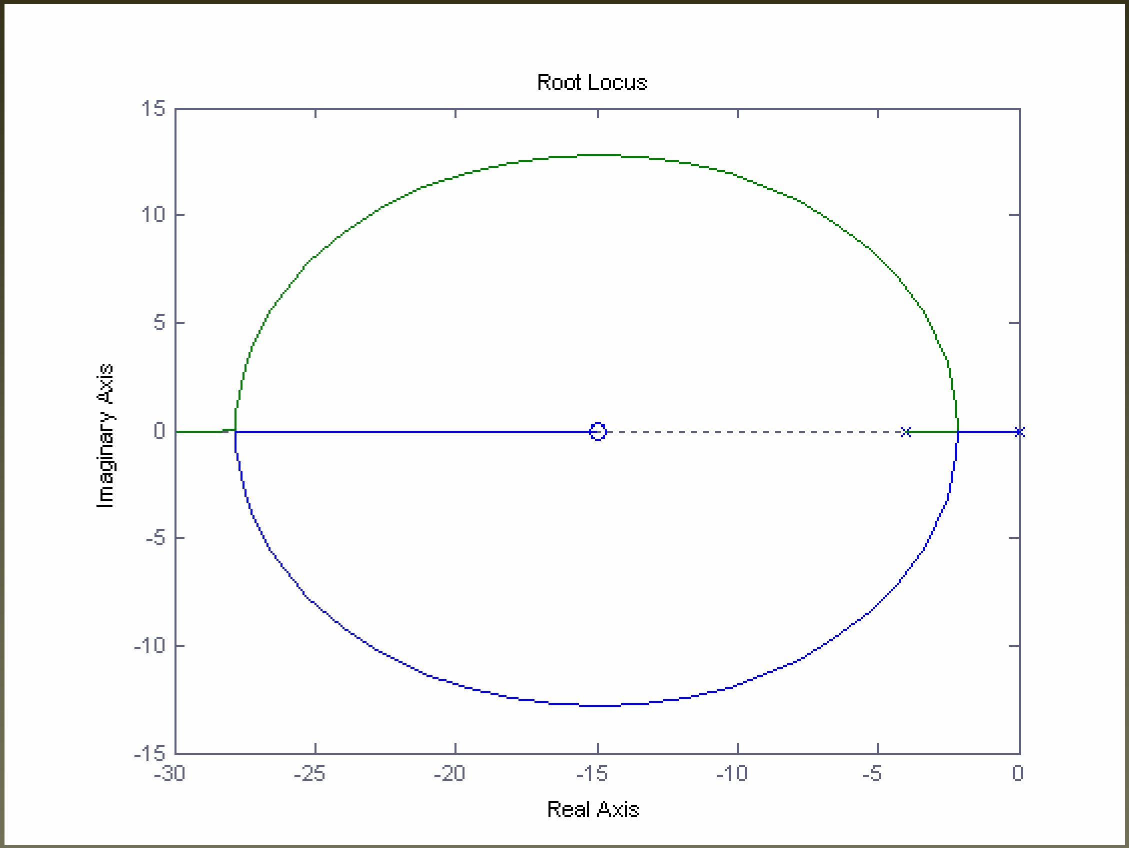
(جمع زاویه بردارهای رسم شده از بقیه قطب ها به آن صفر) +

انواع مکان هندسی ریشه ها :

$$G(s)=\frac{K}{s(s+{}^{1}\!/\!_{T_1})}$$

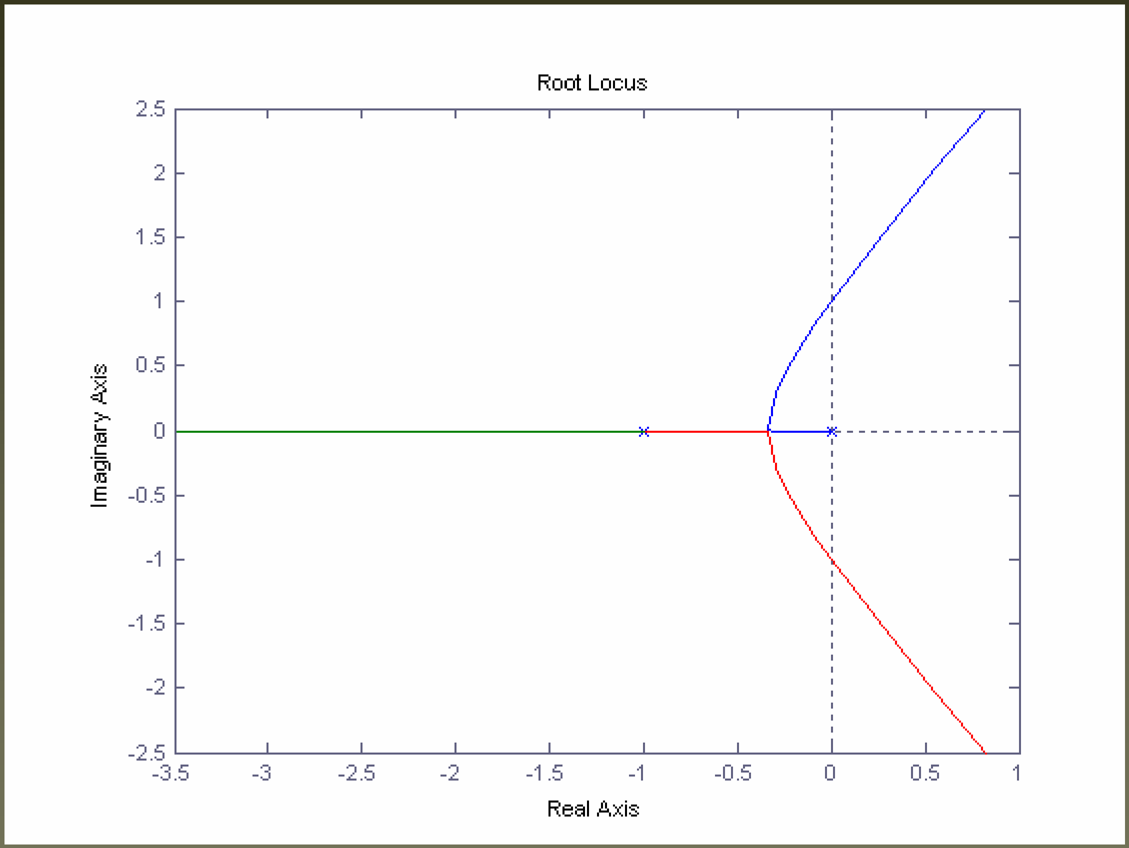


$$G(s) = \frac{K(s + 1/T_2)}{s(s + 1/T_1)}$$



با افزودن یک صفر سیستم کنترلی پایدار تر شده است.چون شاخه ها به سمت چپ تمایل پیدا کرده اند و عکس العمل سیستم سریعتر شده است.

$$G(s)=\frac{K}{s(s+{}^{1}\!/_{T_1})(s+{}^{1}\!/_{T_3})}$$



با افزودن یک قطب سیستم کنترلی ناپایتر و عکس العمل سیستم کند تر می شود

تمرین

۱-مطلوب است ترسیم مکان هندسی ریشه ها برای سیستم مکانیکی زیر

$$GH=\frac{(s+4)^3}{(s+1)(s+2)},GH=\frac{s(s+4)^2}{(s+1)(s+2)},GH=\frac{1}{(s-1)(s+2)(s+3)}$$

۲- پس از ترسیم مکان هندسی ریشه ها مطلوب است:

$$GH=\frac{50k}{(s+1)(s+2)(s+10)}$$

-تعیین essبه ازای k=0.377 تاk=3 در ورودی پله واحد و شیب

-تعیین ess به ازای $\zeta=0.707$

-تایید نتایج با مطلب

جبران سازها (طراحی کنترلر compensators)

برای تصحیح رفتار دینامیکی یک سیستم کنترلی خطی مستقل از زمان تک ورودی – تک خروجی sisoبا استفاده از روش مکان هندسی ریشه ها

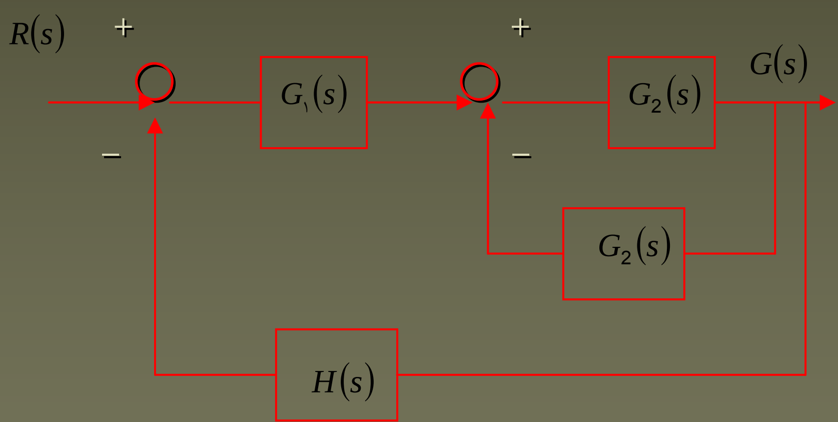
علت به کار بردن جبران ساز ها

۱-ایجاد حالت پایداری مطلق

۲-کاهش خطای حالت پایدار =عملکرد حالت ماندگار

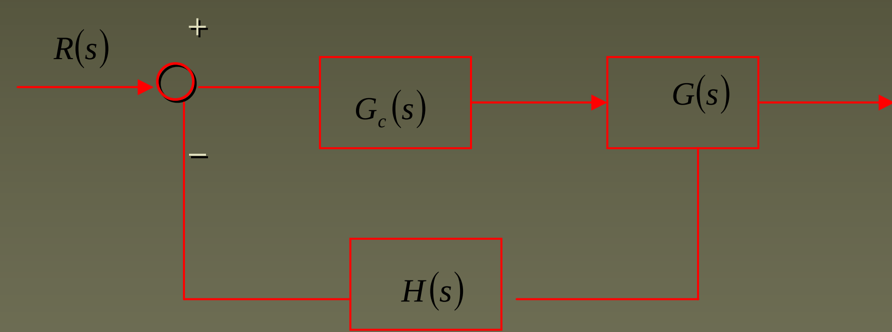
۳-کاهش overshoot,settling time= عملکرد حالت گذرا

معمولا به علت راحتی از جبرانساز های سری بیشتر از جبران سازهای موازی استفاده میشود.



compensators or Controller

جبرانساز موازی



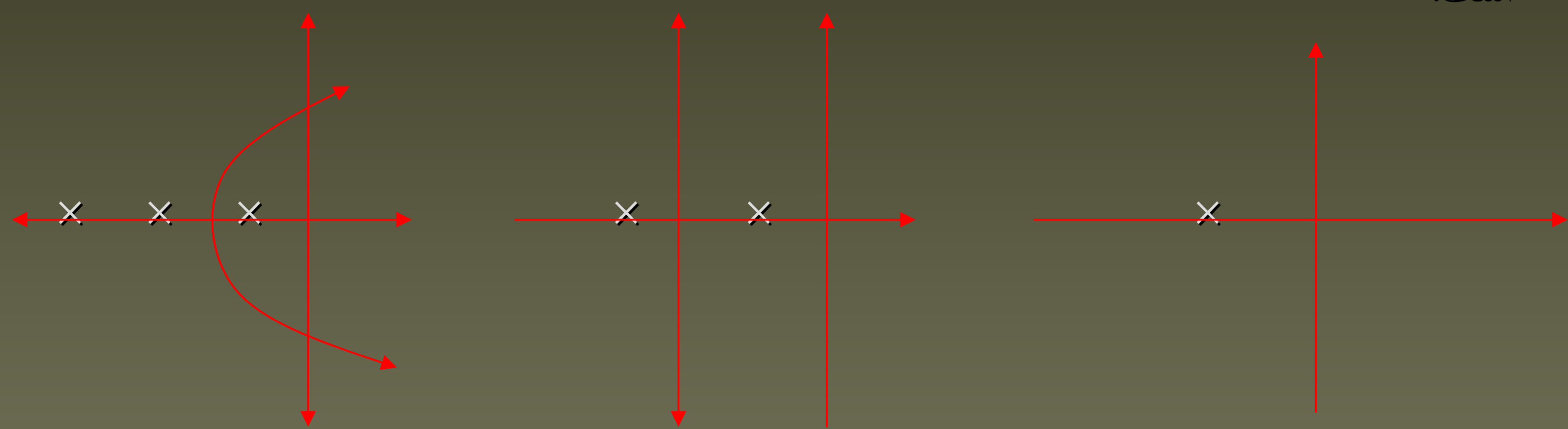
compensators or Controller

جبرانساز سری

پارامتر K در روش مکان هندسی ریشه ها خود یک کنترلر (جبرانساز) است (Proportional Controller)

اما رفتار خیلی از سیستم های دینامیکی فقط با یک کنترلر تناسبی قابل تصحیح نیست.

<u>اثر افزودن قطب</u>: تعبیه یک عملگر انتگرالی باعث ایجاد یک قطب در مبدا و در نهایت کاهش پایداری است.

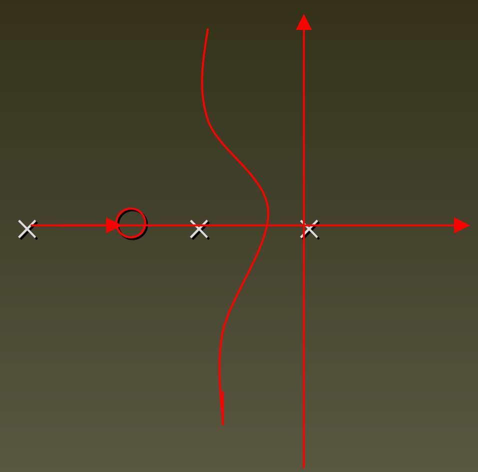


$$GH=\frac{1}{(S+1)(S+2)(S+3)}$$

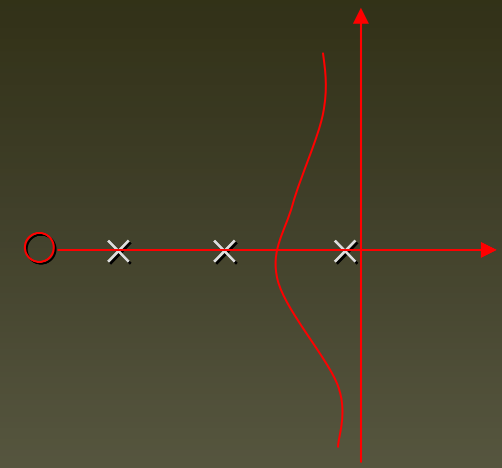
$$GH=\frac{1}{(S+1)(S+2)}$$

$$GH=\frac{1}{S+1}$$

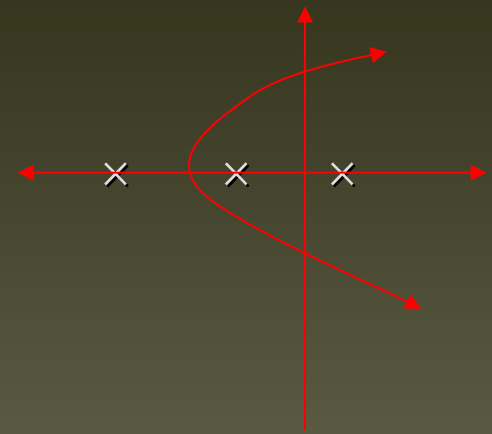
اثر افزودن صفر: با تعبیه کنترلر مشتقی مستقیم پایدارتر و مکان هندسی به سمت چپ و سرعت پاسخ بالاتر می رود.



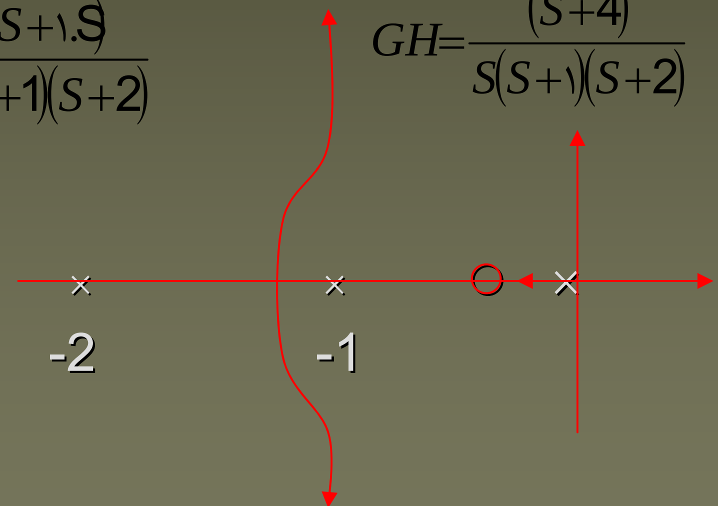
$$GH=\frac{(S+1.5)}{S(S+1)(S+2)}$$

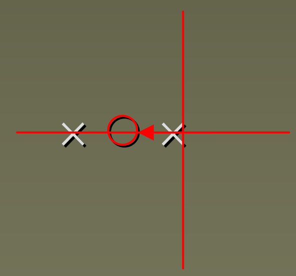


$$GH=\frac{(S+4)}{S(S+1)(S+2)}$$



$$GH=\frac{1}{S(S+1)(S+2)}$$





$$GH=\frac{(S+0.5)}{S(S+1)(S+2)}$$

بطور خلاصه جبرانساز PI باعث بهبود رفتار حالت ماندگار (در سیستم پایدار) می شوند.

(صفر شدن خطای ess) Improve ess error و

همچنین باعث افزایش مرتبه سیستم نیز می شود

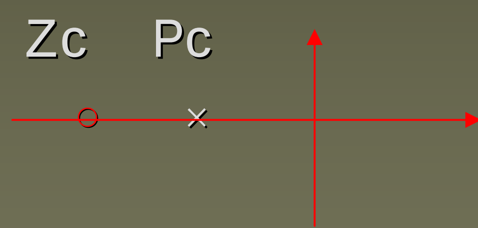
$$PIController = k\frac{S+Zc}{S}$$

- جبرانساز PD باعث پایدار شدن سیستم می شود: Improve Transient Response

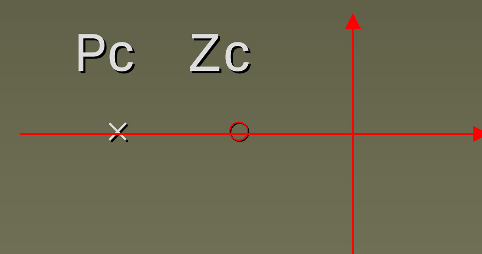
PD Controller K (S+Zc)

- ساختمان جبرانساز های پیش فاز Lead و پس فاز Lag نیز به شکل زیر است:

$$K\frac{S+Zc}{S+Pc}$$



Lag پس فاز



Lead پیش فاز

$$K\frac{S+Zc}{S+Pc}$$

- جبرانساز پیش فاز Lead Compensator هنگامی استفاده می شود که سیستم اصلی به ازای تمام مقادیر بهره ناپایدار باشد یا مشخصات پاسخ گذاری مطلوبی ندارد.

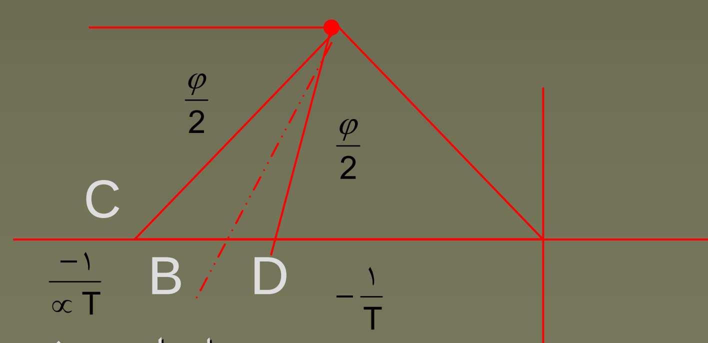
Lead Compensator Improves the Transient Response

اگر با تغییر در ضریب بهره K قادر به مطلوب نمودن پاسخ گذار نباشیم با روش زیر اینکار را انجام می دهیم (تغییر هدف در مقادیر ω_n و ζ)

$$G_{(sc)} = K_c \frac{S+\frac{1}{T}}{S+\frac{1}{\propto T}} \qquad 0 \prec \propto \prec 1$$

روش: ابتدا جمع زوایای محل مطلوب یک قطب حلقه بسته را از قطب و صفر های حلقه باز سیستم اصلی بدست آورده و تغییر زاویه φ برای (2K+1) 188 ± شده زاویه را تعیین می کنیم.

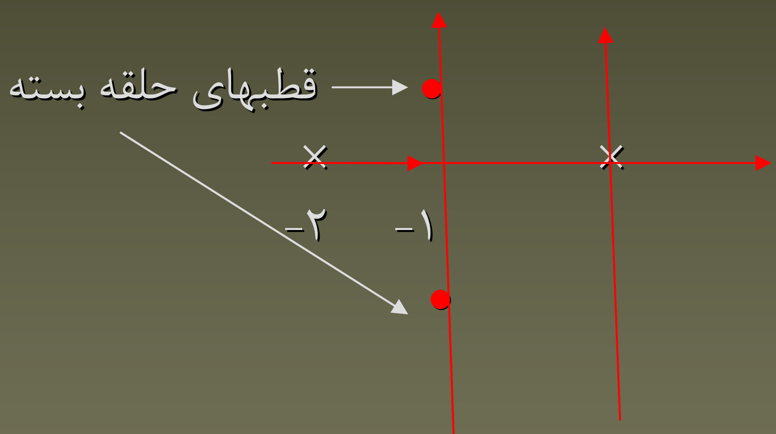
P نقطه جدید

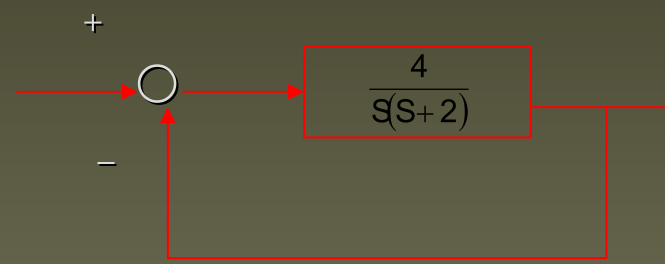


نیمساز زاویه منفرجه

مثال : در سیستم $GH = \frac{4}{S(S+2)}$ قطبهای حلقه بسته قرار دارند:

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{4}{S^2+2S+4} = \frac{4}{\left(S+1+j\sqrt{3}\right)\left(S+1-j\sqrt{3}\right)}$$





در این نقطه $\zeta = 0.5$ و $\omega_n = 2\,{}^{red}\!/_{S}$ است.

می خواهیم $\omega_n = 4\,{}^{red}\!/_{S}$ شود. (بدون تغییر در ζ)

دنباله مثال:

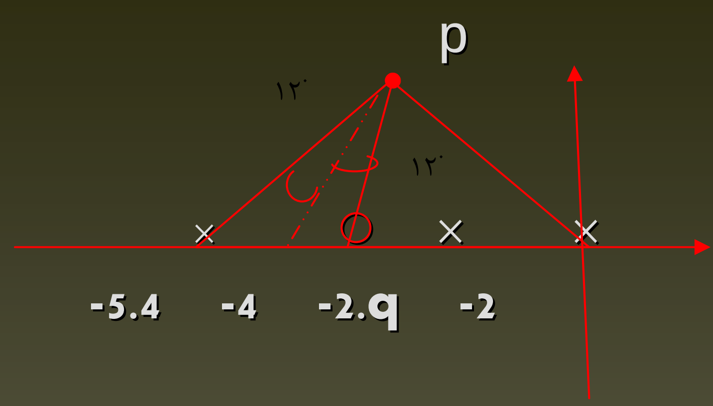
قطب های حلقه بسته مطلوب $= -4 * \text{Cos } 60 \pm j\ 4 + 60^0$

$$= -2 \pm j2\sqrt{3}$$

بنابراین زاویه $G_{(S)}$ در قطب مطلوب برابر است با :

$$\angle \left. \frac{4}{S(S+2)} \right|_{S=-2+j2\sqrt{3}} = -210^{\;0}$$

برای آنکه مکان هندسی جدید از این نقطه بگذرد باید زاویه کلی $\pm 180\ (2k+1)$ شود یعنی جبرانساز پیش فاز باید زاویه $\varphi = 30^0$ را ایجاد نماید (بنابراین $\varphi = 15^0$ (



$$\Longrightarrow \frac{-۱}{T} = -5.4 \qquad -\frac{۱}{T} = -2.q$$

$$\Longrightarrow T = 0.345$$

بنابراین : $\alpha = 0.537$

$$G_c(s)G(s) = K_c \frac{S+2.q}{S+5.4}\frac{4}{S(S+2)} = 4K_c \frac{S+2.q}{S(S+2)(S+5.4)}$$

حال با شرط اندازه مقدار **K_c** را نیز تعیین می کنیم:

$$\left|\frac{4K_c(S+2.q)}{S(S+2)(S+5.4)}\right| = ۱ \qquad S = -2 + j2\sqrt{3} \Longrightarrow K_c = 4.68$$

بنابراین:

$$G_c(S) = 4.68\frac{S+2.q}{S+5.4}$$

دنباله مثال:

در سیستم جدید $\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{4(4.68)(S+2.q)}{(S+2+j2\sqrt{3})(S+2-j2\sqrt{3})(S+3.4)}$ قطب حلقه بسته در $S=-3.4$

قرار می گیرد و چون نزدیک صفر $S=-2.q$ است بر پاسخ گذرا اثری ندارد و دو قطب $S=-2\pm j2\sqrt{3}$

قطبهای غالب هستند.

می توان Step Response برای هر دو سیستم (اصلی و جبران شده) تعیین نمود.

در این صورت مشاهده می شود جبرانساز پیش فاز فقط روی رفتار گذرا تاثیر مطلوب گذاشته و رفتار حالت ماندگار را تغییر نداده است.

جبرانساز پس فاز Lag Compen Sator_هنگامی استفاده می شود که سیستم پاسخ گذاری مطلوبی دارد ولی رفتار حالت ماندگار آن خوب نیست (خطای ess قابل توجهی دارد)

Lag Compensator Improves the Steady – State Error

در این جبرانساز چون پاسخ گذار مطلوب تر است سعی می کنیم دیاگرام مکان هندسی ریشه ها تعویض نشود.

یعنی قطبهای حلقه بسته عوض نمی شوند.

برای کاهش خطا بهره حلقه باز باید تا حد لازم زاد شود.

می توان با در نظر گرفتن $\beta \succ 1$ این ضریب را افزایش داد

همچنین صفر و قطب پس فاز باید نزدیک مبدا انتخاب شوند.

$$G_c(S) = \hat{K}_c \frac{S+\frac{1}{T}}{S+\frac{1}{\beta T}}$$

افزایش ضریب بهره یعنی افزایش ثابتهای خطا: $e_{ss} = \frac{1}{K_\upsilon}$

$K_\upsilon = \lim_{s\to 0} SG(S)$ و $\hat{K}_\upsilon = \lim_{s\to 0} SG_c(S)G(S) = \lim G_c(S)K_\upsilon\, K_c\hat{\beta}K_\upsilon$

سیستم جبران نشده ‌ ‌ ‌ ‌ ‌ ‌ سیستم جبران شده

با برابر یک قرار دادن ضریب بهره جبرانساز پس فاز $\hat{K}_c = 1$ مشخصه پاسخ گذار تغییر نمی کند.

بنابراین:

$$\hat{K}_\upsilon = \beta K_\upsilon$$

سیستم جبران شده ‌ ‌ ‌ ‌ ‌ ‌ سیستم جبران نشده

بنابراین ess با ضریب $\frac{1}{\beta}$ $(\beta \succ 1)$ کوچکتر خواهد شد.

مثال- در مسله $G_{(s)} = \frac{1.06}{S(S+1)(S+2)}$ داریم: $\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{1.06}{S(S+1)(S+2)+1.06}$

$$= \frac{1.06}{(S+0.3307-j0.8864)(S+0.3307+j0.5864)+(S+2.3386)}$$

قطبهای حلقه بسته

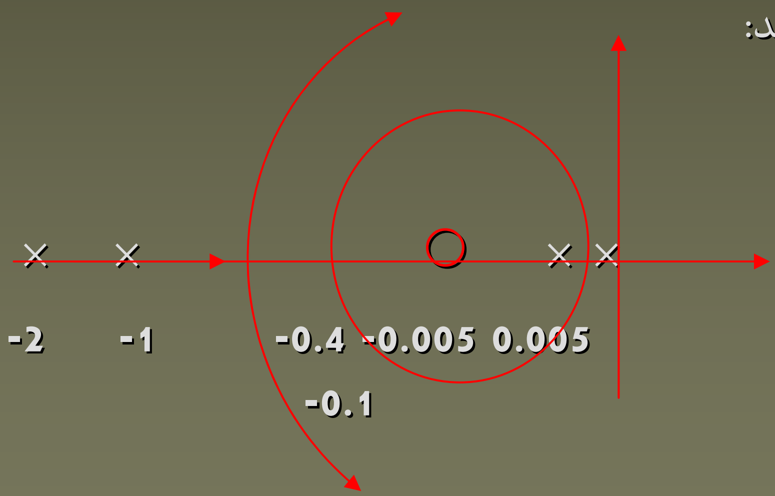
داریم $\zeta = 0.491$ فرکانس طبیعی ناپایداری قطبهای غالب $W_n = 0.673$ است.

ثابت خطایی ایستایی سرعت $\hat{K}_v = SS^{-1}$ تقریبا ۱۰ برابر شود. یعنی $\beta = 10$، بنابراین در نظر می گیریم:

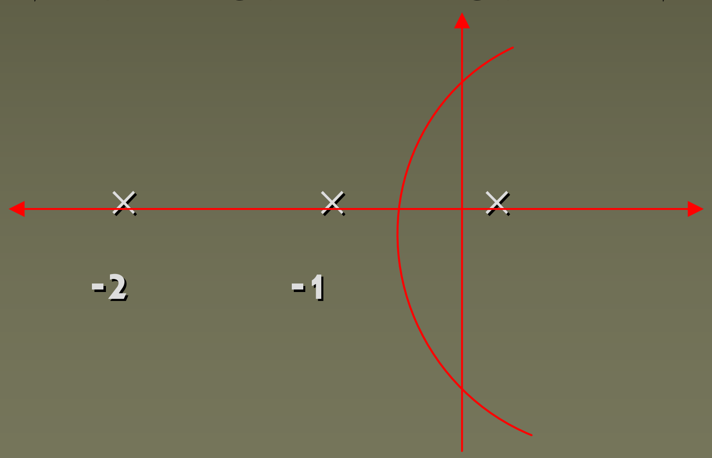
$$G_c(s) = \hat{K}_c \frac{S + 0.05}{S + 0.005}$$

$$\Rightarrow G_c(s)G(s) = \hat{K}_c \frac{S + 0.05}{S + 0.005} \frac{1.06}{S(S+1)(S+2)} = \frac{1.06\hat{K}_c(S + 0.05)}{S(S+1)(S+2)(S + 0.005)}$$

با استفاده از شرایط اندازه $\hat{K}_c$ را بدست می آوریم. برای تعیین K_c دیاگرامهای مکان هندسی ریشه ها برای سیستم های جبران نشده و جبران شده ترسیم می شوند:



دایره کوچک است



جبران نشده

دنباله مثال

با ثابت نگهداشتن نسبت میرائی قطبهای غالب بسته نیز چندان تغیر نمی کنند:

$$S_{1,2} = -0.31 \pm j\, 0.55$$

حال می توان $\hat{K}_c$ را با استفاده از شرط اندازه بدست آورد:

$$1.06\ \hat{K}_c = \left| \frac{S(Se0.005\ )(Se\ +1)(Se\ +2)}{Se0.05} \right| \quad \Longrightarrow \quad S = -0.31 + j\,0.55$$

$$\Rightarrow \hat{K}_c = 0.9656 \ \Rightarrow \ G_C(S) = 0.9656\ \frac{Se0.05}{Se0.005}$$

کنترل می کنیم

$$K_\upsilon = \lim_{s\to 0} SG(s) = S\,\frac{1.06}{S(S+1)(S+2)} = \frac{1.06}{2} = 0.53\ S^{-1}$$

$$\hat{K}_\upsilon = SG_c(s)G(s) = \hat{K}_c\ \beta K_\upsilon = 0.9656(10)0.53 = 5.118\ S^{-1}$$

یعنی خطای حالت ماندگار ورودی شیب $\frac{5.118}{0.53} = 9.656$ برابر کمتر شده یا به تقریبا ٪۱۵ مقدار آن در سیستم جبران نشده رسیده است.

جبرانسازی پیش فاز- پس فاز Lead – Lag Compen Satorl

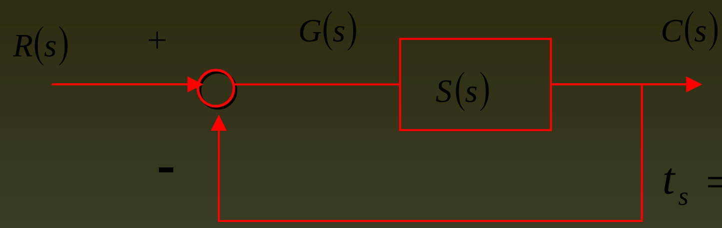
به طور خلاصه جبرانساز پیش فاز سرعت پاسخ را بیشتر و پایداری را نیز بیشتر می کند و جبرانساز پس فاز دقت حالت ماندگار را بهبود بخشیده ولی سرعت را می کاهد.

اگر بخواهیم هم خطا کم شود و هم سرعت پاسخ بالا رود از جبرانساز توان پیش فاز- پس فاز استفاده می کنیم:

می توان هر کدام از بخشهای پیش فاز و پس فاز را مجزا طراحی نمود.

$$G_c(s) = K_c \left[\frac{S + \frac{1}{T_2}}{\int + \frac{\gamma}{T_1}} \right] \left[\frac{S + \frac{1}{T_2}}{S + \frac{1}{\beta T_2}} \right]$$

پس فاز   پیش فاز   مثال ۷-۳ صفحه ۴۱۰ مطالعه شود



پروژه های درسی پس از جبرانسازها

۱- بررسی $G_{(S)} = \frac{K}{(S^2+20S+101)(S+20)}$ در سیستم ضریب میرایی برای قطبهای غالب برابر $\zeta = 0.4$ و $t_s = 0.5^s$ است.

الف- محل قطبهای غالب را تعیین کنید ب- مشخصات جبرانساز $K\frac{S+Z_c}{S+1S}$ یافته و سیستم های اصلی و جبران شده را با هم مقایسه نمائید. ج- با نرم افزار **MATLAB** و **SIMULINK** نتایج را چک کنید.

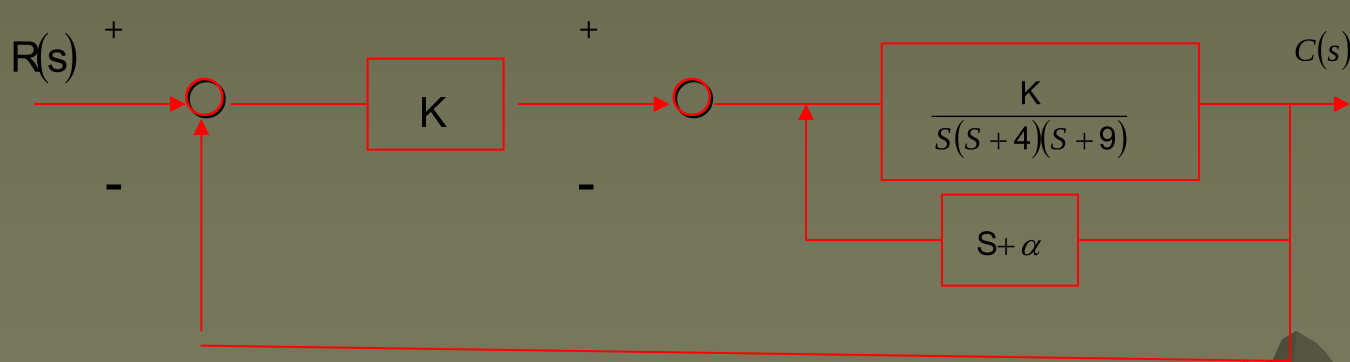
۲- برای $G_{(S)} = \frac{K}{S(S+1)(S+3)}$ با فیزیک واحد مطلوبیت تعیین:

الف- یک جبرانساز به نحوی که $t_s = 2.86^s$ و $54\% = 4.32\%$ و کاهش دو برابری ess نسبت به سیستم اصلی .

ب- مشخصات رفتار ماندگار و گذرای دو سیستم را با هم مقایسه نمائید.

ج- ظرائب بهره را با هم مقایسه نمائید. ۱- نتایج را با **MATLAB** معتبر نمائید.

۳- در سیستم



الف- K_1 و **a** را به نحوی تعیین کنید که دو لوپ داخلی داشته باشیم $t_s=1^s$

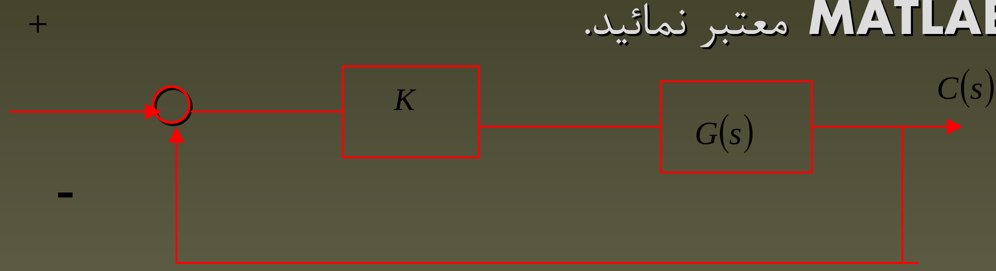
57% = s% tor step nesponse

ب- k را طوری تعیین کنید که 57% = 15% برای کل سیستم باشد (برای step nesponse)

ج- یک کنترلر PI به نحوی تعبیه کنید که ess سیستم برابر صفر شود.

د- حل را با نرم افزار **MATLAB** معتبر نمائید.

۴- بررسی سیستم



$$G(s) = 0.072 \frac{(S+3)(S^2+0.055+0.04)}{(S-0.7)(S+1.7)(S^2+0.08S+0.04)}$$

الف- بازه **K** را برای پایداری تعیین کنید.

ب- مکان هندسی ریشه ها را ترسیم کنید.

ج- جبرانسازی طرح کنید که ess=0 و $t_s=0.05^s$ و 57% = 20%

د- نتایج را با **MATLAB** معتبر نمایید.

معیارهای یک سیستم کنترلی برای داشتن رفتار مناسب (بهینه یابی Optimaization)
۱- داشتن حداقل زمان استقرار هنگامیکه سیستم تحت تاثیر .ر.دی پله واحد قرار گرفته است .
Settling time (t_s)

۲- حداکثر دامنه خیلی بزرگ نباشد ، چون باعث یک ضربه برای سیستم کنترلی است .
۳- توابعی ار خطا مثل(قدر مطلق خطا ، حاصل ضرب زمان در اندازه خطا ، مقدار خطا به توان ۲ ، حاصل ضرب زمان در مقدار خطا به توان ۲) حداقل باشد .

$$IAE = \int_0^\infty |e(t)|dt \qquad (\text{integral of absolute error})$$

$$ISE = \int_0^\infty e^2(t)dt \qquad (\text{Integral of Squared error})$$

$$ITAE = \int_0^\infty t.|e(t)|dt \qquad (\text{Integral of Time Multiplied by Absolute error})$$

$$ITSE = \int_0^\infty t.e^2(t)dt \qquad (\text{Integral of Time Multiplied by Squared error})$$

روشهای زیگلر _ نیکولز برای تعیین پارامترهای یک کنترلر:
اساس این روشها حداقل نمودن انتگرال قدر مطلق خطا (IAE) می باشد .
۱- روش اول:روش عکس العمل حالت گذرا (transient Response Method) : بر اساس این روش پس از تعیین پارامترهای L,R در منحنی پاسخ سیستم مدار باز به ورودی پله با توجه به شکل زیر مقادیر ضرایب بهره های مربوط به کنترلرهای خطی P,PI,PID تعیین می شوند .

عکس العمل سیستم مدار باز نسبت به ورودی پله ای واحد :

الف - برای کنترل Proportional :

$$K_c = \frac{1}{RL} \qquad G(s) = K_c$$

ب- برای کنترل Proportional & Integral :

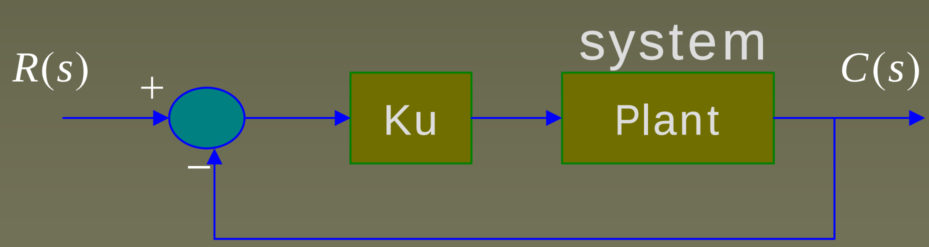
$$K_c = \frac{0.9}{RL} \qquad T_i = 3.3L \qquad G(s) = K_c(1 + \frac{1}{T_i S})$$

ج – برای کنترل Proportional integral & Derivativ :

$$K_c = \frac{1.2}{RL} \qquad T_i = 2L \quad T_d = 0.5L \qquad G(s) = K_c(1 + \frac{1}{T_i S} + T_d S)$$

۲- روش دوم – روش حساسیت مقدار نهایی :

در این روش سیستم مدار بسته تحت کنترلر proportinal در مرز پایداری قرار داده شده و سپس پارامترهای Ku(ضریب بهره سیستم را در مرز پایداری قرار داده) و ρu (پرید ارتعاشات عکس العمل - سیستم مدار بسته در مرز پایداری) بدست آمده و با استفاده از این دو مقادیر بهینه پارامترهای کنترلر را بدست می آوریم :



الف – برای کنترل proportional :

$$K_c = 0.5K_u \qquad G(s) = K_c$$

ب- برای کنترلر Proportional &Integral :

$$K_c = 0.45K_u \qquad T_i = 0.83P_u \qquad G(s) = K_c(1 + \frac{1}{T_i S})$$

ج- برای کنترلر Proportional & integral & Derivativ :

$$K_c = 0.6K_u \qquad T_i = 0.5P_u \quad T_d = 0.125P_u \qquad G(s) = K_c(1 + \frac{1}{T_i S} + T_d S)$$

پاسخ فرکانسی : Frequency Response

هدف از ارائه پاسخ فرکانسی :

الف : شناسایی دقیق از طریق ، تحت ورودی سینوسی قرار دادن آن .

ب: امکان دستیابی به یک روش که اساس آن موارد تجربی است . (عملی) که البته هدف آن کنترل یک سیستم دینامیکی است .

پاسخ فرکانسی همان رفتار سینوسی یک سیستم دینامیکی در حالت ماندگار است .

چرا برای پاسخ فرکانسی ، سیستم را تحت ورودی سینوسی قرار می دهند ؟ چون حتی در انجام کارهای با پایه تجربی یا عملی دوست داریم ، ریاضی (تابع سینوسی) نظام دهنده آن باشد . البته همانطوریکه قبلا نیز ذکر شده است رفتار یک سیستم دینامیکی اصلا به کم و کیف ورودی ارتباطی ندارد .

فرض میکنیم سیستم باتابع تبدیل مدارباز $G(s) = {B(s)}/{A(s)}$ تحت تاثیر یک ورودی سینوسی قرارگرفته است ، می خواهیم خروجی $y(t)$ را در حالت ماندگار یا $y_{ss}(t)$ بدست آوریم :

$$u(t) = a.\sin \omega t \Rightarrow U(s) = \frac{a\omega}{S^2+\omega^2} \Rightarrow G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} \Rightarrow Y(s) = G(s).U(s) = \frac{a\omega B(s)}{\left(S^2+\omega^2\right)A(s)}$$

$$A(s) = (S-P_1)(S-P_2)(S-P_3)\cdots(S-P_n) \Rightarrow Y(s) = \frac{a\omega B(s)}{\left(S^2+\omega^2\right)(S-P_1)(S-P_2)(S-P_3)\cdots(S-P_n)}$$

$$Y(s) = \frac{K_0}{S-j\omega} + \frac{K_0^{\ *}}{S+j\omega} + \frac{K_1}{S-P_1} + \frac{K_2}{S-P_2} + \cdots + \frac{K_n}{S-P_n}$$

K_0, K_0^* اعداد مختلط قرینه اند . با استفاده از قضیه مانده ها می توان بدست آورد :

$$K_0 = \left[\frac{a\omega G(s)}{S+j\omega}\right]_{S=j\omega} = \frac{a\omega G(j\omega)}{2j\omega} = \frac{aG(j\omega)}{2j} \qquad K_0^* = \left[\frac{a\omega G(s)}{S-j\omega}\right]_{S=-j\omega} = \frac{aG(-j\omega)}{-2j}$$

حال می توان مقدار خروجی را بدست آورد :

$$y(t) = K_0 e^{j\omega t} + K_0^* e^{-j\omega t} + K_1 e^{P_1 t} + K_2 e^{P_2 t} + K_3 e^{P_3 t} + \cdots + K_n e^{P_n t}$$

برای یک سیستم پایدار $P_1, P_2, P_3, \cdots, P_n$ که همان قطبهای سیستم هستند ، منفی خواهند بود .

$$y_{ss}(t) = K_0 e^{j\omega t} + K_0^* e^{-j\omega t} \Rightarrow y(t) = a.[\frac{G(j\omega)e^{j\omega t}}{2} - \frac{G(-j\omega)e^{-j\omega t}}{2j}] \qquad (*)$$

چون $G(j\omega)$ یک عدد مختلط است که دارای اندازه magnitude و زاویه (فاز) phase می باشد، می توان نوشت :

$$G(j\omega) = M(\omega).e^{j\phi(\omega)} \qquad G(-j\omega) = M(\omega).e^{-j\phi(\omega)}$$

$$M(\omega) = \left|G(j\omega)\right| = \sqrt{\left(\mathrm{Re}G(j\omega)\right)^2 + \left(\mathrm{Im}G(j\omega)\right)^2} \quad \text{و} \quad \phi(\omega) = \angle G(j\omega) = \tan^{-1}\left[\frac{\mathrm{Im}G(j\omega)}{\mathrm{Re}G(j\omega)}\right]$$

بنابراین با استفاده از رابطه * همین صفحه می توان نوشت :

$$y_{ss}(t) = a.M(\omega)[\frac{e^{j(\omega t+\phi(\omega))} - e^{-j(\omega t+\phi(\omega))}}{2j}]$$

$$\sin\theta = \frac{e^{j\theta} - e^{-j\theta}}{2j} \Rightarrow y_{ss}(t) = a.M(\omega).\sin[\omega t + \phi(\omega)] \Rightarrow y_{ss}(t) = b.\sin[\omega t + \phi(\omega)]$$

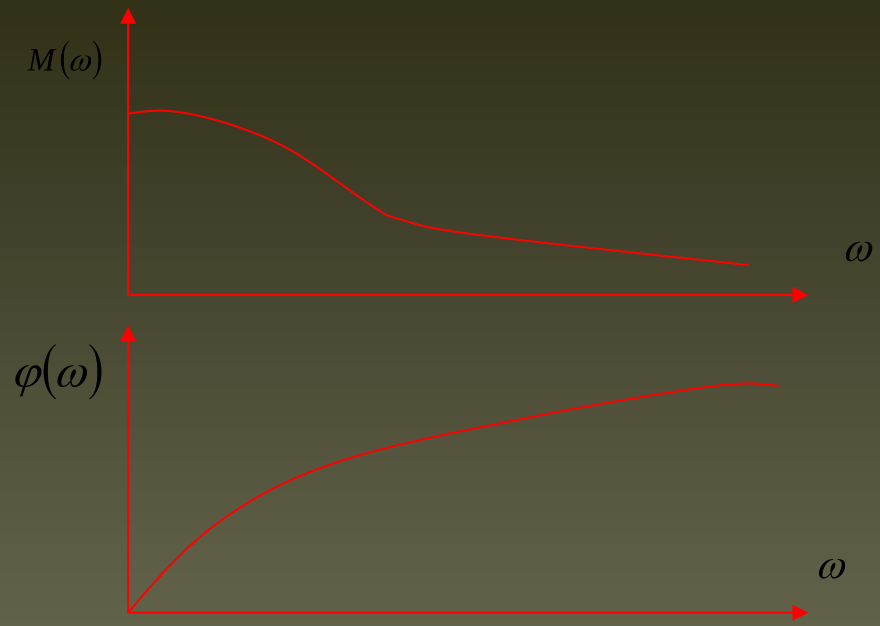
یعنی پاسخ حالت ماندگار یک سیستم دینامیکی تحت یک ورودی سینوسی ، یک تابع سینوسی با همان فرکانس و با اختلاف فاز $\phi(\omega)$ و دامنه $b = a.M(\omega)$ می شود . یعنی می توان بر حسب ω ، برای توابع $M(\omega), M(\omega)$ منحنی را ترسیم نمود .

Bodدیاگرام : با معلوم بودن ورودی یا asinωt می توان مشخصات خروجی یا M(ω),Φ(ω) را بدست آورد .

فاز $\varphi(\omega)$ و دامنه $b = aM(\omega)$ می شود. یعنی می توان بر حسب W ، برای توابع $M(\omega)$ و $\varphi_{(w)}$ منحنی را ترسیم نمود.

نمایش اول: نمودار لگاریتمی یا

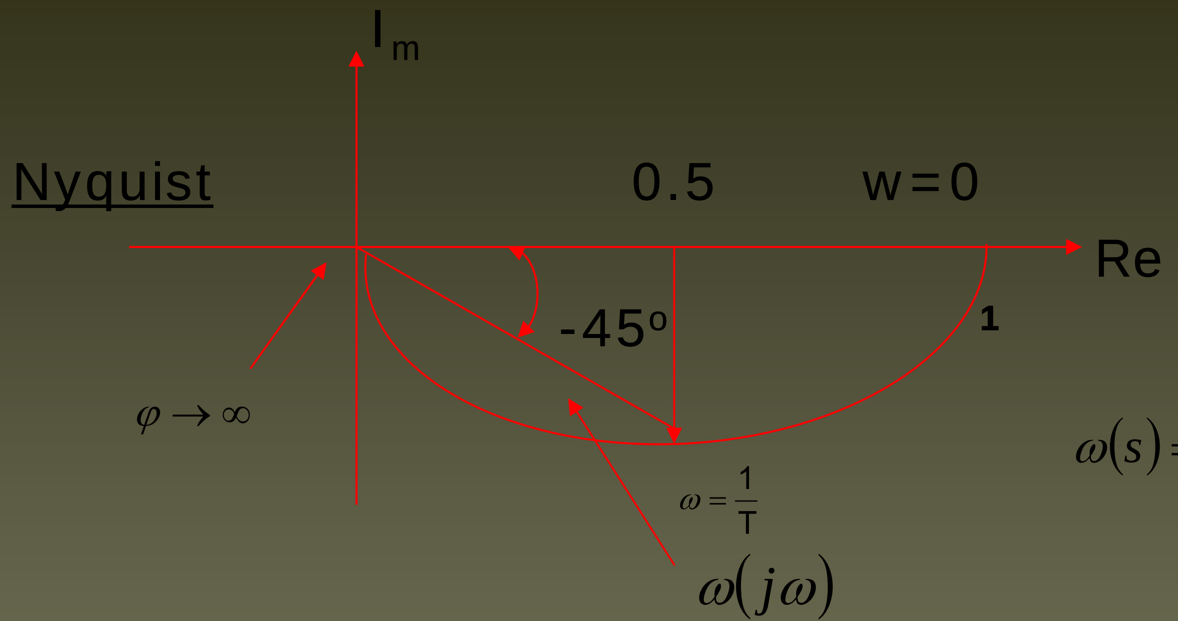
دیاگرام Bode



یعنی با معلوم بودن ورودی یا asinwt می توان مشخصات خروجی یا $M(\omega)$ و $\varphi(\omega)$ را بدست آورد.

تابع تبدیل سینوسی یک سیستم خطی را می توان با گذاشتن $j\omega$ به جای S در تابع تبدیل سیستم بدست آورد.

نمایش دوم: در نمودار بایکوئیت (نمودار قطبی) نیز بردار مختلط $G(j\omega)$ در صفحه مختلط بر حسب تغییرات φ از صفر تا بی نهایت ترسیم می شود. مانند شکل:



$$\omega(s) = \frac{1}{1+TS}$$

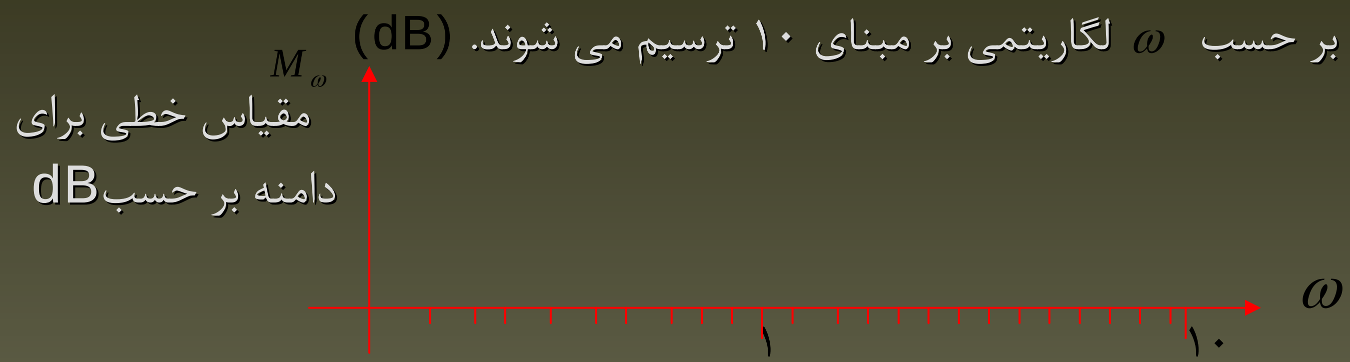
نمایش سوم: نمودار لگاریتم دامنه بر حسب فاز یا دیاگرام نیکولز Nichols Diagram

توضیح بیشتر دیاگرامهای پاسخ فرکانسی:

در نمودار Bode نیز M_ω و φ_ω بر حسب w ترسیم می شوند با این تفاوت در نمودار اول M_ω بر حسب dB :

$$M(dB)=20\log_{10}M \quad \text{or} \quad 20\log_{10}|G(j\omega)|$$

در نمودار دوم φ_ω بر حسب ω لگاریتمی بر مبنای ۱۰ ترسیم می شوند.



دو مزیت اصلی برای استفاده از نمودار های Bode : ۱- ضرب دامنه ها به جمع تبدیل می شود.

۲- استفاده از روش مجانبهای تقریبی برای

ترسیم تقریبی منحنی های لگاریتم دامنه (منحنی اول)

(بخصوص هنگامی که اطلاعات تقریبی از پاسخ فرکانس در اختیار باشد)

مزیت استفاده از مقیاس لگاریتمی برای فرکانس: باز شدن ناحیه فرکانسهای پایین (کم)

همچنین نمودار Bode کمک قابل توجهی برای تعیین تابع تبدیل به روش تجربی که یکی از اهداف پاسخ فرکانسی است می نماید.

عوامل پایه ای در $G(j\omega)H(j\omega)$ یا تابع تبدیل مدار باز یک سیستم کنترلی $(H(j\omega)=1)G(j\omega)$ بهره K
Gain=K

- عوامل مشتق گیر و انتگرالگیر $(j\omega)$ و $\frac{1}{j\omega}$

- عوامل مرتبه دوم $\left[1+2\zeta\left(j\frac{\omega}{\omega_n}\right)+\left(j\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right]$ و $\frac{1}{\left[1+2\zeta\left(j\frac{\omega}{\omega_n}\right)+\left(j\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right]}$ می توان با تلفیق این عوامل هر تابع تبدیل مدار باز سیستم کنترلی را ساخت.

- بهره K (عدد ثابت)   اعداد بزرگتر از ۱ دارای دسیبل مثبت و

اعداد کوچکتر از ۱ دارای دسیبل منفی اند.

منحنی لگاریتم بهره K یک خط افقی $20\log_{10} K$ و زاویه فاز صفر است. اثر بهره K در تابع تبدیل فقط بالا یا پایین بردن منحنی لگاریتم دامنه به مقدار ثابت و بدون اثر بر منحنی فاز است. رابطه زیر نشان می دهد با ۱۰ برابر شدن عدد ، مقدار بر حسب دسیبل به اندازه ۲۰ افزوده می شود:

$$20\log_{10}(10*K) = 20\log_{10} k$$

$$20\log_{10}(10^n*K) = 20n + 20\log_{10} k$$

همچنین عکس شدن ضریب بهره :

$$20\log_{10}\frac{1}{k} = -20\log_{10} k$$

- عوامل مشتق گیر و انتگرالگیر

عامل انتگرالگیر:

$$20\log\left|\frac{1}{j\omega}\right| = -20\log\omega \quad dB$$

$$G(j\omega) = \frac{1}{j\omega} = -j\frac{1}{\omega} = \frac{1}{\omega}\angle -\frac{\pi}{2} \qquad \angle\frac{1}{j\omega} = \angle\frac{1}{j} = \angle -j = -\frac{\pi}{2}$$

تعریف: اکتا و فاصله فرکانسی ω_1 تا $2\omega_1$ (ω_1 هر فرکانسی می تواند باشد)

– دهه فاصله فرکانس ω_1 تا $10\omega_1$ (هر فرکانسی می تواند باشد)

- در مقیاس لگاریتمی هر نسبت (یا کسر) با فاصله افقی یکسانی متناظر است یعنی فاصله افقی $\omega_1 = 1$ تا $\omega_1 = 10$ برابر با فاصله افقی $\omega_1 = 3$ تا $\omega_1 = 30$ شیب خط بردار مثال:

محور عمودی   عرض از مبدا   محور افقی   شیب

$$(-20\log 10\omega)dB = (-20\log\omega - 20)dB \qquad ax + b = y$$

$-20\ {dB}/{dec}$

محور عمودی   عرض از مبدا   محور افقی   شیب

هنگامی که شیب خط مشخص است می توان با داشتن یک نقطه از آن آن را ترسیم نمود. یا

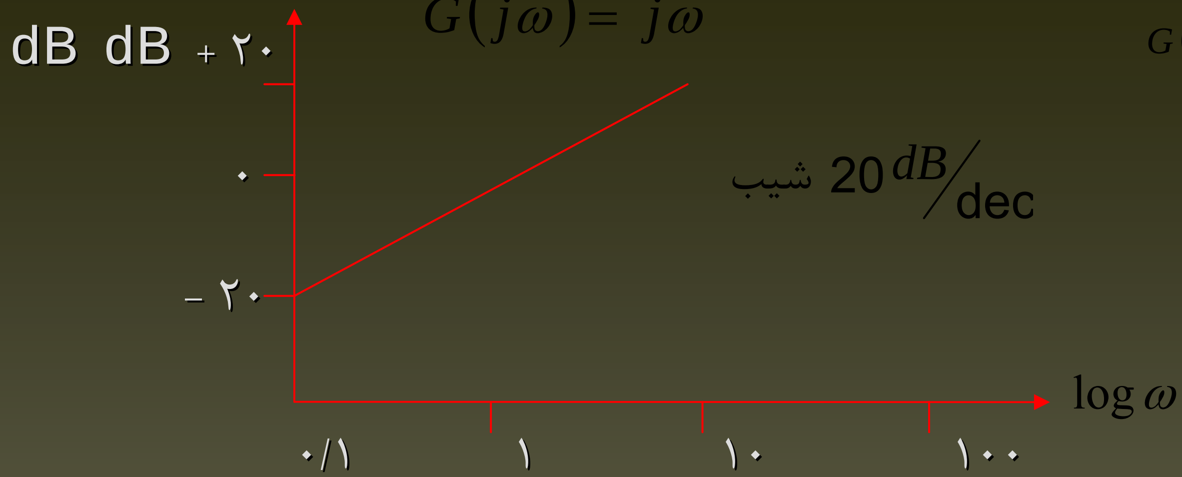
$$20\log|j\omega| = 20\log\omega \ \text{dB}$$

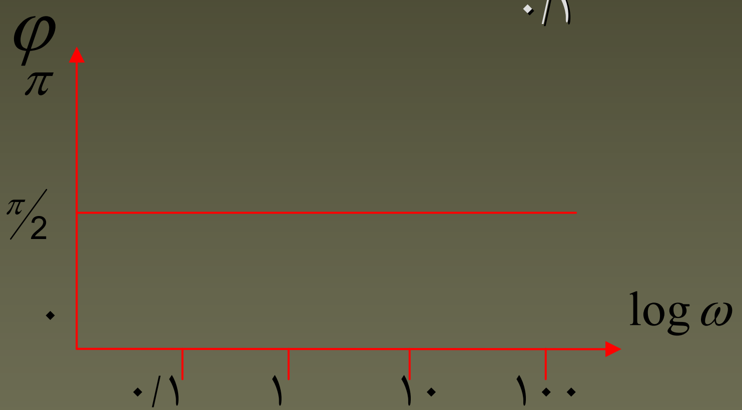
زاویه فاز $\pi/2$ و منحنی خط راست با شیب $20\ {dB}/{dec}$ (گذرنده از مبدا) است.

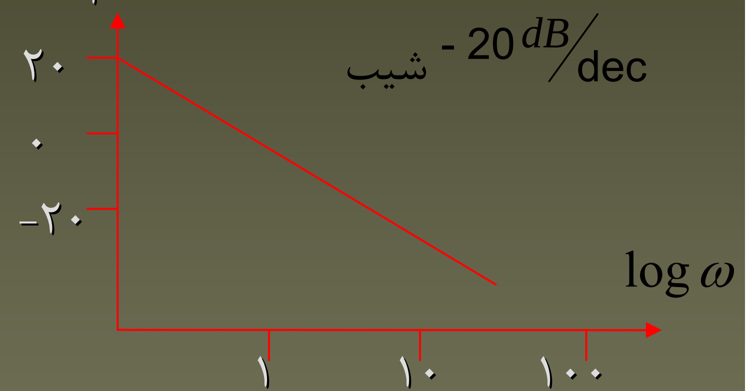
هر دو عامل مشتق گیر و انتگرالگیر از نقطه $dB = 0$ و $\omega = 1$ می گذرند.

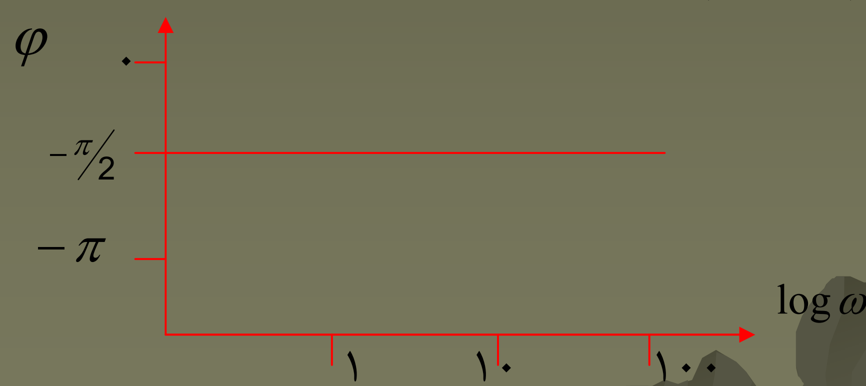
بنابراین $G(j\omega)=\dfrac{1}{j\omega}$

$G(j\omega)= j\omega$









- توان عوامل مشتق گیر انتگرالگیر

$$20\log\left|\frac{1}{(j\omega)^n}\right| = -n * 20 \quad \log|j\omega| = -20n \quad \log\omega \text{ dB}$$

$$20\log\left|(j\omega)^n\right| = n * 20 \quad \log|j\omega| = 20n \quad \log\omega \text{ dB}$$

$$\angle\frac{1}{(1+j\omega)} = -\pi/2 * n, \angle(j\omega)^n = \pi/2 * n$$

هر دو منحنی از نقطه $\text{dB}=0$ و $\omega=1$ نیز می گذرد.

- عوامل مرتبه اول $\frac{1}{1+j\omega T}$ و $(1+j\omega T)$

$$20\log\left|\frac{1}{1+j\omega T}\right| = -20\log(1+j\omega T) = -20\log\sqrt{1+\omega^2T^2}$$

$$G(j\omega)\frac{1}{1+j\omega T} = \frac{1}{\sqrt{1+\omega^2T^2}}\angle -tg^{-1}\omega T$$

در فرکانس های پایین $\omega \prec\prec \frac{1}{T}$ داریم: $\log\sqrt{1+\omega^2T^2} \rightarrow 0\text{ dB}$

از فرکانس های بالا $\omega \succ\succ \frac{1}{T}$ $\log\sqrt{1+\omega^2T^2} \rightarrow \log\sqrt{\omega^2T^2} \rightarrow \log\omega T$

یعنی در فرکانس $\omega = 1/T$ اندازه صفر می شود و در فرکانس $\omega = 10 * \left(\frac{1}{T}\right)$ اندازه برابر با -20 dB می شود. یعنی منحنی اندازه دارای دو مجانب است.

$$\text{اندازه} = 0 \quad dB \quad \text{for} \quad 0 \prec \omega \prec \frac{1}{T}$$

$$\text{شیب اندازه} = 0 \quad dB \quad \text{for} \quad \frac{1}{T} \prec \omega \prec \infty$$

فرکانس عمل برخورد در مجانب $\omega = \frac{1}{T}$ فرکانس شکست (گوشه) نام دارد.

در مورد زاویه:

$$\varphi = -tg^{-1}\omega T$$

$$\omega = 0 \Rightarrow \varphi = 0, \omega = \underbrace{\frac{1}{T}}_{\text{فرکانس شکست}} \Rightarrow \varphi = -tg^{-1}\frac{T}{T} = -tg^{-1}1 = -45^{\circ}$$

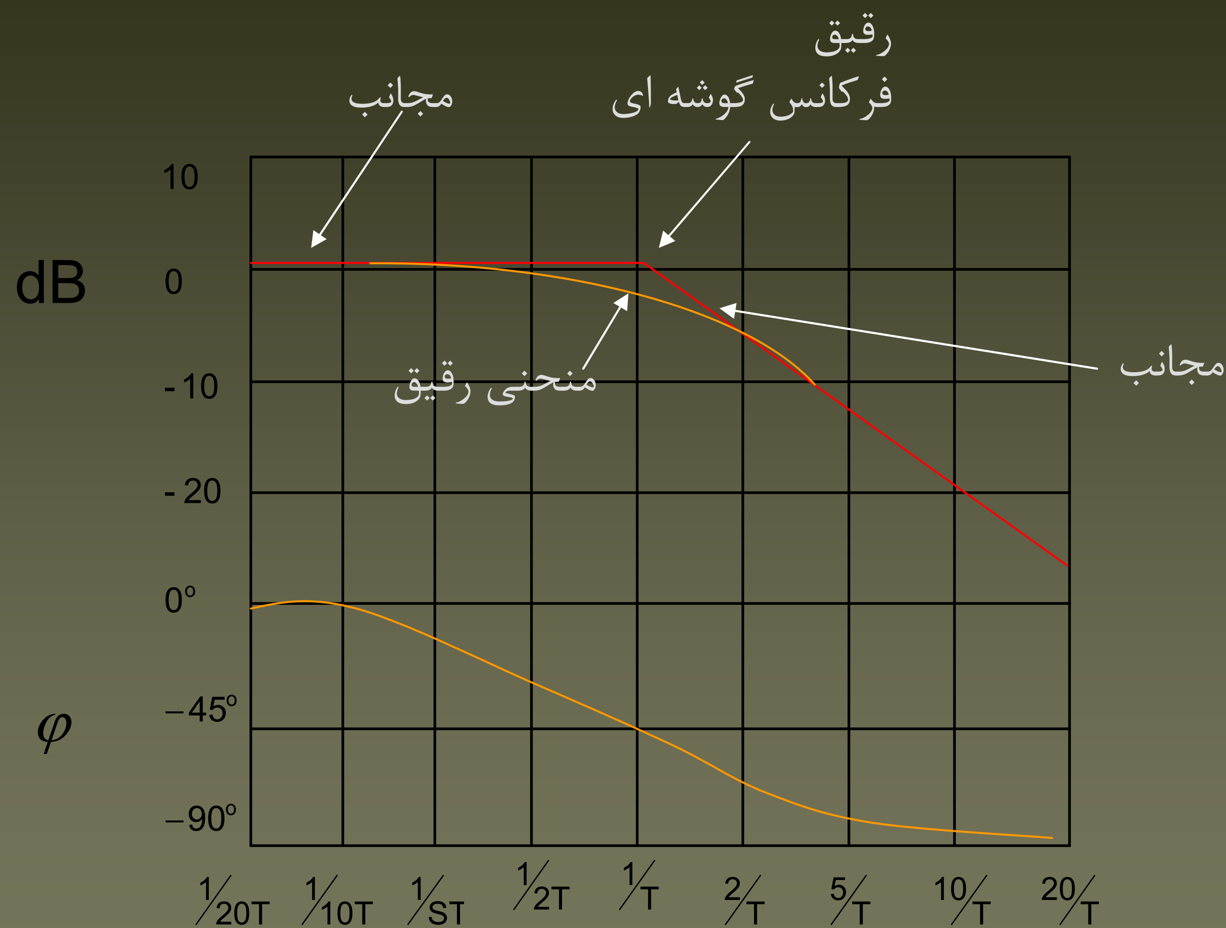
$$\omega = \infty \Rightarrow \varphi = -tg^{-1}\infty = -T/2$$

حداکثر خطای منحنی اندازه از مقدار واقعی در فرکانس گوشه ای رخ می دهد.

$$\omega = 1/T \quad \text{حداکثر خطای اندازه} = \underbrace{-20\log\sqrt{1+1}}_{\text{اندازه توسط محاسبه منحنی}} - \underbrace{0}_{\text{اندازه توسط مجانب}} = -20 \log 2 = -3.03dB$$

Bode Diagram For

$$\frac{1}{1 + j\omega T}$$



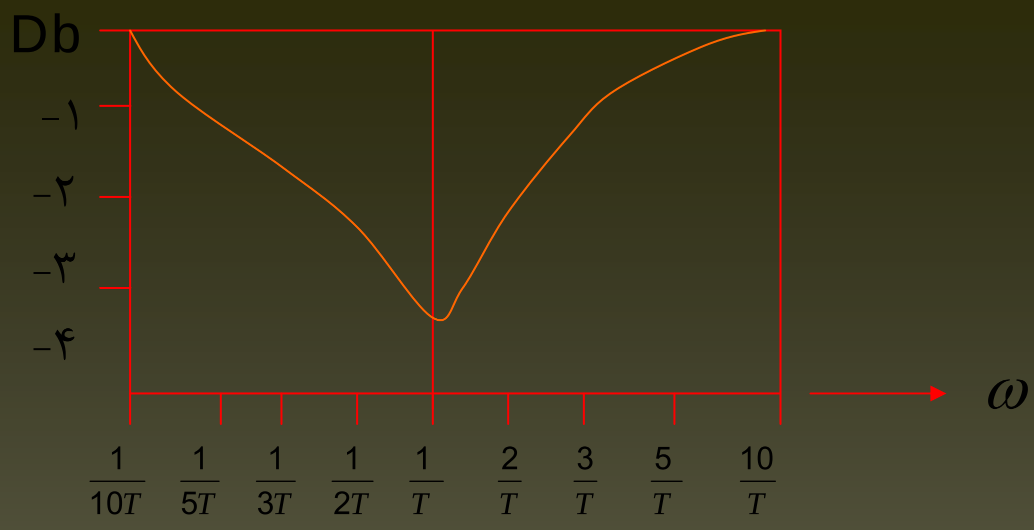
خطا در یک اکتا و پایین تر از فرکانس گوشه ای $\omega = \frac{1}{2T}$: خطای اندازه $= -20\log\sqrt{\frac{1}{4}+1} - (-20\log 1)$

$$= -20\log\frac{\sqrt{S}}{2} - 0.97dB$$

خطا در یک اکتا و بالاتر از فرکانس گوشه ای $\omega = \frac{2}{T}$: خطای اندازه $= -20\log\sqrt{2^2+1} - (-20\log 2)$

$$= -20\log\frac{\sqrt{S}}{2} - 0.97dB$$

همچنین خطای در یک دهه (decade) بالاتر یا پایین تر از فرکانس گوشه ای تقریبا -0.04 dB است.

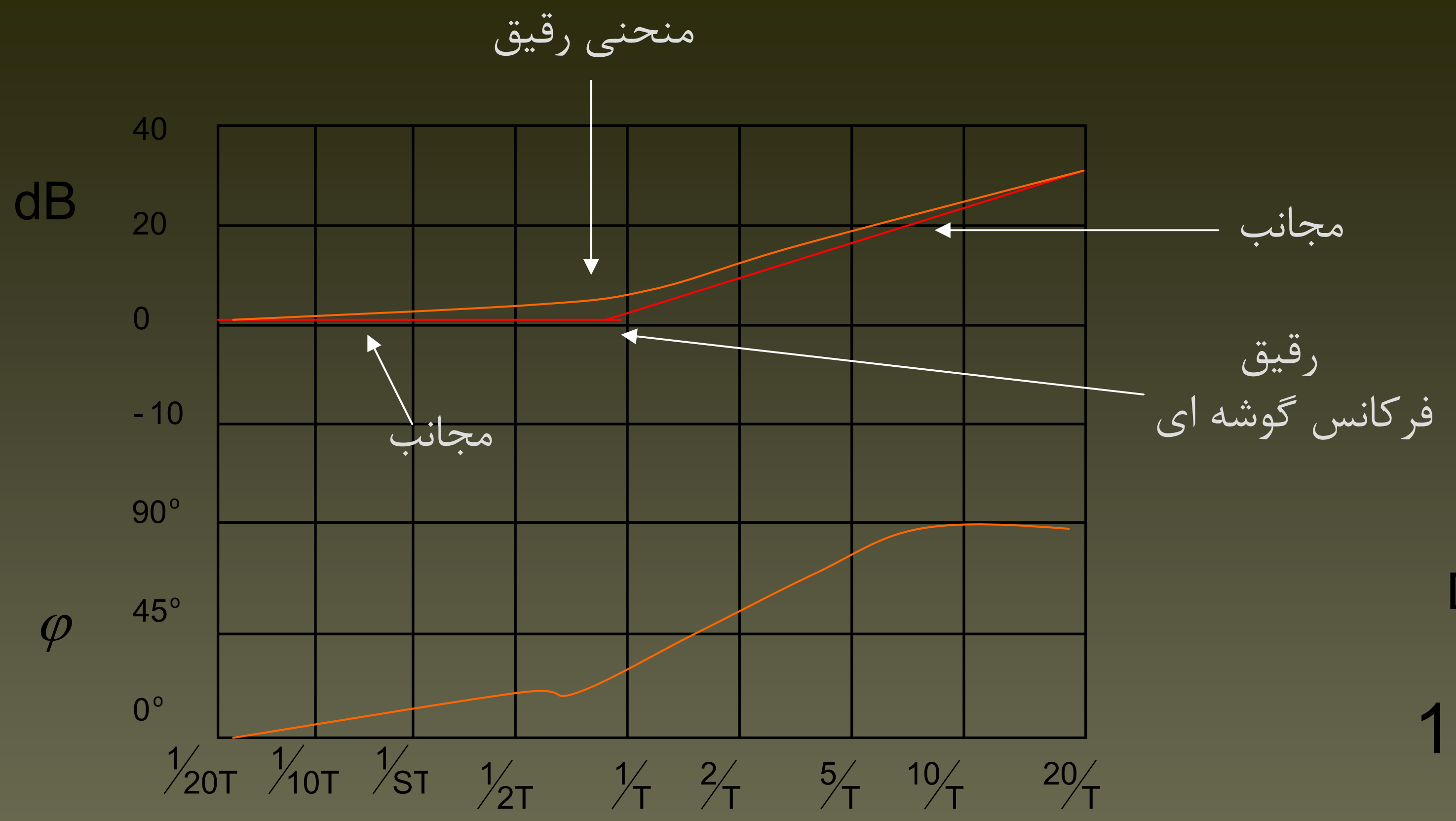


خطای لگاریتم با دور شدن از فرکانس گوشه ای $\frac{1}{1+j\omega T}$ تا صفر میل می نماید

بررسی عوامل عکس مثل $1+j\omega T$ و $\frac{1}{1+j\omega T}$ منحنی های لگاریتم دامنه و زاویه فاز فقط در علامت تفاوت دارند:

$$20\log|1+j\omega T| = -20\log\left(\frac{1}{1+j\omega T}\right)$$

$$\angle 1+j\omega T = tg^{-1}\omega T = -\angle\frac{1}{1+j\omega T}$$



Bode Diagram For

$$1 + j\omega T$$

در مورد عبارت $(1+j\omega T)^{\mp n}$ فرکانس گوشه ای همان $\omega = 1/T$ و مجانبها خط راست و مجانب پایین خط افقی odB و مجانب بالا خط با شیب $-20n \, dB/dec$ است.

خطا نیز n برابر خطای $(1+j\omega T)^{\mp n}$ و زاویه فاز در هر فرکانس خاص n برابر زاویه $(1+j\omega T)^{\mp n}$ است.

عوامل مرتبه دوم

ابتدا در مورد توان منفی

$$1+2\zeta\left(j\frac{\omega}{\omega_n}\right)+\left(j\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2 \qquad \frac{1}{1+2\zeta\left(j\frac{\omega}{\omega_n}\right)+\left(j\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}$$

$$\text{it} \quad \zeta \succ 1 \Rightarrow 2\,\text{nal Poles}$$

$$\text{it} \quad 0 \prec \zeta \prec 1 \Rightarrow 2\,\text{Complexand Conjugate}$$ مختلط و مزوج

برای ζ های کوچک تقریب مجانب دقیق نیست.

$$20\log\left|\frac{1}{1+2\zeta\left(j\frac{\omega}{\omega_n}\right)+\left(j\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}\right| = -20\log\sqrt{\left(1-\frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2+\left(2\zeta\frac{\omega}{\omega_n}\right)}$$

یعنی مجانب فرکانس پایین خط افقی است.

فرکانس پایین

$$\text{for}\quad \omega \prec\prec \omega_n \Rightarrow -20\log 1 = 20\log 1 = 0\,dB$$

فرکانس های بالا

$$\text{for}\quad \omega \succ\succ \omega_n \Rightarrow -20\log\frac{\omega^2}{\omega_n^{\ 2}} = -40\log\frac{\omega}{\omega_n}\,dB$$

یعنی مجانب فرکانس بالا خط راست با شیب $-40\,{}^{dB}\!/_{dec}$ گذرانده از نقطه ($\frac{\omega}{\omega_n}$ 1 , dB 0) است می توان نوشت:

$$\omega = 0$$

$$\omega = \omega_n \Rightarrow \varphi = -tg^{-1}\infty = -90^{o}$$

$$\omega = \infty \Rightarrow \varphi = -180^{O}$$

Bode Diagram For

$$\frac{1}{1+2\zeta\left(j\frac{\omega}{\omega_n}\right)+\left(j\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}$$

$$\varphi = \angle \frac{1}{1+2\zeta\left(j\frac{W}{W_n}\right)+\left(j\frac{W}{W_n}\right)^2}$$

$$= -tg^{-1}\frac{2\zeta\frac{W}{W_n}}{1-\left(\frac{W}{W_n}\right)^2}$$

$$1+2\zeta\left(j\frac{\omega}{\omega_2}\right)+\left(j\frac{\omega}{\omega_2}\right)^2$$

حالا پاسخ فرکانسی (منحنی Bode) برای عامل

می توان با عوض نمودن علامت منحنی های لگاریتم دامنه و زاویه فاز عبارت با توان منفی یعنی:

$$G(j\omega)=\frac{1}{1+2\zeta\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)+\left(j\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}$$ ترسیم نمود.

- تعیین فرکانس تشدید (W_n) یا حالت اکسترمم منحنی اندازه (در صورت وجود) برای عبارت با توان منفی یعنی :

$$G(j\omega)=\frac{1}{1+2\zeta\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)+\left(j\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}$$

داریم:

$$|G(j\omega)|=\frac{1}{\sqrt{\left(1-\frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2+\left(2\zeta\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}}$$

مقدار حداکثر اندازه ($G(jW)$) (یا فرکانس تشدید) در صورت وجود در جایی اتفاق می افتد که تابع مخرج یعنی: $g(\omega)=\left(1-\frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2+\left(2\zeta\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2$ مینیمم (حداقل) شود. می توان نوشت:

$$g(\omega)=\left[\frac{\omega^2-\omega_n^2(1-2\zeta^2)}{\omega_n^2}\right]+4\zeta^2(1-\zeta^2)$$

مینیمم $g(\omega)$ در $\omega=\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$ اتفاق می افتد . یعنی فرکانس تشدید ω_r

$$\omega=\omega_r=\omega_n\sqrt{1-2\zeta^2}\quad \text{for}\quad 0\le\zeta\le 0.707$$

اگر ζ به صفر میل کند فرکانس تشدید به ω_n میل می کند. و به ازای $0 \prec \zeta \le 0.707$ فرکانس تشدید میرا $W_d = W_n\sqrt{1-\zeta^2}$ کوچکتر می شود. به ازای $\zeta \succ 0.707$ فرکانس تشدید وجود ندارد.

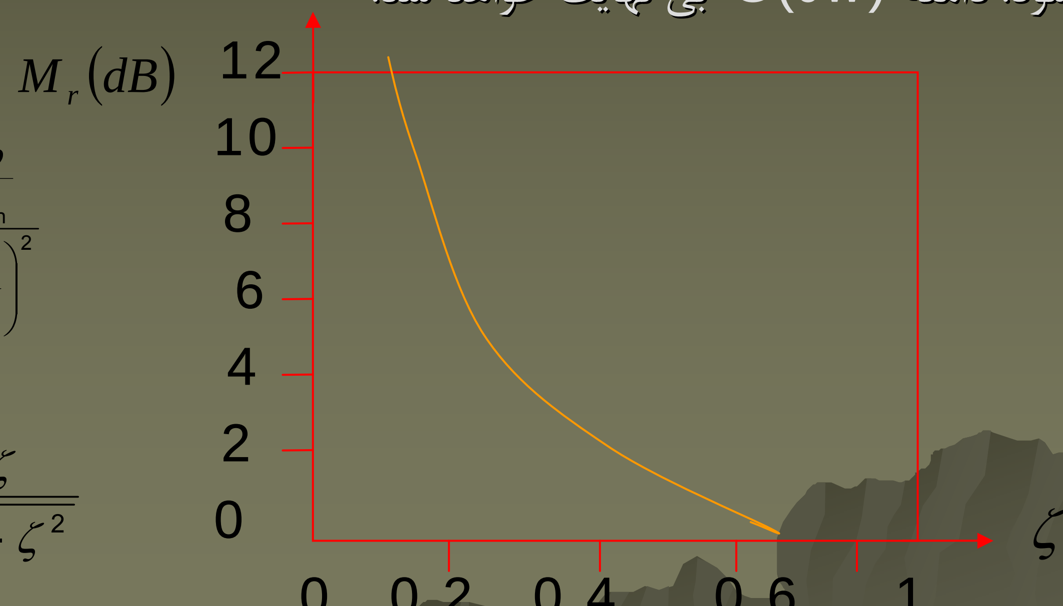
با افزایش فرکانس W اندازه $|G(j\omega)|$ کم می شود.

به ازای $0 \prec \zeta$ اندازه از odB کمتر می شود. مقدار دامنه (اندازه) در فرکانس تشدید یا مقدار M_r عبارت است از :

$$M_r = |G(j\omega)|_{\max} = |G(j\omega_r)| = \frac{1}{2\zeta\sqrt{1-\zeta^2}} \quad for\ 0 \le \zeta \le 0.707$$

به ازای $\zeta \succ 0.707$ داریم $M_r = 1$

با میل ζ به صفر M_r به بی نهایت میل می کند. یعنی اگر یک سیستم نامیرا در فرکانس طبیعی اش تحریک شود. دامنه $G(Jw)$ بی نهایت خواهد شد.



$$\varphi = \angle \frac{1}{1+2\zeta\left(j\frac{\omega}{\omega_n}\right)+\left(j\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2} = -tg^{-1}\frac{2\zeta\frac{\omega}{\omega_n}}{1-\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}$$

$$= -tg^{-1}\frac{\sqrt{1-2\zeta^2}}{\zeta} = -\pi/2 + \sin^{-1}\frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}$$

روش ترسیم دیاگرام های Bode

۱- نوشتن تابع تبدیل به صورت حاصلضرب عوامل پایه ای در صورت و مخرج

۲- تعیین فرکانسهای گوشه ای هر کدام از عوامل (پرانتز های صورت و مخرج)

۳- ترسیم منحنی های مجانبی لگاریتم دامنه (اندازه) و سپس ترسیم منحنی های دقیق

۴- ترسیم منحنی های زائیه فاز توسط منحنی های زاویه فاز عوامل پایه ای

مزیتهای دیاگرام های Bode (نسبت به دیاگرامهای دیگر پاسخ فرکانسی)

۱- با استفاده از مجانبها ترسیم دیاگرامها خیلی سریع انجام می شود.

۲- ترسیم دیاگرامهای عوامل پایه ای آسان است.

۳- توانایی اصلاح رفتار با استفاده از دیاگرامهای عوامل پایه ای به جبرانسازها

مثال: دیاگرام های Bode را برای تابع تبدیل

$$G(j\omega)=\frac{10\,(j\omega+3)}{(j\omega)(j\omega+2)\left[(j\omega)^2+j\omega+2\right]}$$

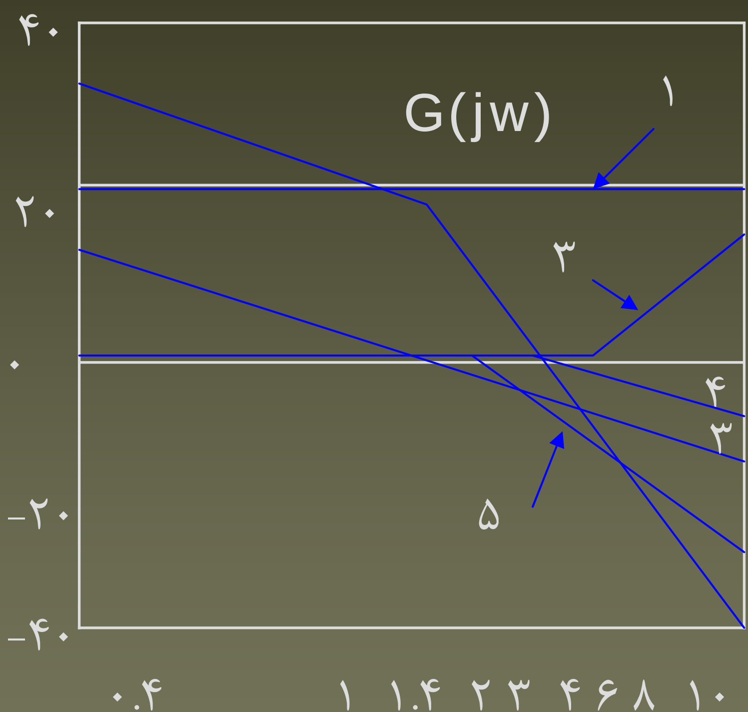
رسم کنید.

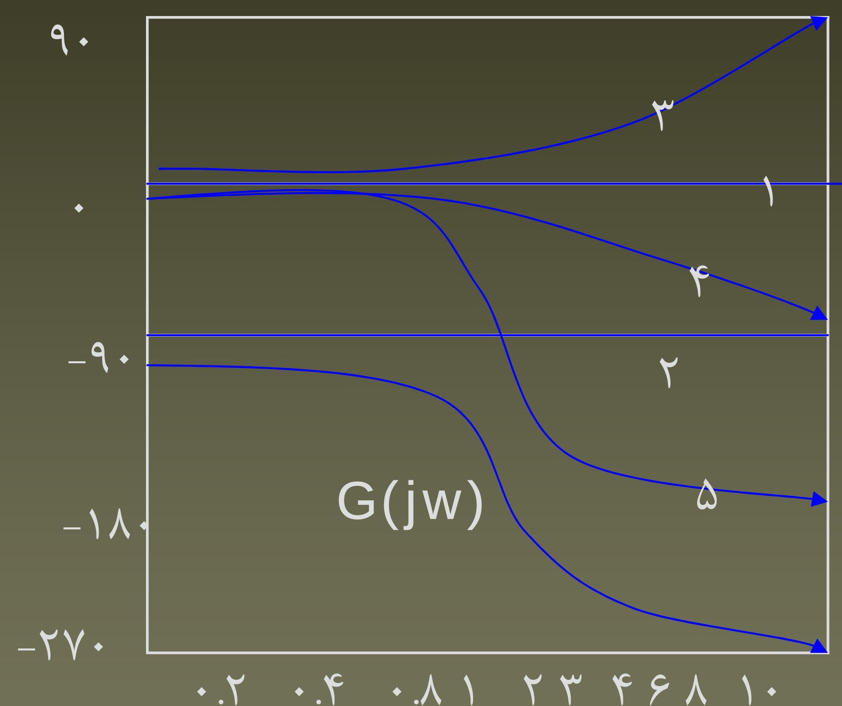
می توان نوشت:

$$G(j\omega)=\frac{7.5\left(\dfrac{j\omega}{3}+1\right)}{(j\omega)\left(\dfrac{j\omega}{2}+1\right)\left[\dfrac{(j\omega)^2}{2}+\dfrac{j\omega}{2}+1\right]}$$

عوامل و فرکانسهای گوشه ای عبارت اند از:

7.5	$(j\omega)^{-1}$	$\frac{j\omega}{3}+1$	$\left(\frac{j\omega}{2}+1\right)^{-1}$	$\left[\frac{(j\omega)^2}{2}+\frac{j\omega}{2}+1\right]$
بدون ۵ گوشه ای	بدون ۵ گوشه ای	$\omega=3$	$\omega=2$	$\omega=\sqrt{2},\zeta=0.3536$





منحنی کل با جمع جبری منحنی های مجزا بدست می آید. قبل از $\omega=\sqrt{2}$ شیب برابر $-20\,{}^{dB}\!/_{dec}$ و در $\omega=\sqrt{2}$ (از قطبهای مختلط مزدوج شیب از $-20\,{}^{dB}\!/_{dec}$ به $-60\,{}^{dB}\!/_{dec}$ می رسد. در فرکانس گوشه ای بعدی $\omega=2$ (قطب مرتبه اول) شیب به $-80\,{}^{dB}\!/_{dec}$ می رسد.

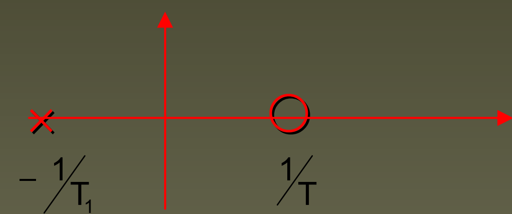
در فرکانس گوشه ای بعدی $\omega = 3$ (اثر صفر) شیب از $-80 \, {}^{dB}\!/_{dec}$ به $-60 \, {}^{dB}\!/_{dec}$ می رسد.

در منحنی زاویه فاز ، جمع جبری منحنی های فاز پایه ، منحنی فاز کامل را بدست می آورد.

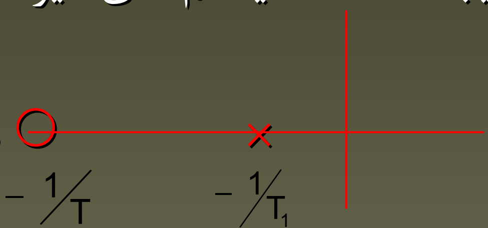
سیستم های مینیمم فاز و سیستم های غیر مینیمم فاز :

توابع تبدیلی در نیمه راست صفحه S نه قطب و نه صفر دارند ایجاد کننده سیستم های مینیمم فاز و

توابع تبدیلی در نیمه راست صفحه S قطب و یا صفر دارند ایجاد کننده سیستم های غیر مینیمم می باشند.



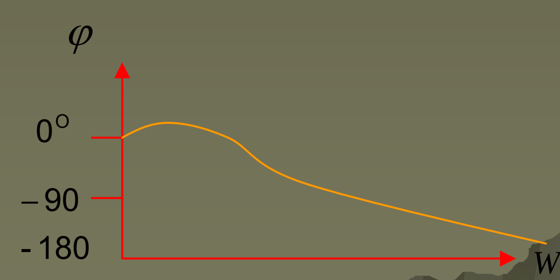
سیستم غیر مینیمم فاز

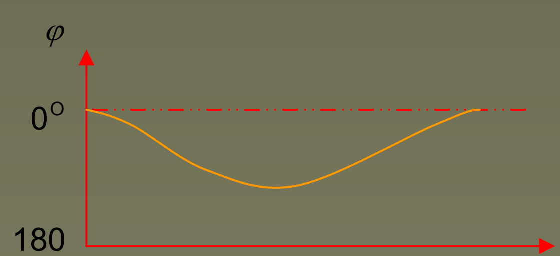


سیستم مینیمم فاز

$$G_2(S) = \frac{1 - TS}{1 + T_1 S}$$

$$G_1(S) = \frac{1 + TS}{1 + T_1 S}$$





اگر P درجه چند جمله ای صورت G(S) و ۹ درجه چند جمله ای مخرج G(S) باشد، سیستم مینیمم فاز سیستمی است که با میل به بی نهایت شیب منحنی لگاریتم دامنه $-20(q-p)\,dB/dec$ و زاویه فاز از $-90(q-p)$ برسد.

تعیین تجربی تابع تبدیل:

اگر یافتن مدل یک سیستم با روشهای تحلیلی انجام شدنی نباشد ، آن را با تحلیل تجربی بدست می آورند. یکی از مزیتهای عمده از فرکانسهای سیستم اندازه گیری شده و بکار بردن تقریبهای مجانبی و فرکانسهای گوشه ای ترسیم نمود. آزمایشهای پاسخ فرکانسی توسط در معرض مولد های سینوسی قرار دادن سیستم انجام می شود.

برای تعیین تابع تبدیل پس از ترمیم مجانبها به نکات زیر توجه شود:

۱- شیب مجانبها باید مضاربی از $\pm 20\,dB/dec$ باشد. اگر در $\omega=\omega_1$ شیب منحنی دامنه از $-20\,dB/dec$ به $-40\,dB/dec$ برسد عامل $\frac{1}{1+2\zeta\left(j\frac{\omega}{\omega_2}\right)+\left(j\frac{\omega}{\omega_2}\right)^2}$ در تابع تبدیل وجود دارد. در این صورت فرکانس طبیعی نامیرایی این عامل با فرکانس گوشه ای ω_2 برابر است. نسبت میرایی ζ را می توان با مقایسه دامنه قله تشدید در فرکانس گوشه ای ω_2 منحنی تجربی (صفحه ۱۵۶) بدست آورد. بر این اساس کلیه عوامل پایه ای مشخص می شوند.

۲- ضریب بهره K (Gain) را می توان با توجه به منحنی تجربی در فرکانسهای پایین بدست آورد.

در عاملهای $1+j\frac{\omega}{\omega_1}, 1+2\zeta\left(j\frac{\omega}{\omega_2}\right)+\left(j\frac{\omega}{\omega_2}\right)^2$ ، اگر ω به سمت صفر میل کند (فرکانسهای پایین) عامل برابر ۱ می شود.

تابع تبدیل سینوسی $G(j\omega)$ عبارت است از:

$$\lim_{s\to 0} G(j\omega)=\frac{k}{(j\omega)^{\lambda}}$$

که نشاندهنده نوع سیستم (عمدتا ۰ و ۱ و ۲) است.

برای $\lambda=0$ سیستم نوع صفر

$$G(j\omega)=\frac{K}{(j\omega)^2} \quad \text{for} \quad \omega \prec\prec 1$$

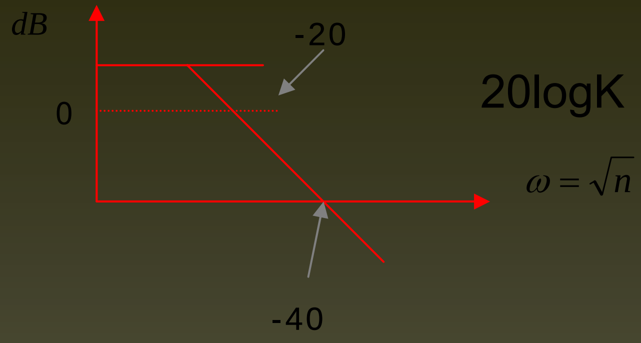
$$\Rightarrow 20\log|G(j\omega)| = 20\log K - 20\log\omega \qquad \text{for} \qquad \omega \prec\prec 1$$

یعنی خطی با شیب $-20\,{}^{dB}/_{dec}$ و عرض از مبدا 20 log K . (یعنی در $\omega=\sqrt{k}$ خط odB را قطع می کند.) برای $\lambda=2$ سیستم نوع دو

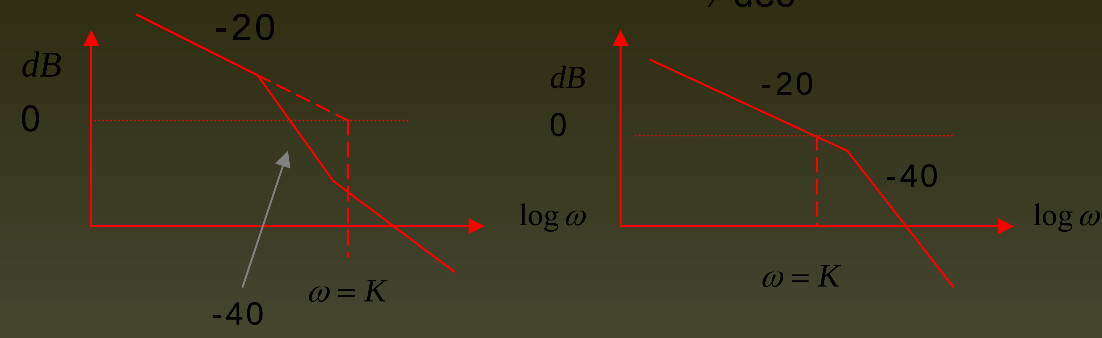
$$G(jW)=\frac{K}{(jW)^2} \quad \text{for} \quad \omega \prec\prec 1$$

$$\Rightarrow 20\log|G(j\omega)| = 20\log K - 40\log\omega \qquad \omega \prec\prec 1$$

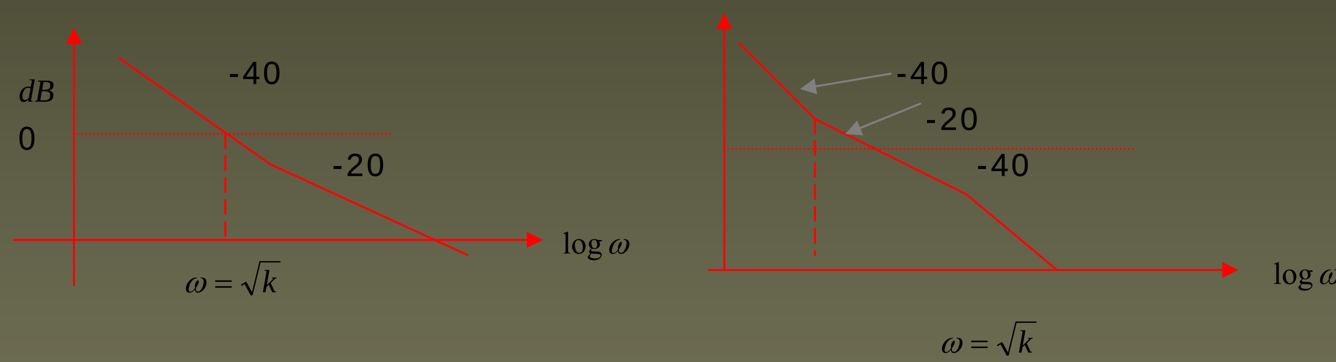
یعنی خطی با شیب $-40\,{}^{dB}\!/_{dec}$ و عرض از مبدا 20 log K . (یعنی در $\omega = \sqrt{n}$ خط ObB را قطع می کند



سیستم نوع ۰



سیستم نوع ۱



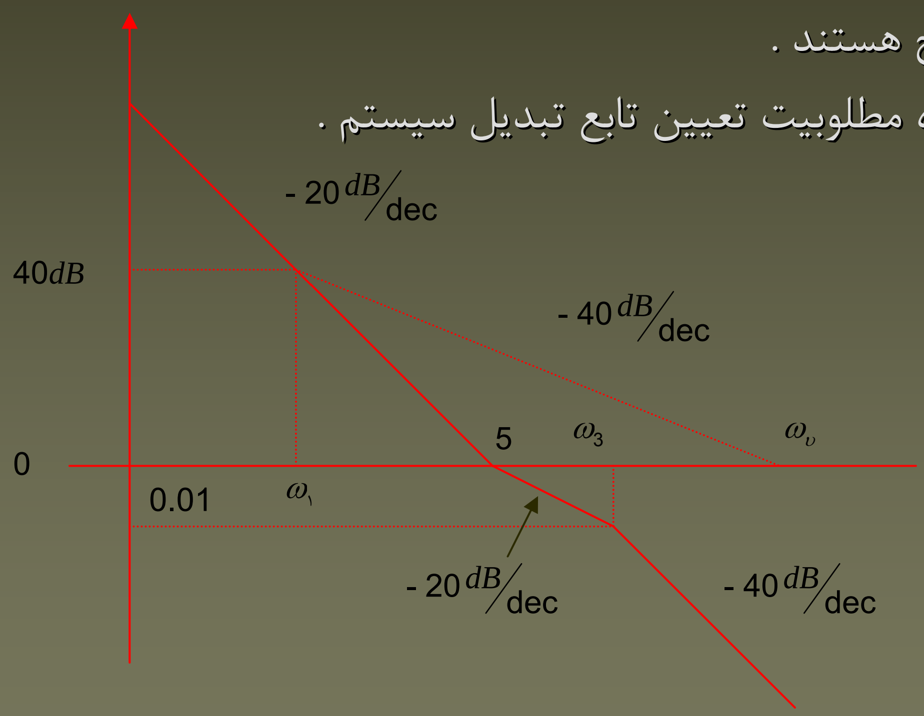
سیستم نوع ۲

منحنی زاویه بدست آمده از آزمایش تجربی می تواند تابع تبدیل بدست آمده از منحنی لگاریتم دامنه را معتبر نماید. برای سیستم های مینیمم فاز این دو با هم تطابق دارند (منحنی فاز تجربی و منحنی فاز تعیین شده توسط تابع بدست آمده از منحنی های لگاریتم دامنه.) (هم در فرکانس های بالا و هم در فرکانس های پایین) .

اگر چه زاویه فاز تجربی در فرکانس های بالا (در مقایسه با فرکانسهای گوشه ای) برابر $-\pi/2\,(q-p)$ نباشد ، نشاندهنده تابع تبدیل غیر مینیمم فاز (صفر یا قطب در سمت راست مینیمم صفحه) است.

P و q درجه بندی چند جمله ای های صورت و مخرج هستند .

مثال ۱: با توجه به دیاگرام Bode تجربی نشاندهنده مطلوبیت تعیین تابع تبدیل سیستم .



حل: در فرکانس های پایین شیب $-20\,dB/dec$

یعنی سیستم نوع ۱:

$$\frac{k}{j\omega} \quad \text{شیب} \quad 20 = \frac{40}{\log \frac{\omega_\upsilon}{\omega_1}} \qquad (*)$$

۲- در $\omega_۱$ شیب از $-20\,{dB}/{dec}$ به $-40\,{dB}/{dec}$ یعنی عامل $\dfrac{1}{۱ + j\dfrac{\omega}{\omega_1}}$ برای محاسبه $\omega_۱$ داریم:
شیب

$$40 = \frac{40}{\log\frac{S}{\omega_1}} \Rightarrow \log\frac{S}{\omega_۱} = \frac{40}{40} = 1 \Rightarrow \frac{S}{\omega_۱} = 10 \Rightarrow \omega_1 = 0.5$$

با توجه به رابطه بالا(*) می توان نوشت:

$$\log\frac{\omega_\upsilon}{0.5} = 2 \Rightarrow \frac{\omega_\upsilon}{0.5} = 100 \Rightarrow \omega_\upsilon = 50 = k$$

۳- در $\omega = S$ تغییر شیب از $-40\,{dB}/{dec}$ به $-20\,{dB}/{dec}$ یعنی عامل $\left(1 + j\dfrac{\omega}{S}\right)$

۴- در ω_3 تغییر شیب از $-20\,{dB}/{dec}$ به $-40\,{dB}/{dec}$ یعنی عامل $\dfrac{1}{1 + j\dfrac{\omega}{\omega_3}}$

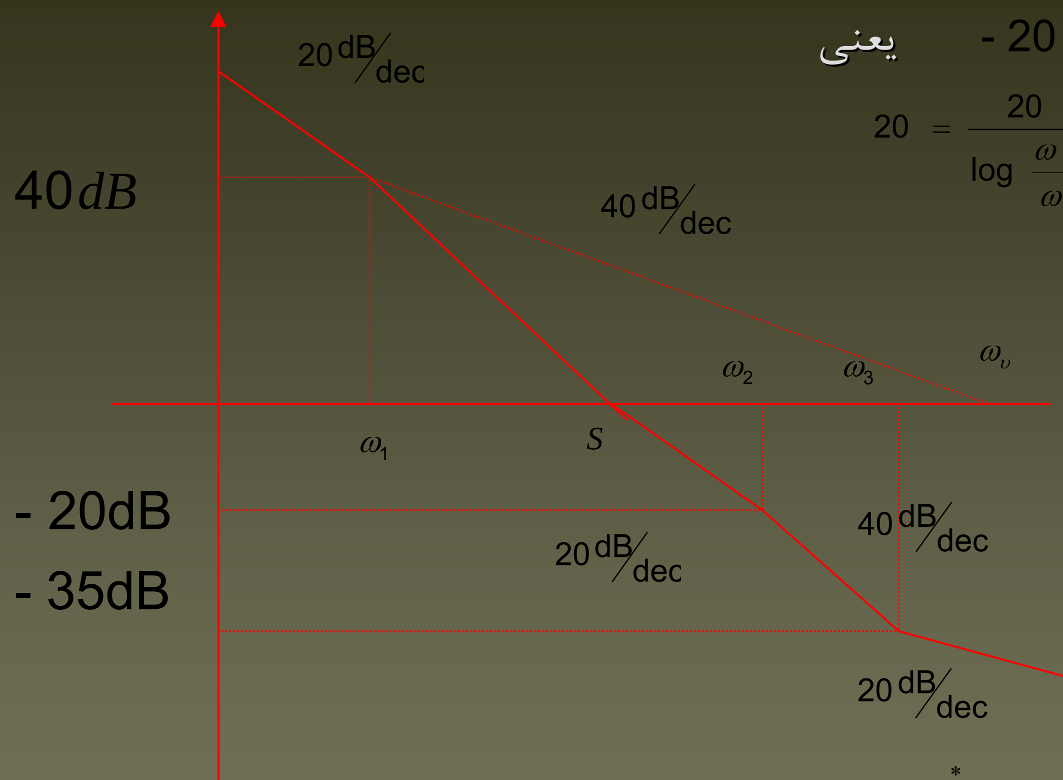
$$20 = \frac{10}{\log\frac{\omega_3}{S}} \Rightarrow \log\frac{\omega_3}{S} = 0.5 \Rightarrow \omega_3 = S\sqrt{10}$$

بنابراین تابع تبدیل تعیین می شود:

$$G(j\omega) = \frac{50\left(1 + j\frac{\omega}{S}\right)}{j\omega\left(1 + j\frac{\omega}{0.5}\right)\left(1 + j\frac{\omega}{S\sqrt{10}}\right)}$$

مثال ۲: با توجه به دیاگرام Bode تجربی نشانداده شده ، مطلوبیت تعیین تبدیل سیستم

حل:



۱- در فرکانس پایین شیب برابر $-20\, dB/dec$ یعنی

سیستم نوع ۱ $\frac{k}{j\omega}$ بنابراین (*) $20 = \frac{20}{\log \frac{\omega_{\omega}}{\omega_{1}}}$

۲- در ω_{1} شیب از $-20\, dB/dec$ به $-40\, dB/dec$ یعنی عامل $\frac{1}{1+j\frac{\omega}{\omega_1}}$ و برای ω_{υ}

محاسبه ω_{1} می توان نوشت:

$$40 = \frac{40}{\log \frac{S}{\omega_1}} \Rightarrow \log \frac{S}{\omega_1} = 1 \Rightarrow \frac{S}{\omega_1} = 10 \Rightarrow \omega_1 = 0.5 \Rightarrow \overset{*}{\log} \frac{\omega_{\upsilon}}{0.5} = 2 \Rightarrow \frac{\omega_{\upsilon}}{0.5} = 100 \Rightarrow \omega_{\upsilon} = 50 = K$$

۳- در $\omega = S$ تغییر شیب از $-40\,{}^{dB}\!/_{dec}$ به $-20\,{}^{dB}\!/_{dec}$ یعنی عامل $\left(1+j\frac{\omega}{S}\right)$

۴- در ω_2 تغییر شیب از $-20\,{}^{dB}\!/_{dec}$ به $-40\,{}^{dB}\!/_{dec}$ یعنی عامل $\frac{1}{1+j\frac{\omega}{\omega_2}}$ و محاسبه ω_2

$$20 = \frac{20}{\log\frac{\omega_2}{S}} \Rightarrow \log\frac{\omega_2}{S} = 1 \Rightarrow \omega_2 = 50$$

۵- در ω_3 مجددا تغییر شیب از $-40\,{}^{dB}\!/_{dec}$ به $-20\,{}^{dB}\!/_{dec}$ یعنی عامل $\left(1+j\frac{\omega}{\omega_3}\right)$ و محاسبه ω_3

$$40 = \frac{15}{\log\frac{\omega_3}{\omega_2}} \Rightarrow \log\frac{\omega_3}{50} = \frac{15}{40} \Rightarrow \omega_3 = G(j\omega)\frac{50\left(1+\overset{*}{}\frac{\omega}{S}\right)\left(1+j\frac{\omega}{}\right)}{j\omega\left(1+j\frac{\omega}{0.5}\right)\left(1+j\frac{\omega}{50}\right)}$$

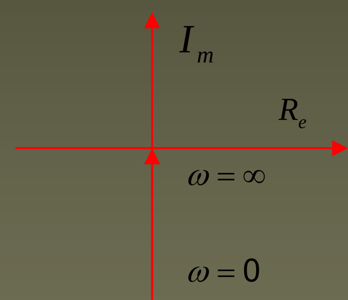
نمودار قطبی یاNyquist:

نمودار قطبی تابع تبدیل سینوسی $G(j\omega)$ نمودار دامنه $G(j\omega)$ بر حسب زاویه $G(j\omega)$ در مختصات قطبی وقتی ω از صفر تا بی نهایت تغییر می کند. یعنی نمودار قطبی $|G(j\omega)|\angle G(j\omega)$ با تغییر ω از صفر تا ω است.

- نمودار قطبی Nyquist عاملهای مرتبه اول:

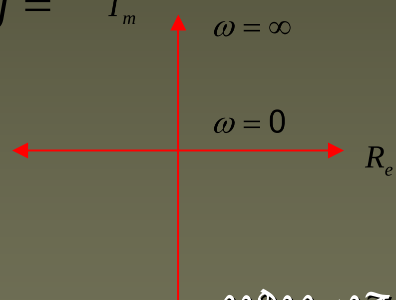
فقط تست منفی محور موهومی

$$G(j\omega)=\frac{1}{j\omega}=-j\frac{1}{\omega}=\frac{1}{\omega}\angle-90^{\circ}$$



$$G(j\omega)=\frac{١}{j\omega}$$

$$G(j\omega)=\omega j=$$



$$G(j\omega)=\omega j$$

فقط تست مثبت محور موهومی

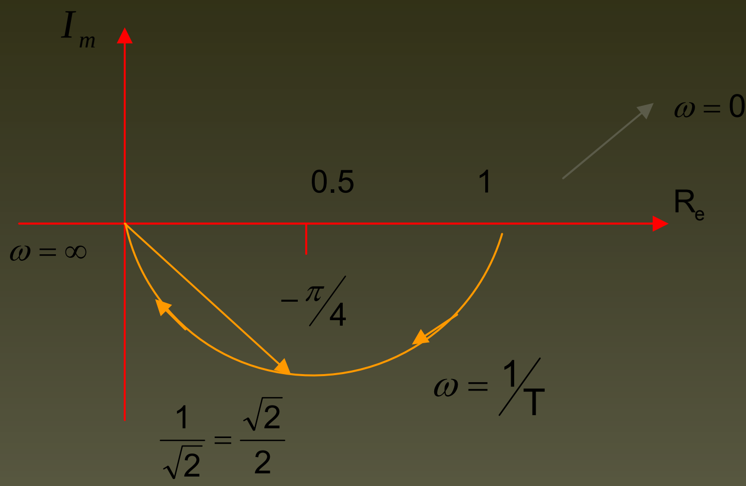
$$G(j\omega)=\frac{1}{1+j\omega T}=\frac{1}{\sqrt{1+\omega^2T^2}}\angle-tg^{-1}\omega T$$

$$\omega=0\ \Rightarrow G(0)=1\angle0^{\circ}$$

$$\omega=\frac{1}{T}\Rightarrow G\left(j\frac{1}{T}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}\angle-\pi/4^{o}$$

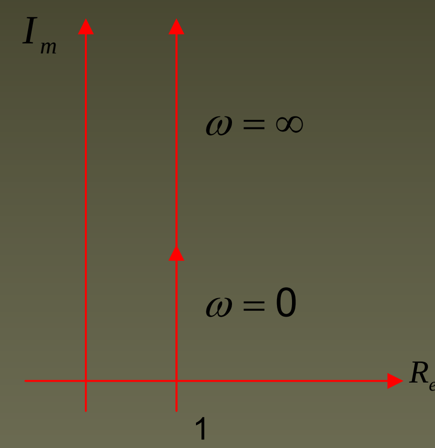
$$\frac{\sqrt{2}}{2}=0.707$$

با میل به بی نهایت دامنه یا اندازه $G(j\omega)$ به صفر و زاویه آن به $-\pi/2^{\circ}$ میل می کند.



$$G(j\omega) = \frac{1}{1 + j\omega T}$$

$$G(j\omega) = 1 + j\omega T$$



– نمودار قطبی Nyquist عاملهای مرتبه دوم:

$$\left[1 + 2\zeta\left(j\frac{w}{w_n}\right) + \left(j\frac{w}{w_n}\right)^2\right]^{\mp 1}$$

تمرین های درس کنترل اتوماتیک:

سیستم زیر با فیدبک واحدرادرنظربگیرید:

$$G(s)=\frac{k}{(S+2)(S+4)(S+6)}$$

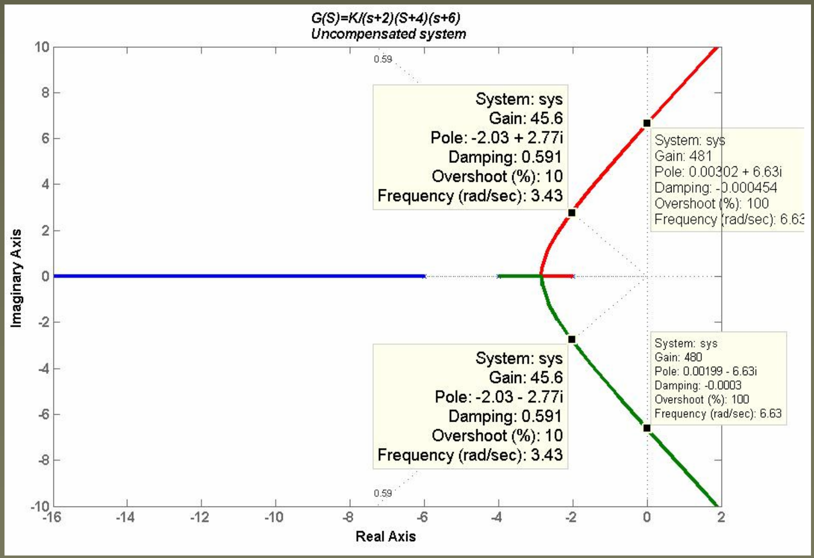
جبرانسازی طراحی کنید که بدون اینکه مکان قطب های غالب حلقه بسته تغییر زیادی داشته باشد.قطب های غالب با overshoot.٪۱۰ در سیستم جبران نشده بدست می‌آیند

جواب:

. به کمک overshoot می‌توان نسبت میرایی قطب های غالب را بدست آورد

مکان هندسی این سیستم بدون جبران کننده در شکل زیر رسم شده است.

مکان قطب های غالب نیز در شکل مشخص است.



$K_{Pnew} = 20$

با توجه به اینکه درسوال گفته شده مکان قطب های غالب تغییرچندانی نداشته باشند،بنابراین باید ازجبرانساز پسفاز استفاده کنیم.

نسبت میرایی قطب های غالب $\xi = 0.59$

فرکانس طبیعی نامیرایی قطب های غالب: $\omega=3.4$

در قطب‌های غالب gain ضریب $K = 45.6$

$$K_{Pold} = \lim SG(S) = \frac{45.6}{48} = 0.95$$

$$K_{Pnew} = 20$$

$$G_c(S) = \frac{S+Z}{S+P_c}$$

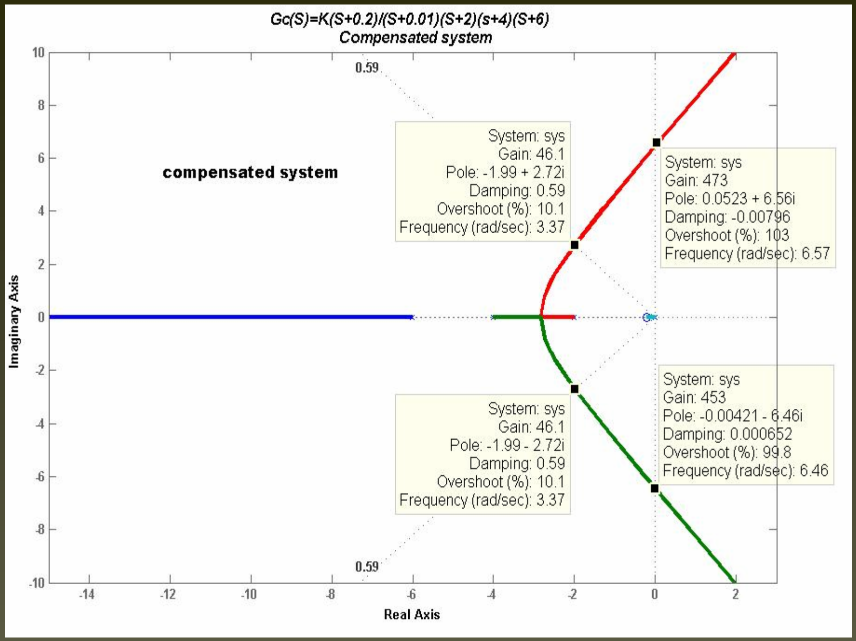
$$\frac{K_{Pnew}}{K_{Pold}} = \frac{Z_C}{P_C}$$

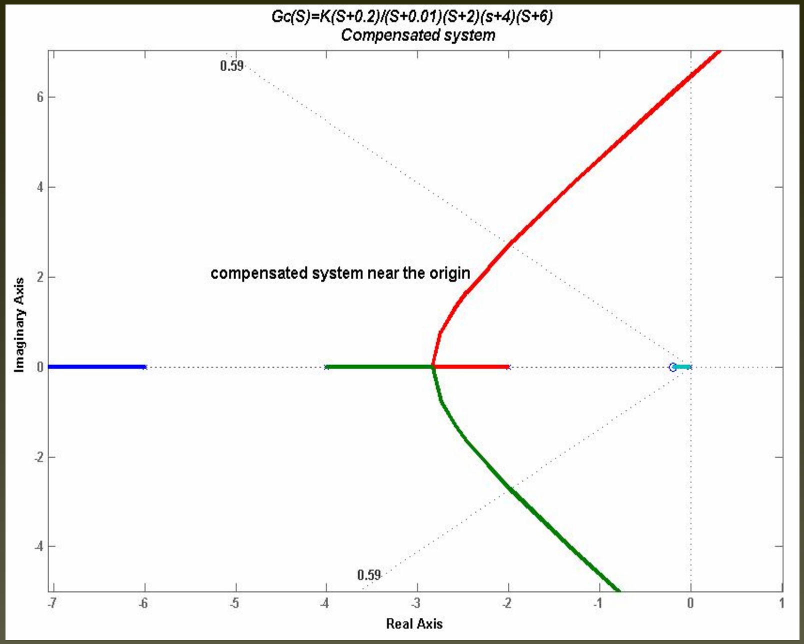
مقدار 21 و مقدارضریب برابر $Zc=0.2$. بادر نظرگرفتن $Pc=0.01$ بدست می‌آید

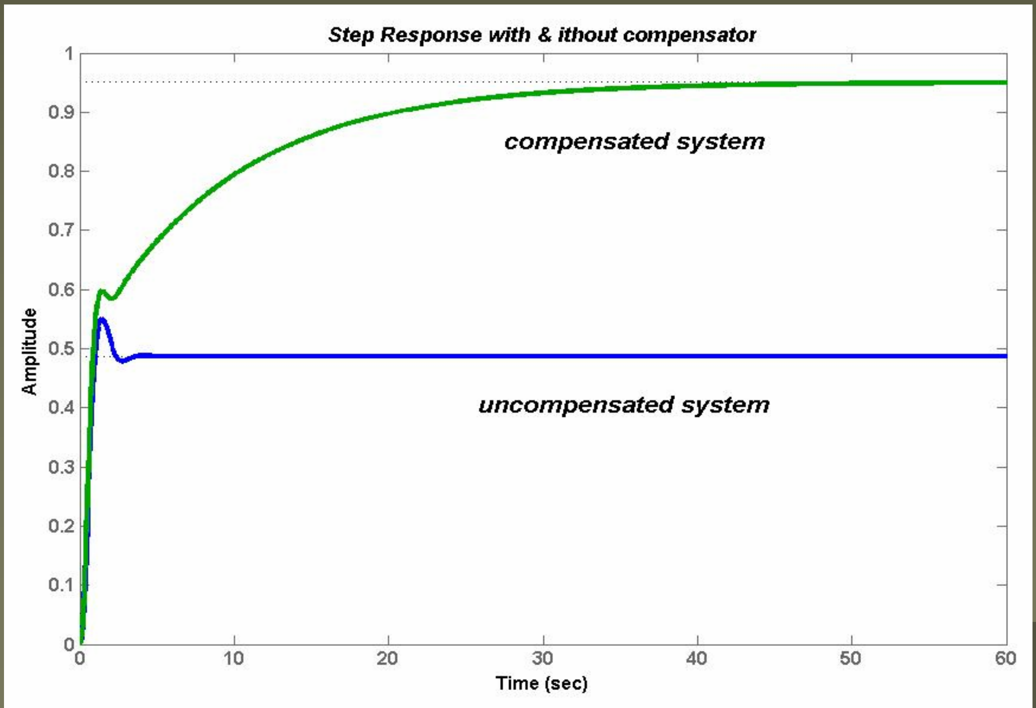
بنابراین جبرانسازبه شکل زیر خواهدبود.

$$G_c(S) = \frac{S+0.2}{S+0.01}$$

$$G(S) = \frac{K(S+0.2)}{(S+0.01)(S+2)(S+4)(S+6)}$$


Gc(S)=K(S+0.2)/(S+0.01)(S+2)(s+4)(S+6)
Compensated system
compensated system
System: sys
Gain: 46.1
Pole: -1.99 + 2.72i
Damping: 0.59
Overshoot (%): 10.1
Frequency (rad/sec): 3.37
System: sys
Gain: 473
Pole: 0.0523 + 6.56i
Damping: -0.00796
Overshoot (%): 103
Frequency (rad/sec): 6.57
System: sys
Gain: 46.1
Pole: -1.99 - 2.72i
Damping: 0.59
Overshoot (%): 10.1
Frequency (rad/sec): 3.37
System: sys
Gain: 453
Pole: -0.00421 - 6.46i
Damping: 0.000652
Overshoot (%): 99.8
Frequency (rad/sec): 6.46
Real Axis
Imaginary Axis


Gc(S)=K(S+0.2)/(S+0.01)(S+2)(s+4)(S+6)
Compensated system
compensated system near the origin
Real Axis
Imaginary Axis


Step Response with & ithout compensator
compensated system
uncompensated system
Amplitude
Time (sec)

باتوجه به اینکه جبرانساز مورداستفاده جبرانسازپسفازاست،رفتارحالت گذراتغییرچندانی نمی‌کند.اماخطای حالت ماندگاربسیارکوچکتری با جبرانسازبدست می‌آید

-سیستم زیربافیدبک واحدرادرنظربگیرید

$$G(S)=\frac{K}{(s^2+20S+101)(S+20)}$$

ثانیه است.0.5 و زمان نشست برابر 0.4نسبت میرایی قطب‌های غالب برابر

الف)مکان قطب‌های غالب را پیداکنید.

صفرجبرانساز رابیابید.15-ب)اگر قطب جبرانساز در

ج)ضریب بهره‌ی سیستم رابیابید.

د)رفتارسیستم بدون جبرانسازوباجبرانسازرامقایسه کنید.

جواب:

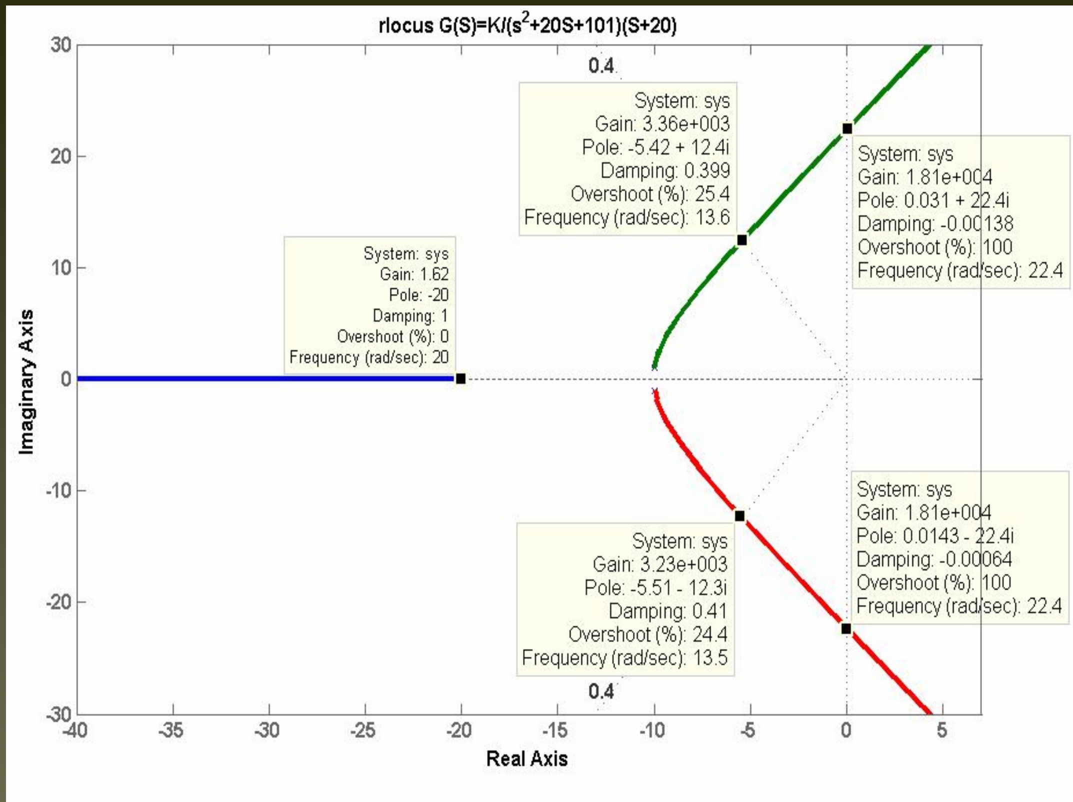
$$T_s=\frac{4}{\xi\omega_n}\Rightarrow\omega_n=\frac{4}{\xi T_S}=\frac{4}{0.4\times0.5}$$

$$\omega_n=20$$

$$S=-\xi\omega_n\pm\sqrt{1-\xi^2}\,\omega_n j$$

$$S=-8\pm18.3j$$

مکان هندسی سیستم بدون جبرانساز به شکل زیر خواهدبود



همانگونه که از نمودارمکان هندسی نیز مشخص است قطب های غالب روی مکان قرارندارند.

اگرشرط اندازه را چک کنیم خواهیم داشت:

$$180-[(Tang^{-1}\frac{17.3}{2})+(Tang^{-1}\frac{19.3}{2})+(Tang^{-1}\frac{18.3}{12})]=$$

$$180-(83.4+84.1+56.7)=44.1$$

$$G_c(S) = \frac{K(S+0.2)}{(S+15)(S^2+20S+101)(S+20)}$$

جبرانسازبایداین کمبودزاویه راجبران کند.

$$Tang^{-1}\frac{18.3}{7} = 69.1$$

$$180 - 69.1 - 44.1 = 66.8$$

$$Tang\ 66.8 = \frac{18.3}{\Delta x} \Rightarrow \Delta x = 7.8$$

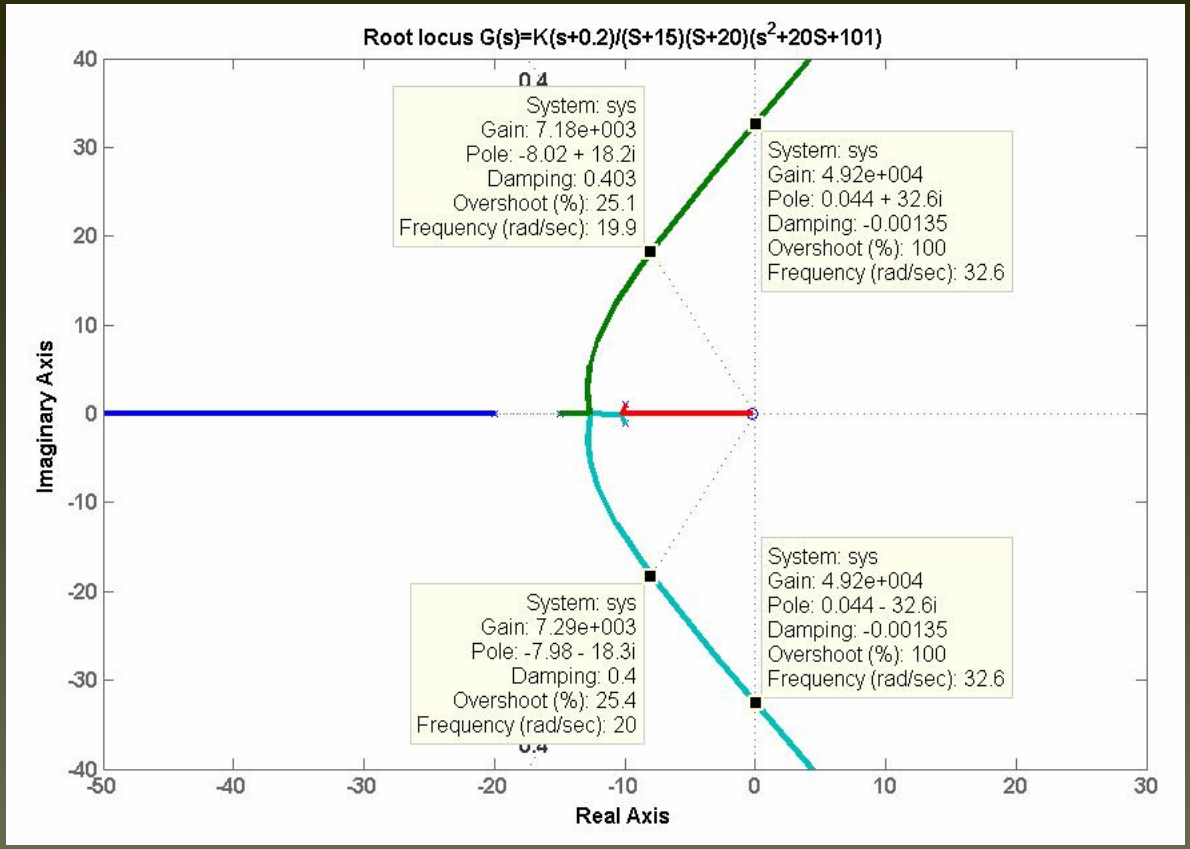
$$Z_c = 0.2$$

بنابراین سیستم باجبرانسازبه شکل زیرخواهدبود

$$G_c(S) = \frac{K(S+0.2)}{(S+15)(S^2+20S+101)(S+20)}$$

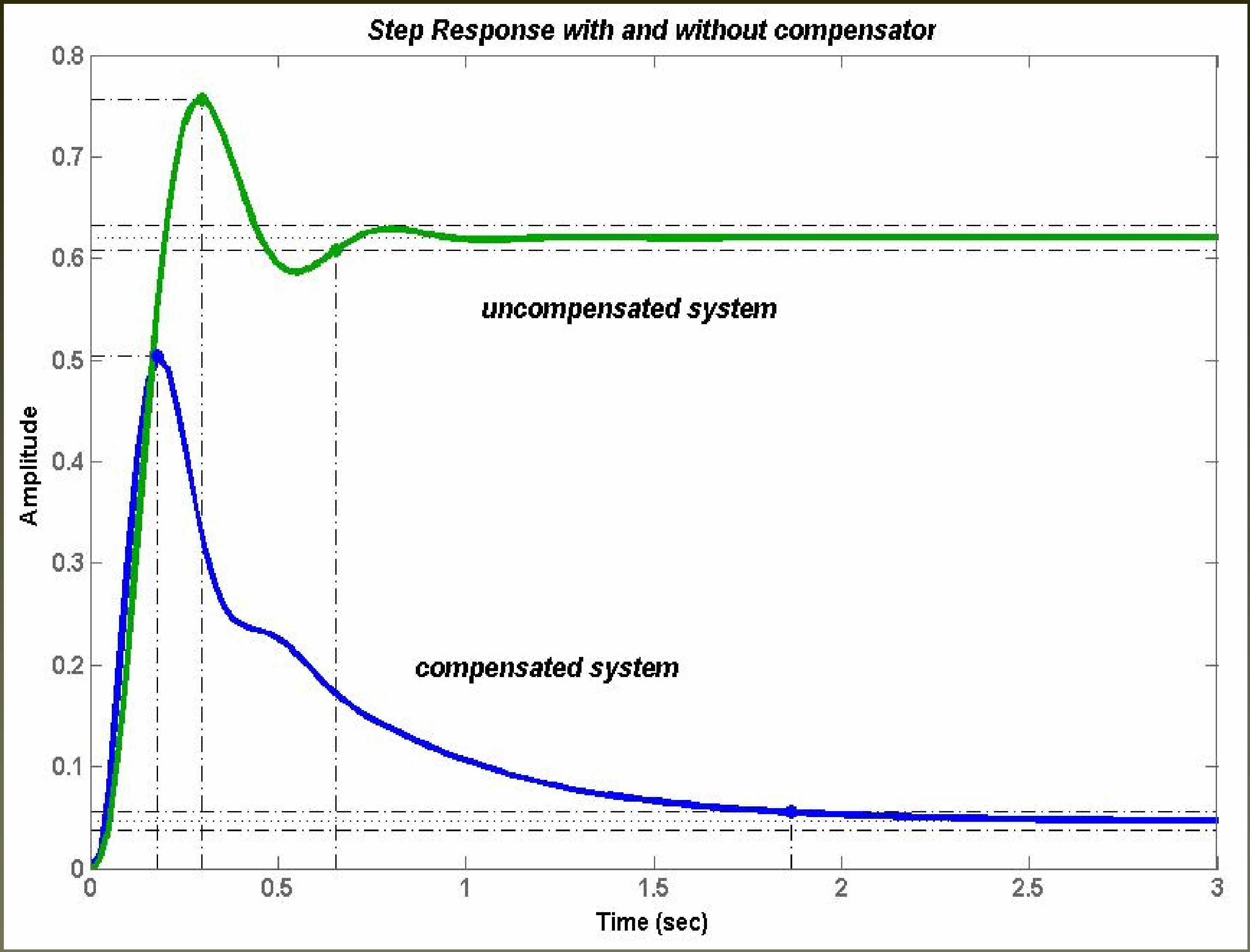
مکان هندسی سیستم جبران شده به شکل زیر خواهدبود.همانطورکه دیده می‌شود،سیستم درمحدوده‌ی وسیعتری از Kپایدار است.

مکان قطب‌های غالب که دراین حالت روی مکان است مشخص شده است..



درشکل بعد رفتارسیستم باوبدون جبرانساز آورده شده است.

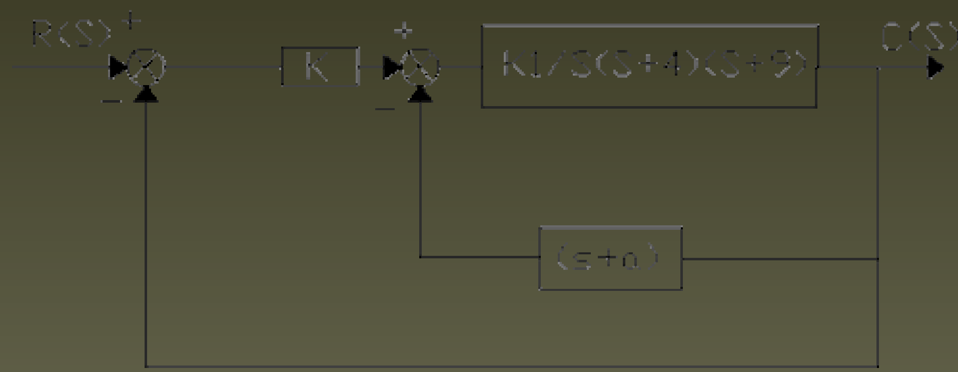
.اگرچه خطای حالت ماندگارسیستم باجبرانسازبیشترشده است،اما اورشوت سیستم کمترشده است


Step Response with and without compensator
Amplitude
Time (sec)
uncompensated system
compensated system
0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7
0.8
0.5
1
1.5
2
2.5
3

-سیستم زیرداده شده است،

الف) a و Kراطوریپیداکنید که (برای پاسخ پله درحلقه‌ی کوچکتر) $OS\%=5\%$ و $Ts=1$

ب)مقدارK راطوری پیداکنید که پاسخ حلقه‌ی بزرگتر اورشوتی برابر ۱۰٪ برای پاسخ پله داشته باشد .



$$\xi=\frac{-\ln(os\%/100)}{\sqrt{\pi^2+\ln^2(os\%/100)}}$$

$$\Rightarrow \xi=069,,,,,T_s=\frac{4}{\xi\omega}\rightarrow \omega=5.8$$

$$TF=\frac{\dfrac{K_1(S+a)}{S(S+4)(S+9)}}{1+\dfrac{K_1(S+a)}{S(S+4)(S+9)}}=\frac{K_1(S+a)}{S(S+4)(S+9)+K_1(S+a)}$$

معادله‌ی مشخصه $= S(S+4)(S+9) + K_1(S+a) = 1 + \dfrac{K_1(S+a)}{s(S+4)(S+9)}$

مکان قطب‌های غالب $= -\xi\beta\omega \pm \sqrt{1-\xi 2}\omega = -4 \pm 4.2j$

$$G(S) = \left|\frac{K_1(S+a)}{S)S+4)(S+9)}\right| S = -4 \pm 4.2j$$

$$\alpha - [tag^{-1}\frac{4.2}{4} + 90 + tag^{-1}\frac{4.2}{5}] = \pm(2K+1)\pi$$

$$\alpha - 263.6 = -180 \Rightarrow \alpha = 83.6$$

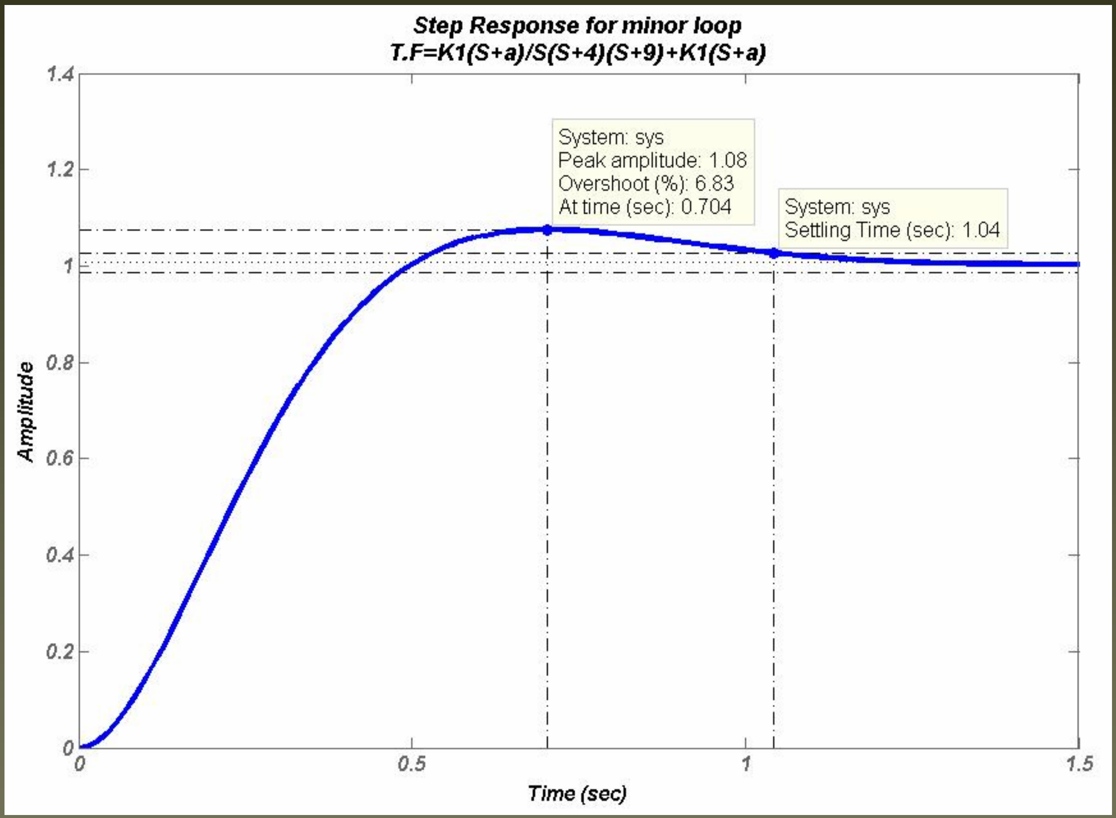
$$\tan 83.6 = \frac{4.2}{\Delta x} \Rightarrow \Delta x = 0.47$$

$$a = 4.47$$

$$\frac{K_1(4.2)}{(5.8)(4.2)(6.53)} = 1 \Rightarrow K_1 = 37.8$$

برای پیداکردن K1 باید شرط اندازه را چک کنیم.

پاسخ پله‌ی این سیستم درحلقه‌ی کوچکتردرشکل زیررسم شده است.
زمان نشست و اورشوت نیز مشخص شده است.(به علت تقریب‌های حل دستی اندکی خطادرجواب دیده می‌شود.)



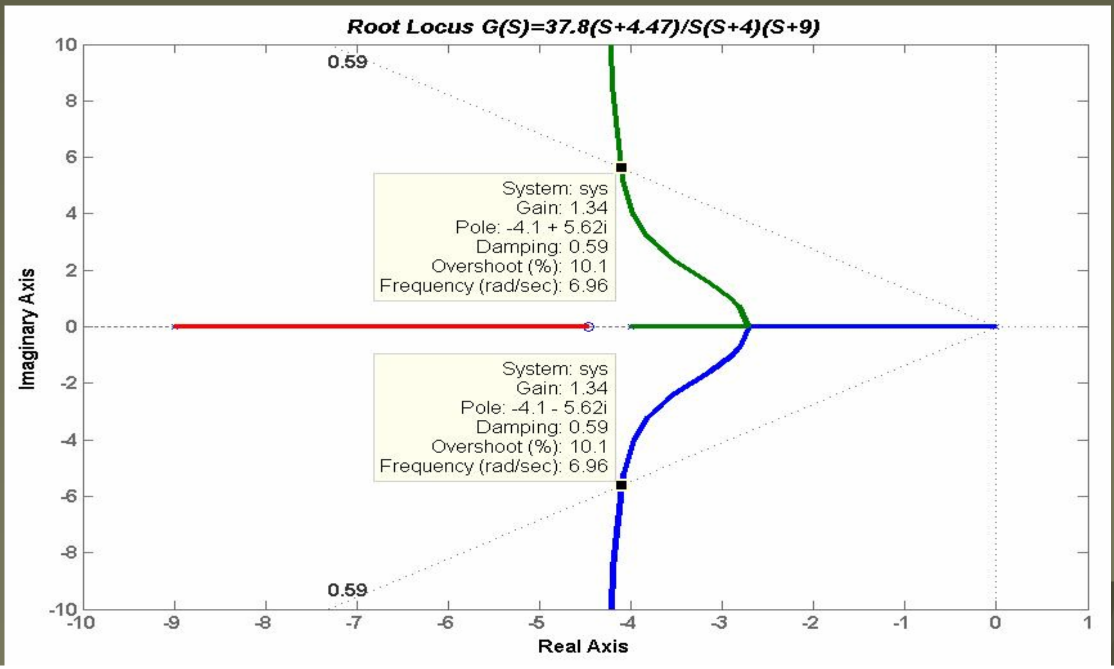
درقسمت ب سوال خواسته شده است پاسخ حلقه‌ی بزرگتر برای ورودی پله،اورشوتی Kمقدار را طوری پیداکنید که برابر ۱۰٪ داشته باشد.

درابتدابایدبه کمک درصداورشوت ،ضریب میرایی را بدست آورد.

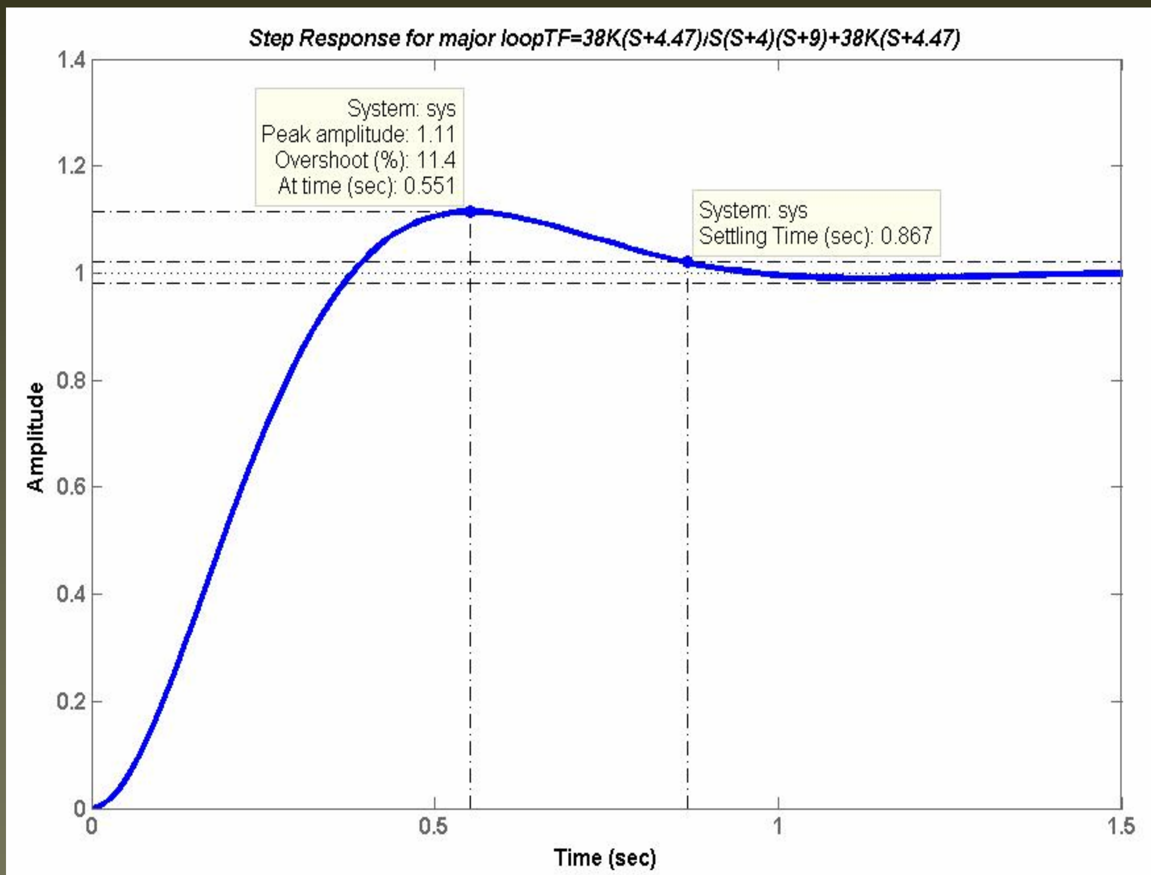
$$\xi = \frac{-\ln(os\% / 100)}{\sqrt{\pi^2 + \ln^2(os\% / 100)}}$$

$$\xi = \frac{-\ln 0.1}{\sqrt{\pi^2 + \ln^2 0.1}} \Rightarrow \xi = 0.59$$

به کمک نسبت میرایی بدستآمده می توان مکان قطب‌های غالب راپیداکرد.و باشرط اندازه مقدار. K بدست می‌اید به کمک مکان هندسی ریشه‌ها و با کلیک برروی نقطه‌ای از مکان با نسبت میرایی ۰.۸ اطلاعات خواسته شده قابل دسترسی است. مکان هندسی ریشه‌های این سیستم در شکل زیر رسم شده است.



پاسخ پله این سیستم با ضریب $K = 1.34$ در شکل زیررسم شده است



ASEC
Aero Space Engineering Center
پایگاه مهندسی هوافضا

www.ASEC.blogfa.com