مفاهیم اساسی در تئوری احتمال:

۱-۱ تعریف فضای نمونه و پیشامد.

الف) فضای نمونه: مجموعه متشکل از کلیه نتایج مختلف در آزمایش تصادفی

sample spac

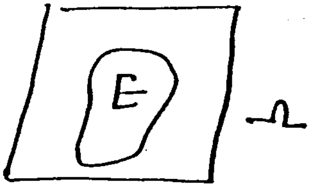
$$\Omega = \{\xi_1, \xi_2, \xi_3, \ldots\}$$

* آزمایش تصادفی: آزمایشی که بتواند به نتایج محتملی ξ_1 و ξ_2 و ξ_3 و ... مخ
نتیجه اش از قبل معلوم نباشد.

ب) پیش آمد (event): مجموعه ای از برخی از نتایج آزمایش تصا
. زیر مجموعه ای از فضای نمونه

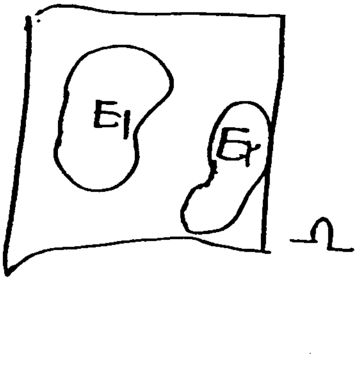
$= \{$ برخی از ξ ها $\}$

$E \subset \Omega$



پیش آمدهای جدا از هم: پیش آمدهایی هستند که هیچ نقطه مشترکی ندارند.

$E_1 , E_2 = \phi$



یش فضائی به یکی از نقاط آن پیش آید با این اصطلاح

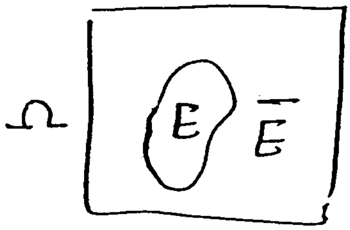
$\Omega \rightarrow$ پیشامد حتمی

$\phi \rightarrow$ پیشامد غیرممکن

پیشامد جدا از هم پیشامدهایی هستند که رخ دادن توام آنها غیرممکن باشد

Disjoin

یک پیشامد پیشامدی است که جدا از آن بوده و اجتماعش با آن فضای نمونه باش



بعبارت ریاضی:

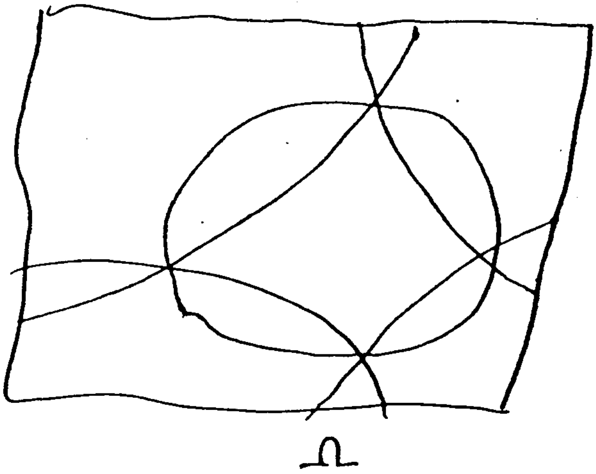
۱ $\bar{E}E = \phi$

۲ $\bar{E} + E = \Omega$

وقتی و فقط وقتی رخ می‌دهد که E رخ ندهد،

و E_2 و ... و E_n را ری هم فرسا (exhaustive) گوییم هرگاه

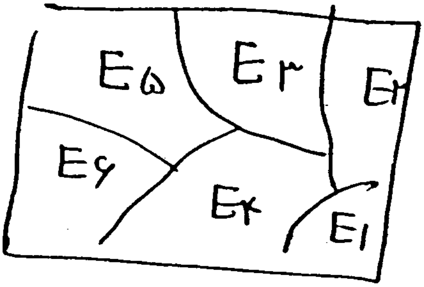
ع آنها فضای نمونه را تشکیل دهد،



$E_1+E_2+\dots+E_n=$

همش هستیم حداقل یکی از آنها

واهد داد،



یعنی قسمتی باشیم که یکی و فقط یکی از آنها
حتماً رخ خواهد داد.

یعنی بتوان برای آزمایش تصادفی n حالت
تمایز تشخیص داد.

۱ $\sum_{i=1}^{n} E_i = \Omega$

۲ $E_i E_j = \phi$
$\forall\, i, j \,,\, i \neq j$

۲-۱ تعریف احتمال ، فضای پیش آمدها و فضای احتمال.

الف) احتمال : تابعی p حقیقی که به هر پیش آمد مثل E عددی با سه شر
نسبت دهد.

۱ $p(E) \geqslant 0$ غیر منفی بودن

۲ $p(\Omega) = 1$ نرمالیزه بودن

۳ $E_i E_j = \phi \;\; \forall\, i \neq j \rightarrow p(\sum_{i=1}^{n} E_i) = \sum_{i=1}^{n} p(E_i)$

* البته این شرط باید برای $n \rightarrow \infty$ (البته ∞ قابل شمارش) نیز ص
غالباً توزیع احتمال را یکنواخت می گیرند که در این صورت احتمال هر پیش آم
می گردد با تعداد نقاط آن به تعداد نقاط فضای نمونه.

ت ۵

ان ۲ . بتوان خواص دیگری را برای تابع احتمال معرفی گردد.

(۱) $p(\bar{E}) = 1-p(E)$

(۲) $p(E) \leqslant 1$

(۳) $p(\phi) = 0$

(۴) $p(E_1+E_2) = p(E_1)+p(E_2)-p(E_1E_2)$

(۵) $p(E_1+E_2+E_3) = p(E_1)+p(E_2)+p(E_3)$
$-p(E_1E_2)-p(E_1E_3)-p(E_2E_3)+p(E_1E_2E_3)$

ر حالیکه تعداد نقاط فضای نمونه غیرقابل شمارش باشد (اصطلاحاً در فضای ک
ستند) در ریاضیات ثابت می گردد که می توان زیرمجموعه هایی در این فضا
ه با احتساب آنها نتوان هیچ تابعی با سه شرط فوق تعریف کرد چنین زیر
ا را پیش آمدهای احتمال ناپذیر گویند چنین زیرمجموعه هایی بصورتی خیلی
یچیده قابل تعریف هستند و از نظر عملی و یک مبنا در بی اهمیت تلقی می گر
فضای پیش آمدها $\mathcal{F}$ ← زیرمجموعه ای از پیش آمدهای احتمال پذیر که دارا
دو شرط زیر باشد.

۱ $E\in\mathcal{F} \rightarrow \bar{E}\in\mathcal{F}$

۲ $E_i\in\mathcal{F} \rightarrow \sum_i E_i\in\mathcal{F}$

ی زیرمجموعه ای را در ریاضیات σ-field گویند.

ل:

$\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$

$E_1 = \{1,2\} \longrightarrow \bar{E_1} = \{3,4,5,6\}$

$\mathcal{F} = \{\{1,2\}, \{3,4,5,6\}, \Omega, \phi\}$

فضای احتمال در واقع مدل ریاضی برای آزمایش تصادفی است می‌توان محاسبات ر
در داخل این فضا انجام داد.

1 فرآیندهای تصادفی، ← میان ترم (40 درصد) از مباحث 1 و 2 ← 2 بعدازظهر 5شنبه 85,2,7

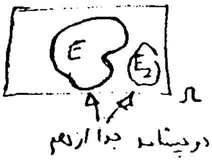
جلسهٔ دوّم: 1ـ ـــ کم ـــ پایانی ترم (50 درصد). عموماً 3 و 4 و 5 ـــ کلاسی (%10):

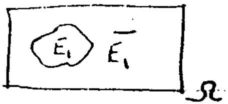
مقدمه‌ای بر فرآیندهای تصادفی.

1- مفاهیم اساسی در تئوری احتمال

1-1- تعریف فضای نمونه و پیش آمد

$\Omega = \{\xi_i \text{ ها}\}$, $E \subset \Omega$





پیشامدهای روبهم نرسا ← اجتماعشان Ω را تشکیل دهد.

پارتیشن کردن ← روبهم نرسا + اشتراک=0

1-2- تعریف احتمال و فضای احتمال

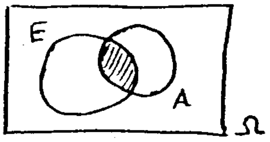
(1) $P(E) \geq 0$

(2) $P(\Omega) = 1$

(3) $P(\Sigma E_i) = \Sigma P(E_i)$ برای جدا از هم

فضای احتمال ← $\{\Omega, F, P\}$

1-3) تعریف احتمال شرطی و تعریف پیش آمدهای مستقل ازهم



الف) احتمال شرطی

$$P(E|A) \triangleq \frac{P(EA)}{P(A)}$$

له E به شرط A

این یک تعریف است، منتهی تعریفی منطقی و ملموس چراکه با فرض قطعی بودن رخداد A منطقاً باید توزیع احتمال را در خارج A صفر در نظر بگیریم و برای جبران آن توزیع احتمال را در داخل A با ضریبی افزایش دهیم ولذا:

$$E = E\Omega = E(A+\bar{A}) = EA + E\bar{A}$$

$$P(E|_A) = P(EA + E\bar{A}|_A) = P(EA|A) + P(E\bar{A}|A)$$

به دلیل جدا ازهم بودن.

$$\left.\begin{cases} P(EA|_A) = K\,P(EA) \\ P(E\bar{A}|A) = 0 \end{cases}\right\} \longrightarrow P(E|_A) = K\,P(EA)$$

$$P(\Omega|A) = 1 \longrightarrow K\,P(\underbrace{\Omega A}_{A}) = 1 \rightarrow K = \frac{1}{P(A)}$$

$$\Bigg\} \rightarrow P(E|A) = \frac{P(EA)}{P(A)}$$

$$P(E_1|E_2)=\frac{P(E_1E_2)}{P(E_2)} \rightarrow \boxed{P(E_1E_2)=P(E_2)P(E_1|E_2)=P(E_1)P(E_2|E_1)}$$

رابطهٔ زنجیره‌ای

تعمیم رابطهٔ زنجیره‌ای → $P(E_1E_2\ldots E_n)=P(E_1)P(E_2|E_1)P(E_3|E_1E_2)\ldots P(E_n|E_1E_2\ldots E_{n-}$

ب / استقلال پیش‌آمدها ← E_1 و E_2 را مستقل از هم گوییم، هرگاه قطعی بودن یکی هیچ تأثیری در احتمال وقوع دیگری نداشته باشد، یعنی مثلاً:

$$P(E_1|E_2)=P(E_1) \xrightarrow[\text{رابطهٔ زنجیره‌ای}]{} \boxed{P(E_1E_2)=P(E_1)P(E_2)}$$ شرط استقلال

$$\left.\begin{array}{l} P(E_1|E_2)=P(E_1) \\ P(E_2|E_1)=P(E_2) \end{array}\right\}$$ شروط معادل شرط بالا

$$\boxed{\text{نماد استقلال} \quad E_1 \perp\!\!\!\perp E_2}$$

توأماً مستقل بودن چند پیش‌آمد ← E_1، E_2، ...، E_n را توأماً مستقل گوییم، هرگاه احت اشتراک هر زیرمجموعه‌ای از آنها، برابر با حاصلضرب احتمال تک‌تک اعضای زیرمجموعه باشد.

$$\boxed{\text{نماد توأماً مستقل بودن} \rightarrow E_1 \perp\!\!\!\perp E_2 \perp\!\!\!\perp \cdots \perp\!\!\!\perp E_n}$$

مثلاً برای $n=4$ داریم:

$$E_1 \perp\!\!\!\perp E_2 \perp\!\!\!\perp E_3 \perp\!\!\!\perp E_4 \rightarrow P(E_1E_2E_3E_4)=P(E_1)P(E_2)P(E_3)P(E_4)$$

$$P(E_1E_2E_3)=P(E_1)P(E_2)P(E_3)$$

$\vdots$ ۳تایی‌ها

$$P(E_1E_2)=P(E_1)P(E_2)$$

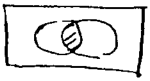
$$P(E_1E_3)=P(E_1)P(E_3)$$

$$\vdots$$

$$P(E_3E_4)=P(E_3)P(E_4)$$

* مهم ← جدا از هم بودن دو پیش‌آمد را نباید با استقلال دو پیش‌آمد اشتباه کرد.

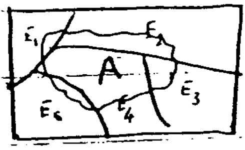
⊕ شرط جدا از هم بودن: $E_1E_2=\phi \xrightarrow{\text{علت این اشتباه}}$ نتیجه: $=P(E_1)+P(E_2)$



⊕ شرط استقلال: $P(E_1E_2)=P(E_1)P(E_2)$

۱-۴- قضیهٔ احتمال کلی و فرمول بیز (Bayes)

* این دو فرمول وقتی بکار می‌روند که چند پیش‌آمد فضای نمونه را پارتیشن کرده باشند و یا به تعبیری برای آزمایش تصادفی بتوان مثلاً n حالت متمایز در نظر گرفت.



$$\boxed{p(A) = \sum_{i=1}^{5} p(E_i)p(A|E_i)}$$ قضیهٔ احتمال کل

$$\boxed{p(E_j|A) = \frac{p(E_j)p(A|E_j)}{\sum_{i=1}^{n} p(E_i)p(A|E_i)}}$$ فرمول بیز

اثبات ①:

$$A = A\Omega = A\sum_{i=1}^{n} E_i = \sum_{i=1}^{n} AE_i$$

قضیهٔ احتمال کل

$$p(A) = p(\sum_{i=1}^{n} AE_i) \underset{\text{جدا از هم بودن}}{=} \sum_{i=1}^{n} p(AE_i) \underset{\text{رابطهٔ زنجیره‌ای}}{=} \sum_{i=1}^{n} p(E_i)p(A|E_i)$$

اثبات ②:

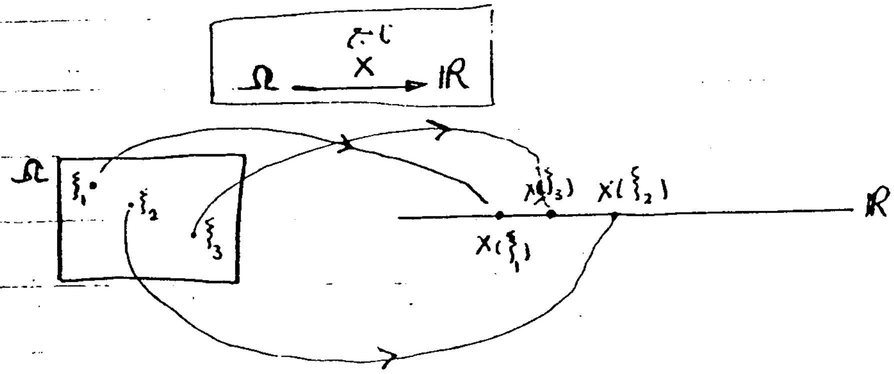
$$\underset{\text{تعریف احتمال شرطی}}{p(E_j|A)} = \frac{p(E_iA)}{p(A)} \overset{\text{رابطهٔ زنجیره‌ای}}{\underset{\text{قضیهٔ احتمال کل}}{=}} \frac{p(E_j)p(A|E_j)}{\sum_{i=1}^{n} p(E_i)p(A|E_i)}$$ فرمول بیز

۲) متغیر تصادفی

۲-۱- معرفی متغیر تصادفی

الف) تعریف متغیر تصادفی ← تابعی مثل X است که به هر نقطه از فضای نمونه Ω، $\xi \in \Omega$ عدد $X(\xi)$ را نسبت می‌د

$$\boxed{\Omega \xrightarrow{\overset{\text{تابع}}{X}} IR}$$



* متغیر تصادفی یک تابع است ، لذا هر نقطه فقط به یک نقطه تصویر می شود، ولی ممکن است که
چند نقطه به یک نقطه تصویر شوند.

* با تعریف متغیر تصادفی ، می توان نتایج غیرعددی یک آزمایش تصادفی را به نتایج عددی متناظ
بدل کنیم و فضای نمونهٔ Ω را به فضای نمونهٔ $\mathbb{R}$ تبدیل کرد و به جای فضای احتمال اصلی
که به شکل $\{\Omega, F, P\}$ می باشد، فضای احتمال زیر را در نظر گرفت:

$$\{\mathbb{R}, \underbrace{\mathbb{B}}_{\text{زیرمجموعه هایی از } \mathbb{R}}, P_X\}$$

* پیش آمدها در $\mathbb{R}$ زیرمجموعه های آن مثلاً به فرم زیر می توانند باشند:

* در متغیر تصادفی فضای پیش آمدها $\mathbb{B}$ را مجموعهٔ کلیهٔ اعداد حقیقی ، فاصله بین اعداد حقیقی، م
آنها و اجتماعات قابل شمارش آنها می گیرند.

* P_X تابعی است که به کمک آن بتوان احتمال پیش آمدها در فضای $\mathbb{R}$ را محاسبه کرد.

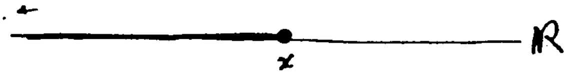
ب) تعریف تابع توزیع احتمال (CDF)

CDF ≡ Cummulative Distribution Function

این تابع را PDF ≡ probability Distribution Function هم می نامند.

$$\boxed{\begin{aligned} F(x) &\triangleq P\{\xi \mid X(\xi) \leqslant x\} \\ &= P(X(\xi) \leqslant x) \\ &= P(X \leqslant x) \end{aligned}}$$

که احتمال



در واقع تابعی از ξ بودن متغیر تصادفی مستتر می گردد

معمولاً برای اسم تابع CDF ، اسم متغیر تصادفی را اندیس F می گذارند. (اختیاری)

برخی از خواص CDF :

① $0 \leqslant F_X(x) \leqslant 1.$

② $F_X(-\infty)=0$, $F_X(+\infty)=1$

③ $x_2 \geqslant x_1 \Longrightarrow F_X(x_2) \geqslant F_X(x_1)$ غیرنزولی بودن

④ $F_X(x^+) = F_X(x)$

⑤ $p\{x_1 \le X \le x_2\} = F_X(x_2) - F_X(x_1)$

⑥ $p\{X = x_0\} = F_X(x_0^+) - F_X(x_0^-) = \begin{cases} 0 , & \text{در محل } x_0 \text{ فاقد جهش باشد} \\ P_0 , & \text{در محل } x_0 \text{ دارای جهش } P_0 \text{ باشد.} \end{cases}$

ج) تعریف تابع چگالی احتمال (pdf) $f_X(x)$ ـ قرارداد اختیاری

$$f_X(x) \triangleq \frac{d}{dx} F_X(x)$$

pdf ≡ probability density function

برخی از خواص pdf:

① $F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(x)\,dx$ ② $\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)\,dx = 1$ نرمالیزه بودن

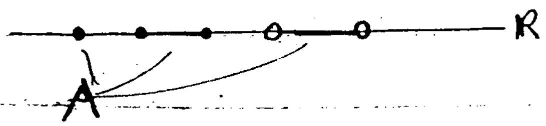
③ $f_X(x) \geq 0$ غیرمنفی است

④ $p\{x_1 < x_0 \leq x_2\} = \int_{x_1^+}^{x_2^+} f_X(x)\,dx$

⑤ $p\{X = x_0\} = \int_{x_0^-}^{x_0^+} f_X(x)\,dx = \begin{cases} 0 , & \text{اگر pdf در محل } x_0 \text{ فاقد ضربه باشد} \\ P_0 , & \text{اگر pdf در محل } x_0 \text{ دارای ضربه } P_0 \text{ باشد.} \end{cases}$

⑥ $P\{X \in A\} = \int_A f_X(x)\,dx$

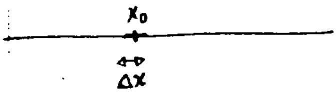
به طور کلی



⑦ $\boxed{P(X \approx x_0) \triangleq f_X(x) \times |\Delta x|}$ ۴

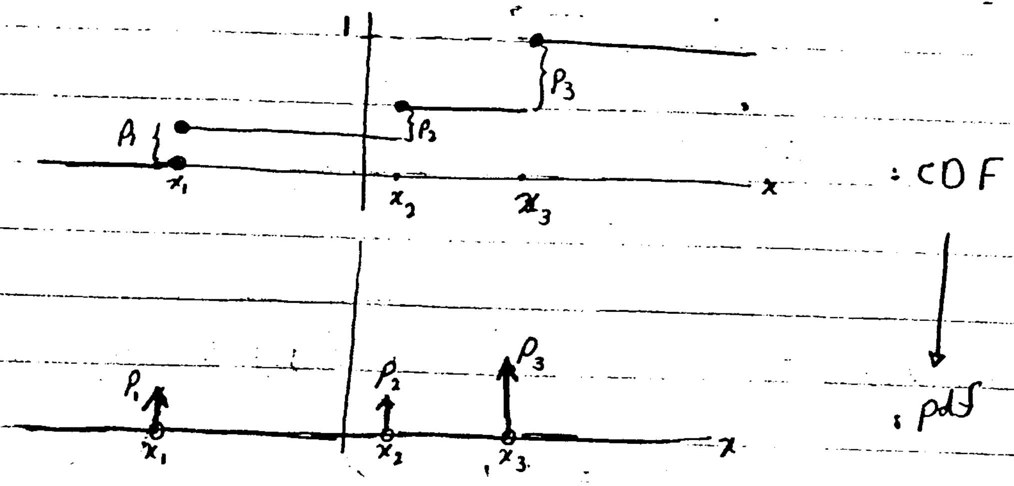
با فرض پیوسته بودن تابع در محل x_0

اگرهم تابع جهش داشت، مقدار تابع را میانگین دو مقدار جهش می گیریم.



۲) تعریف متغیر تصادفی گسسته و تابع جرم احتمال

اگر تغییرات CDF فقط به صورت پله‌ای باشد، متغیر تصادفی را متغیر تصادفی گسسته می‌نامیم.



* pdf متغیر تصادفی گسسته، تابعی ضربه‌ای است. مثلاً

$$f_X(x) = P_1\,\delta(x-x_1)+P_2\,\delta(x-x_2)+P_3\,\delta(x-x_3)$$

- روشن است که در مثال فوق داریم: $P_1+P_2+P_3=1$

و این متغیر تصادفی، هیچ مقداری به جز x_1 و x_2 و x_3 اختیار نمی‌کند.

* در متغیرهای تصادفی گسسته، می‌توان به جای استفاده از pdf، از تابع جرم احتمال استفاده کر

probability mass function ≡ pmf

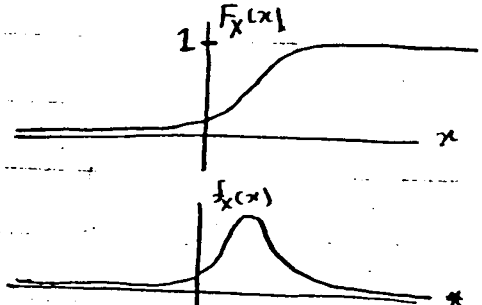
تعریف pmf: $P_X(x) \triangleq P\{X=x\}$

فرضاً در مثال فوق داریم:

$$P_X(x)=\begin{cases} P_1 & x=x_1 \\ P_2 & x=x_2 \\ P_3 & x=x_3 \\ 0 & \text{o.w} \end{cases}$$

* اگر تغییرات CDF پیوسته باشد، متغیر تصادفی را متغیر تصادفی پیوسته می‌نامیم. مثلاً:

* pdf متغیر تصادفی پیوسته تابعی غیر ضربه‌ای است.



لسهٔ سوم: ۸۴/۱۱/۱۵

. 2-1- تعریف متغیر تصادفی و توابع CDF، pdf و pmf آن، $X(\xi) \equiv X$

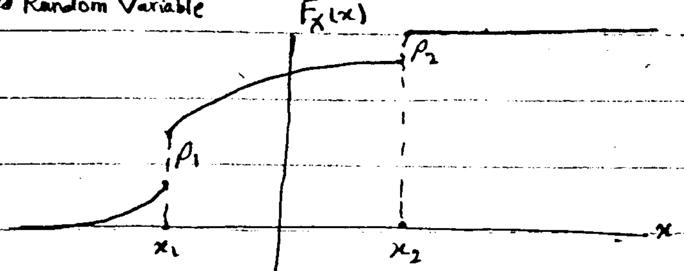
$F_X(x) = P\{X \leqslant x\}$

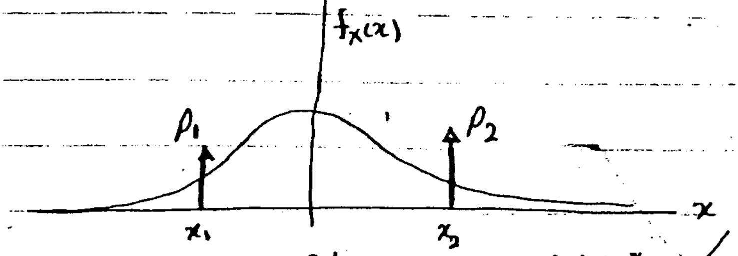
$f_X(x) = \frac{d}{dx} F_X(x)$

$P_X(x) = P(X = x) \longrightarrow$ برای متغیرهای تصادفی گسسته کاملاً کاری کند.

رحالت کلی ممکن است، CDF هم تغییرات جهشی (پله‌ای) و هم تغییرات پیوسته داشته باشد، یعنی pdf هم دارای ضربه و هم تابع غیرضربه‌ای باشد. چنین متغیر تصادفی را $\underbrace{\text{متغیر تصادفی مخلوط}}_{\text{mixed Random Variable}}$ گوییم

رضاً :





یس به‌طور کلی pdf یک متغیر تصادفی به‌صورت زیر می‌باشد.

$$\boxed{f_X(x) = \sum_{i=1}^{n} P_X(x_i)\, \delta(x - x_i) + \underset{\text{غیرضربه‌ای}}{q_X(x)}}$$

ر متغیر تصادفی پیوسته باشد، ضربه‌ها را نخواهد داشت.

ر متغیر تصادفی گسسته باشد، تابع غیرضربه‌ای را نخواهد داشت.

در حالت کلی داریم:

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n} P_X(x_i) + \int_{-\infty}^{+\infty} q_X(x)\, dx = 1}$$

ابع مشخص از یک متغیر تصادفی ($g(\cdot)$) $Y = g(X)$

تابعی از یک متغیر تصادفی خود یک متغیر تصادفی است.

به‌طور کلی برای محاسبهٔ احتمال پیش‌آمدها روی متغیر تصادفی جدید، کافی است پیش‌آمدها را

در نظر گیریم، مثلاً

$$\{Y\in B\} \overset{\text{متناظر}}{\equiv} \{X\in A\}$$

و بنویسیم:

$$p\{Y\in B\} = p\{X\in A\} = \int_A f_X(x)\,dx$$

* البته راه دیگر استفاده از pdf متغیر تصادفی جدید است.

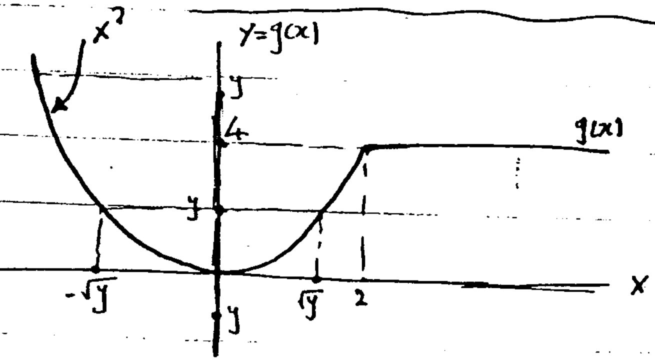
$$p\{y\in B\} = \int_B f_Y(y)\,dy$$

(الف) تعیین pdf جدید از روی CDF جدید

$$1)\ F_Y(y) = \underbrace{p\{Y\leq y\}}_{\text{پیش‌آمد متناظر}} = p\{X\in A_y\} = \int_{A_y} f_x(x)\,dx$$

$$2)\ f_Y(y) = \frac{d}{dy}F_Y(y)$$

مثال:



$$\{Y\leq y\} = \begin{cases}\{X\geq -\sqrt{y}\}, & y\geq 4\\ \{\sqrt{y}\geq X\geq -\sqrt{y}\}, & 4>y\geq 0\\ \{X\in\phi\}, & y<0\end{cases}$$

مرزها مهم است

ب) روش مستقیم تعیین pdf جدید: در این روش، ابتدا جرم احتمال های متغیر تصادفی را پیدا کنیم:

$$P_Y(y) = \underbrace{p\{Y=y\}}_{\text{یک پیش‌آمد متناظر}} = \begin{cases}P_1 & y=y_1\\ P_2 & y=y_2\\ \vdots & \vdots\\ P_n & y=y_n\end{cases}$$

سپس در سایر نقاط $y \neq y_i$ چگالی احتمال را محاسبه می‌کنیم. برای این منظور فرض کنید معادله زیر به‌ازای $y \neq y_i$ مشخص، دارای K جواب است.
$g(x)=y \rightarrow x=x_1, x_2, \dots, x_K$

$$f_Y(y)\,|\Delta y| = P\{Y \approx y\} = P\{X \approx x_1, x_2, \dots, x_K\} = \sum_{i=1}^{K} P(X \approx x_i) =$$

$$= \sum_{i=1}^{K} f_X(x_i)\,|\Delta x_i|$$

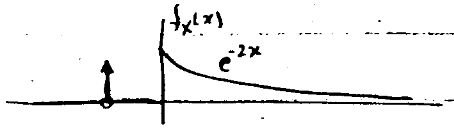
به دلیل جدا بودن

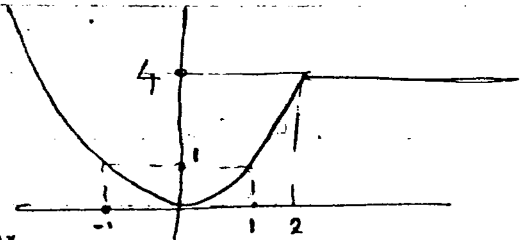
$$\longrightarrow f_Y(y) = \sum_{i=1}^{K} \frac{f_X(x_i)}{\left|\frac{\Delta y}{\Delta x_i}\right|} = \sum_{i=1}^{K} \frac{f_X(x)}{|g'(x)|}\Bigg|_{x=x_i}$$

در این صورت، داریم:

$$\boxed{f_Y(y) = \begin{cases} P_1\,\delta(y-y_1), & y=y_1 \\ P_2\,\delta(y-y_2), & y=y_2 \\ \vdots & \\ P_n\,\delta(y-y_n), & y=y_n \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{K} \frac{f_X(x_i)}{|g'(x_i)|}, & y \neq y_1, y_2, \dots, y_n \end{cases}}$$

مثال: همان مثال قبل ($g(x)$) + $f_X(x) = \frac{1}{2}\delta(x+1) + e^{-2x}u(x)$





درمثال فوق برای جرم احتمال روبرو داریم:

$$P_Y(y) = P\{Y=y\} = \begin{cases} P\{X \geq 2\} + P\{X=-2\} = \int_2^{\infty} e^{-2x}\,dx \neq 0, & y=4 \\ P\{X=-1\} + \underbrace{P\{X=1\}}_{0} = \frac{1}{2}, & y=1 \\ 0 & y \neq 1,4 \end{cases}$$

در $y \neq 1,4$ داریم:

$$g(x)=y \Rightarrow \begin{cases} x=-\sqrt{y}, & y>4 \\ x=\sqrt{y}, -\sqrt{y}, & 0<y<4 \end{cases}$$

$$\rightarrow f_Y(y)=\begin{cases} \cancel{\dfrac{f_X(-\sqrt{y})}{|g'(-\sqrt{y})|}}=0 \;,\; y>4 \\ \cancel{\dfrac{f_X(-\sqrt{y})}{|g'(-\sqrt{y})|}}+\dfrac{f_X(\sqrt{y})}{|g'(\sqrt{y})|}=\dfrac{f_X(\sqrt{y})}{|g'(\sqrt{y})|} \;,\; 0<y<4 \end{cases}$$

$g'(x)=2x$

2-3- دو متغیّر تصادفی و توابع CDF، pdf توأم و کناری آنها

الف) دو متغیّر تصادفی و توابع CDF، pdf کناری آن‌ها

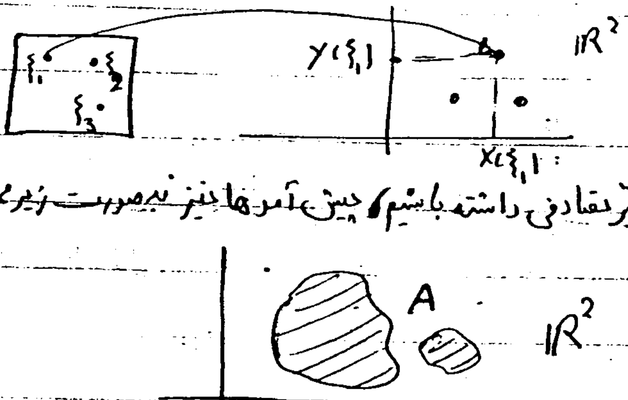
* ممکن است روی فضای نمونه، دو متغیّر تصادفی تعریف شده باشد:

$\Omega \xrightarrow{X} \mathbb{R}$

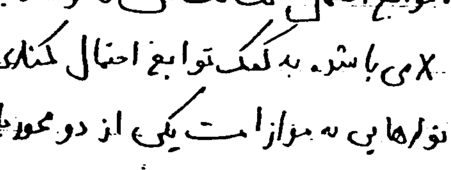
$\Omega \xrightarrow{Y} \mathbb{R}$

* یعنی در واقع به هر نقطه از فضای نمونه دو عدد نسبت داده باشیم. یعنی نقطه‌ای در فضای $\mathbb{R}^2$ نسبت داده باشیم.

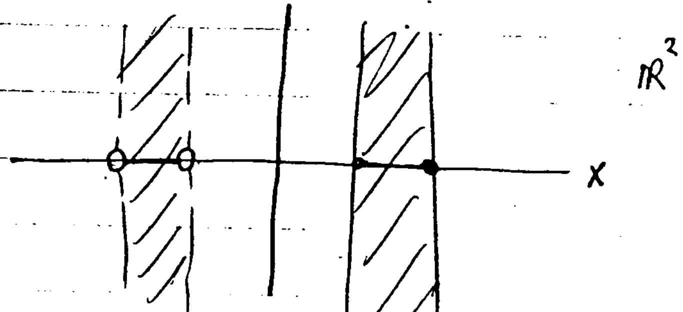
$$\Omega \xrightarrow{X,Y} \mathbb{R}^2$$



* در حالت کلی وقتی دو متغیّر تصادفی داشته باشیم، پیشامدها نیز به صورت زیرمجموعه‌ای از $\mathbb{R}^2$ خواهند بود. فرضاً:



* وقتی دو متغیّر تصادفی داریم، توابع احتمال تک تک آن‌ها را توابع احتمال کناری گویند. مثلاً $f_X(x)$، pdf کناری X می‌باشد. به کمک توابع احتمال کناری تنها می‌توان احتمال پیش‌آمدهایی که در فضای $\mathbb{R}^2$ به صورت نوارهایی به موازات یکی از دو محور باشند را محاسبه کرد.

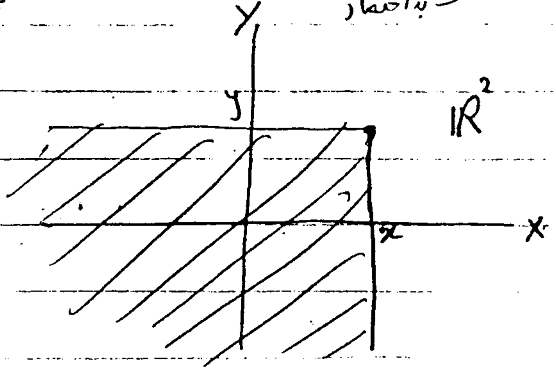


ب) CDF توأم دو متغیر تصادفی :

$$F_{XY}(x,y) \triangleq P\{\xi : X(\xi) \leqslant x , Y(\xi) \leqslant y\}$$

$$= P\{X(\xi) \leqslant x , Y(\xi) \leqslant y\} = P\{X \leqslant x , Y \leqslant y\}$$

به اختصار　　به اختصار



رخی از خواص CDF توأم :

(1) $0 \leqslant F_{XY}(x,y) \leqslant 1$

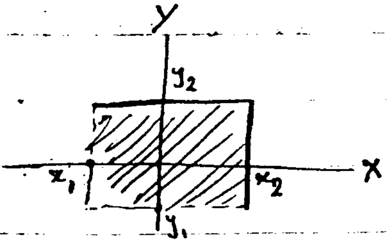
(2) $F_{XY}(-\infty,y) = F_{XY}(x,-\infty) = 0$

$F_{XY}(+\infty,+\infty) = 1$

(3) $F_{XY}(x,+\infty) = F_X(x)$, $F_{XY}(+\infty,y) = F_Y(y)$

(4) $P\{x_1 < X \leqslant x_2 , y_1 < Y \leqslant y_2\} =$

$= F_{XY}(x_2,y_2) - F_{XY}(x_1,y_2) - F_{XY}(x_2,y_1) + F_{XY}(x_2,y_2)$



ج) pdf توأم دو متغیر تصادفی :

$$f_{XY}(x,y) \triangleq \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} F_{XY}(x,y)$$

برخی خواص pdf توأم :

(1) $F_{XY}(x,y) = \int_{-\infty}^{y}\int_{-\infty}^{x} f_{XY}(x,y)\,dx\,dy$

(2) $f_{XY}(x,y) \geqslant 0$

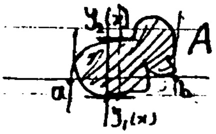
(3) $$\int_{-\infty}\int_{-\infty} f_{XY}(x,y)\,dx\,dy = 1$$

(4) $$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{XY}(x,y)\,dy$$

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{XY}(x,y)\,dx$$

* به کمک این تابع، می‌توان احتمال هر پیش آمدی در فضای $\mathbb{R}^2$ را محاسبه کرد:

(5) $$P\{(X,Y)\in A\} \doteq \iint_A f_{XY}(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f_{XY}(x,y)\,dy\,dx$$



2-4- تعریف توابع احتمال شرطی و تعریف استقلال دو متغیر تصادفی

الف) pdf و CDF شرطی ــ به طور کلی برای هر شرط دلخواهی مثل $(X,Y)\in A$ می‌توان
CDF و pdf شرطی تعریف نمود.

$$F_{XY}(x,y|A) \triangleq P\{X\leq x, Y\leq y \,|_{(X,Y)\in A}\} = \frac{P\{X\leq x, Y\leq y, (X,Y)\in A\}}{P\{(X,Y)\in A\}} =$$

$$= \frac{1}{P(A)} \int_{-\infty}^{y}\int_{-\infty}^{x}_{(x,y)\in A} f_{XY}(x,y)\,dx\,dy \quad ✓$$

$$f_{XY}(x,y|A) \triangleq \frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y} F_{XY}(x,y|A)$$

در حالت کلی pdf شرطی را می‌توان از رابطهٔ ساده‌ای که بدست خواهد آمد محاسبه کرد.

تابع روبرو را تعریف می‌کنیم:

$$g(x,y) \triangleq \begin{cases} 1 & (x,y)\in A \\ 0 & (x,y)\notin A \end{cases}$$

$$F_{XY}(x,y|A) = \frac{1}{P(A)} \int_{-\infty}^{y}\int_{-\infty}^{x} g(x,y)\, f_{XY}(x,y)\,dx\,dy \longrightarrow$$

7

$$\rightarrow f_{XY}(x,y|A)=\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}F_{XY}(x,y|A)=\frac{1}{P(A)}g(x,y)f_{XY}(x,y)$$

$$\longrightarrow \boxed{f_{XY}(x,y|A)=\begin{cases}\frac{1}{P(A)}f_{XY}(x,y) & , (x,y)\in A\\ 0 & , (x,y)\notin A\end{cases}}$$

یعنی وقتی شرطی می‌گذاریم، این شرط pdf را در خارج آن ناحیه صفر می‌کند و در داخل آن ناحیه با ضریب معین $\frac{1}{P(A)}$ افزایش می‌دهد. (به طوری که انتگرال pdf شرطی نیز برابر 1 گردد.)

* 2 تابع احتمال شرطی مهم و مفید عبارت اند از:

$$\text{①}\ F_X(x|Y\le y)\triangleq P\{X\le x|Y\le y\}=\frac{P\{X\le x, Y\le y\}}{P\{Y\le y\}}=\frac{F_{XY}(x,y)}{F_Y(y)}$$

قرارداد: $F_X(x|Y\le y)\equiv F_X(x|y)$

به اختصار

با نماد فوق و با طرفین وسطین داریم:

$$\boxed{F_{XY}(x,y)=F_Y(y)\cdot F_X(x|y)=F_X(x)\cdot F_Y(y|x)}$$

رابطهٔ زنجیره‌ای

$$\text{②}\ \overset{\text{کوچک}}{F}_X(x|Y=y)=\lim_{\Delta y\to 0}f_X(x|Y\approx y)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\partial}{\partial x}F_X(x|Y\approx y)=$$

$$=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\partial}{\partial x}\frac{\int_{-\infty}^{x}\int_{y-\frac{\Delta y}{2}}^{y+\frac{\Delta y}{2}}f_{XY}(x,y)\,dy\,dx}{P\{Y\approx y\}}=$$

$$=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\partial}{\partial x}\frac{\int_{-\infty}^{x}f_{XY}(x,y)\,\Delta y\,dx}{f_Y(y)\,\Delta y}=$$

$$=\frac{1}{f_Y(y)}\frac{\partial}{\partial x}\int_{-\infty}^{x}f_{XY}(x,y)\,dx=\frac{f_{XY}(x,y)}{f_Y(y)}$$

قرارداد : $f_X(x|Y=y) \underset{\text{اختصار}}{\uparrow}{=} f_X(x|y)$

$$\boxed{f_{XY}(x,y) = f_Y(y) \cdot f_X(x|y) = f_X(x)\, f_Y(y|x)}$$

اشتباه نکنید، گزارهٔ زیر درست است.

$$f(x|y) \neq \frac{d}{dx} F_X(x|y)$$

چون شرطها متفاوت است.

(۳۴)

جلسهٔ 4

نکاتی در مورد توابع چگالی احتمال :

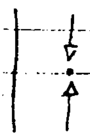
① توابع چگالی احتمال، مشابه توابع جرم می باشند. چگالی جرم خطی در حالت یک بعدی (مثلاً (x)
و چگالی جرم سطحی در حالت دو بعدی (مثل $f_{XY}(x,y)$) وقتی کل جرم به مقدار 1 نرمالیزه شده باشد.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)\,dx = 1 \qquad \iint_{-\infty}^{+\infty} f_{XY}(x,y)\,dx\,dy = 1$$

با این تعبیر، احتمال هر پیش آمد، مشابه جرم ناحیهٔ مربوطه خواهد بود.

② تابع چگالی احتمال کناری مثلاً $f_X(x)$ را می توان مشابه تابع چگالی جرم محور x دانست، وقتی جرم
نقاط صفحهٔ xy را به صورت عمودی به محور فوق منتقل کرده باشیم.

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{XY}(x,y)\,dy$$



③ تابع چگالی احتمال شرطی را نیز می توان مشابه همان تابع چگالی جرم دانست، وقتی جرم نقاط
شرط را صفر کرده باشیم و چگالی جرم نقاط داخل شرط را با ضریبی افزایش دهیم تا کل جرم در آن
1 شود.

$$f_{XY}(x,y|A) = \begin{cases} 0, & (x,y) \notin A \\ \frac{1}{P(A)} f_{XY}(x,y), & (x,y) \in A \end{cases}$$

ور استقلال دو پیش آمد: $A \perp\!\!\!\perp B$ هرگاه $p(A,B)=p(A).p(B)$

بی استقلال دو متغیر تصادفی: X و Y را مستقل از هم گوییم، هرگاه هر پیش آمدی برای X، مستقل از هر پیشامدی برای Y باشد. یعنی:

$$\begin{cases} \{X\in A\} \perp\!\!\!\perp \{Y\in B\} \\ \forall A\subset \mathbb{R} \\ \forall B\subset \mathbb{R} \end{cases}$$

قضیه ـ شرط لازم و کافی برای استقلال X و Y، استقلال پیش آمدهای بفرم $\{X\le x\}$ و $\{Y\le y\}$ آنها

۳ است. یعنی:

$$\begin{cases} \{X\le x\} \perp\!\!\!\perp \{Y\le y\} \\ \forall x\in \mathbb{R} \\ \forall y\in \mathbb{R} \end{cases}$$

یعنی:

$$P(X\le x, Y\le y) = p(X\le x) \times p(Y\le y) \longrightarrow F_{XY}(x,y) = F_X(x)F_Y(y)$$

با $\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}$ گرفتن، شرط معادل دیگر بدست می آید.

* پس

نماد استقلال: $X \perp\!\!\!\perp Y$

$$\left.\begin{aligned} F_{XY}(x,y) &= F_X(x)F_Y(y) \\ f_{XY}(x,y) &= f_X(x)f_Y(y) \end{aligned}\right\}$$ دو شرط معادل برای استقلال

البته از مقایسه با رابطه‌ی زنجیره‌ای، شرط های معادل دیگری نیز نتیجه می گردد:

$$F_Y(y|x) = F_Y(y) \qquad f_Y(y|x) = f_Y(y)$$

$$F_X(x|y) = F_X(x) \qquad f_X(x|y) = f_X(x)$$

ثبات قضیه: لزوم شرط واضح است.

ثبات کفایت شرط. فرض می کنیم شرط برقرار است، یعنی داریم: $f_{XY}(x,y)=f_X(x)f_Y(y)$

$$P\{X\in A, Y\in B\} = \iint_{\substack{x\in A\\ Y\in B}} f_{XY}(x,y)\,dx\,dy \overset{\text{جاگذاری}}{=} \int_{x\in A}\int_{Y\in B} f_X(x)f_Y(y)\,dx\,dy =$$

$$= \int_{X\in A} f_X(x)dx \times \int_{Y\in B} f_Y(y)dy = P\{X\in A\}\cdot P\{Y\in B\}$$

نکات :

① از تفکیک پذیر بودن متغیرها در CDF توأم یا در pdf توأم می‌توان استقلال دو پیش‌آمد را نتیجه گرفت. یعنی:

$$(1)\quad F_{XY}(x,y) = g_1(x)\,g_2(y) \Longrightarrow X \perp\!\!\!\perp Y$$

$$(2)\quad f_{XY}(x,y) = h_1(x)\,h_2(y) \Longrightarrow X \perp\!\!\!\perp Y$$

اثبات (1):

$$\left.\begin{aligned} F_X(x) &= F_{XY}(x,\infty) = g_1(x)\,g_2(\infty) \\ F_Y(y) &= F_{XY}(\infty,y) = g_1(\infty)\,g_2(y) \end{aligned}\right\} \rightarrow F_X(x)\,F_Y(y) = g_1(x)\underbrace{g_2(\infty)\,g_1(\infty)}_{\overset{F_{XY}(\infty,\infty)}{1}}\,g_2(y) = F_{XY}$$

② از استقلال 2 متغیر تصادفی X و Y، می‌توان استقلال هر تابعی از X را با هر تابعی از Y نتیجه گرفت. یعنی:

$$\left.\begin{aligned} &X \perp\!\!\!\perp Y \\ &V = g(X) \\ &W = h(Y) \end{aligned}\right\} \Rightarrow V \perp\!\!\!\perp W$$

چرا که هر پیش‌آمدی برای V متناظر است با پیش‌آمدی برای X و هر پیش‌آمدی برای W متناظر
با پیش‌آمدی برای Y، و چون X و Y مستقل اند، این پیش‌آمدها مستقل خواهند بود.

---

3 - امید ریاضی (Mathematical Expectation)

3-1. کلیات :

$$\left.\begin{aligned} &\text{متغیر تصادفی } X = X \sim f(\,) \\ &\text{تابع مشخص از } X \quad g(X) \end{aligned}\right\} \Rightarrow \underset{\text{نماد امید ریاضی}}{E}\, g(x) \triangleq \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\, f_X(x)\,dx$$

* با توجه به اینکه، انتگرال حد جمع می باشد، و $f_X(x)dx$ مفهوم فراوانی مقادیری که متغیر تصادفی در حول و حوش
اختیار می کند را داراست، روشن است که امید ریاضی $g(x)$ مفهوم متوسط مقادیری که این تابع در بی
تکرار مستقل از هم آزمایش تصادفی، اختیار خواهد کرد را دارا باشد.

$$E\,g(X,Y) \triangleq \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} g(x,y)\, f_{XY}(x,y)\,dx\,dy$$

* برای هر شرط دلخواهی نیز می توان امید ریاضی شرطی تعریف کرد، مثلاً برای شرط $(X,Y)\in A$:

$$E\,g(X,Y)|A \triangleq \int^{+\infty} g(x,y)\, f\ (x,y|A)\,dx\,dy$$

البته با توجه به رابطهٔ pdf شرطی، امید ریاضی را می‌توان به فرم ساده‌تری نیز درآورد.

$$f_{XY}(x,y|A)=\begin{cases}0 & ,\ (x,y)\notin A\\ \frac{1}{P(A)}\,f_{XY}(x,y) & ,\ (x,y)\in A\end{cases}\quad\Longrightarrow$$

$$* \quad \Longrightarrow \quad E\,g(x,y)|A=\frac{1}{P(A)}\iint_A g(x,y)\,f_{XY}(x,y)\,dx\,dy$$

چند رابطهٔ مفید:

$$① \quad E(g_1(X)+g_2(Y))=E\,g_1(X)+E\,g_2(Y)$$

$$② \quad X \perp\!\!\!\perp Y \Longrightarrow E\,g_1(X)\,g_2(Y)=E\,g_1(X).E\,g_2(Y)$$

$$** \quad ③ \quad E\,g(X,Y)=E_Y\big(E_X[g(X,Y)|Y]\big)$$

اثبات ③:

$$E\,g(X,Y)=\iint g(x,y)\,\underbrace{f_{XY}(x,y)}_{f_Y(y)\,f_X(x|y)}\,dx\,dy=\int_{y=-\infty}^{+\infty} f_Y(y)\Big(\int_{x=-\infty}^{+\infty} g(x,y)\,f_X(x|y)\,dx\Big)\,dy=$$

$$=E_Y\Big[\int_{-\infty}^{+\infty} g(x,y)\,f_X(x|y)\,dx\Big]=E_Y(E_X\,g(X,Y)|Y)$$

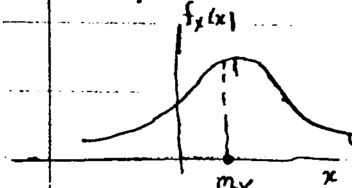
2ـ ممان‌ها

ممان مرتبهٔ nام $EX^n=\int_{-\infty}^{+\infty} x^n f_X(x)\,dx$

مهم‌ترین ممان‌ها، ممان مرتبهٔ اول و مرتبهٔ دوم است.

$$\boxed{m_X=EX=\int_{-\infty}^{+\infty} x\,f_X(x)\,dx}$$

* ممان اول را متوسط متغیر تصادفی گوئیم.



اگر چگالی احتمال را مشابه چگالی جرم بگیریم، m_X معادل مرکز ثقل محور X خواهد بود.

ممان دوم را قدرت متغیر تصادفی گوییم، چون پارامتری است که می‌تواند معرّف بزرگی یا کوچکی مقادیری باشد که متغیر تصادفی اختیار کند.

$$\boxed{P_X=EX^2=\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_X(x)\,dx}$$

متغیّر تصادفی X مرکزی $\tilde{X}(\xi) \triangleq X(\xi) - m_X$

* در رابطه با متغیّر تصادفی مرکزی نیز ممان های مرکزی تعریف می شود.

ممان مرکزی مرتبهٔ n اُم $E\tilde{X}^n = E(X-m_X)^n$

با بسط رابطهٔ فوق و به کمک ممان های ساده، ممان های مرکزی محاسبه می گردند.

* ممان مرکزی مرتبهٔ اوّل همواره صفر است. $E\tilde{X} = E(X-m_X) =$

$= EX - m_X = m_X - m_X = 0$

مهم ترین ممان مرکزی، همان ممان مرکزی مرتبهٔ دوّم است:

$$= E\tilde{X}^2 = E(X-m_X)^2 = EX^2 - 2Em_X X + Em_X^2 = P_X - 2m_X EX + m_X^2 =$$

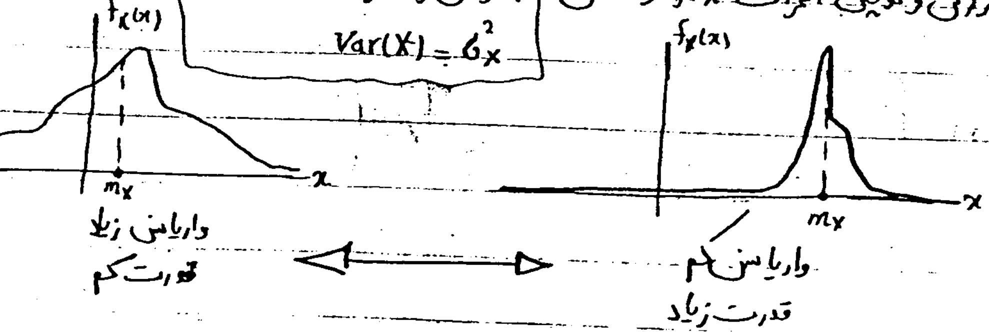
$$= P_X - m_X^2$$

ممان مرکزی مرتبهٔ دوّم را، واریانس متغیّر تصادفی گوییم.

* این پارامتر می تواند معرّف بزرگی یا کوچکی متغیّر تصادفی مرکزی $(X - m_X)$، یعنی در واقع بزرگی و کوچکی انحراف X از متوسط آن.

جذر آن را انحراف معیار گویند.

$Var(X) = \sigma_X^2$



* برای 2 متغیّر تصادفی، ممان های متقابل هم تعریف می گردد:

$$EX^nY^m = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} x^n y^m f_{XY}(x,y)\,dx\,dy \leftarrow$$ ممان متقابل ساده

$$E\tilde{X}^n\tilde{Y}^m = E(X-m_X)^n(Y-m_Y)^m \leftarrow$$ ممان متقابل مرکزی

* مهم ترین ممان های متقابل، ممان های متقابل مرتبه اوّل و مرتبه اوّل است.

$$r_{XY} = EXY = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} xy f_{XY}(x,y)\,dx\,dy$$ هم بستگی X و Y

$$\sigma_{xy} = C_{xy} = E\tilde{x}\tilde{y} = E(x-m_x)(y-m_y) = \cdots = Exy - Ex\,Ey = r_{xy} - m_x m_y$$

$\mathrm{Cov}(X,Y) \leftarrow$ کوواریانس X و Y

ضریب همبستگی X و Y : $\rho_{xy} \triangleq \frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sqrt{\mathrm{Var}(X).\mathrm{Var}(Y)}} = \frac{\sigma_{xy}}{\sqrt{\sigma_x^2 \sigma_y^2}} = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x . \sigma_y}$

خواهیم دید که $|\rho_{xy}| \leqslant 1$ است. لذا آن را کوواریانس نرمالیزه هم گویند.

خواهیم دید که ρ_{xy} پارامتری است که میزان وابستگی دو متغیر تصادفی را نشان می دهد.

+ برای هر شرطی می توان ممان های شرطی نیز تعریف کرد:

3 ممان شرطی مهم و مفید:

متوسط X به شرط y $\quad m_{x|y} = Ex|y = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_x(x|y)\, dx$

قدرت X به شرط y $\quad P_{x|y} = Ex^2|y = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_x(x|y)\, dx$

واریانس X به شرط y $\quad \sigma^2_{x|y} = \mathrm{Var}(x|y) = P_{x|y} - m^2_{x|y}$

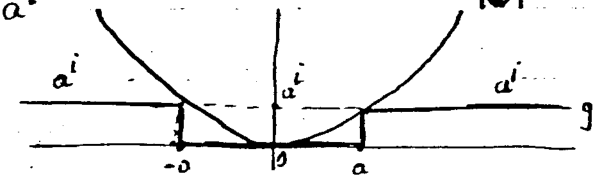
3-3- چند نامساوی مفید

الف) نامساوی تعمیم یافتهٔ چبی شف (chebyshev)

$$P\{|w| \geqslant a\} \leqslant \frac{E|w|^i}{a^i}$$

اثبات:

$g(w) \leqslant |w|^i$
$\forall w \in \mathbb{R}$



طرفین را در تابع غیرمنفی $f_W(w)$ ضرب می‌کنیم:

$$g(w) f_W(w) \leqslant |w|^i f_W(w) \qquad \forall w \in \mathbb{R}$$

با انتگرال گیری داریم:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g(w) f_W(w) \overset{dw}{\leqslant} \int_{-\infty}^{+\infty} |w|^i f_W(w)\, dw = E|W|^i \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \int_{-\infty}^{-a} a^i f_W(w)\,dw + 0 + \int_{+a}^{\infty} a^i f_W(w)\,dw \leqslant E|W|^i \longrightarrow$$

$$\longrightarrow a^i P\{W \leqslant -a\} + a^i P\{W \geqslant a\} \leqslant E|W|^i \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \boxed{P\{|W| \geqslant a\} \leqslant \frac{E|W|^i}{a^i} \qquad \text{for } a \neq 0}$$

[illegible]

ب) نامساوی مارکوف (Markoff)

که نامساوی مارکوف برای متغیرهای تصادفی غیرمنفی است.

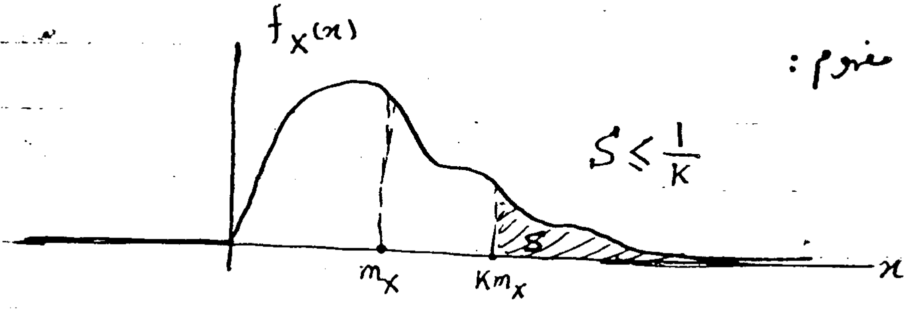
$$\boxed{X \in [0, \infty) \quad , \quad P\{X \geqslant Km_X\} \leqslant \frac{1}{K}}$$

اثبات:

نامساوی ت
چبی ش

$$\xrightarrow[\substack{i=1 \\ a=Km_X}]{X=|W|} P\{X \geqslant Km_X\} \leqslant \frac{EX}{Km_X} = \frac{1}{K}$$

مفهوم:



$$\underset{\text{Cov}(X,Y)}{\sigma_{xy}} = C_{xy} = E\tilde{X}\tilde{Y} = E(X-m_x)(Y-m_Y) = \dots = EXY - EXEY = r_{xy} - m_x m_y$$

$\text{Cov}(X,Y) \leftarrow$ کوواریانس X و Y

ضریب همبستگی X و Y : $\rho_{xy} \triangleq \frac{\text{Cov}(X,Y)}{\sqrt{\text{Var}(X).\text{Var}(Y)}} = \frac{\sigma_{xy}}{\sqrt{\sigma_x^2 \sigma_Y^2}} = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x . \sigma_Y}$

که خواهیم دید که $|\rho_{xy}| \leq 1$ است لذا آن را کوواریانس نرمالیزه هم گویند.

* خواهیم دید که ρ_{xy} پارامتری است که میزان وابستگی دو متغیر تصادفی را نشان می دهد.

+ برای هر شرطی می توان ممان های شرطی نیز تعریف کرد:

3 ممان شرطی مهم و مفید:

متوسط X به شرط Y $\quad m_{X|Y} = EX|Y = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x|y)\, dx$

قدرت X به شرط Y $\quad P_{X|Y} = EX^2|Y = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_X(x|y)\, dx$

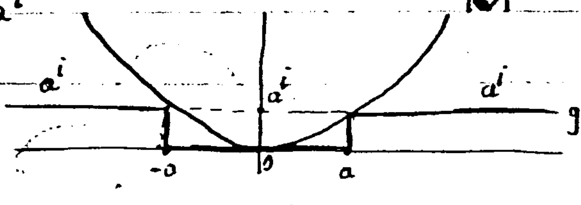
واریانس X به شرط Y $\quad \sigma^2_{X|Y} = \text{Var}(X|Y) = P_{X|Y} - m^2_{X|Y}$

3-3 چند نامساوی مفید

الف) نامساوی تعمیم یافتهٔ چبی‌شف (chebyshev)

$$P\{|w| \geq a\} \leq \frac{E|w|^i}{a^i}$$

اثبات:



$g(w) \leq |w|^i$
$\forall w \in \mathbb{R}$

طرفین را در تابع غیرمنفی $f_W(w)$ ضرب می‌کنیم:

$$g(w) f_W(w) \leq |w|^i f_W(w) \qquad \forall w \in \mathbb{R}$$

با انتگرال گیری داریم:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g(w) f_W(w)\, dw \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |w|^i f_W(w)\, dw = E|w|^i \longrightarrow$$

$$\rightarrow \int_{-\infty}^{-a} a^i f_W(w)dw + 0 + \int_{+a}^{\infty} a^i f_W(w) dw \leq E|w|^i \longrightarrow$$

$$\rightarrow a^i P\{W \leq -a\} + a^i P\{W \geq a\} \leq E|w|^i \longrightarrow$$

$$\rightarrow \boxed{P\{|W| \geq a\} \leq \frac{E|W|^i}{a^i} \qquad \text{for } a \neq 0}$$

~~نامساوی مارکوف برای متغیرهای تصادفی~~

الف) نامساوی مارکوف (Markoff

که نامساوی مارکوف برای متغیرهای تصادفی غیرمنفی است.

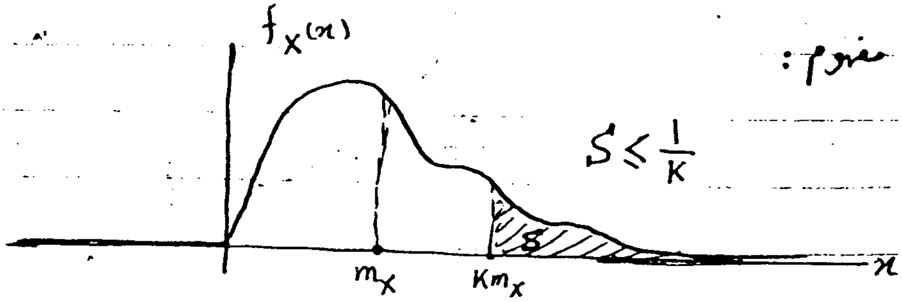
$$\boxed{X \in [0,\infty) \quad , \quad P\{X \geq K m_X\} \leq \frac{1}{K}}$$

اثبات:

نامساوی ت
چبی

$$\xrightarrow[\substack{i=1 \\ a=Km_X}]{X=|W|} P\{X \geq Km_X\} \leq \frac{EX}{Km_X} = \frac{1}{K}$$

مفهوم:



ج) نامساوی (متعارف) چبی شف:

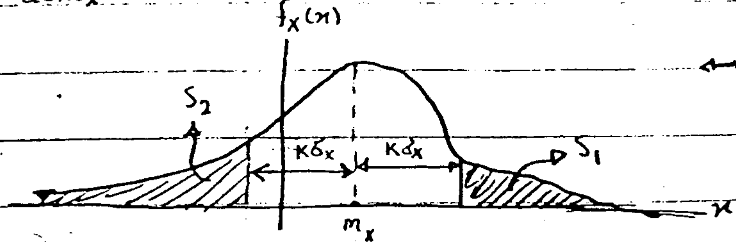
$$P\{|X-m_x| \geq K\sigma_x\} \leq \frac{1}{K^2}$$

اثبات:

نامساوی تعمیم یافته $\xrightarrow[i=2 \quad a=K\sigma_x]{W=X-m_x} P\{|X-m_x| \geq K\sigma_x\} \leq \frac{\cancel{E|X-m_x|^2}}{K^2\cancel{\sigma_x^2}} = \frac{1}{K^2}$

مفهوم

$$S_1+S_2 \leq \frac{1}{K^2}$$



د) نامساوی شوارتز (schwartz)

$$(Exy)^2 \leq Ex^2 Ey^2$$

اثبات:

نامساوی واضح $\begin{cases} E(x-\lambda y)^2 \geq 0 \\ \forall \lambda \in \mathbb{R} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} (Ey^2)\lambda^2 - 2Exy\,\lambda + (Ex^2) \geq 0 \\ \forall \lambda \in \mathbb{R} \end{cases} \longrightarrow$ Δ آن باید کوچکتر مساوی صفر باشد.

$$\rightarrow 4(Exy)^2 - 4Ex^2Ey^2 \leq 0 \rightarrow \boxed{(Exy)^2 \leq Ex^2 Ey^2}$$

اگر برای $\tilde{x}$ و $\tilde{y}$ بنویسیم، داریم:

$$(E\tilde{x}\tilde{y})^2 \leq E\tilde{x}^2 E\tilde{y}^2 \rightarrow \sigma_{xy}^2 \leq \sigma_x^2 \sigma_y^2 \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{\sigma_{xy}^2}{\sigma_x^2\sigma_y^2} \leq 1 \rightarrow \rho_{xy}^2 \leq 1 \rightarrow \boxed{|\rho_{xy}| \leq 1}$$

ضریب همبستگی $|\rho_{xy}| \leq 1$ یا همان کوواریانس نرمالیزه

3-4- تساوی 2 متغیر تصادفی

$$X \overset{?}{=} Y$$

البته X و Y تابعی باشند.

تساوی بین دو متغیر تصادفی با مفاهیم مختلفی مطرح می‌گردد.

1

الف) تساوی به مفهوم درهمه جا ← درهمه جا (Everywhere) یعنی در تمام نقاط فضای نمونه •

نماد $X \overset{e}{=} Y$

شرط $\left.\begin{array}{l} X(\xi) = Y(\xi) \\ \cdot\ \forall \xi \in \Omega \end{array}\right\}$

این، قوی ترین مفهوم در تساوی دو متغیر تصادفی است.

ب) تساوی به مفهوم ms ← مخفف mean square

نماد این نوع تساوی: $X \overset{ms}{=} Y$

شرط: $E(X-Y)^2 = 0$

از نظر عملی، تساوی به مفهوم ms، مفید ترین مفهوم است، چراکه اولاً بررسی آن فقط نیاز به داشتن ممان ها دارد $EX^2 + EY^2 = 2EXY$

ثانیاً مفهومی است بسیار قوی، چراکه می توان تساوی با احتمال $\underline{1}$ را از آن نتیجه گرفت.

$$E(X-Y)^2 = 0 \Longrightarrow P\{X=Y\} = 1$$

اثبات:

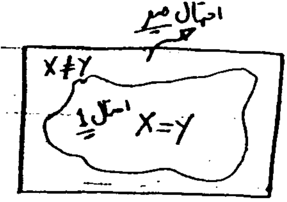
نامساوی تعمیم یا بیب

$$\xrightarrow[\substack{i=2 \\ a=\varepsilon\neq 0}]{W=X-Y} P\{|X-Y| \geqslant \varepsilon\} \leqslant \frac{E(X-Y)^2}{\varepsilon^2} = 0 \to \left\{\begin{array}{l} P\{|X-Y| \geqslant \varepsilon\} \leqslant 0 \\ \forall \varepsilon \neq 0 \end{array}\right. \to$$

$X \overset{ms}{=} Y$

$\varepsilon \neq 0$

$$\to \begin{array}{c} P\{|X-Y| \geqslant \varepsilon\} = 0 \\ \forall \varepsilon \neq 0 \end{array} \longrightarrow P\{X \neq Y\} = 0 \to \boxed{P\{X=Y\} = 1}$$



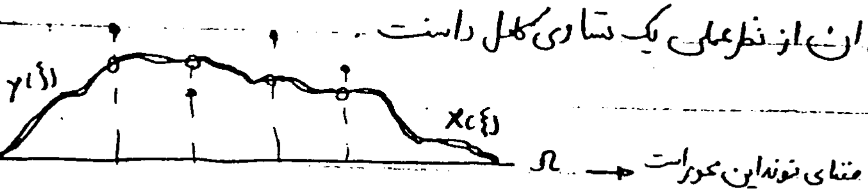
یعنی تساوی تقریباً درهمجای فضای نمونه،

درهمه جا بجز زیرمجموعه های با احتمال صفر از فضای نمونه.

چون پیش آمد با احتمال صفر در عمل رخ نمی دهد پس این نوع

✓ تساوی را می توان از نظر عملی یک تساوی کامل دانست.

مثال:



درمثال فوق اگر X و Y متغیرهای تصادفی پیوسته باشند، X و Y به مفهوم ms، یعنی با احتمال $\underline{1}$

* مثلاً می‌توان نتایج زیر را گرفت:

* $P_X = EX^2 = 0 \longrightarrow X \overset{ms}{=} 0$

* $\sigma_X^2 = E(X-m_X)^2 = 0 \longrightarrow X \overset{ms}{=} m_X$

در این درس ما فقط همین نوع تساوی را در نظر خواهیم گرفت و نمادش را نیز به صورت $X=Y$ خلاصه خواهیم

ج) تساوی در توزیع ← تساوی در توزیع یعنی تساوی توزیع احتمال 2 متغیر تصادفی:

نماد: $X \overset{dist}{=} Y$

شرط: $\left\{ \begin{matrix} F_X(a) = F_Y(a) \\ \forall a \in \mathbb{R} \end{matrix} \right\}$

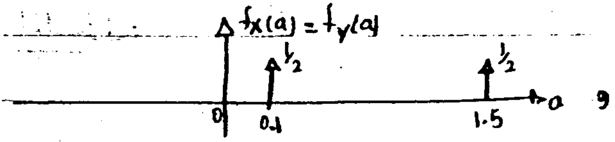
* این مفهوم، مفهوم بسیار ضعیفی از تساوی است، چرا که حتی ممکن است X و Y در هیچ کجای فضای نمونه مساوی نباشند، ولی تساوی در توزیع داشته باشیم.

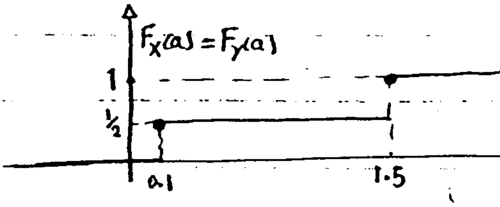
فرضاً: $\Omega = \{\xi_1, \xi_2\}$ با توزیع احتمال یکنواخت. ($\frac{1}{2}$ ، $\frac{1}{2}$)

ξ	$X(\xi)$	$Y(\xi)$	$P(\xi)$
ξ_1	0.1	1.5	$\frac{1}{2}$
ξ_2	1.5	0.1	$\frac{1}{2}$

$P(X=0.1) = P(X=1.5) = \frac{1}{2}$

$P(Y=1.5) = P(Y=0.1) = \frac{1}{2}$





3-5- تابع مشخصه و تابع مولد احتمال

الف) تابع مشخصه (cf) یک متغیر تصادفی

cf ≡ charactristic function

$$\Phi_X(\omega) \triangleq E\, e^{j\omega X} = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{+j\omega x} f_X(x)\, dx$$

اگر X متغیر تصادفی گسسته باشد، می‌توان رابطه را برحسب جرم احتمال نیز بیان نمود:

$$\Phi_X(\omega) \triangleq E e^{j\omega X} = \int_{-\infty} e^{j\omega x} \sum_i P(x_i)\,\delta(x-x_i)\,dx \longrightarrow$$

$$f_X(x) = \sum_i P_X(x_i)\,\delta(x-x_i)$$

$$\longrightarrow \Phi_X(\omega) = \sum_i P_X(x_i) \int_{-\infty}^{+\infty} e^{j\omega x}\,\delta(x-x_i)\,dx = \sum_i P_X(x_i)\, e^{j\omega x_i} \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \boxed{\Phi_X(\omega) \equiv \sum_i P(X=x_i)\, e^{j\omega x_i}}$$

برخی خواص cf :

① $|\Phi_X(\omega)| \leqslant 1 = \Phi_X(0)$

② $\frac{d^n}{d\omega^n}\Phi_X(\omega)\Big|_{\omega=0} = j^n E X^n$ تابع cf را تابع مولد ممان هم می گویند.

$f_X(x) \xleftrightarrow{FT} \Phi_X^*(\omega)$

$X \perp\!\!\!\perp Y \,,\, V = X \overset{\text{جمع}}{+} Y \Longrightarrow \Phi_V(\omega) = \Phi_X(\omega) \overset{\text{ضرب}}{\times} \Phi_Y(\omega)$

اثبات ①:

$$|\Phi_X(\omega)| = \left|\int_{-\infty}^{+\infty} e^{j\omega x} f_X(x)\,dx\right| \leqslant \int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{|e^{j\omega x}|}_{1} \cdot \underbrace{|f_X(x)|}_{f_X(x)}\,dx = 1 \checkmark$$

که مثل جمع اگر اندازه را به داخل ببریم مقدار تابع

$$\Phi_X(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{0} f_X(x)\,dx = 1 \quad \checkmark$$

اثبات ②،

$$\frac{d^n}{d\omega^n}\Phi_X(\omega)\Big|_{\omega=0} = \int_{-\infty}^{+\infty} (jx)^n e^{j\omega x} f_X(x)\,dx \Big|_{\omega=0} = \int_{-\infty}^{+\infty} j^n x^n f_X(x)\,dx = j^n E X^n$$

اثبات ③ ــ با توجه به تعریف تبدیل فوریه واضح است .

طبق این خاصیت می توان گفت که c.f تابعی هم ارز با pdf یا CDF است

چرا که با داشتن cf :

$$f_X(x) = F^{-1}\Phi_X^*(\omega) = \int \Phi_X^*(\omega)\, e^{j\omega x}\, d\omega = \int^{+\infty} \Phi_X(\omega)\, e^{-j\omega x}$$

ـن درحل مسائل از cf و جداول و خواص تبدیل فوریه می توان سود جُست.

ثبات ④ :

$$\phi_V(w) = E e^{jwV} = E e^{jw(X+Y)} = E e^{jwX} \cdot e^{jwY} = E e^{jwX} E e^{jwY} = \Phi_X(w)\phi$$

X و Y مستقلند ← توابعی از آنها هم مستقلند

ب) تابع مولد احتمال یک متغیر تصادفی (pgf) ـ probability generating function

pgf فقط برای متغیرهای تصادفی صحیح به کار برده می شود. یعنی $X \in \mathbb{Z}$

$$* \quad \Gamma_X(z) \triangleq E z^X = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} p(X=i)\, z^i = \sum_{i=-\infty}^{\infty} p_X(i)\, z^i$$

ی خواص pgf :

$* \; ① \; \Gamma_X(1) = 1$

$* \; ② \; \left.\dfrac{d^n}{dz^n}\Gamma_X(z)\right|_{z=1} = E\, X(X-1)(X-2)\cdots(X-n+1)$ ممان فاکتوریل مرتبه nام

$* \; ③ \; \left\{p_X(i)\right\} \xleftrightarrow{\text{Z-Transform}} \Gamma_X(z^{-1})$

$* \; ④ \; X \perp\!\!\!\perp Y,\; V = X+Y \Longrightarrow \Gamma_V(z) = \Gamma_X(z)\,\Gamma_Y(z)$

ات ①:

$$\Gamma_X(1) = E\,1^X = E\,1 = 1$$

ت ②:

$$\frac{d^n}{dz^n}\Gamma_X(z) = \frac{d^n}{dz^n} E z^X = E \frac{d^n}{dz^n} z^X = E\, X(X-1)(X-2)\cdots(X-n+1)\, z^{X-n}\Big|_{z=1} =$$

$$= E\, X(X-1)\cdots(X-n+1)$$

شتن ممان فاکتوریل های مرتبه اول تا nام ، می توان ممان های ساده مرتبه اول تا nام را پیدا کرد.

ت ③: با توجه به تعریف تبدیل Z واضح است.

* بر اساس این خاصیت در متغیرهای تصادفی صحیح ، pgf تابعی هم ارز با pmf یا pdf یا CDF است ، چراکه با تبدیل Z معکوس (مثلاً با بسط به قوای Z تابع pgf) می توان جر احتمال ها را تعیین نمود. (به عنوان بسط به قوای Z)

ضرایب ۱۳۴۱

$$\Gamma_V(z) = Ez^V = Ez^{X+Y} = Ez^X z^Y \underset{\text{استقلال}}{=} Ez^X Ez^Y = \Gamma_X(z)\Gamma_Y(z)$$: اثبات ④

ج) cf و pgf توأم دو متغیر تصادفی

$$\Phi_{XY}(w_1,w_2) \triangleq E e^{j(w_1X+w_2Y)} = \iint_{-\infty}^{+\infty} e^{j(w_1x+w_2y)} f_{XY}(x,y)\,dx\,dy$$

$$\Gamma_{XY}(z_1,z_2) \triangleq E z_1^X z_2^Y = \sum_{j=-\infty}^{+\infty}\sum_{i=-\infty}^{+\infty} P(X=i,Y=j)\, z_1^i z_2^j =$$

$$\underset{\text{با نماد جرم احتمال}}{=} \sum_{j=-\infty}^{+\infty}\sum_{i=-\infty}^{+\infty} P_{XY}(i,j)\, z_1^i z_2^j$$

برخی خواص cf و pgf توأم:

① $$\begin{cases} |\Phi_{XY}(w_1,w_2)| \leq 1 = \Phi_{XY}(0,0) \\ \Gamma_{XY}(1,1) = 1 \end{cases}$$

2) $$\begin{cases} \left.\dfrac{\partial^{n+m}}{\partial w_1^n \partial w_2^m}\Phi_{XY}(w_1,w_2)\right|_{w_1=w_2=0} = j^{n+m} EX^nY^m \\ \left.\dfrac{\partial^{n+m}}{\partial z_1^n \partial z_2^m}\Gamma_{XY}(z_1,z_2)\right|_{z_1=z_2=1} = EX(X-1)\cdots(X-n+1)Y(Y-1)\cdots(Y-m+1) \end{cases}$$

) $$f_{XY}(x,y) \xleftrightarrow[\text{دوبعدی}]{FT} \Phi^*_{XY}(w_1,w_2)$$

$$\{P_{XY}(i,j)\} \xleftrightarrow[\text{دوبعدی}]{Z-T} \Gamma_{XY}(z_1^{-1},z_2^{-1})$$

) $$X \perp\!\!\!\perp Y \underset{\substack{\text{دوطرفه}\\(\text{۳})}}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} \Phi_{XY}(w_1,w_2) = \Phi_X(w_1)\Phi_Y(w_2) \\ \Gamma_{XY}(z_1,z_2) = \Gamma_X(z_1)\Gamma_Y(z_2) \end{cases}$$

یافتن cf کناری ← pgf

⑤
$$\begin{cases}\Phi_X(w)=\Phi_{XY}(w,0)\\ \Phi_Y(w)=\Phi_{XY}(0,w)\end{cases}$$

$$\begin{cases}\Gamma_X(Z)=\Gamma_{XY}(Z,1)\\ \Gamma_Y(Z)=\Gamma_{XY}(1,Z)\end{cases}$$

* اثبات ها مشابه بند الف و ب بوده و ساده می باشد.

* طبق خاصیت ③ این توابع را می توان هم از توابع pdf توأم یا CDF توأم داشت، چراکه مثلاً:

$$f_{XY}(x,y)=\mathcal{F}^{-1}\{\Phi^*_{XY}(w_1,w_2)\}$$
$$=\iint_{-\infty}^{+\infty}\Phi^*_{XY}(w_1,w_2)\,e^{j(w_1x+w_2y)}\frac{dw_1\,dw_2}{(2\pi)^2}$$

* طبق خاصیت ④، تفکیک پذیر بودن متغیرها در cf توأم یا pgf توأم نیز شرط لازم و کافی دیگری برای استقلال دو متغیر تصادفی است.

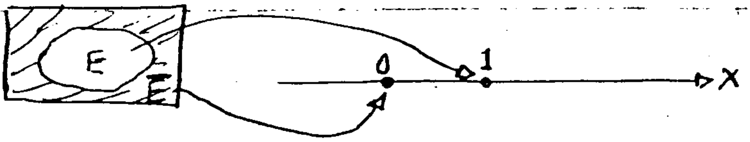
4_ آشنایی بیشتر با متغیرهای تصادفی

4-1_ معرفی چند متغیر تصادفی گسسته مهم:

در این مثال ها یک پیشامد E با احتمال p مطرح است.

تعریف متغیر تصادفی برنولی:

$$X\triangleq\begin{cases}1, & \xi\in E\\ 0, & \xi\notin E\end{cases}$$



$$X\in\{0,1\}$$

$$X\sim B(p)\iff p_X(x)=\begin{cases}p, & x=1\\ 1-p=\bar{p} & x=0\\ 0 & o.w\end{cases}$$

$$\Gamma_X(z) = E z^X = \bar{p} z^0 + p z^1 = \bar{p} + p z \longrightarrow \boxed{\begin{aligned} m_x &= p \\ \sigma_x^2 &= p\bar{p} \end{aligned}}$$

* تکرار مستقل از هم این آزمایش تصادفی را در نظر می گیریم. تعریف متغیر تصادفی هندسی X = تعداد آ
لازم برای اولین رخداد E :

$$X \in \{1, 2, 3, \dots\}$$

$$P_X(n) = P(X=n) = \underbrace{\bar{p}\bar{p}\cdots\bar{p}}_{\text{بار } n-1} p = \bar{p}^{\,n-1} p \iff X \sim G(p)$$

* تعریف متغیر تصادفی 2 جمله‌ای X = تعداد رخداد E در r آزمایش تصادفی :

$$X \in \{0, 1, 2, \dots, r\}$$

$$P_X(X=n) = \binom{r}{n} p^n \bar{p}^{\,r-n} \iff X \sim B(r, p)$$

* تعریف متغیر تصادفی دوجمله‌ای منفی X = تعداد آزمایش لازم برای r-امین رخداد E .

$$X \in \{r, r+1, r+2, \dots\}$$

$$P(X=n) = \binom{n-1}{r-1} p^r \bar{p}^{\,n-r} \iff X \sim NB(r, p)$$

* تعریف متغیر تصادفی پواسن X = حد متغیر تصادفی 2 جمله‌ای ، وقتی تعداد آزمایش ها ∞
و احتمال هر رخداد $p \to 0$ ، به طوریکه متوسط تعداد رخداد :

$$rp \to \lambda < \infty$$

$$P(X=n) = \lim_{\substack{r\to\infty \\ p\to 0 \\ rp=\lambda}} \binom{r}{n} p^n \underbrace{\bar{p}}_{(1-p)}{}^{r-n} \overset{\text{می توان نشان داد}}{=} e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^n}{n!} \quad , \quad X \in \{0, 1, 2, \dots\}$$

$$X \sim P(\lambda)$$

و

$$m_X = \sigma_X^2 = \lambda$$

نکات:

① متغیر تصادفی دوجمله‌ای را می توان مجموع r متغیر تصادفی برنولی مستقل از هم دانست.

$$\left.\begin{array}{l} X_i \sim B(p) \\ x_1 \perp\!\!\!\perp x_2 \perp\!\!\!\perp \dots \perp\!\!\!\perp x_r \\ X = x_1 + x_2 + \dots + x_r \end{array}\right\} \Longrightarrow X \sim B(r, p)$$

② متغیر تصادفی دوجمله‌ای منفی را نیز می توان مجموع r عدد متغیر تصادفی هندسی مستقل از هم دانست.

$$\left.\begin{array}{l} X_i \sim G(p) \\ x_1 \perp\!\!\!\perp x_2 \perp\!\!\!\perp x_3 \perp\!\!\!\perp \dots \perp\!\!\!\perp x_r \\ X = x_1 + x_2 + \dots + x_r \end{array}\right\} \Longrightarrow X \sim NB(r, p)$$

③ جرم احتمال متغیر تصادفی پواسن را می توان از روی تابع مولد آن نیز بدست آورد:

$$\Gamma_X(z) = \lim_{\substack{r \to \infty \\ p \to 0 \\ rp = \lambda}} (\underbrace{1 - p + pz}_{1 + p(z-1)})^r = \lim_{\substack{r \to \infty \\ p \to 0 \\ rp = \lambda}} \underbrace{\left(e^{p(z-1)}\right)^r}_{e^{rp(z-1)}} = e^{\lambda(z-1)}$$

استفاده از [illegible] تابع هارز

$$= e^{-\lambda} \cdot e^{\lambda z} = e^{-\lambda}\left(1 + \frac{\lambda z}{1!} + \frac{(\lambda z)^2}{2!} + \dots\right) = \sum_n P_X(n) z^n$$

ز مقایسه داریم،

$$\boxed{P_X(n) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!}}$$

④ محاسبه ممان ها نیز به کمک تابع مولد احتمال، خیلی ساده تر بدست می آید.

) در بین متغیرهای تصادفی گسسته، پواسن از همه مهم تر است، چرا که مدل مناسبی است برای بسیاری از متغیرهای تصادفی گسسته‌ای که در عمل مطرح می گردند. مثلاً تعداد الکترون جدا شده از سطح سلول فتوالکتریک که تحت تابش نور (فوتون) قرار دارد. یا مثلاً تعداد غلط های تایپی در یک متن.

—2— معرفی چند متغیر تصادفی پیوسته مهم ه (پلی کپی)

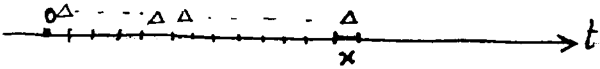
کات:

① متغیر تصادفی یکنواخت $X \sim U(a,b)$ مدل مناسبی است، وقتی فقط بدانیم که X در فاصله a تا b قرار دارد.

② متغیر تصادفی نمایی $X \sim E(\lambda)$، مدل مناسبی است برای زمان انتظار در یک سیستم بدون حافظه، یعنی وقتی احتمال رخداد پیشامد مورد نظر به اینکه قبلاً پیشامد رخ داده و یا رخ نداده بستگی نداشته با

مثلاً زمان انتظار برای اولین رخداد یک پیش آمد در تکرارهای مستقل از هم یک آزمایش تصادفی.

اثبات:



X زمان انتظار

$$\Delta \to 0 \qquad P(X\approx x) = f_X(x)\cdot|\Delta| = \overbrace{(1-\lambda\Delta)(1-\lambda\Delta)\cdots(1-\lambda\Delta)}^{\text{تعداد}=\frac{x}{\Delta}}\lambda\Delta \rightarrow$$

$\lambda\Delta$ = احتمال رخداد در فاصله Δ

$1-\lambda\Delta$ = احتمال عدم رخداد در فاصله Δ

$$\longrightarrow f_X(x) = \lim_{\Delta\to 0} \underbrace{(1-\lambda\Delta)}_{e^{-\lambda\Delta}}^{\frac{x}{\Delta}}\lambda \rightarrow$$

$$\rightarrow f_X(x) = \lim_{\Delta\to 0} e^{-\lambda\Delta\frac{x}{\Delta}}\cdot\lambda = \lambda e^{-\lambda x}\,, \quad x>0$$

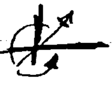
③ متغیر تصادفی ارلانگ $X \sim E(r,\lambda)$، مدل مناسبی است برای زمان انتظار برای r-امین رخ
یک پیش آمد در سیستم بدون حافظه.

این متغیر تصادفی را می توان مجموع r عدد نمایی مستقل از هم دانست.

در واقع، نمائی حالت پیوستهٔ متغیر تصادفی هندسی است و ارلانگ، حالت پیوستهٔ متغیر تصادفی
دو جمله ای منفی است.

④ متغیر تصادفی نرمال $X \sim (m,\sigma^2)$، مدل مناسبی است برای مجموع تعداد خیلی زیادی ($n\to\infty$) متغیر تصادفی مستقل از هم. و مهم ترین متغیر تصادفی پیوسته است.

⑤ متغیر تصادفی رایلی $X \sim R(\sigma^2)$ مدل مناسبی است برای اندازهٔ برآیند تعداد خیلی زیادی بردار مستقل از هم. (یا فازورهای مستقل از هم)



* کاربرد در مدل سازی Fading در اثر multipath شدن کانال

⑥ کاربرد مهم متغیرهای تصادفی مربع-خی و استیودنت-T ، در آماری باشد. $X \sim \chi^2(n)$

$X \sim T(n)$

4-3- مثال دو متغیر تصادفی توأماً نرمال (نرمال دو بعدی)

(الف) تعریف: X و Y را توأماً نرمال گوییم، هرگاه هر ترکیب خطی دلخواه آن دو، تولید یک متغیر تصادفی نرمال کند، یعنی:

$$\left.\begin{matrix} Z = aX + bY \\ \forall a,b \in \mathbb{R} \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow Z \sim N(m_z, \sigma_z^2)$$

روشن است که در این صورت، هر ترکیب خطی با مقدار ثابت، $Z = aX + bY + C$ (ترکیب مستوی (affi) نیز نرمال خواهد شد.

(ب) cf و pdf توأم:

$$\Phi_{X,Y}(\omega_1,\omega_2) = Ee^{j(\omega_1 X + \omega_2 Y)} = Ee^{jZ} = \phi_Z(\omega)\Big|_{\omega=1} =$$

$$Z = \omega_1 X + \omega_2 Y \rightarrow Z \sim N(m_z, \sigma_z^2) \rightarrow \phi_Z = e^{jm_z\omega} \cdot e^{\frac{-1}{2}\sigma_z^2\omega^2}$$

$$\rightarrow \phi_{X,Y}(\omega_1,\omega_2) = e^{jm_z} e^{-\frac{1}{2}\sigma_z^2}$$

$$m_z = \omega_1 m_X + \omega_2 m_Y$$

$$\tilde{Z} = \omega_1 \tilde{X} + \omega_2 \tilde{Y} \rightarrow \sigma_z^2 = E\tilde{Z}^2 = E(\omega_1 \tilde{X} + \omega_2 \tilde{Y})^2 = \omega_1^2 \sigma_X^2 + \omega_2^2 \sigma_Y^2 + 2\omega_1\omega_2$$

$$\rightarrow \boxed{\Phi_{XY}(\omega_1,\omega_2) = e^{j(m_X\omega_1 + m_Y\omega_2)} e^{\frac{-1}{2}(\sigma_X^2\omega_1^2 + \sigma_Y^2\omega_2^2 + 2\sigma_{XY}\omega_1\omega_2)}}$$

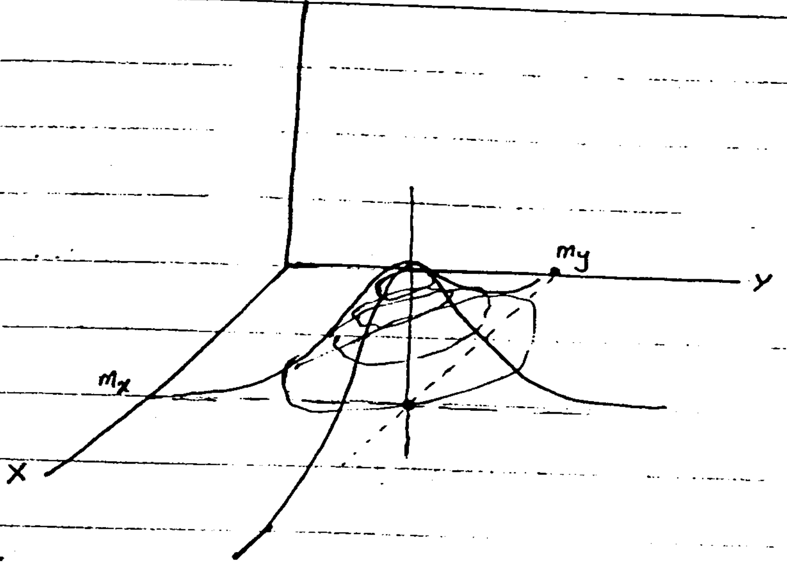
$$f_{XY}(x,y) = F^{-1}\{\Phi_{XY}^*(\omega_1,\omega_2)\} = \iint_{-\infty}^{+\infty} \Phi_{XY}^*(\omega_1,\omega_2) e^{j(\omega_1 x + \omega_2 y)} \frac{d\omega_1 d\omega_2}{(2\pi)^2} \longrightarrow$$

**

می‌توان نشان

$$\longrightarrow \boxed{f_{XY}(x,y) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^2(\sigma_X^2\sigma_Y^2 - \sigma_{XY}^2)}} e^{\ominus\frac{\sigma_Y^2(x-m_x)^2 + \sigma_X^2(y-m_y)^2 - 2\sigma_{XY}(x-}{2(\sigma_X^2\sigma_Y^2 - \sigma_{XY}^2)}}}$$

شکل pdf :

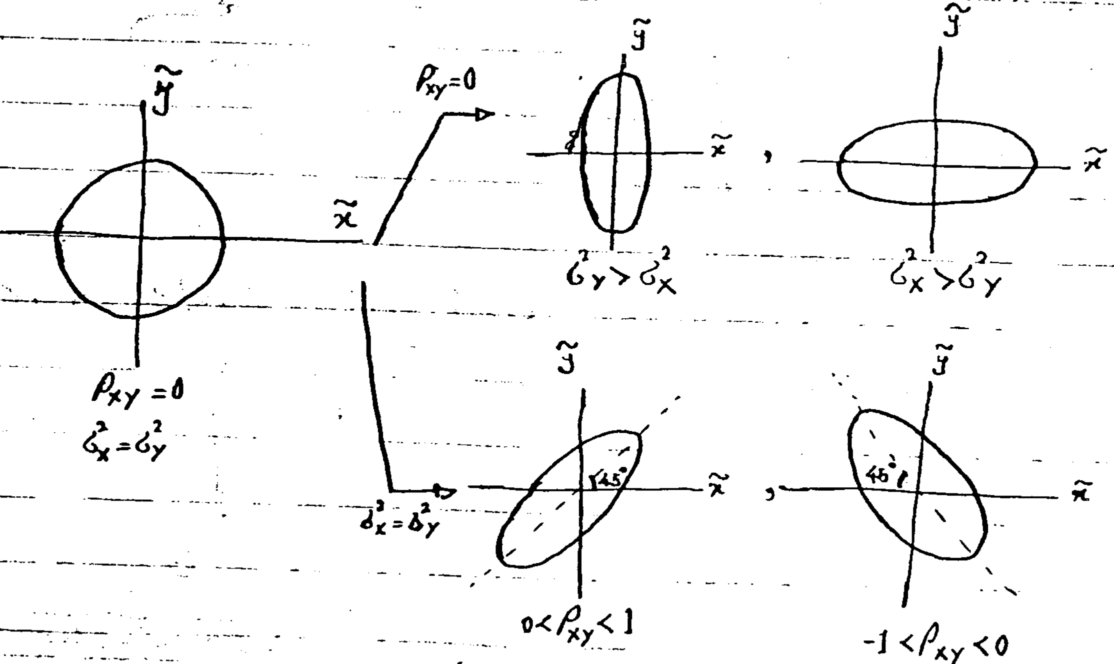


* معادلهٔ تقاطع افقی :

$f_{XY}(x,y)=cte \longrightarrow$ نما $=cte$

$\longrightarrow \sigma_Y^2(x-m_X)^2+\sigma_X^2(y-m_Y)^2-2\sigma_{XY}(x-m_X)(y-m_Y)=cte$

که معادلهٔ یک بیضی است .



اگر $\rho_{XY}=\pm1$ باشد ، اشکال بالا به یک خط با شیب ±1 و گذرنده از منبع تبدیل می شوند .

نکات :

① توزیع های کناری مثل X نیز نرمال خواهد بود . چرا که X را می توان حالت خاصی از تبدیل خطی

دانست ، $X=(1)X+(0)Y$

② توزیع های شرطی مثل $X|Y$ نیز نرمال خواهد بود . چرا که می توان دید :

$$f_x(x|y)=\frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2_{x|y}}}\, e^{-\frac{(x-m_{x|y})^2}{2\sigma^2_{x|y}}}$$ مم

نسبت 2 تابع نمائی با نمای درجه دوم

*ضمن نشان دادن رابطهٔ فوق ، می توان نتیجه گرفت :

$$\boxed{\begin{gathered} m_{x|y}=\rho_{xy}\frac{\sigma_x}{\sigma_y}(y-m_y)+m_x \\ \sigma^2_{x|y}=\sigma^2_x\,(1-\rho^2_{xy}) \end{gathered}}$$

*ممکن است $x|y$ یا $y|x$ نرمال باشند، ولی X و Y توأماً نرمال نباشند. (مثال نقض در پاپولیس)

③ از نرمال بودن توزیع‌های کناری دو متغیر تصادفی مستقل ، می‌توان توأماً نرمال بودن آن دو را نتیجه گرفت

④ از نرمال بودن یکی (مثلاً x) و دیگری به شرط آن (مثلاً $y|x$) نیز می توان توأماً نرمال بودن آن دو را نتیجه گرفت

⑤ دو متغیر تصادفی حاصل از تبدیل خطّی آن دو نیز، توأماً نرمال خواهند بود

$$\left.\begin{aligned} V&=a_1X+b_1Y \\ W&=a_2X+b_2Y \end{aligned}\right\} \longrightarrow$$ V و W نرمال که هستند؛ توأماً نرمال هم می شوند.

چرا که هر ترکیب خطّی دلخواه V و W نرمال است ، زیرا:

$$Z=aV+bW=a(a_1X+b_1Y)+b(a_2X+b_2Y)=(aa_1+ba_2)X+(ab_1+bb_2)Y$$

هر ترکیب خطّی دلخواه V و W ، ترکیبی خطّی است از X و Y و تولید متغیر تصادفی نرمال خواهد کرد.

⑥ از ناهمبسته بودن X و Y توأماً نرمال، می توان استقلال X و Y را نتیجه گرفت

$$\left.\begin{aligned} &X\perp Y \ \text{: ناهمبستگی} \\ &X,Y \ \text{توأماً نرمال} \end{aligned}\right\} \longrightarrow X \perp\!\!\!\perp Y$$

(اثبات):

$$X\perp Y \Longrightarrow \sigma_{XY}=0 \longrightarrow \Phi_{XY}(\omega_1,\omega_2)=e^{j(m_x\omega_1+m_y\omega_2)}\cdot e^{-\frac{1}{2}(\sigma_x^2\omega_1^2+\sigma_y^2\omega_2^2+0)}=$$

$$=\left(e^{jm_x\omega_1}\,e^{-\frac{1}{2}\sigma_x^2\omega_1^2}\right)\left(e^{jm_y\omega_2}\,e^{-\frac{1}{2}\sigma_y^2\omega_2}\right)=$$

$$=\Phi_X(\omega_1)\,\Phi_Y(\omega_2)$$

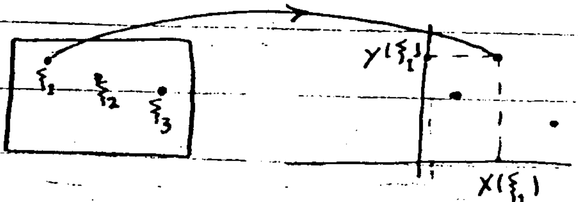
$$\Downarrow$$

$$\checkmark\ \boxed{X \perp\!\!\!\perp Y}$$

4-4- متغیّر تصادفی مختلط

متغیّر تصادفی مختلط Z = تابعی که به هر نقطه از فضای نمونه، یک عدد مختلط نسبت می دهد.

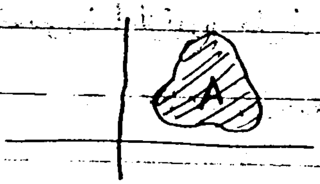
$$\Omega \xrightarrow{Z} \mathbb{C}$$



$$\boxed{Z(\xi) = X(\xi) + jY(\xi)}$$

* روشن است که در حالت کلی اجزای حقیقی و مجازی نیز خود یک متغیّر تصادفی حقیقی خواهند بود.

- در حالت کلی برای محاسبهٔ احتمال یک پیشامد، مثل $\{Z \in A\}$ به pdf توأم X و Y نیاز خواهیم داشت



$$P(Z \in A) = \iint_A f_{XY}(x,y)\,dxdy$$

- بطور کلی برای محاسبهٔ امید ریاضی تابعی از Z نیز به pdf توأم X و Y نیاز خواهیم داشت.

$$E g(Z) = E g(X+jY) = \iint_{-\infty}^{+\infty} g(x+jy)\, f_{XY}(x,y)\,dxdy$$

* کاربرد متغیّرهای تصادفی مختلط در مواردی است که فقط با ممان ها سروکار داشته باشیم، چرا که در این مو
استفاده از آن ها می تواند باعث سادگی روابط شود.

$$Z = X + jY \rightarrow m_Z = EZ = E(X+jY) = EX + jEY = m_X + j m_Y \rightarrow \boxed{m_Z = m_X + j m_Y}$$

$$P_Z \triangleq E|Z|^2 = EZZ^* = E(X^2+Y^2) = EX^2 + EY^2 = P_X + P_Y \rightarrow \boxed{P_Z = P_X + P_Y}$$

$$\tilde{Z} = Z - m_Z = \tilde{X} + j\tilde{Y}$$

$$\underbrace{Var(Z) = \sigma_Z^2 \triangleq E|\tilde{Z}|^2}_{\text{تعریف}} = E\tilde{Z}\tilde{Z}^* = E(\tilde{X}^2+\tilde{Y}^2) = E\tilde{X}^2 + E\tilde{Y}^2 = \sigma_X^2 + \sigma_Y^2 \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \boxed{\sigma_Z^2 = \sigma_X^2 + \sigma_Y^2}$$

ین تعبیر تعریف ممان دوم، هم باعث حقیقی شدن ρ_Z و σ_Z^2 می شود و هم اینکه ممان ها را مستقل از ممان متقابل یا توزیع توأم X و Y می نماید.

این تعریف می تواند جایگزین تعریف قبلی شود.

کلی *

رای 2 متغیر تصادفی مختلط Z_1 و Z_2:

$$r_{z_1z_2} \triangleq E z_1 z_2^*$$

$$Cov(z_1,z_2) = \sigma_{z_1z_2} \triangleq E\tilde{z}_1\tilde{z}_2^*$$

$$\rho_{z_1z_2} = \frac{\sigma_{z_1z_2}}{\sqrt{\sigma_{z_1}^2\sigma_{z_2}^2}} = \frac{\sigma_{z_1}}{\sigma_{z_1}\sigma_{z_2}}$$

$$\sigma_{z_1z_2} = r_{z_1z_2} - m_{z_1}m_{z_2}^* \qquad \sigma_z^2 = \rho_z - |m_z|^2$$

برخی تجدید نظرها:

* تعریف تعامد $\begin{cases} z_1 \perp z_2 \\ E z_1 z_2^* = 0 \end{cases}$

* تعریف ناهمبستگی $\begin{cases} z_1 \not\perp z_2 \\ E\tilde{z}_1\tilde{z}_2^* = 0 \text{ یا } \sigma_{z_1z_2} = 0 \text{ یا } \rho_{z_1z_2} = 0 \text{ یا } r_{z_1z_2} = m_{z_1}m_{z_2}^* \end{cases}$

* نامساوی شوارتز $\begin{cases} |E z_1 z_2^*|^2 \leqslant E|z_1|^2 . E|z_2|^2 \\ |\rho_{z_1z_2}|^2 \leqslant 1 \rightarrow |\rho_{z_1z_2}| \leqslant 1 \end{cases}$

* مساوی به مفهوم ms $\begin{cases} z_1 \overset{ms}{=} z_2 & \text{نماد} \\ E|z_1 - z_2|^2 = 0 & \text{شرط} \end{cases}$

متغیر تصادفی Z را نرمال گوئیم، هرگاه هر ترکیب خطی اجزای حقیقی و مجازی آن تولید یک متغیر تصادفی نرمال کند، یعنی در واقع اگر اجزای حقیقی و مجازی آن توأماً نرمال باشند.

4-5- مقدمه‌ای بر تخمین

منظور از تخمین، پیدا کردن یک مجهول (مقدار تقریبی) از روی داده یا داده‌های آماری یعنی مقادیر مشاهده شده از یک یا چند متغیر تصادفی مجهول که به دلیلی مستقیماً قابل سنجش نیست داده‌هائی که قابل سنجش هستند و به طریقی با مجهول مرتبط هستند.

* در این قسمت تخمین یک متغیر تصادفی S از روی یک متغیر تصادفی دیگر X را در نظر خواهیم گرفت

- S می تواند مثلاً مقدار سیگنال در یک لحظه باشد و X نتیجهٔ اندازه گیری همراه با نویز آن.
- S می تواند مثلاً مقدار سیگنال در 2 ثانیه بعد باشد و X مقدار فعلی سیگنال باشد.

+ هدف به صورت $\hat{S} = g(X)$ به طوری که $S \approx \hat{S}$ باشد.

↳ تخمین S

* در واقع هدف از تخمین، پیدا کردن یک رابطهٔ تقریبی بین S و X می باشد. $S \approx g(X)$

* یک معیار مفید رایج در تخمین، متوسط مربع خطای باشد.

$$P = E(S-\hat{S})^2 = Min \Longrightarrow \begin{cases} \hat{S} = g(X) \\ P_{min} \end{cases}$$

اگر $P_{min}=0$ باشد، نشان می دهیم که به مفهوم ms: $S=\hat{S}$

یعنی ← $S=g(X)$

یعنی رابطهٔ دقیقی بین S و X وجود داشته و ما آن را بدست آورده‌ایم.

(الف) تخمین با مقدار ثابت (بدون استفاده از X)

$$\left\{\begin{array}{l} \hat{S}=a \quad \text{قید:} \\ P=E(S-a)^2=Min \end{array}\right\} \Longrightarrow P=E(S-a)^2=E(\tilde{S}+\underbrace{m_S}-a)^2=$$

$$=E\tilde{S}^2+E(m_S-a)^2+2E\tilde{S}(m_S-a)=$$

$$=\sigma_S^2+(m_S-a)^2+2(m_S-a)\underbrace{\cancel{E\tilde{S}}}_{0} \longrightarrow$$

$$\rightarrow P=E(S-\hat{S})^2=\sigma_S^2+(m_S-a)^2=Min \longrightarrow a=m_S \Longrightarrow$$

$$\boxed{\begin{array}{c} \hat{S}=m_S \\ P_{min}=\sigma_S^2 \end{array}}$$

ب) تخمین خطی (به فرم $\hat{S} = a_1 X + a_2$)

$$\left.\begin{array}{l} P = E(s-\hat{s})^2 = Min \\ \hat{s} = a_1 X + a_2 \quad \text{قید خطی بودن} \end{array}\right\} \Longrightarrow a_1, a_2 \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} \hat{s} \\ P_{min} \end{array}\right.$$

$$P = E(s - a_1 x - a_2)^2 = E(\tilde{s} + m_s - a_1 \tilde{x} - a_1 m_x - a_2)^2 = E(\underbrace{\tilde{S} - a_1 \tilde{x}} + \underbrace{m_s - a_1 m_x -$$

$$= E(\tilde{s} - a_1 \tilde{x})^2 + (m_s - a_1 m_x - a_2)^2 + 0 = Min \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \left\{\begin{array}{l} a_2 = m_s - a_1 m_x \longrightarrow \hat{S} = a_1 x + a_2 = a_1(X - m_x) + m_s \\ E(\tilde{s} - a_1 \tilde{x})^2 = min \end{array}\right.$$

$$E\tilde{s}^2 + a_1^2 \underbrace{E\tilde{x}^2}_{\sigma_x^2} - 2a_1 \underbrace{E\tilde{s}\tilde{x}}_{\sigma_{sx}} = Min \xrightarrow{\frac{\partial}{\partial a_1}(\ )=0} 2\sigma_x^2 a_1 - 2\sigma_{sx} = 0 \longrightarrow$$

$$\longrightarrow a_1 = \frac{\sigma_{sx}}{\sigma_x^2} \times \frac{\sigma_s}{\sigma_s} = \rho_{sx} \frac{\sigma_s}{\sigma_x} \longrightarrow \boxed{\begin{array}{c} \hat{S} = \rho_{sx} \frac{\sigma_s}{\sigma_x}(X - m_x) + m_s \\ P_{min} = \sigma_s^2 (1 - \rho_{sx}^2) \end{array}}$$

در مقایسه با بند (الف) جملهٔ اول $\hat{s}$ را می توان اصلاح کنندهٔ تخمین بند (الف) به کمک X دانست و ضریب کوچکتر از یک، $(1-\rho_{sx}^2)$ را در رابطهٔ P_{min}، عامل این اصلاح دانست.

① اگر s و X ناهمبسته باشند، یعنی $\rho_{sx}=0$، داریم:

$$\Longrightarrow \boxed{\hat{S} = 0 + m_s \ , \ P_{min} = \sigma_s^2 (1-0)}$$

پس X هیچ کمکی به تخمین خطی s نخواهد کرد.

البته ناهمبستگی به معنی استقلال نیست ولذا بدین معنی نیست که X هیچ کمکی به تخمین s نخواهد کرد. حتی ممکن است s و X ای که کاملاً وابسته باشند، ناهمبسته باشند، زیرا فقط تخمین خطی غلط است و ممکن است تخمین های دیگر درست باشد.

مثلاً فرض کنید: $\quad f_x(-x) = f_x(x)$:فرض

وابستگی کامل $S(\xi) = x^2(\xi)$

این s و X ناهمبسته اند، چرا که $\quad Esx = Ex^2 x = Ex^3 = 0$

تقارن زوج pdf

و $Ex = 0 \ , \ Esx = EsEx \longrightarrow \rho_{xy} = 0$

$$:\left\{\begin{array}{l}\hat{S}=\rho_{sx}\dfrac{\sigma_s}{\sigma_x}(X-m_x)+m_s\\ P_{min}=\sigma_s^2(1-\rho_{sx}^2)\end{array}\right\} \quad 9 \quad S\not\perp X \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l}\hat{S}=m_s\\ P_{min}=\sigma_s^2\end{array}\right.$$

مثل تخمین با مقدار ثابت

* در حالت $|\rho_{sx}|=1$ داریم:

$$P_{min}=E(S-\hat{S})^2=\cancel{\ }\sigma_s^2(1-1)=0 \longrightarrow \hat{S}=S$$

$$\longrightarrow \boxed{S=\rho_{sx}\frac{\sigma_s}{\sigma_x}(X-m_x)+m_s}$$

* یعنی وقتی ~~[illegible]~~ اندازهٔ ضریب همبستگی برابر یک باشد، یک رابطهٔ خطی دقیق بین دو متغیر تصادفی وج
لذا ضریب همبستگی پارامتری است که میزان وابستگی خطی 2 متغیر تصادفی را نشان می‌دهد.

~~[illegible]~~

ج) بهترین تخمین

$$\left\{\begin{array}{l}P=E(S-\hat{S})^2=Min\\ \hat{S}=g(X) \text{ هر تابع دلخواهی از } X\end{array}\right.$$

$$P=E(S-g(X))^2=E_X\left(E_S(S-g(X))^2|X\right)=\int_{x=-\infty}^{+\infty}\overset{\text{غیرصفر}}{f_X(x)}\,\underbrace{E\left[(S-g(X))^2|X=x\right]}_{\text{غیرمنفی}}dx=Min$$

$$E(S-g(X))^2\Big|_{X=x}=Min \longrightarrow E(S^2-2Sg(x)+g^2(x))\Big|_{X=x}=Min \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \underbrace{E(S^2|_{X=x})}_{\sigma_{s|x}^2+m_{s|x}^2}-2\underbrace{Eg(x)S|_{X=x}}_{g(x).m_{s|x}}+\underbrace{Eg^2(x)|_{X=x}}_{g^2(x)}=Min \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \sigma_{s|x}^2+(g(x)-m_{s|x})^2=Min \longrightarrow \left\{\begin{array}{l}g(x)=m_{s|x}\\ P_{min}=\int_{-\infty}^{+\infty}f_X(x)\sigma_{s|x}^2dx=E\sigma_{s|x}^2\end{array}\right.$$

$$\ast \longrightarrow \begin{cases} \hat{S} = E(S|X) = m_{s|x} & \text{متوسط پسین (پس از مشاهده داده)} \\ P_{min} = E(\mathrm{var}(s|x)) = E\,\sigma^2_{s|x} & \text{امید ریاضی واریانس پسین} \end{cases}$$

حالت کلی بهترین تخمین $\hat{s} = m_{s|x}$ تابعی غیرخطی از X می گردد.

ر حالتی که S و X توأماً نرمال باشند از قسمت 3-4 داریم:

$$\begin{cases} m_{s|x} = \rho_{sx}\dfrac{\sigma_s}{\sigma_x}(X-m_x)+m_s \\ \sigma^2_{s|x} = \sigma^2_s(1-\rho_{sx})^2 \end{cases}$$

همان تخمین خطی

پس $$\begin{cases} \hat{S} = m_{s|x} = \rho_{sx}\dfrac{\sigma_s}{\sigma_x}(X-m_x)+m_s \\ P_{min} = E\,\sigma^2_{s|x} = E\left(\sigma^2_s(1-\rho^2_{sx})\right) = \sigma^2_s(1-\rho^2_{sx}) \end{cases}$$ بهترین تخمین است.

پس می توان گفت که اگر دو متغیر تصادفی توأماً نرمال باهم وابستگی داشته باشند، وابستگی آنها از نوع خطی خواهد بود.

قبلاً دیده بودیم که در توأماً نرمال از ناهمبستگی (عدم وابستگی خطی)، استقلال کامل (عدم هرگونه وابستگی) نتیجه می گردد.

- بردار تصادفی

مجموعه‌ای از n متغیر تصادفی $\equiv$ بردار تصادفی

5-1- (مروری بر ماتریس و بردار و ذکر چند قرارداد)

① ماتریس:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix} \underset{\text{نماد اختصاری}}{\equiv} [a_{ij}]_{n\times m}$$

* در ماتریس مربعی، $m=n$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

در ماتریس قطری فقط روی قطر اصلی مقادیر غیرصفرند:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & & 0 \\ & a_{22} & \\ 0 & & \ddots\ a_{nn} \end{pmatrix} \overset{\text{نماد}}{\equiv} \mathrm{Diag}(a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn})$$

ماتریس همانی:

$$A = \mathrm{Diag}(1,1,\dots,1) \overset{\text{نماد}}{\triangleq} I$$

---

② ضرب ماتریس:

$$A = [a_{ij}]_{n\times m_1} \quad , \quad B = [b_{ij}]_{m_1\times m}$$

$$C = AB = [a_{ij}]_{n\times m_1} \cdot [b_{ij}]_{m_1\times m} = [c_{ij}]_{n\times m}$$

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{m_1} a_{ik} b_{kj}.$$

---

③ برگردان (T)، هرمیتین، وارون ماتریس

$$A = [a_{ij}]_{n\times m} \longrightarrow \begin{cases} \underset{\text{برگردان } A}{B} = A^t = [b_{ij}]_{m\times n} \\ \text{و} \\ b_{ij} = a_{ji} \end{cases}$$

* در واقع از تعویض جای سطر و ستون A، حاصل می‌گردد.

$$\text{هرمیتین} \leftarrow \begin{cases} C = A^h = [c_{ij}]_{m\times n} \\ \text{و} \\ c_{ij} = a_{ji}^* \end{cases}$$

در واقع ← $A^h = (A^*)^t = (A^t)^*$

مربعی $A = [a_{ij}]_{n\times n}$

$B = A^{-1}$ (وارون A)

$AB = BA = I$ ← شرط وارون بودن

در حاصلضرب داریم:

$$(ABC)^t = C^t B^t A^t$$

$$(ABC)^h = C^h B^h A^h$$

$$(ABC)^{-1} = C^{-1} B^{-1} A^{-1}$$ ← وقتی تک تک وارون داشته باشند.

ات ترکیبی : $(A^t)^t = A \quad , \quad (A^h)^h = A \quad , \quad (A^t)^h = (A^h)^t = A^*$

$(A^{-1})^t = (A^t)^{-1} = A^{-t} \quad , \quad (A^{-1})^h = (A^h)^{-1} = A^{-h}$

ردماتریس و مربع اندازهٔ ماتریس : $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ ماتریس مربعی

ردماتریس A $\longrightarrow$ $\mathrm{trace}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$

دلخواه $A = [a_{ij}]_{n\times m}$

مربع اندازهٔ ماتریس $\longrightarrow$ $\|A\|^2 = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} |a_{ij}|^2$

یک رابطهٔ مفید : $\boxed{\|A\|^2 = \mathrm{trace}(A^h A) = \mathrm{trace}(A A^h)}$ *

بردار، ضرب بردارها و تعامد بردارها : (یک سطری یا یک ستونی) ماتریس یک بعدی ≡ بردار

نماد بردار ستونی $\underline{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ بردار سطری $\underline{a}^t = (a_1\ a_2\ \dots\ a_n)$

$\boxed{\underline{a} = (a_1\, a_2 \dots a_n)^t}$ ✓

ین بردارها دو نوع ضرب تعریف می کنیم :

* ضرب عددی دو بردار $\longrightarrow$ $\underline{a} = (a_1\ a_2\ \dots\ a_n)^t$

$\underline{b} = (b_1\ b_2\ \dots\ b_n)^t$

$\boxed{\text{حاصلضرب عددی } \underline{a} \text{ و } \underline{b} = \sum_{i=1}^{n} a_i^* b_i = \underline{a}^h . \underline{b}}$

این ضرب، لازم است که ابعاد دو بردار باهم برابر باشند .

* ضرب ماتریسی دو بردار $\longrightarrow$ یعنی ضربی که حاصل آن یک ماتریس می گردد.

$\underline{a} = (a_1 \ a_2 \ \dots \ a_n)^t \quad , \quad \underline{b} = (b_1 \ b_2 \ \dots \ b_m)^t$

$$\boxed{\text{حاصلضرب ماتریسی } \underline{a} \text{ و } \underline{b} = \begin{pmatrix} a_1 b_1^* & a_1 b_2^* & \dots & a_1 b_m^* \\ a_2 b_1^* & a_2 b_2^* & \dots & a_2 b_m^* \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_n b_1^* & a_n b_2^* & & a_n b_m^* \end{pmatrix} = [a_i b_j^*]_{n\times m} = \underline{a} \cdot \underline{b}^h}$$

در ضرب ماتریسی، تساوی ابعاد دو بردار، ضرورتی ندارد.

در $\quad \underline{a}^h \cdot \underline{b} = (\underline{b}^h \cdot \underline{a})^{\overset{\text{زن نطوا!}}{h}} = (b^h \cdot \underline{a})^* \quad *$

در ضرب ماتریسی $\quad \underline{a} \cdot \underline{b}^h = (\underline{b}\,\underline{a}^h)^h \quad *$

$$\boxed{\|\underline{a}\|^2 = \sum_{i=1}^{n} |a_i|^2 = \underline{a}^h \cdot \underline{a} = trace(\underline{a}\,\underline{a}^h)}$$

تعامد دو بردار : $\quad \underline{a} = (a_1 \ a_2 \ \dots \ a_n)^t \quad , \quad \underline{b} = (b_1 \ b_2 \ \dots \ b_n)^t$

شرط تعامد $\rightarrow \underline{a}^h \underline{b} = 0$

نماد تعامد $\rightarrow \underline{a} \perp \underline{b}$

---

⑥ بردارهای ویژه و مقادیر ویژه: $\quad A = [a_{ij}]_{n\times n}$ ماتریس مربعی

$A \underline{v} = \lambda \underline{v} \longrightarrow$ جواب‌های غیر صفر معادله روبرو را بردارهای ویژهٔ A گویند.

* جواب همیشگی $\underline{v} = 0$ بردار ویژه نامیده نمی‌شود.

اگر $\underline{v}$ در رابطه صدق کند، $K\underline{v}$ نیز صدق خواهد کرد، در واقع می‌توان گفت امتدادهای ویژه داریم. می‌توان K را به قسمی اختیار کرد که مربع اندازهٔ بردار ویژه برابر با $\underline{1}$ شود. (بردار ویژهٔ نرمالیزه یا یکه)

ما نیز بردارهای ویژهٔ نرمالیزه را در نظر خواهیم گرفت.

$$A\underline{v} = \lambda \underline{v} \Longrightarrow (A - \lambda I)\underline{v} = 0$$

$$\begin{pmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & & & \end{pmatrix} \underline{v} = 0$$

ی $\underline{v}$ وقتی جواب غیرصفر خواهیم داشت که ماتریس ضرایب سینگولار باشد .

$$\det(A-\lambda I)=0$$

ن رابطه برحسب λ یک چندجمله ای درجه n می باشد (معادله مشخصه) . ریشه های آن

$$\lambda=\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_n$$

قادیر ویژه نامیده می شوند .

و بردار ویژه متناظر با λ_i را $\underline{v}_i$ می نامیم :

$$A\underline{v}_i=\lambda_i\underline{v}_i$$

طات :

① اگر $A^h=A$ باشد، همهٔ مقادیر ویژه اعداد حقیقی خواهند بود و بردارهای ویژهٔ متناظر با مقادیر ویژهٔ متفاوت، متعامد خواهند بود.

$$\lambda_i\neq\lambda_j \Longrightarrow \underline{v}_i \perp \underline{v}_j$$

② اگر A حقیقی و $A^t=A$ ، علاوه بر خواص ① ، بردارهای ویژه نیز حقیقی خواهند بود.

③ در حالت کلی داریم :

$$\prod_{i=1}^{n}(\lambda_i)=\det(A)$$

$$\sum_{i=1}^{n}(\lambda_i)=\mathrm{Trace}(A)$$

---

⑦ ماتریس متقارن ـ با تقارن هرمیتی و ماتریس یکانی :

$A=[a_{ij}]_{n\times n}$ مربعی

$$\begin{cases} A^t=A \\ \text{or} \\ a_{ji}=a_{ij} \end{cases}$$

← شرط تقارن

یعنی

یعنی عناصر قرینه نسبت به قطر اصلی مساوی باشند .

$$\begin{cases} A^h=A \\ a_{ji}^*=a_{ij} \end{cases}$$

← شرط تقارن هرمیتی

یعنی

یعنی عناصر روی قطر اصلی حقیقی باشند و عناصر قرینه نسبت به قطر اصلی، مزدوج باشند.

شرط یکانی بودن $\longrightarrow$ $A^h = A^{-1}$

Unitary : یکانی

به عبارت معادل : $A^hA = AA^h = I$

یک خاصیت ماتریس یکانی این است که اندازه‌ها را تغییر نمی‌دهد.

یعنی اگر U یکانی باشد،

$$B = UA \longrightarrow \|B\|^2 = \|A\|^2$$

اثبات :

$$\|B\|^2 = trace(B^hB) = trace((UA)^hUA) = trace(A^h\underbrace{U^hU}_{I}A) = trace(A^hA) = \|$$

تعریف نرم درجه دوم و نرم هرمیتی

بردار n بعدی $\underline{Z}$: $\underline{Z} = (z_1\ z_2 \dots z_n)^t$

* نرم درجه دوم بردار $\underline{Z}$: با ماتریس ضرایب A

$$q_A(\underline{Z}) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} z_i z_j$$

$$A = [a_{ij}]_{n\times n}$$

* نرم هرمیتی بردار $\underline{Z}$: با ماتریس ضرایب A

$$h_A(\underline{Z}) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} z_i^* z_j$$

نرم هرمیتی وقتی به کار برده می‌شود که A دارای تقارن هرمیتی باشد، که در این صورت $h_A(\underline{Z})$ عددی حقیقی خواهد بود. چرا که :

$$(h_A(\underline{Z}))^* = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^* z_i z_j^* \underset{a_{ji}=a_{ij}^*}{=} \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ji} z_j^* z_i = h_A(\underline{Z})$$

رابطهٔ مفید :

$$q_A(\underline{Z}) = \underline{Z}^t A \underline{Z}$$

$$h_A(\underline{Z}) = \underline{Z}^h A \underline{Z}$$

5- بردار تصادفی ← 5-1 مرور و چند قرارداد

$$* \quad g(x_1, x_2, \dots, x_n) \equiv g(\underline{x})$$

$$* \quad \{a_1 \leqslant b_1, a_2 \leqslant b_2, \dots, a_n \leqslant b_n\} \equiv \{\underline{a} \leqslant \underline{b}\}$$

$$* \quad \int_{a_1}^{b_1}\int_{a_2}^{b_2}\cdots\int_{a_n}^{b_n} \equiv \int_{\underline{a}}^{\underline{b}}$$

$$* \quad dx_1\, dx_2\, dx_3 \dots dx_n \equiv d\underline{x}$$

$$\frac{\partial^n}{\partial x_1 \partial x_2 \cdots \partial x_n} \equiv \frac{\partial^n}{\partial \underline{x}}$$

2- توابع احتمال بردار تصادفی (CDF و pdf , cf)

بردار تصادفی ≡ مجموعه‌ای از مثلاً n متغیر تصادفی

$$\underline{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n)^t$$

$$\Omega \xrightarrow{\underline{X}} \mathbb{R}^n$$

ریف بردار تصادفی به هر نقطه از فضای نمونه یا n عدد نسبت داده می‌شود.

نقطه‌ای از فضای $\mathbb{R}^n$ نسبت داده می‌شود.

یک بردار n بعدی عددی نسبت داده می‌شود.

$$\boxed{\begin{array}{l} F_X(\underline{x}) \triangleq p\{\underline{X} \leqslant \underline{x}\} \qquad \text{و} \qquad f_X(\underline{x}) \triangleq \dfrac{\partial^n}{\partial \underline{x}} F_X(\underline{x}) \\ \phi_X(\underline{w}) \triangleq E\, e^{j\sum_{i=1}^{n} w_i X_i} = E\, e^{j\underline{w}^t \underline{X}} = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{j\underline{w}^t\underline{x}} f_X(\underline{x})\, d\underline{x} \end{array}}$$

CDF و pdf و cf ، هم‌ارز یکدیگرند. معلوم بودن هر یک ، دوتای دیگر را مشخص می‌کند ، چراکه :

$$* \quad F_X(\underline{x}) = \int_{-\infty}^{\underline{x}} f_X(\underline{x})\, d\underline{x}$$

$$* \quad f_X(\underline{x}) = \mathcal{F}^{-1}\phi_X^*(\underline{w}) = \int_{-\infty}^{+\infty} \phi_X^*(\underline{w})\, e^{j\sum_{i=1}^{n} w_i x_i} \frac{d\underline{w}}{(2\pi)^n} = \int_{-\infty}^{+\infty} \phi_X^*(\underline{w}) e^{j\underline{w}^t}$$

برای 2 بردار تصادفی :

$$\underline{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n)^t$$
$$\underline{Y} = (Y_1, Y_2, \dots, Y_m)^t$$

توابع احتمال توأم هم مطرح می شود.

$$* \; F_{XY}(\underline{x}, \underline{y}) \triangleq P\{\underline{X} \leqslant \underline{x}, \underline{Y} \leqslant \underline{y}\}$$

$$* \; f_{XY}(\underline{x}, \underline{y}) \triangleq \frac{\partial^{n+m}}{\partial \underline{x} \, \partial \underline{y}} F_{XY}(\underline{x}, \underline{y})$$

$$* \; \Phi_{XY}(\underline{u}, \underline{v}) \triangleq E \, e^{j(\underline{u}^t \underline{X} + \underline{v}^t \underline{Y})} = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{j(\underline{u}^t \underline{x} + \underline{v}^t \underline{y})} f_{XY}(\underline{x}, \underline{y}) \, d\underline{x} \, d\underline{y}$$

بکمک توابع احتمال توأم دو بردار، می توان توابع احتمال کناری هر یک را پیدا کرد. مثلاً:

$$F_X(\underline{x}) = F_{XY}(\underline{x}, \underline{+\infty})$$

$$f_X(\underline{x}) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{XY}(\underline{x}, \underline{y}) \, d\underline{y}$$

$$\Phi_X(\underline{w}) = \Phi_{XY}(\underline{w}, \underline{0})$$

---

* دو تابع احتمال شرطی مهم و مفید :

نماد اختصاری

$$F_X(\underline{x} \mid \underline{Y} \leqslant \underline{y}) \triangleq F_X(\underline{x} \mid \underline{y}) = \frac{F_{XY}(\underline{x}, \underline{y})}{F_Y(\underline{y})}$$

$$f_X(\underline{x} \mid \underline{Y} = \underline{y}) \triangleq f_X(\underline{x} \mid \underline{y}) = \frac{f_{XY}(\underline{x}, \underline{y})}{f_Y(\underline{y})}$$

رابطهٔ زنجیره‌ای $\Rightarrow \; F_{XY}(\underline{x}, \underline{y}) = F_X(\underline{x}) F_Y(\underline{y} \mid \underline{x}) = F_Y(\underline{y}) F_X(\underline{x} \mid \underline{y})$

$$f_{XY}(\underline{x}, \underline{y}) = f_X(\underline{x}) f_Y(\underline{y} \mid \underline{x}) = f_Y(\underline{y}) f_X(\underline{x} \mid \underline{y})$$

دو بردار تصادفی را مستقل از هم گوئیم، هرگاه توابع احتمال توأم آنها، برابر حاصلضرب توابع احتمال تک‌تک آن‌ها باشد.

نماد : $\underline{X} \perp\!\!\!\perp \underline{Y}$

$$\left.\begin{aligned} F_{XY}(\underline{x},\underline{y}) &= F_X(\underline{x}) \cdot F_Y(\underline{y}) \\ f_{XY}(\underline{x},\underline{y}) &= f_X(\underline{x}) \cdot f_Y(\underline{y}) \\ \Phi_{XY}(\underline{u},\underline{v}) &= \Phi_X(\underline{u}) \cdot \Phi_Y(\underline{v}) \end{aligned}\right\}$$

3 شرط معادل برای استقلال

بته 2 بردار تصادفی را می‌توان به‌عنوان یک بردار تصادفی n+m بعدی نیز در نظر گرفت. بالعکس نیز ی‌توان یک بردار را به 2 (و یا چند) بردار تصادفی تفکیک کرد.

مثال : $\underline{X} = (X_1, X_2, X_3, X_4)^t$

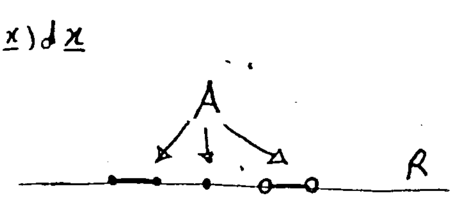
- $F_{X_1X_3}(x,y) = F_X(x,+\infty,y,+\infty)$
- $f_{X_4}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x_1,x_2,x_3,x)\,dx_1\,dx_2\,dx_3$
- $\Phi_{X_1X_4}(\alpha,\beta) = \Phi_X(\alpha,0,0,\beta)$
- $F_{X_1X_2}(x_1,x_2 \mid x_3=a, x_4=b) = \dfrac{F_X(x_1,x_2,a,b)}{F_{X_3X_4}(a,b)} = \dfrac{F_X(x_1,x_2,a,b)}{F_X(+\infty,+\infty,a,b)}$

ر حالت کلی به کمک pdf می‌توان احتمال پیشامدها را محاسبه کرد.

$$P\{\underline{X} \in A\} = \int_A f_X(\underline{x})\,d\underline{x}$$

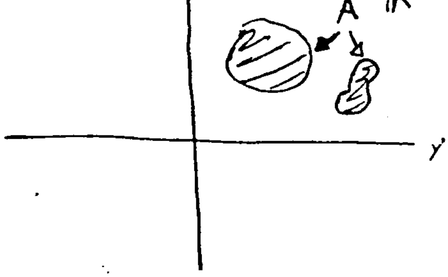
$A \subseteq \mathbb{R}^n$

ر حالت یک بعدی :



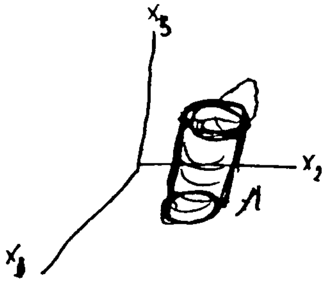
$$P(A) = \int_A f_X(x)\,dx$$

مثلاً در حالت 2 بعدی :



$$(A) = \iint_A f_{XY}(x,y)\,dx\,dy$$

مثلاً در حالت 3 بعدی :



$$p(A) = \iiint_A f_X(x_1,x_2,x_3)\,dx\,dy\,dz$$

رابطهٔ زنجیره‌ای :

$$f_X(\underline{x}) = f_{X_1}(x_1) \cdot f_{X_2}(x_2|x_1) \cdot f_{X_3}(x_3|x_1x_2) \dots f_{X_n}(x_n|x_1x_2\dots x_{n-1})$$

$$F_X(\underline{x}) = F_{X_1}(x_1) \cdot F_{X_2}(x_2|x_1) \cdot F_{X_3}(x_3|x_1x_2) \dots F_{X_n}(x_n|x_1x_2\dots x_{n-1})$$

توأماً مستقل بودن ابعاد یک بردار تصادفی : $X_1 \amalg X_2 \amalg X_3 \amalg \dots \amalg X_n$ ← فلا

3 شرط معادل

$$\left.\begin{aligned} F_X(\underline{x}) &= \prod_{i=1}^{n} F_{X_i}(x_i) \\ f_X(\underline{x}) &= \prod_{i=1}^{n} f_{X_i}(x_i) \\ \Phi_X(\underline{w}) &= \prod_{i=1}^{n} \Phi_{X_i}(w_i) \end{aligned}\right\}$$

از توأماً مستقل بودن n متغیر تصادفی ، توأماً مستقل بودن هر زیرمجموعه ای از آنها نیز نتیجه

5_3_ ممان های اوّل ودوّم

$$\underline{m}_X = E\underline{X} = E\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} EX_1 \\ EX_2 \\ \vdots \\ EX_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \\ \vdots \\ m_n \end{pmatrix}$$

* $\underline{m}_X$ بردار متوسط می باشد، که هر بعدش ، متوسط یکی از متغیرهای تصادفی است.

$$R_X = E\underline{X}\,\underline{X}^h = E[x_i x_j^*]_{n\times n} = [E x_i x_j^*]_{n\times n} = [r_{ij}]_{n\times n} =$$

$$= \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & \cdots & r_{1n} \\ r_{21} & r_{22} & \cdots & r_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ r_{n1} & r_{n2} & \cdots & r_{nn} \end{pmatrix}$$

این رابطه $r_{ii} = E|x_i|^2 = \underset{\text{قدرت}}{\rho_i}$

R_X را ماتریس همبستگی بردار تصادفی گوئیم.

$$C_X = E\underline{\tilde{X}}\,\underline{\tilde{X}}^h = E[\tilde{x}_i \tilde{x}_j^*]_{n\times n} = [E\tilde{x}_i \tilde{x}_j^*]_{n\times n} = [\sigma_{ij}]_{n\times n} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \cdots & \sigma_{1n} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \cdots & \sigma_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \sigma_{n1} & \sigma_{n2} & \cdots & \sigma_{nn} \end{bmatrix}$$

✓ در این رابطه $\sigma_{ii} = E|\tilde{x}_i|^2 = \sigma_i^2$

اگر ابعاد برداری، 2 به 2 متعامد باشند:

$$r_{ij} = 0 \quad \forall i \neq j \Rightarrow R_X = Diag(\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_n)$$

آنگاه R_X قطری می‌گردد.

اگر ابعاد برداری، 2 به 2 ناهمبسته باشند:

$$\sigma_{ij} = 0 \quad \forall i \neq j \Longrightarrow C_X = Diag(\sigma_1^2, \sigma_2^2, \ldots, \sigma_n^2)$$

آنگاه C_X قطری می‌گردد.

بین 2 بردار تصادفی، ممان متقابل هم تعریف می‌گردد.

$$\underline{X} = (X_1, X_2, \ldots, X_n)^t$$

$$\underline{Y} = (Y_1, Y_2, \ldots, Y_m)^t$$

$$R_{XY} = E\underline{X}\,\underline{Y}^h = E[X_i Y_j^*]_{n\times m} = [E x_i y_j^*]_{n\times m}$$

ماتریس هم‌بستگی

$$C_{XY} = E\underline{\tilde{X}}\,\underline{\tilde{Y}}^h = E[\tilde{x}_i \tilde{y}_j^*]_{n\times m} = [E\tilde{x}_i \tilde{y}_j^*]_{n\times m}$$

ماتریس کوواریانس متقابل

چند رابطه و خاصیت :

$$* \; R_{XY} = C_{XY} + \underline{m}_X \underline{m}_Y^h \qquad\qquad * \; C_{XY}^h = C_{YX}$$

$$* \; R_X = C_X + \underline{m}_X \underline{m}_X^h \qquad\qquad * \; R_{XY}^h = R_{YX}$$

$$\left.\begin{aligned} * \; C_X^h &= C_X \\ * \; R_X^h &= R_X \end{aligned}\right\} \longrightarrow$$ یعنی تقارن هرمیتیک دارند.

تعریف تعامد 2 بردار: $\underline{X}$ و $\underline{Y}$ را متعامد گوییم، هرگاه هر بُعد یکی با هر بُعد دیگری متعامد باشد. یعنی

$R_{XY} = 0 \longleftarrow$ شرط تعامد

نماد تعامد : $\underline{X} \perp \underline{Y}$

تعریف ناهمبستگی 2 بردار: $\underline{X}$ و $\underline{Y}$ را ناهمبسته گوییم، هرگاه هر بُعد یکی با هر بعد دیگری ناهمبسته باشد.

یعنی : $C_{XY} = 0$ شرط ناهمبستگی

$\underline{X} \tilde{\perp} \underline{Y}$ نماد ناهمبستگی

$$* \; \underline{X} \perp \underline{Y} \Longrightarrow R_{X+Y} = R_X + R_Y$$

برای 2 بردار هم‌بعد

$$* \; \underline{X} \tilde{\perp} \underline{Y} \Longrightarrow C_{X+Y} = C_X + C_Y$$

$$\underline{X} \perp\!\!\!\perp \underline{Y} \underset{\not\Longleftarrow}{\Longrightarrow} \underline{X} \tilde{\perp} \underline{Y}$$

نه لزوما

4-رابطهٔ خطی بین ابعاد بردار تصادفی و خواص C_X

(الف) رابطهٔ خطی بین ابعاد بردار تصادفی

نظوراز رابطهٔ خطی، رابطه‌ای به شکل زیر است:

$$a_1X_1+a_2X_2+\dots+a_nX_n=a_0$$

با گرفتن امید ریاضی از طرفین، داریم:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i m_i = a_0$$

پس رابطهٔ خطی فوق، فقط می‌تواند با $a_0=\sum_{i=1}^{n}a_i m_i$ وجود داشته باشد، یعنی به فرم زیر:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i X_i = \sum_{i=1}^{n} a_i m_i$$

یعنی به فرم:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i (X_i - m_i) = 0$$

یعنی به شکل زیر:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \tilde{X}_i = 0$$

یعنی به عبارت معادل:

* $$\boxed{\underline{a}^t \underline{\tilde{X}} = 0}$$

با فرض $\underline{v}=\underline{a}^*$ داریم:

$$\underline{v}^h \underline{\tilde{X}} = 0$$

* یعنی:

$$\underline{\tilde{X}} \perp \underline{v}$$

البته $\underline{\tilde{X}}$ تابعی از ζ است، یعنی در هر نقطه از فضای نمونه، می‌تواند بردار عددی متفاوتی باشد. پس وجود رابطهٔ خطی بین ابعاد یک بردار تصادفی را می‌توان معادل دانست با وجود یک امتداد ثابت $\underline{v}$ به طوری که همهٔ بردارهای عددی $\underline{\tilde{X}}(\zeta)$ که در نقاط مختلف فضای نمونه داریم، بر آن امتداد ثابت عمود باشند.

البته در عمل رابطه به مفهوم ms یک رابطهٔ دقیق تلقّی می‌گردد. یعنی:

$$\sum_i a_i \tilde{X}_i \overset{ms}{=} 0$$

* یعنی:

$$E\left|\sum_{i} a_i \tilde{X}_i\right|^2 = 0$$

قضیه : شرط لازم و کافی برای وجود رابطهٔ خطی بین ابعاد یک بردار تصادفی ، سینگولار بودن ماتریس کوواریانس می باشد، یعنی $\det(C_x)=0$ ، یعنی $\prod_{i=1}^{n} \lambda_i = 0$

یعنی صفر بودن یکی از مقادیر ویژهٔ C_x .

و در واقع امتداد ثابت $\underline{v}$ همان بردار ویژهٔ متناظر با مقدار ویژهٔ صفر است .

اثبات لزوم شرط ـ

$$\underline{v}^h \underline{\tilde{X}} = 0 \to \underline{\tilde{X}}^h \underline{v} = 0 \to \underline{\tilde{X}}\,\underline{\tilde{X}}^h \underline{v} = 0 \to$$

$$\to E\,\underline{\tilde{x}}\,\underline{\tilde{x}}^h \underline{v} = 0 \to C_x \underline{v} = 0 \xrightarrow[C_x \underline{v_i} = \lambda_i \underline{v_i}]{\text{مقایسه با رابطهٔ}} \begin{cases} \lambda_i = 0 & \text{یکی از مقادیر ویژه} \\ \underline{v} = \underline{v_i} & \text{بردار ویژهٔ متناظر} \end{cases} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \det(C_x) = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i = 0$$

اثبات کفایت شرط ـ

$$\mathrm{et}(C_x) = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i = 0 \Longrightarrow \begin{cases} \lambda_i = 0 & \text{یکی از آنها} \\ \underline{v_i} = \underline{v} & \text{بردار ویژهٔ متناظر} \end{cases}$$

$$\Longrightarrow C_x \underline{v} = 0\,\underline{v} = 0 \to \underline{v}^h C_x \underline{v} = 0 \to$$

$$\to \underline{v}^h E\,\underline{\tilde{x}}\,\underline{\tilde{x}}^h . \underline{v} = 0 \to E(\underline{v}^h \underline{\tilde{x}})\underbrace{(\underline{\tilde{x}}^h \underline{v})}_{(\underline{v}^h \underline{\tilde{x}})^*} = 0 \to E\,|\underline{v}^h \underline{\tilde{x}}|^2 = 0 \Longrightarrow$$

$$\to \boxed{\underline{v}^h \underline{\tilde{X}} = 0}$$

مثال 2 بعدی :

$$C_x = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} \\ \sigma_{12}^* & \sigma_2^2 \end{pmatrix} \to \det(C_x) = 0 \to$$

$$\to \sigma_1^2 \sigma_2^2 - |\sigma_{12}|^2 = 0 \to |\rho_{12}|^2 = \left| \frac{\sigma_{12}}{\sigma_1 \sigma_2} \right|^2 = 1 \; .$$

$\boxed{|\rho_{12}| = 1}$ به عنوان شرط رابطهٔ خطی قبلاً داشتیم .

مهٔ بردار تصادفی :

ب) خواص ماتریس کوواریانس C_x

) در حالت کلّی C_x دارای تقارن هرمیتیک است . ($C_x^h = C_x$) (برای بردارهای حقیقی ، C_x حقیقی است .

) با توجّه به خاصیت ① در حالت کلّی ، کلّیهٔ مقادیر ویژهٔ C_x ، اعدادی حقیقی هستند و برای بردار تصادفی حقیقی ، بردارهای ویژه نیز حقیقی خواهند بود . ضمناً C_x دارای n بردار ویژهٔ متعامد نرمالیزه $\underline{v}_1$ ، $\underline{v}_2$ ، ... ، $\underline{v}_n$ می باشد و با این بردارهای توان یک ماتریس یکانی ساخت .

$$\underset{(\text{ماتریس یکانی})}{V} = \left(\underline{v}_1 \,\middle|\, \underline{v}_2 \,\middle|\, \cdots \,\middle|\, \underline{v}_n \right)$$

$$\text{علّت یکانی بودن } V \rightarrow V^h V = \begin{pmatrix} \underline{v}_1^h \\ \hline \underline{v}_2^h \\ \hline \vdots \\ \hline \underline{v}_n^h \end{pmatrix} \left(\underline{v}_1 \,\middle|\, \underline{v}_2 \,\middle|\, \cdots \,\middle|\, \underline{v}_n \right) = \begin{pmatrix} \underline{v}_1^h \underline{v}_1 & \underline{v}_1^h \underline{v}_2 & \cdots & \underline{v}_1^h \\ \underline{v}_2^h \underline{v}_1 & \underline{v}_2^h \underline{v}_2 & \cdots & \underline{v}_2^h \\ \vdots & & & \\ \underline{v}_n^h \underline{v}_1 & \underline{v}_n^h \underline{v}_2 & \cdots & \underline{v}_n^h \end{pmatrix}$$

$$\overset{\text{متعامد}}{=} \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} = I_n$$

) در حالت کلّی C_x یک ماتریس معیّن غیرمنفی (nnd) است و اگر رابطهٔ خطّی بین ابعاد بردار تصادفی نباشد ، معیّن مثبت (pd) است .   ✱

$$\left.\begin{matrix} \text{\underline{n}on-\underline{n}egative} \\ \text{\underline{p}ositive} \end{matrix}\right\} \text{definite}$$

$$\begin{cases} \forall \underline{z} \in \mathbb{R}^n \\ h_{C_x}(\underline{z}) \geqslant 0 \end{cases} \leftarrow \text{بودن یعنی}$$

$$\begin{cases} \forall \underline{z} \in \mathbb{R}^n \\ h_{C_x}(\underline{z}) > 0 \end{cases} \leftarrow \text{pd بودن یعنی}$$

بات :

$$h_{C_x}(\underline{z}) = \underline{z}^h C_x \underline{z} = \underline{z}^h E \tilde{\underline{x}} \tilde{\underline{x}}^h \underline{z} = E \underbrace{\underline{z}^h \tilde{\underline{x}}}_{\text{اسکالر}} \underbrace{\tilde{\underline{x}}^h \underline{z}}_{(\underline{z}^h \tilde{\underline{x}})^*} = \underbrace{E |\underline{z}^h \tilde{\underline{x}}|^2}_{\text{غیرمنفی}} \geqslant 0$$

ز بازای $\underline{z} = \underline{a}$ صفر شود :

$$h_{C_x}(\underline{a}) = E|\underline{a}^h \tilde{\underline{x}}|^2 = 0 \longrightarrow \underline{a}^h \tilde{\underline{x}} = 0$$

و این یعنی وجود رابطهٔ خطّی بین ابعاد بردار تصادفی .

④ با توجه به خاصیت $\underline{3}$ در حالت کلی، کلیهٔ مقادیر ویژه غیرمنفی هستند و اگر رابطهٔ خطی بین ابعا
بردار تصادفی نباشد، مقدار ویژهٔ صفر هم نخواهیم داشت.

اثبات :

خاصیت $\xrightarrow{z=\underline{v_i}}$ $h_{c_x}(v_i) \geqslant 0$. $\longrightarrow$ $\lambda_i \geqslant 0$

$$c_x(\underline{v_i}) = \underline{v_i}^h \underbrace{C_x \underline{v_i}}_{\lambda_i \underline{v_i}} = \lambda_i \underline{v_i}^h \underline{v_i} = \lambda_i \underbrace{\|v_i\|^2}_{1} = \lambda_i$$

⑤ در حالت کلی C_x به فرم زیر قابل تجزیه است :

$$\boxed{C_x = LL^h}$$

اثبات :

$$C_x(\underline{v_1}|\underline{v_2}|v_{\cdots}|\underline{v_n}) = (\lambda_1 \underline{v_1}|\lambda_2 \underline{v_2}|\dots|\lambda_n \underline{v_n}) =$$

$$= (\underline{v_1}|\underline{v_2}|\underline{v_3}|\dots|\underline{v_n}) \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \lambda_3 & \\ 0 & & & \ddots \lambda_n \end{pmatrix}$$

$$C_x V = V\Lambda \longrightarrow C_x = V\Lambda V^{-1} \overset{\text{یکانی بودن}}{=} V\Lambda V^h$$

چون λ_iها غیرمنفی اند.

$$\Lambda = Diag(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) = \Lambda^{\frac{1}{2}}\Lambda^{\frac{1}{2}} = \Lambda^{\frac{1}{2}}(\Lambda^{\frac{1}{2}})^t = \Lambda^{\frac{1}{2}}(\Lambda^{\frac{1}{2}})^h$$

$$\Lambda^{\frac{1}{2}} = (\sqrt{\lambda_1}, \sqrt{\lambda_2}, \dots, \sqrt{\lambda_n})$$

$$C_x = V\Lambda^{\frac{1}{2}}(\Lambda^{\frac{1}{2}})^h V^h = (V\Lambda^{\frac{1}{2}})(V\Lambda^{\frac{1}{2}})^h = LL^h \quad ✓$$

پس :

$$\boxed{L = V\Lambda^{\frac{1}{2}} = (\sqrt{\lambda_1}\,\underline{v_1}|\sqrt{\lambda_2}\,\underline{v_2}|\dots|\sqrt{\lambda_n}}$$ یک جواب است.

البته این تجزیه جواب منحصر به فرد ندارد. چرا که اگر L یک جواب باشد، یعنی:

$$LL^h = C_x$$

و U یک ماتریس یکانی دلخواه باشد. آنگاه $L' = LU$ نیز یک جواب خواهد بود، زیرا:

$$L'L'^h = LU(LU)^h = L\underbrace{UU^h}_{I}L^h = LL^h = C_x \quad ✓$$

3- توابعی از بردار تصادفی :

$$\underline{X} = (X_1, X_2, \ldots, X_n)^t$$

$$\left.\begin{array}{l} Y_1 = g_1(\underline{X}) \\ Y_2 = g_2(\underline{X}) \\ \vdots \\ Y_m = g_m(\underline{X}) \end{array}\right\} \xrightarrow[\text{با اختصار}]{} \underline{Y} = \underline{g}(\underline{X})$$

طورکلی برای محاسبهٔ احتمال پیشامدهائی که برحسب Y تعریف شده اند، کافی است پیشامد متناظر
رحسب X را تعیین کنیم و بکمک pdf $\underline{X}$ محاسبه کنیم. فرضاً:

$$\{\underline{Y} \in B\} \overset{\text{متناظر}}{\equiv} \{\underline{X} \in A\}$$

$$B \subset \mathbb{R}^m \qquad A \subset \mathbb{R}^n$$

$$P\{\underline{Y} \in B\} = P\{\underline{X} \in A\} = \int_A f_X(\underline{x})\, \underline{dx}$$

لبته ضمناً می توان pdf بردار جدید را پیدا نمود و مستقیماً به کمک آن محاسبه کرد.

$$P\{\underline{Y} \in B\} = \int_B f_Y(\underline{y})\, d\underline{y}$$

لف) روش کلی تعیین pdf جدید :

$$(1)\quad F_Y(\underline{y}) = P\{\underline{Y} \leq \underline{y}\} \qquad \underbrace{\{\underline{Y} \leq \underline{y}\} \overset{\text{متناظر}}{\equiv} \{X \in A_{\underline{y}}\}}$$

$$\longrightarrow F_Y(\underline{y}) = \int_{A_{\underline{y}}} f_X(\underline{x})\, d\underline{x}$$

$$(2)\quad f_Y(\underline{y}) = \frac{\partial^m}{\partial \underline{y}} F_Y(\underline{y})$$

ب) روش ساده حالت خاص:

اگر $m=n$ بوده و بازای $\underline{y}$ مفروض، دستگاه معادلات $\underline{g}(\underline{x}) = \underline{y}$ تعداد جواب قابل شمارش داشته باشد، مثلاً:

$$\underline{g}(\underline{x}) = \underline{y} \Longrightarrow \underline{x} = (\underline{a})_1, (\underline{a})_2, \ldots, (\underline{a})_K$$

و در محل جواب ها، توابع $\underline{g}$ مشتق پذیر باشد، می توان نوشت:

✱ $$f_Y(\underline{y}) = \sum_{i=1}^{K} \left. \frac{f_X(\underline{x})}{|J|} \right|_{\underline{x} = (\underline{a})_i}$$

ژاکوبین $J = \det\left[\frac{\partial g_i}{\partial x_j}\right]_{n\times n} = \det\begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \frac{\partial g_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial g_2}{\partial x_1} & \frac{\partial g_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial g_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial g_n}{\partial x_1} & \frac{\partial g_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial g_n}{\partial x_n} \end{pmatrix}$ ،

* اگر شرط $m=n$ برقرار نباشد، می‌توان با اضافه کردن چند معادلهٔ کمکی ساده شکل:

$$y_{m+1} = x_{m+1}$$

شرط $m=n$ را برقرار کرد.

+ یک مثال سادهٔ مهم، تبدیل خطی است:

$$\begin{cases} Y_1 = a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + \cdots + a_{1n}X_n + b_1 \\ Y_2 = a_{21}X_1 + a_{22}X_2 + \cdots + a_{2n}X_n + b_2 \\ \vdots \\ Y_n = a_{n1}X_1 + a_{n2}X_2 + \cdots + a_{nn}X_n + b_n \end{cases}$$

و به طور خلاصه داریم:

$$\underline{Y} = A\underline{X} + \underline{b} \quad , \quad A = [a_{ij}]_{n\times n}$$

به ازای $\underline{y}$ مفروض داریم:

$$A\underline{x} + \underline{b} = \underline{y} \longrightarrow \underline{x} = A^{-1}(\underline{y} - \underline{b})$$ (یک جواب دارد)

$$J = \det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = \det(A)$$

$$\longrightarrow \boxed{f_Y(\underline{y}) = \frac{f_X(A^{-1}(\underline{y} - \underline{b}))}{|\det A|}}$$

5-4- سفید کردن و شبیه سازی بردار تصادفی

* بردار سفید یعنی برداری با ممان های به شکل زیر:

(1) $\underline{m}_W = \underline{0}$

(2) $R_W \overset{\curvearrowleft}{=} C_W = \mathrm{Diag}(\sigma_1^2, \sigma_2^2, \ldots, \sigma_n^2)$

کلیهٔ ابعاد بردار سفید با یکدیگر متعامد و ناهمبسته است.

حالتی که $\sigma_i^2 = 1$ باشد، بردار را بردار سفید نرمالیزه گوییم.

* سفید نرمالیزه $\begin{cases} \underline{m}_w = \underline{0} \\ R_w = C_w = I \end{cases}$

با یک تبدیل خطی می‌توان یک بردار دلخواه را (غیر سفید) سفید و نرمالیزه کرد.

$$\underline{W} = A\underline{X} + \underline{b}$$

$$\underline{m}_w = E\underline{W} = E(A\underline{X}+\underline{b}) = AE\underline{X} + \underline{b} = A\underline{m}_X + \underline{b} = \underline{0} \Longrightarrow \underline{b} = -A\underline{m}_x$$

$$\underline{\tilde{W}} = \underline{w} - \underline{m}_w = A\underline{\tilde{X}} \Longrightarrow C_w = E\underline{\tilde{w}}\,\underline{\tilde{w}}^h = EA\underline{\tilde{X}}\,\underline{\tilde{X}}^h A^h = I \longrightarrow$$

$$\longrightarrow A\underbrace{E\underline{\tilde{X}}\,\underline{\tilde{X}}^h}_{C_x} A^h = I \longrightarrow AC_XA^h = I \longrightarrow$$

$$\longrightarrow C_x = A^{-1} I (A^h)^{-1} = (A^{-1})(A^{-1})^h$$

یس کافی است:

$$C_x = LL^h$$

و L را بدست آوریم.

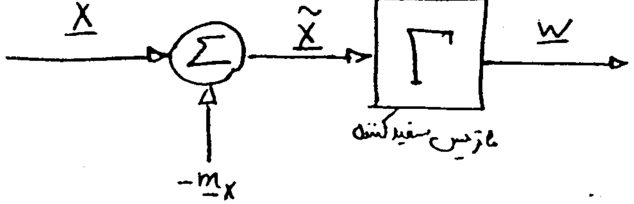
$$A^{-1} = L \longrightarrow A = L^{-1} = \Gamma$$

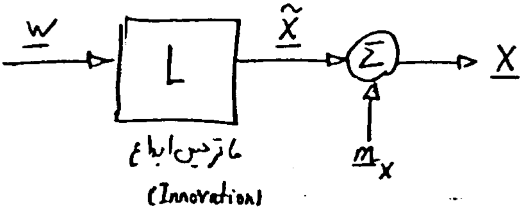
$$\Rightarrow \underline{W} = A\underline{X} + \underline{b} = A\underline{X} - A\underline{m}_X = A(\underline{X} - \underline{m}_X) \longrightarrow \boxed{\underline{W} = \Gamma(\underline{X} - \underline{m}_x)}$$

گاهی نیز عکس این عمل لازم می‌گردد. مثلاً شبیه سازی برداری با $\underline{m}_X$ و C_X مفروض توسط کامپیوتر، یعنی تبدیل بردار سفید نرمالیزه‌ای که توسط نرم افزار در اختیار قرار گرفته به برداری با $\underline{m}_X$ و C_X مفروض.

$$\underline{W} = \Gamma(\underline{X} - \underline{m}_X) \longrightarrow \Gamma^{-1}\underline{W} = \underline{X} - \underline{m}_X \longrightarrow$$

* $$\longrightarrow \boxed{\underline{X} = L\underline{W} + \underline{m}_X}$$





نکات :

① شرط سفیدپذیر بودن بردار تصادفی، سینگولار نبودن L است و چون :

$$C_X = LL^h \longrightarrow \det(C_X) = \det(L)\det(L^h) = |\det(L)|^2$$

یعنی C_X سینگولار نباشد، یعنی رابطهٔ خطی دقیق بین ابعاد بردار تصادفی نباشد.

* اگر رابطهٔ خطی موجود باشد، کافی است یکی از متغیرهای تصادفی موجود در رابطهٔ خطی را (که برحسب
با رابطهٔ دقیق قابل محاسبه است) از جمع ابعاد بردار کنار بگذاریم. (حذف سطر و ستون مربو
در C_X و $\underline{m}_X$) و به سفید کردن بقیهٔ ابعاد بپردازیم.)

② در بین جواب‌های مختلفی که برای تجزیهٔ C_X (L) وجود دارد، جواب پایین مثلثی از همه منا
است. (مرسوم به جواب علّی) علت علّی نامیده شدن:

$$L = \begin{pmatrix} l_{11} & & 0 \\ l_{21} & l_{22} & \\ \vdots & \vdots & \ddots \\ l_{n1} & l_{n2} & \cdots \; l_{nn} \end{pmatrix}$$

$$\underline{X} = L\,\underline{w} + \underline{b}$$

$$\downarrow$$

$$x_1 = l_{11}w_1 + b_1$$

$$x_2 = l_{21}w_1 + l_{22}w_2 + b_2$$

$$x_3 = l_{31}w_1 + l_{32}w_2 + l_{33}w_3 + b_3$$

$$\vdots$$

X_i فقط به w_1 تا w_i بستگی دارد. (علّی است)

یک دلیل مناسب‌تر بودن جواب پایین مثلثی این که وقتی ابعاد بردار w یکی یکی در اختیار ما قرا
ازهمان ابتدای توانیم محاسبهٔ بردار جدید $\underline{X}$ را شروع کنیم.

دلیل دیگر سادگی تعیین این جواب (L) است . یعنی نیازی به تعیین بردارها و مقادیر ویژه نداریم

$$LL^h = C_x$$

$$\begin{pmatrix} l_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & 0 \\ l_{n1} & l_{n2} & \cdots & & l_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l_{11}^* & l_{21}^* & \cdots & l_{n1}^* \\ 0 & l_{22}^* & \cdots & l_{n2}^* \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & l_{nn}^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} & \cdots & \sigma_{1n} \\ \sigma_{21} & \sigma_2^2 & \cdots & \sigma_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \sigma_{n1} & \sigma_{n2} & \cdots & \sigma_n^2 \end{pmatrix}$$

$$* \ |l_{11}|^2 = \sigma_1^2 \longrightarrow \boxed{l_{11} = \sigma_1}$$

$$* \ l_{11} l_{21}^* = \sigma_{12} \longrightarrow \boxed{l_{21} = \frac{\sigma_{12}^*}{\sigma_1}}$$

$$\vdots \qquad \vdots$$

کلیهٔ درایه‌ها یکی یکی محاسبه می‌گردد

$\Gamma = L^{-1}$ ← وارون کردن L نیز خیلی ساده است .

New

۷ - بردار نرمال

بردار تصادفی نرمال $\underline{X}$ = برداری که هر ترکیب خطی ابعاد آن تولید یک متغیر تصادفی نرمال کند . به عبارت معادل ابعادش توأماً نرمال باشند .

یعنی :

$$\left. \begin{array}{l} Z = \sum_{i=1}^{n} a_i X_i \\ \forall \underline{a} \in \mathbb{R}^n \end{array} \right\} \Longrightarrow Z \sim N(m_z, \sigma_z^2)$$

روشن است که هر ترکیب مستوی ابعاد بردار نرمال نیز تولید متغیر تصادفی نرمال خواهد کرد .

روشن است که هر بردار دیگری نیز که از تبدیل خطی بردار نرمال حاصل شوده $\underline{Y} = A\underline{X} + \underline{b}$ نیز یک بردار نرمال خواهد بود .

الف) cf بردار نرمال :

$$\phi_X(\underline{\omega}) = E\, e^{j\sum_{i=1}^{n} \omega_i X_i} = E\, e^{jZ} = \phi_Z(1) = e^{jm_z} e^{-\frac{1}{2}\sigma_z^2}$$

$$Z = \sum_{i=1}^{n} \omega_i X_i \longrightarrow Z \sim N(m_z, \sigma_z^2) \longrightarrow \phi_Z(\omega) = e^{jm_z\omega} e^{-\frac{1}{2}\sigma_z^2 \omega^2}$$

$$m_z = Ez = \sum_{i=1}^{n} \omega_i EX_i \longrightarrow m_z = \sum_{i=1}^{n} m_i \omega_i$$

$$\tilde{Z} = z - m_z = \sum_{i=1}^{n} \omega_i \tilde{X}_i \longrightarrow \sigma_z^2 = E\tilde{z}^2 = E\Big(\sum_{i=1}^{n} \omega_i \tilde{X}_i\Big)^2 = E\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \omega_i \omega_j \tilde{X}_i \tilde{X}_j =$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \omega_i \omega_j \underbrace{E\tilde{X}_i\tilde{X}_j}_{\sigma_{ij}} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \sigma_{ij}\, \omega_i \omega_j = q_{C_X}(\underline{\omega}$$

$$\rightarrow \boxed{\Phi_x(\underline{w}) = e^{j\sum_{i=1}^{n} m_i w_i} \, e^{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} 6_{ij} w_i w_j} = e^{j\underline{m}_x^t \underline{w}} . e^{-\frac{1}{2} q_{c_x}(\underline{w})}}$$

ب) pdf بردار نرمال سفید نرمالیزه .

$$\begin{cases} \underline{m}_x = \underline{0} \\ R_x = C_x = I = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} \end{cases}$$

$$\Phi_x(\underline{w}) = e^{0} . e^{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} w_i^2} = \prod_{i=1}^{n} e^{-\frac{1}{2} w_i^2} \longrightarrow x_1 \perp\!\!\!\perp x_2 \perp\!\!\!\perp \ldots \perp\!\!\!\perp x_n \longrightarrow$$

$$\rightarrow f_x(\underline{x}) = \prod_{i=1}^{n} f_{x_i}(x_i) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-x_i^2}{2}} \rightarrow \boxed{f_x(x) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n}} e^{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} x_i^2}}$$

$$\sim N(0,1) \Rightarrow f(x_i) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-x_i^2}{2}}$$

ج) pdf بردار نرمال درحالت کلّی:

$$\left.\begin{matrix} \underline{m}_x \\ \underline{C}_x \end{matrix}\right\} \text{ مفروض}$$

اگر $\underline{X}$ نرمال باشد، $\underline{W}$ نرمال سفید خواهد بود و

$$\underline{X} = L\underline{W} + \underline{m}_x$$

$$\underline{V} = \Gamma(\underline{X} - \underline{m}_x)$$

$$\left(f_W(\underline{w}) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n}} e^{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} w_i^2} = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n}} e^{-\frac{1}{2}\underline{w}^t \underline{w}} \right)$$

$$f_x(\underline{x}) = \frac{f_W(\Gamma(\underline{x} - \underline{m}_x))}{|\det L|} = \frac{1}{\sqrt{\det C_x}} f_W(\Gamma(\underline{x} - \underline{m}_x)) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n \det C_x}} e^{-\frac{1}{2}((\Gamma(\underline{x}-\underline{m}_x))^t \Gamma(\underline{x}-\underline{m}_x))}$$

$$li = \frac{-1}{2}(\underline{x} - \underline{m}_x)^t \Gamma^t \Gamma (\underline{x} - \underline{m}_x) = \frac{-1}{2}(\underline{x} - \underline{m}_x)^t C_x^{-1} (\underline{x} - \underline{m}_x) = q_{C_x^{-1}}(\underline{x} - \underline{m}_x)$$

$$\Gamma^t \Gamma = \Gamma^{-t} \Gamma^{-1} = (LL^t)^{-1} = C_x^{-1}$$

برای بردار X حقیق، L حقیق است.

$$f_x(\underline{x}) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n \det C_x}} e^{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij}(x_i - m_i)(x_j - m_j)} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n \det C}} e^{-\frac{1}{2} q_{C_x^{-1}}(\underline{x} - m_x)}$$

و $C_x^{-1} = [\alpha_{ij}]_{n \times n}$

در حالت $n=2$ این رابطه به رابطه‌ای که در توزیع نرمال 2 بعدی داده بودیم منجر می شود. (بررسی کنید)

برخی خواص بردار نرمال

هر ترکیب مستوی ابعاد بردار نرمال نیز تولید متغیّر تصادفی نرمال می کند.

هر بردار حاصل از تبدیل خطّی بردار نرمال، نرمال است.

هر زیرمجموعه از ابعاد بردار نرمال نیز توأماً نرمال است. (توزیع های کناری نیز نرمال است.) چرا که هر ترکیب خطّی این زیرمجموعه حالت خاص از ترکیب خطّی کلّ مجموعه است و لذا تولید متغیّر تصادفی نرمال خواهد کرد.

④ توزیع های شرطی مثلاً یک زیرمجموعه از ابعاد به شرط معلوم بودن یک زیرمجموعه دیگر از ابعاد نیز نرمال خواهد بود، چرا که نسبت دو تابع نمایی با نمای به فرم درجه 2 نیز تابعی نمایی با نما به فرم درجه 2 می گردد.

⑤ از دو به دو ناهمبسته بودن ابعاد بردار نرمال، توأماً مستقل بودن ابعاد نتیجه می گردد. یعنی:

$$\left.\begin{matrix} X_i \perp X_j \\ \forall i \neq j \end{matrix}\right\} \Longrightarrow X_1 \perp\!\!\!\perp X_2 \perp\!\!\!\perp \cdots \perp\!\!\!\perp X_n$$

اثبات:

$$\left.\begin{matrix} X_i \perp X_j \\ \forall i \neq j \end{matrix}\right] \Longrightarrow C_X = \mathrm{Diag}(\sigma_1^2, \sigma_2^2, \ldots, \sigma_n^2)$$

$$\longrightarrow \Phi_X(\underline{w}) = e^{j\sum_{i=1}^{n} m_i w_i} \; e^{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(0+\sigma_{ii} w_{ii}+0)} =$$

$$= e^{j\sum_{i=1}^{n} m_i w_i} \; e^{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sigma_i^2 w_i^2} =$$

$$= \prod_{i=1}^{n} e^{j m_i w_i} \, e^{-\frac{1}{2}\sigma_i^2 w_i^2} \longrightarrow X_1 \perp\!\!\!\perp X_2 \perp\!\!\!\perp \cdots \perp\!\!\!\perp X_n$$

بهترین تخمین یک بعد بردار نرمال برحسب بقیه ابعاد، همان تخمین خطّی است یعنی با بقیهٔ ابعاد رابطه‌ای به فرم خطّی خواهد داشت. (اثبات در مبحث پنجم)

تمام خصوصیات آماری بردار نرمال (ممان های مرتبه بالا و احتمال پیشامدها) از ممان های مرتبه اوّل و دوّم بردار نرمال قابل محاسبه هستند. یعنی ممان های اوّل و دوّم تمام خصوصیات آماری بردار نرمال را در بردارد.

یک رابطهٔ مفید: اگر X_1 و X_2 و X_3 و X_4 توأماً نرمال باشند:

$$\boxed{E X_1 X_2 X_3 X_4 = E X_1 X_2 \, E X_3 X_4 + E X_1 X_3 \, E X_2 X_4 + E X_1 X_4 \, E X_2 X_3 - 2 E X_1 \, E X_2 \, E X_3 \, E X_4}$$

(اثبات ساده است ولی مفصّل)

6_ رشتهٔ تصادفی

* رشتهٔ تصادفی = حد بردار تصادفی، وقتی تعداد ابعاد $n \to \infty$ شود.

$$\{x_1, x_2, x_3, \dots\} \underset{\text{اختصار}}{=} \{x_n\}$$

با تعریف بردار تصادفی به هر نقطه از فضای نمونه، n عدد یعنی یک بردار عددی نسبت داده می شود و با تعریف رشتهٔ تصادفی به هر نقطه از فضای نمونه یک رشته (دنباله) عددی (دنباله‌ای از اعداد) نسبت داده می شود. با تعریف فرآیند تصادفی نیز به هر نقطه از فضای نمونه یک تابع نسبت داده می شود. اگر این تا

گسسته زمان باشد، فرآیند تصادفی همان رشتهٔ تصادفی خواهد بود.

رشته تصادفی ≡ فرآیند تصادفی گسسته زمان

* در این جا فقط تقارب رشته های تصادفی را مطرح خواهیم کرد و بحث کامل در مورد رشته های تصادفی به عنوان

حالت خاص فرآیند تصادفی در مباحث بعد عنوان خواهد شد.

6-1- تقارب رشته های تصادفی

(الف) مروری بر تقارب رشته عددی

رشتهٔ عددی $\{a_n\} = \{a_1, a_2, a_3, \dots\}$

این رشته را متقارب به مقدار a گوئیم هرگاه به ازای هر $\varepsilon > 0$ به اندازهٔ دلخواه کوچکی بتوان شماره‌ای پی

کرد (n_ε) که از آن شماره به بعد اختلاف اعداد رشته با مقدار حدی کوچکتر از ε باشد.

$$|a_n - a| < \varepsilon \;,\; \forall n > n_\varepsilon$$

اگر مقدار حدی نداشته باشیم، می توان تقارب را به کمک قضیهٔ کوشی بررسی کرد.

$$|a_n - a_m| < \varepsilon \;,\; \forall n > n_\varepsilon \;,\; \forall m > n_\varepsilon$$

$$\boxed{\text{نماد تقارب} : \{a_n\} \to a}$$

(ب) تقارب در همه جای رشته تصادفی

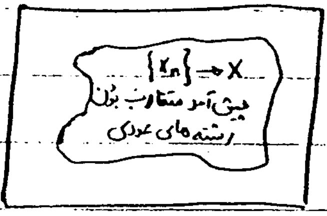
تقارب در همه جا یعنی متقارب بودن کلیهٔ رشته های عددی که در نقاط مختلف فضای نمونه داریم.

$$\text{مثلاً} : \{X_n\} \xrightarrow{e} X$$

$$\text{شرط} \left.\begin{matrix} \{X_n(\xi)\} \longrightarrow X(\xi) \\ \forall \xi \in \Omega \end{matrix}\right\}$$

ج) تقارب تقریباً در همه جای رشتهٔ تصادفی

تقارب تقریباً در همه جای رشتهٔ تصادفی یعنی تقارب با احتمال یک.
یعنی تقارب در همه جای فضای نمونه به جز در زیرمجموعه‌ای از فضای نمونه که به آن احتمال صفر نسبت
اده شده است.



یک نماد : $\{X_n\} \xrightarrow{ae} X$

نماد دیگر، $\{X_n\} \xrightarrow{w.p.1} X$

شرط : $P\{\{X_n\} \to X\} = 1$

ae ≡ almost everywhere

w.p.1 ≡ with prob. 1

د) تقارب در احتمال : $A_n \equiv |X_n - X| > \epsilon$ پیش‌آمد عدم تقارب کامل متغیر تصادفی n-ام به متغیر تصادفی حدی

$\forall \epsilon > 0$

رط تقارب در احتمال : $\{P(A_n)\} \to 0$

ماد تقارب در احتمال : $\{X_n\} \xrightarrow{P} X$

* تقارب در احتمال، لزوماً متقارب بودن هیچ یک از رشته‌های عددی موجود در فضای نمونه را نمی‌رساند.
یعنی حتی ممکن است همهٔ رشته‌های عددی موجود در نقاط مختلف فضای نمونه رشته‌های نامتقارب باشند،
ولی تقارب در احتمال داشته باشیم. (مثلاً بند د) مسألهٔ 27 را ببینید.)

ه) تقارب در توزیع شرط : $\{F_{X_n}(x)\} \xrightarrow{\text{در نقاط پیوستگی}} F_X(x)$

نماد : $\{X_n\} \xrightarrow{dist} X$

ی توان نشان داد:

$$\left(\{X_n\} \xrightarrow{S} X\right) \Longrightarrow \left(\{X_n\} \xrightarrow{ae} X\right) \Longrightarrow \left(\{X_n\} \xrightarrow{P} X\right) \Longrightarrow \left(\{X_n\} \xrightarrow{dist} X\right)$$

و) تقارب به مفهوم ms : شرط تقارب : $\{E(X_n - X)^2\} \to 0$

نماد تقارب : $\{X_n\} \xrightarrow{ms} X$

از تقارب در ms درحالت کلی می توان تقارب در احتمال ولذا تقارب در توزیع را نتیجه گرفت .

$$\left(\{X_n\}\xrightarrow{ms}X\right)\Longrightarrow\left(\{X_n\}\xrightarrow{p}X\right)\Longrightarrow\left(\{X_n\}\xrightarrow{dist}X\right)$$

ولی از تقارب در ms نمی توان تقارب تقریباً در همه جا را نتیجه گرفت. بالعکس نیز از تقارب تقریباً در همه جا نمی توان تقارب در ms را نتیجه گرفت.

ومسائل تا

New

سؤال بچه‌ها؟ $f_X(x_1, x_2, x_3, x_4)$

* آنگاه pdf توأم متغیرهای تصادفی شرطی $X_1|X_3$ و $X_2|X_4$ ؟

* pdf متغیر تصادفی شرطی $X_1|X_3$ ؟ ≡ pdf متغیر تصادفی X_1 باشرط معلوم بودن X_3 ؟

متغیر تصادفی شرطی نداریم ولی توزیع شرطی برای یک متغیر تصادفی داریم

مسأله : pdf توأم X_1 و X_2 بشرط X_3 و X_4 :

$$f_{X_1X_2}(x_1, x_2 | x_3, x_4) = \frac{f_X(x_1, x_2, x_3, x_4)}{f_{X_3X_4}(x_3, x_4)}$$

$f_{X_1}(x_1 | X_2 = x_2)$

$f_{X_1|X_2}(x_1 | x_2)$

6 - 2 - قانون اعداد بزرگ (Law of Large Numbers)

قانون اعداد بزرگ : حد میانگین تجربی یک متغیر تصادفی وقتی تعداد مشاهدات ~~به~~ سمت ∞ میل کند همان امید ریاضی متغیر تصادفی خواهد بود.

(البته این قانون دارای شرایطی است. منجمله اینکه امید ریاضی متغیر تصادفی در جریان مشاهدات مختلف ثابت باشد.)

* این قانون به دو صورت مطرح می گردد:

① قانون قوی اعداد بزرگ (Strong LLN ≡ SLLN)

$$n = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n} \xrightarrow{ae} m_X$$

② قانون ضعیف اعداد بزرگ (Weak LLN ≡ WLLN)

$$n = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n} \xrightarrow{p} m_X$$

در اینجا شرایط WLLN و اثبات آن مطرح می گردد:

شرایط WLLN
$$\left\{\begin{matrix} X_i \perp X_j , \forall i \neq j \\ EX_i = m_x , \forall i \\ \sum_{i=1}^{n} \sigma_{i}^{2}/_{n} \longrightarrow \sigma^2 < \infty \\ Z_n = \sum_{i=1}^{n} X_i/_n \end{matrix}\right\} \Longrightarrow \{Z_n\} \xrightarrow{p} m_x$$

اثبات: تقارب در ms را که قوی تر از تقارب در احتمال است را ثابت می کنیم.

$$E(Z_n - m_x)^2 = E\Big(\sum_{i=1}^{n} X_i/_n - m_x\Big)^2 = E\Big(\sum_{i=1}^{n} \frac{\tilde{X}_i + m_x}{n} - m_x\Big)^2 =$$

$$= E\Big(\sum_{i=1}^{n} \frac{\tilde{X}_i}{n} + \cancel{\sum_{i=1}^{n} \frac{m_x}{n} - m_x}\Big)^2 = E\Big(\sum_{i=1}^{n} \frac{\tilde{X}_i}{n} \cdot \sum_{j=1}^{n} \frac{\tilde{X}_j}{n}\Big) =$$

$$= E \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \tilde{X}_i \tilde{X}_j \cdot \frac{1}{n^2} = \sum_{i=1}^{n} \Big(0 + \frac{E\tilde{X}_i^2}{n^2} + 0\Big) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\sigma_i^2}{n^2} \to \frac{\sigma^2}{n} \xrightarrow{n \text{ بزرگ}} 0$$

نکته: این قانون را می توان به تابعی از یک متغیر تصادفی نیز تعمیم داد:

$$\left.\begin{matrix} Y = g(X) \\ \sum_{i=1}^{n} Y_i/_n \to EY \end{matrix}\right\} \rightarrow \sum_{i=1}^{n} g(X_i)/_n \longrightarrow Eg(X)$$

* در واقع به کمک این قانون است که در آمار ممان ها و به طور کلی تر امید های ریاضی را محاسبه می کنند.

3- قضیهٔ حد مرکزی (Central limit Theoran)

قضیهٔ حد مرکزی: حد مجموع متغیرهای تصادفی کوچک مستقل از هم (وقتی تعداد آنها $n \to \infty$)، یک متغیر تصادفی نرمال است.

* خیلی کوچک یعنی اینکه هر یک تأثیر جزئی در مجموع داشته باشند و نه یک تأثیر تعیین کننده که لزوم این شرط را می توان به صورت زیر توضیح داد:
که اگر به مجموعی که تولید متغیر تصادفی نرمال کرده اند یک متغیر تصادفی مستقل دیگر اضافه کنیم که تأثیر آن در مجموع جزئی نباشد، pdf حاصل کانولوشن یک pdf نرمال با یک pdf غیرنرمال و غیرضربه‌ای بوده و لذا دیگر نرمال نخواهد بود.

اثبات قضیهٔ حد مرکزی :

$$\left.\begin{array}{l} X_1 \perp\!\!\!\perp X_2 \perp\!\!\!\perp \cdots \perp\!\!\!\perp X_n \\ Z_n \triangleq \sum_{i=1}^{n} (X_i/\sqrt{n}) \\ m_{Z_n} = \sum_{i=1}^{n} m_i/\sqrt{n} \to m < \infty \\ \sigma^2_{Z_n} = \sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2/n \to \sigma^2 < \infty \end{array}\right\} \Longrightarrow \{Z_n\} \xrightarrow{dist} N(m, \sigma^2)$$

$$\Phi_{Z_n}(\omega) = E e^{j\omega Z_n} = E e^{j\omega \sum_{i=1}^{n} X_i/\sqrt{n}} = E e^{j\omega \sum_{i=1}^{n} \frac{m_i + \tilde{X}_i}{\sqrt{n}}} =$$

$$= E e^{j\omega \sum_{i=1}^{n} \frac{m_i}{\sqrt{n}}} \cdot e^{j\omega \sum_{i=1}^{n} \frac{\tilde{X}_i}{\sqrt{n}}} \xrightarrow[n\to\infty]{} e^{j\omega m} E \prod_{i=1}^{n} e^{j\omega \tilde{X}_i/\sqrt{n}} =$$

استقلال

$$= e^{j\omega m} \prod_{i=1}^{n} E e^{j\omega \tilde{X}_i/\sqrt{n}} = e^{j\omega m} \prod_{i=1}^{n} E \left(1 + j\omega \frac{\tilde{X}_i}{\sqrt{n}} + j^2 \frac{\omega^2 \tilde{X}_i^2}{2(\sqrt{n})^2} + j^3 \frac{\omega^3 \tilde{X}_i^3}{6(\sqrt{n})^3} + \right.$$

$$= e^{j\omega m} \prod_{i=1}^{n} \left(1 + 0 - \frac{\omega^2}{2} \frac{\sigma_i^2}{n} + \underbrace{j^3 \frac{\omega^3}{6(\sqrt{n})^3} E\tilde{X}_i^3 + \cdots}_{n\to\infty \text{ به صفر میل می کند}} \right) =$$

$$= e^{j\omega m} \prod_{i=1}^{n} \left(1 - \frac{\omega^2}{2} \frac{\sigma_i^2}{n}\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} e^{j\omega m} \prod_{i=1}^{n} e^{-\frac{\omega^2}{2} \sigma_i^2/n} =$$

$$= e^{j\omega m} e^{-\frac{\omega^2}{2} \sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2/n} \longrightarrow e^{jm\omega} e^{-\frac{\omega^2}{2}\sigma^2}$$

که همان cf متغیر تصادفی $N(m, \sigma^2)$ است.

(مبحث دوم : معرفی فرآیند های تصادفی)

1- تعریف فرآیند تصادفی و روش های توصیف آن

1-1- تعریف فرآیند تصادفی و دو تعبیر مختلف آن

* فرآیند تصادفی = تابعی از 2 متغیر $X(t, \xi)$ که یکی $\xi \in \Omega$ نقطه‌ای از فضای نمونه و
دیگری $t \in T$ نقطه‌ای از فضای پارامتر یعنی تابعی که به هر $t \in T$ و $\in \Omega$

$$\Omega \times T \xrightarrow{X} \mathbb{R}$$

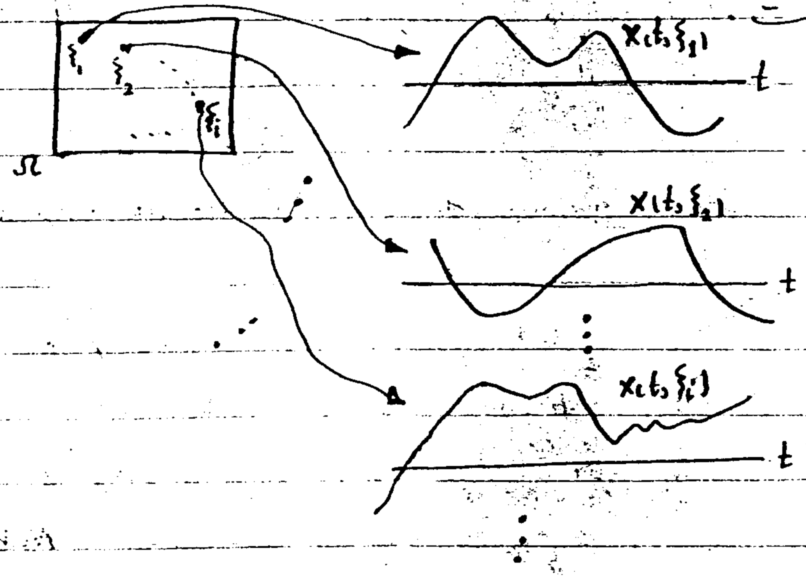
پارامتر فرآیندها در عمل غالباً زمان می‌باشد به همین دلیل t نامیده شده است و زمان گفته خواهد شد. ولی فرآیند می‌تواند پارامتر غیرزمان مثلاً فرکانس یا ارتفاع یا بعد مکان یا درجه حرارت یا ... داشته باشد تقریباً همهٔ مفاهیمی که مطرح خواهد شد کلی است و برای هر پارامتری صادق است.

2 تعبیر مفید برای فرآیند:

ابتدا فضای نمونه را در نظر می‌گیریم:

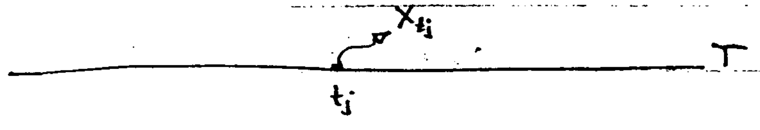
* در هر نقطه از فضای نمونه مثل ξ_i فرآیند $X(t,\xi_i)$ یک تابع مشخص از زمان می‌باشد.

پس فرآیند را می‌توان مجموعه‌ای از توابع مشخص زمانی دانست که به هر نقطه از فضای نمونه یکی از آنها نسبت داده شده است.



ال فضای پارامتر را در نظر می‌گیریم:

* در هر نقطه از فضای پارامتر مثل t_i فرآیند $X(t_i,\xi)$ تابع مشخصی از ξ است یعنی یک متغیر تصادفی است. یعنی به ازای هر مقدار پارامتر فرآیند یک متغیر تصادفی است، یعنی فرضاً در هر نقطه از محور زمان، فرآیند یک متغیر تصادفی است. پس با این تعبیر فرآیند را می‌توان یک مجموعه‌ای از متغیرهای تصادفی دانست که به هر نقطه از فضای پارامتر یکی از آنها نسبت داده شده است.



البته این دو تعبیر مختلف معادل یکدیگرند. مقدار فرآیند در هر لحظه مقدار مشخصی نیست بلکه یک متغ
تصادفی است، و فرآیند برای هر نتیجهٔ آزمایش تصادفی یک تابع مشخص زمانی است و
اینکه کدام خواهد بود مشخص نیست، بلکه به نتیجهٔ آزمایش تصادفی بستگی دارد.

نگاشت‌های احتمالاتی

- متغیر تصادفی : $X = X(\xi)$
- فرآیند تصادفی : $X(t) = X(t, \xi)$

اگر تعداد نقاط فضای پارامتر قابل شمارش باشد مثل $T=\mathbb{Z}$ یا $T=\mathbb{N}$، تعداد متغیرهای تصادفی فرآیند
قابل شمارش خواهد بود که در واقع معادل همان رشتهٔ تصادفی می‌گردد. در این حالت فرآی
د را گسسته زمان گویند. (گسسته پارامتر)

اگر تعداد نقاط فضای پارامتر غیر قابل شمارش باشد، مثلاً $T=\mathbb{R}$ یا $T=[0,\infty)$ یا مثلاً $[a,b]$ =
آنگاه تعداد متغیرهای تصادفی فرآیند نیز غیر قابل شمارش خواهد بود. در این حالت فرآیند را
فرآیند پیوسته زمان گویند. (پیوسته پارامتر)

* به عنوان default فضای پارامتر ~~فرآیند~~ فرآیند گسسته زمان $T=\mathbb{Z}$ در نظر گرفته خواهد شد.
" " " " " پیوسته زمان $T=\mathbb{R}$ " " " " "

* اگر تعداد نقاط فضای پارامتر محدود و مثلاً n تا باشد، $T=\{t_1, t_2, \dots, t_n\}$ در این صورت
تعداد متغیرهای تصادفی فرآیند نیز محدود و مثلاً n تا خواهد بود که در واقع همان بردار تصادفی n

* اگر تعداد نقاط فضای پارامتر تنها یک عدد باشد فرآیند تصادفی معادل همان متغیر تصادفی خواه

New

1-2- روش های توصیف فرآیند تصادفی

الف) توصیف ریاضی — اگر مقدار تابع $X(t, \xi)$ به ازا
مقادیر $t \in T$ و کلیه $\xi \in \Omega$ معلو
گوییم که یک توصیف ریاضی ا
موجود است و این کامل‌ترین توصیفی است که می‌توان از فرآ

$X(t, \xi)$

1- فرآیند = مجموعه‌ای از متغیرهای تصادفی

2- فرآیند = مجموعه‌ای از توابع مشخص زمانی

البته در عمل ما چنین توصیفی را از فرآیندها در اختیار نداریم، مگر اینکه فرآیند را خودمان تعریف کرده باشیم

فرضاً: $\Omega = \{\xi_1, \xi_2\}$

$$X(t, \xi) = \begin{cases} \cos(2\pi t) , & \xi = \xi_1 \\ \sin(2\pi t) , & \xi = \xi_2 \end{cases}$$

مثلاً : $\Omega = \mathbb{R}$ ، $T = \mathbb{R}$ ، $X(t,\xi) = e^{-|t\xi|}$

ب) توصیف تحلیلی ــ اگر بتوان فرآیند را به صورت تابعی مشخص از زمان و چند متغیر تصادفی بیان نمود، گوئیم که یک توصیف تحلیلی از فرآیند موجود است .

مثلاً فرآیندی که یک موج سینوسی با فرکانس معلوم ولی دامنه و فاز تصادفی است .

$$X(t,\xi) = A\sin(2\pi f_0 t + B)$$

A،B متغیرهای تصادفی اند .

ر کلی تر :

$$X(t,\xi) = g(t, A_1, A_2, \dots, A_n)$$

وقتی فرآیندی دارای توصیف تحلیلی برحسب n متغیر تصادفی است ، در واقع می توان گفت که کلیهٔ متغیرهای تصادفی این فرآیند (که به تعداد نامحدودی باشند) توابع مشخصی از آن n متغیر تصادفی هستند ، یعنی در واقع در تولید این متغیر تصادفی تنها n عامل تصادفی شرکت دارد ، در حالی که در حالت کلی تعداد عوامل تصادفی مؤثر در یک فرآیند تصادفی می تواند نامحدود باشد.

فرآیندهای با توصیف تحلیلی قابل پیشگوئی هستند ، یعنی اگر در یک آزمایش تصادفی ، فرآیند را برای مدت زمانی مشاهده کنیم ، می توان پیش گوئی کرد که در ادامه تغییرات فرآیند چگونه خواهد بود . چرا که از روی این مشاهدات می توان مقادیری را که متغیرهای تصادفی A_1 و A_2 و ... و A_n در آن آزمایش تصادفی اختیار کرده اند را محاسبه کرد و لذا تابع زمانی مربوط به آن آزمایش تصادفی را دقیقاً داشت .

) توصیف آماری : منظور از توصیف آماری فرآیند ، توابع احتمال متغیرهای تصادفی فرآیند است و این کامل ترین توصیفی است که در عمل از فرآیندهای تصادفی می توان داشت .

وصیف آماری می تواند با مرتبه های مختلفی مطرح گردد :

وصیف آماری مرتبه اول یعنی توابع احتمال یک بعدی فرآیند یعنی تابع احتمال کناری هر یک از متغیرهای تصادفی

رآیند . (مثلاً pdf یک بعدی فرآیند) ◁—— $\left(f_{X(t)}(x) = f_X(x;t) \right)$

تابع چگالی احتمال متغیر تصادفی لحظهٔ t فرآیند

پارامتر

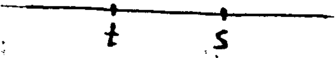
مثلاً نرمال (فرآیند) → $f_{X(t)}(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2(t)}}\, e^{-\frac{(\alpha - m(t))^2}{2\sigma^2(t)}}$ ،

* توصیف آماری مرتبهٔ دوم، یعنی توابع احتمال 2 بعدی فرآیند، یعنی توابع احتمال کناری توأم هر دو متغیر
تصادفی از متغیرهای تصادفی فرآیند مثلاً pdf دو بعدی فرآیند:

$$f_{X(t),X(s)}(x,y) = f_X(x,y;t,s) \longrightarrow$$ pdf توأم متغیرهای تصادفی لحظات t و s فرآیند

- روشن است که از روی توصیف آماری مرتبه دوم می‌توان توصیف آماری مرتبه اول را نیز بدست آورد.
(به عنوان توابع احتمال کناری)، مثلاً:

$$f_{X(t)}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X(t)X(s)}(x,y)\,dy$$



با نادیده زدن دیگ $\longrightarrow$ $$\underbrace{f_X(x;t)}_{\text{به‌کم بستگی ندار}} = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y;t,s)\,dy$$

تعمیم

* توصیف آماری مرتبهٔ n اُم یعنی توابع احتمال n بعدی فرآیند، یعنی تابع احتمال یک بردار n بعدی تصادفی
متشکل از n متغیر تصادفی فرآیند، مثلاً pdf، n بعدی فرآیند:

$$f_{X(t_1)X(t_2)\cdots X(t_n)}(\underline{x}) = f_X(\underline{x};t_1,t_2,\dots,t_n) = f_X(\underline{x};\underline{t})$$

pdf توأم متغیرهای تصادفی
لحظات t_1 الی t_n از فرآیند.

- روشن است که از توصیف آماری مرتبه nاُم می‌توان توصیف‌های آماری مراتب پایین‌تر را نیز بدست
(به عنوان توابع احتمال کناری)

* حد توصیف آماری مرتبه nاُم را وقتی $n \to \infty$، توصیف کامل آماری فرآیند گویند. با داشتن
توصیفی می‌توان احتمال هر پیشامدی را که در آن تعداد قابل شمارش متغیر تصادفی دخالت داشته
را محاسبه کرد.

1-3- تعمیم به دو فرآیند تصادفی و فرآیند تصادفی مختلط

روی یک فضای نمونه ممکن است بیش از یک فرآیند تصادفی تعریف شده باشد. با فضاهای پارامتر
یا یکسان:

$$\begin{cases} \Omega\times T \xrightarrow{X} \mathbb{R} \\ \Omega\times T' \xrightarrow{Y} \mathbb{R} \end{cases}$$

یعنی فرآیندهای :

$$X(t,\xi) \overset{\text{به اختصار}}{=} X(t)$$

$$Y(t',\xi) = Y(t')$$

وقتی دو فرآیند تصادفی داریم ، ممکن است احتمال پیش آمدهایی مطرح شود که در آن برخی از متغیرهای تصادفی هر دو فرآیند حضور داشته باشند ، که در این صورت به توصیف آماری توأم دو فرآیند نیاز خواهد بود .

$$\left(\begin{array}{c} X(t_1)\\ X(t_2)\\ \vdots\\ X(t_n)\\ \hline Y(t_1')\\ Y(t_2')\\ \vdots\\ Y(t_m') \end{array}\right) = \begin{pmatrix}\underline{X}\\ \underline{Y}\end{pmatrix}$$

و

توصیف آماری (pdf) توأم دو فرآیند از رتبه n-اُم نسبت به فرآیند X و از رتبه m-اُم نسبت به فرآیند Y

$$\underbrace{f_{X(t_1)\cdots X(t_n)Y(t_1')\cdots Y(t_m')}(\underline{x},\underline{y}) = f_{XY}(\underline{x},\underline{y};t_1,t_2,\ldots,t_n,t_1',t_2',\ldots,t_m') = f_{XY}(\underline{x},\underline{y};\underline{t},\underline{t}')}$$

از این توصیف توأم آماری می توان توصیف آماری رتبه n-اُم فرآیند X یا توصیف آماری رتبه m-اُم فرآیند Y را بدست آورد . مثلاً :

$$f_X(\underline{x};\underline{t}) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{XY}(\underline{x},\underline{y};\underline{t},\underline{t}')\,d\underline{y}$$

ضمناً حد توصیف آماری توأم فوق وقتی $n\to\infty$ و $m\to\infty$ را توصیف کامل آماری توأم دو فرآیند گویند .

دو فرآیند تصادفی را مستقل از هم گوییم ، هرگاه هر بردار تصادفی دلخواه یکی ، مستقل از هر بردار تصادفی دلخواه دیگری باشد :

$$\text{شرط}\left\{\begin{array}{l} \underline{X} \perp\!\!\!\perp \underline{Y}\\ \forall\, \underline{t}\in T^n\\ \forall\, \underline{t}'\in T^m\\ \forall\, m,n \end{array}\right.$$

یعنی توابع احتمال توأم دو فرآیند ، برابر با حاصلضرب توابع احتمال تک تک دو فرآیند باشد ، یعنی مثلاً :

$$\underbrace{\left.\begin{array}{l} f_{XY}(\underline{x},\underline{y};\underline{t},\underline{t}') = f_X(\underline{x};\underline{t}) \times f_Y(\underline{y};\underline{t}')\\ \forall\, \underline{t}\in T^n,\ \forall\, \underline{t}'\in T^m,\ \forall\, n,m \end{array}\right\}}_{\text{شرط استقلال}} \Leftarrow \underbrace{X(\cdot) \perp\!\!\!\perp Y(\cdot)}_{\text{نماد استقلال}}$$

$$T\times\Omega \longrightarrow \mathbb{C}$$

* فرآیند تصادفی مختلط Z :

$$Z(t,\xi) = \underset{\text{جزء حقیقی}}{X(t,\xi)} + j\,\underset{\text{جزء مجازی}}{Y(t,\xi)}$$

اجزای حقیقی و مجازی فرآیند مختلط ، خودفرآیندهای تصادفی خواهند بود ، فرآیندهای تصادفی با همان فضای ی

$$T\times\Omega \xrightarrow{X} \mathbb{R}$$

$$T\times\Omega \xrightarrow{Y} \mathbb{R}$$

استفاده از فرآیند تصادفی مختلط وقتی می تواند باعث سهولت گردد که فقط با ممان ها سروکار داشته باشیم.

2- ممان های فرآیند تصادفی

* ممان اول :

$$m_X(t) = E X(t,\xi) \overset{\text{اختصار}}{\overset{\downarrow}{=}} E X(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_{X(t)}(x)\,dx =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x;t)\,dx$$

$m_X(t)$ تابع متوسط فرآیند نام دارد و تابعی است حقیقی که به ازای $t=t_1$ متوسط متغیر تصادفی لحظهٔ t_1 فرآ

به ما می دهد.

* ممان دوم :

$$R_X(t,S) = E X(t)X(S) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} xy\, f_{X(t),X(S)}(x,y)\,dx\,dy =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} xy\, f_{XY}(x,y;t,S)\,dx\,dy$$

$R_X(t,S)$ تابع همبستگی فرآیند نام دارد و تابعی است که به ازای $t=S=t_1$ ، قدرت متغیر تصادفی لحظهٔ t_1

ی دهد و به ازای $t=t_1$ و $S=t_2$ همبستگی متغیرهای تصادفی لحظات t_1 , t_2 فرآیند را می دهد.

$$C_X(t,S) = E\,\tilde{X}(t)\tilde{X}(S) = E(X(t)-m_X(t))(X(S)-m_X(S)) = \qquad *$$

$$= \cdots = E X(t)X(S) - m_X(t)m_X(S) = R_X(t,S) - m_X(t)m_X(S)$$

$C_X(t,S)$ تابع کوواریانس فرآیند به ازای $t=S=t_1$ واریانس متغیر تصادفی لحظهٔ t_1 را می دهد و به ازای

$t=t_1$, $S=t_2$ ، کوواریانس بین متغیرهای تصادفی لحظهٔ t_1 و لحظهٔ t_2 فرآیند را می دهد.

تابع ضریب همبستگی فرآیند : $$\rho_x(t,s) = \frac{C_x(t,s)}{\sqrt{C_x(t,t)\,C_x(s,s)}}$$

ر در فرآیندهای مختلط:

$R_x(t,s) = E X(t) X^*(s)$, $C_x(t,s) = E \tilde{X}(t) \tilde{X}^*(s) = R_x(t,s) - m_x(t) m_x^*(s)$

ای دو فرآیند تصادفی $X(t,\xi)$
$Y(t',\xi)$

ان های متقابل نیز تعریف می گردند:

$R_{xy}(t,t') = E X(t) Y^*(t')$

$C_{xy}(t,t') = E \tilde{X}(t) \tilde{Y}^*(t') = R_{xy}(t,t') - m_x(t) m_y^*(t')$

* خواص:

- $R^*_{xy}(t,t') = R_{yx}(t',t)$
- $R^*_x(t,s) = R_x(s,t)$ تقارن هرمیتی
- $C^*_{xy}(t,t') = C_{yx}(t',t)$
- $C^*_x(t,s) = C_x(s,t)$ تقارن هرمیتی

عامد دو فرآیند : دو فرآیند را متعامد گوییم، هرگاه هر متغیر تصادفی با هر متغیر تصادفی دیگر متعامد باشند.

* $X(t) \perp Y(t') \quad \forall t \in T, \forall t' \in T'$

عنی:

شرط تعامد دو فرآیند : $R_{xy}(t,t') = 0$, $\forall t \in T, \forall t' \in T'$

نماد تعامد دو فرآیند : $X(\cdot) \perp Y(\cdot)$

* همبستگی دو فرآیند: دو فرآیند را ناهمبسته گوییم، هرگاه هر متغیر تصادفی یکی با هر متغیر تصادفی دیگری ناهمبسته باشد، یعنی:

شرط : $C_{xy}(t,t') = 0$, $\forall t \in T, \forall t' \in T'$

نماد : $X(\cdot) \perp Y(\cdot)$

$\xrightarrow{\qquad\qquad t}$ فرآیند a-وابسته (a-dependent) :

اگر وابستگی متغیرهای تصادفی فرآیند، فقط تا فاصله $|t-s|<a$ ادامه داشته باشد، فرآیند را "a-وابسته" گوییم.

$$X(t) \perp\!\!\!\perp X(s)$$
$$\forall\, |t-s|>a$$

فرآیند a-همبسته (a-correlated)

اگر همبستگی بین متغیرهای تصادفی فرآیند فقط تا فاصله a ادامه یابد، فرآیند را "a-همبسته" گویند. یعنی

$$C_X(t,s)=0$$
$$\forall\, |t-s|>a$$

3- دسته فرآیندهای با نمو مستقل، مارکف و مارتینگل :

تعریف 1-3 :

* برای سادگی نمایش فرض خواهیم کرد :

$$X_i = X(t_i)\ ,\ i=1,2,\dots,n,n+1$$
$$\underline{X}=(X_1,X_2,\dots,X_n)^t$$
$$\underline{x}=(x_1,x_2,\dots,x_n)^t$$

* فرآیند با نمو مستقل فرآیندی است که مقدار آن در هر لحظه و کلیهٔ نموهای فرآیند در فاصله زمانی های اشتراک یعنی توأماً مستقل باشند.

یعنی :

$$\begin{cases} X_1 \perp\!\!\!\perp X_2-X_1 \perp\!\!\!\perp X_3-X_2 \perp\!\!\!\perp \cdots \perp\!\!\!\perp X_n-X_{n-1} \\ \forall\, t_1 \leq t_2 \leq t_3 \leq \cdots \leq t_n \\ \forall n \end{cases}$$

* فرآیند مارکوف فرآیندی است که مقدار آن در هر لحظه، کلیهٔ سابقهٔ فرآیند را در خود خلاصه

(از نظر تأثیری که در توزیع احتمال متغیرهای تصادفی بعدی فرآیند دارند.)

یعنی :

$$f_{X_{n+1}}(x_{n+1}|\underline{X}=\underline{x}) = f_{X_{n+1}}(x_{n+1}|X_n=x_n)$$
$$\forall\, t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_n \leq t_{n+1}$$
$$\forall n$$

رآیند مارتینگل (Martingale) : فرآیندی است که امید ریاضی شرطی مقدار فرآیند در لحظه مشروط به معلوم بودن مقدار فرآیند در چند لحظهٔ قبلی برابر با همان آخرین مقدار معلوم از فرآیند باشد :

یعنی :

$$\begin{cases} E(X_{n+1} \mid \underline{X} = \underline{x}) = x_n \\ \forall\, t_1 < t_2 < \dots < t_n < t_{n+1} \\ \forall n \end{cases}$$

2-3- چند قضیه

قضیهٔ 1 : از بانو مستقل بودن فرآیند می‌توان مارکوف بودن فرآیند را نیز نتیجه گرفت.

قضیهٔ 2 : از بانو مستقل بودن فرآیند و داشتن متوسط ثابت می‌توان مارتینگل بودن فرآیند را نتیجه گرفت.

قضیهٔ 3 : در فرآیندهای مارکوف، توصیف آماری مرتبه دوم فرآیند یک توصیف کامل آماری است.

قضیهٔ 4 : در فرآیندهای بانو مستقل، توصیف آماری مرتبه اول فرآیند به علاوهٔ توصیف آماری مرتبه اول نمو فرآیند یک توصیف کامل آماری است.

قضیهٔ 5 : در فرآیندهای بانو مستقل، کوواریانس بین دو متغیر تصادفی برابر است با واریانس متغیر تصادفی لحظهٔ کوچکتر.

اثبات 1 :

$$F_{X_{n+1}}(x_{n+1} \mid \underline{X} = \underline{x}) = P\{X_{n+1} \le x_{n+1} \mid \underline{X} = \underline{x}\} =$$

$$\overset{\text{استفاده از شرط}}{=} P\{X_{n+1} - X_n \le x_{n+1} - x_n \mid \underline{X} = \underline{x}\} =$$

$$\{\underline{X} = \underline{x}\} \equiv \{X_1 = x_1,\ X_2 - X_1 = x_2 - x_1,\ \dots,\ X_n - X_{n-1} = x_n - x_{n-1}\} \equiv C$$

$$= P\{X_{n+1} - X_n \le x_{n+1} - x_n \mid C\} \underset{\uparrow}{=} P\{X_{n-1} - X_n \le x_{n+1} - x_n\}$$

بدلیل بانو مستقل بودن
شرط را حذف کردیم.

پس :

$$F_{X_{n+1}}(x_{n+1} \mid \underline{X}=\underline{x}) = P\{X_{n+1}-X_n \leqslant x_{n+1}-x_n\} \overset{\text{اضافه کردن شرط بی اثر بدلیل با نمو مستقل بودن}}{=} P\{X_{n+1}-X_n \leqslant x_{n+1}-x_n \mid X_n = x_n\} =$$

$$\overset{\text{استفاده از شرط}}{=} P\{X_{n+1} \leqslant x_{n+1} \mid X_n = x_n\} = F_{X_{n+1}}(x_{n+1} \mid X_n = x_n)$$

حال با $\frac{d}{dx_{n+1}}$ داریم:

$$f_{X_{n+1}}(x_{n+1} \mid \underline{X}=\underline{x}) = f_{X_{n+1}}(x_{n+1} \mid X_n = x_n) \quad ✓$$

اثبات 2 :

$$E(X_{n+1} \mid \underline{X}=\underline{x}) \overset{\text{استفاده از شرط}}{=} E(X_{n+1}-X_n+x_n \mid \underline{X}=\underline{x}) = E(\overbrace{X_{n+1}-X_n+x_n}^{\text{2 بعد}} \mid C) =$$

$$= E(X_{n+1}-X_n \mid C) + E(x_n \mid C) \overset{\text{حذف شرط بدلیل با نمو مستقل بودن}}{=} E(X_{n+1}-X_n) + \underbrace{E(\overset{\text{یک عدد}}{x_n} \mid C)}_{x_n} =$$

$$= EX_{n+1} - EX_n + x_n = EX(t_{n+1}) - EX(t_n) + x_n =$$

$$= m_X(t_{n+1}) - m_X(t_n) + x_n = m_X - m_X + x_n = x_n \quad ✓$$

$m_X(t) = m_X$ ، شرط ضعیف

اثبات 3 :

معلوم $f_{X(t)X(s)}(x,y) = f_{XY}(x,y;t,s)$

از توصیف آماری مرتبه دوم، همواره می توان توصیف آماری مرتبه اول را پیدا کرد.

$$f_{X(t)}(x) = f_X(x;t) = \int_{y=-\infty}^{+\infty} f_X(x,y;t,s)\, dy$$

$$f_X(\underline{x};\underline{t}) = f_{X_1}(x_1) f_{X_2}(x_2 \mid x_1) f_{X_3}(x_3 \mid x_1 x_2) \ldots f_{X_n}(x_n \mid x_1 x_2 \ldots x_{n-1}) =$$

رابطه زنجیره‌ای

$$= f_{X_1}(x_1) f_{X_2}(x_2 \mid x_1) f_{X_3}(x_3 \mid x_2) \quad f_{X_n}(x_n \mid x_{n-1})$$

خاصیت مار

$$\longrightarrow f_{X_i}(x_i|x_{i-1}) = \frac{f_{X_{i-1}X_i}(x_{i-1},x_i)}{f_{X_{i-1}}(x_{i-1})} = \frac{f_X(x_{i-1},x_i;t_{i-1},t_i)}{f_X(x_{i-1};t_{i-1})} \longrightarrow$$

$$* \longrightarrow \boxed{f_X(\underline{x};\underline{t}) = f_X(x_1;t_1)\prod_{i=2}^{n}\frac{f_X(x_{i-1},x_i;t_{i-1},t_i)}{f_X(x_{i-1};t_{i-1})}}$$

تیجه - 4:

$f_{X(t)}(x) = f_X(x;t)$ معلوم

$f_{X(s)-X(t)}(x) = f_{\Delta X}(x;t,s)$ معلوم

$$f_X(\underline{x};\underline{t}) = f_{X_1}(x_1)\, f_{X_2}(x_2|x_1)\, f_{X_3}(x_3|x_2)\ldots f_{X_n}(x_n|x_{n-1})$$

به دلیل اینکه مارکوف نیز می باشد.

$$f_{X_i}(x_i|x_{i-1}) = f_{X_i}(x_i|X_{i-1}=x_{i-1}) = \frac{\partial}{\partial x_i}F_{X_i}(x_i|X_{i-1}=x_{i-1}) \Big/$$

$$F_{X_i}(x_i|X_{i-1}=x_{i-1}) = P\{X_i \leq x_i | X_{i-1}=x_{i-1}\} \overset{\text{استفاده از شرط}}{=} P\{X_i - X_{i-1} \leq x_i - x_{i-1} | X_{i-1} =$$

حذف شرط به دلیل با نمو مستقل بودن

$$= P\{X_i - X_{i-1} \leq x_i - x_{i-1}\} = F_{X_i - X_{i-1}}(x_i - x_{i-1})$$

$\frac{\partial}{\partial x_i}$ از طرفی داریم:

$$\Big/\longrightarrow f_{X_i}(x_i|X_{i-1}=x_{i-1}) = 1 \times f_{X_i - X_{i-1}}(x_i - x_{i-1}) = f_{X(t_i)-X(t_{i-1})}(x_i - x_{i-1}) =$$

$$= f_{\Delta X}(x_i - x_{i-1}; t_{i-1}, t_i) \longrightarrow$$

$$* \longrightarrow \boxed{f_X(\underline{x};\underline{t}) = f_X(x_1;t_1)\prod_{i=2}^{n} f_{\Delta X}(x_i - x_{i-1}; t_{i-1}, t_i)}$$

New

اثبات 5 :

$$\sigma_{X(t)X(s)} = \begin{cases} \sigma^2_{X(t)} & , t \leqslant s \\ \sigma^2_{X(s)} & , s < t \end{cases}$$ حکم

برحسب تابع کوواریانس :

$$C_X(t,s) = \begin{cases} C_X(t,t) & , t \leqslant s \\ C_X(s,s) & , s < t \end{cases}$$ حکم

$$\sigma_{X(t)X(s)} \underset{t \leqslant s}{=} E\tilde{X}(t)\tilde{X}(s) = E\tilde{X}(t)(\tilde{X}(t)+\tilde{X}(s)-\tilde{X}(t)) = E\tilde{X}^2(t) + E\tilde{X}(t)(\tilde{X}(s)-\tilde{X}(t)) =$$

$$= \sigma^2_{X(t)} + \underbrace{E\tilde{X}(t)}_{0} \cdot \underbrace{E(\tilde{X}(s)-\tilde{X}(t))}_{0} =$$

به دلیل با نمو مستقل بودن و اینکه $t \leqslant s$

$$= \sigma^2_{X(t)} \checkmark$$

به همین ترتیب برای $s<t$ ثابت خواهد شد.

4- ساکن و ساکن دوری بودن فرآیندها

4-1- فرآیند ساکن (ایستا یا ایستان یا stationary)

- فرآیندی را فرآیند ساکن گویند که خصوصیات آماری آن با گذشت زمان عوض نشود. مثل ولتاژ نویز حرارتی مقاومتی که درجه حرارت آن را ثابت نگه داشته باشیم.

* اگر ممان های اول و دوم فرآیند با گذشت زمان عوض نشوند فرآیند را ساکن به مفهوم وسیع (WSS) می گویند.

* اگر توابع احتمال فرآیند با گذشت زمان عوض نشود فرآیند را ساکن به مفهوم اکید (SSS)

$\left.\begin{matrix}\text{wide}\\ \text{strict}\end{matrix}\right\}$ sense stationary

- شرایط WSS بودن :

$$(1)\ m_X(t) \underset{\text{مستقل از } t}{=} m_X$$

$$(2)\ R_X(t+\tau, t) = R_X(\tau)$$

SSS چون می تواند با مرتبه های مختلفی مطرح شود.

SSS مرتبه اول یعنی اینکه توابع احتمال یک بعدی فرآیند با گذشت زمان تغییر نکنند.

$$f_X(x;t) \underset{\text{مستقل از } t}{=} f_X(x)$$

SSS مرتبه دوم یعنی:

$$f_X(\overset{x}{\alpha},\overset{y}{\beta};t,t+\tau) \underset{\text{مستقل از } t}{=} f_X(\overset{x}{\alpha},\overset{y}{\beta};\tau)$$

که فقط یک فرآیند X داریم.

SSS مرتبه n اُم یعنی:

$$f_X(\underline{x};t,t+\tau_1,t+\tau_2,\ldots,t+\tau_{n-1}) \underset{\text{مستقل از } t}{=} f_X(\underline{x};\tau_1,\tau_2,\ldots,\tau_{n-1}) = f_X(\underline{x}$$

وشن است که از SSS مرتبهٔ بالاتر، می توان SSS مرتبهٔ پایین تر را نتیجه گرفت. (توابع احتمال کناری

حتی SSS مرتبهٔ n اُم، وقتی $n \to \infty$ شود را SSS کامل (یا به اختصار SSS) گویند.

2- فرآیند ساکن دوری (cyclo stationary)

اگر خصوصیات آماری فرآیند با گذشت زمان به صورت پریودیک (مثلاً با پریود T_0) تغییر کند، آیند را ساکن دوری گویند. مثلاً ولتاژ نویز حرارتی مقاومتی که درجه حرارت آن را به صورت پریودیک ازمان تغییر دهیم.

بسیاری از سیگنال های مخابراتی، همچنین نویز حاصل از حرکات پریودیک قطعات مکانیکی از نوع ساکن دوری هستند.

اگر ممان های اول و دوم فرآیند به صورت پریودیک با زمان تغییر کنند، فرآیند را ساکن دوری به مفهوم وسیع گویند. (WSCS)

1) $m_X(t)$ ← نسبت به t پریودیک با پریود T_0

2) $R_X(t+\tau,t)$ ←

اگر توابع احتمال فرآیند به صورت تابعی پریودیک با گذشت زمان تغییر کنند، فرآیند را ساکن دوری به مفهوم اکید گویند. (SSCS)

مثلاً SSCS مرتبه n اُم:

$f_X(\underline{x};t,t+\tau_1,t+\tau_2,\ldots,t+\tau_{n-1})$ ← نسبت به t پریودیک با پریود T_0.

* حد SSCS مرتبه n-ام وقتی $n \to \infty$ شود را SSCS کامل گوئیم.

3-4 - توأماً ساکن و ساکن دوری بودن

* این مفاهیم وقتی مطرح می گردد که فضای پارامتر دو فرآیند یکسان باشد

$$T \times \Omega \xrightarrow{X} \mathbb{R}$$

$$T \times \Omega \xrightarrow{Y} \mathbb{R}$$

* توأماً WSS بودن یعنی اینکه تک تک WSS باشند و ضمناً:

$$R_{XY}(t+\tau, t) = \underset{\text{مستقل از } t}{R_{XY}(\tau)}$$

* توأماً SSS بودن یعنی اینکه توابع احتمال توأم دو فرآیند نیز با گذشت زمان تغییری نکنند.

$$f_{XY}(\underline{x}, \underline{y} : \underbrace{t, t+\tau_1, \dots, t+\tau_{n-1}}, \underbrace{t+\tau_1', t+\tau_2', \dots, t+\tau_m'}) =$$

مستقل از

$$= f_{XY}(\underline{x}, \underline{y}; \tau_1, \tau_2, \dots, \tau_{n-1}, \tau_1', \tau_2', \dots, \tau_m') = f_{XY}(\underline{x}, \underline{y}; \underline{\tau}, \underline{\tau}')$$

مثلاً توأماً SSS بودن مرتبه nام نسبت به X و مرتبه mام نسبت به Y

- روشن است که از توأماً SSS بودن فوق می توان SSS بودن مرتبه nام فرآیند X و SSS بودن مرتبه mام فرآیند Y را نتیجه گرفت.

- حد توأماً SSS بودن فوق وقتی $m \to \infty$ ، $n \to \infty$ شود را توأماً SSS کامل گوئیم.

- باید توجه داشت که دو فرآیندی که تک تک کاملاً SSS هستند، ممکن است توأماً حتی WSS نباشند (چون ممکن است وابستگی متقابل داشته باشند) خوم

مثال: فرآیند X را یک فرآیند کاملاً SSS فرض می کنیم، یعنی:

$$F_X(\underline{x}; t, t+\tau_1, \dots, t+\tau_{n-1}) = F_X(\underline{x}; \underline{\tau})$$

فرض می کنیم $Y(t) \triangleq X(2t)$

ابتدا ثابت می کنیم فرآیند Y نیز SSS کامل خواهد بود.

$$F_Y(\underline{y}; t, t+\tau_1, \dots, t+\tau_{n-1}) = P\{Y(t) \leqslant y_1, Y(t+\tau_1) \leqslant y_2, \dots, Y(t+\tau_{n-1}) \leqslant y_n\}$$

$$= P\{X(2t) \leqslant y_1, X(2t+2\tau_1) \leqslant y_2, \dots, X(2t+2\tau_{n-1}) \leqslant y_n\} =$$

$$= F_X\{\underline{y}; 2t, 2t+2\tau_1, \dots, 2t+2\tau_{n-1}\} = F_X(\underline{y}; 2\underline{\tau})$$

مثل بالا

$t \to 2t$

$\underline{\tau} \to 2\underline{\tau}$

سا این دو فرآیند توأماً WSS نیستند.

$$R_{XY}(t+\tau,t) = EX(t+\tau)Y(t) = EX(t+\tau)X(2t) =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} xy\, \underbrace{f_X(x,y;\overset{2t}{\cancel{t+\tau}},\overset{t+\tau}{\cancel{t}})}_{f_X(x,y;2t-(t+\tau))} dxdy \longrightarrow$$

در حالت کلی حاصل تابعی از $(t-\tau)$ بودن و WSS نیست!

$f_X(x,y;t-\tau)$ ← مستقل از t نیست

توأماً ساکن دوری بودن نیز، نظیر توأماً ساکن بودن تعریف می‌گردد، منتهی به جای مستقل از t بودن باید گفت پریودیک نسبت به t.

4- «چند قضیه»

* یهٔ $\underline{1}$: از SSS مرتبه دوم بودن می‌توان WSS بودن را نتیجه گرفت.

ثبات

فرض: $f_X(x,y;t,t+\tau) = f_X(x,y;\tau) \Longrightarrow f_X(x;t) = f_X(x)$.

(1) $m_X(t) = EX(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x;t)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x)dx = m_X$: مستقل از t

(2) $R_X(t+\tau,t) = EX(t+\tau)X(t) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} xy\, f_X(x,y;t,t+\tau)dxdy =$

$= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} xy\, f_X(x,y;\tau)dxdy = R_X(\tau)$: مستقل از t

* یهٔ $\underline{2}$: اگر فرآیند X یک فرآیند SSCS مرتبه n ام با پریود T_0 باشد و $\Phi \sim U(0,T_0)$ مستقل از فرآیند X باشد ($\Phi \perp\!\!\!\perp X(t)$) در این صورت فرآیند $Y(t) \triangleq X(t+\Phi)$ یک فرآیند SSS مرتبه n ام خواهد بود.

ثبات: فرض: $F_X(\underline{x};t,t+\tau_1,\dots,t+\tau_{n-1})$ ← نسبت به t پریودیک با پریود T_0

$$F_{Y}(\underline{y}; t, t+\tau_1, \dots, t+\tau_{n-1}) = P\{Y(t)\leq y_1, Y(t+\tau_1)\leq y_2, \dots, Y(t+\tau_{n-1})\leq y_n\} =$$

$$= P\{X(t+\Phi)\leq y_1, X(t+\Phi+\tau_1)\leq y_2, \dots, X(t+\Phi+\tau_{n-1})\leq y_n\} =$$

$$\overset{\text{قضیه احتمال کل}}{=} \int_{\varphi=-\infty}^{+\infty} f_{\Phi}(\varphi)\cdot P\{X(t+\varphi)\leq y_1, X(t+\varphi+\tau_1)\leq y_2, \dots, X(t+\varphi+\tau_{n-1})\leq y_n \mid \Phi=\varphi\}$$

حذف شرط

$X(\cdot)$

$$\overset{}{=} \int_{\varphi=-\infty}^{+\infty} f_{\Phi}(\varphi)\cdot \underbrace{P\{X(t+\varphi)\leq y_1, X(t+\varphi+\tau_1)\leq y_2, \dots, X(t+\varphi+\tau_{n-1})\leq y_n\}}_{F_X(\underline{y}; t+\varphi, t+\varphi+\tau_1, \dots, t+\varphi+\tau_{n-1})} d\varphi =$$

$$= \frac{1}{T_0}\int_{\varphi=0}^{T_0} F_X(\underline{y}; t+\varphi, t+\varphi+\tau_1, \dots, t+\varphi+\tau_{n-1})\, d\varphi =$$

$$= \frac{1}{T_0}\int_{\alpha=t}^{t+T_0} \underbrace{F_X(\underline{y}; \alpha, \alpha+\tau_1, \dots, \alpha+\tau_{n-1})}_{\text{پریودیک با پریود } T_0 \text{ نسبت به } \alpha} d\alpha = \langle F_X(\underline{y}; t, t+\tau_1, \dots, t+\tau_{n-1})\rangle_t$$

$+\varphi$

انتگرال یک تابع پریودیک در یک پریود بستگی به لحظهٔ شروع پریود (در اینجا t) نخواهد داشت

قضیهٔ 3: اگر فرآیند X یک فرآیند WSCS با پریود T_0 باشد و $\Phi \sim U(0,T_0)$ مستقل از فرآیند X با
$(\Phi \perp\!\!\!\perp X(\cdot))$ در این صورت فرآیند $Y(t) \triangleq X(t+\Phi)$ یک فرآیند WSS خواهد بود.

اثبات: فرض: $\begin{cases} m_X(t) \\ R_X(t+\tau, t) \end{cases}$ نسبت به t پریودیک با پریود T_0

$$)\; m_Y(t) = EY(t) = EX(t+\Phi) = E_{\Phi} E_X\left(X(t+\Phi)\mid\Phi\right) \underset{\substack{\text{حذف شرط بدلیل} \\ \Phi \perp\!\!\!\perp X(\cdot)}}{=} E_{\Phi} E_X X(t+\Phi) =$$

$$= E_{\Phi}\, m_X(t+\Phi) =$$

$$= \int_{\varphi=-\infty}^{+\infty} f_{\Phi}(\varphi)\, m_X(t+\varphi)\, d\varphi = \frac{1}{T_0}\int_{\varphi=0}^{T_0} m_X(t+\varphi)\, d\varphi \underset{t+\varphi=\alpha}{=} \frac{1}{T_0}\int_{\alpha=t}^{t+T_0} m_X(\alpha)\, d\alpha \underset{\text{نظیر قضیه (2)}}{=} \langle m_X(t)\rangle_t$$

ادامهٔ اثبات ۲ ;

$$(2)\ R_Y(t+\tau,t)=E\,Y(t+\tau)Y(t)=E\,X(t+\Phi+\tau)X(t+\Phi)=$$

$$=E_\Phi\,E_X\big(X(t+\Phi+\tau)X(t+\Phi)\,|\,\Phi\big)=$$

طبق شرط
$\Phi \perp\!\!\!\perp X(\cdot)$

$$\overset{\triangle}{=}E_\Phi\,E_X\big(X(t+\Phi+\tau)X(t+\Phi)\big)=E_\Phi\,R_X(t+\Phi+\tau,\,t+\Phi)=$$

$$=\int_{\varphi=-\infty}^{+\infty} f_\Phi(\varphi)\,R_X(t+\varphi+\tau,\,t+\varphi)\,d\varphi=$$

$$=\frac{1}{T_0}\int_{\varphi=0}^{T_0} R_X(t+\varphi+\tau,\,t+\varphi)\,d\varphi \underset{t+\varphi=\alpha}{\overset{}{=}} \frac{1}{T_0}\int_{\alpha=t}^{t+T_0} R_X(\alpha+\tau,\alpha)\,d\alpha=$$

$$=\langle R_X(t+\tau,t)\rangle_t \ \checkmark$$

مستقل از t

5- معرفی چند فرآیند تصادفی مهم

1.5- فرآیند پواسن

ری بر متغیر تصادفی پواسن :

تغیر تصادفی پواسن) X = تعداد رخداد پیشامد در تکرار مستقل از هم آزمایش تصادفی

$X\in\{0,1,2,\dots\}$ $\qquad m_X=\sigma_X^2=\lambda$

$X\sim P(\lambda)$ $\qquad p(X=i)=e^{-\lambda}\dfrac{\lambda^i}{i!}$

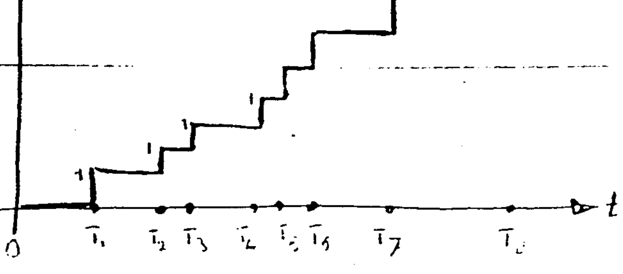
ارای خاصیت جا بدای توزیعی باشد :

$$\left.\begin{array}{l} x_i\sim P(\lambda_i)\\ X_1\perp\!\!\!\perp X_2\perp\!\!\!\perp\dots\perp\!\!\!\perp X_n\end{array}\right\}\Longrightarrow X=\sum_{i=1}^{n}X_i\sim P\Big(\sum_i\lambda_i\Big)$$

تعریف فرآیند تصادفی پواسن

$X($ فرآیندی است که در جریان تکرار مستقل از هم یک آزمایش تصادفی که در لحظهٔ $t=0$ آغاز شده،
مقدار اوّلیهٔ $X(0)=0$ آغاز شده است و با هر رخداد پیشامد مورد نظر، نمو ثابتی می‌کند.

نمو را نیز معمولاً "یک" واحد در نظر می‌گیرند که
در این صورت مقدار فرآیند در هر لحظه تعداد رخدادها
تا آن لحظه را ارائه می‌دهد یعنی این فرآیند را
می‌توان فرآیند شمارش رخدادها دانست.



$$X(t) \in \{0,1,2,3,\dots\}$$

* یک فرآیند با نمو مستقل است :

$X(t_1)$: تعداد رخداد در فاصله 0 تا t_1

$X(t_2)-X(t_1)$: تعداد رخداد در فاصله t_1 تا t_2

$X(t_3)-X(t_2)$: تعداد رخداد در فاصله t_2 تا t_3

$\vdots \qquad \vdots$

* چون تکرار مستقل از هر آزمایش تصادفی است : با فرض ... $t_1 < t_2 < \dots$ داریم :

$$X(t_1) \perp\!\!\!\perp (X(t_2)-X(t_1)) \perp\!\!\!\perp (X(t_3)-X(t_2)) \perp\!\!\!\perp \dots$$

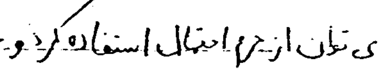
$$X(t+\Delta t) - X(t) \sim P(a_{t,t+\Delta t})$$

که $a_{t,t+\Delta t}$ متوسط تعداد رخداد در فاصله t تا $t+\Delta t$ می باشد و داریم :

$$a_{t,t+\Delta t} = \lambda \Delta t$$

(λ = چگالی نقاط پواسن)

با توجه به خاصیت پایداری توزیع پواسن ، داریم : (با فرض $s \geq t$)



$$X(s) - X(t) \sim P(a_{t,s})$$

متوسط تعداد رخداد در فاصله t تا s $\; a_{t,s} = \int_t^s \lambda . dt \underset{\lambda \text{ ثابت}}{=} \lambda(s-t)$

* توابع احتمال ← چون گسسته اندازه است : برای توابع احتمال می توان از جرم احتمال استفاده کرد و چ
با نمو مستقل است ، کافی است جرم احتمال خودش و نموش را پیدا کنیم .

$$p_X(i;t) = p(X(t)=i) = e^{-a_{0,t}} \frac{a_{0,t}^{\,i}}{i!}$$

$$p_{\Delta X}(i;t,s) = p(X(s)-X(t)=i) = e^{-a_{t,s}} \frac{a_{t,s}^{\,i}}{i!}$$

جرم احت
n-بعـ : $p_X(\underline{i};\underline{t}) = p(X(t_1)=i_1 , X(t_2)=i_2 , \dots ; X(t_n)=i_n) =$ ص بعد

$$= e^{-a_{0,t_1}} \frac{a_{0,t_1}^{i_1}}{(i_1)!} \cdot \prod_{k=2}^{n} e^{-a_{t_{k-1},t_k}} \frac{(a_{t_{k-1},t_k})^{i_k-i_{k-1}}}{(i_k-i_{k-1})!} \Big\}$$ *

برای چگالی نقاط ثابت λ، داریم:

$$\boxed{P_X(\underline{i}, \underline{t}) = e^{-\lambda t_1} \frac{(\lambda t_1)^{i_1}}{(i_1)!} \prod_{k=2}^{n} e^{-\lambda(t_k-t_{k-1})} \frac{(\lambda(t_k-t_{k-1}))^{i_k-i_{k-1}}}{(i_k-i_{k-1})!}}$$

* ممان های اول و دوم:

$$m_X(t) = EX(t) = a_{0,t} = \lambda t$$

λ ثابت

$$C_X(t,S) = \begin{cases} \sigma^2_{X(t)} = a_{0,t} = \lambda t, & t \leq S \\ \sigma^2_{X(S)} = a_{0,S} = \lambda S, & S \leq t \end{cases} = a_{0,\mathrm{Min}\{s,t\}} = \lambda . \mathrm{Min}\{t,s\}$$

با نمو مستقل

λ ثابت

توابع احتمال نقاط پواسن در حالت λ ثابت :

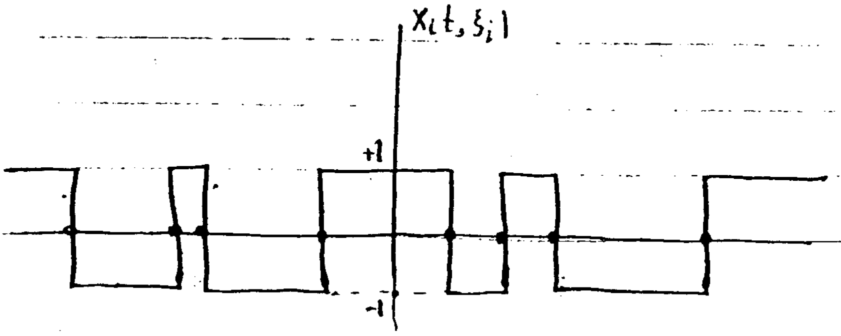
$T_1 \sim E(\lambda)$ زمان انتظار برای اولین رخداد

$T_i \sim E(i, \lambda)$ زمان انتظار برای iامین رخداد

$$(T_i - T_{i-1}) \sim E(\lambda) \quad \text{و} \quad T_1 \perp\!\!\!\perp (T_2-T_1) \perp\!\!\!\perp (T_3-T_2) \perp\!\!\!\perp \ldots$$

2- فرآیند سیگنال تلگرافی

فرآیند سیگنال تلگرافی X(t) فرآیندی است که در جریان تکرار مستقل از هم یک آزمایش تصادفی که در لحظهٔ $t=-\infty$ آغاز شده با مقدار اولیهٔ $X(-\infty)=\pm 1$ آغاز می شود (با احتمال مساوی $\frac{1}{2}$) و با هر رخداد پیشامد مورد نظر، تغییر پلاریته می دهد (از +1 به -1 و یا بالعکس)



* فرآیندی است باینری : $X(t)\in\{-1,+1\}$

* این فرآیند با نمو مستقل نیست، چراکه اگر $X(t_1)=+1$ باشد:

$$X(t_2)-X(t_1)\in\{0 \overset{\text{or}}{,} -2\}$$

و اگر $X(t_1)=-1$ باشد:

$$X(t_2)-X(t_1)\in\{0 \overset{\text{or}}{,} 2\}$$

* امّا این فرآیند یک فرآیند مارکوف می باشد. (چون با داشتن زوج یا فرد بودن تعداد تغییر پلاریته‌ها در فاصله زمانی آن، مق

توابع احتمال ع : می توان از جرم احتمال استفاده کرد.

$$P(X(t)=+1)=P(X(t)=-1)=\frac{1}{2}$$

از تقارن

$$P(X(s)=+1\,|\,X(t)=1)=P(X(s)=-1\,|\,X(t)=-1)=P\{\underbrace{\text{تعداد نقاط پواسن در فاصله } t,s}_{\text{تعداد}}=\text{زوج}\}$$

$$=P\{\text{تعداد}=0\}+P\{\text{تعداد}=2\}+P\{\text{تعداد}=4\}+\dots=e^{-a_{t,s}}\frac{(a_{t,s})^0}{0!}+e^{-a_{t,s}}\frac{(a_{t,s})^2}{2!}+e^{-a_{t,s}}\frac{(a_{t,s})^4}{4!}$$

$$=e^{-a_{t,s}}\cdot\left(1+\frac{a_{t,s}^2}{2!}+\frac{a_{t,s}^4}{4!}+\dots\right)=e^{-a_{t,s}}\cdot\cosh(a_{t,s})=e^{-a_{t,s}}\cdot\frac{e^{a_{t,s}}+e^{-a_{t,s}}}{2}=$$

$$=\frac{1}{2}\left[1+e^{-2a_{t,s}}\right]$$

$$P(X(s)=+1\,|\,X(t)=-1)=P(X(s)=-1\,|\,X(t)=+1)=P(\text{تعداد نقاط پواسن در فاصله } s,t=\text{فرد})=$$

$$=P\{\text{تعداد}=1\}+P\{\text{تعداد}=3\}+\dots=\cdots=\frac{1}{2}\left[1-e^{-2a_{t,s}}\right]$$

با توجه به مارکف بودن داریم:

جرم احتمال n بعدی : $P_X(\underline{i};\underline{t})=P\{X(t_1)=i_1,X(t_2)=i_2,\dots,X(t_n)=i_n\}=$

$$=P\{X(t_1)=i_1\}\cdot\prod_{k=2}^{n}P\{X(t_k)=i_k\,|\,X(t_{k-1})=i_{k-1}\}\longrightarrow$$

به دلیل مارکف بودن

$$\longrightarrow\boxed{P_X(\underline{i};\underline{t})=\frac{1}{2}\cdot\prod_{k=2}^{n}\frac{1}{2}\left[1+i_{k-1}i_k\,e^{-2a_{t_{k-1},t_k}}\right]}$$

برای چگالی نقاط ثابت λ داریم :

$a_{t_{k-1},t_k} = \lambda(t_k - t_{k-1})$

$$\longrightarrow \boxed{P_X(\underline{i};\underline{t}) = (\tfrac{1}{2})^n \cdot \prod_{k=2}^{n} \left[1 + i_{k-1} i_k e^{-2\lambda(t_k - t_{k-1})}\right]}$$

ملاحظه می گردد که فرآیند سیگنال تلگرافی با چگالی نقاط ثابت (λ) یک فرآیند SSS کامل است .

(چون فقط به بازهٔ زمانی بستگی دارد.)

* ممان های اول و دوم :

$$\underline{m_X(t)} = \overset{E x(t) =}{\vee} (+1)\frac{1}{2} + (-1)\frac{1}{2} = \underline{\underline{0}}$$

$$\underline{C_X(t,s) = R_X(t,s)} = E x(t) x(s) = (+1)(+1) \cdot \underbrace{\tfrac{1}{2}}_{\text{اولی } +1} \times \underbrace{\tfrac{1}{2}[1+e^{-2a_{t,s}}]}_{\text{دومی } +1 \text{ به شرط اولی } +1} + (-1)(-1) \cdot \tfrac{1}{2} \times \tfrac{1}{2}[1+e^{-}$$

$$(+1)(-1) \cdot \tfrac{1}{2} \times \tfrac{1}{2}[1 - e^{-2a_{t,s}}] + (-1)(+1) \cdot \tfrac{1}{2} \times \tfrac{1}{2}[1 - e^{-}$$

$$= \underline{\underline{e^{-2a_{t,s}}}}$$

رحالت λ ثابت :

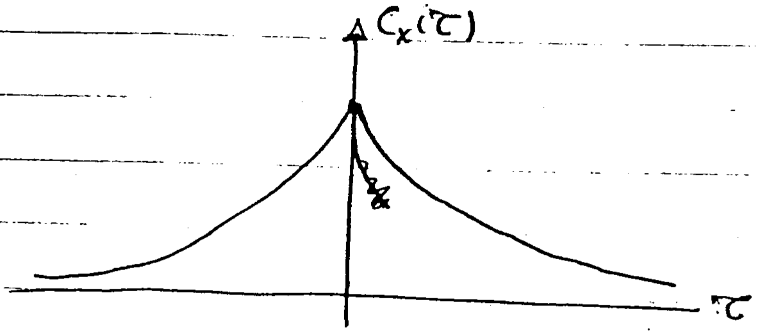
$$m_X(t) = 0$$

$$C_X(t,s) = R_X(t,s) = e^{-2\lambda|s-t|} = e^{-2\lambda|\tau|}$$

در حالت کلی معلوم نیست $t \geq s$ یا $s \geq t$

پس داریم :

$$\boxed{m_X(t) = 0, \quad C_X(\tau) = R_X(\tau) = e^{-2\lambda|\tau|}}$$



3-5 . فرآیند نرمال

فرآیند تصادفی نرمال $X(t)$ فرآیندی است که هر ترکیب خطی دلخواه متغیرهای تصادفی اش، تولید متغیر تصادفی نرمال کند.

$$\left.\begin{array}{c} (\text{متغیر تصادفی})\ Z = \displaystyle\int_{\alpha=-\infty}^{+\infty} g(\alpha) X(\alpha) d\alpha \\ \forall g(\cdot) \end{array}\right\} \Rightarrow Z \sim N(m_Z, \sigma_Z^2)$$

* برخی خواص فرآیند نرمال :

① هر ترکیب خطی متغیر با زمان فرآیند نرمال، یک فرآیند نرمال می گردد.

$$Y(t) = \int_{\alpha=-\infty}^{+\infty} g(t,\alpha) X(\alpha) d\alpha$$

اثبات ①: کافی است ثابت کنیم هر ترکیب خطی دلخواه متغیرهای تصادفی فرآیند جدید نیز تولید یک
نرمال می کند.

$$Z = \int_{\beta=-\infty}^{+\infty} h(\beta) Y(\beta) d\beta = \int_{\beta=-\infty}^{+\infty} h(\beta) \left(\int_{\alpha=-\infty}^{+\infty} g(\beta,\alpha) X(\alpha) d\alpha \right) d\beta =$$

$$= \int_{\alpha=-\infty}^{+\infty} \underbrace{\left(\int_{\beta=-\infty} h(\beta) g(\beta,\alpha) d\beta \right)}_{g_0(\alpha)} X(\alpha) d\alpha = \int_{\alpha=-\infty} g_0(\alpha) X(\alpha) d\alpha$$

ملاحظه می گردد که هر ترکیب خطی متغیرهای تصادفی
فرآیند جدید، در واقع ترکیب خطی از متغیرهای تصادفی
فرآیند اصلی خواهد بود و لذا تولید متغیر تصادفی نرمال خواهد کرد.

② هر مجموعه ای از n متغیر تصادفی فرآیند نرمال، یک بردار نرمال می باشد.

* چراکه هر ترکیب خطی این n متغیر تصادفی، حالت خاصی است از ترکیب خطی همهٔ متغیرهای تصا
فرآیند نرمال. (وقتی ضریب بقیه را صفر در نظر گرفته باشیم.) و لذا تولید متغیر تصادفی نرمال خواهد کرد

③ با توجه به نکتهٔ ②، توصیف آماری مرتبهٔ n ام فرآیند نرمال به صورت زیر می باشد:

$$f_X(\underline{x}; \underline{t}) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n \det C_X}} \cdot e^{-\frac{1}{2} q_{C_X^{-1}}(\underline{x}-\underline{m}_X)}$$

④ با توجه به نکتهٔ ③ و اینکه $\begin{pmatrix} m_X(t_1) \\ m_X(t_2) \\ \vdots \\ m_X(t_n) \end{pmatrix} = \underline{m}_X = E\begin{pmatrix} X(t_1) \\ X(t_2) \\ \vdots \\ X(t_n) \end{pmatrix}$ و ادامه در بعد

$$C_X = E\underset{\text{حقیقی بودن}}{\underline{\tilde{X}}\,\underline{\tilde{X}}^h} = E\begin{pmatrix}\tilde{X}(t_1)\\ \tilde{X}(t_2)\\ \vdots\\ \tilde{X}(t_n)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\tilde{X}(t_1) & \tilde{X}(t_2) & \dots & \tilde{X}(t_n)\end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} C_X(t_1,t_1) & C_X(t_1,t_2) & \dots & C_X(t_1,t_n)\\ C_X(t_2,t_1) & C_X(t_2,t_2) & \dots & C_X(t_2,t_n)\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ C_X(t_n,t_1) & C_X(t_n,t_2) & \dots & C_X(t_n,t_n)\end{pmatrix}$$

لاحظه می گردد که از روی ممان های اوّل و دوم فرآیند نرمال، می توان توابع احتمال n بعدی فرآیند را پیدا کرد

عنی در فرآیندهای نرمال، ممان ها یک توصیف کامل آماری از فرآیند می باشند.

نماد فرآیند نرمال: $X(t) \sim N(m_X(t), C_X(t,s))$

با توجّه به نکتهٔ 4، از WSS بودن فرآیند نرمال می توان SSS بودن کامل آن را نتیجه گرفت

4- فرآیند نویز سفید

ریف ـ فرآیند نویز سفید فرآیندی است که ممان هایش به صورت زیر باشد:

(1) $m_X(t)=0$

(2) $R_X(t,s) = C_X(t,s) = g(s)\delta(t-s) \xrightarrow{\text{یعنی}} R_X(t+\tau,t)=g(t)\delta(\tau)$

ت:

توزیع قدرت بین فرکانس های مختلف موجود در این فرآیند یکنواخت است. (علّت سفید نامیده شدن)

(دلیل در بحث سوم)

کلّیهٔ متغیّرهای تصادفی این فرآیند متعامد و ناهمبسته اند. یعنی: $X(t_1) \perp X(t_2)\ \forall t_1\neq t_2$ و

$X(t_1) \perp X(t_2)\ ,\forall t_1 \neq t_2$

ثبات تعامد:

$$EX(t_1)X^*(t_2) = R_X(t_1,t_2) = g(t_2)\delta(t_1-t_2) \overset{\forall t_1\neq t_2}{=} 0$$

صفر بودن تابع ضربه در همه جا به جز $t_1=t_2$

ون متوسط صفر هم دارند: تعامد آنها یعنی ناهمبستگی آنها.

* اگر کلیهٔ متغیرهای تصادفی فرآیند مستقل از هم باشند، فرآیند را نویز سفید اکید گویند.
مثلاً فرآیند نویز سفید نرمال یک فرآیند نویز سفید اکید است.

$$X(\cdot) \sim N(0, g(s)\delta(t-s))$$

چراکه از ناهمبستگی متغیرهای تصادفی توأماً نرمال استقلال آنها نتیجه می‌گردد.

در حالی که $g(t) = N_0$ $\underset{\text{مستقل از } t}{}$ آنگاه:

$$m_X(t) = 0$$

$$R_X(t+\tau, t) = C_X(t+\tau, t) = \text{[illegible]} \to N_0\delta(\tau)$$

فرآیند را نویز سفید ساکن گوییم و در حالت $N_0 = 1$ نویز سفید نرمالیزه نامیده می‌شود.

5-5. فرآیند وینر (Wiener):

فرآیند وینر فرآیندی است که برای مقادیر پارامتر $t \in [0, \infty)$ تعریف می‌گردد و می‌توان آن را انتگرال
نویز سفید نرمال ساکن دانست.

$$W(\cdot) \sim N(0, N_0\delta(\tau))$$

فرآیند وین $X(t) \triangleq \int_{\alpha=0}^{t} W(\alpha)\, d\alpha$

نکات:

① فرآیند وینر یک فرآیند نرمال است. چراکه:

$$X(t) = \int_{\alpha=0}^{t} W(\alpha)\, d\alpha = \int_{\alpha=-\infty}^{+\infty} h(t,\alpha) W(\alpha)\, d\alpha$$

ترکیب خطی متغیرهای از یک فرآیند نرمال.

که در آن:

$$h(t,\alpha) = \begin{cases} 1, & 0 < \alpha < t \\ 0, & \text{o.w} \end{cases}$$

② با توجه به نکتهٔ ① این فرآیند با آمارهای مرتبه اول و دوم کاملاً توصیف می‌گردد.

$$m_X(t) = E X(t) = E \int_{\alpha=0}^{t} W(\alpha)\, d\alpha = \int_{\alpha=0}^{t} \underbrace{\underbrace{E W(\alpha)}_{m_W(\alpha)}}_{0}\, d\alpha = 0$$

$$_X(t+\tau, t) = R_X(t+\tau, t) = E X(t+\tau) X(t) = E \int_{\alpha_1=0}^{t+\tau} W(\alpha_1)\, d\alpha_1 \int_{\alpha_2=0}^{t} W(\alpha_2)\, d\alpha_2 =$$

$$= \int_{\alpha_1=0}^{t+\tau} \int_{\alpha_2=0}^{t} \underbrace{E W(\alpha_1) W(\alpha_2)}_{R_W(\alpha_1,\alpha_2)}\, d\alpha_2\, d\alpha_1 = N_0 \int_{\alpha_1=0}^{t+\tau} \int_{\alpha_2=0}^{t} \underbrace{\delta(\alpha_1 - \alpha_2)}_{\delta(\alpha_2 - \alpha_1)}\, d\alpha_2\, d\alpha_1 =$$

$$= N_0 \int_{\alpha_1=0}^{t+\tau} u(\alpha_2-\alpha_1)\Big]_{\alpha_2=0}^{t} d\alpha_1 = N_0 \int_{\alpha_1=0}^{t+\tau} \Big[u(t-\alpha_1) - \underbrace{u(-\alpha_1)}_{\text{صفر چون آرگومان منفی دارد}}\Big] d\alpha_1 =$$

$$= -N_0\, r(t-\alpha_1)\Big|_{\alpha_1=0}^{t+\tau} = N_0\big[r(t) - r(-\tau)\big] = \begin{cases} N_0 t & ,\tau>0 \\ N_0(t+\tau) & ,\tau<0 \end{cases}$$

ز معادل:

$$C_X(t,s) = R_X(t,s) = \begin{cases} N_0 t & , t<s \\ N_0 s & , s\leqslant t \end{cases} = N_0 \operatorname{Min}(t,s)$$

پس فرآیند وینر را می توان بصورت زیر نیز تعریف کرد:

$$\begin{cases} X(\cdot) \sim N(0, N_0 \operatorname{Min}(t,s)) \\ t \in (0,\infty) \end{cases}$$

فرآیند وینر فرآیندی است با نمو مستقل چرا که:

$$X(t_1) = \int_0^{t_1} w(\alpha)\,d\alpha$$ مجموع متغیرهای تصادفی فاصله 0 تا t_1 فرآیند w:

$$X(t_2)-X(t_1) = \int_0^{t_2} w(\alpha)\,d\alpha - \int_0^{t_1} w(\alpha)\,d\alpha = \int_{t_1}^{t_2} w(\alpha)\,d\alpha$$ مجموع متغیرهای تصادفی فاصله t_1 تا t_2 فرآیند w:

$$\vdots$$

$$X(t_n)-X(t_{n-1}) = \int_{t_{n-1}}^{t_n} w(\alpha)\,d\alpha$$ مجموع متغیرهای تصادفی فاصله t_{n-1} تا t_n فرآیند w:

دانیم کلیهٔ متغیرهای تصادفی فرآیند W (نرمال سفید) مستقل از هم هستند و لذا اگر $t_1<t_2\leqslant\dots\leqslant t_n$
شی داریم:

$$X(t_1) \perp\!\!\!\perp X(t_2)-X(t_1) \perp\!\!\!\perp X(t_3)=X(t_2) \perp\!\!\!\perp \cdots \perp\!\!\!\perp X(t_n)-X(t_{n-1})$$

با توجه به نکتهٔ ③ این فرآیند با توصیف آماری مرتبهٔ اوّل خودش به علاوهٔ توصیف آماری مرتبهٔ اوّل
نموش کاملاً توصیف می گردد.

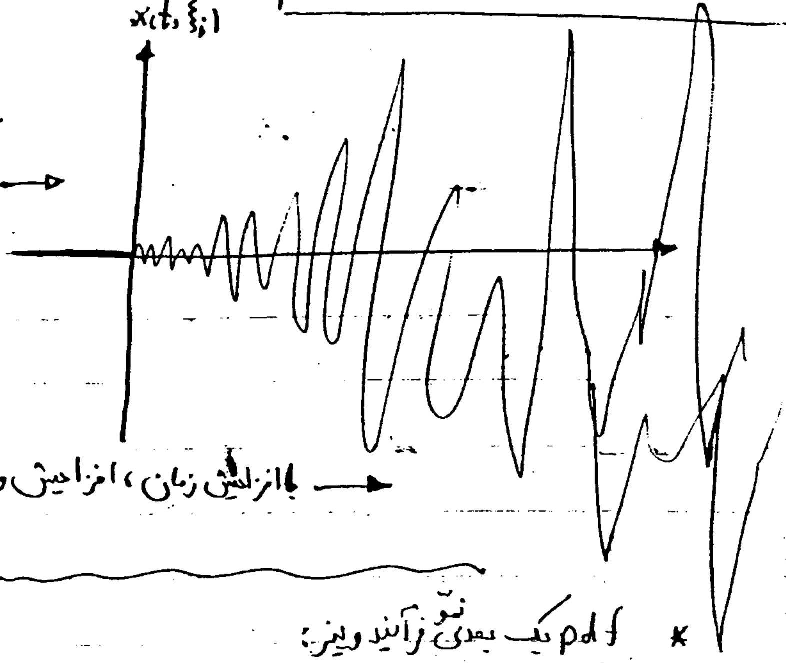
pd یک بعدی خود فرآیند: فرآیند در هر لحظه یک متغیر تصادفی نرمال است.

$$f_{X(t_1)}(x) = f_X(x;t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2_{X(t_1)}}} \exp\left[\frac{-(x-m_{X(t_1)})^2}{2\sigma^2_{X(t_1)}}\right]$$

$m_{X(t)} = m_X(t) = 0$

$\sigma^2_{X(t)} = C_X(t,t) = N_0 \text{Min}(t,t) = N_0 t \longrightarrow \boxed{f_{X(t)}(x) = f_X(x;t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi N_0 t}} e^{\frac{-x^2}{2N_0 t}}}$

شکل فرضی برای توابع زمانی فرآیند وینر



با افزایش زمان، افزایش واریانس

* pdf یک بعدی نمو فرآیند وینر:

$X(s) - X(t)$: نمو در فاصلهٔ t تا s

نمو فرآیند (ترکیب خطی از دو متغیر تصادفی فرآیند نرمال) نیز یک متغیر تصادفی نرمال است.

$$f_{X(t)-X(s)}(x) = f_{\Delta X}(x;t,s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2_{X(s)-X(t)}}} \exp\left[\frac{(x-m_{X(s)-X(t)})^2}{2\sigma^2_{X(s)-X(t)}}\right]$$

$_{X(s)-X(t)} = E[X(s)-X(t)] = m_X(s) - m_X(t) = 0.$

$^2_{X(s)-X(t)} = P_{X(s)-X(t)} = E(X(s)-X(t))^2 = R_X(s,s) + R_X(t,t) - 2R_X(t,s) =$

$$= N_0 s + N_0 t - 2N_0 \text{Min}(t,s) = \begin{cases} N_0(s-t) & , t<s \\ N_0(t-s) & , s<t \end{cases} = N_0|s-t|$$

$$\longrightarrow \boxed{f_{\Delta X}(x;t,s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi N_0|t-s|}} e^{\frac{-x^2}{2N_0|t-s|}}}$$

چنین pdf n بعدی فرآیند وینر به صورت زیر است :

$$f_X(\underline{x};\underline{t}) = f_X(x_1;t_1)\cdot\prod_{K=2}^{n} f_{\Delta X}(x_K - x_{K-1};t_{K-1},t_K) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi N_0 t_1}}\, e^{\frac{-x_1^2}{2N_0 t_1}} \prod_{K=2}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi N_0(t_K - t_{K-1})}}\, e^{\frac{-(x_K - x_{K-1})^2}{2N_0(t_K - t_{K-1})}}$$

$$t_1 < t_2 \leqslant \cdots \leqslant t_n$$

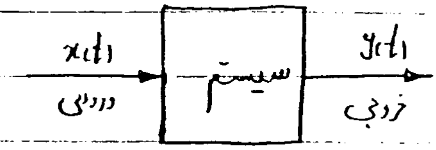
① با توجه به نکتهٔ 3 این فرآیند مارکف نیز می‌باشد.

با توجه به نکتهٔ 3 و اینکه $m_X(t)=0$ مستقل از t است، این فرآیند مارتینگل نیز می‌باشد.

- عبور فرآیند تصادفی از سیستم خطی

1-6- کلیات

ف) مروری بر عبور سیگنال یقینی از سیستم



حالت کلی ضابطهٔ سیستم :

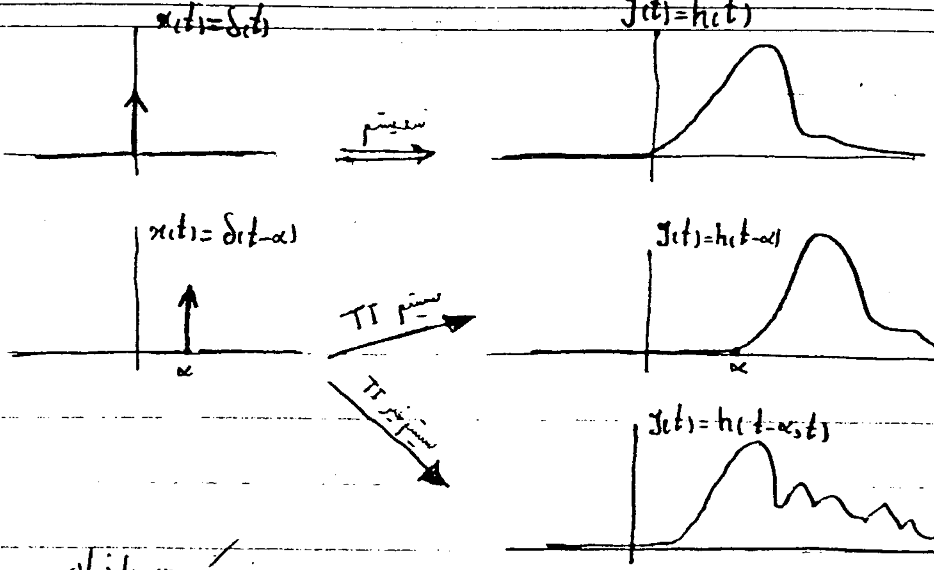
خروجی سیستم در لحظهٔ t $\quad y(t) = g(t, \{X(\cdot)\}_{-\infty}^{+\infty})$ $\quad$ تابعی از t و ورودی سیستم در لحظات مختلف

سیستم علّی $\quad = g(t, \{X(\cdot)\}_{-\infty}^{t})$ $\quad$ تابعی از t و ورودی سیستم از لحظهٔ $-\infty$ تا لحظهٔ t

در سیستم بدون حافظه $\quad = g(t, x(t))$ $\quad$ تابعی از t و ورودی سیستم در همان لحظه

ر سیستم تغییرناپذیر با زمان (TI)، با شیفت زمانی ورودی خروجی تغییر شکل نمی‌دهد و فقط به همان
زان شیفت زمانی پیدا می‌کند.

ر سیستم‌های خطی قانون جمع آثار حاکم است و لذا به کمک پاسخ ضربهٔ سیستم می‌توان پاسخ
ه هر ورودی دلخواه را پیدا کرد.



یک ورودی دلخواه

$$x(t) = \int_{\alpha=-\infty}^{+\infty} x(\alpha)\,\delta(t-\alpha)\,d\alpha \xRightarrow[\text{قانون جمع آثار}]{} \xrightarrow{TI} y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\alpha)\,h(t-\alpha)\,d\alpha =$$

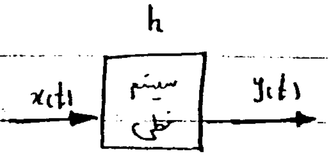
یکی از خواص تابع ضربه

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} h(\alpha)\,x(t-\alpha)\,d\alpha = h(t) *$$

$$\xrightarrow{\text{غیر } TI} y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\alpha)\,h(t-\alpha;t)\,d\alpha =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} h(\alpha;t)\,x(t-\alpha)\,d\alpha$$

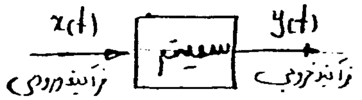
س در سیستم های خطی:



$$y(t) = h\,x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\alpha;t)\,x(t-\alpha)\,d\alpha \overset{TI}{=} h(t) * x(t)$$

h به عنوان یک عملگر

ب) عبور فرآیند تصادفی از سیستم.



ت کلّی :

متغیر تصادفی لحظهٔ t فرآیند خروجی

$$Y(t) = g\left(t, \{X(\cdot)\}_{-\infty}^{+\infty}\right)$$ تابعی از t و کلیهٔ متغیرهای تصادفی فرآیند ورودی

سیستم علّی

$$= g\left(t, \{X(\cdot)\}_{-\infty}^{t}\right)$$ تابعی از t و [illegible] متغیرهای تصادفی تا لحظهٔ t فرآیند ورودی

سیستم بدون حافظه

$$= g\left(t, X(t)\right)$$ تابعی از t و متغیر تصادفی همان لحظهٔ فرآیند ورودی

درسیستم خطی :

$$y(t) \overset{\text{کلی}}{=} \int_{\alpha=-\infty}^{+\infty} h(\alpha;t)\, x(t-\alpha)\, d\alpha \overset{TI}{=} \int_{\alpha=-\infty}^{+\infty} h(\alpha)\, x(t-\alpha)\, d\alpha$$

متغیر تصادفی لحظهٔ t فرآیند خروجی، ترکیب خطی از متغیرهای تصادفی فرآیند ورودی می باشد.

---

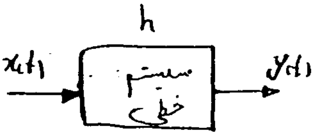
* درحالت کلی پیدا کردن توابع احتمال فرآیند خروجی (حتی یک بعدی آن) کار بسیار دشواری است چراکه هر متغیر تصادفی فرآیند خروجی تابعی است از ∞ متغیر تصادفی فرآیند ورودی.

* خطی بودن سیستم 2 ویژگی را ایجاب می کند:

یکی اینکه پیدا کردن ممان های فرآیند خروجی را خیلی ساده می کند.

دوم اینکه اگر فرآیند ورودی نرمال باشد پاسخ سیستم خطی به آن نیز (چه TI باشد و چه نباشد) یک فرآیند نرمال می گردد که به کمک ممان هایش کاملاً توصیف می گردد و تعیین ممان ها در سیستم خطی نیز خیلی ساده است.

6-2- ممان های اول و دوم در سیستم خطی :



$$y(t) = h\,x(t) = \int_{\alpha=-\infty}^{+\infty} h(\alpha;t)\, x(t-\alpha)\, d\alpha = \int_{\alpha=-\infty}^{+\infty} h(\alpha)\, x(t-\alpha)\, d\alpha = h(t) * x(t)$$

کلی — LTI

$$m_y(t) = E\,y(t) = E\,h\,x(t) = h\,E\,x(t) = \int h(\alpha;t)\, m_x(t-\alpha)\, d\alpha = h(t) * m_x(t)$$

کلی — LTI

$$_{yx}(t,s) = E\,y(t)\,x^*(s) = E\,h_t\,x(t)\,x^*(s) = h_t\,E\,x(t)\,x^*(s) =$$

$$= h_t\,R_x(t,s) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\alpha;t)\, R_x(t-\alpha,s)\, d\alpha = h(t) * R_x(t,s)$$

کلی — LTI

$$_{xy}(t,s) = E\,x(t)\,y^*(s) = E\,x(t)\,h_s^*\,x^*(s) = h_s^*\,E\,x(t)\,x^*(s) = h_s^*\,R_x(t,s) =$$

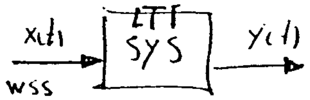
$$= \int_{-\infty}^{\infty} R_x(t,s-\beta)\, h^*(\beta;s)\, d\beta = R_x(t,s) * h^*(s)$$

کلی — LTI

به‌همین ترتیب:

$$R_Y(t,s) = E\,Y(t)Y^*(s) = E\,h_t X(t) h_s^* X^*(s) = h_t h_s^* R_X(t,s) =$$

$$\underset{\text{کلی}}{=} \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} h(\alpha;t) R_X(t-\alpha, s-\beta) h^*(\beta;s)\, d\alpha\, d\beta \underset{\text{LTI}}{=} h(t) * R_X(t,s) * h^*(s)$$



$$\begin{cases} m_X(t) = m_X \\ R_X(t,s) = R_X(t-s) = R_X(\tau) \end{cases}$$

$$m_Y(t) = h(t) * m_X(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\alpha) \underbrace{m_X(t-\alpha)}_{m_X} d\alpha = m_X \int_{-\infty}^{+\infty} h(\alpha)\, d\alpha = m_X$$

$$R_{YX}(t,s) = h(t) * R_X(t,s) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\alpha) \underbrace{\underbrace{R_X(t-\alpha, s)}_{R_X(t-\alpha-s)}}_{R_X(\tau-\alpha)} d\alpha = \boxed{h(\tau) * R_X(\tau)}$$

$$R_{XY}(t,s) = R_X(t,s) * h^*(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{R_X(t, s-\beta)}_{R_X(\tau+\beta)} h^*(\beta)\, d\beta \underset{(\beta \to -\alpha)}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} R_X(\tau-\alpha) h^*(-\alpha)\, d\alpha$$

$$= R_X(\tau) * h^*(-\tau)$$

همین ترتیب داریم:

$$R_Y(t,s) = h(\tau) * R_X(\tau) * h^*(-\tau)$$

طه می‌گردد که در سیستم LTI اگر ورودی WSS باشد، ورودی و خروجی توأماً WSS می‌گردند با بیان های زیر:

✓ $m_Y = m_X H(0)$ ✓ $R_{XY}(\tau) = R_X(\tau) * h^*(-\tau)$

✓ $R_{YX}(\tau) = h(\tau) * R_X(\tau)$ ✓ $R_Y(\tau) = h(\tau) * R_X(\tau) * h^*(-\tau)$

می‌توان ثابت کرد که در سیستم LTI اگر ورودی SSS کامل باشد، ورودی و خروجی توأماً SSS کامل خواهند بود.

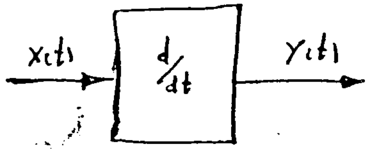
ابط کلی تر:

$$R_{hX, gY}(t,s) = h_t g_s^* R_{XY}(t,s)$$

$$R_{h*X, g*Y}(t,s) = h(t) * g^*(t) * R_{XY}(t,s)$$

3-6 ـ ممان های مشتق فرآیند

$$y(t) = \frac{d}{dt} X(t) = X'(t)$$



ضابطه : $y(t) = \frac{d}{dt} X(t) \longrightarrow h(t) = \delta'(t)$

مدل ریاضی

$$m_Y(t) = E\,y(t) = E\,\frac{d}{dt} X(t) = \frac{d}{dt} E X(t) = \frac{d}{dt} m_X(t) = m'_X(t)$$

$$R_{YX}(t,s) = E\,Y(t) X^*(s) = E\left(\frac{d}{dt} X(t)\right) X^*(s) = \frac{\partial}{\partial t} E\,X(t) X^*(s) = \frac{\partial}{\partial t} R_X(t,s)$$

$$R_{XY}(t,s) = E\,X(t) Y^*(s) = E\,X(t) \frac{d}{ds} X^*(s) = \frac{\partial}{\partial s} E\,X(t) X^*(s) = \frac{\partial}{\partial s} R_X(t,s)$$

$$R_Y(t,s) = \frac{\partial^2}{\partial t \partial s} R_X(t,s)$$

در حالت WSS:

$$m_X(t) = m_X \longrightarrow m_Y(t) = m'_X(t) = 0$$

$$R_X(t,s) = R_X(t-s) = R_X(\tau) \longrightarrow R_{YX}(\tau) = \frac{\partial}{\partial t} R_X(\underbrace{t-s}_{\tau}) = (1).R'_X(\tau) = R'_X(\tau)$$

$$\longrightarrow R_{XY}(\tau) = \frac{\partial}{\partial s} R_X(\underbrace{t-s}_{\tau}) = (-1) R'_X(\tau) = -R'_X(\tau)$$

$$\longrightarrow R_Y(t,s) = \frac{\partial^2}{\partial t \partial s} R_X(t-s) = -R''_X(\tau)$$

به طور کلی:

$$m_{X'}(t) = m'_X(t) \qquad = 0.$$

$$R_{X'X}(t,s) = \frac{\partial}{\partial t} R_X(t,s) \qquad = R'_X(\tau)$$

$$R_{XX'}(t,s) = \frac{\partial}{\partial s} R_X(t,s) \qquad = -R'_X(\tau)$$

$R_{X'}$[illegible] $(t,s) = \frac{\partial^2}{\partial t \partial s} R_X(t,s \qquad = -R''_X(\tau)$

برای فرآیند WSS

ثال 1: مشتق فرآیند پواسن با λ ثابت

$$\begin{cases} m_x(t) = \lambda t \\ R_x(t,s) = \lambda^2 ts + \lambda \operatorname{Min}(t,s) \end{cases}$$

$$Y(t) = X'(t)$$

$$m_x(t) = \frac{d}{dt}(\lambda t) = \lambda$$

$$R_y(t,s) = \frac{\partial^2}{\partial t \partial s}(\lambda^2 ts + \lambda \operatorname{Min}(t,s)) = \lambda^2 + \lambda \frac{\partial^2}{\partial t \partial s} \min(t,s) \longrightarrow$$

$$+ \operatorname{Min}(t,s) = tU(s-t) + sU(t-s) \xrightarrow{\frac{\partial}{\partial s}} \frac{\partial}{\partial s} \operatorname{Min}(t,s) = \cancel{t\delta(s-t)} + U(t-s) + s(-1)$$

$$-t$$

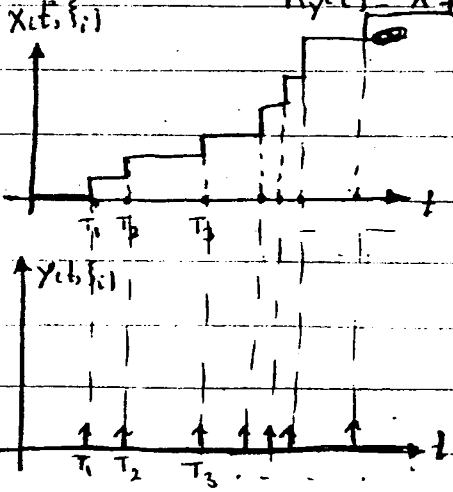
$$\xrightarrow{\frac{\partial}{\partial t}} \frac{\partial^2}{\partial t \partial s} \operatorname{Min}(t,s) = \delta(t-s)$$

س:

$$\longrightarrow \quad m_y = \lambda$$

$$R_y(\tau) = \lambda^2 + \lambda \delta(\tau)$$

بع زمانی مشتق فرآیند پواسن:



$$C_y(\tau) = \lambda \delta(\tau)$$

توجه به توابع زمانی آن، مشتق فرآیند
واسن را فرآیند ضربه‌های پواسن می‌نامند.
ی توان و معمولاً فرآیند ضربه‌های پواسن را
ضای پارامتر $t \in R$ تعریف می‌کنند.

ل 2: مشتق فرآیند وینر

$$X(\cdot) \sim N(0, N_0 \operatorname{Min}(t,s))$$

$$Y(t) = \frac{d}{dt} X(t)$$

یری عملی خطی است، لذا مشتق فرآیند وینر نیز فرآیندی نرمال خواهد بود.)

$$m_x(t) = 0 \quad , \quad R_x(t,s) = N_0 \operatorname{Min}(t,s)$$

$$\begin{cases} m_Y(t)=0 \\ R_Y(t,s)=N_0\,\delta(t-s) \end{cases} \Longrightarrow Y(\,)\sim N(0, N_0\,\delta(\tau))$$

* مشتق فرآیند وینر یک فرآیند نویز ساکن سفید و نرمال است.

$$\begin{cases} W(\,)\sim N(0, N_0\,\delta(\tau)) \\ X(t)=\int_{\alpha=0}^{t} W(\alpha)\,d\alpha \end{cases}$$

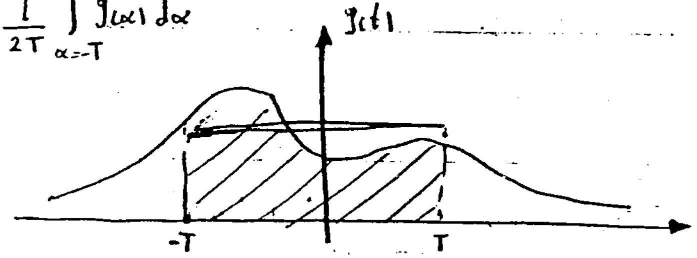
نتیجه‌ای که با توجه به تعریفی که کرده بودیم قابل پیش بینی بود.

7- ارگادیک بودن فرآیندها (Ergodicity)

7-1- تعریف متوسط زمانی، مفهوم و اهمیت ارگادیک بودن

* متوسط زمانی یک تابع مثل $g(t)$:

$$\langle g(t)\rangle_t \triangleq \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{\alpha=-T}^{T} g(\alpha)\,d\alpha$$



روشن است که $\langle g(t)\rangle_t$ یعنی: متوسط مقادیر مختلفی که تابع $g(t)$ در تمام طول محور زمان اختیاری
اگر $g(t)$ پریودیک با پریود T_0 باشد، می‌توان این متوسط گیری را در طول یک پریود انجام داد.

$$\langle g(t)\rangle_t = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} g(\alpha)\,d\alpha = \frac{1}{T_0}\int_{T_0} g(t)\,dt$$

* ارگادیک بودن فرآیند، یعنی داشتن این خاصیت که بتوان به کمک هر یک از توابع زمانی زا
خصوصیات آماری فرآیند را بدست آورد، یعنی در واقع استفاده از متوسط گیری زمانی به جای متوسط گ
آماری. (به جای امید ریاضی)

* با توجه به تعریف فوق 2 شرط زیر را می‌توان برای ارگادیک بودن لازم دانست:

① وجود شباهت هایی بین توابع زمانی فرآیند، چرا که باید فرق نکند که از کدام یک برای محاسبهٔ
آماری استفاده می‌شود.
فرآیند

② ساکن بودن فرآیند در همان خصوصیت آماری که ارگادیک است. چرا که با متوسط گیری زمانی حاصل - مقداری مستقل از زمان خواهد بود.

★ ارگادیک بودن در عمل از 2 نظر خیلی مهم است.

① در صورت ارگادیک بودن فرآیند، تعیین خصوصیات آماری فرآیند خیلی ساده می گردد، چرا که با یک آزمایش تصادفی، یعنی پیدا کردن یکی از توابع زمانی فرآیند، می توان بکمک متوسط گیری های زمانی روی آن، خصوصیات آماری فرآیند را محاسبه کرد. اما اگر فرآیند ارگادیک نباشد، لازم خواهد بود به تعداد خیلی زیاد ($n \to \infty$ بار) آزمایش و از متوسط گیری روی نتایج آزمایش های مختلف استفاده کرد.

② یک نتیجه گیری آماری را در صورت ارگادیک بودن فرآیندها می توان به تک تک موارد تعمیم داد. مثلاً اگر با بررسی های آماری به این نتیجه برسیم که با احتمال 90%، SNR بالای 30 دسی بل خواهد بود، در صورت ارگادیک بودن فرآیند ها می توانیم ادعا کنیم در کلیهٔ مواردی که از سیستم استفاده می شود، در 90% از زمان SNR بالای 30 dB خواهیم داشت. در صورتی که اگر فرآیندها ارگادیک نباشند، تنها می توان گفت که در 90% از موارد SNR بالای 30^{dB} خواهد بود.

-2- ارگادیک بودن در متوسط (ME بودن) ← Mean Ergodicity ≡ ME

یعنی: $m_X(t) = E X(t,\xi) = \langle X(t,\xi)\rangle_t$

در حالت کلی سمت راست مستقل از t است، پس تساوی فوق وقتی می تواند برقرار باشد که سمت چپ نیز مستقل از t باشد.

ساکن بودن در متوسط : $m_X(t) = m_X$

در حالت کلی سمت راست تابعی از ξ می گردد، یعنی نتیجه بستگی به این خواهد داشت که از کدام یک از توابع زمانی استفاده شود ولذا وقتی فرآیند ME است که: $\langle X(t)\rangle_t = m_X$

مستقل از ξ

البته تساوی به مفهوم MS از نظر عملی کافی است:

$$E\left|\langle X(t)\rangle_t - m_X\right|^2 = 0$$

ME بودن $\leftarrow$ $m_x(t) = Ex(t,\xi) = \langle X(t,\xi) \rangle_t$

الف) جیفرتسنیه:

قضیهٔ 1 : شرط لازم و کافی برای ME بودن فرآیند عبارت است از:

$(1)\quad m_x(t) = m_x$ ساکن بودن در متوسط

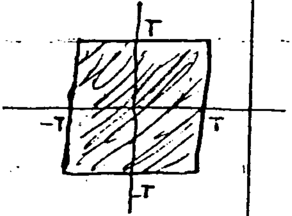
$(2)\quad \langle\langle C_x(t,s)\rangle_t\rangle_s = 0$

اثبات: شرط اوّل که قبلاً بیان شد.

$$|\langle x(t)\rangle_t - m_x|^2 = E|\langle x(t) - m_x\rangle_t|^2 = E|\langle \tilde{x}(t)\rangle_t|^2 = E\langle \tilde{x}(t)\rangle_t \langle \tilde{x}^*_t\rangle_t =$$

$$= E \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} \tilde{x}(t)dt \cdot \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} \tilde{x}^*(t)dt =$$

$$= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{4T^2}\int_{-T}^{T}\int_{-T}^{T} \underbrace{E\tilde{x}(t)\tilde{x}^*(s)}_{C_x(t,s)}\, dt\, ds =$$



$$= \langle\langle C_x(t,s)\rangle_t\rangle_s = 0 \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \boxed{\langle x(t)\rangle_t \overset{mS}{=} m_x}$$

پس به کمک ممان های اوّل و دوّم فرآیندی توان ME بودن فرآیند را بررسی نمود.

قضیه 2 : شرط لازم و کافی برای ME بودن فرآیند های WSS عبارت است از:

$$\langle C_x(\tau)\rangle_\tau = 0$$

اثبات: شرط اوّل قضیهٔ 1 خود به خود برقرار است چراکه در WSS داریم:

$$\begin{cases} m_x(t) = m_x \\ C_x(t,s) = C_x(t-s) = C_x(\tau) \end{cases}$$

شرط دوّم قضیهٔ (1):

$$\langle\langle C_x(t,s)\rangle_t\rangle_s = \langle[\langle C_x(t+s,s)\rangle_t]\rangle_s = \langle[\langle C_x(t+s-s)\rangle_t]\rangle_s =$$

شیفت زمانی

تغییرنمی ده

$$= \langle\langle C_x(t)\rangle_s\rangle_t = \langle C_x(t)\rangle_t =$$

مستقل از s

$$= \langle C_x(\tau)\rangle_\tau = 0 \quad ✓$$

قضیهٔ 3 : یک شرط کافی برای ME بودن فرآیندهای WSS عبارت است از:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} C_x(\tau)\,d\tau < \infty$$

اثبات: طبق قضیهٔ (2)

$$\langle C_x(\tau)\rangle_\tau = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} C_x(\tau)\,d\tau = \lim_{T\to\infty}\frac{\int_{-T}^{T} C_x(\tau)\,d\tau}{2T} = 0 \quad ✓$$

مقدار صورت محدود است.

قضیهٔ 4: یک شرط کافی دیگر برای ME بودن فرآیندهای WSS عبارت اند از:

$$\begin{cases} (1) \quad C_x(0) \neq \infty \\ (2) \quad C_x(\infty) = 0 \end{cases}$$

اثبات در پاپولیس

ب) چند مثال:

) فرآیند پواسن با λ ثابت: $m_x(t) = \lambda t$

م متوسط ساکن نیست، پس ME نیست.

) فرآیند سیگنال تلگرافی با λ ثابت: $m_x(t) = 0$

$$C_x(\tau) = e^{-2\lambda|\tau|}$$

WSS است و $C_x(0) = 1 \neq \infty$ و $C_x(\infty) = 0$ طبق قضیهٔ (4) این فرآیند ME است.

فرآیند ضربه‌های پواسن با λ ثابت: $m_x(t) = \lambda$

$$C_x(\tau) = \lambda\,\delta(\tau)$$

W است.

$$\int C_x(\tau)\,d\tau = \lambda \neq \infty$$

طبق قضیهٔ (3) ME است.

④ فرآیند با توصیف تحلیلی زیر ←

$$\begin{cases} X(t)=A\cos(2\pi f_0 t+B) \\ A \perp\!\!\!\perp B \\ B \sim U(0,2\pi) \end{cases}$$

برای مستقیم ME بودن ممکن بوده و ساده‌تر است.

$$* \quad m_X(t)= E\,A\cos(2\pi f_0 t+B) \overset{A \perp\!\!\!\perp B}{=} EA\cdot E\cos(2\pi f_0 t+B) =$$

$$= m_A \int_{-\infty}^{+\infty} \cos(2\pi f_0 t+\alpha) f_B(\alpha)\,d\alpha = m_A \int_{0}^{2\pi} \cos(2\pi f_0 t+\alpha)\frac{1}{2\pi}\,d\alpha = 0$$

$$* \quad \langle A\cos(2\pi f_0 t+B)\rangle_t = A\langle \cos(2\pi f_0 t+B)\rangle_t = \begin{cases} 0 & , f_0\neq 0 \\ A\langle\cos B\rangle = A\cos B & , f_0=0 \end{cases}$$

چون در حالت $f_0\neq 0$ فرآیند ME است. $m_X(t)=\langle X(t)\rangle_t=0$

امّا در حالت $f_0=0$ فرآیند ME نیست.

3-7- ارگادیک بودن در تابع همبستگی (CE بودن) $CE \equiv$ Correlation Ergodicity

CE بودن یعنی اینکه بتوان تابع همبستگی فرآیند را به کمک هر یک از توابع زمانی پیدا کرد.

$$R_X(t+\tau,t) = E\underbrace{X(t+\tau)X^*(t)}_{Z_\tau(t)} = \langle \underbrace{X(t+\tau)X^*(t)}_{Z_\tau(t)} \rangle_t$$

با تعریف یک فرآیند کمکی می‌توان هر نوع ارگادیک بودن را به یک ME بودن معادل تبدیل کرد. در اینجا:

$$Z_\tau(t) \triangleq X(t+\tau)X^*(t)$$

ME بودن $Z(t)$ معادل است با CE بودن $X(t)$.

شرط لازم و کافی برای CE بودن فرآیند $X(t)$ عبارت است از:

(1) ساکن بودن در تابع همبستگی $R_X(t+\tau,t)=R_X(\tau)$

(2) $\langle\langle E\, X(t+\tau)X^*(t)X^*(s+\tau)X(s)\rangle_t\rangle_s = |R_X(\tau)|^2$

لاحظه می گردد که برای بررسی CE بودن به ممان چهارم فرآیند هم نیاز داریم.

ثبات قضیه:

$$m_{z_\tau}(t) = E Z_\tau(t) = E X(t+\tau) X^*(t) = R_X(t+\tau, t)$$

$$C_{z_\tau}(t,s) = E\, \tilde{Z}_\tau(t) . \tilde{Z}_\tau^*(s) = E\, z_\tau(t) . z_\tau^*(s) - m_{z_\tau}(t)\, m_{z_\tau}^*(s) =$$

$$= E\, X(t+\tau) X^*(t) X^*(s+\tau) X(s) - R_X(t+\tau,t) R_X^*(s+\tau, s)$$

طبق قضیهٔ (1) ME بودن برای Z_τ داریم:

$$(1)\ \ m_{z_\tau}(t) \overset{\text{مستقل از } t}{=} m_{z_\tau} \longrightarrow R_X(t+\tau,t) = R_X(\tau)$$

$$(2)\ \ \langle\langle C_{z_\tau}(t,s)\rangle_t\rangle_s = 0 \longrightarrow \langle\langle E(\cancel{X}(t+\tau) X^*(t) X^*(s+\tau) X(s)\rangle_t\rangle_s =$$

$$= \langle\langle R_X(t+\tau,t) R_X^*(s+\tau,s)\rangle_t\rangle_s \overset{\text{شرط (1)}}{=} \langle\langle R_X(\tau) R_X^*(\tau)\rangle_t\rangle_s = |R_X(\tau)|^2$$

رین: ثابت کنید فرآیند نرمال با $C_X(t+\tau,t) = e^{-|\tau|}$, $m_X(t) = 0$ یک فرآیند CE است.

راهنمائی: از یکی از خواص بردار نرمال استفاده کنید.)

4- ارگادیک بودن در توزیع (DE بودن) $\quad$ DE ≡ Distribution Ergodicity

بودن یعنی اینکه بتوان به کمک هر یک از توابع زمانی فرآیند، توابع احتمال فرآیند را پیدا کرد.

بودن می تواند با مرتبه های مختلفی مطرح شود. ما فقط DE بودن مرتبه اول را در نظر می گیریم.

یعنی اینکه بتوان توابع احتمال یک بعدی فرآیند را به کمک هر یک از توابع زمانی فرآیند پیدا کرد.

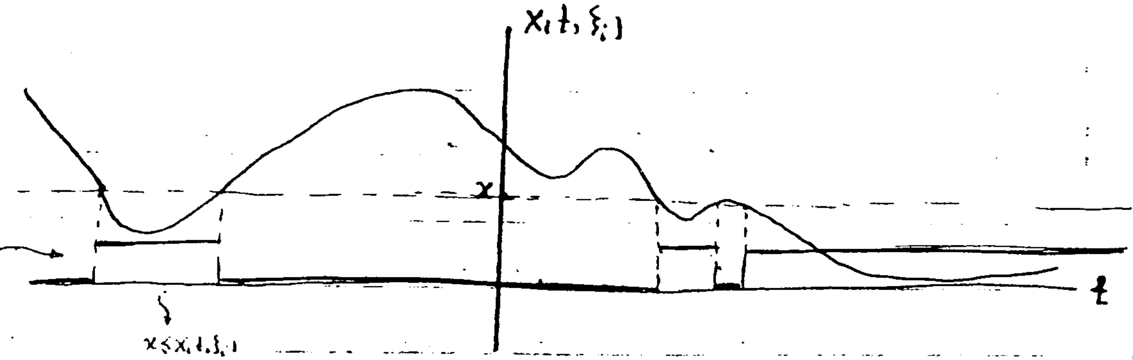
$$F_X(x;t) = P\{X(t) \leqslant x\}$$

ریف فرآیند کمکی زیر:

$$Z_x(t) \triangleq \begin{cases} 1 & X(t) \leqslant x \\ 0 & X(t) > x \end{cases}$$

$$E Z_x(t) = (1)\,p\{Z_x(t)=1\} + (0)\,p\{Z_x(t)=0\} = p\{x(t) \leq x\} + 0 = F_X(x;t)$$

پس DE بودن فرآیند X، معادل است با ME بودن فرآیند Z_x.



در صورت DE بودن فرآیند:

$$F_X(x;t) = E Z_x(t) = \langle Z_x(t) \rangle_t = \left(\text{نسبتی از زمان که } Z_x(t) \text{ برابر } 1 \text{ بوده است} \right) =$$

$$= \left(\text{نسبتی از زمان که در آن } X(t) \leq x \text{ بوده است} \right)$$

چند قضیه:

قضیهٔ 1: شرط لازم و کافی برای DE بودن فرآیند عبارت است از:

$E_X(x;t) = F_X(x)$ ---- SSS بودن رتبه اول

$\langle\langle F_X(x,x;t,s) \rangle_t \rangle_s = F_X^2(x)$

اثبات:

$$m_{Z_x}(t) = E Z_x(t) = F_X(x;t) \xRightarrow[\text{برای } Z_x]{\text{شرط اول ME بودن}} F_X(x;t) = F_X(x)$$

مستقل از t

$$C_{Z_x}(t,s) = R_{Z_x}(t,s) - m_{Z_x}(t)\,m_{Z_x}(s) = R_{Z_x}(t,s) - F_X(x)\,F_X(x) \xRightarrow[\text{ME بودن}]{\text{شرط 2، قضیهٔ اول}}$$

$$\Rightarrow \langle\langle R_{Z_x}(t,s) \rangle_t \rangle_s = \langle\langle F_X(x)^2 \rangle\rangle_{t,s} = F_X^2(x)$$

$$R_{Z_x}(t,s) = E Z_x(t) Z_x(s) = (1)(1)\,p(Z_x(t)=1,\ Z_x(s)=1) = p\{X(t) \leq x,\ X(s) \leq x\} =$$

فقط وقتی هر دو 1 باشند
غیر صفر

$= F_X(x,x;t,s) \Longrightarrow$ b) شرط : $\langle\langle F_X(x,x;t,s)\rangle_t\rangle_s = F_X^2(x)$ ✓

یهٔ (2): شرط لازم و کافی برای DE بودن فرآیندهای SSS مرتبه دوم عبارت است از :

$$\boxed{\langle F_X(x,x;\tau)\rangle_\tau = F_X^2(x)}$$

ثبات : از SSS مرتبه دوم ، مرتبه اوّل هم نتیجه می گردد. پس شرط اوّل قضیهٔ (1) خود به خود برقرار است.

با توجه به SSS مرتبه دوم بودن فرآیند:

$$F_X(x,x;t,s) = F_X(x,x;\overset{\tau}{\overline{t-s}}) \longrightarrow \langle\langle F_X(x,x;t,s)\rangle_t\rangle_s = \langle F_X(x,x;\tau)\rangle_\tau$$

نظیر اثبات قضیهٔ (2) ME بودن

یهٔ (3): یک شرط کافی برای DE بودن مرتبه اوّل فرآیندهای SSS مرتبه دوم ، استقلال متغیّرهای تصادفی به فاصلهٔ $\tau \to \infty$ می باشد.

ات :

$$F_X(x,x;\tau) = F_X(x;t)\,F_X(x;s) = F_X(x)F_X(x) = F_X^2(x)$$

در صورت استقلال — SSS مرتبه اوّل

$$\longrightarrow C_{Z_x}(\infty) = F_X(x,x;\infty) - F_X^2(x) = F_X^2(x) - F_X^2(x) = 0$$

$$\longrightarrow C_{Z_x}(0) = F_X(x,x;0) - F_X^2(x) \neq \infty$$

چون CDF تابعی است با مقادیر بین 0 تا 1

ی طبق قضیهٔ (4) فرآیند $Z_x(t)$ یک فرآیند ME است ، یعنی فرآیند $X(t)$ یک فرآیند DE است

ته: در فرآیندهای نرمال از CE+ME بودن فرآیند می توان DE بودن کامل فرآیند را نتیجه گرفت (یعنی ارگادیک بودن در کلیهٔ خصوصیات آماری) چرا که در فرآیندهای نرمال ، ممان های اوّل و دوّم یک توصیف کامل آماری فرآیند است.

پایان مبحث دوم (پایان ترم تا این جا)

مبحث سوم: «طیف توان و بسط های متعامد فرآیندها»

1- معرفی طیف قدرت و طیف قدرت متقابل

1-1- مروری بر قدرت و طیف قدرت توابع یقینی

$g(t)$ تابع یقینی

$|g(t)|^2 = g(t)\,g(t)^*$ قدرت لحظه‌ای تابع

$P_g = < |g(t)|^2 >_t$ قدرت تابع / $E_g = \int_{-\infty}^{+\infty} |g(t)|^2 dt$ انرژی تابع

اگر $E_g \neq 0, \infty$ باشد، تابع را از نوع انرژی گویند. / اگر $P_g \neq 0, \infty$ باشد، تابع را از نوع قدرت گویند

تبدیل فور: $g(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} G(f) e^{j2\pi f t} df$ / $G(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t) e^{-j2\pi f t} dt$

$C_0 e^{j2\pi f_0 t}$ = مؤلفهٔ فرکانسی با فرکانس f_0 و به مقدار C_0

طبق روابط تبدیل فوریه هر سیگنالی را می‌توان مجموع مؤلفه‌های فرکانسی دانست. تبدیل فوریهٔ سیگنال را
تابعی است که مقدار هر مؤلفه را می‌دهد.

$C_0 = G(f_0)$ مقدار مؤلفهٔ با فرکانس f_0 موجود در

یک مؤلفهٔ فرکانسی حقیق با فرکانس f_0 $g(t) = a\cos(2\pi f_0 t + b) = \underbrace{\frac{a}{2} e^{jb}}_{C_0} e^{j2\pi f_0 t} + \underbrace{\frac{a}{2} e^{-jb}}_{C_0^*} e^{j2\pi(-f_0)t}$

هر مؤلفهٔ فرکانسی حقیقی با فرکانس f_0 از مجموع دو مؤلفهٔ فرکانسی با فرکانس های $+f_0$ و $-f_0$ تشک
می گردد. به طوری که اگر مقدار یکی C_0 باشد، مقدار دیگری C_0^* خواهد بود.

برخی خواص تبدیل فوریه:

① $g(t) \xleftrightarrow{FT} G(f) \Longrightarrow g(-t) \xleftrightarrow{FT} G(-f)$ *

یعنی تبدیل فوریه، تقارن ها (زوج یا فرد) را حفظ می کند.

*

② $g(t) \xleftrightarrow{FT} G(f) \Longrightarrow g(t)^* \xleftrightarrow{FT} G^*(-f)$

بس در سیگنال های حقیقی که $g(t)=g^*(t)$ داریم :

$$\boxed{G(f)=G^*(-f)}$$

مقدار مؤلفه با فرکانس f -

مزدوج مقدار مؤلفه با فرکانس $+f$.

* فرم کلی رابطه پارسوال ③ :

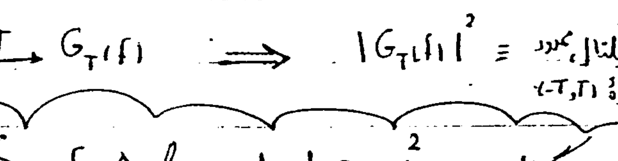
$$\int_{-\infty}^{+\infty} g_1(t)\, g_2^*(t)\, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} G_1(f)\cdot G_2^*(f)\, df$$

* فرم حالت خاص :

$$E_g = \int_{-\infty}^{+\infty} |g(t)|^2\, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |G(f)|^2\, df$$

$|G(f)|^2$ طیف انرژی تابع / $G(f)$ مقدار مؤلفه با فرکانس f موجود در تابع

طیف انرژی تابعی است که چگونگی توزیع انرژی E_g را بین فرکانس های مختلف نشان می دهد.
برای سیگنال های از نوع انرژی $G(f)$ محدود خواهد بود، ولی برای غالب سیگنال های از نوع قدرت، $G(f)$
بی نهایت می گردد، یعنی این سیگنال ها نیز از مجموع مؤلفه های فرکانسی تشکیل می گردند منتهی مجموع
مؤلفه های با دامنه نوسانی نامحدود. به هر حال برای چنین سیگنال هایی نمی توان از تبدیل فوریه استفاده کرد.
با محدود کردن سیگنال به یک بازه محدود غالباً از نوع انرژی می گردد و دارای تبدیل فوریه می گردد.



$$g_T(t) \xleftrightarrow{FT} G_T(f) \Longrightarrow |G_T(f)|^2 \equiv$$ طیف انرژی سیگنال محدود شده به بازه $(-T,T)$

* طیف قدرت سیگنال :

$$S_g(f) \triangleq \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} |G_T(f)|^2$$

داریم :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} S_g(f)\, df = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-\infty}^{+\infty} |G_T(f)|^2\, df \underset{\text{پارسوال}}{=} \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-\infty}^{+\infty} |g_T(t)|^2\, dt = \Big\}$$

ص بعد

$$= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} |g_T(t)|^2 dt = <|g(t)|^2> = P_g$$

یعنی $S_g(f)$ تابعی است که چگونگی توزیع قدرت (P_g) را بین فرکانس‌های مختلف نشان می

1-2- تبدیل فوریه و طیف قدرت فرآیندها

در این قسمت فرآیند را در حوزهٔ زمان با حروف کوچک نشان خواهیم داد. یعنی:

فرآیند حوزهٔ زمان $x(t) = x(t,\xi)$

قدرت لحظه‌ای فرآیند $E|x(t)|^2 \underset{\text{کلی}}{=} R_x(t,t) \underset{\text{در WSS}}{=} R_x(0)$

قدرت فرآیند $P_x \triangleq < E|x(t)|^2 >_t \underset{\text{کلی}}{=} <R_x(t,t)>_t \underset{\text{WSS}}{=} <R_x(0)>_t = R_x(0)$

$$\equiv E<|x(t)|^2>_t$$

انرژی فرآیند $E_X = \int_{-\infty}^{+\infty} E|x(t)|^2 dt \underset{\text{کلی}}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} R_x(t,t) dt \underset{\text{WSS}}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} R_x(0) dt = \infty$

در حالت کلّی انرژی فرآیندهای WSS نامحدود است.

غالباً توابع زمانی فرآیندها از نوع قدرت هستند و دارای تبدیل فوریه نمی‌باشند ولی با محدود کردن فرآیندها به بازهٔ مثلاً $\pm T$ از نوع انرژی می‌گردند و دارای تبدیل فوریه می‌گردند

$$x_T(t) = \begin{cases} x(t) & , |t|<T \\ 0 & , |t|>T \end{cases} \longrightarrow X_T(f,\xi) = \mathcal{F}\{x_T(t,\xi)\} = \int_{t=-\infty}^{+\infty} x_T(t,\xi) e$$

با تبدیل فوریه، فرآیند به فرآیندی در حوزهٔ فرکانس بدل می‌گردد یعنی فرآیندی که پارامتر آن f می با

(فضای پارامتر آن محور فرکانسی است.) یعنی در هر نقطه از محور فرکانسی یک متغیر تصادفی است.

مقدار مؤلفه با فرکانس f_1 موجود در فرآیند $= X_T(f_1) \longleftarrow$ متغیر تصادفی نقطهٔ f_1 از محور فرکانس

گرچه استفاده از تبدیل فوریه به صورت فوق مقدور باشد، ولی چون در حالت کلی فرآیند جدید حاصل نسبت به فرآیند اصلی مزیت خاصی پیدا نمی‌کند. (مثلاً ناهمبسته شدن متغیرهای تصادفی آن) لذا در عمل غالباً برای فرآیندها از تبدیل فوریه استفاده نمی‌گردد.

ولی یک تابع حوزهٔ فرکانس مفید موسوم به طیف قدرت بسیار رایج است.

طیف قدرت فرآیند:
$$S_X(f) \triangleq \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} E|X_T(f)|^2$$

* $S_X(f)$ طیف قدرت نامیده می‌شود، چراکه خواهیم دید:
$$\int_{-\infty}^{+\infty} S_X(f)\,df = P_X$$

یعنی این تابع چگونگی توزیع P_X را بین فرکانس‌های مختلف نشان می‌دهد.

---

* طیف قدرت متقابل دو فرآیند تصادفی:
$$x_T(t) \xleftrightarrow{FT} X_T(f)$$
$$y_T(t) \xleftrightarrow{FT} Y_T(f)\,.$$

طیف قدرت متقابل
$$S_{XY}(f) \triangleq \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} E X_T(f) Y_T^*(f)$$

$X_T(f)$ متغیر تصادفی : مقدار مؤلفه با فرکانس f موجود در فرآیند x / $Y_T(f)$ متغیر تصادفی : مقدار مؤلفهٔ با فرکانس f موجود در فرآیند y

طیف قدرت متقابل $S_{XY}(f)$ تابعی است که همبستگی بین مقدار مؤلفه‌های فرکانسی موجود در دو فرآیند را بیان می‌کند.

1-3- رابطهٔ بین طیف قدرت (متقابل) و تابع همبستگی (متقابل)

$$S_X(f) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} E|X_T(f)|^2 = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} E X_T(f) X_T^*(f) =$$

$$= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} E \int_{-\infty}^{+\infty} x_T(t_1) e^{-j2\pi f t_1} dt_1 \int_{-\infty}^{+\infty} x_T^*(t_2) e^{+j2\pi f t_2} dt_2 =$$

$$= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} E \int_{-T}^{T} x(t_1) e^{-j2\pi f t_1} dt_1 \cdot \int_{-T}^{T} x^*(t_2) e^{+j2\pi f t_2} dt_2 =$$

$$= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{t_1=-T} \int_{t_2=-T} \underbrace{E\, x(t_1) x^*(t_2)}_{R_x(t_1,t_2)} e^{-j2\pi f(t_1-t_2)} dt_1 dt_2 =$$

$$= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{t=-T}^{T} \int_{\tau=-t-T}^{-t+T} R_x(t+\tau, t)\, e^{-j2\pi f \tau} d\tau\, dt =$$

$$dt_1 dt_2 = \left|\det\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\right| dt\, d\tau = dt\, d\tau$$

$$= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{t=-T}^{T} \int_{\tau=-\infty}^{+\infty} R_x(t+\tau, t)\, e^{-j2\pi f \tau} d\tau\, dt =$$

$$\int_{\tau=-\infty}^{+\infty} e^{-j2\pi f \tau} \underbrace{\left(\lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{t=-T}^{T} R_x(t+\tau, t)\, dt \right)}_{\langle R_x(t+\tau, t) \rangle_t} d\tau \longrightarrow$$

$$\longrightarrow S_x(f) = \int_{\tau=-\infty}^{+\infty} \langle R_x(t+\tau, t) \rangle_t\, e^{-j2\pi f \tau} d\tau = F_\tau \langle R_x(t+\tau, t) \rangle_t$$

پس:

$$\boxed{\langle R_x(t+\tau, t) \rangle_t \xleftrightarrow{FT} S_x(f)}$$

پس با داشتن تابع همبستگی فرآیند می توان طیف قدرت فرآیند را به صورتی منحصر بفرد تعیین و با داشتن طیف قدرت فرآیند در حالت کلی می توان متوسط زمانی تابع همبستگی را پیدا کرد.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} S_x(f)\, df = \langle R_x(t+\tau, t) \rangle_t \Big|_{\tau=0} = \langle R_x(t,t) \rangle_t = P_x$$

* در فرآیند WSS:

$$R_x(t+\tau, t) = R_x(\tau)$$

$$\rightarrow \langle R_x(t+\tau, t) \rangle_t = \langle R_x(\tau) \rangle_t = R_x(\tau)$$

ولذا:

$$R_x(\tau) \xleftrightarrow{FT} S_x(f)$$

روابط وینر- خین چین

wiener_Khinchin

$$\begin{cases} S_x(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} R_x(\tau) e^{-j2\pi f \tau} d\tau \\ R_x(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} S_x(f) e^{+j2\pi f \tau} df \end{cases}$$

در فرآیندهای WSS رابطهٔ طیف قدرت و تابع همبستگی یک رابطهٔ یک به یک است.
به همین ترتیب می توان نشان داد که در حالت کلی:

$$\langle R_{xy}(t+\tau,t)\rangle_t \xleftrightarrow{FT} S_{xy}(f)$$

و در حالت توأماً WSS :

$$R_{xy}(\tau) \xleftrightarrow{FT} S_{xy}(f)$$

م

N

4-1 - چند مثال از طیف قدرت

$$\langle R_x(t+\tau,t)\rangle_t \xleftrightarrow[\tau]{FT} S_x(f)$$

$$\langle R_{xy}(t+\tau,t)\rangle_t \xleftrightarrow[\tau]{FT} S_{xy}(f) =$$

$$= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} E$$

$$S_x(f) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} E|X_T(f)|^2$$

$$= E \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} |X_T(f)|^2$$

وقتی تک‌تک
زمانی دارای ط
باشند.

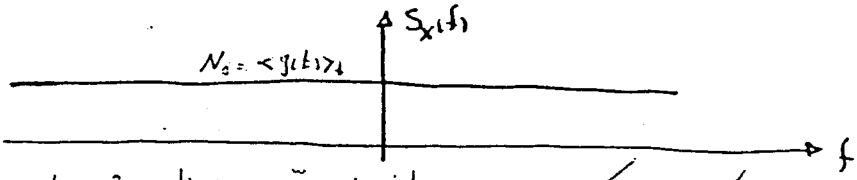
① فرآیند نویز سفید :

$$\begin{cases} m_x(t) = 0 \\ R_x(t+\tau,t) = C_x(t+\tau,t) = g(t)\delta(\tau) \end{cases}$$

$$\langle R_x(t+\tau,t)\rangle_t = \langle g(t)\delta(\tau)\rangle_t = \langle g(t)\rangle_t\,\delta(\tau) = N_0\,\delta(\tau)$$

مثلاً

$$\longrightarrow S_x(f) = \mathcal{F}\{N_0\delta(\tau)\} = N_0$$ مستقل از فرکانس



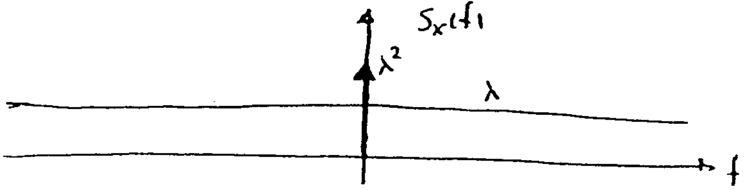
در فرآیند نویز سفید همهٔ فرکانس‌ها و به یک میزان حضور دارند و این علت سفید نامیده شدن است.

فرآیند ضربه‌های پواسن با λ ثابت ;

$m_x(t) = \lambda$

$C_x(\tau) = \lambda\delta(\tau)$

$$\longrightarrow R_x(\tau) = C_x(\tau) + |m_x(t)|^2 = \lambda\delta(\tau) + \lambda^2 \longrightarrow S_x(f) = \mathcal{F}R_x(t) = \lambda + \lambda^2$$



این طیف نشان می دهد که این فرآیند دارای یک مؤلفهٔ DC قوی است و صرف نظر از آن بقیهٔ فرکانس
با قدرت یکسان در فرآیند وجود دارند.

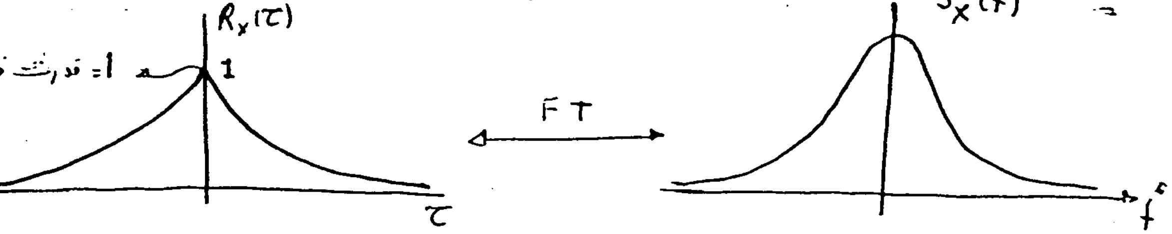
---

③ فرآیند سیگنال تلگرافی با λ ثابت

$$m_X(t)=0$$

$$R_X(\tau)=e^{-2\lambda|\tau|}$$

$$S_X(f)=\tilde{F}\, e^{-2\lambda|\tau|}=\frac{4\lambda}{(2\lambda)^2+(2\pi f)^2}$$



$S_X(f)$ اگرچه نشان می دهد که در این فرآیند همهٔ فرکانس ها وجود دارند، ولی قدرت در حول فرکانس $=0$
متمرکز است و فرکانس های مهم موجود در این فرآیند، فرکانس های پایین هستند.

---

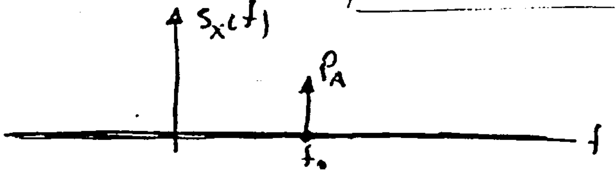
④ یک مؤلفهٔ فرکانسی با فرکانس معلوم f_0 ولی دامنه و فاز تصادفی

$$X(t)=Ae^{j(2\pi f_0 t+\beta)}$$

$$\longrightarrow R_X(t+\tau,t)=EX(t+\tau)X^*(t)=E\,Ae^{j(2\pi f_0 t+2\pi f_0\tau+\beta)}\cdot Ae^{-j(2\pi f_0 t+\beta)}=$$

$$=EA^2e^{j2\pi f_0\tau}=P_A\,e^{j2\pi f_0\tau}$$

$$\xrightarrow{FT} S_X(f)=F\{P_A\,e^{j2\pi f_0\tau}\}\rightarrow \boxed{S_X(f)=P_A\,\delta(f-f_0)}$$



$S_X(f)$ نشان می دهد که در این فرآیند، هیچ فرکانسی به جز فرکانس $f=f_0$ وجود ندارد یعنی همهٔ قدرت فرآی
در همین فرکانس متمرکز است. چیزی که از روی توابع زمانی فرآیند نیز واضح است.

---

۱) چند مؤلفهٔ فرکانسی با فرکانس معلوم و دامنه‌ها و فازهای تصادفی

$$X(t)=\sum_{i=1}^{n} A_i e^{j(2\pi f_i t+B_i)}$$

$$R_x(t+\tau,t)=E\sum_{i=1}^{n}A_i e^{j(2\pi f_i t+2\pi f_i\tau+B_i)}\cdot\sum_{K=1}^{n}A_K e^{j(2\pi f_K t+B_K)}=$$

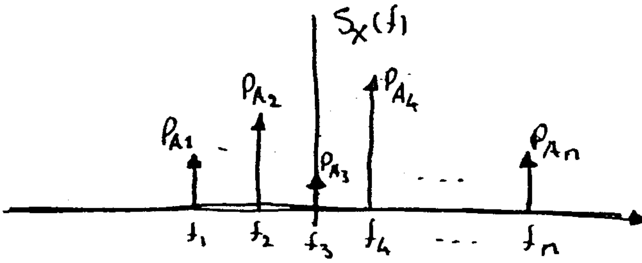
$$=\sum_{i=1}^{n}\sum_{K=1}^{n} EA_iA_K e^{j2\pi f_i\tau}e^{j2\pi(f_i-f_K)t}e^{j(B_i-B_K)}\longrightarrow$$

$$\longrightarrow\langle R_x(t+\tau,t)\rangle_t=\sum_{i=1}^{n}\sum_{K=1}^{n}EA_iA_K e^{j2\pi f_i\tau}\langle e^{j2\pi(f_i-f_K)t}\rangle_t\, e^{j(B_i-B_K)}\text{ —}$$

$$\langle e^{j2\pi f_0 t}\rangle_t=\begin{cases}0 & ,f_0\neq0\\ \langle e^0\rangle=1 & ,f_0=0\end{cases}\longrightarrow\langle R_x(t+\tau,t)\rangle_t=\sum_{i=1}^{n}[0+EA_iA_ie^{j2\pi f_i\tau}\times1]\times e^{j(B_i-}$$

$$\longrightarrow\langle R_x(t+\tau,t)\rangle_t=\sum_{i=1}^{n}\underbrace{EA_i^2}_{P_{A_i}}e^{j2\pi f_i\tau}\longrightarrow S_x(f)=F\Big\{\sum_{i=1}^{n}P_{A_i}e^{j2\pi f_i\tau}$$

$$\longrightarrow S_x(f)=\sum_{i=1}^{n}P_{A_i}\delta(f-f_i)$$



۶) یک مؤلفهٔ فرکانسی حقیقی با دامنهٔ معلوم ولی فرکانس و فاز تصادفی :

تصادفی

$$X(t)=K\cos(2\pi At+B)$$

$$R_x(t+\tau,t)=EX(t+\tau)X(t)=EK\cos(2\pi At+2\pi A\tau+B)\cdot K\cos(2\pi At+B)=$$

$$=\frac{K^2}{2}E[\cos(4\pi At+2\pi A\tau+2B)+\cos(2\pi A\tau)]$$

$$\longrightarrow S_x(f)=F_\tau\Big\{\langle\tfrac{K^2}{2}E[\cos(4\pi At+2\pi A\tau+2B]+\cos(2\pi A\tau))\rangle_t\Big\}=$$

$$=\frac{K^2}{2}F_\tau\Big\{E\big(\langle\cos(4\pi At+2\pi A\tau+2B)\rangle_t+\cos(2\pi$$

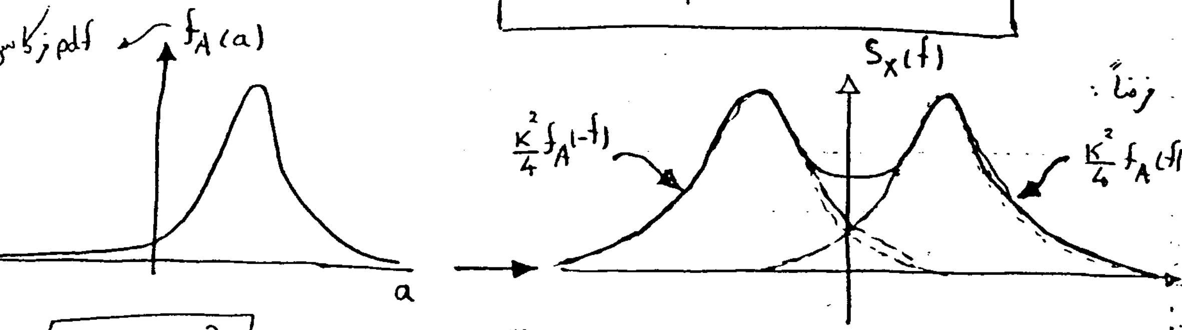
$$\frac{\ }{2}\,\mathcal{F}_\tau\{E[\cos 2\pi A\tau]\} = \frac{\ }{2}\,E(\mathcal{F}_\tau\{\cos 2\pi A\tau\}) =$$

متغیر A

$$= \frac{K^2}{2}\,E\left[\frac{1}{2}\delta(f-A) + \frac{1}{2}\delta(f+A)\right] = \frac{K^2}{4}\int_{-\infty}^{+\infty} f_A(\alpha)\,[\underbrace{\delta(f-\alpha)}_{\delta(\alpha-f)} + \delta(f+\alpha)]\,d\alpha =$$

$$= \frac{K^2}{4}\left[f_A(f) + f_A(-f)\right] \longrightarrow \boxed{S_X(f) = \frac{K^2}{4}\left[f_A(f) + f_A(-f)\right]}$$

ضمناً :



و $\boxed{P_X = \frac{K^2}{2}}$

---

⑦ فرآیند PAM فریدای

یعنی فرآیند با تعریف روبرو :

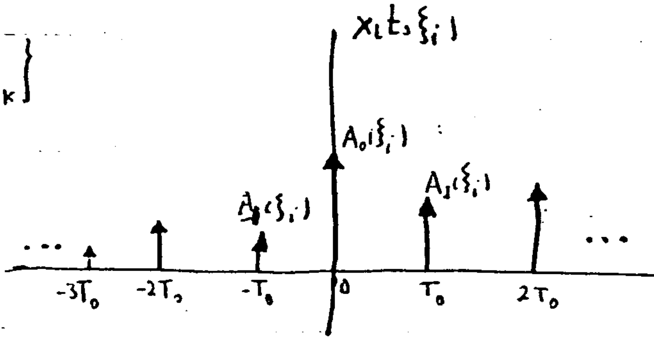
$$X(t) = \sum_{K=-\infty}^{\infty} A_K\,\delta(t-KT_0)$$

T_0 : معلوم

A_K ها یک رشته متغیر تصادفی WSS هستند یعنی

$$m_A(K) = EA_K = m_A$$

$$R_A(K,n) = EA_KA_n = R_A(K-n)$$



$$m_X(t) = EX(t) = \sum_{K=-\infty}^{+\infty} EA_K\,\delta(t-KT_0) = m_A\sum_{K=-\infty}^{+\infty}\delta(t-KT_0) =$$

$$= \underline{m_A\,\mathrm{Rep}_{T_0}\,\delta(t)}$$

$$R_X(t+\tau,t) = EX(t+\tau)X(t) = E\sum_{K=-\infty}^{+\infty} A_K\,\delta(t+\tau-KT_0)\sum_{l=-\infty}^{+\infty} A_l\,\delta(t-lT_0) =$$

$$= \sum_K\sum_l \underbrace{EA_KA_l}_{R_A(K-l)}\ \underbrace{\delta(t+\tau-KT_0)\,\delta(t-lT_0)}_{\delta(lT_0+\tau-KT_0)\,\delta(t-lT_0)} =$$

$$= \sum_i \sum_K R_A(i)\,\delta(\tau - iT_0)\,\delta(t-\ell T_0) \longrightarrow$$

$$\xrightarrow{i+\ell} R_X(t+\tau,t) = \left[\sum_{i=-\infty}^{+\infty} R_A(i)\,\delta(\tau-iT_0)\right]\sum_{\ell=-\infty}^{+\infty}\delta(t-\ell T_0) =$$

$$= \left[\sum_{i=-\infty}^{+\infty} R_A(i)\,\delta(\tau-iT_0)\right].\mathrm{rep}_{T_0}\,\delta(t)$$

ملاحظه می‌گردد که $X(t)$ یک فرآیند ساکن دوری به مفهوم وسیع با پریود T_0 است.

$$\xrightarrow{x(f)=F_\tau}\left\{\langle R_X(t+\tau,t)\rangle_t\right\} \rightarrow S_X(f) = F_\tau\left\{\left[\sum_{i=-\infty}^{+\infty} R_A(i)\,\delta(\tau-iT_0)\right].\langle \mathrm{rep}_{T_0}\,\delta(t)\rangle\right\} -$$

$$* \ \langle \mathrm{rep}_{T_0}\,\delta(t)\rangle_t = \frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} \mathrm{rep}_{T_0}\,\delta(t)\,dt = \frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2}\delta(t)\,dt = \frac{1}{T_0}$$

$$\longrightarrow \boxed{S_X(f) = \frac{1}{T_0}\sum_{i=-\infty}^{+\infty} R_A(i)\,e^{-j2\pi f\, i T_0}} \longrightarrow$$ تابعی پریودیک با پریود $f = \frac{1}{T_0}$

2- نکاتی در مورد طیف قدرت و تابع همبستگی

2-1- نکاتی در مورد طیف قدرت

① طیف قدرت در حالت کلی تابعی حقیقی و غیرمنفی است. (یعنی حتی برای فرآیندهای مختلط) در فرآیندهای حقیقی، طیف قدرت تقارن زوج خواهد داشت.

$$S_X(f) = \lim_{T\to\infty} \frac{E|X_T(f)|^2}{2T}$$

سمت اول (حقیقی و غیرمنفی بودن) واضح است.

در فرآیندهای حقیقی:

$$\text{حقیقی } x_T(t) \Longrightarrow X_T(-f) = X_T^*(f)$$: تقارن هرمیتیک

$$\rightarrow S_X(-f) = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}E|X_T(-f)|^2 = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}E|X_T^*(f)|^2 = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}E|X_T(f)|^2 = S$$

اید توجه داشت که در حالت خاص، فرآیند مختلط نیز ممکن است طیف قدرت با تقارن زوج داشته باشد.

② طیف قدرت متقابل در حالت کلی تابعی است مختلط (حتی برای فرآیندهای حقیقی)
در فرآیند های حقیقی، طیف قدرت متقابل دارای تقارن هرمیتیک خواهد بود.

$$S_{XY}(f) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} E X_T(f) Y_T^*(f)$$

در فرآیند های حقیقی:

$$\left.\begin{array}{l} Y_T(-f) = Y_T^*(f) \\ X_T(-f) = X_T^*(f) \end{array}\right\}$$

$$S_{XY}(-f) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} E X_T(-f) Y_T(-f)^* = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} E X_T^*(f) Y_T(f) = \Big[\lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} E X_T(f) Y_T^*(f)$$

$$= S_{XY}^*(f)$$

③ طیف قدرت $(S_X(f))$، تابعی است که چگونگی تقسیم قدرت فرآیند را بین فرکانس های مختلف نشان م
و انتگرال آن کل قدرت را نشان می دهد.

$$P_X = \int S_X(f)\, df$$

④ طیف قدرت متقابل، $S_{XY}(f)$، تابعی است که همبستگی مقدار مؤلفه های فرکانسی موجود د
دو فرآیند را نشان می دهد.

$$S_{XY}(f) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} E X_T(f) Y_T^*(f)$$

همبستگی بین دو متغیر تصادفی زیر را:

$X_T(f) \equiv$ مقدار مؤلفهٔ با فرکانس f موجود در فرآیند X

$Y_T(f) \equiv$ مقدار مؤلفهٔ با فرکانس f موجود در فرآیند Y

و در حالت کلی نامساوی زیر هم برقرار است:

$$|S_{XY}(f)|^2 \leqslant S_X(f) . S_Y(f)$$

که در واقع همان نامساوی شوارتز است که برای دو متغیر تصادفی $X_T(f)$ و $Y_T(f)$ نوشته شده

⑤ در حالت کلی طیف قدرت مجموع دو فرآیند به صورت زیر است:

$$S_{X+Y}(f) = S_X(f) + S_Y(f) + \underbrace{S_{XY}(f) + S_{YX}(f)}_{\text{مزدوج هم}}$$

و در فرآیندهای متعامد داریم:

$$(1)\ S_{XY}(f)=0$$

$$(2)\ S_{(X+Y)}(f) = S_X(f) + S_Y(f)$$

با توجه به:

$$|X_T(f)+Y_T(f)|^2 = |X_T(f)|^2 + |Y_T(f)|^2 + X_T(f)\,Y_T^*(f) + X_T^*(f)\,Y_T(f)$$

قسمت اول واضح می گردد.

در فرآیندهای متعامد:

$$\left.\begin{array}{ll} \text{نماد} & X(\cdot)\perp Y(\cdot) \\ \text{تعریف} & R_{XY}(t,s)=0 \\ & \forall t,s \end{array}\right\} \longrightarrow \underset{\forall t,\tau}{R_{XY}(t+\tau,t)=0} \longrightarrow \underset{\forall t,\tau}{\langle R_{XY}(t+\tau,t)\rangle_t=0} \longrightarrow$$

$$\longrightarrow S_{XY}(f) = F_\tau\{\langle R_{XY}(t+\tau,t)\rangle_t\} = 0 \longrightarrow$$

$$\xrightarrow{\text{قسمت اول}} S_{X+Y}(f) = S_X(f) + S_Y(f) + 0 + 0 = S_X(f) + S_Y(f)$$

Ne

⑥ در حالت کلی طیف قدرت یک فرآیند را می توان به صورت زیر نوشت:

$$S_X(f) = S_{m_X}(f) + S_{\tilde{X}}(f)$$

و در حالت WSS به صورت زیر است:

$$S_X(f) = |m_X|^2\,\delta(f) + S_{\tilde{X}}(f)$$

اثبات:

می دانیم $X(t) = m_X(t) + \tilde{X}(t)$. هر فرآیند رکی با هر تابع یقینی (به عنوان حالت خاص از فرآیند) متعامد است

چرا که:

۳

$$R_{m_X,\tilde{X}}(t,s) = E\,m_X(t)\,\tilde{X}^*(s) = m_X(t)\,\underbrace{E\,\tilde{X}^*(s)}_{0} = 0 \quad ,\forall t,s$$

پس طبق نکته 5 داریم:

$$\boxed{S_X(f) = S_{m_X}(f) + S_{\tilde{X}}(f)}$$

در فرآیند WSS داریم:

$$m_X(t) = m_X\ ,\ S_{m_X}(f) = F_\tau\langle R_{m_X}(t+\tau,t)\rangle_t =$$

$$= F_\tau\langle\underbrace{E\,m_X(t+\tau)\,m_X^*(t)}_{m_X(t+\tau)\,m_X^*(t)}\rangle_t =$$

$$= F_\tau\langle\underbrace{m_X(t+\tau)}_{m_X}\,\underbrace{m_X^*(t)}_{m_X^*}\rangle_t = F_\tau\,|m_X|^2 = |m_X|^2\,\delta(f)$$

پس:

$$\boxed{S_X(f) = |m_X|^2\,\delta(f) + S_{\tilde{X}}(f)}$$

⑦ در فرآیندهای WSS از نبودن تابع ضربه در مبدأ طیف قدرت ($f=0$) می‌توان صفر بودن تابع متوسط

فرآیند را نتیجه گرفت .

اثبات : با توجه به نکتهٔ 6 داریم :

$$S_X(f)= |m_X|^2\delta(f) + S_{\tilde{X}}(f)$$

و چون طیف قدرت ($S_{\tilde{X}}(f)$) تابعی غیر منفی است ، از نبودن تابع $\delta(f)$ در $S_X(f)$ می‌توان نتیجه

$$|m_X|^2=0 \Longrightarrow m_X=0$$

⑧ در دو فرآیند توأماً WSS از نبودن مؤلفهٔ فرکانسی مشترک بین دو فرآیند ، یعنی

$$S_X(f)S_Y(f)=0 \quad , \forall f\in\mathbb{R}$$

می‌توان متعامد و ناهمبستگی دو فرآیند را نتیجه گرفت .

اثبات : نامساوی زیر را داریم :

$$|S_{XY}(f)|^2 \leqslant \underset{\text{در اینجا }(\forall f\in\mathbb{R})}{S_X(f)S_Y(f)=0}$$

$$\longrightarrow |S_{XY}(f)|^2 \leqslant 0 \xrightarrow{\text{مربع اندازه غیرمنفی است}} \left.\begin{matrix} S_{XY}(f)=0 \\ \forall f\in\mathbb{R}\end{matrix}\right\} \xRightarrow{\text{توأماً WSS}} \begin{cases} R_{XY}(\tau)=F^{-1}S_{XY}(f)=0 \\ \forall \tau\in\mathbb{R}\end{cases}$$

$$\longrightarrow \begin{cases} R_{XY}(\tau+t,t)=0 \\ \forall \tau, t\end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} R_{XY}(t,s)=0 \\ \forall t,s\end{cases} \longrightarrow X(\cdot)\perp Y(\cdot)$$

برای اثبات ناهمبستگی کافی است ثابت کنیم که متوسط لااقل یکی از دو فرآیند صفر است .

$$\left.\begin{matrix} S_X(f)S_Y(f)=0 \\ \forall f\in\mathbb{R}\end{matrix}\right\} \xRightarrow{f=0} S_X(0)S_Y(0)=0$$

پس هر دو طیف $S_X(f)$ و $S_Y(f)$ نمی‌توانند در $f=0$ دارای تابع ضربه باشند . پس طبق نکتهٔ 7 لااقل

یکی از دو فرآیند صفر است .

* به همین دلیل است که در عمل غالباً در ابتدا نویز خارج باند را با یک فیلتر حذف می‌کنند و خیالشان راحت ا

با این کار هیچ اطلاعاتی را در مورد سیگنال داخل باند از دست نداده‌اند . البته باید توجه داشت که ناهمبست

فقط به معنی عدم وابستگی خطی است ، نه استقلال کامل و لذا ممکن است بتوان به کمک سیگنال خا

کیفیت سیگنال داخل باند را بهبود بخشید . البته نه با یک پردازشگر خطی (فیلتر خطی) بلکه با یک پردازشگر غیرخط

2-2 - نکاتی در مورد تابع همبستگی

① تابع همبستگی در حالت کلی تابعی است با تقارن هرمیتیک، یعنی

*

$$\begin{cases} R_X^*(t,s) = R_X(s,t) & \text{در حالت کلی} \\ R_X^*(\tau) = R_X(-\tau) & \text{در WSS} \end{cases}$$

ر برای فرآیندهای حقیقی دارای تقارن زوج است، یعنی:

$$\begin{cases} R_X(t,s) = R_X(s,t) & \text{در حالت کلی} \\ R_X(-\tau) = R_X(\tau) & \text{در WSS} \end{cases}$$

② در حالت کلی تابع همبستگی $R_X(t,s)$ به‌ازای $t=s=t_0$ قدرت متغیر تصادفی لحظهٔ t_0 را می دهد و به‌ازای $t=t_1$, $s=t_2$ همبستگی بین متغیرهای تصادفی لحظهٔ t_1 و لحظهٔ t_2 را می دهد.

③ در حالت کلی تابع همبستگی، تابعی nnd است، یعنی

*

$$\begin{cases} \forall g(\cdot) \\ \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} g(t)g^*(s)R_X(t,s)\,dt\,ds \geq 0 \end{cases}$$

* و در صورتی که بین متغیرهای تصادفی فرآیند رابطهٔ خطی نباشد، pd است، یعنی انتگرال فوق

فر هم نخواهد شد.

اثبات:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} g(t)g^*(s)\,E\,X(t)X^*(s)\,dt\,ds = E\int_{-\infty}^{+\infty} g(t)X(t)\,dt\left(\int_{-\infty}^{+\infty} g(s)X(s)\,ds\right)^* =$$

$$= E\left|\int_{-\infty}^{+\infty} g(t)X(t)\,dt\right|^2 \geq 0$$

متوسط غیرمنفی، غیرمنفی است.

گر به‌ازای تابعی مثل $g(t)=h(t)$ انتگرال صفر گردد:

$$E\left|\int_{-\infty}^{\infty} h(t)X(t)\,dt\right|^2 = 0 \Longrightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} h(t)X(t)\,dt = 0 \longrightarrow$$

ه در واقع یک رابطهٔ خطی بین متغیرهای

قادفی فرآیند است.

) در حالت کلی داریم:

$$|R_X(t,s)|^2 \leq R_X(t,t)R_X(s,s)$$

ر فرآیندهای WSS :

$$|R_X(\tau)|^2 \leq R_X^2(0)$$

که در واقع همان نامساوی شوارتز است که برای متغیرهای تصادفی لحظات t را نوشته شده باشد.

شرط $|R_X(\tau)|\leqslant R_X(0)$ نشان می‌دهد که تابع همبستگی فرآیندهای WSS در مبدا $(\tau=0)$ بیشترین مقدا
را دارند.

⑤ در فرآیندهای WSS حقیقی از تساوی $R_X(T_0)=R_X(0)$ می‌توان پریودیک بودن تابع همبستگی ر
نتیجه گرفت. یعنی:

$$R_X(\tau+T_0)=R_X(\tau) \quad \forall \tau\in\mathbb{R}$$

اثبات:

$$R_X(T_0)=|R_X(T_0)|=\left|\int_{-\infty}^{+\infty} S_X(f)\, e^{j2\pi fT_0}df\right| \leqslant \int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{|S_X(f)|}_{S_X(f)}\underbrace{|e^{j2\pi fT_0}|}_{1}df$$

از تساوی دو طرف می‌توان نتیجه گرفت که:

$$\underset{\forall f\in\mathbb{R}}{S_X(f)\, e^{j2\pi fT_0} = |S_X(f)\, e^{j2\pi fT_0}|} \Longrightarrow \begin{cases} S_X(f)\, e^{j2\pi fT_0}=S_X(f) \\ \forall f\in\mathbb{R}\end{cases} \longrightarrow$$

$$\xrightarrow{\text{باتبدیل فوری}} \begin{cases} R_X(\tau+T_0)=R_X(\tau) \\ \forall\tau\end{cases}$$

⑥ در فرآیندهای WSS حقیقی، از پریودیک بودن تابع همبستگی می‌توان پریودیک بودن فرآیند را نتیجه
و بالعکس. یعنی:

$$\left.\begin{matrix} R_X(\tau+T_0)=R_X(\tau) \\ \forall\tau\in\mathbb{R}\end{matrix}\right\} \Longleftrightarrow \left\{\begin{matrix} X(t+T_0)=X(t) \\ \forall t\in\mathbb{R}\end{matrix}\right.$$

اثبات:

$$|X(t+T_0)-X(t)|^2 = 2R_X(0)-2R_X(T_0) = 2\left(R_X(0)-R_X(T_0)\right)$$

در صورتیکه $X(t+T_0)\overset{ms}{=}X(t)$ داریم:

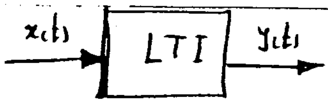
$$) = 2(R_X(0)-R_X(T_0)) \longrightarrow R_X(T_0)=R_X(0) \xrightarrow{\text{نکته ⑤}} \begin{cases} R_X(\tau+T_0)=R_X(\tau) \\ \forall\tau\end{cases}$$

در صورت پریودیک بودن تابع همبستگی داریم:

$$R_X(0+T_0)=R_X(0) \longrightarrow E|X(t+T_0)-X(t)|^2=2(0)=0 \longrightarrow X(t+T_0)\overset{ms}{=}X(t)$$

اصولاً تحلیل فوریه (اینکه سیگنال‌ها یا فرآیندها را به صورت مجموع مؤلفه‌های فرکانسی در نظر گیریم.) برای
سیستم LTI خیلی مفید است. چراکه سیستم خطی است و قانون جمع آثار حاکم است و پاسخ سی
به یک مؤلفهٔ فرکانسی یک مؤلفهٔ فرکانسی با همان فرکانس است. (سیستم فقط مقدار مؤلفه را تغیی

13- رابطهٔ طیف های قدرت



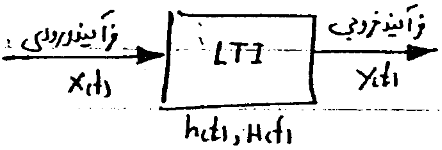
$$y(t) = h(t) * x(t)$$

$$x(t) = e^{j2\pi f_0 t} \longrightarrow y(t) = \int_{\alpha=-\infty}^{+\infty} h(\alpha) e^{j2\pi f_0 (t-\alpha)} d\alpha =$$

$$= \int_{\alpha=-\infty}^{+\infty} h(\alpha) e^{-j2\pi f_0 \alpha} d\alpha \, e^{j2\pi f_0 t} =$$

$$= H(f_0) e^{j2\pi f_0 t}$$

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f) e^{j2\pi f t} df \xrightarrow[\text{جمع آثار}]{} y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{X(f) H(f)}_{Y(f)} e^{j2\pi f t} df \longrightarrow \boxed{Y(f) = X(f) H(f)}$$



داشتیم:

$$* \, R_{YX}(t,s) = h(t) * R_X(t,s) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\alpha) R_X(t-\alpha, s) d\alpha$$

$$* \, R_{XY}(t,s) = R_X(t,s) * h^*(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} R_X(t, s-\beta) h^*(\beta) d\beta$$

$$* \, R_Y(t,s) = h(t) * R_X(t,s) * h^*(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} h(\alpha) h^*(\beta) R_X(\underline{t-\alpha}, \underline{s-\beta}) d\alpha d\beta$$

با $\begin{cases} t \to t+\tau \\ s \to t \end{cases}$ ومتوسط گیری نسبت به t داریم:

$$< R_{YX}(t+\tau, t) >_t = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\alpha) < R_X(t+\tau-\alpha, t) >_t d\alpha$$

$$< R_{XY}(t+\tau, t) >_t = \int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{< R_X(t+\tau, t-\beta) >_t}_{< R_X(t+\beta+\tau, t+\beta-\beta) >_t} h^*(\beta) d\beta$$

$$< R_Y(t+\tau, t) >_t = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} h(\alpha) h^*(\beta) . \underbrace{< R_X(t+\tau-\alpha, t-\beta) >_t}_{< R_X(t+\beta+\tau-\alpha, t+\beta-\beta) >_t} d\alpha d\beta$$

با تبدیل فوریه نسبت به τ داریم:

$$S_{YX}(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\alpha) S_X(f) e^{-j2\pi f \alpha} d\alpha = H(f) S_X(f)$$

$$S_{XY}(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} S_X(f) e^{+j2\pi f \beta} h^*(\beta) d\beta = S_X(f) H^*(f)$$

$$S_Y(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} h(\alpha) h^*(\beta) S_X(f) e^{j2\pi(\beta-\alpha)} d\alpha d\beta = S_X(f) H(f) H^*(f) = S_X(f) . |H(f$$

چنین در سیستم LTI داریم:

$$\begin{cases} S_{YX}(f) = H(f) S_X(f) \\ S_{XY}(f) = S_X(f) H^*(f) \\ S_Y(f) = S_X(f) . |H(f)|^2 \end{cases}$$

3-2- چند مثال

* مثال 1 ، مشتق فرآیند

$y(t) = x'(t) = \delta'(t) * x(t)$

مدل ریاضی :

$h(t) = \delta'(t) \longrightarrow H(f) = j2\pi f$

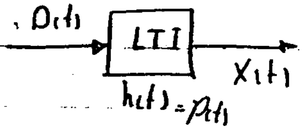
$S_{x'x}(f) = j2\pi f\, S_x(f)$ ، $S_{xx'}(f) = -j2\pi f\, S_x(f)$ $S_{x'}(f) = |j2\pi f|^2 S_x(f)$

$= 4\pi^2 f^2 S_x(f)$

* مثال 2 ، طیف قدرت فرآیند PAM با شکل پالس $p(t)$

$$X(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} A_k\, p(t-kT_0)$$

$$X(t) = \underbrace{\left[\sum_{k=-\infty}^{+\infty} A_k\, \delta(t-kT_0)\right]}_{D(t)} * \underbrace{p(t)}_{h(t)}$$



مدل ریاضی

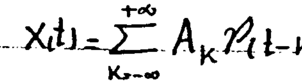
$S_X(f) = S_D(f)\cdot|H(f)|^2 = S_D(f)\cdot|P(f)|^2$

* $S_D(f)$ قبلاً بدست آمده بود. (طیف قدرت PAM مربعی)

New

4- سیستم LTI با تابع تبدیل کسری و فرآیند WSS با طیف کسری

4-1- سیستم LTI با تابع تبدیل کسری



یک مدل ریاضی مناسب برای بررسی سیست

خطی به صورت زیر است :

$y(t) + a_1 y_1'(t) + a_2 y_2''(t) + \dots + a_N y^{(N)}(t) = b_0 x(t) + b_1 x'(t) + \dots + b_M x^{(M)}(t)$

البته این معادله یک توصیف کامل سیستم نیست و برای تکمیل توصیف سیستم، اطلاعات اضافی لازم ا

- این اطلاعات اضافی می‌تواند شرایط اولیه باشد.
- این اطلاعات اضافی می‌تواند علّی بودن سیستم باشد.
- " " " پایداری سیستم باشد.

با تبدیل لاپلاس دو طرفه :

$$\left(\sum_{i=0}^{N} a_i s^i\right) Y(s) = \left(\sum_{K=0}^{M} b_K s^K\right) X(s) \Longrightarrow H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{\sum_{K=0}^{M} b_K s^K}{\sum_{i=0}^{N} a_i s^i}$$

تابع تبدیل متناظر با این مدل یک تابع کسری است. (نسبت دو چند جمله‌ای)

$$h(t) = \mathcal{L}^{-1} H(s) \quad , \quad \text{و ضابطهٔ سیستم} \quad y(t) = h(t) * x(t)$$

البته برای تبدیل لاپلاس دو طرفهٔ معکوس ناحیهٔ تقارب (ROC) لازم است.

$$H(s) = \frac{B_M(s)}{A_N(s)} = \frac{B_M(s)}{\prod_{K=1}^{N}(s-p_K)} \overset{\uparrow}{=} \sum_{n=1}^{N} \frac{r_n}{s-p_n} + \underbrace{\sum_{i=0}^{M-N} c_i s^i}$$

بسط به کسور جزئی (قطب‌های ساده)

در صورتی وجود دارد که $M \geq N$ است.

$$\boxed{r_n = \frac{B_M(p_n)}{\prod_{\substack{K=1 \\ \neq n}}^{N} (p_n - p_K)}}$$

$$\longrightarrow h(t) = \sum_{n=1}^{N} r_n \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s-p_n}\right) + \sum_{i=1}^{M-N} c_i \mathcal{L}^{-1}\{s^i\} .$$

$$\mathcal{L}^{-1}\{s^i\} = \delta^{(i)}(t)$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-p_n}\right\} = \begin{cases} e^{p_n t} . u(t) & \text{جواب راست‌گرا} \\ -e^{p_n t} . u(-t) & \text{جواب چپ‌گرا} \end{cases}$$

در سیستم علّی، ROC سمت راست همهٔ قطب‌ها است و لذا همهٔ جواب‌ها راست‌گرا انتخاب می‌گردد.

در سیستم پایدار، ROC ناحیه‌ای است که شامل محور $j\omega$ باشد.

و از بین دو جواب، جواب نزولی باید انتخاب شود. یعنی:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-p_n}\right\} = \begin{cases} e^{p_n t} u(t) , & \text{اگر } Re\{p_n\} < 0 \ \text{(قطب LHP)} \\ -e^{p_n t} . u(-t) & \text{اگر } Re\{p_n\} > 0 \ \text{(قطب RHP)} \end{cases}$$

با فرض پایداری سیستم را در نظر خواهیم گرفت.

سیستم پایدار وقتی علی خواهد بود که همهٔ قطب هایش در LHP باشند.

که در این صورت :

$$h(t) = \sum_{n=1}^{N} r_n e^{p_n t} . u(t) + \sum_{i=0}^{M-N} c_i \delta^{(i)}(t)$$

در سیستم های پایدار :

پاسخ فرکانسی : $H(f) = H(s)\Big|_{s=j2\pi f} = H(j2\pi f)$

2-4- فرآیند WSS با طیف کسری

تابع کسری تابع مفیدی برای تقریب انواع دیگر توابع است. لذا در عمل غالباً طیف فرآیندها به صورت تابع کسری تقریب زده می شود.

$$S_X(f) = \frac{Q(f)}{P(f)} = K^2 \frac{\prod_{i=1}^{M} (j2\pi f - z_i)(-j2\pi f - z_i^*)}{\prod_{K=1}^{N} (j2\pi f - p_K)(-j2\pi f - p_K^*)}$$

بسط به حاصلضرب عوا

با توجه به حقیقی و غیر

ریشه های صورت , $S = j2\pi f = \begin{cases} z_i \\ -z_i^* \end{cases}$

ریشه های مخرج , $S = j2\pi f = \begin{cases} p_K \\ -p_K^* \end{cases}$

از هر دو ریشه، صورت یا مخرج یکی در LHP و دیگری در RHP خواهد بود.

می توان z_i ها و p_K ها را ریشه های LHP فرض کرد.

$$R_X(\tau) = F^{-1}\{S_X(f)\}$$

$$S_X(f) = \sum_{i=1}^{N} \frac{a_i}{j2\pi f - p_i} + \sum_{j=1}^{N} \frac{a_j^*}{-j2\pi f - p_i^*} + a_0$$

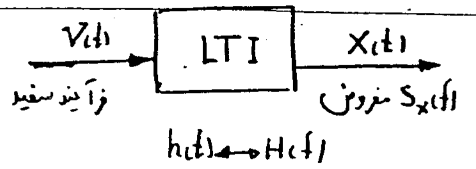
بسط به کس

با فرض م $\longrightarrow a_0 = S_X(\infty) = \begin{cases} 0 & , M < N \\ K^2 & , M = N \end{cases}$

$$\boxed{R_X(\tau) = F^{-1}\{S_X(f)\} = \sum_{i=1}^{N} a_i e^{p_i \tau} u(\tau) + \sum_{i=1}^{N} a_i^* e^{-p_i^* \tau} u(-\tau) + a_0 \delta(\tau)}$$

همان طور که انتظار می رود ، $R_X(\tau) = R_X(-\tau)$

شبیه سازی فرآیند با طیف کسری



$$S_X(f) = S_V(f).|H(f)|^2 = N_0.|H(f)|^2$$

$$\longrightarrow |H(f)|^2 = H(f).H^*(f) = S_X(f) \text{ مفروض } = K^2 \frac{\prod_{i=1}^{M}(j2\pi f - z_i)(-j2\pi f - z_i^*)}{\prod_{K=1}^{N}(j2\pi f - p_K)(-j2\pi f - p_K^*)}$$

در هر زوج عامل مشترک می توان یکی را به اختیار برای $H(f)$ انتخاب کرد. (دیگری را برای $H^*(f)$ کنار گذاشت

برای $H(f)$ جواب های مختلف بدست می آید.

* البته برای علّی بودن سیستم لازم است در مخرج عوامل با ریشهٔ LHp را اختیار کنیم. ؟

البته جواب علّی نیز منحصر به فرد نیست.

یک جواب علّی:

$$H(f) = K \frac{\prod_{i=1}^{M}(j2\pi f - z_i)}{\prod_{K=1}^{N}(j2\pi f - p_K)} \quad , \quad h(t) = F^{-1}\{H(f)\}$$

رابطهٔ شبیه سازی $X(t) = h(t) * V(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\alpha).V(t-\alpha)\, d\alpha$

5- بسط متعامد فرآیند تصادفی

5-1- کلیات

اگر $\{\varphi_n(t)\}$ یک مجموعهٔ متعامد در فاصلهٔ $t \in (a,b)$ باشد یعنی:

$$\int_a^b \varphi_i(t).\varphi_K^*(t)\, dt = \begin{cases} 0 & , K \neq i \\ \int_a^b |\varphi_i(t)|^2 dt = E_i & , K = i \end{cases}$$

می توان هر تابعی مثل $g(t)$ را در فاصلهٔ فوق با روابطی خطی برحسب $\varphi_n(t)$ ها بسط داد. یعنی:

$$\hat{g}(t) = \sum_n a_n \varphi_n(t)$$

و ضرایب بسط را به نحوی انتخاب کرد که متوسط مربع خطای مینیمم گردد.

$$\rho = \int_a^b |g(t) - \hat{g}(t)|^2 dt = \underline{Min}$$

به‌راحتی می‌توان نشان داد که برای این منظور باید:

$$a_n = \frac{1}{E_n}\int_a^b g(t)\,\varphi_n^{*}(t)\,dt$$

وقتی $\rho = 0$ شود، یعنی $(\hat{g}(t) \overset{ms}{=\!=} g(t))$ می‌توان ثابت کرد که دیگر هیچ تابعی وجود ندارد که بر $\varphi_n(t)$ ع
عمود باشد، ولی جزء مجموعه فوق منظور نشده باشد. یعنی مجموعهٔ فوق یک مجموعهٔ کامل متعامد در فا
$t\in(a,b$ نامیده می‌شود. چنین بسطی را می‌توان در مورد فرآیندها نیز بکار برد.

$$\hat{X}(t) = \sum_n C_n \varphi_n(t)$$

$$C_n = \frac{1}{E_n}\int_a^b X(t)\,\varphi_n^{*}(\alpha)\,d\alpha$$

با چنین بسطی فرآیند که در فاصلهٔ فوق دارای تعداد غیرقابل شمارشی متغیر تصادفی است، به یک رش
متغیر تصادفی $\{C_n\}$ تبدیل می‌گردد.

اگر فرآیند نرمال باشد، ضرایب نیز یک رشته متغیر تصادفی توأماً نرمال خواهند بود.

ممکن است بتوان توابع متعامد را بدقسمی اختیار کرد که بسیاری از ضرایب واریانس خیلی کوچکی
داشته باشند، بطوری که بتوان آنها را یک مقدار ثابت فرض کرد.

یعنی یک توصیف تحلیلی تقریبی برای فرآیند بدست آورد.

می‌توان توابع متعامد را بنقسمی انتخاب کرد که ضرایب بسط ناهمبسته شوند و در نرمال، توأماً مست

2-5 بسط سری فوریه فرآیند WSS پریودیک

تابع همبستگی پریودیک با پریود T_0 درنظر می‌گیریم:

$$R_X(\tau + T_0) = R_X(\tau) \qquad \forall \tau \in R$$

بسط به سری فو

$$\begin{cases} R_X(\tau) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \lambda_n e^{jn\omega_0 t}, & \omega_0 = 2\pi f_0 = \frac{2\pi}{T_0} \\ \lambda_n = \frac{1}{T_0}\int_{T_0} R_X(\alpha) e^{-jn\omega_0\alpha} d\alpha \end{cases}$$

در واقع مجموعهٔ توابع متعامد $\{e^{jn\omega_0 t}\}_{n=-\infty}^{+\infty}$ برای توابع پریودیک با پریود T_0، یک مجموعهٔ کامل متعامد است.

$$\int_{-T_0/2}^{T_0/2} \varphi_n(t)\varphi_K^{*}(t)\,dt = \int_{-T_0/2}^{T_0/2} e^{j(n-K)\omega_0 t}\,dt =$$

$$= T_0\,\text{Sinc}(n-K) = \begin{cases} 0, & n \neq K \\ E_n = T_0, & n = K \end{cases}$$

بسط سری فوریهٔ فرآیند

$$\begin{cases} \hat{X}(t) = \sum_n C_n e^{jn\omega_0 t} \\ C_n = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(\alpha) e^{-jn\omega_0 \alpha} d\alpha \end{cases}$$

خواص بسط سری فوریهٔ فوق :

① کلیهٔ ضرایب بسط متعامد و ناهمبسته خواهد بود.

② در حالت کلی : $\hat{X}(t) \overset{ms}{=} X(t)$

① اثبات : $$E C_n C_m^* = \frac{1}{T_0^2} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} \underbrace{E x(\alpha) x^*(\beta)}_{R_x(\alpha-\beta)} e^{-jn\omega_0 \alpha} e^{jn\omega_0 \beta} d\alpha d\beta =$$

$$= \int_{\beta=-T_0/2}^{T_0/2} \frac{1}{T_0^2} \left(\int_{\alpha=-T_0/2}^{T_0/2} R_x(\alpha-\beta) e^{-jn\omega_0(\alpha-\beta)} d\alpha \right) e^{j(m-n)\omega_0 \beta} d\beta$$

$$\alpha-\beta=\tau \nearrow = \frac{1}{T_0^2} \int_{\beta=-T_0/2}^{T_0/2} \underbrace{\left(\int_{\alpha=-T_0/2}^{T_0/2} R_x(\tau) e^{-jn\omega_0 \tau} d\tau \right)}_{T_0 \lambda_n} e^{j(m-n)\omega_0 \beta} d\beta =$$

$$= \frac{\lambda_n}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} e^{-j(n-m)\omega_0 \beta} d\beta = \lambda_n \operatorname{Sinc}(n-m) = \begin{cases} 0 & , n \neq m \\ \lambda_n & , n = m \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} C_n \perp C_m \\ \forall n \neq m \\ E|C_n|^2 = \lambda_n \end{cases} \longrightarrow$$ حال کافی است ثابت کنیم متوسط یکی از آنها صفر است.

$$\rightarrow E_{C_n} = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} \underbrace{E x(\alpha)}_{m_x} e^{-jn\omega_0 \alpha} d\alpha = m_x \operatorname{Sinc}(n) = \begin{cases} 0 & , n \neq 0 \\ m_x & , n = 0 \end{cases} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow E C_n = 0 \quad , n \neq 0$$

$E C_0 = m_x$ ——→ فقط یکی می تواند C_0 باشد

پس از تعامد، ناهمبستگی هم نتیجه می گردد.

یادآوری :

$$R_X(\tau)=\sum_{i=-\infty}^{+\infty}\lambda_i e^{j\omega_0 i\tau} \qquad \omega_0=2\pi f_0=\frac{2\pi}{T_0} \Longrightarrow \begin{cases} \hat{X}(t)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n e^{jn\omega_0 t} \\ C_n=\frac{1}{T_0}\int_{\alpha=-T_0/2}^{T_0/2} X(\alpha)e^{-jn\omega_0\alpha}\,d\alpha \end{cases}$$

نکات :

$P_{C_n}=\text{var}(C_n)=\lambda_n,\ \forall n\neq 0$ / و $P_{C_0}=\text{var}(C_0)+m_X^2=\lambda_0$ / $C_n\perp C_m$ / $C_n\perp C_m$ ① $\forall n\neq m$

اثبات ② :

$$E|X(t)-\hat{X}(t)|^2=R_X(t,t)+R_{\hat{X}}(t,t)-R_{\hat{X}X}(t,t)-R_{X\hat{X}}(t,t)$$

ز ایستایی : $\longrightarrow R_X(t,t)=R_X(0)=\sum_{i=-\infty}^{+\infty}\lambda_i$

$$R_{\hat{X}}(t,t)=E\hat{X}(t)\hat{X}^*(t)=E\sum_{n=-\infty}^{+\infty}C_n e^{jn\omega_0 t}\sum_{m=-\infty}^{+\infty}C_m^* e^{-jm\omega_0 t}=$$

$$=\sum_n\sum_m E C_n C_m^*\cdot e^{j(n-m)\omega_0 t}=$$

$$\overset{m=n}{=}\sum_n(0+\underbrace{EC_nC_n^*}_{\lambda_n}\underbrace{e^{j(n-n)\omega_0 t}}_{1}+0)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\lambda_n$$

$$R_{\hat{X}X}(t,t)=E\hat{X}(t)X^*(t)=\sum_n C_n e^{jn\omega_0 t}X^*(t)=\sum_n\frac{1}{T_0}\int_{\alpha=-\frac{T_0}{2}}^{T_0/2}X(\alpha)e^{-jn\omega_0\alpha}d\alpha\, e^{jn\omega_0 t}X^*(t)=$$

$$=\frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2}\sum_n \underbrace{EX(\alpha)X^*(t)}_{R_X(\alpha-t)}e^{-jn\omega_0(\alpha-t)}d\alpha \overset{\alpha=t+\beta}{=} \sum_n\frac{1}{T_0}\int_{-t-\frac{T_0}{2}}^{-t+T_0/2}R_X(\beta)e^{-jn\omega_0\beta}d\beta$$

$$=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\lambda_n$$

$$\lambda_n=\frac{1}{T_0}\int_{T_0}R_X(\alpha)e^{-jn\omega_0\alpha}d\alpha$$

$$R_{X\hat{X}}(t,t)=R_{\hat{X}X}^*(t,t)=\Big(\underbrace{\underbrace{\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\lambda_n}_{R_X(0)}}_{E|X(t)|^2}\Big)^*=R_X(0)$$

دارد؟!

$$\Longrightarrow E|X(t)-\hat{X}(t)|^2=0 \Longrightarrow \hat{X}(t)\overset{ms}{=}X(t)$$

3-5- بسط $KL \equiv$ Karhunen_Loeve

در بسط KL، به عنوان توابع متعامد، از توابع ویژهٔ تابع همبستگی فرآیند استفاده می‌گردد.

* نکاتی در مورد توابع ویژهٔ تابع همبستگی:

① این توابع جواب‌های غیرصفر معادلهٔ انتگرالی زیر است:

$$\int_a^b R_x(t,s)\,\varphi(s)\,ds = \lambda\,\varphi(t) \quad , \forall t\in[a,b]$$

جواب همبستگی $\varphi(t)$ را تابع ویژه می‌نامند.

اگر تابع $\varphi(t)$ در رابطه صدق کند، مضربی از آن $(K\varphi(t))$ نیز صدق خواهد کرد. می‌توان ضریب ثابت K را به قسمی اختیار کرد که توابع ویژه، نرمالیزه شوند، یعنی:

$$\int_a^b |\varphi(t)|^2\,dt = 1$$

این معادلهٔ انتگرالی شبیه معادلهٔ ماتریسی زیر است:

$$A\underline{v} = \lambda\underline{v}$$

که جواب‌های غیرصفر آن را بردارهای ویژه می‌نامند.

در اینجا نیز معادلهٔ انتگرالی به‌ازای بعضی از مقادیر λ موسوم به مقادیر ویژه، دارای جواب غیرصفر است.

② در حالت کلی مقادیر ویژهٔ تابع همبستگی، اعدادی حقیقی و غیرمنفی می‌باشند و اگر رابطهٔ خطی بین متغیرهای تصادفی فرآیند وجود نداشته باشد، مقدار ویژهٔ صفر هم نخواهیم داشت.

③ در حالت کلی، تعداد مقادیر ویژه قابل شمارش است و تعداد توابع ویژهٔ متناظر با یک مقدار ویژهٔ ثابت می‌تواند بیش از یک عدد باشد ولی در هر حال این تعداد محدود خواهد بود.

④ به ازای $\lambda_i \neq \lambda_j$، داریم:

$$\int_a^b \varphi_i(t)\,\varphi_j^*(t)\,dt = 0$$

* یعنی توابع ویژهٔ مربوطه متعامد خواهند بود. و در حالتی که به‌ازای یک مقدار ویژهٔ واحد، چند تابع ویژه داریم، این توابع ویژه را نیز می‌توان متعامد اختیار کرد.

⑤ با احتساب کلیهٔ توابع ویژهٔ مستقل از هم، یک مجموعهٔ اُرتونرمال کامل $\{\varphi_n(t)\}$ برای فاصلهٔ مورد نظر $\in [a,b]$ تشکیل می‌گردد.

⑥ اگر تابع همبستگی پیوسته باشد، توابع ویژه نیز پیوسته خواهند بود و رابطهٔ زیر موسوم به رابطهٔ مرسر (Mercer) نیز برقرار است:

$$R_x(t,s) = \sum_n \lambda_n\,\varphi_n(t)\,\varphi_n^*(s) \quad , \forall t,s\in[a,b]$$

رابطهٔ مرسر

*در بسط KL:

$$\begin{cases} \hat{X}(t) = \sum_n C_n \varphi_n(t) \quad , t \in [a,b] \\ C_n = \int_a^b X(\alpha) \cdot \varphi_n^*(\alpha) d\alpha \end{cases}$$

*خواص ac

① در حالت کلی ضرایب بسط متعامد خواهند بود.

اثبات:

$$E C_n C_m^* = E \int_a^b X(\alpha) \varphi_n^*(\alpha) d\alpha \times \int_a^b X^*(\beta) \varphi_m(\beta) d\beta = \int_a^b \int_a^b \underbrace{E X(\alpha) X^*(\beta)}_{R_X(\alpha,\beta)} \varphi_n^*(\alpha) \varphi_m(\beta) d\alpha d\beta$$

$$= \int_{\alpha=a}^b \left(\int_{\beta=a}^b R_X(\alpha,\beta) \varphi_m(\beta) d\beta \right) \varphi_n^*(\alpha) d\alpha =$$

$$= \lambda_m \int_a^b \varphi_m(\alpha) \varphi_n^*(\alpha) d\alpha = \begin{cases} 0 & , \quad m \neq n \\ \lambda_m & , \quad m = n \end{cases}$$

$$\longrightarrow \boxed{\begin{array}{c} C_n \perp C_m , \forall n \neq m \\ \text{و} \\ E|C_n|^2 = \lambda_n \end{array}}$$

② در حالت کلی داریم:

$$\hat{X}(t) = X(t) \quad , t \in [a,b]$$

$$E|X(t) - \hat{X}(t)|^2 = R_X(t,t) + R_{\hat{X}}(t,t) - R_{\hat{X}X}(t,t) - R_{X\hat{X}}(t,t)$$

$$R_X(t,t) = \sum_n \lambda_n |\varphi_n(t)|^2 , t \in [a,b]$$

ابطه

$$R_{\hat{X}}(t,t) = E \hat{X}(t) \hat{X}^*(t) = E \sum_n C_n \varphi_n(t) \sum_m C_m^* \varphi_m^*(t) = \sum_n \sum_m E C_n C_m^* \varphi_n(t) \varphi_m^*(t) =$$

$$n \longrightarrow = \sum_n [0 + \underbrace{E|C_n|^2}_{\lambda_n} \cdot \varphi_n(t) \varphi_n^*(t) + 0] = \sum_n \lambda_n \cdot |\varphi_n(t)|^2$$

$$R_{\hat{X}X}(t,t) = E \hat{X}(t) X^*(t) = E \sum_n C_n \varphi_n(t) X^*(t) = \sum_n \left(\int_a^b X(\alpha) \varphi_n^*(\alpha) d\alpha \right) \varphi_n(t) X^*(t) =$$

$$= \sum_n \int_a^b \underbrace{R_X(\alpha,t)}_{R_X^*(t,\alpha)} \varphi_n^*(\alpha)\, \varphi_n(t)\,dt = \sum_n \left(\int_a^b R_X(t,\alpha)\varphi_n(\alpha)\,d\alpha \right)^* \varphi_n(t) =$$

$$= \sum_n (\underbrace{\underbrace{\lambda_n \varphi_n(t)}_{\lambda_n^* \varphi_n^*(t)}}_{\lambda_n})^* \varphi_n(t) = \sum_n \lambda_n |\varphi_n(t)|^2 \quad \checkmark$$

$,b]$

$$R_{X\hat{X}}(t,t) = R^*_{\hat{X}X}(t,t) = \left(\sum_n \lambda_n |\varphi_n(t)|^2\right)^* = \sum_n \lambda_n |\varphi_n(t)|^2$$

$$\Longrightarrow \underset{t\in[a,b]}{E|X(t)-\hat{X}(t)|^2 = 0} \Longrightarrow \hat{X}(t) = X(t) \quad , t\in[a,b]$$

③ اگر متوسط فرآیند صفر باشد (یا اینکه بسط را برای فرآیند مرکزی $\tilde{X}(t)$ در نظر بگیریم.) متوسط ضرایب بسط نیز صفر خواهد بود. و از تعامد ضرایب، ناهمبستگی ضرایب نیز نتیجه خواهد شد:

$$E C_n = E \int_a^b X(\alpha)\varphi_n^*(\alpha)\,d\alpha = \int_a^b \underbrace{m_X(\alpha)}_{0} \varphi_n^*(\alpha)\,d\alpha = 0$$

④ اگر فرآیند نرمال باشد، به دلیل خطی بودن بسط، ضرایب نیز توأماً نرمال خواهند بود. و در صورت صفر بودن متوسط فرآیند، ضرایب یک رشته متغیر تصادفی توأماً نرمال و مستقل خواهد بود.

مثال: بسط KL فرآیند وینر در فاصلهٔ $t\in[0,T_0]$

$X(\cdot) \sim N(0, N_0 \mathrm{Min}(t,s))$

معادلهٔ انتگرالی: $\int_0^{T_0} N_0 \mathrm{Min}(t,s)\varphi(s)\,ds = \lambda\varphi(t) \quad , t\in[0,T_0]$

با d/dt داریم:

$\mathrm{Min}(t,s) = t\,u(s-t) + s\,u(t-s)$.

$$\frac{\partial}{\partial t}\mathrm{Min}(t,s) = u(s-t) + 0$$

$$\downarrow \longrightarrow \int_0^{T_0} N_0\, u(s-t)\varphi(s)\,ds = \lambda\varphi'(t) \quad , t\in[0,T_0]$$

$$\xrightarrow{d/dt} \int_0^{T_0} N_0 (-\delta(s-t))\varphi(s)\,ds = \lambda\varphi''(t) \quad , t\in[0,T_0] \longrightarrow$$

$$\longrightarrow -N_0\,\varphi(t) = \lambda\,\varphi''(t) \longrightarrow \varphi''(t) + \frac{N_0}{\lambda}\varphi(t) = 0 \longrightarrow$$
$$t \in [0, T_0]$$

$$\Longrightarrow \varphi(t) = a\cos\left(\sqrt{\frac{N_0}{\lambda}}\,t\right) + b\sin\left(\sqrt{\frac{N_0}{\lambda}}\,t\right)$$

طبق معادلهٔ انتگرالی : $\int_0^{T_0} N_0 \operatorname{Min}(0,s)\,\varphi(s)\,ds = \lambda\,\varphi(0) \longrightarrow \varphi(0) = 0 \Rightarrow \boxed{a=0}$

$$\Longrightarrow \varphi(t) = b\sin\left(\sqrt{\frac{N_0}{\lambda}}\,t\right)$$

طبق مشتق معادلهٔ انت : $\int_0^{T_0} N_0 \underbrace{u(s-T_0)}_{0}\,\varphi(s)\,ds = \lambda\,\varphi'(T_0) \longrightarrow \varphi'(T_0) = 0 \Longrightarrow$

$$\Rightarrow b\sqrt{\frac{N_0}{\lambda}}\cos\left(\sqrt{\frac{N_0}{\lambda}}\,T_0\right) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{\frac{N_0}{\lambda}}\,T_0 = (2n-1)\frac{\pi}{2} \longrightarrow \\ b = 0 \Longrightarrow \cancel{\varphi(t)=0 \text{ جواب}} \end{cases}$$

تابع ویژه نیست

$$\longrightarrow \sqrt{\frac{N_0}{\lambda}}\,T_0 = (2n-1)\frac{\pi}{2} \hookrightarrow \boxed{\lambda_n = \frac{4N_0T_0^2}{(2n-1)^2\pi^2} \quad n = 1,2,3,\dots}$$

پس برای جواب غیرصفر لازم است :

پس فقط به ازای مقادیر فوق (مقادیر ویژه) جواب غیرصفر داریم .

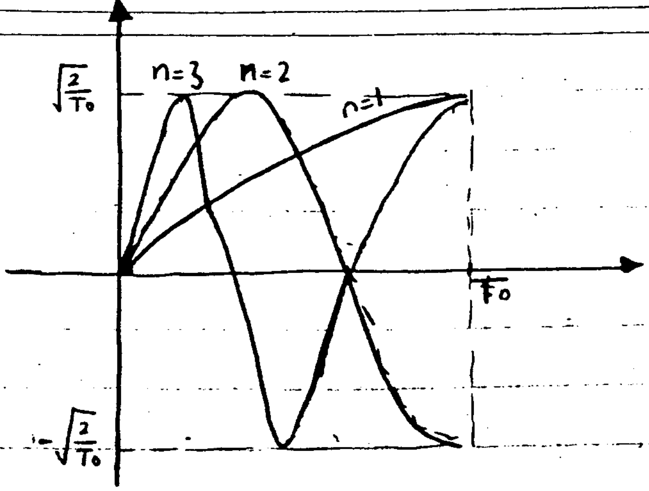
پس :

$$\varphi_n(t) = b\sin\left((2n-1)\frac{\pi}{2}\cdot\frac{t}{T_0}\right)$$

نرمالیزه ک : $\int_0^{T_0} |\varphi_n(t)|^2\,dt = 1 \hookrightarrow \boxed{b = \sqrt{\frac{2}{T_0}}}$

$$\longrightarrow \boxed{\varphi_n(t) = \sqrt{\frac{2}{T_0}}\sin\left((2n-1)\frac{\pi}{2}\cdot\frac{t}{T_0}\right) \quad n = 1,2,3,4,\dots}$$

رسم توابع ویژه :



پس :

$$\hat{X}(t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sqrt{\frac{2}{T_0}} \sin\left((2n-1)\frac{\pi}{2}\cdot\frac{t}{T_0}\right) , \quad t\in[0,T_0]$$

$$C_1 \perp\!\!\!\perp C_2 \perp\!\!\!\perp C_3 \perp\!\!\!\perp \cdots$$

$$\left.\begin{array}{l} C_n \sim N(0,\lambda_n) \\ \lambda_n = \dfrac{4N_0T_0^2}{(2n-1)^2\pi^2} \end{array}\right\} \longrightarrow$$

با افزایش n، واریانس ← 0
یعنی از یه جایی به بعد می‌شه از جملات صرف نظر کرد.

---

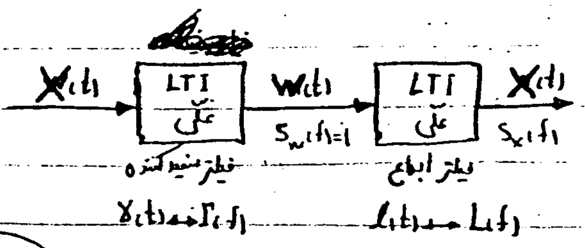
6 - بسط فرآیندهای WSS برحسب فرآیند ابداعی

1-6- تعریف فرآیند ابداع و شرط پالی‌وینر

رآیند ابداع (Innovation): فرآیندی است سفید و نرمالیزه که با فرآیند اصلی، به طور خطی و علّی معادل اس
عنی معلوم بودن هر یک، دیگری را با رابطه‌ای خطی و علّی مشخص می‌کند.

فرآیند ابداع $W(t)$

$S_W(f) = 1$



روابط خطی و علّی :

$$W(t) = \int_{\alpha=-\infty}^{t} \gamma(t-\alpha) X(\alpha)\, d\alpha$$

$$X(t) = \int_{\alpha=-\infty}^{t} l(t-\alpha) W(\alpha)\, d\alpha$$

مهم

* شرایط فیلترها:

$$* \ \Gamma(f).L(f)=1 \Longrightarrow \boxed{\Gamma(f)=\frac{1}{L(f)}}$$

$$* \ S_x(f)=S_w(f).|L(f)|^2 \Longrightarrow \boxed{S_x(f)=|L(f)|^2} \longrightarrow \boxed{|L(f)|=\sqrt{S_x(f)}}$$

✓ برای تابع اندازهٔ فوق باید فازی در نظر گرفت که آن را علّی کند. (مهم) ضمناً فازش هم باید علّی باشد.

شرط پالی وینر: شرط لازم و کافی برای اینکه برای تابع اندازهٔ $|H(f)|$ بتوان تابع فازی $\beta(f)$ پیدا کرد که حاصل را $H(f)=|H(f)|e^{j\beta(f)}$ یک فیلتر علّی کند، (یعنی $h(t)=0, \ for \ \forall t<0$) عبارت است از:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\ln|H|}{1+f^2}df \neq \pm\infty$$

* وقتی شرط پالی وینر برقرار است، برای $\beta(f)$ جواب های مختلفی می‌توان پیدا کرد. چراکه اگر $\beta(f)$ یک جواب باشد و $\beta_a(f)$ فاز یک سیستم تمام‌گذر علّی باشد، $\beta(f)+\beta_a(f)$ نیز یک جواب خواهد بود. چراکه

$$\left.\begin{array}{l} |H|e^{j(\beta(f)+\beta_a(f))}=\underbrace{H(f)}_{\text{علّی}}e^{j\beta_a(f)} \\ H_a(f)=\underbrace{|H_a|}_{1}e^{j\beta_a(f)} \end{array}\right\} \Longrightarrow |H|e^{j(\beta(f)+\beta_a(f))}=\underbrace{H(f)}_{\text{علّی}}.\underbrace{H_a(f)}_{\text{علّی}}$$

چرا که کاسکاد دو سیستم علّی، علّی است.

— در بین جواب ها فقط یک جواب وجود دارد که هم $H(f)$ و هم وارون آن را علّی می‌نماید. این جواب را جواب می‌نیمم فاز گویند.

New

شرط پالی وینر:

$$\text{شرط}: \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\ln|L(f)|}{1+f^2}df \neq \pm\infty$$

برحسب طیف قدرت:

$$\text{شرط}: \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\ln S_x(f)}{1+f^2}df \neq \pm\infty$$

* فرآیندهایی که طیف قدرت آن‌ها در رابطهٔ فوق صدق می‌کند را فرآیند عادی Regular گویند. چنین فرآ دارای فرآیند ابداع می‌باشند، فرآیند سفید و نرمالیزه‌ای که منحصر به فرد بوده و به طور خطی و علّی با فرآیند اصلی معا

$$X(t)=W(t)*l(t)=\int_{\alpha=-\infty}^{t}w(\alpha)\,l(t-\alpha)\,d\alpha$$

$$W(t)=X(t)*\gamma(t)=\int_{\alpha=-\infty}^{t}X(\alpha)\,\gamma(t-\alpha)\,d\alpha$$

بطهٔ اول : $$X(t)=\int_{\alpha=-\infty} w(\alpha)\ell(t-\alpha)\,d\alpha$$

امی توان [redacted] بسط خطی برای متغیرهای تصادفی فرآیند X برحسب متغیرهای تصادفی فرآیند ابداعش

عیین W داشت .

ر بسط KL نیز داشتیم: $X(t)=\sum_n C_n\varphi_n(t)$, $t\in[a,b]$,

ر هر دو بسط، ضرایب بسط $\{w(\alpha)\}_{\alpha=-\infty}^{+\infty}$, $\{C_n\}$ متغیرهای تصادفی متعامدی باشند.

و هر دو بسط خطی هستند به طوری که در صورت نرمال بودن فرآیند، ضرایب بسط نیز توأماً نرمال خواهند بود.

6-2- روش کلی تعیین فیلترهای $L(f)$ و $\Gamma(f)$ برای فرآیند با طیف کسری

$$S_X(f)=\frac{Q(f)}{P(f)}$$ طیف کسری

$$=K^2\frac{\prod_{i=1}^{M}(j2\pi f-z_i)(-j2\pi f-z_i^*)}{\prod_{n=1}^{N}(j2\pi f-p_n)(-j2\pi f-p_n^*)}=L(f)L^*(f)$$

به دلیل حقیقی و غیر

از کل تجزیه‌ش

باید $L(f)$ علی باشد، یعنی از عوامل مخرج، عوامل با ریشه‌های LHP ($j2\pi f-p_n$ ها) را اختیار کنیم.

باید $\Gamma(f)=\frac{1}{L(f)}$ علی باشد، یعنی از عوامل صورت، عوامل با ریشه های LHP ($j2\pi f-z_i$ ها) را اختیار کنیم.

[redacted]

یعنی انتخاب منحصر به فرد است (جواب می‌نیمم فاز).

$$L(f)=K\frac{\prod_{i=1}^{M}(j2\pi f-z_i)}{\prod_{n=1}^{N}(j2\pi f-p_n)}$$ و $$\Gamma(f)=\frac{1}{K}\frac{\prod_{n=1}^{N}(j2\pi f-p_n)}{\prod_{i=1}^{M}(j2\pi f-z_i)}$$

مثال: بسط فرآیند سیگنال تلگرافی برحسب فرآیند ابداعش

$$R_X(\tau)=e^{-2\lambda|\tau|}$$

$$S_X(f)=\frac{4\lambda}{4\lambda^2+4\pi^2f^2}=\frac{(\sqrt{4\lambda})^2}{(2\lambda-j2\pi f)(2\lambda+j2\pi f)}=L(f)L^*(f)$$

جواب می‌نیمم‌فا

$$\xrightarrow{}\begin{cases}L(f)=\dfrac{\sqrt{4\lambda}}{2\lambda+j2\pi f}\\[2ex]\Gamma(f)=\dfrac{2\lambda}{\sqrt{4\lambda}}+\dfrac{j2\pi f}{\sqrt{4\lambda}}\end{cases}\qquad\begin{cases}\ell(t)=\sqrt{4\lambda}\,e^{-2\lambda t}u(t)\\[2ex]\gamma(t)=\sqrt{\lambda}\,\delta(t)+\dfrac{1}{\sqrt{4\lambda}}\delta'(t)\end{cases}$$

$$\begin{cases} x(t)=w(t)*l(t) \\ w(t)=x(t)*\gamma(t) \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x(t)=\int_{\alpha=-\infty} w(\alpha)e^{-2\lambda|t-\alpha|}\,d\alpha \\ w(t)=\sqrt{\lambda}\,x(t)+\frac{1}{\sqrt{4\lambda}}x'(t) \end{cases}$$

مبحث چهارم (فرآیندهای باباند محدود و فرآیندهای گسسته زمان)

1- فرآیندهای WSS با باند محدود و برخی خصوصیات آن

تعریف ــــ فرآیند را با باند محدود به $|f|<W$ گوئیم هرگاه: $S_x(f)=0\ ,\ \forall |f|\geqslant W$

به تعبیری هرگاه فرآیند هیچ مؤلفهٔ فرکانسی درخارج باند فوق نداشته باشد.

* برخی خصوصیات چنین فرآیندی عبارت است از:

① دارای سرعت تغییرات محدودی است و هرچه W کمتر باشد، سرعت تغییرات فرآیند کمتر است

② دارای تابع همبستگی تحلیلی است. یعنی تابعی که همهٔ مشتقات آن پیوسته است.

③ با یک رشته از متغیرهای تصادفی معادل است.

④ قابل پیشگوئی است.

1-1- محدود بودن سرعت تغییرات

$$E|x(t+\tau)-x(t)|^2 = E|y(t)|^2 = R_y(0) = P_y$$

$$y(t)=x(t+\tau)-x(t) \xrightarrow{H(X)\ OK} y(t):WSS$$

$$= h(t)*x(t) \xrightarrow{\text{که}} h(t)=\delta(t+\tau)-\delta(t) \Longrightarrow \underline{H(f)=e^{j2\pi f\tau}-1}$$

$$P_y=\int_{-\infty}^{+\infty}S_y(f)df=\int_{-\infty}^{+\infty}S_x(f).|H(f)|^2df=\int_{-\infty}^{+\infty}S_x(f).|e^{j2\pi f\tau}-1|^2df=$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}4S_x(f).\sin^2(\pi f\tau)df=4\int_{-W}^{W}S_x(f).\underbrace{\sin^2(\pi f\tau)}_{\pi^2f^2\tau^2\operatorname{sinc}^2(f\tau)}df=$$

$$=4\pi^2\tau^2\int_{-W}^{+W}f^2S_x(f)\operatorname{sinc}^2(f\tau)df \underset{\substack{f^2\leqslant W^2 \\ \operatorname{sinc}^2(f\tau)\leqslant 1}}{\leqslant} 4\pi^2\tau^2\int_{-W}^{+W}W^2S_x(f)df \longrightarrow$$

$$\longrightarrow E|x(t+\tau)-x(t)|^2\leqslant 4\pi^2\tau^2W^2\int_{-W}^{+W}S_x(f)df \longrightarrow$$

پس:

$$\longrightarrow \boxed{E\left|\frac{x(t+\tau)-x(t)}{\tau}\right|^2\leqslant 4\pi^2W^2P_x}$$

پس اگر قدرت فرآیند P_X محدود باشد، سمت چپ ولذا سرعت تغییرات فرآیند محدود خواهد

و هرچه W کمتر باشد، سرعت تغییرات هم کمتر خواهد بود.

1-2- تحلیلی بودن تابع همبستگی

$$R_X(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} S_X(f)\, e^{j2\pi f\tau}\, df \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \frac{d^n}{d\tau^n} R_X(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} (j2\pi f)^n S_X(f)\, e^{j2\pi f\tau}\, df \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \left|\frac{d^n}{d\tau^n} R_X(\tau)\right| = \left|\int_{-\infty}^{+\infty} (j2\pi f)^n S_X(f)\, e^{j2\pi f\tau}\, df\right| \leqslant \int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{|j2\pi f|^n}_{|2\pi f|^n} . \underbrace{|S_X(f)|}_{S_X(f)} . \underbrace{|e^{j2\pi f\tau}|}_{1}\, df$$

$$= \int_{-W}^{W} |2\pi f|^n . S_X(f)\, df \leqslant$$

$$\underset{|f|<W}{\leqslant} (2\pi W)^n \int_{-W}^{W} S_X(f) = (2\pi W)^n P_X$$

پس:

$$\left|\frac{d^n}{d\tau^n} R_X(\tau)\right| \leqslant (2\pi W)^n P_X$$

اگر قدرت فرآیند محدود باشد، سمت راست ولذا سمت چپ مقدار محدودی خواهد داشت.

لذا، کلیهٔ مشتقات $R_X(\tau)$ لزوماً پیوسته هستند، چراکه در ناپیوستگی یکی از مشتقات، مشتق بعد به ضربه تبدیل خواهد شد که تابعی بی کران است.

1-3- قضیهٔ نمونه برداری

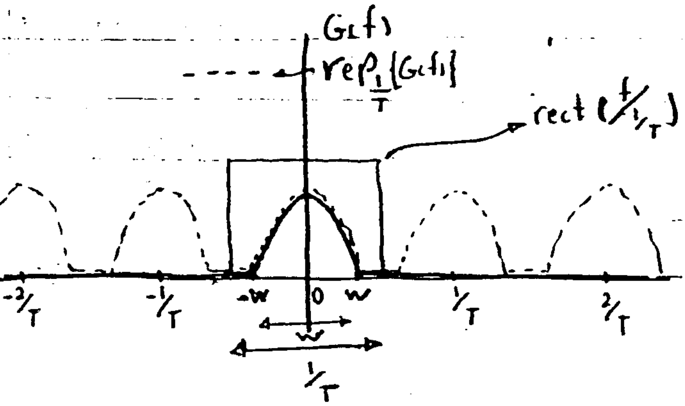
الف) مروری بر قضیهٔ نمونه برداری در سیگنال های یقینی

$g(t) \longleftrightarrow G(f)$ تابع یقینی

$$* \; G(f)=0 \;;\; \forall |f|>W \Longrightarrow g(t) = \sum_{K=-\infty}^{+\infty} g(KT)\, \mathrm{sinc}\Big(\frac{t-}{T}$$

بعبارت معادل، یک سیگنال باباند محدود $|f|<W$ با تعداد $2W$ نمونه در ثانیه اش، کاملاً توصیف می شود.

یک روش اثبات:



با توجه به شکل و با فرض اینکه $2W \leqslant 1/T$ باشد، می توان نوشت:

$$\ldots \quad (rep_{1/T}\, G(f)).\, rect(fT) = G$$

$$\Downarrow$$

ص بعد

$$\longrightarrow g(t) = T\,\mathrm{Comb}_T\, g(t) * \frac{1}{T}\,\mathrm{Sinc}(\frac{t}{T}) = \sum_{K=-\infty} g(KT)\,\delta(t-KT) * \mathrm{Sinc}(\frac{t}{T}) =$$

$$= \sum_{K=-\infty}^{+\infty} g(KT).\,\mathrm{Sinc}(\frac{t-KT}{T}) \Longrightarrow$$

$$\longrightarrow \boxed{g(t) = \sum_{K=-\infty}^{+\infty} g(KT).\,\mathrm{Sinc}(\frac{t-KT}{T})}$$

این رابطه به‌وضوح نشان می‌دهد که اگر مقدار نمونه‌ها (یعنی رشته اعداد $g(KT)$) معلوم باشند، می‌توان مقدار تابع را در هر لحظهٔ دلخواهی مثل t، $g(t)$ را محاسبه نمود.

با توجه به اینکه شیفت زمانی یا انعکاس تابع باند کاستی را تغییر نمی‌دهد لذا از رابطهٔ فوق می‌توان روابط زیر را نتیجه گرفت:

$$g(t-s) = \sum_{K=-\infty}^{\infty} g(KT-s)\,\mathrm{Sinc}(\frac{t-KT}{T})$$

$$g(s-t) = \sum_{K=-\infty}^{+\infty} g(s-KT)\,\mathrm{Sinc}(\frac{t-KT}{T})$$

[ب) قضیهٔ نمونه‌برداری برای فرآیند تصادفی

$$S_x(f)=0, \forall|f|\geq W \xrightarrow{T\leq\frac{1}{2W}} \begin{cases} (1)\; R_x(\tau) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} R_x(nT)\,\mathrm{Sinc}(\frac{\tau-nT}{T}) \\ (2)\; C_x(\tau) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_x(nT)\,\mathrm{Sinc}(\frac{\tau-nT}{T}) \\ (3)\; X(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X(nT)\,\mathrm{Sinc}(\frac{\tau-nT}{T}) \end{cases}$$

اثبات (1): تابع یقینی $R_x(\tau) \xleftrightarrow{FT} S_x(f)$

پس رابطهٔ اوّل همان قضیهٔ نمونه‌برداری برای تابع یقینی ($R_x(\tau)$) است.
این رابطه بیان می‌کند که در یک فرآیند باباند محدود، چنانچه همبستگی بین متغیرهای تصادفی به فا
مضارب T فرآیند را بدانیم ($T\leq\frac{1}{2W}$) می‌توان همبستگی بین هر دو متغیر تصادفی فرآیند دلخواه

اثبات (2): می‌دانیم:

$$C_x(\tau) = R_{\tilde{x}}(\tau) \quad , \quad S_x(f) = S_{\tilde{x}}(f) + S_{m_x}(f)$$

و به دلیل غیر منفی بودن طیف‌ها از باند محدود بودن طیف $S_x(f)$، باباند محدود بودن $S_{\tilde{x}}(f)$ نیز نتیجه

$$C_x(\tau) = R_{\tilde{x}}(\tau) \xleftrightarrow{FT} S_{\tilde{x}}(f) = 0 \,,\ |f| \geqslant W$$

پس رابطهٔ دوم نیز همان قضیهٔ نمونه برداری برای تابع یقینی $C_x(\tau)$ می باشد.

این رابطه نیز بیان می کند که اگر کوواریانس متغیرهای تصادفی به فاصلهٔ مضارب T فرآیند را داشته باشیم.

کوواریانس بین هر دو متغیر تصادفی دلخواه فرآیند را نیز می توانیم بدست آوریم.

اثبات (3) که در واقع قضیه اصلی نمونه برداری فرآیندهای تصادفی است.

حل /

$$\hat{x}(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT)\, \mathrm{Sinc}\left(\frac{t-nT}{T}\right)$$

$$E\,|x(t) - \hat{x}(t)|^2 = R_x(t,t) + R_{\hat{x}}(t,t) - R_{x\hat{x}}(t,t) - R_{\hat{x}x}(t,t)$$

$$* \; R_x(s,t) = R_x(s-t) \Longrightarrow R_x(t,t) = R_x(0) \checkmark$$

$$* \; R_{\hat{x}x}(s,t) = E\,\hat{x}(s)\, x^*(t) = E\sum_n x(nT)\, \mathrm{Sinc}\left(\frac{s-nT}{T}\right) x^*(t) =$$

$$= \underbrace{\sum_n \underbrace{E\,x(nT)\,x^*(t)}_{R_x(nT-t)}\, \mathrm{Sinc}\left(\frac{s-nT}{T}\right)}_{R_x(\tau)\text{ قضیهٔ}} = R_x(s-t) \Longrightarrow R_{\hat{x}x}(t,t) = R_x(t-t) =$$

$$g(s-t) = \sum_n g(nT-t)\, \mathrm{Sinc}\left(\frac{s-nT}{T}\right)$$

$$R_{x\hat{x}}(t,t) = R_{\hat{x}x}(t,t) = R_x^*(0) = R_x(0) \checkmark$$

$$* \; R_{\hat{x}}(t,s) = E\,\hat{x}(t)\,\hat{x}^*(s) = E\left(\sum_n x(nT)\, \mathrm{Sinc}\left(\frac{t-nT}{T}\right)\right)\left(\sum_m x^*(mT)\, \mathrm{Sinc}\left(\frac{s-mT}{T}\right)\right) =$$

$$= \sum_n \sum_m \underbrace{E\,x(nT)\,x^*(mT)}_{R_x(n-m)T} \cdot \mathrm{Sinc}\left(\frac{t-nT}{T}\right) \cdot \mathrm{Sinc}\left(\frac{s-mT}{T}\right) =$$

$$= \sum_m \Big(\underbrace{\sum_n R_x(nT-mT)\, \mathrm{Sinc}\left(\frac{t-nT}{T}\right)}_{R_x(t-mT)} \; \mathrm{Sin}\left(\frac{s-nT}{T}\right) =$$

$$= \sum_m R_x(t-mT)\, \mathrm{sinc}\left(\frac{s-mT}{T}\right) = R_x(t-s) \Longrightarrow R_{\hat{x}}(t,t) = R_x(t-t) =$$

$$\Longrightarrow E\,|x(t) - \hat{x}(t)|^2 = 0 \Longrightarrow x(t) \overset{ms}{=} \hat{x}(t) \Longrightarrow \boxed{x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT)\, \mathrm{sinc}\left(\frac{t-nT}{T}\right)}$$

(ج) بحث در مورد تکنیک نمونه برداری

① مجموعهٔ توابع $\left\{\mathrm{sinc}\left(\frac{t-nT}{T}\right)\right\}_{n=-\infty}^{+\infty}$ یک مجموعه توابع متعامد برای بازهٔ $t\in(-\infty,+\infty)$ می باشند، چرا که:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi_n(t)\,\varphi_m^*(t)\,dt=\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{sinc}\left(\frac{t-nT}{T}\right)\mathrm{sinc}\left(\frac{t-mT}{T}\right)dt=$$

زرکلی

رابطهٔ پارسوال

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}(T\,\mathrm{rect}(fT))\,e^{-j2\pi fnT}\cdot\left(T\,\mathrm{rect}(fT)\,e^{-j2\pi fmT}\right)^* df=$$

$$=T^2\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{rect}^2(fT)\cdot e^{j2\pi f(m-n)T}\,df=$$

$$=T^2\int_{f=\frac{-1}{2T}}^{1/2T}e^{j2\pi fT(m-n)}\,df=T^{\cancel{2}}\,\frac{\cancel{2j}\sin\{(m-n)\pi\}}{\cancel{j2\pi T}(m-n)}=$$

$$=T\cdot\mathrm{sinc}\left[(m-n)\pi\right\}=\begin{cases}0 & ,m\neq n\\ \boxed{E_n=T} & ,m=n\end{cases}$$

پس در حالت کلی هر تابعی مثل $g(t)$ را می توان برحسب این توابع بسط داد:

$$\boxed{\begin{cases}\hat{g}(t)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}c_n\,\mathrm{Sinc}\left(\frac{t-nT}{T}\right) & ,t\in\mathbb{R}\\ c_n=\frac{1}{T}\int_{-\infty}^{+\infty}g(t)\,\mathrm{sinc}\left(\frac{t-nT}{T}\right)dt\end{cases}}$$

و برای مینیمم شدن مربع خطا باید:

برای دسته توابع با باند محدود به $|f|<W$ و $W\leqslant\frac{1}{2T}$ مربع خطای این بسط صفر [illegible] ی گرد
یعنی مجموعهٔ فوق یک مجموعهٔ کامل متعامد را تشکیل خواهد داد و در این حال:

$$c_n=\frac{1}{T}\int_{-\infty}^{+\infty}g(t)\,\mathrm{sinc}\left(\frac{t-nT}{T}\right)dt=\frac{1}{T}\int_{-\infty}^{+\infty}G(f)\cdot\left(\overset{T}{\mathrm{rect}}(fT)\,e^{-j2\pi fnT}\right)^* df=$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}G(f)\cdot\mathrm{rect}(fT)\,e^{j2\pi fnT}\,df=\int_{-1/2T}^{1/2T}G(f)\cdot e^{j2\pi fnT}\,df=$$

$$=\int_{-W}^{W}G(f)\,e^{j2\pi fnT}\,df=g(nT)$$

$\frac{1}{2T}$

حل:

$$g(t) = \hat{g}(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} g(nT)\, \mathrm{Sinc}\left(\frac{t-nT}{T}\right)$$

② برای فرآیند تصادفی نیز رابطهٔ زیر را می‌توان یک رابطهٔ خطی برای فرآیند دانست.

$$X(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X(nT)\, \mathrm{Sinc}\left(\frac{t-nT}{T}\right), \quad t \in \mathbb{R}$$

و در مقایسه با بسط KL:

$$\begin{cases} X(t) = \sum_n C_n \varphi_n(t), & t \in [a,b] \\ C_n = \int_a^b X(\alpha)\, \varphi_n^*(\alpha)\, d\alpha \end{cases}$$

* حسن بسط KL، متعامد بودن ضرایب بسط (Cn ها) است.

* حسن بسط بر اساس قضیهٔ نمونه برداری آن است که با داشتن خصوصیات آماری فرآیند، در واقع خصوصیات آماری ضرایب بسط را نیز داریم، چرا که همان نمونه های فرآیند است، در حالی که پیدا کردن خصوصیات آماری (توابع احتمال) ضرایب بسط KL از روی خصوصیات آماری فرآیند، کار ساده‌ای نیست.

③ با توجه به رابطهٔ زیر:

$$X(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X(nT)\, \mathrm{Sinc}\left(\frac{t-nT}{T}\right), \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

ملاحظه می‌گردد که کلیهٔ متغیرهای تصادفی فرآیند با باند محدود را می‌توان با رابطهٔ دقیق فوق از روی رشته متغیر تصادفی $\{X(nT)\}_{n=-\infty}^{+\infty}$ دقیقاً محاسبه نمود.

* یعنی فرآیند با باند محدود، معادل است با یک رشته متغیر تصادفی و به عبارت معادل با یک فرآیند گسسته زمان

* آقای پاپولیس با یک مثال نشان داده است که در فرآیندهای با باند محدود از روی نمونه‌های گذشته فرآیند به شرط $T < \frac{1}{6W}$ می‌توان آینده فرآیند را پیشگویی نمود.

New

2- مروری بر سیگنال‌ها و سیستم‌های گسسته زمان

2-1- سیگنال گسسته زمان

سیگنال گسسته زمان را می‌توان معادل یک رشته عدد دانست:

$$\{\cdots, g_{-2}, g_{-1}, g_0, g_1, g_2, \cdots\} = \{\cdots, g(-2), g(-1), g(0), g(1), g(2), \cdots\} =$$

$$\underset{\text{به اختصار}}{=} \{g(n)\}_{n=-\infty}^{+\infty} \underset{\text{به اختصار تر}}{=} \{g(n)\} \underset{\text{به اختصار تر تر}}{=} g(n)$$

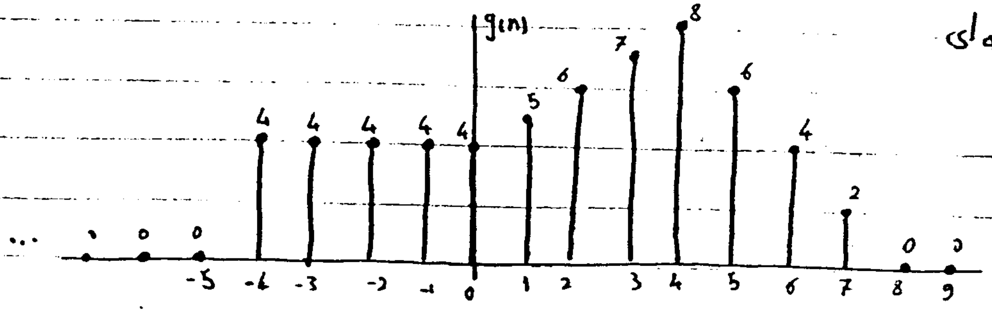
مثال :

$$g(n) = \{\ldots, 0, 0, 0, 4, 4, 4, 4, \hat{4}, 5, 6, 7, 8, 6, 4, 2, 0, 0, \ldots\}$$

ضابطهٔ سیگنال : در مثال فوق

$$g(n) = \begin{cases} 0, & n \leqslant -5 \ , \ n \geqslant 8 \\ 4, & -4 \leqslant n \leqslant 0 \\ 4+n & 0 \leqslant n \leqslant 4 \\ 16-2n & 4 \leqslant n \leqslant 8 \end{cases}$$

نمودار میله ای

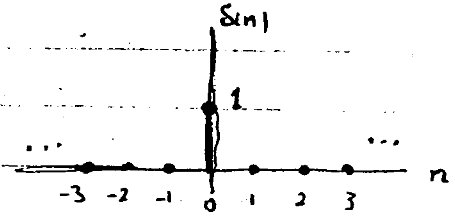


چند مثال :

① ضربه واحد

$$\delta(n) = \{\ldots, 0, 0, \hat{1}, 0, 0, \ldots\}$$

ضابطه :
$$\delta(n) = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ 0, & n \neq 0 \end{cases}$$



هر سیگنال گسسته زمان دلخواهی را می توان برحسب توابع ضربه واحد بسط داد.

$$g(n) = \sum_{K=-\infty}^{+\infty} g(K)\,\delta(n-K)$$

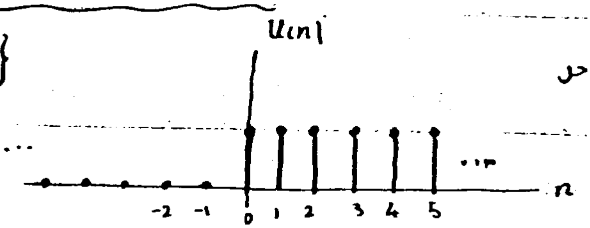
رابطهٔ بالا، رابطه‌ای است مشابه به رابطهٔ پیوسته زمان زیر :

$$g(t) = \int_{\alpha=-\infty}^{+\infty} g(\alpha)\,\delta(t-\alpha)\,d\alpha$$

② پلهٔ واحد

$$(n) = \{\ldots, 0, 0, 0, \hat{1}, 1, 1, 1, \ldots\}$$

ضابطه :
$$u(n) = \begin{cases} 1 & , \ n \geqslant 0 \\ 0 & , \ n \leqslant -1 \end{cases}$$



رابطه با ضربهٔ واحد :

$$u(n) = \sum_{K=0}^{\infty} \delta(n-K) = \sum_{K=-\infty}^{n} \delta(K)$$

مشابه به رابطهٔ پیوسته زمان زیر است :

$$u(t) = \int_{\alpha=-\infty}^{t} \delta(\alpha)\,d\alpha$$

$\delta(n) = u(n) - u(n-1)$

در پیوسته زمان مشابه این رابطه، داریم :

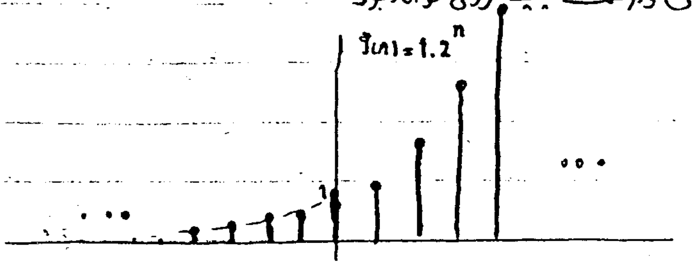
$$\delta(t) = \frac{d}{dt} u(t)$$

③ سیگنال نمائی

$$g(n) = \{\ldots, Z_0^{-2}, Z_0^{-1}, \hat{Z_0^0}, Z_0^1, Z_0^2, Z_0^3, \ldots\}$$

ضابطه : $g(n) = Z_0^n$ ، تک ضابطه‌ای است .

اگر $|Z_0|>1$ باشد، در سمت راست صعودی و در سمت چپ نزولی خواهد بود



اگر $|Z_0|<1$ باشد، در سمت چپ صعودی و در سمت راست نزولی خواهد بود.

④ نمائی راست‌گرا :

$$g(n) = \{\ldots, 0, 0, \hat{1}, Z_0, Z_0^2, Z_0^3, \ldots\}$$

ضابطه : $g(n) = \begin{cases} Z_0^n, & n \geq 0 \\ 0, & n \leq -1 \end{cases} = Z_0^n u(n)$

در حالت $|Z_0|>1$ صعودی و برای $|Z_0|<1$ نزولی است .

⑤ نمائی متقارن

$$g(n) = \{\ldots, Z_0^3, Z_0^2, Z_0, \hat{1}, Z_0, Z_0^2, Z_0^3, \ldots\}$$

ضابطه : $= \begin{cases} Z_0^n & n \geq 0 \\ Z_0^{-n} & n \leq 0 \end{cases} = Z_0^{|n|}$

در حالت $|Z_0|>1$ سیگنال در دو طرف صعودی خواهد بود .

در حالت $|Z_0|<1$ سیگنال در دو طرف نزولی خواهد بود.

⑥ مؤلفهٔ فرکانسی

ضابطه : $g(n) = e$

$\equiv Z_0^n \quad , \quad Z_0 = e^{j2\pi f_0} \quad , \quad |Z_0| = 1$

همان

مؤلفهٔ فرکانسی در پیوسته زمان بصورت $g(t) = e^{j2\pi f_0 t}$ بود.

مؤلفهٔ فرکانسی گسسته زمان با پیوسته زمان دارای اختلافاتی است.

در پیوسته زمان دو مؤلفهٔ فرکانسی با ~~[illegible]~~ فرکانس متفاوت $f_1 \neq f_2$ ، دو تابع متفاوت هستند. امّا در گسسته زمان اگر اختلاف دو فرکانس $f_1 - f_2$ یک عدد صحیح باشد، آن دو رشته عدد هیچ تفاوتی با هم نخواهند داشت.

عدد n-ام مؤلفه با فرکانس f_1 $= e^{j2\pi f_1 n}$

عدد n-ام مؤلفه با فرکانس $= e^{j2\pi f_2 n} = e^{j2\pi(f_1+K)n} = e^{j2\pi f_1 n} + \underbrace{e^{j2\pi Kn}}_{1} = e^{j2\pi f_1 n} =$ عدد n-ام مؤلفه با فرکانس f_1

$f_2 = f_1 + K$

$K \in \mathbb{Z}$

پس در حالت گسسته زمان مجموعهٔ مؤلفه های فرکانسی $\{e^{j2\pi fn}\}_{f=-1/2}^{1/2}$ شامل همهٔ انواع مختلف مؤلفه ها فرکانسی گسسته زمان می باشد، در حالی که در پیوسته زمان برای اینکه مجموعه شامل همهٔ انواع مؤلفه های فرکانسی باشد باید از $f=-\infty$ تا $f=+\infty$ را شامل $\{e^{j2\pi ft}\}_{f=-\infty}^{+\infty}$

★ متوسط زمانی:

تعریف : $\langle g(n) \rangle_n = \lim_{N\to\infty} \dfrac{\sum_{n=-N}^{N} g(n)}{2N+1}$ ،

قدرت عدد n-ام یا قدرت لحظه ای سیگنال $|g(n)|^2$

انرژی سیگنال $E_g = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |g(n)|^2$ / قدرت سیگنال $P_g = \langle |g(n)|^2 \rangle_n$

در گسسته زمان نیز می توان رشته اعداد را به صورت مجموع مؤلفه های فرکانسی در نظر گرفت. ز تحلیل فوریه

$$\begin{cases} g(n) = \displaystyle\int_{-1/2}^{1/2} G(f)\, e^{j2\pi fn}\, df \\[2ex] G(f) = \displaystyle\sum_{n=-\infty}^{+\infty} g(n)\, e^{-j2\pi fn} \end{cases}$$

روابط تبدیل فوریهٔ گسسته زمان
(DTFT)

$G(f)$ در حالت کلی پریودیک با پریود $f=1$ خواهد بود، لذا کافی است در یک بازه به عرض 1 تعریف گردد. معمولاً $f\in[\frac{-1}{2},\frac{1}{2}]$

---

* تبدیل Z و رشته عدد :

$$G(Z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} g(n)Z^{-n} \quad , \quad \underbrace{|Z|\in R_1}_{\text{شرط تقارب}}$$

با داشتن تبدیل Z (و ROC آن) می توان رشته عدد را معلوم کرد. (با رابطهٔ تبدیل Z معکوس) (یا مثلاً با بسط $G(Z)$ به توان های Z).

* اگر $|Z|=1$ یعنی دایرهٔ به شعاع واحد، جزو ناحیهٔ تقارب تبدیل Z باشد، می توان از تساوی $Z=e^{j2\pi f}$ استفاده کرد.

$$G(e^{j2\pi f})=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} g(n)e^{-j2\pi fn}=G(f)$$

یعنی از تبدیل Z به تبدیل فوریه رسید.

رابطهٔ پارسوال در گسسته زمان :

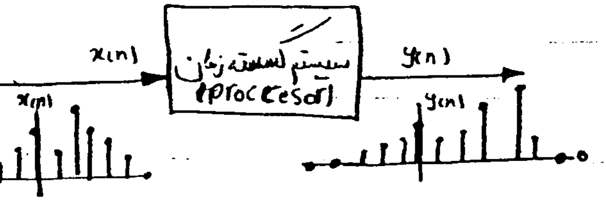
$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} g_1(n)g_2^*(n) = \int_{f=-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} G_1(f)G_2^*(f)\,df$$

حالت خاص :

$$E_g=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}|g(n)|^2=\int_{f=-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}|G(f)|^2df$$

$|G(f)|^2$ ــــ طیف انرژی سیگنال

2-2- سیستم گسسته زمان ≡ یک مدل ریاضی برای یک سیستم فیزیکی که ورودی و خروجی آن را یک رشته (سیگنال گسسته زمان) در نظر گرفته باشیم.



ضابطهٔ سیستم :

$\overset{\text{خروجی n ام}}{}: y(n)=g(n,\{x(i)\})=\dots$

تابعی از n و کلیهٔ اعداد ورودی

$$\dots=g(n,\{x(i)\}_{\le n})=g(n,x(n))$$

سیستم

تابعی از n و کلیهٔ اعداد تا شمارهٔ n ام ورودی

تابعی از n و عدد n ام ورودی

سیستم بدون حافظه

★ در سیستم تغییرناپذیر با شیفت (زمان) ، با شیفت رشته عدد ورودی ، رشته عدد خروجی نیز تنها شیفت پیدا
(به همان مق

★ در سیستم خطی هر یک از اعداد خروجی ترکیبی خطی از اعداد ورودی می باشد. چرا که :

ورودی = $\delta(n) \Longrightarrow$ خروجی = $h(n)$

ورودی = $\delta(n-K) \longrightarrow$

- $h(n-K) =$ خروجی در حالت TI
- $h(n-K;n) =$ خروجی در حالت غیر TI

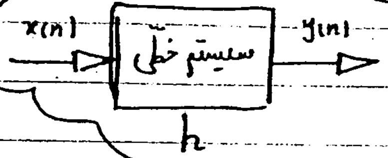
ورودی دلخواه

$$x(n) = \sum_{K=-\infty}^{+\infty} x(K)\,\delta(n-K) \xRightarrow{\text{جمع آثار}} \begin{cases} y(n) = \sum_{K=-\infty}^{+\infty} x(K)\,h(n-K) = x(n) * h(n) & \text{TI} \\ y(n) = \sum_{K=-\infty}^{+\infty} x(K)\,h(n-K;n) = \sum_{K=-\infty}^{+\infty} x(n-K)\,h(K;n) & \text{غیر TI} \end{cases}$$

پس در سیستم خطی داریم:

$$y(n) = \sum_{K=-\infty}^{+\infty} h(n;K)\,x(n-K)$$

یعنی عدد n ام خروجی ، ترکیبی خطی از اعداد ورودی است.



$$y(n) = h\,x(n) \overset{\text{حالت کلی}}{=} \sum_{K=-\infty}^{+\infty} h(K;n)\,x(n-K) = \overset{\text{TI}}{=} h(n) * x(n)$$

در LTI : $y(n) = h(n) * x(n)$

$$Y(f) = H(f).X(f) \xleftarrow{\text{با تبدیل فوریه}} y(n) = h(n) * x(n)$$

$$Y(Z) = H(Z).X(Z) \xleftarrow{\text{با تبدیل } Z} y(n) = h(n) * x(n)$$

3-2- سیستم LTI با تابع تبدیل کسری

معادله تفاضلی خطی زیر مدل مناسبی است برای بررسی بسیاری از سیستم های LTI که در عمل مطرح می گردند.

$$y(n) = b_0 x(n) + b_1 x(n-1) + b_2 x(n-2) + \cdots + b_M x(n-M) - a_1 y(n-1) - a_2 y(n-2) - \cdots - a_N y(n-$$

با گرفتن تبدیل Z (دوطرفه) از دو طرف :   (ص بعد)

$$Y(z)\left[1+a_1z^{-1}+a_2z^{-2}+\cdots+a_Nz^{-N}\right]=X(z)\left[b_0+b_1z^{-1}+b_2z^{-2}+\cdots+b_Mz^{-M}\right]\Longrightarrow$$

$$H(z)=\frac{Y(z)}{X(z)}=\frac{b_0+b_1z^{-1}+b_2z^{-2}+\cdots+b_Mz^{-M}}{1+a_1z^{-1}+a_2z^{-2}+\cdots+a_Nz^{-N}}=\frac{B_M(z)}{A_N(z)}$$ تابع کسری

البته معادلهٔ تفاضلی گفته شده، یک توصیف کامل از سیستم نیست. برای تکمیل توصیف سیستم، اطلاعات دیگری لازم است. مثلاً شرایط اولیه، فرضاً مقادیر $y(-1), y(-2), \ldots, y(-N)$.
یا مثلاً فرض علّی بودن سیستم. یا مثلاً فرض پایداری سیستم. (خواهیم دید)

$$h(n)=Z^{-1}H(z)\Longrightarrow y(n)=h(n)*x(n)$$

برای تبدیل Z معکوس، لازم است ROC را بدانیم.

$$H(z)=\frac{B_M(z)}{\prod_{i=1}^{N}(1-p_iz^{-1})}=\sum_{i=1}^{N}\frac{r_i}{1-p_iz^{-1}}+\underbrace{\sum_{i=0}^{M-N}c_iz^{-i}}_{\text{وقتی وجود خواهد داشت که } M\geq N \text{ باشد.}}\Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow h(n)=\sum_{i=1}^{N}r_iZ^{-1}\left\{\frac{1}{1-p_iz^{-1}}\right\}+\sum_{i=0}^{M-N}c_iZ^{-1}\left\{z^{-i}\right\}\xrightarrow{\hspace{3em}}$$

$$Z^{-1}(z^{-i})=\delta(n-i)$$

$$Z^{-1}\left\{\frac{1}{1-p_iz^{-1}}\right\}=\begin{cases}p_i^n u(n) & \text{راست گرا}\\ -p_i^n u(-n-1) & \text{چپ گرا}\end{cases}$$

اگر بدانیم سیستم علّی است باید جواب های راست گرا را انتخاب ک

$$\boxed{h(n)=\sum_{i=1}^{N}r_ip_i^nu(n)+\sum_{i=1}^{M-N}c_i\delta(n-i)}$$

از بین دو جواب فوق، یکی صعودی و دیگری نزولی است. اگر بدانیم سیستم پایدار است، باید جواب نزولی را اختیار کرد. یعنی:

$$Z^{-1}\left\{\frac{1}{1-p_iz^{-1}}\right\}=\begin{cases}p_i^nu(n) & ,\ |p_i|<1 \quad \text{قطب داخل دایرهٔ واحد}\\ -p_i^n\cdot u(-n-1) & ,\ |p_i|>1 \quad \text{قطب خارج دایرهٔ واحد}\\ \frac{1}{2}\big(u(n)-u(-n-1)\big)p_i^n & ,\ |p_i|=1 \quad \text{قطب روی دایرهٔ واحد}\end{cases}$$

(متوسط داخل و خارج)

میانگین جواب خارج و داخل

سیستم ها را پایدار در نظر می گیریم .)

3- فرآیند گسسته زمان، ممان ها و طیف قدرت آن

$X(n,\xi) = \underset{\text{به اختصار}}{X(n)} \quad , \quad n \in \underset{\text{معمولا}}{Z}$

در واقع و در حالت کلی : $Z \times \Omega \longrightarrow C$

pdf ، k بعدی :

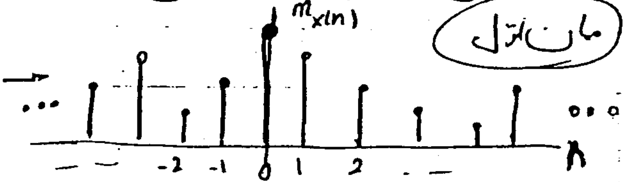
$$f_X(\underline{x};\, n_1, n_2, \ldots, n_k) = f_X(\underline{x};\, \underline{n})$$

3-1- ممان های فرآیند گسسته زمان

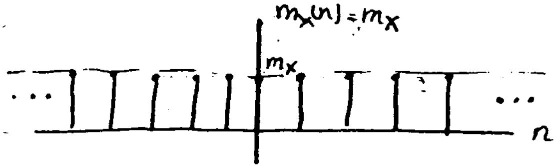
ممان اول

$m_X(n) = \{\ldots, m_{-1}, \hat{m}_0, m_1, m_2, \ldots\} \rightarrow$

حالت کلی



S در حالت ← $m_X(n) = m_X$



* در حالت کلی ممان دوم یک رشته عددی 2 بعدی است. $_X(n,l) = EX(n)X^*(l)$

$_X(n,l) = E\tilde{X}(n)\tilde{X}^*(l) = R_X(n,l) - m_X(n)m_X^*(l)$

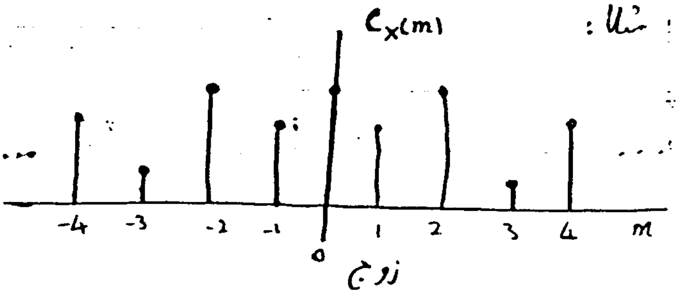
و در حالت WSS داریم:

$$\boxed{R_X(n+m,n) = R_X(m) \quad , \quad C_X(n+m,n) = C_X(m) = R_X(m) - |m_X|^2}$$

که در WSS رشته یک بعدی می شوند. (از m)

ه تقارن ← $\left.\begin{cases} R_X^*(n,l) = R_X(l,n) \\ C_X^*(n,l) = C_X(l,n) \end{cases}\right\}$ کلی $\quad \left.\begin{cases} R_X^*(m) = R_X(-m) \\ C_X^*(m) = C_X(-m) \end{cases}\right\}$ WSS

مثلاً :



برای 2 فرآیند تصادفی :

$$\begin{cases} R_{XY}(n,l) = E\,X(n)Y^*(l) \\ C_{XY}(n,l) = E\,\tilde{X}(n)\tilde{Y}^*(l) = R_{XY}(n,l) - m_X(n)m_Y^*(l) \end{cases}$$

ودرحالت توأماً WSS داریم :

$$\begin{cases} R_{XY}(n+m,n) = R_{XY}(m) \\ C_{XY}(n+m,n) = C_{XY}(m) = R_{XY}(m) - m_X m_Y^* \end{cases}$$

3-2- طیف قدرت و طیف قدرت متقابل

قدرت فرآیند $P_X = E\langle|X(n)|^2\rangle_n = \langle E|X(n)|^2\rangle_n \underset{\text{حالت کلی}}{=} \langle R_X(n,n)\rangle_n \underset{\text{درحالت WSS}}{=} \langle R_X(0)\rangle_n = R_X$

$$x_N(n) = \begin{cases} x(n), & |n| \leq N \\ 0, & |n| \geq N+1 \end{cases} \quad , \quad X_N(f) \triangleq F\{x_N(n)\} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_N(n) e^{-j2\pi fn}$$

$$= \sum_{n=-N}^{N} x(n) e^{-j2\pi fn}$$

$E|X_N(f)|^2$ ← طیف انرژی محدودشده به متغیرهای تصادفی از $(-N)$اُم تا $(+N)$اُم

طیف قدرت فرآیند: $S_X(f) \triangleq \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1} E|X_N(f)|^2$

طیف قدرت متقابل فرآیند: $S_{XY}(f) \triangleq \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1} E\,X_N(f)Y_N^*(f)$

درحالت کلی می‌توان نشان داد که :

$$S_X(f) \underset{\text{کلی}}{=} F_m\{\langle R_X(n+m,n)\rangle_n\} \underset{\text{در WSS}}{=} F_m\{\langle R_X(m)\rangle_n\} = F_m\{R_X(m)\}$$

یعنی در WSS رابطهٔ یک به یک داریم :

$$\begin{cases} S_X(f) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} R_X(m) e^{-j2\pi fm} \\ R_X(m) = \int_{f=-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} S_X(f) e^{j2\pi fm}\, df \end{cases}$$

$$\longrightarrow \int_{-1/2} S_x(f)\,df = \langle R_x(n+m,n)\rangle_n \Big|_{m=0} = \langle R_x(n,n)\rangle_n = P_x$$

به همین ترتیب:

$$S_{xy}(f) \overset{\text{کلی}}{=} F_m \langle R_{xy}(n+m,n)\rangle_n \underset{\text{در حالت توأماً WSS}}{=} F_m \langle R_{xy}(m)\rangle_n = F_m\{R_{xy}(m)\}$$

یعنی در توأماً WSS رابطه یک به یک می گردد

$$\begin{cases} S_{xy}(f) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} R_{xy}(m)\, e^{-j2\pi f m} \\ R_{xy}(f) = \int_{-1/2}^{1/2} S_{xy}(f)\, e^{+j2\pi f m}\, df \end{cases}$$

طیف قدرت در حوزهٔ Z نیز تعریف می گردد:

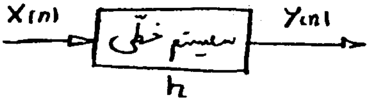
$$\mathcal{S}_x(Z) \underset{\text{کلی}}{=} \mathcal{Z}_m \langle R_x(n+m,n)\rangle_n \underset{\text{در حالت WSS}}{=} \mathcal{Z}_m R_x(m) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} R_x(m) Z^{-m}$$

طیف قدرت در حوزهٔ Z را تابع مولد (متوسط زمانی) تابع همبستگی نیز گویند، چراکه با بسط آن به قوای Z، از روی ضرایب بسط (متوسط زمانی) همبستگی ها بدست می آیند...

$$\mathcal{S}_{xy}(Z) \overset{\text{کلی}}{=} \mathcal{Z}_m \langle R_{xy}(n+m,n)\rangle_n \overset{\text{در توأماً WSS}}{=} \mathcal{Z}_m R_{xy}(Z) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} R_{xy}(m) Z^{-m}$$

$$\boxed{S_x(f) = \mathcal{S}_x(Z)\Big|_{Z=e^{j2\pi f}} \quad , \quad \mathcal{S}_x(Z) = S_x(f)\Big|_{e^{j2\pi f}=Z}}$$

3-3- رابطهٔ ورودی خروجی سیستم خطی



$$Y(n) = hX(n) \underset{\text{کلی}}{=} \sum_{K=-\infty}^{+\infty} h(K;n) X(n-K) \underset{\text{TI}}{=} \sum_{K=-\infty}^{+\infty} h(K) X(n-K) = h(n) * X(n)$$

* رابطهٔ ممان ها:

$$\begin{matrix} m_Y(n) = h\, m_X(n) \\ R_{YX}(n,l) = h_n R_X(n,l) \\ R_{XY}(n,l) = h_l^* R_X(n,l) \\ R_Y(n,l) = h_n h_l^* R_X(n,l) \end{matrix} \quad \xrightarrow[\text{عملگر * است}]{\text{در حالت TI}} \quad \begin{cases} m_Y(n) = m_X(n) * h(n) \\ R_{YX}(n,l) = R_X(n,l) * h(n) \\ R_{XY}(n,l) = R_X(n,l) * h^*(l) \\ R_Y(n,l) = R_X(n,l) * h(n) * h^*(l) \end{cases}$$

در سیستم LTI با ورودی WSS، ورودی و خروجی توأماً WSS می‌گردند.

$$m_Y = m_X \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h(n) = m_X \cdot H(0)$$

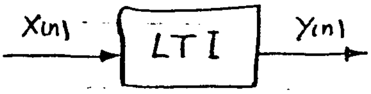
$$R_{YX}(m) = h(m) * R_X(m)$$

$$R_{XY}(m) = R_X(m) * h^*(-m)$$

$$R_Y(m) = R_X(m) * h(m) * h^*(-m)$$

---

* رابطهٔ طیف های توان در سیستم LTI (ورودی WSS یا غیر WSS)



$$R_{YX}(n+m,n) = \sum_{K=-\infty}^{+\infty} h(K) R_X(n+m-K, n)$$

$$R_{XY}(n+m,n) = \sum_{K=-\infty}^{+\infty} R_X(n+m, n-K) h^*(K)$$

$$R_Y(n+m,n) = \sum_{K=-\infty}^{+\infty} \sum_{i=-\infty}^{+\infty} h(K) R_X(n+m-K, n-i) h^*$$

با متوسط گیری زمانی نسبت به n و تبدیل فوریه نسبت به m داریم:

$$S_{YX}(f) = \sum_{K=-\infty}^{+\infty} h(K) S_X(f) e^{-j2\pi fK} = H(f) S_X(f)$$

به همین ترتیب ←

$$\left.\begin{aligned} S_{XY}(f) &= S_X(f).H^*(f) \\ S_Y(f) &= S_X(f).\,|H(f)|^2 \end{aligned}\right\} \xrightarrow[\text{پیوسته زمان}]{\text{دقیقاً مثل روابط}} \boxed{\begin{aligned} S_{YX}(f) &= H(f) S_X(f) \\ S_{XY}(f) &= S_X(f) H^*(f) \\ S_Y(f) &= S_X(f).|H(f)|^2 \end{aligned}}$$

در حوزهٔ Z:

$$\boxed{\begin{aligned} S_{YX}(z) &= H(z).\,S_X(z) \\ S_{XY}(z) &= S_X(z).\,H^*(\tfrac{1}{z}) \end{aligned}}$$

$$H(f) = H(e^{j2\pi f}) \Longrightarrow H^*(f) = H^*(e^{-j2\pi f}) = H^*(z^{-1})\Big|_{z=e^{j2\pi f}}$$

$$\boxed{S_Y(z) = S_X(z) H(z) H^*(\tfrac{1}{z})}$$

4- مدلسازی فرآیندهای گسسته زمان ساکن

یک روش کارکردن با فرآیندها استفاده از مدل برای فرآیندی است که در عمل مطرح می باشد یعنی درنظر گرفتن یک مدل و تعیین پارامترهای مدل با روش های آماری وسپس جایگزین کردن این مدل به جای فرآیند واقعی.

(روش های مبتنی بر مدل $\equiv$ Model Based Approach)

4-1- معرفی چند مدل مفید.

الف) مدل iid

این مدل، ساده ترین مدلی است که می توان درنظر گرفت یعنی اینکه فرض کنیم همه متغیرهای تصادفی فرآیند توأماً مستقل هستند ودارای توابع احتمال یکسان می باشند.
چنین فرآیندی با یک تابع احتمال یک بعدی (مثلاً pdf) کاملاً توصیف می گردد.

(pdf یک بعدی فرآیند : $f(x)$)

$$\xrightarrow{\text{pdf K بعدی}} f_X(\underline{x};\underline{n}) = \prod_{i=1}^{K} f(x_i)$$

و درحالت کلی چنین فرآیندی SSS کامل است ....

$$m_X = m_X(n) = EX(n) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\,dx$$

$$R_X(n,l) = EX(n)X(l) = \begin{cases} EX(n)\,EX(l) = m_X^2 & , \quad n\neq l \\ EX^2(n) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)\,dx = \rho_X, & \quad n=l \end{cases}$$

$$\xrightarrow{m=n-l} = R_X(m) = \begin{cases} m_X^2, & m\neq 0 \\ \rho_X, & m=0 \end{cases} = (\rho_X - m_X^2)\,\delta(m) + m_X^2 = \underline{\sigma_X^2\,\delta(m) + m_X^2}$$

$$\boxed{S_X(f) = \sigma_X^2 + m_X^2\,\delta(f) \quad f\in\{-\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2}\}}$$ و $\boxed{\text{در حوزهٔ } Z \text{ طیف قدرت ندارد.}}$

ب) مدل نویز سفید

دراین مدل فرض می گردد هر متغیر تصادفی جدید فرآیند با متغیرهای تصادفی قبلی فرآیند، متعامد وناهمبسته ا
روشن است که دراین صورت هر متغیر تصادفی جدید فرآیند با متغیرهای تصادفی بعدی فرآیند نیز متعامد وناهمبسته خواهد بود.

$$R_X(m) = C_X(m) = 0 \;, \quad m\neq 0$$

$$R_X(0) = C_X(0) = E|\tilde{x}(n)|^2 = \sigma^2 \;, \quad m=0$$

$$R_x(m) = C_x(m) = \sigma^2 \cdot \delta(m) \longrightarrow S_x(f) = \sigma^2 \;,\; S_z(f) = \sigma^2$$

ج) مدل میانگین متحرک (Moving Average ≡ MA)

در مدل MA مرتبهٔ M از (MA(M)) هر متغیر تصادفی جدید فرآیند به صورت ترکیبی خطی از M متغیر تصادفی اخیر نویز سفید و یک متغیر تصادفی جدید نویز سفید فرض می‌گردد. یعنی:

فرآیند نویز سفید $V(n)$: $R_V(m) = C_V(m) = \sigma^2 \delta(m)$

$$\Longrightarrow X(n) = [b_1 V(n-1) + b_2 V(n-2) + \dots + b_M V(n-M)] + V(n)$$

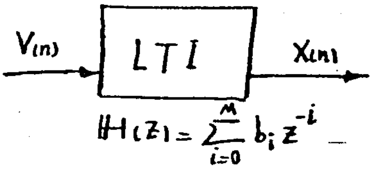
روشن است که متغیر تصادفی جدید نویز سفید $V(n)$ با متغیرهای تصادفی قبلی فرآیند ما ناهمبسته خواهد بود یعنی بعنوان یک عامل تصادفی جدید تلقی می‌گردد. چرا که در متغیرهای تصادفی قبلی مثلاً:

$$X(n-i) = [b_1 V(n-i) + \dots + b_M V(n-i-M)] + V(n-i)$$

$V(n)$ وجود ندارد و $V(n)$ بر کلیهٔ متغیرهای تصادفی دیگر فرآیند فوق عمود است.

با تبدیل Z از طرفین این رابطه:

$$H(z) = \frac{X(z)}{V(z)} = \sum_{i=0}^{M} b_i z^{-i} \quad , \quad b_0 = 1$$



$$S_x(z) = S_V(z) H(z) H^*(\tfrac{1}{z}) = \sigma^2 \sum_{i=0}^{M} b_i z^{-i} \sum_{K=0}^{M} b_K^* z^{+K} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \boxed{S_x(z) = \sigma^2 \sum_{i=0}^{M} \sum_{K=0}^{M} b_i b_K^* z^{K-i}}$$

طبیعتاً چنین فرآیندی یک چند جمله‌ای از z با توان‌های از $-M$ تا $+M$ می‌باشد. با توجه به رابطهٔ کلی:

$$S_x(z) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} R_x(m) z^{-m} \Longrightarrow R_x(m) = 0 \;,\; \forall |m| \geqslant M+1$$

یعنی این مدل یک مدل M-همبسته است.

$$\Longrightarrow S_x(f) = \sigma^2 \sum_{i=0}^{M} \sum_{K=0}^{M} b_i b_K^* e^{j2\pi f(K-i)}$$

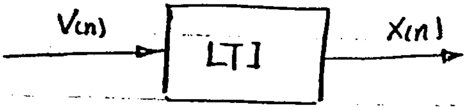
(د) مدل خودبازگشتی ($\equiv AR$ Auto Recursive)

درمدل $AR(N)$ هر متغیر تصادفی جدید فرآیند بصورت ترکیبی خطی از N متغیر تصادفی اخیرخودش و یک متغیر تصادفی نویز سفید زمن می‌گردد.

$$X(n) = -[a_1 X(n-1) + a_2 X(n-2) + \dots + a_N X(n-N)] + V(n)$$

با تبدیل Z داریم:

$$\mathbb{H}(z) = \frac{\mathbb{X}(z)}{\mathbb{V}(z)} = \frac{1}{1+a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \dots + a_N z^{-N}} = \frac{1}{\sum_{i=0}^{N} a_i z^{-i}} \quad , \quad a_0 = 1$$



$$\mathbb{H}(z) = \frac{1}{\underbrace{\sum_{i=0}^{N} a_i z_i^{-i}}} \longrightarrow = 0 \; : \; AR \text{ معادلهٔ}$$

$$h(n) = \mathcal{Z}^{-1}\, \mathbb{H}(z) \;,\quad X(n) = h(n) * V(n) \longrightarrow \boxed{X(n) = \sum_{K=-\infty}^{+\infty} h(K)\, V(n-K)}$$

اگر همهٔ ریشه‌های معادلهٔ AR ($\sum_{i=0}^{N} a_i z_i^{-i} = 0$) داخل دایرهٔ واحد باشند، سیستم علّی شده و خواهیم داشت:

(قطب‌های سیستم)

$$X(n) = \sum_{K=0}^{\infty} h(K)\, V(n-K) = h(0)V(n) + [h(1)V(n-1) + h(2)V(n-2) + \dots]$$

$$\Longrightarrow \mathbb{H}(z) = \sum_{K=0}^{\infty} h(K) z^{-K} \;,\quad \underbrace{\mathbb{H}(\infty)}_{\frac{1}{a_0}=1} = h(0)$$

(به شرط داخل دایرهٔ واحد.)

مدل $AR(N)$ معادل یک مدل $MA(\infty)$ خواهد بود و در این حالت $V(n)$ را می‌توان یک متغیر تصادفی ناهمبسته با متغیرهای تصادفی قبلی فرآیند X دانست. (یک عامل تصادفی جدید)

طیف قدرت:

$$S_X(f) = \frac{1}{\sum_{i=0}^{N}\sum_{K=0}^{N} a_i a_K^{*}\, e^{j2\pi f(K-i)}}$$

$$S_X(z) = \frac{1}{\sum_{i=0}^{N}\sum_{K=0}^{N} a_i a_K^{*}\, z^{(K-i)}}$$

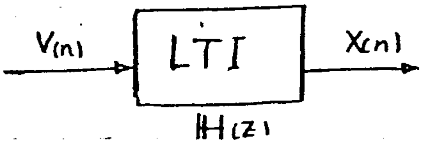
۹) مدل ARMA (≡ AR+MA)

در مدل ARMA(N,M) هر متغیر تصادفی جدید فرآیند به صورت زیر فرض می‌گردد.

$$X(n) = -[a_1 X(n-1) + \dots + a_N X(n-N)] + [b_1 V(n-1) + \dots + b_M V(n-M)] + V(n)$$

با تبدیل Z داریم:

$$\mathbb{H}(z) = \frac{\mathbb{X}(z)}{\mathbb{V}(z)} = \frac{\sum_{i=0}^{M} b_i z^{-i}}{\sum_{K=0}^{N} a_K z^{-K}} \quad , \quad b_0 = a_0 = 1$$



$$h(n) = \mathcal{Z}^{-1}\, \mathbb{H}(z)$$

$$\Longrightarrow \boxed{X(n) = \sum_{K=-\infty}^{+\infty} h(K)\, V(n-K)}$$

در اینجا نیز اگر همهٔ ریشه‌های معادلهٔ AR داخل دایرهٔ واحد باشند، فرآیند معادل یک فرآیند MA(∞) خواهد بو
V(n) را می‌توان یک عامل تصادفی جدید تلقی کرد.

اگر ریشه‌های صورت (معادلهٔ MA) همگی داخل دایرهٔ واحد باشند، وارون سیستم فوق:

$$G(z) = \frac{1}{\mathbb{H}(z)} \longrightarrow$$ علّی می‌گردد و خواهیم داشت:

$$V(n) = g(n) * X(n) = \sum_{K=0}^{\infty} g(K)\, X(n-K) = g(0) X(n) + g(1) X(n-1) + \cdots \Longrightarrow$$

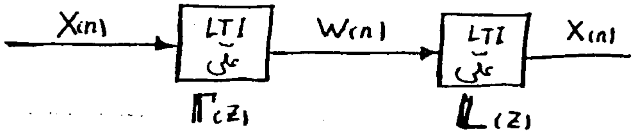
$$\longrightarrow X(n) = -\left[\frac{g(1)}{g(0)} X(n-1) + \frac{g(2)}{g(0)} X(n-2) + \cdots\right] + \frac{1}{g(0)} V(n)$$

فرآیند معادل یک فرآیند AR(∞) خواهد بود.

$$\mathbb{S}_X(z) = \frac{\sum_{i=0}^{M} \sum_{K=0}^{M} b_i b_K^* z^{K-i}}{\sum_{l=0}^{N} \sum_{n=0}^{N} a_l a_n^* z^{n-l}} \quad , \quad S_X(f) = \mathbb{S}_X(e^{j2\pi f})$$

4-2- مدلسازی فرآیند های با طیف کسری برحسب فرآیند ابداع

فرآیند ابداع = فرآیندی سفید و نرمالیزه که با فرآیند مورد نظر به صورت خطی و علّی معادل است.



شرط پالی وینر در حالت گسسته زمان به صورت زیر در می آید:

$$\int_{f=-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \ln(S_x(f))\,df \neq \pm\infty$$

تابع کسری $\mathbb{S}_x(z) = \frac{Q(z)}{P(z)}$

$$S_x(f) = \mathbb{S}_x(e^{j2\pi f}) = K^2 \frac{\prod_{i=1}^{M}(e^{j2\pi f}-z_i)(e^{-j2\pi f}-z_i^*)}{\prod_{k=1}^{N}(e^{j2\pi f}-p_k)(e^{-j2\pi f}-p_k^*)}$$

از کل تجزیه شود با توجه به حقیقی و غیرمنفی بودن

$z = e^{j2\pi f} = \begin{cases} z_i \\ \frac{1}{z_i^*} \end{cases}$ یا از هر دو ریشهٔ صورت / $z = e^{j2\pi f} = \begin{cases} p_k \\ \frac{1}{p_k^*} \end{cases}$ یا از هر دو ریشهٔ مخرج

یکی داخل و دیگری خارج دایرهٔ واحد خواهد بود.

z_i ها و p_k ها را داخل دایرهٔ واحد فرض می کنیم. ($|z_i|<1$, $|p_k|<1$)

$$\mathbb{S}_x(z) = \overset{1}{\widetilde{\mathbb{S}_w(z)}}\,\mathbb{L}(z)\,\mathbb{L}^*(z^{-1}) = \mathbb{L}(z).\mathbb{L}^*(\tfrac{1}{z}) = K^2 \frac{\prod_{i=1}^{M}(z-z_i)(\frac{1}{z}-z_i^*)}{\prod_{k=1}^{N}(z-p_k)(\frac{1}{z}-p_k^*)}\, z^{K}$$

باید هم $\mathbb{L}(z)$ و هم وارون آن علّی باشد و لذا:

$$\mathbb{L}(z) = K\frac{\prod_{i=1}^{M}(z-z_i)}{\prod_{k=1}^{N}(z-p_k)}\, z^{K}$$

البته لازم است در ∞ نیز صفر یا قطب نداشته باشیم، یعنی صورت و مخرج برحسب z هم‌درجه باشند (ضرب صورت و مخرج در z^{-N})

$\underline{K = N-M}$

$$\boxed{\mathbb{L}(z) = \frac{K\prod_{i=1}^{M}(1-z^{-1}z_i)}{\prod_{k=1}^{N}(1-z^{-1}p_k)}}$$

$$\mathbb{L}(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \dots + b_M z^{-M}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \dots + a_N z^{-N}} \equiv \frac{\mathbb{X}(z)}{\mathbb{W}(z)}$$

با طرفین وسطین و تبدیل Z معکوس:

$$X(n) = b_0 W(n) + [b_1 W(n-1) + \dots + b_M W(n-M)] - [a_1 X(n-1) + a_2 X(n-2) + \dots + a_N X(n-N$$

که مدل $ARMA(N,M)$ برحسب فرآیند W است.

$$\ell(n) \underset{\text{علّی بودن}}{=} \sum_{k=0}^{\infty} \ell(k)\delta(n-k) \quad , \quad X(n) = W(n) * \ell(n) \longrightarrow$$

$$\longrightarrow X(n) = \ell(0) W(n) + [\ell(1) W(n-1) + \ell(2) W(n-2) + \cdots]$$

که مدل $MA(\infty)$ برحسب W است.

$$\gamma_0(n) = \mathcal{Z}^{-1}\left(\frac{1}{\mathbb{L}(z)}\right) \underset{\text{علّی بودن}}{=} \sum_{k=0}^{\infty} \gamma(z)\delta(n-k) \quad , \quad W(n) = X(n) * \gamma(n) \Longrightarrow$$

$$\longrightarrow X(n) = \frac{1}{\gamma(0)} W(n) - \left[\frac{\gamma(1)}{\gamma(0)} X(n-1) + \frac{\gamma(2)}{\gamma(0)} X(n-2) + \cdots\right]$$

که مدل $AR(\infty)$ برحسب فرآیند W است.

تمرین: تابع همبستگی فرآیند با طیف قدرت زیر را تعیین کنید و مدل های AR، MA و ARMA آن را برحسب فرآیند ابواع بدست آورید.

$$S_X(f) = \frac{5 - 4\cos 2\pi f}{10 - 6\cos 2\pi f}$$

جواب ها:

$$S_X(z) = \frac{2z^2 - 5z + 2}{3z^2 - 10z + 3} = \frac{2}{3} - \frac{5/27}{(1 - z/3)(1 - z^{-1}/3)}$$

(1) $R_X(m) = \frac{2}{3}\delta(m) - \frac{5}{24}\left(\frac{1}{3}\right)^{|m|}$

(2) $X(n) = \frac{2}{3} W(n) + \frac{1}{3} X(n-1) - \frac{1}{3} W(n-1)$

(3) $X(n) = \frac{2}{3} W(n) - \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^{k+1} W(n-k)$

(4) $X(n) = \frac{2}{3} W(n) - \frac{1}{3} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{k} X(n-k)$

$$\boxed{z_0^{|m|} \xleftrightarrow{ZT} \frac{1 - z_0^2}{(1 - z_0 z)(1 - z_0 z^{-1})} \qquad |z_0| < 1}$$

« مبحث پنجم : تئوری تخمین »

۱- مقدمه و معرفی معیار MMS

۱-۱- مقدمه

تخمین یعنی پیدا کردن یک مجهول S از روی داده های آماری X .

تعداد داده ها می تواند یکی باشد (تخمین برحسب یک متغیر تصادفی) یا n تا باشد (تخمین برحسب یک بردار تصاد

ویا اینکه نامحدود باشد. (تخمین برحسب یک یا چند فرآیند تصادفی)

مثلاً ← * تخمین مقدار یک مجهول به کمک نتیجهٔ n اندازه گیری آلوده به نویز آن .

* تخمین ورودی سیستم در یک لحظه از روی مقادیر خروجی مشاهده شده تا به حال سیستم .

* تخمین آیندهٔ فرآیند (پیشگوئی) از روی مقادیر مشاهده شدهٔ آن تا بحال

۲- معیار MMS

ما مقدمتاً تعداد داده ها را محدود می گیریم و بعداً نتایج را به تعداد داده نامحدود تعمیم خواهیم داد.

$$\underline{X}$$

به صورت تابعی از داده ها به طوری که $S \approx g(\underline{X}) = \hat{S}$ تخمین S

یعنی در تخمین دنبال پیدا کردن یک رابطهٔ تقریبی بین S و داده ها ($\underline{X}$) هستیم. $S \approx g(\underline{X})$

* یک راه حل کلی مسأله آن است که با توجه به کاربرد، برای هر خطائی ($\hat{S} \neq S$) هزینه ای در نظر بگ

تخمینی بدست آوریم که متوسط این هزینه را مینیمم کند.

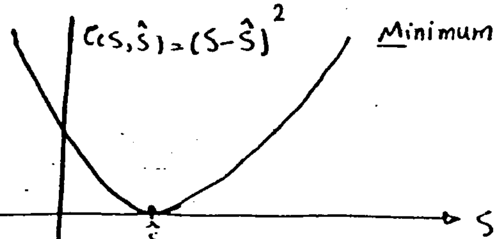
تابع هزینه $\Leftarrow C(S,\hat{S})$

منطقاً این تابع یک تابع غیرمنفی در نظر گرفته می شود - تابعی که به ازای $\hat{S} = S$ مقدار صفر دارد.

$$\rho = E\, C(S,\hat{S}) = Min \Longrightarrow \hat{S}$$

$$\rho = E\,C(S,\hat{S}) = E_x\left[E_S\, C(S,g(\underline{X}))\,|\,\underline{X}\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{f_x(\underline{x})}_{\text{غیرمنفی}}\, \underbrace{E_S\left[\underbrace{C(S,g(\underline{x}))}_{\text{غیرمنفی}}\,|\,\underline{X}=\underline{x}\right]}_{\text{غیرمنفی}}\, d\underline{x} = M$$

$$E_S\left[C(S,g(\underline{x}))\,|\,\underline{X}=\underline{x}\right] = Min \Longrightarrow g(\underline{x}) \Longrightarrow \hat{S} = g(\underline{X})$$



Minimum Mean Square ≡ MMS معیار

$$E_S\left[(S-g(\underline{x}))^2 \middle| \underline{X}=\underline{x}\right]=Min \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \text{سمت چپ} = E(S^2|\underline{X}=\underline{x}) + E(g^2(x)|\underline{X}=x) - 2E(g(\underline{x})S|_{X=x}) =$$

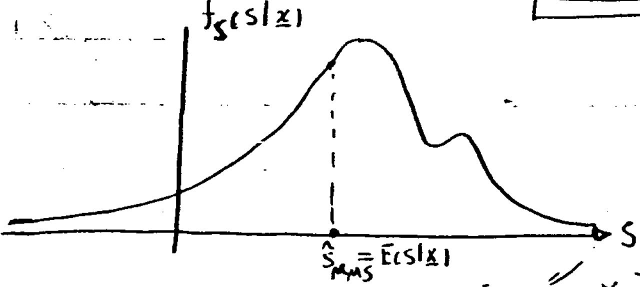
$$= Var(S|\underline{X}=\underline{x}) + (E(S)|_{X=x})^2 + g^2(\underline{x}) - 2g(\underline{x})E(S|\underline{X}=x) =$$

$$= Var(S|\underline{X}=\underline{x}) + [g(\underline{x}) - E(S|\underline{X}=\underline{x})]^2 = Min \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow g(\underline{x}) = E(S|\underline{X}=\underline{x}) \Longrightarrow \boxed{\hat{S}_{MMS} = E(S|\underline{X}) \quad \text{متوسط پسین مجهول}}$$

$$\rho_{min} = \int_{x=-\infty}^{+\infty} f_X(\underline{x}).Var(S|\underline{X}=\underline{x}) \Longrightarrow \boxed{\rho_{min} = E\,Var(S|\underline{X}) \quad \text{امید واریانس پسین مجهول}}$$

مثال :



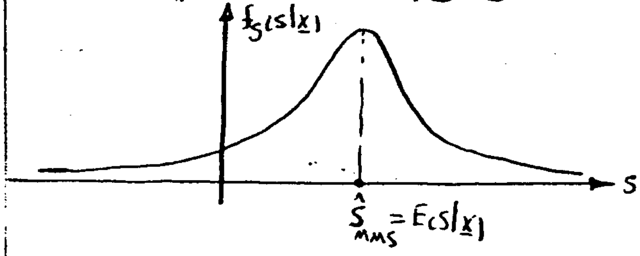
در حالت کلی متوسط پسین، تابعی غیرخطی از $\underline{X}$ می‌گردد. (تخمین غیرخطی) واریانس پسین نیز تابعی از $\underline{X}$ می‌گردد و ρ_{min} متوسط این واریانس به ازای $\underline{X}$ های مختلف است.

معرفی نماد:

$$\hat{S}_{MMS} = E(S|\underline{X}) \longleftarrow \text{بهترین تخمین S برحسب X}$$

$$\text{کمترین متوسط مربع خطای تخمین S برحسب X} \longrightarrow P_{MMS} = \rho(S|\underline{X})$$

نکته، اگر S و $\underline{X}$ توأماً نرمال باشند، $\hat{S}_{MMS}$ رابطه‌ی خطی (مستوی) با داده‌ها $\underline{X}$ پیدا کند.



اثبات : $S|\underline{X}$ نیز نرمال خواهد بود. لذا متوسط آن همان محل پیک آن خواهد بود، چون:

$$f_{S,\underline{X}}(S,x) = f_X(\underline{x})\,f_S(s|\underline{x})$$

لذا کافی است محل پیک pdf توأم (برای $\underline{x}$ معلوم) را تعیین کنیم.

$$f_{S,X}(S,\underline{x}) = K e^{(\text{نما})} = Max \Longrightarrow (\text{نما}) = Max$$

$$\frac{\partial}{\partial S}(\text{نما}) = 0 \longrightarrow \frac{\partial}{\partial S}\Big[\alpha_{00}(S-m_S)^2 + \sum_{i=1}^{n}\alpha_{0i}(S-m_S)(x_i-m_i) + \sum_{i=1}^{n}\alpha_{i0}(x_i-m_i)(S-m_S) +$$

$$+\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\alpha_{ij}(x_i-m_i)(x_j-m_j)\Big] = 2\alpha_{00}(S-m_S) + \sum_{i=1}^{n}\alpha_{0i}(x_i-m_i) + \sum_{i=1}^{n}\alpha_{i0}(x_i-m_i) + 0 =$$

$$\longrightarrow S = m_S - \sum_{i=1}^{n}\frac{\alpha_{0i}+\alpha_{i0}}{2\alpha_{00}}(x_i-m_i) \Longrightarrow \boxed{\hat{S}_{MMS} = m_S + \sum_{i=1}^{n}\beta_i(X_i-m_i)}$$

ملاحظه می گردد که حاصل تابعی خطی با مقدار ثابت (تابع مستوی یا affine) از داده ها خواهد بود.

3-1- معیار LMMS

$$\left.\begin{array}{l} \rho = E|S-\hat{S}|^2 = Min \\ \hat{S} = \sum_{i=1}^{n} a_i X_i \ \text{قید خطی بودن} \end{array}\right] \Longrightarrow \underline{a}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} \hat{S}_{LMMS} \\ \rho_{min} = \rho_{LMMS} \end{cases}$$

LMMS ≡ Linear MMS

علت اضافه کردن قید خطی اینکه اولاً پیدا کردن $\hat{S}$ ساده تر شود، چرا که در تخمین MMS نیاز به معلوم بودن pdf حبیبین (که دارای n پارامتر است.) یا pdf توأم مجهول و داده ها که n+1 بعدی است.) داریم، در حالی که خواهیم دید که در تخمین LMMS فقط به ممان ها نیاز خواهیم داشت.

ثانیاً پیاده سازی عملی تخمین MMS به یک سیستم (فیلتر) غیرخطی نیاز دارد ولی تخمین LMMS را
با یک سیستم (فیلتر) خطی پیاده سازی نمود.

البته روشن است که در حالت کلی:

$$\rho_{MMS} \leqslant \rho_{LMMS}$$

در عمل غالباً از معیار LMMS استفاده می گردد و آن را نیز به اختصار تخمین خطی گویند.

چند نماد:

$$\hat{S}_{LMMS} = \hat{E}(S|\underline{X})$$ بهترین تخمین خطی S برحسب $\underline{X}$

$$\rho_{LMMS} = \hat{\rho}(S|\underline{X})$$ خطای بهترین تخمین S برحسب $\underline{X}$

2- کلیاتی در مورد تخمین خطی

2-1- اصل تعامد ← شرط لازم و کافی برای اینکه $\hat{S}=\sum_i a_iX_i$ بهترین تخمین S بر حسب X باشد، تعامد خطای تخمین $(S-\hat{S})$ بر تک تک داده ها است.

یعنی: $(S-\hat{S})\perp X_1,X_2,\dots,X_n$

با اعمال اصل تعامد می توان ضرایب تخمین خطی را پیدا کرد.

$$\begin{cases}(S-\sum_{i=1}^{n}a_iX_i)\perp X_j\\ j=1,2,\dots,n\end{cases}\Longrightarrow \underset{j=1,2,\dots,n}{E(S-\sum_{i=1}^{n}a_ix_i)X_j^*=0}\Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \boxed{\underset{j=1,2,\dots,n}{\sum_{i=1}^{n}(EX_iX_j^*)a_i=(ESX_j^*)}}$$

در این معادلات، همان ها معلوم هستند و ضرایب یعنی $\underline{a}$ مجهول است.

با حل این دستگاه معادلات خطی موسوم به معادلات یول واکر ، می توان ضرایب و لذا تخمین خطی را پیدا کرد

اثبات اصل تعامد:

تخمینی که با رعایت اصل تعامد حاصل می گردد را به صورت $\hat{S}_\perp=\sum_{i=1}^{n}a_iX_i$ فرض می کنیم.

یک تخمین خطی دیگر نیز به صورت $\hat{S}=\sum_{i=1}^{n}b_iX_i$ در نظر می گیریم.

$$P=E|S-\hat{S}|^2=E|S-\hat{S}_\perp+\hat{S}_\perp-\hat{S}|^2=\underbrace{E|S-\hat{S}_\perp|^2}_{P_\perp}+E|\hat{S}_\perp-\hat{S}|^2+E(S-\hat{S}_\perp)(\hat{S}_\perp-\hat{S})^*$$

جملهٔ سوم $=E(S-\hat{S}_\perp).\sum_{i=1}^{n}(a_i^*-b_i^*)X_i^*=\sum_{i=1}^{n}(a_i^*-b_i^*)\underbrace{E(S-\hat{S}_\perp)X_i^*}_{0}=0$

صفر به دلیل رعایت اصل تعامد

چنین جملهٔ سوم و چهارم برابر صفر خواهند شد. $\Longrightarrow$ جملهٔ چهارم $=0$

$$\longrightarrow P=P_\perp+E|\hat{S}_\perp-\hat{S}|^2\geqslant P_\perp$$

چون $P_\perp\leqslant P$ است ، پس رعایت اصل تعامد یک شرط کافی است.

برای اینکه $P=P_\perp$ لازم است: $E|\hat{S}_\perp-\hat{S}|^2=0$

$$\Longrightarrow \hat{S}=\hat{S}_\perp$$

یعنی شرط تعامد لازم نیز می باشد.

نکات :

① باتوجه به اصل تعامد، خطای تخمین LMMS را می‌توان به صورت زیر محاسبه کرد:

$$\boxed{P_{LMMS} = \hat{P}(S|X) = E(S-\hat{S})S^*}$$

اثبات :

$$P_{LMMS} = E|S-\hat{S}|^2 = E(S-\hat{S})S^* - \overset{0}{\cancel{E(S-\hat{S})}}\hat{S}^* = E(S-\hat{S})S^* \quad \checkmark$$

$$\text{جملهٔ دوم} = E(S-\hat{S})\sum_{i=1}^{n} a_i^* X_i^* = \sum_{i=1}^{n} a_i^* \underbrace{E(S-\hat{S})X_i}_{\text{صفر} \leftarrow \text{رعایت اصل تعامد}} = 0$$

② تعبیر هندسی اصل تعامد

فضای داده‌ها را بعنوان یک مجموعه‌ای شامل کلیهٔ داده‌ها X_1 و X_2، ... و X_n و کلیهٔ ترکیبات خطی آنها تعریف می‌کنیم.

در حالت کلی مجهول S داخل این فضا (جزء مجموعهٔ فوق) قرار ندارد. در تخمین خطی دنبال یکی از اعضای آن مجموعه هستیم (نقطه‌ای از فضای فوق) به طوری که: $E|S-\hat{S}|^2 = Min$

طبق اصل تعامد، بهترین تخمین، تخمینی است که $S-\hat{S}$ را بر کلیهٔ داده‌ها و لذا بر کلیهٔ ترکیبات خطی داده‌ها یعنی بر فضای داده‌ها عمود کند. یعنی $\hat{S}_{LMMS}$ در واقع تصویر S روی فضای داده‌هاست.

New

یادآوری : $\hat{S} = \hat{E}(S|\underline{X}) = \sum_i a_i X_i$

$$P_{min} = \hat{P}(S|\underline{X}) = Min(E|S - \sum_i a_i X_i|^2)$$

$$S - \hat{S} = S - \hat{E}(S|X) \perp \underline{X}$$

$$\hat{P}(S|X) = E\left(S - \hat{E}(S|\underline{X})\right)S^*$$

3-2-2- معرفی اپراتور $\hat{E}$ و برخی خواص آن

با توجه به اصل تعامد $\hat{E}$ را می توان یک عملگر خطی دانست، عملگری که S را روی فضای داده ها تصویر می کند. بعبارت ریاضی عملگری که با دو شرط زیر تعریف می گردد:

$$\begin{cases} (1) \ \hat{E}(S|\underline{X}) = \sum_i a_i X_i \\ (2) \ S - \hat{E}(S|\underline{X}) \perp \underline{X} \end{cases}$$

* برخی از خواص عملگر $\hat{E}$:

$$(1) \ S \perp \underline{X} \Longrightarrow \hat{E}(S|\underline{X}) = 0$$

$$(2) \ S = S_1 + S_2 \Longrightarrow \hat{E}(S|\underline{X}) = \hat{E}(S_1|\underline{X}) + \hat{E}(S_2|\underline{X})$$

$$(3) \ \underline{X} \overset{\text{خطی}}{\equiv} \underline{Y} \longrightarrow \hat{E}(S|\underline{X}) = \hat{E}(S|\underline{Y})$$

$$(4) \ \underline{X} \perp \underline{Y} \Longrightarrow \hat{E}(S|\underline{X},\underline{Y}) = \hat{E}(S|\underline{X}) + \hat{E}(S|\underline{Y})$$

برای اثبات هر یک کافی است دو شرط عملگر $\hat{E}$ را برای کنیم.

اثبات (1):

(1) $0 \overset{?}{=} \sum a_i X_i \xLeftrightarrow{\checkmark}$ با ضرایب صفر صحیح است

(2) $S - 0 \perp \underline{X} \xrightarrow{\checkmark}$ صحیح است، چون فرض این خاصیت است.

اثبات (2)

(1) $\hat{E}(S_1|\underline{X}) + \hat{E}(S_2|\underline{X}) \overset{?}{=} \sum_i a_i X_i \longrightarrow$ صحیح است چون هر یک از دو جزء سمت چپ ترکیب خطی از داده ها هستند.

(2) $S - (\hat{E}(S_1|\underline{X}) + \hat{E}(S_2|\underline{X})) \perp \underline{X} \longrightarrow$ صحیح است چون:

سمت چپ : $S_1 + S_2 - \hat{E}(S_1|X) - \hat{E}(S_2|X) = (S_1 - \hat{E}(S_1|\underline{X})) + (S_2 - \hat{E}(S_2|\underline{X}))$

که تک تک دو جملهٔ فوق بر $\underline{X}$ عمودند.

اثبات (3): به طور خطی معادل بودن یعنی اینکه معلوم بودن هر طرف طرف دیگر را با رابطه‌ای خطی مشخص می کند. یعنی:

$$\left.\begin{array}{l}\underline{Y} = A\underline{X} \\ \det(A) \neq 0\end{array}\right\} \Longrightarrow \underline{X} = A^{-1}\underline{Y}$$

(1) $\hat{E}(s|\underline{Y}) \overset{?}{=} \sum a_i X_i$

صحیح است چون سمت چپ ترکیبی خطی از $\underline{Y}$ است و $\underline{Y}$ نیز ترکیبی خطی از $\underline{X}$ است.

(2) $S - \hat{E}(s|\underline{Y}) \perp \underline{X}$

صحیح است چون سمت چپ بر $\underline{Y}$ عمود است ولذا بر کلیهٔ ترکیبات خطی $\underline{Y}$ عمود است و $\underline{X}$ نیز ترکیب خطی $\underline{Y}$ است.

اثبات (4)

(1) $\hat{E}(s|\underline{X}) + \hat{E}(s|\underline{Y}) \overset{?}{=} \sum_i a_i X_i + \sum_i b_i Y_i$

صحیح است چون هر یک ترکیبی خطی از داده های مربوط است.

(2) $S - \left(\hat{E}(s|\underline{X}) + \hat{E}(s|\underline{Y})\right) \underset{?}{\perp} \underline{X}, \underline{Y}$

صحیح است چون مثلاً:

$$\text{سمت چپ} = \underbrace{[S - \hat{E}(s|\underline{X})]}_{\text{بر } \underline{X} \text{ عمود است.}} + \underbrace{\hat{E}(s|\underline{Y})}_{\text{ترکیبی خطی از } \underline{Y} \text{ است ولذا بر } \underline{X} \text{ عمود است، چون } \underline{Y} \perp \underline{X}}$$

پس سمت چپ بر $\underline{X}$ عمود است و به همین ترتیب بر $\underline{Y}$ نیز اثبات می گردد.

2-3- تخمین مستوی

$$\text{تخمین مستوی}\begin{cases} P = E|S-\hat{S}|^2 = \text{Min} \longrightarrow \underline{a}, a_0 \\ \hat{S} = \sum_i a_i X_i + a_0 \quad \text{قید مستوی بودن} \end{cases} \Longrightarrow \hat{S}, P_{min}$$

چون در اینجا یک درجه آزادی اضافه داریم، روشن است که خطای تخمین مستوی کوچکتر یا مساوی خطای تخمین خطی خواهد بود.

با یک ابتکار ساده می توان تخمین مستوی را به تخمین خطی بدل نمود تا بتوان به کمک اصل تعامد و خواص عملگر $\hat{E}$، تخمین مستوی را نیز محاسبه نمود.

واین کار با تعریف یک متغیر تصادفی کمکی مقدور است .

$$\begin{cases} X_0(\xi)=1 \\ \forall \xi \in \Omega \end{cases}$$

در واقع $X_0=1$ یک مقدار ثابت معلوم است که می توان آن را بعنوان حالت خاص از یک متغیر تصادفی وارد روابط کرد .

تخمین مستوی : $\hat{S}=\sum_{i=1}^{n} a_i X_i + a_0 = \sum_{i=1}^{n} a_i X_i + a_0 X_0 = \sum_{i=0}^{n} a_i X_i \equiv \hat{E}(S|\underline{X}$

$$\hat{S}=\hat{E}(S|\underline{X},X_0)=\hat{E}(S|\underline{\tilde{X}},X_0)=\underline{\hat{E}(S|\underline{\tilde{X}})+\hat{E}(S|X_0)}$$

$$\{\underline{X},X_0\}\overset{\text{خطی}}{\equiv}\{\underline{\tilde{X}},X_0\}$$

زیرا ثانیا $X_i=(1)\tilde{X}_i+(m_i)X_0$ یا $\tilde{X}_i=(1)X_i+(-m_i)X_i$

$$\left.\begin{array}{r}\underline{\tilde{X}}\perp X_0\\ E\tilde{X}_i X_0^{*}=E\tilde{X}_i=0 \text{ زیرا}\end{array}\right\}$$

$$* \ \hat{E}(S|\underline{\tilde{X}})=\hat{E}(\tilde{S}|\underline{\tilde{X}})+\hat{E}(m_S|\underline{\tilde{X}})=\hat{E}(\tilde{S}|\underline{\tilde{X}})+0$$

$S=\tilde{S}+m_S$

$m_S\perp\underline{\tilde{X}}$

$Em_S\tilde{X}_i^{*}=m_S E\tilde{X}_i^{*}=0$ زیرا

$$* \ \hat{E}(S|X_0)=aX_0$$

اصل تعامد $(S-aX_0)\perp X_0 \Rightarrow E(S-aX_0)X_0^{*}=0 \Rightarrow E(S-a)=0 \rightarrow$

$$\Longrightarrow \underline{a=ES=m_S}$$

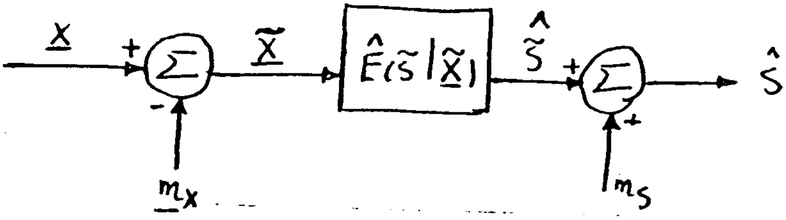
پس :

تخمین مستوی : $\hat{S}=\hat{E}(S|\underline{X},X_0)=\hat{E}(\tilde{S}|\underline{\tilde{X}})+m_S$

خطای تخمین : $P_{min}=\hat{P}(S|\underline{X},X_0)=E|S-\hat{S}|^2=E|S-\hat{E}(\tilde{S}|\underline{\tilde{X}})-m_S|^2=E|\tilde{S}-\hat{E}(\tilde{S}|\underline{\tilde{X}}|^2=$

$$=\hat{P}(\tilde{S}|\underline{\tilde{X}})$$

پس برای تخمین مستوی می توان مدل ریاضی زیر را در نظر گرفت.



$$\hat{p}(s|\underline{x}, x_0) = \hat{p}(\tilde{s}|\tilde{\underline{x}})$$

3- تخمین خطی برحسب بردار داده‌ها

3-1- تخمین یک مجهول برحسب بردار داده‌ها

$$\hat{s} = \hat{E}(s|\underline{x}) = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i = \underline{g}^h \underline{x}$$

اصل تعامد: $(s - \sum_{i=1}^{n} a_i x_i) \perp x_1, x_2, \ldots, x_n$

$$\Longrightarrow (s - \underline{g}^h \cdot \underline{x}) \perp \underline{x} \longrightarrow E(s - \underline{g}^h \cdot \underline{x})\underline{x}^h = 0 \Longrightarrow E s\underline{x}^h - E\underline{g}^h \underline{x}\underline{x}^h = 0$$

$$\Longrightarrow R_{sx} - \underline{g}^h R_x = 0 \Longrightarrow g^h = R_{sx} R_x^{-1}$$

پس:

$$\boxed{\hat{s} = \hat{E}(s|\underline{x}) = R_{sx} R_x^{-1} \underline{x}}$$

$$P_{min} = \hat{p}(s|\underline{x}) = E(s-\hat{s})s^* = E(s - R_{sx}R_x^{-1}\underline{x})s^* = E|s|^2 - E R_{sx} R_x^{-1} \underline{x} s^* =$$

$$= P_s - R_{sx} R_x^{-1} \underbrace{E\underline{x}s^*}_{R_{xs}} \Longrightarrow \boxed{\hat{p}(s|\underline{x}) = E|s|^2 - R_{sx} R_x^{-1} R_{xs}}$$

نکات:

① اگر R_x سینگولار باشد این به معنی وجود یک رابطهٔ خطی بین داده‌ها است یعنی اینکه یکی از داده‌ها خود ترکیبی خطی از بقیهٔ داده‌ها است، یعنی درواقع فضای داده‌ها (n-1) بعدی است. بعبارت معادل، آن داده‌ای که خود ترکیبی خطی از بقیهٔ داده‌ها است، با معلوم بودن بقیهٔ هیچ کمکی به تخمین خطی نخواهد کرد. لذا می‌توان آن را از جمع داده‌ها کنار گذاشت و تخمین خطی را برحسب بقیهٔ داده‌ها بدست آورد. این به معنی حذف سطر و ستون مربوطه در R_x است

آن را از حالت سینگولار خارج کند. اگر لازم بود باید همین کار را تکرار نمود.

② به کمک مدل ریاضی گفته شده، براحتی می توان روابط تخمین مستوی را نیز پیدا کرد.

$$\hat{S} = \hat{E}(s|\underline{X}, X_0) = m_s + \hat{E}(\tilde{s}|\tilde{\underline{X}}) = m_s + R_{\tilde{s}\tilde{x}} R_{\tilde{x}}^{-1} \tilde{\underline{X}} \Longrightarrow$$

$$\longrightarrow \boxed{\hat{S} = \hat{E}(s|\underline{X}, X_0) = m_s + C_{sx} C_x^{-1} (\underline{X} - \underline{m}_x)}$$

$$\hat{P}(s|\underline{X}, X_0) = \hat{P}(\tilde{s}|\tilde{\underline{x}}) = E|\tilde{s}|^2 - R_{\tilde{s}\tilde{x}} R_{\tilde{x}}^{-1} R_{\tilde{x}\tilde{s}} \Longrightarrow$$

$$\longrightarrow \boxed{\hat{P}(s|\underline{X}, X_0) = \sigma_s^2 - C_{sx} C_x^{-1} C_{xs}}$$

③ می توان روابط را برحسب بردار ابداع داده ها نیز نوشت که در این صورت فرم ساده تری پیدا کن

چراکه :

$$\underline{X} \overset{\text{خطی}}{\equiv} \underline{W}$$

$$\begin{cases} \underline{m}_w = 0 \\ R_w = C_w = I \Longrightarrow R_w^{-1} = I \end{cases}$$

$$\hat{S} = \hat{E}(s|\underline{X}) = \hat{E}(s|\underline{w}) = R_{sw} R_w^{-1} \underline{w} = \boxed{R_{sw} \underline{w}}$$

$$\hat{P}(s|X) = \hat{P}(s|\underline{w}) = E|s|^2 - \underbrace{R_{sw} R_w^{-1} R_{ws}}_{\underbrace{R_{sw} R_{ws}}_{R_{ws}^h}} = E|s|^2 - \|R_{sw}\|^2$$

3-2- تخمین چند مجهول (بردار مجهول) برحسب بردار داده ها

تخمین مثلاً m مجهول S_1 و S_2 و ... و S_M را برحسب بردار داده ها $\underline{X}$ در نظر می گیریم.

$$\left.\begin{array}{l} \hat{S}_1 = \hat{E}(S_1|X) = R_{S_1X} R_X^{-1} \underline{X} \\ \hat{S}_2 = \hat{E}(S_2|X) = R_{S_2X} R_X^{-1} \underline{X} \\ \quad\vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \\ \hat{S}_m = \hat{E}(S_m|X) = R_{S_mX} R_X^{-1} \underline{X} \end{array}\right\} \Longrightarrow$$

ادامه در ص بعد

و به طور خلاصه:

$$\underline{\hat{S}} = \begin{pmatrix} \hat{S}_1 \\ \hat{S}_2 \\ \vdots \\ \hat{S}_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_{S_1X} \\ R_{S_2X} \\ \vdots \\ R_{S_mX} \end{pmatrix} R_X^{-1} \underline{X} = E \begin{pmatrix} S_1 X^h \\ S_2 X^h \\ \vdots \\ S_m X^h \end{pmatrix} R_X^{-1} . \underline{X} =$$

$$= E(\underline{S}\,\underline{X}^h) R_X^{-1} \underline{X} \Longrightarrow \underline{\hat{S}} = R_{SX} R_X^{-1} \underline{X} \Rightarrow \boxed{\underline{\hat{S}} = \hat{E}(\underline{S}|\underline{X}) = R_{SX} R_X^{-1} \underline{X}}$$

درواقع تخمین m مجهول را می توان m مسألهٔ مستقل از هم دانست که جواب آن ها با فرمول سادهٔ زیر خلاصه می گردد :

$$\underline{\hat{S}} = \hat{E}(\underline{S}|\underline{X}) = R_{SX} R_X^{-1} \underline{X}$$

برای مجموع خطای تخمین این m مجهول نیز می توان رابطهٔ ساده‌ای پیدا کرد.

$$P_{min} = \hat{P}(\underline{S}|\underline{X}) \triangleq \sum_{i=1}^{m} E|S_i - \underbrace{\hat{E}(S_i|\underline{X})}_{\hat{S}_i}|^2 = E\sum_{i=1}^{n} |S_i - \hat{S}_i|^2 =$$

$$= E\|\underline{S} - \underline{\hat{S}}\|^2 = E\,\mathrm{Trace}(\underline{S} - \underline{\hat{S}})(\underline{S} - \underline{\hat{S}})^h = \mathrm{Trace}\Big(E(\underline{S} - \underline{\hat{S}})\underline{S}^h - E(\underline{S} - \underline{\hat{S}})\underline{\hat{S}}^h\Big)$$

$$= \mathrm{Trace}(E\underline{S}\underline{S}^h - E\underline{\hat{S}}\underline{S}^h) - \mathrm{Trace}(\underbrace{E(\underline{S} - \underline{\hat{S}})\underbrace{(R_{SX}R_X^{-1}\underline{X})^h}_{X^h R_X^{-1} R_{SX}^h}}_{\text{که طبق اصل تعامد} = 0}) =$$

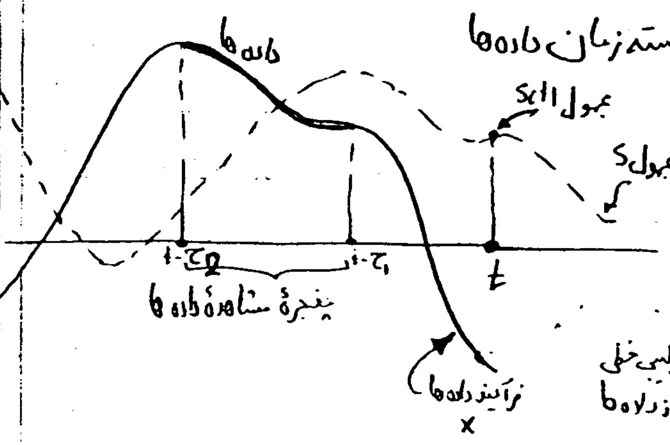
$$= \mathrm{Trace}(R_S) - \mathrm{Trace}(E R_{SX} R_X^{-1} \underline{X}\,\underline{S}^h) \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \boxed{\hat{P}(\underline{S}|\underline{X}) = \mathrm{trace}(R_S) - \mathrm{trace}(R_{SX} R_X^{-1} R_{XS})}$$

---

4 - تخمین خطی برحسب فرآیند پیوسته‌زمان داده‌ها

4-1 کلیات



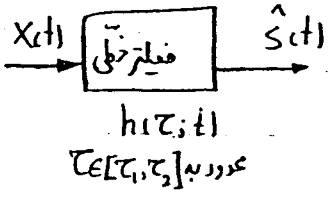
$$\hat{S}(t) = \hat{E}(S(t) | X(t-\alpha), \alpha \in [\tau_1, \tau_2$$

$$= \int_{\alpha=\tau_1}^{\tau_2} h(\alpha; t) X(t-\alpha)\, d\alpha$$

به صورت ترکیبی خطی از داده‌ها

$$= \int_{\alpha=-\infty}^{+\infty} h(\alpha;t)X(t-\alpha)d\alpha \quad , \quad h(\alpha;t)=0 \text{ for } \alpha\notin[\tau_1,\tau_2]$$

ملاحظه می گردد که می توان تخمین خطی را، معادل مسألهٔ پیدا کردن یک فیلتر خطی دانست، فیلتری که:



و خطای زیر را مینیمم کند:

$$P = E|S(t)-\hat{S}(t)|^2$$

به کمک اصل تعامد می توان پاسخ ضربهٔ این فیلتر را پیدا کرد.

$$S(t) - \int_{\alpha=\tau_1}^{\tau_2} h(\alpha;t)X(t-\alpha)d\alpha \perp X(t-\tau) \quad \text{for } \forall\tau\in[\tau_1,\tau_2]$$

یعنی:

$$E\left(S(t) - \int_{\alpha=\tau_1}^{\tau_2} h(\alpha;t)X(t-\alpha)\right)X^*(t-\tau)=0 \Longrightarrow$$

~~$\rightarrow R_{SX}(t,t-\tau) = \int_{\alpha=\tau_1}^{\tau_2}$ [illegible]~~

$$\longrightarrow \begin{cases} R_{SX}(t,t-\tau) = \int_{\alpha=\tau_1}^{\tau_2} h(\alpha;t)R_X(t-\alpha,t-\tau)d\alpha \\ \forall\tau\in[\tau_1,\tau_2] \end{cases}$$

در این معادلهٔ انتگرالی، همانها (R_{SX} و R_X) معلوم فرض می گردند و مجهول پاسخ ضربه فیلتر $h(\alpha;t)$ است.

راه حل کلی معادلهٔ انتگرالی فوق روش عددی است که این معادله را به یک دستگاه معادلات خطی بدل کنند

* اگر فرآیند داده ها، همان فرآیند مجهول باشد $X=S$ و $\tau_1>0$ باشد، معادله را پیشگوئی خالص گویند اما در حالت کلی و با $\tau_1>0$ مسأله را فیلترینگ + پیشگوئی گویند.

در حالت $\tau_1=0$ معادله را فیلترینگ خالص گویند.

اگر $\tau_1<0$ باشد، لحظهٔ t نمی تواند زمان واقعی باشد، یعنی با یک مسألهٔ غیر زمان واقعی سر و کار داریم، فیلتر حاصل نیز یک فیلتر غیر علّی می گردد.

(مسألهٔ غیر زمان واقعی یعنی مسأله‌ای که در آن پارامتر t زمان نیست و یا این که زمان واقعی نیست و زمان قراردادی است.)

* درحالتی که فرآینده‌داده‌ها و فرآیند مجهول توأماً WSS باشند، فیلتر لازم نیز یک فیلتر LTI می گردد چرا
معادلهٔ انتگرالی به‌صورت زیر در می‌آید:

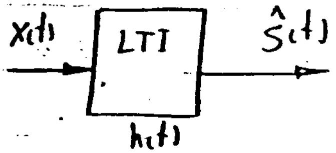
$$R_{SX}(\tau) = \int_{\alpha=\tau_1}^{\tau_2} h(\alpha;t) R_X(\tau-\alpha)\, d\alpha \quad \forall \tau \in [\tau_1, \tau_2]$$

در این معادله صمت‌های معلوم به t بستگی ندارد، پس جواب
معادله یعنی $h(\alpha;t)$ نیز به t بستگی نخواهد داشت، یعنی:

* برای فرآیندهای توأماً ساکن:

$$\hat{S}(t) \equiv \hat{E}(S(t) \mid X(t-\alpha), \alpha \in [\tau_1, \tau_2]) =$$

$$= \int_{\alpha=\tau_1}^{\tau_2} h(\alpha) X(t-\alpha)\, d\alpha \equiv h(t) * X(t)$$



محدود به $t \in [\tau_1, \tau_2]$

$$\text{معادلهٔ وینر هوف} \begin{cases} R_{SX}(\tau) = \int_{\tau_1}^{\tau_2} h(\alpha) R_X(\tau-\alpha) d\alpha \\ \forall\, \tau \in [\tau_1, \tau_2] \end{cases} \Longrightarrow h(t)$$

$$P_{min} = E(S(t) - \hat{S}(t))\, S^*(t)$$

(جلسهٔ آخر) /// New

4-1- کلیات

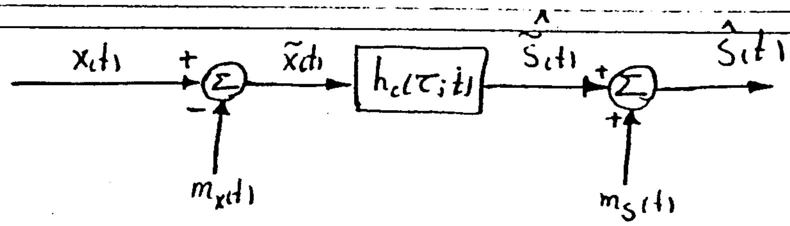
نکات:

① با پیدا کردن پاسخ ضربهٔ فیلتر لازم، محاسبهٔ متوسط مربع خطا از رابطهٔ زیر به راحتی مقدور خواهد بود:

$$P_{min} = E(S(t) - \hat{S}(t))\, S^*(t) = E\left(S(t) - \int_{\tau_1}^{\tau_2} h(\alpha;t) X(t-\alpha) d\alpha\right) S^*(t) =$$

$$\underset{\text{به طور کلی}}{=} R_S(t,t) - \int_{\tau_1}^{\tau_2} h(\alpha;t) R^*_{SX}(t, t-\alpha) d\alpha \underset{\substack{\text{در توأماً} \\ WSS}}{=} R_S(0) - \int_{\tau_1}^{\tau_2} h(\alpha;t) R^*_{SX}(\alpha) d\alpha$$

② با استفاده از مدل ریاضی گفته شده تخمین مستوی را می توان بدست آورد.



مثلاً در حالت توأماً WSS داریم :

$$\hat S(t) = m_S + \int_{\tau_1}^{\tau_2} h_c(\alpha)\left(X(t-\alpha) - m_X\right) d\alpha$$

و معادلهٔ انتگرالی برای تعیین $h_c(t)$:

$$C_{SX}(\tau) = \int_{\tau_1}^{\tau_2} h_c(\alpha) C_X(\tau-\alpha)\, d\alpha, \quad \forall \tau \in [\tau_1, \tau_2]$$

③ در حالت توأماً WSS با توجه به رابطهٔ زیر :

$$\hat S(t) = h(t) * X(t) \Longrightarrow \hat S(t+\lambda) = h(t+\lambda) * X(t) = h_0(t) * X(t)$$

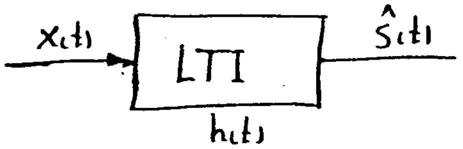
پس برای تعیین $S(t+\lambda)$ کافی است تعیین $S(t)$ را برای پنجرهٔ مشاهدهٔ داده‌های با $\tau_1' = \tau_1 + \lambda$ و $\tau_2' = \tau_2 + \lambda$ در نظر گیریم و سپس از روی این پاسخ ضربهٔ $h(t)$ پاسخ ضربهٔ مورد نیاز $h_0(t)$ را بدست آوریم

$$h_0(t) = h(t+\lambda)$$

4-2- حالت ساکن و مشاهدهٔ کامل

$$\hat S(t) = \hat E\left(S(t) \mid X(t-\alpha) : \alpha \in \mathbb{R}\right) = \int_{\alpha=-\infty}^{+\infty} h(\alpha) X(t-\alpha)\, d\alpha = h(t) * X(t)$$

مسأله معادل است با مسألهٔ پیدا کردن یک فیلتر LTI که هیچ قیدی روی پاسخ ضربهٔ آن نداریم .



به طوری که : $E|S(t) - \hat S(t)|^2 = Min$

فیلتر لازم در حالت کلی یک فیلتر غیرعلّی می‌گردد و به فیلتر وینر غیرعلّی معروف است .

با نوشتن اصل تعامد :

$$\begin{cases} \left(S(t) - \int_{\alpha=-\infty}^{+\infty} h(\alpha) X(t-\alpha)\, d\alpha\right) \perp X(t-\tau) \\ \forall \tau \in \mathbb{R} \end{cases}$$

$$\Longrightarrow\begin{cases} R_{SX}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\alpha) R_X(\tau-\alpha)\, d\alpha = h(\tau) * R_X(\tau) \\ \forall \tau \in \mathbb{R} \end{cases}$$

چون دو طرف تساوی به‌ازای جمیع مقادیر τ مساوی هستند، پس تبدیل فوریه دو طرف نیز مساوی خواهد بود.

$$\Longrightarrow S_{SX}(f) = H(f) \cdot S_X(f) \Longrightarrow \boxed{H(f) = \frac{S_{SX}(f)}{S_X(f)}} \quad , \quad h(t) = F^{-1}\{H(f)\}$$

$$P_{min} = E\left(S(t) - \int_{-\infty}^{+\infty} h(\alpha) X(t-\alpha) d\alpha\right) S^*(t) =$$

$$= R_S(0) - \int_{-\infty}^{+\infty} h(\alpha) R^*_{SX}(\alpha)\, d\alpha = \int_{-\infty}^{+\infty} S_S(f) df - \int_{-\infty}^{+\infty} H(f) S^*_{SX}(f) df =$$

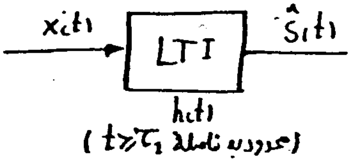
$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \left(S_S(f) - \frac{S_{SX}(f)}{S_X(f)} S^*_{SX}(f)\right) df \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \boxed{P_{min} = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(S_S(f) - \frac{|S_{SX}(f)|^2}{S_X(f)}\right) df}$$

4-3- حالت ساکن و مشاهده از $-\infty$ تا لحظهٔ $t-\tau_1$

$$\hat{S}(t) = \hat{E}\left(S(t) \mid X(t-\alpha) : \alpha \in [\tau_1, \infty)\right) = \int_{\alpha=\tau_1}^{\infty} h(\alpha) X(t-\alpha)\, d\alpha = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\alpha) X(t-\alpha) d\alpha$$

مسأله معادل است با مسألهٔ پیدا کردن یک فیلتر LTI که پاسخ ضربهٔ آن از لحظهٔ τ_1 شروع می‌گردد.



اگر $\tau_1 = 0$ در نظر گرفته شود (یعنی حالتی که فرآیند داده‌ها از لحظهٔ $-\infty$ تا خود لحظهٔ t مشاهده شده است و می‌خواهیم تخمین فرآیند مجهول را در همان لحظهٔ t بدست آوریم.) ، قیدی که روی فیلتر خواهیم داشت قید علّی بودن خواهد بود و فیلتر مربوطه را فیلتر وینر علّی گویند.

به کمک اصل تعامد:

$$\begin{cases} R_{sx}(\tau) = \int_{\tau_1}^{\infty} h(\alpha) R_x(\tau-\alpha)\, d\alpha \\ \forall \tau \not\geq \tau_1 \end{cases}$$

چون دوطرف به‌ازای جمیع مقادیر τ مساوی نیستند، پس لزوماً تبدیل فوریه های یکسان نخواهند داشت.

یک راه‌حل سادۀ مسأله، استفاده از فرآیند ابداع ~~[illegible]~~ داده ها است. فرآیندی سفید و نرمالیزه که با فرآیند داده ها بطور خطی و علّی معادل است ولذا:

$$\{X(t-\alpha) : \alpha \in [\tau_1, \infty)\} \overset{\text{خطی}}{\equiv} \{w(t-\alpha) : \alpha \in [\tau_1, \infty)\}$$

یعنی:

$$\hat{S}(t) = \hat{E}\{s(t) \mid x(t-\alpha) : \alpha \in [\tau_1, \infty)\} = \hat{E}(S(t) \mid w(t-\alpha) : \alpha \in [\tau_1, \infty)) =$$

$$= \int_{\alpha=\tau_1}^{\infty} h_w(\alpha) w(t-\alpha)\, d\alpha$$

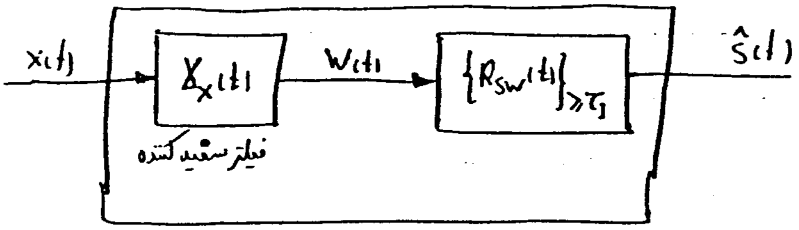
$$\text{اصل تعامد} \longrightarrow \begin{cases} R_{sw}(\tau) = \int_{\tau_1}^{+\infty} h_w(\alpha) R_w(\tau-\alpha) d\alpha \\ \forall \tau \geq \tau_1 \end{cases}$$

$$S_w(f) = 1 \Longrightarrow R_w(\tau) = \delta(\tau)$$

پس:

$$R_{sw}(\tau) = \int_{\tau_1}^{\infty} h_w(\alpha) \delta(\tau-\alpha) d\alpha \underset{\tau \geq \tau_1}{=} h_w(\tau) \Longrightarrow \boxed{\begin{aligned} h_w(t) &= R_{sw}(t) \,, & t \geq \tau_1 \\ &= 0 \,, & t < \tau_1 \end{aligned}}$$

$$\Longrightarrow \boxed{h_w(t) = \{R_{sw}(t)\}_{\geq \tau_1}}$$



$$h(t) \longrightarrow h(t) = \gamma_x(t) * h_w(t) = = \gamma_x(t) * \{R_{sw}(t)\}_{\geq \tau_1}$$

در حوزهٔ فرکانس :

$$H(f)=\Gamma_x(f).\left\{S_{sw}(f)\right\}_{\geq\tau_1}^{\text{در حوزهٔ زمان}}$$

به راحتی دیده می‌شود که با $\tau_1=-\infty$ داریم:

$$H(f)=\Gamma_x(f).\left\{S_{sw}(f)\right\}_{\geq-\infty}=$$

$$=\Gamma_x(f).\,S_{sw}(f)=\Gamma_x(f)\,S_{sx}(f)\,\Gamma_x^*(f)=S_{sx}(f).\left|\Gamma_x(f)\right|^2=\frac{S_{sx}(f)}{S_x(f)}$$

$$w=\gamma_x * x$$

که نتایج گذشته را تصدیق می‌کند. (همان جواب قسمت 4-12)

رابطهٔ مفید ⟵ $\boxed{S_{sw}(f)=S_{sx}(f)\,\Gamma_x^*(f)}$

مهم

$$\boxed{P_{min}=R_s(0)-\int_{\tau_1}^{\infty}h(\alpha)R_{sx}^*(\alpha)d\alpha=R_s(0)-\int_{\tau_1}^{\infty}h_w(\alpha)R_{sw}^*(\alpha)d\alpha}$$

* تبصره: برای تابع کسری $G(f)$ محاسبهٔ $\left\{G(f)\right\}_{\geq\tau_1}$ در همان حوزهٔ فرکانس مقدور است:

$$G(f)=\underbrace{\sum_{LHP}\frac{a_i}{j2\pi f-p_i}}_{\text{قسمت علّی}}+\underbrace{\sum_{RHP}\frac{b_i}{j2\pi f-q_i}}_{\text{قسمت ضدّعلی}}+\underbrace{\sum_i c_i(j2\pi f)^i}_{\text{پاسخ واقع در } t=0}$$

$$\left\{G(f)\right\}_{\geq\tau_1}=\begin{cases}\displaystyle\sum_{LHP}\frac{a_i}{j2\pi f-p_i}e^{-\tau_1(j2\pi f-p_i)}, & \tau_1>0\\[2ex] \displaystyle\sum_{LHP}\frac{a_i}{j2\pi f-p_i}+\sum_i c_i(j2\pi f)^i, & \tau_1=0\\[2ex] \displaystyle G(f)-\sum_{RHP}\frac{b_i}{j2\pi f-q_i}e^{-\tau_1(j2\pi f-q_i)}, & \tau_1<0\end{cases}$$

4-4 - حالت ساکن و پیشگوئی خالص

$\hat{S}(t)=\hat{E}(s(t)\,|\,s(t-\alpha):\alpha\in[\tau_1,\infty])$ و (البته با $\tau_1>0$)

حالت خاص 4-3- می باشد با تبدیل x به s و اینکه $\tau_1>0$.

$$H(f)=\Gamma_s(f)\left\{S_{sw}(f)\right\}_{\geqslant\tau_1}\longrightarrow$$

$$S_{sw}(f)=S_s(f)\,\Gamma_s^*(f)=L_s(f)\,\cancel{L_s^*(f)}\,\cancel{\Gamma_s^*(f)}=L_s(f)$$

$$\longrightarrow\boxed{H(f)=\Gamma_s(f).\left\{L_s(f)\right\}_{\geqslant\tau_1}}$$

$$P_{min}=R_s(0)-\int_{\tau_1}^{\infty}h_w(\alpha)R_{sw}^*(\alpha)\,d\alpha\longrightarrow P_{min}=\int_{-\infty}^{+\infty}\underbrace{S_s(f)}_{|L_s(f)|^2}df-\int_{\tau_1}^{\infty}|l_s(\alpha)|^2d\alpha\longrightarrow$$

$$h_w(t)=\left\{R_{sw}(t)\right\}_{\geqslant\tau_1}=\left\{l_s(t)\right\}_{\geqslant\tau_1}$$

$$R_{sw}(t)=l_s(t)$$

$$\xrightarrow[\text{پارسوال}]{}P_{min}=\int_{-\infty}^{+\infty}|l_s(\alpha)|^2d\alpha-\int_{\tau_1}^{\infty}|l_s(\alpha)|^2d\alpha$$

$$\longrightarrow P_{min}=\int_{-\infty}^{\tau_1}|l_s(\alpha)|^2d\alpha\underset{\text{علی بودن}}{=}\int_{0}^{\tau_1}|l_s(\alpha)|^2d\alpha\longrightarrow$$

$$\longrightarrow\boxed{\begin{cases}h(t)=\gamma_s(t)*\left\{l_s(t)\right\}_{\geqslant\tau_1}\\H(f)=\Gamma_s(f).\left\{L_s(f)\right\}_{\geqslant\tau_1}\\P_{min}=\int_{0}^{\tau_1}|l_s(t)|^2dt\end{cases}}$$

مثال: پیشگوئی فرآیند با تابع همبستگی $R_s(\tau)=e^{-\beta|\tau|}$

$$\longrightarrow S_s(f)=\frac{2\beta}{\beta^2+(2\pi f)^2}=\frac{2\beta}{(\beta+j2\pi f)(\beta-j2\pi f)}=L_s(f)L_s^*(f)\longrightarrow$$

جواب مینیم فاز:

$$L_s(f)=\frac{\sqrt{2\beta}}{\beta+j2\pi f}\Longrightarrow \Gamma_s(f)=\frac{1}{\sqrt{2\beta}}(\beta+j2\pi f)$$

$$H(f)=\Gamma_s(f)\{L_s(f)\}_{\geq\tau_1}=\frac{1}{\cancel{\sqrt{2\beta}}}(\beta+j2\pi f)\left\{\frac{\cancel{\sqrt{2\beta}}}{\beta+j2\pi f}\right\}_{\geq\tau_1}=$$

$$\xrightarrow{\tau_1>0}=\cancel{(\beta+j2\pi f)}\frac{e^{-\tau_1(\beta+j2\pi f)}}{\cancel{\beta+j2\pi f}}\Longrightarrow H(f)=e^{-\tau_1(j2\pi f+\beta)}=e^{-\beta\tau_1}e^{-j2\pi f\tau}$$

$$\Longrightarrow h(t)=e^{-\beta\tau_1}\cdot\delta(t-\tau_1)\Longrightarrow \hat{S}(t)=S(t)*h(t)=e^{-\beta\tau_1}S(t-\tau_1)$$

پس برای فرآیند با تابع همبستگی $e^{-\beta|\tau|}$ بهترین پیشگوئی خطی آینده به صورت ضریبی از آخرین مقدار مشاهده شده است و به عبارت معادل:

$$\hat{E}(S(t)\mid S(t-\alpha):\alpha\in[\tau_1,\infty])=\hat{E}(S(t)\mid S(t-\tau_1))$$

چنین فرآیندی را فرآیند مارکوف به مفهوم وسیع گویند.

4-5- حالت ساکن با مدل خطی

الف) کلیات

منظور ما از مدل خطی، مدل زیر است:

$$\left\{\begin{array}{l}X(t)=S(t)+V(t)\\ R_V(\tau)=N_0\,\delta(\tau)\Longleftrightarrow S_V(f)=N_0\\ V(\cdot)\perp S(\cdot)\end{array}\right\}$$

$$S_X(f)=S_S(f)+S_V(f)=S_S(f)+N_0$$

$$S_{SX}(f)=S_{SS}(f)+S_{SV}(f)=S_S(f)+0=(S_X(f)-N_0)$$

$$S_{SW}(f)=S_{SX}(f)\Gamma_X^*(f)=(S_X(f)-N_0)\Gamma_X^*(f)=L_X(f)-N_0\Gamma_X^*(f)\Longrightarrow$$

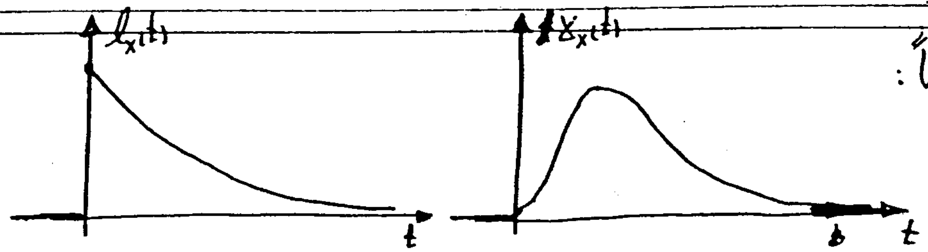
$$\Longrightarrow R_{SW}(t)=l_X(t)-N_0\,\gamma_X^*(-t)$$

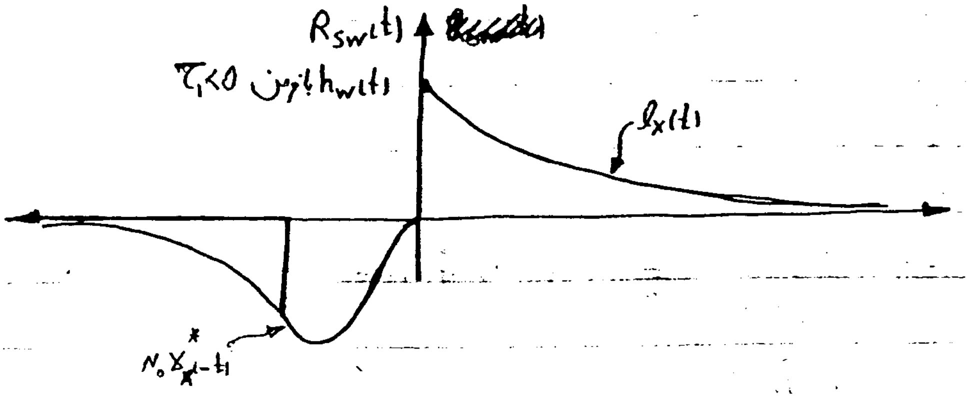
برای مشاهده از $-\infty$ تا $t-\tau_1$:

$$h_W(t)=\{R_{SW}(t)\}_{\geq\tau_1}\Longrightarrow h(t)=\gamma_X(t)*h_W(t)$$

$$P_{min}=R_S(0)-\int|R_{SW}(\alpha)|^2d\alpha$$

مثلاً:





ب) مشاهدهٔ کامل

$$H(f)=\frac{S_{sx}(f)}{S_x(f)}\ ,\ P_{min}=\int_{-\infty}^{+\infty}\left(S_s(f)-\frac{|S_{sx}(f)|^2}{S_x(f)}\right)df$$

$$\Longrightarrow \boxed{H(f)=\frac{S_s(f)}{S_s(f)+N_0}} \Longrightarrow h(t)=F^{-1}\{H(f)\}$$

$$P_{min}=\int_{-\infty}^{+\infty}\left(S_s(f)-\frac{d S_s^2(f)}{S_s(f)+N_0}\right)df=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{N_0 S_s(f)}{S_s(f)+N_0}df=N_0\int_{-\infty}^{+\infty}H(f)df=N_0 h(0)$$

$$\longrightarrow \boxed{P_{min}=N_0 h(0)}$$

ج) فیلترینگ + پیشگویی

یعنی حالتی که مشاهدات به خود لحظهٔ t نرسیده است، یعنی $\tau_1>0$ است.

$$\{R_{sw}(t)\}_{\geq\tau_1}=\{\ell_x(t)\}_{\geq\tau_1}-N_0\{\gamma_x^*(-t)\}_{\geq\tau_1}\overset{\tau_1>0}{=}\{\ell_x(t)\}_{\geq\tau_1}-0$$

$$h(t)=\gamma_x(t)*h_w(t)=\gamma_x(t)*\{\ell_x(t)\}_{\geq\tau_1}\longrightarrow\left\{\begin{array}{l}h(t)=\gamma_x(t)*\{\ell_x(t)\}_{\geq\tau_1}\\ H(f)=\Gamma_x(f)\cdot\{L_x(f)\}_{\geq\tau_1}\\ P_{min}=R_s(0)-\int_{\tau_1}^{\infty}|\ell_x(\alpha)|^2d\alpha\end{array}\right\}$$

(د) فیلترینگ خالص (فیلتر وینر علّی)

یعنی حالتی که $\tau_1=0$ است.

تفاوتی که این حالت با حالت قبل ($\tau_1>0$) دارد اینکه اگر $\gamma_X(t)$ در $t=0$ دارای تابع ضربه باشد، $\{\gamma_X^*(-t)\}_{\geq 0}$ صفر نخواهد بود، بلکه همان ضربه باقی می‌ماند.

$$|\Gamma_X(f)|^2=\frac{1}{S_X(f)}=\frac{1}{S_S(f)+N_0}$$

$$|\Gamma_X(\infty)|^2=\frac{1}{S_S(\infty)+N_0}=\frac{1}{N_0}\Longrightarrow \Gamma_X(\infty)=\frac{1}{N_0}\longrightarrow$$

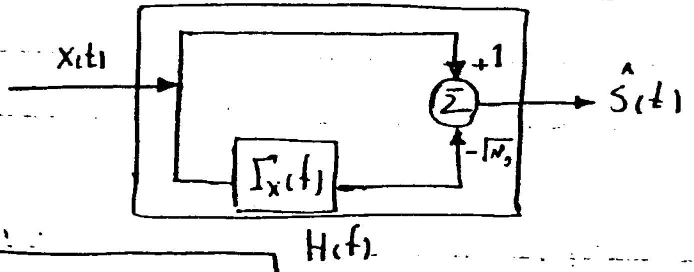
با فرض $S_S(\infty)=0$

$$\longrightarrow \Gamma_X(f)=\sum\frac{r_i}{j2\pi f-p_i}+\frac{1}{\sqrt{N_0}}\Rightarrow \gamma_X(t)=\sum r_i e^{p_i t}+\frac{1}{\sqrt{N_0}}\delta(t)$$

$$h_w(t)=\{l_X(t)\}_{\geq 0}-N_0\{\gamma^*(-t)\}_{\geq 0}=l_X(t)-N_0\frac{1}{\sqrt{N_0}}\delta(t)=l_X(t)-\sqrt{N_0}\,\delta(t)$$

$$h(t)=\gamma_X(t)*h_w(t)=\gamma_X(t)*l_X(t)-\sqrt{N_0}\,\gamma_X(t)*\delta(t)\Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow\boxed{h(t)=\delta(t)-\sqrt{N_0}\,\gamma_X(t)}\Longleftrightarrow\boxed{H(f)=1-\sqrt{N_0}\,\Gamma_X(f)}$$



$$\Longrightarrow\boxed{\hat{S}(t)=X(t)-\sqrt{N_0}\,W(t)}$$

می‌توان نشان داد که در این فیلتر نیز:

$$\boxed{P_{min}=N_0\,h(\alpha)}$$

$S_{xy}(f) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} E X_T(f) Y_T(f) \longleftrightarrow \langle R_{xy}(t+\tau, t)\rangle_t$ و R_{xy}

$_x(f) = \frac{1}{T_0}\sum_{i=-\infty}^{+\infty} R_A(i)\, e^{-j2\pi f i T_0}$ فرض PAM

$|S_{xy}(f)|^2 \leqslant S_x(f) S_y(f)$

$S_{x+y}(f) = S_x(f) + S_y(f) + S_{xy}(f) + S_{yx}(f)$

y,x متعامد $\Longrightarrow 0$

مؤلفه

f یا $\Longrightarrow S_x(f) = \frac{K^2}{4}(f_A(f) + f_A(-f))$

A یا B

$S_x(f) = S_{m_x}(f) + S_{\tilde{x}}(f) \xrightarrow{WSS} S_x(f) = |m_x|^2 \delta(f) + S_{\tilde{x}}(f)$

x,y WSS و $S_x(f) S_y(f) = 0 \longrightarrow$ x,y متعامد و ناهمبسته

$R_x^*(t,s) = R_x(s,t)$

$R_x^*(\tau) = R_x(-\tau)$

$\int\int g(t) g^*(s) R_x(t,s) dt ds$ — است and تابع همبستگی

$|R_x(t,s)|^2 \leqslant R_x(t,t) R_x(s,s) \xRightarrow{WSS} |R_x(\tau)|^2 \leqslant R_x^2(0)$

در WSS حقیقی

$R_x(T_0) = R_x(0) \Longrightarrow$ دوره تناوب $R_x(\tau)$ ، T_0

$\underset{\text{با دوره تناوب } T_0}{R_x(\tau)} \Longrightarrow \underset{\text{با دوره تناوب } T_0}{x(t)}$

$S_{yx}(f) = H(f)\, S_x(f)$

$S_{xy}(f) = S_x(f) H^*(f)$

$S_y(f) = S_x(f) \cdot |H(f)|$

$L^{-1}\{s^i\} = \delta^{(i)}(t)$

$^{-1}\left\{\frac{1}{s - p_n}\right\} = \begin{cases} e^{p_n t} u(t) & \text{راست اگر} \\ -e^{p_n t} u(-t) & \text{چپ اگر} \end{cases}$

$\int_a^b \varphi_i(t) \varphi_k^*(t) dt = \begin{cases} 0 & K \neq i \\ \int_a^b |\varphi_i(t)|^2 dt = E_i, & K = i \end{cases}$

$\hat{g}(t) = \sum_n G_n \varphi_n(t)$, $\rho = \int_a^b |g(t) - \hat{g}(t)|^2 dt = \text{Min} = 0$

$G_n = \frac{1}{E_n}\int_a^b g(t) \varphi_n^*(t) dt$

بسط فوریه

$\begin{cases} R_x(\tau) = \sum_n \lambda_n e^{jnw_0 t} \varphi_n(t) \\ \lambda_n = \frac{1}{T_0}\int_{T_0} R_x(\alpha) e^{-jnw_0\alpha} \end{cases}$

$) = \sum_n C_n e^{jnw_0 t}$ کلیه C_n ها متعامد و ناهمبسته

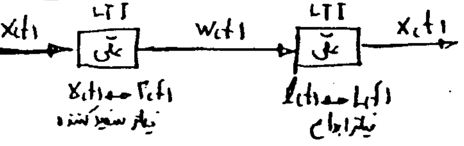
$= \frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} X(\alpha) e^{-jnw_0\alpha}$ / $E_{C_n C_m^*} = \lambda_n \text{Sinc}(n-m)$

$\int_a^b R_x(t,s) \varphi(s) ds = \lambda \varphi(t)$ ⟸ از تعامد ناهمبستگی ضرایب نتیجه می‌شود)

$\int_a^b |\varphi(t)|^2 dt = 1$, $\int_a^b \varphi_i(t) \varphi_j^*(t) dt = 0$

تابع همبستگی پیوسته $\Longrightarrow R_x(t,s) = \sum_n \lambda_n \varphi_n(t) \varphi_n^*$

رابطه مرسر $\forall t, s \in [a,b]$



$\begin{cases} \hat{x}(t) = \sum_n C_n \varphi_n(t) \\ C_n = \int_a^b X(\alpha) \varphi_n^*(\alpha) d\alpha \end{cases}$

ضرایب بسط متعامدند.

$E\, C_n C_m^* =$

$R_{\hat{x}}(t,t) = \sum_n \lambda_n$

$= R_{x\hat{x}}$

$L(f) = 1$, $S_x(f) = |L(f)|^2$

شرط پالی وی $\longrightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\ln|H|}{1+f^2} df \neq \pm\infty \Longrightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\ln S_x(f)}{1+f^2} df \neq \pm\infty$ یا $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\ln|L(f)|}{1+f^2} df$

$R_x(\tau) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} R_x(nT)\, \text{Sinc}\left(\frac{\tau - nT}{T}\right)$ $T \geqslant \frac{1}{2W}$

$g(t) = \sum_{K=-\infty}^{+\infty} g(KT)\, \text{Sinc}\left(\frac{t - KT}{T}\right)$

$C_x(\tau) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_x(nT)\, \text{Sinc}\left(\frac{\tau - nT}{T}\right)$

$g(t-s) = \sum_{K=-\infty}^{+\infty} g(KT - s)\, \text{Sinc}\left(\frac{t-KT}{T}\right)$

$X(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X(nT)\, \text{Sinc}\left(\frac{\tau - nT}{T}\right)$

$g(s-t) = \sum_{K=-\infty}^{+\infty} g(s - KT)\, \text{Sinc}\left(\frac{t-KT}{T}\right)$

$g(n) = \int_{-1/2}^{1/2} G(f) e^{j2\pi f n} df$

$G(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} g(n) z^{-n}$

$G(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} g(n) e^{-j2\pi f n}$

$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} g_1(n) g_2^*(n) = \int_{-1/2}^{1/2} G_1(f) G_2^*(f) df$

$-p_i\, u(-n-1)$

$\frac{1}{2}(u(n)-u(-n-1))p_i^n \quad |p_i$

$$(n) = m_x(n) * h(n)$$
$$(n,\ell) = R_x(n,\ell) * h(n)$$
$$n,\ell) = R_x(n,\ell) * h^*(\ell)$$
$$\ell) = R_x(n,\ell) * h(n) * h^*(\ell)$$

$\xrightarrow{\qquad}$ در LTI ا ورودی wss ورودی و خروجی توأماً wss می‌شوند

$$\begin{cases} m_y = m_x H(0) \\ R_{YX}(m) = h(m) * R_x(m) \\ R_{XY}(m) = R_x(m) * h^*(-m) \\ R_Y(m) = R_x(m) * h(m) * h^*(-m) \end{cases}$$

$$S_{YX}(z) = H(z)\, S_X(z)$$
$$S_{XY}(z) = S_X(z) \cdot H^*\left(\frac{1}{z}\right)$$
$$S_Y(z) = S_X(z) \cdot H(z) H^*\left(\frac{1}{z}\right)$$

$$S_X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} R_x(n) z^{-m}$$

$\Longrightarrow f_X(\underline{x};\underline{n}) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i)$ SSS کامل مدلسازی

$$S_X(f) = \sigma_X^2 + m_x^2 \delta(f) \quad f \in \{-\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}\}$$

$$\Longrightarrow R_X(m) = C_X(m) = 0$$
$$R_X(0) = C_X(0) = E\,|\tilde{X}(n)|^2 = \sigma^2$$

$M)$

$\longrightarrow X(n) = [b_1 V(n-1) + \dots + b_M V(n-M)] + V(n)$ $\quad V(n) \longrightarrow \boxed{\text{LTI}} \longrightarrow X(n)$

$)$

$\longrightarrow X(n) = -[a_1 X(n-1) + \dots + a_N X(n-N)] + V(n)$ $\quad V(n) \longrightarrow \boxed{\text{LTI}} \longrightarrow X(n)$

$N) \Longrightarrow X(n) = -[a_1 X(n-1) + \dots + a_N X(n-N)] + [b_1 V(n-1) + \dots + b_M V(n-M)] + V(n)$

[illegible] $\longrightarrow \int_{-1/2}^{1/2} \ln(S_x(f))\, df \neq \pm\infty$

$\frac{\tau) - X(t)}{\tau} \Big|^2 \leqslant 4\pi^2 w P_X$ سرعت تغییرات

$R_X(\tau) \Big| \leqslant (2\pi w)^n P_X$ [illegible]

$\underline{t} \in T \;, \forall \underline{t}' \in T'^{m} \;, \forall n,m$

$\left.\begin{matrix} R_{xy}(t,t') = 0 \\ \forall t \in T, \forall t' \in T' \end{matrix}\right\} \Longrightarrow X(\cdot) \perp Y(\cdot)$

$\left.\begin{matrix} C_{xy}(t,t') = 0 \\ \forall t \in T, \forall t' \in T' \end{matrix}\right\} \Longrightarrow X(\cdot) \not\perp Y(\cdot)$

$\left.\begin{matrix} C_{xy}(t,t) = C_{yx}(t,t) \\ C^{*}_{x}(t,S) = C_{x}(S,t) \end{matrix}\right\} \longrightarrow$ همین طور برای R

$\left.\begin{matrix} X(t) \perp\!\!\!\perp X(S) \\ \forall\, |t-s| > a \end{matrix}\right\} \longrightarrow$ a-dependent

$\left.\begin{matrix} C_{X}(t,S) = 0 \\ \forall\, |t-s| > a \end{matrix}\right\} \longrightarrow$ a-correlated

$\rho_{X}(t,s) = \frac{C}{\sqrt{C_{X}}}$

Markov $\longrightarrow f_{X_{n+1}}(x_{n+1} | \underline{X} = \underline{x}) = f_{X_{n+1}}(x_{n+1} | X_n = x_n)$

Martingel $\longrightarrow E(X_{n+1} | \underline{X} = \underline{x}) = x_n$

بانو مستقل ← BNM

① BNM → Markov / ② $\left.\begin{matrix} \text{BNM} \\ m_x(t) = cte \end{matrix}\right\} \longrightarrow$ marting

③ Markove → توصیف مرتبه ② کامل / ④ BNM → توصیف فرآیند کامل

⑤ BNM → $C_X(t,T) = C_X(t,t) = \sigma_X^2(t)$

$\begin{cases} m_X(t) = m_X \\ R_X(t+\tau, t) = R_X(\tau) \end{cases}$

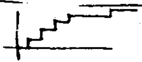
توابع احتمال n بعدی مستقل از t ← SSS مرتبه n

در SSCS و WSCS ← به جای مستقل از t، پریودیک نسبت به t

شرایط تواما WSS بودن X, Y $\begin{cases} \text{WSS تک تک} \\ R_{XY}(t+\tau, t) = R_{XY}(\tau) \end{cases}$

توابع توام مستقل از t

SSS مرتبه دو $\Longrightarrow$ WSS / ② ③ $\left.\begin{matrix} X \sim T_0 \text{ پریودیک با مرتبه n } \text{SSCS} \\ \text{WSCS} \\ \Phi \sim U(0, T_0) \\ \Phi \perp\!\!\!\perp X(\cdot) \end{matrix}\right\} \Longrightarrow Y(t) \triangleq X(t+\Phi) \downarrow$ SSS مرتبه n WSS



③ فرآیند شمارش رخدادها ⟸

BNM $\longrightarrow f(\underline{x};\underline{t}) = \frac{f(x_1;t_1) \prod_{2}^{n} f_X(x_i | X_{i-1} = x_{i-1})}{f_{\Delta X}(x_i - x_{i-1}; t_{i-1}, t_i)}$

با نو مستقل

$X(S) - X(t) \sim P(a_{t,s})$

$a_{t,s} = \int_t^s \lambda\, dt = \lambda(s-t)$

λ ثابت

$P_X(\underline{i};\underline{t}) = P_X(i_1;t_1) \prod_{K=2}^{n} P_{\Delta X}(i_K - i_{K-1}; t_{K-1}, t_K)$

توزیع احتمال n بعدی

$= e^{-a_{0,t_1}} \frac{a_{0,t_1}^{i_1}}{(i_1)!} \prod_{K=2}^{n} e^{-a_{t_{K-1},t_K}} \frac{(a_{t_{K-1},t_K})^{(i_K - i_{K-1})}}{(i_K - i_{K-1})!}$

$m_X(t) = \lambda t$

$C_X(t,S) = \lambda$

$= a$

$\sim E(\lambda)$

$\sim E(i,\lambda)$

$\sim E(\lambda)$

تلگرافی ← مارکوف و SSS کامل (در صورت λ ثابت)، ME (در صورت λ ثابت)

توزیع احتمال n بعدی

$X(t) = +1) = P(X(t) = -1) = \frac{1}{2}$

$X(S) = \pm 1 \,|\, X(t) = \pm 1) = \frac{1}{2}[1 + e^{-2a_{t,s}}]$

$X(S) = \pm 1 \,|\, X(t) = \mp 1) = \frac{1}{2}[1 - e^{-2a_{t,s}}]$

$P_X(\underline{i};\underline{t}) = P\{X(t_1) = i_1\} \prod_{K=2}^{n} P\{X(t_K) = i_K | X(t_{K-1}) = i_{K-1}\} =$

$= \frac{1}{2} \prod_{K=2}^{n} \frac{1}{2}[1 + i_{K-1} i_K e^{-2a_{t_{K-1},t_K}}]$

$\lambda = cte \longrightarrow a_{t_{K-1},t_K} = \lambda(t_K - t_{K-1})$

$m_X(t) = 0$

$C_X(t,S) = e$

$\equiv e$

λ ثابت

$X(t)$ نرمال و $Y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t,\alpha) X(\alpha)\, d\alpha \Longrightarrow Y(t)$ نیز نرمال

ل ← ممان اول و دوم = توصیف کامل (WSS ⟸ SSS کامل)

$f_X(\underline{x};\underline{t}) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n \det(C_X)}} e^{-\frac{1}{2} {}^{T}C_X^{-1}(\underline{x} - \underline{m}_X)}$

توصیف مرتبه n ام

③ بردار n بعدی ← n متغیر تصادفی نرمال

① کلیهٔ متغیرهای تصادفی ← متعامد + ناهمبسته (اگر مستقل هم باشد ← فرآیند نویز سفید اکید)

$X(\cdot) = N(0, q(s)\delta(t-s))$: فرآیند نویز سفید نرمال

سفید ←

$N(0, N_0\, \delta(\tau))$ ← فرآیند نویز سفید ساکن

($N_0 = 1$ ← نویز سفید نرمالیزه)

$\begin{cases} m_X(t) = \\ R_X(t+\tau, t) = \end{cases}$

$\sim \delta(0, N_0\, \delta(\tau))$

$X(\cdot) \triangleq \int_0^t W(\alpha)\, d\alpha \sim N(0, N_0 \operatorname{Min}(t,s))$

ز ⟸ فرآیندی نرمال است / با نو مستقل / مارکوف / مارتینگل

$m_X(t) = 0$

$C_X(t,S) = N_0 \operatorname{Min}\begin{Bmatrix} t \\ S \end{Bmatrix}$ ← با ممان های اول و دوم = کامل توصیف

$x) = f_X(x;t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi N_0 t}} e^{-x^2/2N_0 t}$

$;t,s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi N_0 |t-s|}} e^{-x^2/2N_0|t-s|}$

pdf n بعدی

$f_X(\underline{x},\underline{t}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi N_0 t_1}} e^{\frac{-x^2}{2N_0 t_1}} \prod_{K=2}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi N_0 (t_K - t_{K-1})}} e^{\frac{-(x_K - x_{K-1})^2}{2N_0 (t_K - t_{K-1})}}$

$t_n \geq \cdots \geq$

سیست :

$m_Y(t) = h(t) * m_X(t) \overset{\text{WSS}}{=\!=\!=} m_X \int_{-\infty}^{\infty} h(\alpha)\, d\alpha = m_X H(0)$

$R_{YX}(t,S) = h(t) * R_X(t,S) =\!=\!= h(\tau) * R_X(\tau)$

$R_{XY}(t,S) = R_X(t,S) * h^{*}(S) =\!=\!= R_X(\tau) * h^{*}(-\tau)$

$R_Y(t,S) = h(t) * R_X(t,S) * h^{*}(S) =\!=\!= h(\tau) * R_X(\tau) * h^{*}(-\tau)$

$R_{hX, gY}(t,S) = h_t$

با کلی

$R_{h*X, g*Y}(t,S) = h(t) *$

$$R_{XY}(t,s)=\frac{\partial}{\partial s}R_X(t,s)=-R'_X(\tau)$$

$$R_Y(t,s)=\frac{\partial^2}{\partial t\,\partial s}R_X(t,s)\underset{\substack{\uparrow\\ \text{wss}}}{=}-R''_X(\tau)$$

ME: $\langle x(t)\rangle_t \overset{ms}{=} m_X$ ← [illegible]

① شرط لازم و کافی ME بودن → $\begin{cases} m_X(t)=m_X \\ \langle\langle C_X(t,s)\rangle_t\rangle_s=0 \end{cases}$

$\lim \frac{1}{4T^2}\iint_{-T}^{T} E\tilde{X}(t)\tilde{X}^*(s)\,dt\,ds$

→ $\langle C_X(\tau)\rangle_\tau=0$ / ③ کافی برای ME بودن wss → $\int_{-\infty}^{+\infty} C_X(\tau)d\tau<\infty$ ④ کافی برای ME بودن wss → $\begin{cases} C_X(0)\neq\infty \\ C_X(\infty)=0 \end{cases}$

→ $\begin{cases} R_X(t+\tau,t)=R_X(\tau) & \text{کافی بودن ارگودیکی} \\ \langle\langle EX(t+\tau)X^*(t)X^*(s+\tau)X(s)\rangle_t\rangle_s=|R_X(\tau)|^2 \end{cases}$

⑥ شرط لازم و کافی DE رتبه اول → $\begin{cases} F_X(x;t)=F_X(x) & \text{sss رتبه اول بودن} \\ \langle\langle F_X(x,x;t,s)\rangle_t\rangle_s=F_X^2(x) \end{cases}$

$R_X(t+\tau,t)=E\,X(t+\tau)X^*(t)=\langle X(t+\tau)X^*(t)\rangle_t$

شرط لازم و کافی بودن DE → $\langle F_X(x,x;\tau)\rangle_\tau=F_X^2(x)$

⑤ شرط کافی DE بودن رتبه اول فرآیند sss رتبه دوم → استقلال متغیرهای تصادفی به فاصله $\tau\to\infty$

⑨ در فرآیندهای نرمال $\left.\begin{matrix}CE\\ME\end{matrix}\right\}\longrightarrow DE$

$f(x,y|A)=\begin{cases}\frac{1}{P(A)}f_{XY}(x,y), & (x,y)\in A\\ 0 & (x,y)\notin A\end{cases}$

$F_X(x|Y\leq y)=\frac{F_{XY}(x,y)}{F_Y(y)}$

$f_X(x|Y=y)=\frac{f_{XY}(x,y)}{f_Y(y)}$

① $E\,g(x,y)|A=\frac{1}{P(A)}\iint_A g(x,y)f_{XY}(x,y)\,dx\,dy$: 1

② $E\,g(X,Y)=E_Y\big(E_X(g(x,y)|y)\big)$

$\frac{\sigma_{XY}}{\sigma_X\sigma_Y}$ / تعمیم یافته چبیشف : $P\{|W|\geq a\}\leq\frac{E|W|^2}{a^2}$

مارکوف: $P\{X\geq Km_X\}\leq\frac{1}{K}$ نامساوی چبیشف: $P\{|X-m_X|\geq K\sigma_X\}\leq\frac{1}{K^2}$ شوارتز $(EXY)^2\leq E$

→ $f_X(x)\xrightarrow{FT}\Phi^*_X(\omega)$ / $\Phi_X^{(n)}(\omega)\Big|_{\omega=0}=j^nEX^n$

$|\Phi_X(\omega)|\leq1=\Phi_X(0)$ ✓

$\Gamma_X(z)=EZ^X$

$\{P_X(i)\}\xrightarrow{ZT}\Gamma_X(z^{-1})$

$$f_{XY}(x,y)=\frac{1}{\sqrt{(2\pi)^2(\sigma_X^2\sigma_Y^2-\sigma_{XY}^2)}}e^{-\frac{\sigma_X^2\tilde{y}^2+\sigma_Y^2\tilde{x}^2-2\sigma_{XY}\tilde{x}\tilde{y}}{2(\sigma_X^2\sigma_Y^2-\sigma_{XY}^2)}}$$

X,Y توأماً نرمال ← x|y نرمال است و داریم:

$\rho_{XY}\frac{\sigma_X}{\sigma_Y}(y-m_Y)+m_X$, $\sigma^2_{X|Y}=\sigma^2_X(1-\rho^2_{XY})$

$\boxed{\begin{matrix}\hat{S}=m_S\\ P_{min}=\sigma_S^2\end{matrix}}$ $\boxed{\begin{matrix}\hat{S}=\rho_{SX}\frac{\sigma_S}{\sigma_X}(X-m_X)+m_S\\ P_{min}=\sigma_S^2(1-\rho^2_{SX})\end{matrix}}$ بهترین: $\boxed{\begin{matrix}\hat{S}=g(x)=m_{S|X}\\ P_{min}=E(S-\hat{S})^2=\int_{-\infty}^{+\infty}f_X(x)\sigma^2_{S|x}\,dx=E\,\sigma^2_{S|X}\end{matrix}}$

$P(X\approx x_0)\triangleq f_X(x)\cdot\Delta x$

$\mathrm{trace}(A^hA)=\mathrm{trace}(AA^h)$

$[A]_{n\times m}$

بردار $\underline{a}$: $\|\underline{a}\|^2=\sum_{i=1}^{n}|a_i|^2=\underline{a}^h\cdot\underline{a}=\mathrm{trace}(\underline{a}\,\underline{a}^h)$

ماتریس یکانی: $A^h=A^{-1}$

$q_A(\underline{z})=\underline{z}^tA\underline{z}$

$h_A(\underline{z})=\underline{z}^hA\underline{z}$

تصادفی: عمود $R_{XY}=0$ → $\underline{X}\perp\underline{Y}\to R_{X+Y}=R_X+R_Y$

ناهمبسته $C_{XY}=0$ → $\underline{X}\not\perp\underline{Y}\to C_{X+Y}=C_X+C_Y$

$\underline{v}^h\cdot\tilde{\underline{X}}=0\longleftrightarrow\tilde{\underline{X}}\perp\underline{v}$

C_X: ← ① $C_X^h=C_X$ ← ماتریس حقیقی ← بردار ویژه ها متعامد و نرمالیزه

$V=(\underline{v}_1|\underline{v}_2|\dots|\underline{v}_n)$ ← یکانی

: $\det(C_X)=0\to\lambda_i=0\to v_i$ امتداد نرمال

$\forall i,\ \lambda_i\geq0$ ← $h_{C_X}(\underline{z})\geq0$ یعنی nnd است C_X

$\forall i,\ \lambda_i>0$ ← pd است. ← اگر $\det C_X\neq0$

→ $L=(\sqrt{\lambda_1}\,\underline{v}_1|\sqrt{\lambda_2}\,\underline{v}_2|\dots|\sqrt{\lambda_n}\,\underline{v}_n)$, L یک جواب / U یکانی دلخواه } → LU یک جواب

تبدیل خطی $\underline{Y}=A\underline{X}+\underline{b}\longrightarrow\boxed{f_Y(\underline{y})=\frac{f_X(A^{-1}(\underline{y}-\underline{b}))}{|\det A|}}$

→ $f_Y(\underline{y})=\sum_{i=1}^{K}\frac{f_X(\underline{x})}{|J|}\Big|_{\underline{x}=(\underline{a})_i}$

بردار سفید نرمالیزه : $\begin{cases}m_W=0\\ R_W=C_W=I\end{cases}$

تبدیل سفیدکننده: $\underline{W}=\Gamma(\underline{X}-\underline{m}_X)$, $\Gamma=L^{-1}$, $C_X=LL^h$

عکس: $\underline{X}=L\underline{W}+\underline{m}_X$ / شرط سفیدپذیری → $\det(C_X)\neq0$

جواب پایین‌مثلثی [◺] برای L از همه بهتر. جواب علی

$$\frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n\det(C_X)}}e^{-\frac{1}{2}q_{C_X^{-1}}(\underline{x}-\underline{m}_X)}$$

$-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\alpha_{ij}(x_i-m_i)(x_j-m_j)$

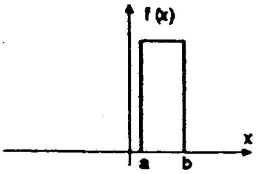
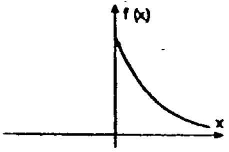
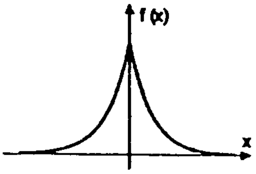
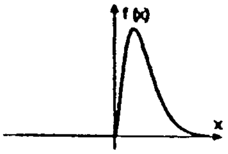
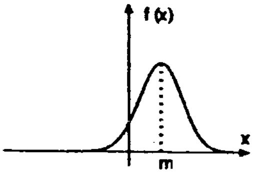
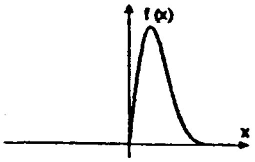
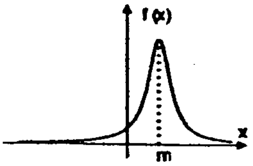
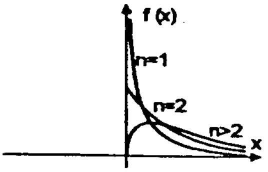
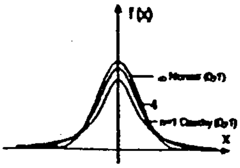
$C_X^{-1}=[\alpha_{ij}]_{n\times n}$

X₁ و X₂ و X₃ و X₄ توأماً نرمال:

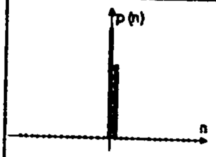
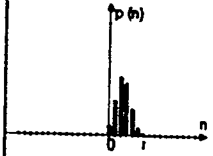
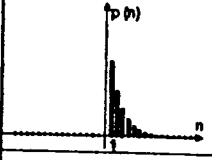
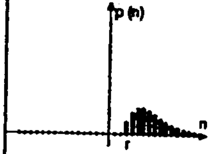
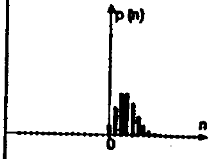
$EX_1X_2X_3X_4=EX_1X_2EX_3X_4+EX_1X_3EX_2X_4+EX_1X_4EX_2X_3-2EX_1EX_2E$

$E(\mathrm{Var}(Y|X))+\mathrm{Var}(E(Y|X))$

$(\{x_n\}\xrightarrow{e}x)\Rightarrow ae\Rightarrow P\Rightarrow dist$ / $ms\to P\to dist$

	$\phi(\omega)$ و تابع مشخصه		و واریانس σ_X
یکنواخت (Uniform) $X \sim \mathcal{U}(a,b)$	$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & a < x < b \\ 0, & otherwise \end{cases}$ $\phi(\omega) = \exp[j(a+b)\frac{\omega}{2}]\frac{\sin(\omega(b-a)/2)}{\omega(b-a)/2}$		$m_X = \frac{(a+b)}{2}$ $\sigma_X^2 = \frac{(b-a)^2}{12}$
نمایی (Exponential) $X \sim \mathcal{E}(\lambda)$	$f(x) = \lambda \exp(-\lambda x) \cdot u(x)$ $\phi(\omega) = \frac{\lambda}{\lambda - j\omega}$		$m_X = \frac{1}{\lambda}$ $\sigma_X^2 = \frac{1}{\lambda^2}$
لاپلاس (Laplace) $X \sim \mathcal{L}(\lambda)$	$f(x) = \frac{\lambda}{2}\exp(-\lambda \lvert x \rvert)$ $\phi(\omega) = \frac{\lambda^2}{\lambda^2 + \omega^2}$		$m_X = 0$ $\sigma_X^2 = \frac{2}{\lambda^2}$
ارلانگ (Erlange) $X \sim \mathcal{E}(r,\lambda)$	$f(x) = \frac{\lambda^r}{(r-1)!} \cdot x^{r-1} \cdot \exp(-\lambda x) \cdot u(x)$ $\phi(\omega) = (\frac{\lambda}{\lambda - j\omega})^r$		$m_X = \frac{r}{\lambda}$ $\sigma_X^2 = \frac{r}{\lambda^2}$
نرمال (Normal) $\sim \mathcal{N}(m,\sigma^2)$	$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \cdot \exp\left(-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right)$ $\phi(\omega) = \exp(jm\omega) \cdot \exp(-\frac{\sigma^2\omega^2}{2})$		$m_X = m$ $\sigma_X^2 = \sigma^2$
رایلی (Rayleigh) $X \sim \mathcal{R}(\sigma^2)$	$f(x) = \frac{x}{\sigma^2} \cdot \exp(-\frac{x^2}{2\sigma^2}) \cdot u(x)$ $\phi(\omega) = (1 + j\sqrt{\frac{\pi}{2}}\sigma\omega) \cdot \exp(-\frac{\sigma^2\omega^2}{2})$		$m_X = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\sigma$ $\sigma_X^2 = (2 - \frac{\pi}{2})\sigma^2$
کوشی (Cauchy) $X \sim \mathcal{C}(m,a)$	$f(x) = \frac{(a/\pi)}{(x-m)^2 + a^2}$ $\phi(\omega) = \exp(jm\omega) \cdot \exp(-a\lvert\omega\rvert)$		$m_X = m$ $\sigma_X^2 = \infty$
مربع خی (Chi-square) $X \sim \chi^2(n)$	$f(x) = \frac{x^{\frac{n}{2}-1} \cdot \exp(-\frac{x}{2})}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma(\frac{n}{2})} \cdot u(x)$ $\phi(\omega) = \frac{1}{(1 - j2\omega)^{n/2}}$		$m_X = n$ $\sigma_X^2 = 2n$
استیودنت تی (Student-T) $X \sim \mathcal{T}(n)$	$f(x) = \frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\sqrt{n\pi}\Gamma(\frac{n}{2})} \cdot \frac{1}{\sqrt{(1 + x^2/n)^{n+1}}}$ $\phi(\omega)$ برحسب توابع بسل بدست می آید		$m_X = 0$ $\sigma_X^2 = \begin{cases} \infty, & n = 1,2 \\ \frac{n}{n-2}, & n > 2 \end{cases}$

در جدول فوق: $\Gamma(1) = 1,\ \Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}, \quad \Gamma(\alpha+1) = \alpha\Gamma(\alpha)$

متوسط m_X و واریانس σ_X		تابع جرم احتمال آن $p(n)$	
$\Gamma(z) = (1-p) + pz$ $m_X = p$ $\sigma_X^2 = p(1-p)$		X = تعداد رخداد پیشامد $\mathbf{E}$ در یک آزمایش $p(n) = \begin{cases} p, & n = 1 \\ 1-p, & n = 0 \\ 0,. & otherwise \end{cases}$	برنول noulli) $\sim \mathcal{B}(p)$
$\Gamma(z) = [(1-p) + pz]^r$ $m_X = rp$ $\sigma_X^2 = rp(1-p)$		X = تعداد رخداد پیشامد $\mathbf{E}$ در r آزمایش مستقل از هم $p(n) = \begin{cases} \binom{r}{n} p^n (1-p)^{r-n}, & n = 0,1,2,\cdots r \\ 0, & otherwise \end{cases}$	دوجمل omial) $\mathcal{B}(r,p)$
$\Gamma(z) = \frac{pz}{1-(1-p)z}$ $m_X = 1/p$ $\sigma_X^2 = (1-p)/p^2$		X = تعداد آزمایش لازم برای اولین رخداد پیشامد $\mathbf{E}$ $p(n) = \begin{cases} p(1-p)^{n-1}, & n = 1,2,3,\cdots \\ 0, & otherwise \end{cases}$	هند metric) $\mathcal{G}(p)$
$\Gamma(z) = [\frac{pz}{1-(1-p)z}]^r$ $m_X = r/p$ $\sigma_X^2 = r(1-p)/p^2$		X= تعداد آزمایش لازم برای r امین رخداد پیشامد $\mathbf{E}$ $p(n) = \begin{cases} \binom{n-1}{r-1} p^r (1-p)^{n-r}, & n = r, r+1,\cdots \\ 0, & otherwise \end{cases}$	دوجمله gative mial) $\mathcal{NB}(r,p)$
$\Gamma(z) = \exp[\lambda(z-1)]$ $m_X = \lambda$ $\sigma_X^2 = \lambda$		X = حد دوجمله‌ای وقتی تعداد آزمایشها $r \to \infty$ و احتمال هر رخداد $p \to 0$ بطوریکه $rp = \lambda$ باشد $p(n) = \begin{cases} \exp(-\lambda) \cdot \frac{\lambda^n}{n!}, & n = 0,1,2,3,\cdots \\ 0, & otherwise \end{cases}$	پوا son) $\mathcal{P}(\lambda)$

نکاتی در مورد چند متغیر تصادفی مهم

برخی روابط

(در عبارت‌های زیر چنانچه چند متغیر تصادفی مطرح باشند آن متغیرهای تصادفی مستقل فرض می‌شوند)

$p) \equiv \mathcal{B}(p)$ / $\lambda) \equiv \mathcal{E}(\lambda)$ $\boxed{\sum_{i=1}^{r} \mathcal{B}(p) \equiv \mathcal{B}(r,p)}$ $\boxed{\sum_{i=1}^{r} \mathcal{E}(\lambda) \equiv \mathcal{E}(r,\lambda)}$ $\boxed{\sum_{i=1}^{r} \mathcal{G}(p) \equiv \mathcal{NB}(r,p)}$ $\boxed{\lim_{r \to \infty, rp \to \lambda} \mathcal{B}(r,p) = \mathcal{P}(\lambda)}$

$\mathcal{B}(r_i,p) \equiv \mathcal{B}(\sum r_i, p)$ $\boxed{\sum \mathcal{NB}(r_i,p) \equiv \mathcal{NB}(\sum r_i, p)}$ $\boxed{\sum \mathcal{E}(r_i,\lambda) \equiv \mathcal{E}(\sum r_i, \lambda)}$ $\boxed{|\mathcal{L}(\lambda)| \equiv \mathcal{E}(\lambda)}$

$0,1)]^2 \equiv \mathcal{X}^2(1)$ / $\mathcal{N}(0,1)]^2 \equiv \mathcal{X}^2(n)$ $\boxed{\frac{\mathcal{N}(0,1)}{\mathcal{N}(0,1)} \equiv \mathcal{C}(0,1)}$ $\boxed{\frac{\mathcal{N}(0,1)}{\sqrt{\mathcal{X}^2(n)/n}} \equiv \mathcal{T}(n)}$ $\boxed{\begin{matrix} \mathcal{T}(\infty) \equiv \mathcal{N}(0,1) \\ \mathcal{T}(1) \equiv \mathcal{C}(0,1) \end{matrix}}$ $\boxed{\begin{matrix} \mathcal{X}^2(2k) \equiv \mathcal{E}(k, 0.5) \\ \mathcal{X}^2(2) \equiv \mathcal{E}(0.5) \end{matrix}}$

$1) \equiv |\mathcal{N}(0,1)|$ $\boxed{[\mathcal{R}(\sigma^2)]^2 \equiv \mathcal{E}(1/2\sigma^2)}$ $\boxed{\sqrt{\mathcal{E}(\lambda)} \equiv \mathcal{R}(1/2\lambda)}$ $\boxed{Min(\mathcal{E}(\lambda_1), \mathcal{E}(\lambda_2), \cdots, \mathcal{E}(\lambda_n)) \equiv \mathcal{E}(\sum \lambda_i)}$

$(m_i, \sigma_i^2) \equiv \mathcal{N}(\sum m_i, \sum \sigma_i^2)$ $\boxed{\sum \mathcal{P}(\lambda_i) \equiv \mathcal{P}(\sum \lambda_i)}$ $\boxed{\sum \mathcal{C}(m_i, a_i) \equiv \mathcal{C}(\sum m_i, \sum a_i)}$ $\boxed{\sum \mathcal{X}^2(n_i) \equiv \mathcal{X}^2(\sum n_i)}$

یک قضیه مفید

$$\boxed{\begin{cases} X_1 = \rho\cos(\theta) \sim \mathcal{N}(0,\sigma^2) \\ X_2 = \rho\sin(\theta) \sim \mathcal{N}(0,\sigma^2) \\ X_1 \perp\!\!\!\perp X_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \rho = \sqrt{X_1^2 + X_2^2} \sim \mathcal{R}(\sigma^2) \\ \theta = tg^{-1}(X_2/X_1) \sim \mathcal{U}(0,2\pi) \\ \rho \perp\!\!\!\perp \theta \end{cases}}$$

(غیر)خطی $p = E(S - \widehat{S})^2 = \min, \widehat{S} = g(\underline{X}) \Rightarrow \quad \boxed{\widehat{S} = E(S \mid \underline{X})}, \boxed{p_{\min} \triangleq p(S \mid \underline{X}) = E_X\{Var(S \mid \underline{X})\}}$

خطی $p = E\left|S - \widehat{S}\right|^2 = \min, \widehat{S} = \sum_k a_k X_k \Rightarrow S - \widehat{S} \perp \underline{X} \Rightarrow \quad \boxed{\widehat{S} \triangleq \widehat{E}(S \mid \underline{X})}, \boxed{p_{\min} \triangleq \widehat{p}(S \mid \underline{X})}$

ن مستوی $p = E\left|S - \widehat{S}\right|^2 = \min,\ \widehat{S} = a_0 + \sum_k a_k X_k \Rightarrow \quad \boxed{\widehat{S} = m_S + \widehat{E}(\widetilde{S} \mid \widetilde{\underline{X}})}, \boxed{p_{\min} = \widehat{p}(\widetilde{S} \mid \widetilde{\underline{X}})}$

تخمین خطی و مستوی یک بردار تصادفی بر حسب بردار داده ها

خطی

$$\widehat{\underline{S}} = \widehat{E}(\underline{S} \mid \underline{X}) = R_{SX} R_X^{-1} \cdot \underline{X} \equiv R_{SW} \cdot \underline{W}$$

$$p(\underline{S} \mid \underline{X}) \triangleq \sum_i E\left|S_i - \widehat{S_i}\right|^2 = E\left\|\underline{S} - \widehat{\underline{S}}\right\|^2 = \text{trace}(R_S - R_{SX} R_X^{-1} R_{XS}) \equiv E\|\underline{S}\|^2 - \|R_{SW}\|^2$$

$= E|S|^2 - R_{SX} R_X^{-1} R_{XS}$

مستوی

$$\widehat{\underline{S}} = \widehat{E}(\underline{S} \mid \underline{X}, X_0) = \underline{m}_S + \widehat{E}(\widetilde{\underline{S}} \mid \widetilde{\underline{X}}) = \underline{m}_S + C_{SX} C_X^{-1} \cdot (\underline{X} - \underline{m}_X) \equiv C_{SW} \cdot \underline{W}$$

$$p(\underline{S} \mid \underline{X}, X_0) \triangleq \sum_i E\left|S_i - \widehat{S_i}\right|^2 = E\left\|\widetilde{\underline{S}} - \widehat{\widetilde{\underline{S}}}\right\|^2 = \text{trace}(C_S - C_{SX} C_X^{-1} C_{XS}) \equiv E\|\widetilde{\underline{S}}\|^2 - \|C_{SW}\|^2$$

$= C_S - C_{SX} C_X^{-1} C_{XS}$

$E|\widetilde{S}|^2$

$R_{SX}(\tau) = \int_{\tau_1}^{\tau_2} h(\alpha) R_X(\tau - \alpha) d\alpha \ ,\ \tau \in [\tau_1, \tau_2]$

تخمین خطی بر حسب فرایند پیوسته زمان داده ها

$P_{min} = R_S(0) - \int_{\tau_1}^{\tau_2} h$

ه تا $t - \tau_1$

$$\widehat{S}(t) = \widehat{E}(S(t) \mid X(t - \alpha) : \alpha \geq \tau_1) = h(t) * X(t)$$

$$h(t) = \cancel{\gamma}_X(t) * \underbrace{\{R_{SW}(t)\}_{\geq \tau_1}}_{h_w(t)} \Big/ H(f) = \Gamma_X(f) \cdot \{S_{SW}(f)\}_{\geq \tau_1} \Big/ p_{\min} = R_S(0) - \int_{\tau_1}^{\infty} |\overset{|h_w(\alpha)|^2}{R_{SW}}(\alpha)|^2 d\alpha$$

ه کامل

$$\widehat{S}(t) = \widehat{E}(S(t) \mid X(t - \alpha) : \alpha \in \mathbf{R}) = h(t) * X(t)$$

$$h(t) = \cancel{\gamma}_X(t) * R_{SW}(t) \Big/ H(f) = \frac{S_{SX}(f)}{S_X(f)} \Big/ p_{\min} = \int_{-\infty}^{\infty} (S_S(f) - \frac{|S_{SX}(f)|^2}{S_X(f)}) df \equiv R_S(0) - \int_{-\infty}^{\infty} |R_{SW}(\alpha)|^2 d\alpha$$

خطی

$$\boxed{X(t) = S(t) + V(t),\ S(\cdot) \perp V(\cdot),\ R_V(\tau) = N_0 \delta(\tau)}$$

کلـــ $\Rightarrow \quad \widehat{S}(t) = \widehat{E}(S(t) \mid X(t - \alpha) : \alpha \geq \tau_1) = h(t) * X(t),\ h(t) = \gamma_X(t) * \{l_X(t) - \gamma_X^*(-t)\}_{\geq \tau_1}$

مشاهده کام $\quad \tau_1 = -\infty \Rightarrow$ فیلتر وینر غیرعلی ← $\quad H(f) = \dfrac{S_S(f)}{N_0 + S_S(f)},\ p_{\min} = N_0 h(0)$

فیلترینگ +پیشگوئ $\quad \tau_1 > 0 \Rightarrow H(f) = \Gamma_X(f) \cdot \{L_X(f)\}_{\geq \tau_1}, p_{\min} = R_S(0) - \displaystyle\int_{\tau_1}^{\infty} |l_X(\alpha)|^2 d\alpha$

پیشگوئی خالص $\quad X(\cdot) = S(\cdot), \tau_1 > 0 \Rightarrow \quad H(f) = \Gamma_S(f) \cdot \{L_S(f)\}_{\geq \tau_1},\ p_{\min} = \displaystyle\int_0^{\tau_1} |l_S(\alpha)|^2 d\alpha$

فیلترینگ خالص $\quad \tau_1 = 0 \Rightarrow$ فیلتر وینرعلی ← $H(f) = 1 - N_0 \Gamma_X^*(\infty) \cdot \Gamma_X(f), p_{\min} = N_0 h(0)$

تخمین خطی بر حسب فرایند گسسته زمان داده ها

ه تا نمونه $n - m_1$ ام

$$\widehat{S}[n] = \widehat{E}(S[n] \mid X[n - k] : k \geq m_1) = h[n] * X[n]$$

$$h[n] = \gamma_X[n] * \{R_{SW}[n]\}_{\geq m_1},\ \mathbb{H}(z) = \mathbb{\Gamma}_X(z) \cdot \{\mathbb{S}_{SW}(z)\}_{\geq m_1},\ p_{\min} = R_S[0] - \sum_{k=m_1}^{\infty} |R_{SW}[k]|^2$$

ه کامل

$$\widehat{S}[n] = \widehat{E}(S[n] \mid X[n - k] : k \in \mathbf{Z}) = h[n] * X[n]$$

$$h[n] = \gamma_X[n] * R_{SW}[n],\ \mathbf{H}(z) = \frac{\mathbf{S}_{SX}(z)}{\mathbf{S}_X(z)},\ p_{\min} = \int_{-0.5}^{0.5} (S_S(f) - \frac{|S_{SX}(f)|^2}{S_X(f)}) df \equiv R_S[0] - \sum_{k=-\infty}^{\infty} |R_{SW}[k]|^2$$

طی

$$\boxed{X[n] = S[n] + V[n],\ S[\cdot] \perp V[\cdot],\ R_V[m] = N_0 \delta[m]}$$

کلـــ $\Rightarrow \quad \widehat{S}[n] = \widehat{E}(S[n] \mid X[n - k] : k \geq m_1) = h[n] * X[n],\ h[n] = \gamma_X[n] * \{l_X[n] - \gamma_X^*[-n]\}_{\geq m_1}$

مشاهده کا $\quad m_1 = -\infty \Rightarrow \quad \mathbf{H}(z) = \dfrac{\mathbf{S}_S(z)}{N_0 + \mathbf{S}_S(z)},\ p_{\min} = N_0 h[0]$

فیلترینگ +پیشگوئ $\quad m_1 > 0 \Rightarrow \quad \mathbb{H}(z) = \mathbb{\Gamma}_X(z) \cdot \{\mathbf{L}_X(z)\}_{\geq m_1}, p_{\min} = R_S[0] - \displaystyle\sum_{k=m_1}^{\infty} |l_X[k]|^2$

پیشگوئی خال $\quad X[\cdot] = S[\cdot], m_1 > 0 \Rightarrow \quad \mathbf{H}(z) = \mathbb{\Gamma}_S(z) \cdot \{\mathbf{L}_S(z)\}_{\geq m_1},\ p_{\min} = \displaystyle\sum_{k=0}^{m_1 - 1} |l_S[k]|^2$

فیلترینگ خال $\quad m_1 = 0 \Rightarrow \quad \mathbf{H}(z) = 1 - N_0 \mathbb{\Gamma}_X^*(\infty) \cdot \mathbb{\Gamma}_X(z), p_{\min} = N_0 h[0]$

$(S - \widehat{S}) X_i^* = 0$

$S_{SW}(f) = S_{SX}(f) . \Gamma_X^*(f)$

$S \perp X \rightarrow \widehat{E}(S|X) = 0$

$S \cdot S_1 \cdot S_2 \rightarrow \widehat{E}(S|X) = \widehat{E}$

$$\left\{\sum_{LHP}\frac{}{j2\pi f-p_i}+\sum_{RHP}\frac{}{j2\pi f-q_i}+\sum_i c_i(j2\pi f)^i\right\}_{\geq\tau_1}=\begin{cases}\sum_{LHP}\frac{}{j2\pi f-p_i}+\sum_i c_i(j2\pi f)^i, & \tau_1=0\\ G(f)-\sum_{RHP}\frac{b_i\,e^{-(j2\pi f-q_i)\tau_1}}{j2\pi f-q_i}, & \tau_1<0\end{cases}$$

$$_{\geq m_1}=\left\{\sum_{|z_i|<1}\frac{a_i}{1-z_iz^{-1}}+\sum_{|y_i|>1}\frac{b_i}{1-y_iz^{-1}}+\sum_i c_iz^{-i}\right\}_{\geq m_1}=\begin{cases}\sum_{|z_i|<1}\frac{a_i(z_iz^{-1})^{m_1}}{1-z_iz^{-1}}+\sum_{i\geq m_1}c_iz^{-i}, & m_1>0\\ \sum_{|z_i|<1}\frac{a_i}{1-z_iz^{-1}}+\sum_i c_iz^{-i}, & m_1=0\\ G(z)-\sum_{|y_i|>1}\frac{b_i(y_iz^{-1})^{m_1}}{1-y_iz^{-1}}, & m_1<0\end{cases}$$

((جدول خواص تبدیل Z و زوجهای مهم آن))

$g[n]$	$G(z)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}g[k]\cdot z^{-k}, \quad \lvert z\rvert\in R$	$\delta[n]$	$1, \quad \text{All } z$
$[-n]$	$G(z^{-1}), \quad \lvert z^{-1}\rvert\in R$	$u[n]=\begin{cases}1, & n\geq 0\\ 0, & n\leq -1\end{cases}$	$\frac{1}{1-z^{-1}}, \quad \lvert z\rvert>1$
$-n_0]$	$G(z)\cdot z^{-n_0}, \quad \lvert z\rvert\in R$ (بــــجز احتمالا حذف یا اضافه شدن 0 و ∞)	$-u[-n-1]$	$\frac{1}{1-z^{-1}}, \quad \lvert z\rvert<1$
$\cdot g[n]$	$-z\frac{d}{dz}G(z), \quad \lvert z^{-1}\rvert\in R$	$z_0^n\cdot u[n]$	$\frac{1}{1-z_0z^{-1}}, \quad \lvert z\rvert>\lvert z_0\rvert$
$^*[n]$	$G^*(z^*), \quad \lvert z\rvert\in R$	$-z_0^n\cdot u[-n-1]$	$\frac{1}{1-z_0z^{-1}}, \quad \lvert z\rvert<\lvert z_0\rvert$
$\cdot g[n]$	$G(z_0z), \quad \lvert z_0z\rvert\in R$	$n\cdot z_0^n\cdot u[n]$	$\frac{z_0z^{-1}}{(1-z_0z^{-1})^2}, \quad \lvert z\rvert>\lvert z_0\rvert$
$g[n-1]$	$(1-z^{-1})G(z), \quad \lvert z\rvert\in R\cap\lvert z\rvert\neq 0$ (لااقل)	$-n\cdot z_0^n\cdot u[-n-1]$	$\frac{z_0z^{-1}}{(1-z_0z^{-1})^2}, \quad \lvert z\rvert<\lvert z_0\rvert$
$\sum_{\infty} g[k]$	$\frac{1}{1-z^{-1}}G(z), \quad \lvert z\rvert\in R\cap\lvert z\rvert>1$ (لااقل)	$z_0^{\lvert n\rvert}; \quad \lvert z_0\rvert<1$	$\frac{1-z_0^2}{(1-z_0z^{-1})(1-z_0z)}, \quad \lvert z_0\rvert<\lvert z\rvert<\frac{1}{\lvert z_0\rvert}$
$+bg_2[n]$	$aG_1(z)+bG_2(z), \quad \lvert z\rvert\in R_1\cap R_2$ (لااقل) (بــــجز احتمالا حذف یا اضافه شدن 0 و ∞)	$\cos(\omega_0n)\cdot u[n]$	$\frac{1-(\cos\omega_0)z^{-1}}{1-(2\cos\omega_0)z^{-1}+z^{-2}}, \quad \lvert z\rvert>1$
$*g_2[n]$	$G_1(z)\cdot G_2(z), \quad \lvert z\rvert\in R_1\cap R_2$ (لااقل)	$\sin(\omega_0n)\cdot u[n]$	$\frac{(\sin\omega_0)z^{-1}}{1-(2\cos\omega_0)z^{-1}+z^{-2}}, \quad \lvert z\rvert>1$
$\frac{n}{k}\in Z$ در سایر	$G(z^k), \quad \lvert z^k\rvert\in R$	$r^n\cdot\cos(\omega_0n)\cdot u[n]$	$\frac{1-(r\cos\omega_0)z^{-1}}{1-(2r\cos\omega_0)z^{-1}+r^2z^{-2}}, \quad \lvert z\rvert>1$
		$r^n\cdot\sin(\omega_0n)\cdot u[n]$	$\frac{(r\sin\omega_0)z^{-1}}{1-(2r\cos\omega_0)z^{-1}+r^2z^{-2}}, \quad \lvert z\rvert>1$
		$\delta[n-k]$	$z^{-k}, \quad \text{All } z\neq 0, \ k>0$ $\text{All } z\neq\infty, \ k<0$
		$r[n]=\begin{cases}n+1, & n\geq 0\\ 0, & n\leq -1\end{cases}$	$\frac{1}{(1-z^{-1})^2}, \quad \lvert z\rvert>1$

((تبدیل فوریه گسسته زمان برخی سیگنالهائی که تبدیل Z ندارند))

$n]=1$	$G(f)=2\pi\delta(\omega)=\delta(f), \quad f\in(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]$
$n]=e^{j2\pi f_0n}, \quad f_0\in(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]$	$G(f)=2\pi\delta(\omega-\omega_0)=\delta(f-f_0), \quad f\in(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]$
$n]=\cos(2\pi f_0n), \quad f_0\in(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]$	$G(f)=\frac{1}{2}\delta(f-f_0)+\frac{1}{2}\delta(f+f_0), \quad f\in(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]$
$n]=\sin(2\pi f_0n), \quad f_0\in(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]$	$G(f)=\frac{1}{2j}\delta(f-f_0)-\frac{1}{2j}\delta(f+f_0), \quad f\in(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]$

$\ast \sinh x = \frac{e^{x}-e^{-x}}{2}$ $\ast \cosh x = \frac{e^{x}+e^{-x}}{2}$ $\ast D(\sinh x) = \cosh x$ $\ast D(\cosh x) = \sinh x$

$\ast D(\tgh x) = \frac{1}{\cosh^2 x} = 1-\tgh^2 x$ $\ast \cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$

$\ast ch(a+b) = ch(a).ch(b) + sh(a).sh(b)$ $\ast sh(a+b) = sh(a).ch(b) + ch(a).sh(b)$

$\ast ch(2a) = ch^2(a) + sh^2(a) = 2ch^2(a)-1$ $\ast sh(2a) = 2\,sh(a).ch(a)$

$\ast \int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \sinh^{-1} x + C = Ln(x+\sqrt{1+x^2}) + c$ $\ast \int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} \overset{c+}{=} \cosh^{-1} x = Ln(x+\sqrt{x^2-1})$

$\ast \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}} = Ln(x+\sqrt{x^2+a^2}) + c$ $\ast \int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}} = Ln(x+\sqrt{x^2-a^2}) + c$ $x \geqslant 1$ $~~D~~ > |a$

دامنه = $(-1,1) \rightarrow \int \frac{dx}{1-x^2} = \tanh^{-1} x + c = \frac{1}{2} Ln(\frac{1+x}{1-x}) + c$ $\int \frac{dx}{1+x^2} = tg^{-1} x$

$\int \sec x . dx = \tanh^{-1}(\sin x) = Ln|\sec x + tg x|$, $\int \csc x . dx = -Ln|\csc x + \cot x|$

مساحت ناحیه‌ای از شعاع
به زاویهٔ α تا β : $A = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{2} r_{(\theta)}^2 . d\theta$

محاسبهٔ طول قوس : $\boxed{(ds)^2 = (rd\theta)^2 + (dr)^2 \rightarrow ds = \sqrt{r_{(\theta)}^2 + r'^2_{(\theta)}}\, d\theta} \xrightarrow{\text{سطح دوار}} dA = 2\pi \underset{r\sin\theta \text{ یا } r\cos\theta}{\rho} . dS$

$\boxed{\frac{1}{a+bi} = \frac{a-bi}{a^2+b^2}}$

$W = \rho(\cos\theta + i\sin\theta) \rightarrow \sqrt[n]{W} = \sqrt[n]{\rho}.CiS(\frac{\theta+2K\pi}{n})$

~~[illegible]~~ n ضلعی منتظم ← $K = 0, 1, \dots, n-1$

مول تیلور : f در بازهٔ باز حاوی a ، n بار مشتق پذیر است ← برای هر x :

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f^{(2)}(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(x-a)^{n-1} + \underbrace{\frac{1}{(n-1)!}\int_a^x (x-t)^{n-1} f^{(n)}}_{E_{n-1}(x)}$$

$a=0$ ← مککلوران

$P(0) = f(0)$
$\vdots$
$P^{(n)}(0) = f^{(n)}(0)$

← x یک و تنها یک چندجمله ای موجود است (از درجهٔ نابیشتر از n) که در (n+1) شرط زیر صدق کند.

خمین خطا : $|f^{(n)}(t)| \leqslant M \Longrightarrow |E_{n-1}(x)| \leqslant M \frac{|x-a|^n}{n!}$

شکل لاگرانژ باقی مانده : $E_{n-1} = \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-a)^n = O((x-a)^{n-1})$ $x \to a$

$c \in [a, b)$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + O(x^{2n})\ (x\to 0) \qquad |E_{2n}(x)| \leqslant \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + (-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!} + O(x^{2n+1})\ (x\to 0) \quad \to \boxed{e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta}$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + \underline{E_n(x)}$$

$$\boxed{E_n(x) = \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n)}{(n+1)!}(1+c)^{\alpha-n-1}\cdot x^{n+1}} \qquad O(x^n)\ (x\to 0)$$

$$\boxed{\frac{1}{1+x} = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k x^k + O(x^n)\ (x\to 0)} \quad \text{و} \quad \boxed{\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\frac{x^k}{k}} + O(x^n)\ (x\to 0)$$

[redacted]

$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} \dots$

مقایسه

آزمون برای نوع اول ← ا) {f و g بر $[a,b]$ $\forall b$ انتگرال پذیر و نامنفی ①} {$0 \leq f(x) \leq g(x)$ به ازای $\forall x \geq M$ که $M \geq a$ ②} :

الف) I_g همگرا ← I_f همگرا   ب) I_f واگرا ← I_g واگرا

$\boxed{I_{\text{تابع}} = \int_a^\infty}$ تابع

مقایسه حدی

2) f و g بر $[a,b]$ $\forall b$ انتگرال پذیر و مثبت ، $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)} = L$:

الف) $0<L<\infty$ ← هر دوی I_f و I_g در واگرایی و همگرایی شریک هستند.   ب) $L=0$ ← (I_g همگرا ← I_f همگرا)

[redacted]

ج) $L=\infty$ ← (I_g واگرا ← I_f واگرا)

[redacted]

مقایسه

• آزمون برای نوع دوم ← ا) f و g بر ~~[a,b]~~ $[a+\varepsilon,b]$ به ازای هر $\varepsilon>0$ انتگرال پذیر ← ...

$\boxed{I_{\text{تابع}} = \int_a^b}$ تابع

مقایسه حدی

2) ایضاً + $\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)}{g(x)} = L$

لایب نیتز ← $\{a_n\}$ نزولی ③ / $\lim a_n = 0$ ② / $\{a_n\}$ مثبت ① ← $\sum(-1)^{k+1}a_k$ همگراست

* اگر سری متناوب در قضیهٔ لایب نیتز صدق کند و مقدار آن S باشد داریم: $|S - S_n| < a_{n+1}$

حاصلضرب کوشی : $(\sum_{k=0}^{\infty} a_k)(\sum_{k=0}^{\infty} b_k) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n$ که $c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$

فرمول استرلینگ : $n! \overset{n\to\infty}{\sim} \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$

nimacer @yaho

بسمه تعالی

مسایل سری اول

ساله ۱- ثابت کنید
$$\mathrm{E}(Y \mid X \le 0) = \frac{1}{F_X(0)} \int_{-\infty}^{0} \mathrm{E}(Y \mid X = x) \cdot f_X(x) \cdot dx$$

ساله ۲- توابع توزیع و چگالی شرطی X با شرط $\{a < X \le b\}$ را برحسب توابع توزیع $F_X(x)$ و چگالی $f_X(x)$ آن بدست آورید

ساله ۳- فرض کنید یک نیرو گاه به قدرت 10^6 KW برق ناحیه ای را تامین میکند و حد اکثر قدرت لازم برای آن ناحیه را بتوان با یک متغی

صادفی X با تابع چگالی احتمال $f(x) = k^2 x \exp(-kx) \cdot u(x)$ مدل کرد که در آن x با واحد کیلو وات بوده و $= 5 \times 10^{-6}$

یباشد

ف) احتمال خاموشی در ناحیه فوق چقدر است؟

ب) برای اینکه احتمال خاموشی در آن ناحیه از 0.005 تجاوز نکد قدرت نیروگاه را به چه میزان باید رسانید؟

ساله ۴ – فرض کنید تابع چگالی احتمال عمر یک دستگاه بر حسب ماه بصورت زیر باشد (توزیع رایلی):

$$f(x) = \frac{x}{100} \exp(\frac{-x^2}{200}) \cdot u(x)$$

ف) متوسط عمر دستگاه چند ماه است؟

ب) احتمال اینکه عمر دستگاه بیش از دو سال باشد چقدر است؟

ج) احتمال اینکه دستگاهی که در طول سال اول سالم مانده است در طول سال دوم هم سالم بماند چقدر است؟

ساله ۵–یک متغیر تصادفی X با تابع چگالی احتمال $f_X(x) = \exp(-2|x|)$ در نظر بگیرید بر حسب این متغیرتصادفی دو متغیر تصادفی

$Y \triangleq \begin{cases} |X|, & |X| \le 1 \\ 1, & |X| \ge 1 \end{cases}$ و $Z \triangleq X^2$ را تعریف میکنیم.

ف) تابع چگالی احتمال متغیرهای تصادفی Y و Z را پیدا کنید.

ب) احتمال پیش آمد $A = \{2 > Y > \frac{1}{2}\}$ را تعیین کنید.

ج) احتمال پیش آمد $B = \{Y > Z\}$ را بدست آورید.

ساله ۶–فرض کنید ممانهای یک متغیر تصادفی از رابطه زیر بدست می آیند:

$$EX^n = n!\,2^n, \quad n = 1, 2, 3, 4, 5, \cdots$$

ابع مشخصه (cf) و تابع چگالی احتمال این متغیر تصادفی را بدست آورید.

ساله ۷- ثابت کنید: $Var(Y) = E(Var(Y \mid X)) + Var(E(Y \mid X))$ میباشد.

ساله ۸- چراغ راهنمائی چهارراهی بمدت یک دقیقه سبز و بمدت نیم دقیقه قرمز می‌شود اتومبیلی در لحظه‌ای کاملا تصادفی و مستقل از کا

راغ به چهارراه رسیده است، توابع چگالی(pdf) و توزیع (CDF) و مشخصه (cf) و همچنین مقادیر متوسط و واریانس زمان انتظار را برای

ومبیل بدست آورید.

ساله ۹- متغیر تصادفی X یک متغیر تصادفی نرمال $X \sim N(m, \sigma^{۲})$ می باشد با متغیر تصادفی Y با متغیر تصادفی X رابطه $Y = e^X$

ا دارد.

ف) متوسط واریانس Y را برحسب m و $\sigma^{۲}$ بدست آورید.

ب) تابع چگالی احتمال Y را بدست آورید.

مسالهٔ ۱۰- یک زیردریائی تصمیم دارد که ناو هواپیمابری را غرق نماید فرض کنید برای غرق شدن آن لااقل باید ۲ عدد اژدر بآن اص

احتمال اصابت هر اژدر نیز 0.4 است.

الف) اگر ۳ عدد اژدر پرتاب نماید احتمال غرق ناو هواپیمابر چقدر است؟

ب) بطور متوسط چند عدد اژدر باید پرتاب نماید تا باعث غرق ناوهواپیمابر شود؟

مساله ۱۱- فرض کنید X یک متغیر تصادفی هندسی است و متوسط آن $EX = 3$ میباشد. بر حسب آن متغیر تصادفی $\frac{\pi}{2}X)$

را تعریف میکنیم

الف) Y چه مقادیری و با چه احتمالاتی اختیار میکند؟

ب) متوسط و واریانس Y را بدست آورید.

مساله ۱۲- فرض کنید V یک متغیر تصادفی یکنواخت در بازه [1,1-] بوده و $X \in \{0,1\}$ یک متغیر تصادفی باینری مستقل

احتمال های $P\{X = 1\} = q$ و $P\{X = 0\} = 1 - q$ میباشد. بر حسب ایندو متغیر تصادفی $\triangleq \begin{cases} |V|, & X = 1 \\ -|V|, & X = 0 \end{cases}$

میکنیم

الف) $m_Y = EY$ را تعیین کنید.

ب) چگالی احتمال شرطی $f_Y(y \mid x)$ را به ازای $x = 1$ و $x = 0$ بدست آورید.

ج) تابع توزیع و تابع چگالی احتمال Y را پیدا کنید.

مساله ۱۳- فرض کنید X دارای توزیع یکنواخت در فاصله 0 تا 1 است و متغیر تصادفی شرطی $Y \mid X$ دارای توزیع یکنواخت

1 میباشد.

الف) $m_Y = EY$ را پیدا کنید.

احتمال $P\{Y > 2X\}$ را محاسبه کنید.

مساله ۱۴- فرض کنید X و Y دو متغیر تصادفی تواما نرمال با متوسطهای صفر و واریانسهای σ^2 و ضریب همبستگی ρ میباشند

الف) ثابت کنید متغیرهای $U \triangleq X - Y$ و $V \triangleq X + Y$ مستقل از هم هستند.

ب) فرض کنید $Z \triangleq X + 3Y$ است و تابع چگالی احتمال Z را بدست آورید.

ج) ثابت کنید متغیر های تصادفی W_1 و W_2 که بصورت زیر تعریف می گردند مستقل از هم می باشند.

$$W_1 \triangleq \frac{X + Y}{2}$$
$$W_2 = (X - W_1)^2 + (Y - W_1)^3$$

مساله ۱۵- تابع چگالی احتمال توام X و Y بصورت زیر می باشد:

$$f_{XY}(x, y) = \begin{cases} 2\exp(-x - y), & 0 < x < y \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

دو متغیر تصادفی $V \triangleq X + Y$ و $W \triangleq \frac{Y}{X}$ را تعریف می کنیم. تابع چگالی احتمال توام V و W را بدست آورید. آیا V

هم هستند؟

مسالهٔ ۱۶- دو متغیر تصادفی X و Y با pdf زیر در نظر بگیرید.

$$f_{XY}(x, y) = \begin{cases} \frac{5}{16}x^2y, & 0 < y < x \leq 2 \\ 0, & \text{Otherwize} \end{cases}$$

$Y = \frac{3Z-5}{10}$ $\frac{Z+35}{10}$

الف) تابع چگالی احتمال شرطی و کناری X و Y را بدست آورید

ب) واریانس X و واریانس Y و همچنین ضریب همبستگی بین X و Y را بدست آورید.

ج) بهترین تخمینی X بدون اطلاع از Y چیست و متوسط مربع خطای آن چقدر است؟

د) بهترین تخمینی X برحسب Y کدام است و متوسط مربع خطای چنین تخمینی چقدر است؟

ه) بهترین تخمینی X بصورت رابطه‌ای خطی برحسب Y و همچنین متوسط مربع خطای آنرا نیز حساب کنید

مسالهٔ ۱۷- سه متغیر تصادفی X_1 و X_2 و Y مفروض هستند می‌خواهیم با مشاهده X_1 و X_2 مقدار Y را با رابطه‌ای

$\hat{Y} = a_۱ X_۱ + a_۲ X_۲$ تخمین بزنیم بطوریکه $p = \mathrm{E}(Y-\hat{Y})^۲$ حداقل شود

مقادیر a_1 و a_2 و همچنین می‌نیمم خطا p_{min} را برحسب ممانهای X_1 و X_2 و Y بدست آورید

مسالهٔ ۱۸- توزیع احتمال سه متغیر تصادفی باینری X و Y و Z در جدول زیر داده شده است.

x	0	0	0	0	1	1	1	1
y	0	0	1	1	0	0	1	1
z	0	1	0	1	0	1	0	1
$\Pr\{X=x, Y=y, Z=z\}$	0	0.125	0.300	0.075	0.100	0.025	0	0.375

الف) آیا X و Y مستقل هستند؟

ب) آیا Z و Y مستقل هستند؟

ج) آیا X و Z مستقل هستند؟

د) توزیع احتمال متغیرهای تصادفی شرطی $X \mid Z = 0$ و $X \mid Z = 0$ را بدست آورید و در مورد استقلال آندو نیز اظهار

فرمائید

مساله ۱۹- pdf توام X و Y و Z بصورت زیر است:

$$f_{XYZ}(x,y,z) = \begin{cases} 8xyz, & 0 < x < 1,\ 0 < y < 1,\ 0 < z < 1 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

الف) ضرایب همبستگی ρ_{XY} و ρ_{YZ} و ρ_{XZ} را تعیین کنید.

ب) چگالی احتمال شرطی $f_{XYZ}(x, y, z \,|_{Y+Z>1})$ را پیدا کنید

ج) چگالی احتمال شرطی $f_X(x \,|_{Y+Z>1})$ را بدست آورید

مساله ۲۰-فرض کنید pdf توام X و Y و Z بصورت زیر است:

$$f_{XYZ}(x,y,z) = \frac{1}{2\pi\sqrt{\pi}} \exp -\left(x^2 + y^2 + \frac{1}{2}z^2 - \sqrt{2}xy\right)$$

الف) آیا X و Y و Z تواما نرمال هستند؟

ب) متوسط و ماتریس کواریانس بردار $(X,Y,Z)^t$ را بنویسید

ج) تابع چگالی احتمال کناری بردار $(X,Z)^t$ را پیدا کنید

✓ **مسالهٔ ۲۱-** متغیرهای تصادفی X_1 ، X_2 ، X_3 و . . . مستقل از هم بوده و توزیع یکسانی دارند (iid)، متغیر تصادفی Y نیز یک
پواسن مستقل از X_iها و با متوسط $m_Y = a$ می‌باشد. مجموع تعداد تصادفی Y از متغیرهای تصادفی X_i را S می‌نامیم

$$S \triangleq \begin{cases} X_1 + X_2 + \cdots + X_Y, & Y \neq 0 \\ 0, & Y = 0 \end{cases}$$

الف) مقدار متوسط و واریانس هر یک از X_iها را m و σ^2 بنامید و مقدار متوسط و واریانس S را بدست آورید.

ب) تابع مشخصه هر یک از X_iها را $\phi_X(\omega)$ بنامید و تابع مشخصه متغیر تصادفی S را پیدا کنید.

✓ **مسالهٔ ۲۲-** فرض کنید X_1 و X_2 و X_3 سه متغیر تصادفی تواما مستقل پواسن با متوسط های $EX_1 = 1$ و 2
$EX_3 = 3$ می باشند بر حسب آنها سه متغیر تصادفی زیر را تعریف میکنیم

$$Y_1 = X_1$$
$$Y_2 = X_2 - X_1$$
$$Y_3 = X_3 - X_2$$

$2(\frac{z_2}{z_3}-1)$ $3(z_3-1)$
$\cdot e$ e

$e^{(\frac{z_1}{z_2}+\frac{2z_2}{z_3}+3z_3-6)}$

$). z_3^{Y_3}$

الف) ماتریس همبستگی بردار $\underline{X}$ را بنویسید.

ب) ماتریس کواریانس بردار $\underline{Y}$ را بنویسید

ج) تابع مولد احتمال بردار $\underline{Y}$ یعنی $\Gamma_Y(\underline{z}) = E(z_1^{Y_1} \cdot z_2^{Y_2} \cdot z_3^{Y_3})$ را پیدا کنید.

د) احتمال پیش آمد $\{Y_1 = Y_2 = Y_3 = 3\}$ چقدر است؟

✓ **مسالهٔ ۲۳-** فرض کنید X_1 و X_2 و . . . و X_n متغیرهای تصادفی تواما مستقل بوده و متوسط و واریانس هر یک نیز EX_i
$\sigma_i^2 = \text{Var}(X_i)$ معلوم است. در رابطه با آنها بردار $\underline{Y}$ را بصورت زیر تعریف می کنیم:

$$\begin{aligned} Y_1 &= X_1 \\ Y_2 &= X_1 + 2X_2 \\ Y_3 &= X_1 + 2X_2 + 3X_3 \\ &\vdots \\ Y_n &= X_1 + 2X_2 + \cdots + nX_n \end{aligned}$$

الف) متوسط شرطی Y_n مشروط به معلوم بودن Y_1 و Y_2 و . . . و Y_{n-1} را پیدا کنید

ب) واریانس شرطی Y_n مشروط به معلوم بودن Y_1 و Y_2 و . . . و Y_{n-1} را پیدا کنید

ج) تابع چگالی احتمال X_i ها را معلوم $f_{X_i}(x_i) = f_i(x_i)$ فرض کنید و تابع چگالی احتمال بردار $\underline{Y}$ را بر حسب توابع (.
و . . . و $f_n(.)$ بدست آورید.

✓ **مسالهٔ ۲۴-** فرض کنید متغیرهای تصادفی X_1 ، X_2 و . . . X_n مستقل از یکدیگر بوده و توزیع یکسانی داشته باشند

$$(F_{X_i}(x_i) = F(x_i)\ ,\ f_{X_i}(x_i) = f(x_i))$$

تابع چگالی احتمال هر یک از متغیرهای تصادفی $Y_{۱} = \max\{X_{۱}, X_{۲}, \cdots, X_n\}$ و $n\{X_{۱}, X_{۲}, \cdots, X_n\}$

$Y_{۳} = \frac{۱}{n}\sum_{i=۱}^{n} X_i$ را بر حسب توابع $f(.)$ و/یا $F(.)$ بیان کنید.

✓ **مسالهٔ ۲۵-** n متغیر تصادفی X_1 ، X_2 ، . . . . X_n مستقل از هم و با تابع های احتمال معلوم و مشابه در نظر بگیرید درهر نقطه از
مقادیری که این متغیرهای تصادفی اختیار میکنند را از بزرگ به کوچک مرتب می‌کنیم و بزرگترین آنها را به متغیر تصادفی Z_1
متغیر تصادفی Z_2 و . . . و کوچکترین آنها را به متغیر تصادفی Z_n نسبت می‌دهیم تابع چگالی احتمالی k امین متغیر تصادفی Z_k و
چگالی احتمال $Z = Z_1 - Z_n$ را بدست آورید.

مسالة ۲۶- سه متغیر تصادفی X_1 و X_2 و X_3 با ممانهای اول و دوم زیر در نظر بگیرید

$$\mathbf{m_X} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{R_X} = \begin{pmatrix} 5 & -2 & -1 \\ -2 & 3 & -2 \\ -1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

ثابت کنید بین این سه متغیر یک رابطه خطی برقرار است و این رابطه را نیز بدست آورید.

مسالة ۲۷- فضای نمونه‌ای بصورت بازهٔ بسته $\Omega = [0, 1]$ در نظر بگیرید و در فضای فوق اندازه احتمال را نیز یکنواخت فرض کنید. تعی
کنید در هر یک از موارد زیر رشته‌های تصادفی تعریف شده روی فضای فوق به چه مفهومی متقارب هستند و به چه مفهومی متقارب نیستند

الف)
$$X_n(\xi) = \begin{cases} 1, & (n \text{ even } \& \ \xi > 1/2) \ or \ (n \text{ odd } \& \ \xi < 1/2) \\ 0, & \text{Otherwise} \end{cases}$$

ب)
$$X_n(\xi) = \begin{cases} 1, & \xi < 1/n \\ 0, & \text{Otherwise} \end{cases}$$

ج)
$$X_n(\xi) = \begin{cases} n, & \xi < 1/n \\ 0, & \text{Otherwise} \end{cases}$$

د)
$$X_n(\xi) = \begin{cases} 1, & 2^{-k} l \le \xi \le 2^{-k}(l+1) \\ 0, & \text{Otherwise} \end{cases} \qquad , n = 2^k + l \ , \ k = 0,1,2,\cdots \ , \ l = 0,1,2,\cdots,2^k - 1$$

[illegible] $-4 \ -3 \ -12 \ -20$ $\qquad C_x -$

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} (2 \ -1 \ 0) = \begin{bmatrix} 4 & +2 & 0 \\ +2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & -2 & -1 \\ -2 & 3 & -2 \\ -1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -2 \\ -1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

$C - 2$ [illegible]

(راه حل سری اول)

ح ۱:

$$E(Y|X\leq 0)=\frac{1}{P(X\leq 0)}\int_{x=-\infty}^{c}\int_{y=-\infty}^{\infty} y f_{xy}(x,y)\,dy\,dx$$

$$=\frac{1}{F_X(c)}\int_{x=-\infty}^{c} f_X(x)\left(\int_{y=-\infty}^{\infty} y\, f_Y(y|x)\,dy\right)dx=\frac{1}{F_X(c)}\int_{x=-\infty}^{c} f_X(x)\,E(Y|X=x)\,dx$$

ح ۲

$$F_X(x|a<X\leq b)=\frac{P(X\leq x,\ a<X\leq b)}{P(a<X\leq b)}=\begin{cases}0 & , x\leq a\\ \frac{P(a<X\leq x)}{P(a<X\leq b)}=\frac{F_X(x)-F_X(a)}{F_X(b)-F_X(a)} & , a\leq x\leq b\\ 1 & , x\geq b\end{cases}$$

$$f_X(x|a<X\leq b)=\begin{cases}\frac{f_X(x)}{P(a<X\leq b)}=\frac{1}{F_X(b)-F_X(a)}f_X(x) & , a\leq x\leq b\\ 0 & , \text{سایر شرایط}\end{cases}$$

ح ۳ (الف)

$$-F_X(x)=(kx+1)e^{-kx}u(x)\quad,\quad P(X>10^6)=1-F_X(10^6)=0.0404$$

(ب)

$$1-F_X(x)\leq 0.005\xrightarrow{\text{روش عددی}} x\geq 1.486\times10^{6}\ KW$$

---

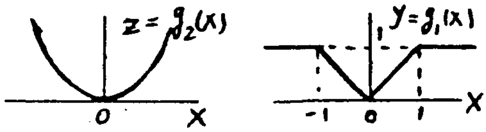
۴ (الف) با استفاده از جدول [illegible] $X\sim R(100)$ است $\qquad m_X=\sqrt{\pi/2}\times10=12.53$ ماه

(ب)

$$P(X>24)=\int_{24}^{\infty} f_X(x)\,dx=e^{-\frac{24^2}{200}}=0.056$$

(ج)

$$P(X>24|X>12)=\frac{P(X>24,X>12)}{P(X>12)}=\frac{P(X>24)}{P(X>12)}=e^{-\frac{24^2}{200}+\frac{12^2}{200}}=0.115$$



(الف) برای y مفروض

$$g_1(x)=y\Rightarrow x=\begin{cases}\text{جواب ندارد} & , y<0 \ \text{یا}\ y>1\\ \pm y & , 0<y<1\\ [1,\infty) & , y=1\end{cases}$$

پس برای $y<0$ یا $y>1$ داریم $f_Y(y)=0$

پس برای $0<y<1$ داریم

$$f_Y(y)=\frac{f_X(y)}{|1|}+\frac{f_X(-y)}{|-1|}=2e^{-\lambda y}$$

پس برای $y=1$ داریم

$$P\{Y=1\}=P\{|X|\geq1\}=2\int_1^{\infty}e^{-2x}dx=e^{-2}$$

و در مجموع

$$f_Y(y)=\begin{cases}e^{-2}\delta(y-1)+2e^{-\lambda y} & , 0<y\leq1\\ 0 & , y<0 \ \text{یا}\ y>1\end{cases}$$

برای z مفروض

$$g_2(x)=z\Longrightarrow x=\begin{cases}\pm\sqrt{z} & , z\geq0\\ \text{جواب ندارد} & , z<0\end{cases}$$

پس برای $z<0$ داریم $f_Z(z)=0$ و برای $z>0$ داریم

$$f_Z(z)=\frac{f_X(\sqrt{z})}{|2\sqrt{z}|}+\frac{f_X(-\sqrt{z})}{|-2\sqrt{z}|}=\frac{e^{-2\sqrt{z}}}{\sqrt{z}}$$

پس در مجموع

$$f_Z(z)=\frac{1}{\sqrt{z}}e^{-2\sqrt{z}}u(z)$$

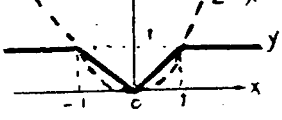
(ب)

$$P\{Z>Y>\tfrac{1}{2}\}\overset{}{=}P\{|X|>\tfrac{1}{2}\}=2\int_{\frac{1}{2}}^{\infty}e^{-2x}dx=e^{-1}$$

بنا به شکل

(ج)

$$P\{Y>Z\}=P\{|X|<1\}=2\int_0^1 e^{-2x}dx=1-e^{-2}$$



مسئله ۶ : از بسط تیلور $\Phi_x(\omega)$ میتوان آن را پیدا کرد و با تبدیل فوریه معکوس آن pdf را بدست آورد

$$)= \Phi_x(0) + \frac{\Phi_x'(0)}{1!}\omega + \frac{\Phi_x''(0)}{2!}\omega^2 + \cdots = 1 + (j2)\omega + (j2)^2\omega^2 + (j2)^3\omega^3 + \cdots$$

$$\Phi_x(0)=1,\ \Phi_x^{(n)}(0) = j^n E x^n = j^n n! 2^n$$

$$) = \frac{1}{1-j2\omega} \Rightarrow f_x(x) = F^{-1}\Phi_x^*(\omega) = F^{-1}\frac{1}{1+j2\omega} = \frac{1}{2}e^{-x/2}u(x)$$ درواقع $X \sim E(\frac12)$ است

مسئله ۷

$$(Y|X) + Var(E Y|X) = E(E Y^2|X) - E(E Y|X)^2 + E(E(Y|X))^2 - (E E(Y|X))^2$$

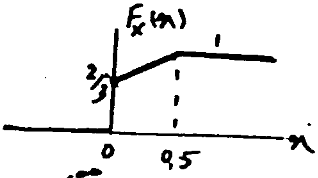
$$= E Y^2 - E\cancel{(E Y|X)}^2 + E\cancel{(E Y|X)}^2 - (E Y)^2 = E Y^2 - (E Y)^2 = Var(Y)$$

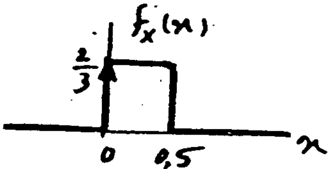
مسئله ۸: زمان انتظار را متغیر تصادفی X میگیریم

$$) = P\{X \le x\} = \begin{cases} 0, & x<0 \\ P\{G\}P\{X\le x|G\} + P\{R\}P\{X \le x|\bar{R}\} = \frac{2}{3} + \frac{2}{3}x, & 0 \le x \le 0.5 \\ 1, & x \ge 0.5 \end{cases}$$

$$x) = \frac{d}{dx}F_X(x) = \frac{2}{3}\delta(x) + \begin{cases} 0, & x<0 \\ 2/3, & 0 \le x < 0.5 \\ 0, & x \ge 0.5 \end{cases} = \begin{cases} \frac{2}{3}\delta(x) + \frac{2}{3}, & 0 \le x \le 0.5 \\ 0, & \text{سایر نقاط} \end{cases}$$

چون در x=0 ناپیوسته بود





$$\Phi_x(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega x} f_x(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{2}{3}e^{j\omega x}\delta(x)dx + \int_0^{0.5}\frac{2}{3}e^{j\omega x}dx = \frac{2}{3} + \frac{1}{3}e^{j\omega/4}\frac{\sin(\omega/4)}{(\omega/4)}$$

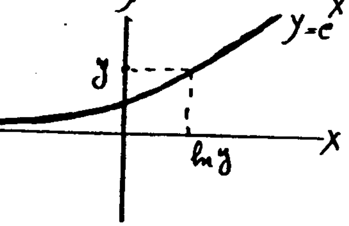
$$m_X = EX = \int_{-\infty}^{\infty} x f_x(x)dx = \frac{1}{12},\ R_X = EX^2 = \frac{1}{36},\ \sigma_X^2 = \frac{1}{36} - (\frac{1}{12})^2 = \frac{1}{48}$$

مسئله ۹ : الف

$$2) \xrightarrow{\text{طبق}} \Phi_X(\omega) = e^{jm\omega}e^{-\frac{1}{2}\sigma^2\omega^2}$$

$$= EY = Ee^X = \Phi_X(\frac{1}{j}) = e^m e^{\sigma^2/2}$$

$$EY^2 = Ee^{2X} = \Phi_X(\frac{2}{j}) = e^{2m} e^{\sigma^2} \Rightarrow \sigma_Y^2 = R_X - m_Y^2 = e^{2m+\sigma^2}(e^{\sigma^2/a^2} - 1)$$



ب) به ازای $y<0$ معادله $e^x = y$ جواب ندارد پس $f_y(y)=0$ است

به ازای $y>0$ معادله $e^x = y$ یک جواب $x = \ln y$ دارد پس

$$f_y(y) = \frac{f_x(\ln y)}{|y|} = y f_x(\ln y)$$

پس

$$f_y(y) = \frac{1}{y\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-(\ln y - m)^2/2\sigma^2} u(y)$$

توزیع احتمال Y را توزیع Log-Normal گویند چون لگاریتم آن نرمال است. مثلاً اگر یک متغیر تص

دسیبل (dB) نرمال باشد، آن متغیر تصادفی لوگ نرمال است. این توزیع مدل مناسبی برای پدیده

مسئله ۱۰: مسئله تکرار مستقل از هم یک آزمایش تصادفی است که در آن احتمال پیش آمد E (اصابت) $p=0.9$ است

(الف) احتمال غرق ناو یعنی اصابت لااقل دو از در ۳ پرتاب $(n=3)$

$$) = 1 - P(X<2) = 1 - P(X=0) - P(X=1) = 1 - \binom{n}{0}p^0(1-p)^n - \binom{n}{1}p(1-p)^{n-1} = 0.352$$

چون x متغیر تصادفی هندسی است

$M_x = EX = 3 \overset{}{=} 1/p \Longrightarrow p = \frac{1}{3}$

$X \in \{1,2,3,\dots\}$, $P\{X=i\} = (1-p)^{i-1}p = (\frac{2}{3})^{i-1}(\frac{1}{3})$

ف)

$$y = \cos(\frac{\pi}{2}x) = \begin{cases} 0, & X=1,3,5,7,\dots \\ 1, & X=4,8,12,16,\dots \\ -1, & X=2,6,10,14,\dots \end{cases} \longrightarrow y \in \{0,1,-1\}$$

$$P\{y=0\} = (\frac{2}{3})^0\frac{1}{3} + (\frac{2}{3})^2\frac{1}{3} + (\frac{2}{3})^4\frac{1}{3} + (\frac{2}{3})^6\frac{1}{3} + \dots = 0.6$$

$$P\{y=1\} = (\frac{2}{3})^3\frac{1}{3} + (\frac{2}{3})^7\frac{1}{3} + (\frac{2}{3})^{11}\frac{1}{3} + \dots = \frac{8}{65}$$

$$P\{y=-1\} = 1 - P\{y=0\} - P\{y=1\} = \frac{18}{65}$$

ب)

$$\left.\begin{aligned} m_y &= EY = 0(0.6) + 1(\frac{8}{16}) + (-1)\frac{18}{65} = \frac{-2}{13} \\ P_y &= EY^2 = 0^2(0.6) + 1^2(\frac{8}{16}) + (-1)^2\frac{18}{65} = \frac{2}{5} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \sigma_y^2 = \frac{2}{5} - (\frac{-2}{13})^2 = \frac{318}{845}$$

الف)

$$m_y = EY = E(EY|X) = P(X=1)E(Y|X=1) + P(X=0)E(Y|X=0)$$

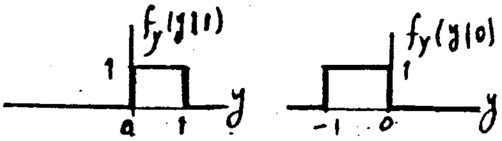
$$= \gamma E|V| + (1-\gamma)E(-|V|) = (2\gamma-1)E|V| \overset{}{=} \gamma - 1/2$$

$$V \sim U(-1,1) \Longrightarrow |V| \sim U(0,1) \Longrightarrow E|V| = \frac{1}{2}$$

ب)

$Y|X=1 = |V| \sim U(0,1)$

$Y|X=0 = -|V| \sim U(-1,0)$



ج)

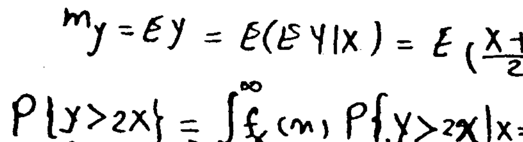
$$f_y(y) \overset{}{=} P(X=1)f_y(y|1) + P(X=0)f_y(y|0) = \gamma f_y(y|1) + (1-\gamma)f_y(y|0)$$

قضیه احتمال کل

$$F_y(y) \overset{}{=} P(X=1)F_y(y|X=1) + P(X=0)F_y(y|X=0) = \gamma F_y(y|X=1) + (1-\gamma)F_y(y|X=0)$$

یا می توانستیم بگوییم $F_y(y) = \int_{-\infty}^{y} f_y(y)dy$.

شکل این دو تابع نیز در روبرو نشان داده شده است.



الف) 1

$Y|X \sim U(X,1)$, $X \sim U(0,1) \Rightarrow \begin{cases} EX = \frac{1}{2} \\ EY|X = \frac{1}{2}(X+1) \end{cases}$

$$m_y = EY = E(EY|X) = E(\frac{X+1}{2}) = \frac{1}{2}m_x + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}(\frac{1}{2}) + \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$$

ب)

$$P\{y>2x\} = \int_{-\infty}^{\infty} f_x(x)P\{y>2x|x=x\}dx = \int_0^1 P\{y>2x|x=x\}dx$$

قضیه احتمال کل

$$= \int_0^{1/2} \frac{1-2x}{1-x}dx + \int_{1/2}^1 0\,dx = \int_0^{1/2}(2 - \frac{1}{1-x})dx = 1 - \ln 2 = 0.307$$

$$P\{Y>2X|X=x\} = P\{U(x,1)>2x\} = \begin{cases} 0, & 2x>1 \\ \frac{1-2x}{1-x}, & 2x<1 \end{cases} = \begin{cases} 0, & x>\frac{1}{2} \\ \frac{1-2x}{1-x}, & x<\frac{1}{2} \end{cases}$$

$EUV = E(X^2-Y^2) = EX^2-EY^2=(\sigma^2+0^2)-(\sigma^2+0^2)=0$

$EUEV = E(X-Y)E(X+Y) = (EX-EY)(EX+EY) = (0-0)(0+0)=0$ $\Big\} \Rightarrow EUV=EUEV$

پس $U \perp V$ و لذا $U \perp\!\!\!\perp V$

ب) Z یک متغیر تصادفی نرمال خواهد بود (ترکیب خطی از X و Y که نرمال‌اند) پس کافی است m_Z و σ_Z^2

$m_Z = EZ = E(X+3Y)=0$

$\sigma_Z^2 = EZ^2-0 = E(X+3Y)^2 = EX^2+9EY^2+6EXY = \sigma^2+9\sigma^2+6\rho\sigma^2$

$\rho = \frac{\sigma_{XY}}{\sigma_X\sigma_Y} = \frac{EXY-0}{\sqrt{\sigma^2\sigma^2}} \Longrightarrow EXY = \rho\sigma^2$

$f_Z(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(10+6\rho)\sigma^2}} e^{-z^2/2(10+6\rho)\sigma^2}$

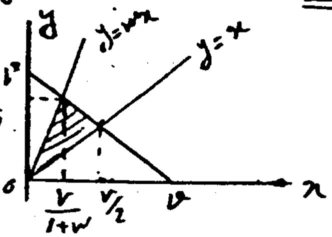
ج) اگر W_1 و W_2 را برحسب U و V بدست آوریم خواهیم داشت $W_1=\frac{1}{2}V$ و $-\frac{U^3}{8}$

چون U و V مستقل از هم هستند هر تابعی از U (مثل W_2) نیز مستقل از هر تابعی از V (مثـ

۱۵- شرط ضابطه $0<x<y$ برحسب V و W بصورت $v>0$ و $w>1$ درمی‌آید

$F_{WV}(w,v) = P\{W\le w, V\le v\} = P\{Y/X \le v, X+Y\le v\}$

$$= \int_0^{\frac{v}{1+w}}\int_x^{wx} 2e^{-x-y}\,dy\,dx + \int_{\frac{v}{1+w}}^{\frac{v}{2}}\int_x^{v-x} 2e^{-x-y}\,dy\,dx$$



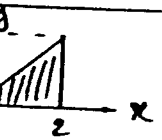
$=2[1-(v+1)e^{-v}]\frac{w-1}{2(w+1)}$, $w>1, v>0$

$f_{WV}(w,v) = \frac{\partial^2}{\partial w\partial v}F_{WV}(w,v) = ve^{-v}\frac{2}{(w+1)^2}$ $w>1, v>0$

$=2[ve^{-v}, v>0] \times [\frac{1}{(w+1)^2}, w>1]$

چون متغیرها در تابع pdf توأم تفکیک پذیرند لذا $V \perp\!\!\!\perp W$ است (توجه شود که X و Y مستقـ

(چون شرط ضابطه pdf توأم آنها اجازه تفکیک نمی‌دهد)



۱۶- ناحیه $0<y<x<2$ در شکل زیر نشان داده شده است

الف) $f_X(x)=\int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x,y)\,dy = \begin{cases}\int_0^x \frac{5}{16}x^2y\,dy = \frac{5}{32}x^4, & 0<x\le 2\\ 0, & \text{سایر نقاط}\end{cases}$

$) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x,y)\,dx = \begin{cases}\int_y^2 \frac{5}{16}x^2y\,dx = \frac{5}{48}(8-y^3)y, & 0<y<2\\ 0, & \text{سایر نقاط}\end{cases}$

$|x) = \frac{f_{XY}(x,y)}{f_X(x)} = \begin{cases} 2y/x^2, & 0<y<x\\ 0, & \text{سایر نقاط}\end{cases}$

$|y) = \frac{f_{XY}(x,y)}{f_Y(y)} = \begin{cases} 3\frac{x^2}{8-y^3}, & y<x\le 2\\ 0, & \text{سایر نقاط}\end{cases}$

$\sigma_x \cdot \frac{}{63} = .0794$

$EY = \int^{2} 5y(8-y^3)/48\, dy = \frac{10}{9}$, $EY^2 = \int_0^2 5y^3(8-y^3)/48\, dy = 10/7 \Rightarrow \sigma_y^2 = \frac{110}{567} = 0.194$

$EXY = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} xy\, f_{xy}(x,y) = \int_0^2 dx \int_0^x \frac{5}{16} x^2 y\, xy\, dx\, dy = \frac{5}{48}\int_0^2 x^3 x^3\, dx = \frac{40}{21}$

$\sigma_{xy} = EXY - EXEY = \frac{10}{189} \Rightarrow \rho_{xy} = \sigma_{xy}/\sigma_x\sigma_y = 0.426$

$\hat{X} = EX = 5/3$, $P_{min} = \sigma_x^2 = 0.0794$ (ج

$\hat{x} = EX|y = \int_{-\infty}^{\infty} x f_x(x|y)\, dx = \frac{3}{8-y^3}\int_y^2 x^3\, dx = \frac{3}{4}\,\frac{16-y^4}{8-y^3}$ (د

$Ex^2|y = \frac{3}{8-y^3}\int_y^2 x^4\, dx = \frac{3}{5}\,\frac{32-y^5}{8-y^3} \Rightarrow \sigma_{x|y}^2 = \frac{3}{5}\,\frac{32-y^5}{8-y^3} - \frac{9}{16}\left(\frac{16-y^4}{8-y^3}\right)^2$

$P_{min} = E\,\sigma_{x|y}^2 = \frac{5}{48}\int_0^2 y(8-y^3)\left[\frac{3}{5}\,\frac{32-y^5}{8-y^3} - \frac{9}{16}\,\frac{(16-y^4)^2}{(8-y^3)^2}\right]dy \simeq 0.033$

محاسبه به روش عددی

$\hat{x} = \rho_{xy}\frac{\sigma_x}{\sigma_y}(y-\bar{y}) + \bar{x} = 0.27227y - 1.3636$ (ه

$P_{min} = \sigma_x^2(1-\rho_{xy}^2) \simeq 0.065$ ملاحظه کنید که این خطا از خطای بند ج کمتر ولی از خطای بند (د) بیشتر است.

$\hat{y} = a_1X_1 + a_2X_2$, $P = E(y-\hat{y})^2 = E(y - a_1X_1 - a_2X_2)^2$

$\frac{\partial P}{\partial a_1} = 0 \Rightarrow EX_1(y - a_1X_1 - a_2X_2) = 0 \Rightarrow a_1EX_1^2 + a_2EX_1X_2 = EX_1y$

$\frac{\partial P}{\partial a_2} = 0 \Rightarrow EX_2(y - a_1X_1 - a_2X_2) = 0 \Rightarrow a_2EX_2^2 + a_1EX_1X_2 = EX_2Y$

$$\rightarrow \begin{cases} a_1 = \dfrac{EX_1Y\,EX_2^2 - EX_2Y\,EX_1X_2}{EX_1^2EX_2^2 - (EX_1X_2)^2} \\ a_2 = \dfrac{EX_2Y\,EX_1^2 - EX_1Y\,EX_1X_2}{EX_1^2EX_2^2 - (EX_1X_2)^2} \\ P_{min} = E(y-a_1X_1-a_2X_2)(y-a_1X_1-a_2X_2) = Ey(y-a_1X_1-a_2X_2) - 0 - 0 = Ey^2 - a_1EyX_1 \end{cases}$$

$(x,y) = \sum_z p_{xyz}(x,y,z) = p_{xyz}(x,y,0) + p_{xyz}(x,y,1)$ جرم احتمال‌های کناری را با کمک روابطی مثل

$(x) = \sum_y p_{xy}(x,y) = p_{xy}(x,0) + p_{xy}(x,1)$ حساب می‌کنیم

x	0	0	1	1
y	0	1	0	1
(x,y)	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$

x	0	0	1	1
z	0	1	0	1
$p_{xz}(x,z)$	0.3	0.2	0.1	0.4

y	0	0	1	1
z	0	1	0	1
$p_{yz}(y,z)$	0.1	0.15	0.3	0.45

x	0	1
$p_x(x)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

y	0	1
$p_y(y)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$

z	0
$p_z(z)$	0.4

(الف) چون به ازای جمیع مقادیر x و y داریم $p_{xy}(x,y) = p_x(x)p_y(y)$ پس $X \perp\!\!\!\perp Y$

(ب) با دلیلی شبیه دلیل بند الف داریم $Y \perp\!\!\!\perp Z$

(ج) چون مثلاً به ازای x=0 و z=0 داریم $p_{xz}(0,0) \neq p_x(0)p_z(0)$ پس $X \not\perp\!\!\!\perp Z$ هردو با Y مستق
بودن با یکدیگر مستقل نیستند

(د) چون مثلاً به ازای x=0 و y=0 داریم $\underbrace{p_{xy}(0,0|z=0)}_{0} \neq \underbrace{p_x(0|z=0)}_{\frac{0.3}{0.4}}\underbrace{p_y(0|z=0)}_{\frac{0.1}{0.4}}$ لذا $(X \not\perp\!\!\!\perp Y|z=0)$
پس X و Y که مستقل بودند وقتی شرط z=0 را اضافه کنیم بهم وابسته می‌گردند

$$_{yz}(x,y,z) = \left(\begin{cases}2x, & 0<x<1\\ 0, & \text{غیراز}\end{cases}\right) \times \left(\begin{cases}2y, & 0<y<1\\ 0, & \text{غیراز}\end{cases}\right) \times \left(\begin{cases}2z, & 0<z<1\\ 0, & \text{غیراز}\end{cases}\right) = f_X(x) f_Y(y) f_Z(z)$$

برای هریک ضریب 2 را در نظر گرفتیم تا سطح زیر واحد داشته باشد.

$$f_X(x) = \begin{cases}2x, & 0<x<1\\ 0, & \text{سایر نقاط}\end{cases}$$

$$_Y(y) = \begin{cases}2y, & 0<y<1\\ 0, & \text{سایر نقاط}\end{cases}$$

$$_Z(z) = \begin{cases}2z, & 0<z<1\\ 0, & \text{غیراز}\end{cases} \quad \text{و} \quad f_{YZ}(y,z) = f_Y(y) f_Z(z) = \begin{cases}4yz, & 0<y<1,\ 0<z<1\\ 0, & \text{سایر نقاط}\end{cases}$$

(الف) چون X و Y و Z مستقل هستند لذا ناهمبسته هم هستند پس $\rho_{yz} = \rho_{xz} = \rho_{xy} = 0$

(ب)

$$(x,y,z \mid y+z>1) = \begin{cases}\frac{1}{K} f_{XYZ}(x,y,z), & y+z>1\\ 0, & \text{سایر نقاط}\end{cases} = \begin{cases}9.6xyz, & 0<x<1,\ 0<y<1,\ 0<z<1,\ 1<y+z\\ 0, & \text{سایر نقاط}\end{cases}$$

$$P\{y+z>1\} = \int_{z=-\infty}^{\infty} \int_{y=1-z}^{\infty} f_{YZ}(y,z)\,dy\,dz = \int_0^1 \int_{1-z}^{1} 4yz\,dy\,dz = \frac{5}{6}$$

(ج) چون Y و Z مستقل از X هستند پس Y+Z هم مستقل از X است لذا

$$>1) = f_X(x)$$

---

۲۰ - (الف) بلی توأماً نرمال هستند چرا که pdf توأم آنها نمایی با توان درجه دوم است.

(ب)

$$_{Z}(x,y,z) = \frac{1}{2\pi\sqrt{\pi}} e^{-(x^2+y^2+\frac{1}{2}z^2-\sqrt{2}\,xy)}$$

$$\equiv \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3 \det C_X}} e^{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\alpha_{ij}(x_i-m_i)(x_j-m_j)}$$

متحد قرار دهیم

که در آن $x = x_1$ و $y = x_2$ و $z = x_3$ است. از مقایسه دیده می‌شود که

$$(0,0,0)^t \quad \text{و} \quad C_X^{-1} = [\alpha_{ij}]_{3\times3} = \begin{pmatrix}2 & -\sqrt{2} & 0\\ -\sqrt{2} & 2 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} \Rightarrow C_X = \begin{pmatrix}1 & \sqrt{2}/2 & 0\\ \sqrt{2}/2 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

(ج) با حذف سطر و ستون مربوط به y داریم (سطر و ستون دوم)

$$= E(X\ Z)^t = (0,0)^t$$

$$= E\binom{X}{Z}(X, Z) = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$,z) = \frac{1}{2\pi} e^{-(x^2+z^2)/2}$$

پس X و Z نرمال مستقل با متوسط صفر و واریانس 1 هستند

---

۲۱ - (الف)

$$ES = E(E(S|Y)) = E(\sum_{i=1}^{Y} EX_i) = E(\sum_{i=1}^{Y} m) = E\,mY = ma$$

$$Var(S) = E(Var(S|Y)) + Var(E(S|Y)) = E(\sum_{i=1}^{Y} Var(X_i)) + Var(\sum_{i=1}^{Y} EX_i)$$

برابر

بدلیل استقلال X_i ها

$$= E(\sum_{i=1}^{Y}\sigma^2) + Var(\sum_{i=1}^{Y} m) = E(Y\sigma^2) + Var(mY) = \sigma^2 a + m^2 Var(Y)$$

$$= \sigma^2 a + m^2 a = (\sigma^2+m^2)a$$

(ب)

$$\omega) = E e^{j\omega S} = EE(e^{j\omega S}|Y) = E(E(e^{j\omega\sum_{i=1}^{Y}X_i}|Y))$$

$$= E(E(\prod_{i=1}^{Y} e^{j\omega X_i}|Y)) = E\prod_{i=1}^{Y}(E e^{j\omega X_i}) = E\prod_{i=1}^{Y}\Phi_X(\omega)$$

بدلیل استقلال X_i ها

$$a[\Phi(\omega)-1]$$

- (الف) چون X_i ها پواسن مستقلند $\sigma_i^2 = m_i$ و $EX_i^2 = m_i + m_i^2$ و برای $i \neq j$ داریم $EX_iX_j = m_i m_j$

$$= E\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix}(X_1\ X_2\ X_3) = \begin{pmatrix} m_1+m_1^2 & m_1m_2 & m_1m_3 \\ m_1m_2 & m_2+m_2^2 & m_2m_3 \\ m_3m_1 & m_3m_2 & m_3+m_3^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 2 & 6 & 6 \\ 3 & 6 & 12 \end{pmatrix},$$

(ب) داریم $\tilde{Y}_1 = \tilde{X}_1$ و $\tilde{Y}_2 = \tilde{X}_2 - \tilde{X}_1$ و $\tilde{Y}_3 = \tilde{X}_3 - \tilde{X}_2$ و لذا

$$C_Y = E\,\underline{\tilde{Y}}\,\underline{\tilde{Y}}^t = E\begin{pmatrix} \tilde{X}_1 \\ \tilde{X}_2 - \tilde{X}_1 \\ \tilde{X}_3 - \tilde{X}_2 \end{pmatrix}(\tilde{X}_1 \quad \tilde{X}_2 - \tilde{X}_1 \quad \tilde{X}_3 - \tilde{X}_2) = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & 0-\sigma_1^2 & 0-0 \\ 0-\sigma_1^2 & \sigma_2^2+\sigma_1^2 & -\sigma_2^2 \\ 0-0 & -\sigma_2^2 & \sigma_3^2+\sigma_2^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{pmatrix}$$

(ج)

$$\Gamma_Y(\underline{z}) = E\, z_1^{Y_1} z_2^{Y_2} z_3^{Y_3} = E\, z_1^{X_1} z_2^{X_2-X_1} z_3^{X_3-X_2} = E\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{X_1}\left(\frac{z_2}{z_3}\right)^{X_2} z_3^{X_3}$$

$$= E\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{X_1} E\left(\frac{z_2}{z_3}\right)^{X_2} E z_3^{X_3} = \Gamma_{X_1}\left(\frac{z_1}{z_2}\right)\Gamma_{X_2}\left(\frac{z_2}{z_3}\right)\Gamma_{X_3}(z_3) = e^{\left(\frac{z_1}{z_2} + 2\frac{z_2}{z_3} + 3z_3 - 6\right)}$$

(د)

$$P\{Y_1 = Y_2 = Y_3 = 3\} \equiv P\{X_1 = 3, X_2 = 6, X_3 = 9\} = P\{X_1 = 3\}P\{X_2 = 6\}P\{X_3 = 9\} = e^{-6}\frac{1^3 2^6 3^9}{3!\,6!\,9!} = 1.992\times 10^{-6}$$

- با توجه به روابط داده شده داریم $Y_n = Y_{n-1} + nX_n$. ضمناً پیشامد معلوم بودن Y_1 الی Y_{n-1} معادل است با معلوم بودن X_1 الی X_{n-1} یعنی

$$\{Y_{n-1}, Y_{n-2}, \dots, Y_1\} \equiv \{X_{n-1}, X_{n-2}, \dots, X_1\} = A$$

(الف)

$$E(Y_n|A) = E(Y_{n-1} + nX_n)|A = EY_{n-1}|A + nEX_n|A = Y_{n-1} + nEX_n = Y_{n-1} + nm_n$$

X_n مستقل از شرطات

Y_{n-1} طبق شرط معلوم است

(ب)

$$\mathrm{Var}(Y_n|A) = E([Y_n - E(Y_n|A)]^2|A) = E((Y_n - Y_{n-1} - nm_n)^2|A) = E((nX_n - nm_n)^2|A)$$

$$= n^2E(X_n - m_n)^2 = n^2\sigma_n^2$$

که X_n مستقل از A

(ج) به دلیل استقلال $f_X(\underline{x}) = \prod_{i=1}^n f_{X_i}(x_i) = \prod_{i=1}^n f_i(x_i)$

بردار $\underline{Y}$ با بردار $\underline{X}$ رابطه خطی دارد $\underline{Y} = A\underline{X}$ که در آن

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & n \end{pmatrix}$$

ضمناً جواب معادله $\underline{y} = A\underline{x}$ به صورت

$$\begin{cases} x_1 = y_1 \\ x_2 = (y_2 - y_1)/2 \\ x_3 = (y_3 - y_2)/3 \\ \vdots \\ x_n = (y_n - y_{n-1})/n \end{cases}$$

می‌باشد پس

$$f_Y(\underline{y}) = \frac{1}{|\det(A)|} f_X(A^{-1}\underline{y}) = \frac{1}{n!}\prod_{i=1}^n f_i[(y_i - y_{i-1})/i]$$

$$Y_1 = \max\{x_1, x_2, \dots, x_m\} \Rightarrow F_{Y_1}(y) = P(Y_1 \le y) = P\{x_1 \le y, x_2 \le y, \dots, x_m \le y\}$$

$$\xrightarrow{\text{استقلال } x_i \text{ ها}} F_{Y_1}(y) = \prod_{i=1}^m P(X_i \le y) = \prod_{i=1}^m F_{X_i}(y) = F_X^m(y) \Rightarrow f_{Y_1}(y) = mF_X^{m-1}(y)f_X(y)$$

$$Y_2 = \min\{X_1, X_2, \dots, X_m\} \Rightarrow P\{Y_2 > y\} = P\{X_1 > y, X_2 > y, \dots, X_m > y\} = \prod_{i=1}^m P(X_i > y)$$

$$F_{Y_2}(y) = P(Y_2 \le y) = 1 - \prod_{i=1}^m P(X_i > y) = 1 - [1 - F_X(y)]^m \Rightarrow f_{Y_2}(y) = m[1 - F_X(y)]^{m-1}f_X(y)$$

$$Y_3 = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^m X_i \Rightarrow \Phi_{Y_3}(\omega) = E[e^{j\frac{\omega}{m}\sum_{i=1}^m X_i}] = \prod_{i=1}^m E(e^{j\frac{\omega}{m}X_i}) = \Phi_X^n\left(\frac{\omega}{m}\right)$$

$$\left[\Phi_X\left(\frac{\omega}{m}\right) \Leftrightarrow mf_X(mx)\right] \Rightarrow f_{Y_3}(y) = m^m\, \underbrace{f_X(my) * f_X(my) * \cdots * f_X(my)}_{m \text{ بار}}$$

(z+dz تا z در فاصله X_i ها ... z دیگر از X_i ها | $(k-1)!\,(n-k)!$ ... $F_X(z)\, f_X(z)\, dz$ =

$$f_{Z_k}(z) = \frac{n!}{(k-1)!\,(n-k)!}\, F_X^{n-k}(z)\,[1-F_X(z)]^{k-1} f_X(z)$$

حال چگالی احتمال توام Z_1 و Z_n را بدست می آوریم

$$, z_n)\, dz_1 dz_n = \begin{cases} P\left\{\begin{matrix}\text{یکی از } X_i \text{ ها در فاصله } z_1 \text{ تا } z_1+dz_1 \text{ یکی دیگر از } X_i \text{ ها}\\ \text{در فاصله } z_n \text{ تا } z_n+dz_n \text{ و بقیه در فاصله } z_1 \text{ تا } z_n\end{matrix}\right\}, & z_n < z_1 \\ 0, & z_n > z_1 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} n(n-1)\, f_X(z_1) f_X(z_n)\,[F_X(z_1) - F_X(z_n)]^{n-2} dz_1 dz_n, & z_n \leq z_1 \\ 0, & z_n > z_1 \end{cases}$$

$$) = P\{Z_1 - Z_n \leqslant z\} = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{z+z_n} f_{Z_1 Z_n}(z_1, z_n)\, dz_1\, dz_n$$

$$= \begin{cases} n(n-1)\int_{-\infty}^{\infty} f_X(z_n) \int_{z_n}^{z+z_n} f_X(z_1)\,[F_X(z_1) - F_X(z_n)]^{n-2} dz_1\, dz_n, & z \geqslant 0 \\ 0, & z < 0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} n\int_{-\infty}^{\infty} f_X(z_n)\left\{[F_X(z+z_n) - F_X(z_n)]^{n-1} - [\cancel{F_X(z_n)} - \cancel{F_X(z_n)}]^{n-1}\right\} dz_n, & z \geqslant 0 \\ 0, & z < 0 \end{cases}$$

$$f_Z(z) = \frac{d}{dz} F_Z(z) = \begin{cases} n(n-1)\int_{-\infty}^{\infty} f_X(z_n) f_X(z+z_n)\,[F_X(z+z_n) - F_X(z_n)]^{n-2} dz_n, & z \geqslant \\ 0, & z < 0 \end{cases}$$

۲۶

$$_X = R_X - m_X m_X^{R} = \begin{pmatrix} 5 & -2 & -1 \\ -2 & 3 & -2 \\ -1 & -2 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -2 \\ -1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

$\det C_X = 6-2-4 = 0 \Longrightarrow$ X_i ها رابطه خطی دارند

بردار ویژه متناظر با مقدار ویژه صفر ضرایب رابطه خطی را میدهد

$$\begin{pmatrix} & 0 & -1 \\ & 2 & -2 \\ & -2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} v_1 - v_3 = 0 \\ v_2 - v_3 = 0 \\ -v_1 - 2v_2 + 3v_3 = 0 \end{cases} \Longrightarrow v_1 = v_2 = v_3 = K$$

$$-2) + K(x_2+1) + K(x_3-0) = 0 \Longrightarrow \boxed{x_1 + x_2 + x_3 = 1}$$

۲۷

(الف) در کلیه نقاط $\xi < 1/2$ رشته ای $\{\cdots 10101\}$ و در کلیه نقاط $\xi > 1/2$ رشته ای $\{ \cdot \cdot$

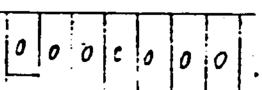
و در $\xi = 1/2$ رشته $\{00000 \cdot\cdot\cdot\}$ داریم. واضح است در همه جا بجز $\xi = 1/2$ رشته ها نوسانی

بین تقارب ای $\xrightarrow{e}$ و $\xrightarrow{ae}$ نداریم. اگر با توجه به تشابه نقاط Ω فرض کنیم $\begin{cases} 0, & \xi = 1/2 \\ a, & \text{سایر نقاط} \end{cases}$

تقارب ملکی $P\{|X_n - X| \geq \varepsilon\}$ مستقل از n و مخالف صفر است (به ازای $a \neq 0, 1$ برابر یک و به ازای $a = 0$ یا 1 برابر $\frac{1}{2}$ است) پس $\xrightarrow{X}$

$\xrightarrow{mn}$ نداریم. ولی چون $f_{X_n}(x) = \frac{1}{2}\delta(x) + \frac{1}{2}\delta(x-1)$ مستقل از n میباشد همه آنها خودشان بوده و تقارب

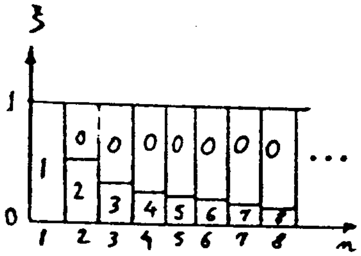
(ب) با توجه به شکل روبرو که بطور شماتیک رشته ها نقاط مختلف فضای $\Omega = [0, 1]$ را نشان میدهد واضح است که در همه جا تقارب



به $X(\xi) = \begin{cases} 0, & \xi \neq 0 \\ 1, & \xi = ? \end{cases}$ داریم با تقارب $\xrightarrow{e}$ تقارب های

$f_X(x) = \delta($ متقارب می‌گردد ($P(X=1)=0$ است) . تقارب در ms هم داریم زیرا

$$E(X_n-X)^2 = (1-\frac{1}{n})\times 0^2 + \frac{1}{n}\times 1^2 = \frac{1}{n} \to 0$$

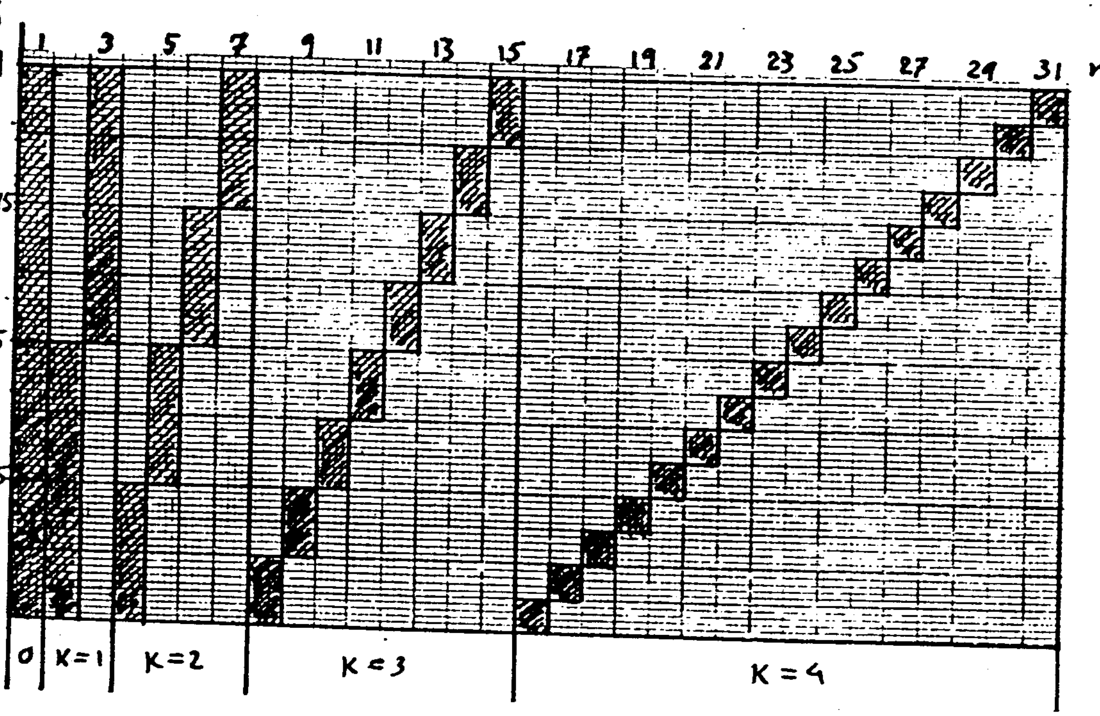


(ج) در اینجا نیز با توجه به شکل روبرو واضح است که بجز در $\xi=0$ در بقیه نقاط تقارب به $X(\xi)=0$ داریم. در $\xi=0$ چون همواره $X_n(0)=n$ است تقارب نداریم. پس تقارب $\xrightarrow{ae}$ ولذا $\xrightarrow{P}$ و $\xrightarrow{dist}$ داریم ، در اینجا هم تقارب در توزیع به $f_X(x)=\delta(x)$ متقارب می‌گردد. ولی در اینجا تقارب در ms نداریم چون رشته:

$$E(X_n-X)^2 = (1-\frac{1}{n})\times 0^2 + \frac{1}{n} n^2 = n$$

در نتیجه تقارب به صفر ندارد.

(د) در شکل زیر نقاط هاشور خورده نقاطی هستند که در آنها $X_n(\xi)=1$ است و در سایر نقاط $X_n(\xi)=0$ ا



همانطور که از شکل دیده می‌شود در هیچ جای فضا رشته متقارب نداریم ولی تقارب در احتمال داریم چون با در نظر گرفتن متغیر تصادفی حدی $X(\xi)=0$ داریم

$$P(A_n) = P\{|X_n-X| \geq \varepsilon\} = 2^{-K} \to 0 \quad , \forall \varepsilon>0$$

بدلیل تقارب در احتمال تقارب در توزیع هم داریم و حد توزیع (pdf) بصورت $f_X(x)=\delta(x)$ است

تقارب در ms هم داریم چون با متغیر تصادفی حدی $X(\xi)=0$ داریم

$$E(X_n-X)^2 = E(X_n-0)^2 = EX_n^2 = 0^2(1-2^{-K}) + 1^2(2^{-K}) = 2^{-K} \to 0$$

بسمه تعالی

مسائل سری دوم

سالهٔ ۱- اگر $X(t)$ یک فرایند ساکن به مفهوم وسیع WSS با متوسط صفر $(m_X = 0)$ باشد، WSS بودن کدامیک از دو
رایند $Y(t) \triangleq$ [illegible] $X(t)$ و $Z(t) \triangleq |X(t)|$ را میتوان نتیجه گرفت و چرا؟

سالهٔ ۲- بردار سه بعدی $\mathbf{X}^t = (X_1, X_2, X_3)$ را در نظر بگیرید که در آن $X_1 = X(t_0)$ و $X_2 = X(2t_0)$ و
$X_3 = X(4t_0$ متغیرهای تصادفی از یک فرایند پواسن با چگالی یکنواخت λ می باشند.

الف) تابع مولد احتمال بردار $\mathbf{X}$ را بدست آورید.

ب) احتمال پیش آمدهای شرطی $\{X_3 = 4n \mid X_1 = n\}$ و $\{X_1 = n \mid X_3 = 4n\}$ که در آن n یک عدد طبیعی
معلوم است را محاسبه کنید.

سالهٔ ۳ - فرایند نویز سفید غیر ساکن $V(t)$ با تابع همبستگی $R_V(t+\tau,t) = N_0(t)\cdot\delta(\tau)$ تعریف می‌گردد که در ان $N_0(t)$
ک تابع حقیقی غیر منفی است.

الف) با فرض آنکه داشته باشیم $X(t) \triangleq \int_0^t V(\alpha)d\alpha,\ t \ge 0$ تابع همبستگی $X(t)$ را بدست آورید.

ب) با فرض آنکه $Y(t)$ خروجی یک سیستم LTI با پاسخ ضربه $h(t)$ (در حالت کلی مختلط) باشد تابع همبستگی
فرایند Y و همبستگی‌های متقابل فرایند V و Y رابدست آورید.

سالهٔ ٤ - فرض کنید $X(t)$ یک فرایند با نموهای متعامد بوده و ضمنا $X(0)=0$ باشد.

الف) ثابت کنید تابع همبستگی $R_X(t_1,t_2)$ در سه حالت $t_1 \le t_2 \le 0$ و $t_1 \le 0 \le t_2$ و $0 \le t_1 \le t_2$ بترتیب
برابر با مقادیر $EX^2(t_2)$ و 0 و $EX^2(t_1)$ می‌باشد.

ب) با فرض آنکه $m_X(t)=0$ و $E[X(t_1)-X(t_2)]^2 = a|t_1-t_2|$ باشد که در آن a مقدار ثابتی است ثابت کنید
فرایند $Y(t) = \frac{1}{\varepsilon}[X(t+\varepsilon)-X(t)]$ ساکن می‌باشد و $R_Y(\tau) = \frac{a}{\varepsilon}\Lambda(\frac{\tau}{\varepsilon})$ است.

تابع چگالی احتمال زیر است.

$$f_A(a)=\begin{cases}\dfrac{\lambda}{e^{\lambda}-1}e^{\lambda a}, & 0<a<1\\ 0\ , & \text{Otherwise}\end{cases}$$

احتمال $P\{X(A)=n\}$ را حساب کنید.

✓ مسالهٔ ٦ - یک فرآیند نرمال $X(t)$ با متوسط صفر و تابع همبستگی $R_X(\tau)=4e^{-|\tau|}$ در نظر بگیرید.

الف) توابع چگالی احتمال کناری و توام دو نمونه بفاصله یک ثانیه از فرایند را بنویسید.

ب) اگر مقدار فعلی فرایند a باشد بهترین پیشگوئی مقدار یک ثانیه بعد فرایند چیست و متوسط مربع خطای تخمینی چقدر است؟

✓ مسالهٔ ۷- $X(t)$ یک فرایند نرمال ساکن با تابع همبستگی $R_X(\tau)=\dfrac{\text{Sin}^2(4\pi\tau)}{\pi^2\tau^2}$ میباشد و تابع متوسط آن صفراست $o=$

الف) متغیر های تصادفی $X(t_1)$ و $X(t_2)$ این فرایند به ازای چه مقادیری از t_1 و t_2 مستقل از هم میاشند

ب) دو متغیر تصادفی $Y_1=X(t)-X(t-0.5)$ و $Y_2=X(t)+X(t+0.5)$ را در نظر بگیرید و تابع

تک تک (کناری) و همچنین تابع چگالی احتمال توام آندو را بدست آورید.

ج) تابع مشخصهٔ (cf) توام سه متغیر تصادفی $Z_1=X(t-0.25)$ و $Z_2=X(t)$ و $Z_3=X(t+0.25)$ ر

کنید

✓ مسالهٔ ۸- فرایند سیگنال تلگرافی $X(t)$ با چگالی نقاط پواسن ثابت λ را در نظر بگیرید. سه متغیر تصادفی آنرا $X(1)$

و $X_2=X(2)$ $X_3=X(3)$ مینامیم.

الف) ماتریس همبستگی بردار $\mathbf{X}^t=(X_1,X_2,X_3)$ را بدست آورید.

ب) احتمال پیش آمد $P\{X_1=X_2=X_3\}$ را تعیین کنید.

ج) متغیر تصادفی لحظهٔ تصادفی $t=2+X_1$ فرآیند را $X_4=X(2+X_1)$ مینامیم. متوسط و واریانس تعیین کنید.

الة ۹ - فرض کنید اطلاعات $X(t)=g(t)+V(t)$ در دست است که د رآن $g(t)$ یک تابع یقینی ولی مجهول است و $V(t)$ ز سفید با تابع همبستگی $R_V(\tau)=N_0\delta(\tau)$ می‌باشد. با استفاده از این اطلاعات می‌خواهیم تخمینی از مقدار $S(t)=\int_0^t g(\alpha)d$ داشته باشیم. ضمنا می‌دانیم $S(T)=0$ است. نشان دهید که اگر برای تخمین فوق از رابطه $\hat{S}(t)=Z(t)-\frac{t}{T}Z(T$ استفاده کنیم که در آن $Z(t)=\int_0^t X(\alpha)d\alpha$ می‌باشد خواهیم داشت:

$$\mathrm{E}\hat{S}(t)=S(t)$$

$$\sigma^2_{\hat{S}(t)}=\mathrm{E}[\hat{S}(t)-S(t)]^2=N_0 t\,|1-\frac{t}{T}|$$

الة ۱۰ - فرایند وینری با تعریف $X(t)=\int_0^t W(\alpha)d\alpha$ و برای $t\in(-\infty,\infty)$ در نظر بگیرید که در آن $W(t)$ فرایند نویز فید نرمال با همبستگی $R_W(\tau)=N_0\delta(\tau)$ می‌باشد.

الف) ثابت کنید:

$$R_X(t_1,t_2)=\begin{cases}N_0\mathrm{Min}(|t_1|,|t_2|)\ , & t_1t_2\geq 0\\ 0\ , & t_1t_2\leq 0\end{cases}$$

ب) ME بودن یا نبودن فرایند فوق را تعیین کنید.

الة ۱۱-فضای نمونه ای شامل دو نقطه $\Omega=\{\xi_1,\xi_2\}$ و با توزیع احتمال یکنواخت $\mathrm{P}\{\xi_1\}=\mathrm{P}\{\xi_2\}=\frac{1}{2}$ در نظر بگیرید. ر این فضا فرآیند $X(t)$ را بصورت زیر تعریف میکنیم:

$$X(t,\xi)\overset{\Delta}{=}\begin{cases}\mathrm{Sin}^2(t), & \xi=\xi_1\\ Cos^2(t), & \xi=\xi_2\end{cases}$$

الف) آیا این فرایند در متوسط ارگادیک است (ME) ؟ چرا؟

ب) آیا این فرآیند در تابع همبستگی ارگادیک است (CE)؟ چرا؟

الة ۱۲- فرض کنید $X(t)$ یک فرایند با تابع متوسط $m_X(t)=0$ و تابع همبستگی $R_X(t+\tau,t)=e^{-t^2}\delta(\tau)$ میباشد.

الف) آیا این فرایند از نظر متوسط ارگادیک (ME) است؟ چرا؟

ب) آیا این فرایند از نظر همبستگی ارگادیک (CE) است؟ چرا؟ .

۱:

$$m_y(t) = E e^{\alpha t} X(t) = m_x(t) e^{\alpha t} = 0$$

$$R_y(t+\tau, t) = E e^{\alpha(t+\tau)} X(t+\tau) e^{-\alpha t^*} X^*(t) = e^{\alpha\tau} E X(t+\tau) X^*(t) = e^{\alpha\tau} R_x(\tau) \Bigg\} \Rightarrow$$ فرایند y(t) WSS است

چون رابطه z(t) با x(t) یک رابطه غیرخطی ولی تغییرناپذیر با زمان است اگر فرایند x(t) یک فرایند SSS کامل بود فرایند z(t) هم یک فرایند SSS کامل میشود. در مورد WSS بودن ولی اطمینان نیست چراکه ممان‌های مرتبه اول و دوم فرایند جدید به ممان‌های مرتبه بالاتر فرایند x(t) بستگی پیدا میکنند و این ممان‌ها ممکن است با گذشت زمان تغییر کنند

۲: (الف)

$$\Gamma_X(\underline{z}) = E z_1^{X_1} z_2^{X_2} z_3^{X_3} = E z_1^{X_1} z_2^{(X_2-X_1)+X_1} z_3^{(X_3-X_2)+(X_2-X_1)+X_1}$$

$$= E (z_1 z_2 z_3)^{X_1} (z_2 z_3)^{X_2-X_1} (z_3)^{X_3-X_2} \underset{\text{با استقلال}}{=} E(z_1 z_2 z_3)^{X_1} E(z_2 z_3)^{X_2-X_1} E z_3^{X_3-X_2}$$

$$= \Gamma_{X_1}(z_1 z_2 z_3) \Gamma_{X_2-X_1}(z_2 z_3) \Gamma_{X_3-X_2}(z_3)$$

$$\left.\begin{array}{l} X_1 \sim \text{Poisson}(\lambda t_0) \\ X_2 - X_1 \sim \text{Poisson}(\lambda t_0) \\ X_3 - X_2 \sim \text{Poisson}(2\lambda t_0) \end{array}\right\} \Longrightarrow \Gamma_{X_1}(z) = \Gamma_{X_2-X_1}(z) = e^{\lambda t_0 (z-1)} \text{ و } \Gamma_{X_3-X_2}(z) = e^{2\lambda t_0 (z-1)}$$

$$\Gamma_X(\underline{z}) = e^{\lambda t_0 (z_1 z_2 z_3 + z_2 z_3 + 2 z_3 - 4)}$$

(ب)

$$P\{X_3 = 4n | X_1 = n\} = P\{X_3 - X_1 = 3n | X_1 = n\} = P\{X_3 - X_1 = 3n\} = e^{-3\lambda t_0} \frac{(3\lambda t_0)^{3n}}{(3n)!}$$

$$X_3 - X_1 \sim \text{Poisson}(3\lambda t_0)$$

$$P\{X_1 = n | X_3 = 4n\} = \frac{P\{X_1 = n\} P\{X_3 = 4n | X_1 = n\}}{P\{X_3 = 4n\}} = \frac{e^{-\lambda t_0} \frac{(\lambda t_0)^n}{n!} e^{-3\lambda t_0} \frac{(3\lambda t_0)^{3n}}{(3n)!}}{e^{-4\lambda t_0} \frac{(4\lambda t_0)^{4n}}{(4n)!}}$$

$$= \frac{(4n)!}{n!(3n)!} \frac{3^{(3n)}}{4^{(4n)}}$$

۳: (الف)

$$R_X(t_1, t_2) = E X(t_1) X^*(t_2) = \int_0^{t_1} \int_0^{t_2} E V(\alpha) V^*(\beta) \, d\alpha \, d\beta$$

$$= \int_0^{t_1} \int_0^{t_2} N_0(\beta) \delta(\alpha - \beta) \, d\alpha \, d\beta = \int_0^{t_1} N_0(\beta) [u(t_2 - \beta) - u(-\beta)] \, d\beta = \int_0^{t_1} N_0(\beta) u(t_2 - \beta) \, d\beta$$

$$= \int_0^{\min(t_1, t_2)} N_0(\beta) \, d\beta$$

(ب)

$$R_{yv}(t_1, t_2) = h(t_1) * R_v(t_1, t_2) = h(t_1) * \delta(t_1 - t_2) N_0(t_2) = N_0(t_2) h(t_1 - t_2)$$

$$R_{vy}(t_1, t_2) = R_v(t_1, t_2) * h^*(t_2) = [N_0(t_2) \delta(t_1 - t_2)] * h^*(t_2) = [N_0(t_1) \delta(t_1 - t_2)] * h^*(t_2) = N_0(t_1) h^*($$

$$R_y(t_1, t_2) = h(t_1) * R_{vy}(t_1, t_2) = h(t_1) * [N_0(t_1) h^*(t_2 - t_1)] = \int_{-\infty}^{\infty} h(t_1 - \alpha) N_0(\alpha) h^*(t_2 - \alpha) \, d\alpha$$

۴: (الف)

$$t_1 \le t_2 \le 0 : \quad E[X(t_1) - X(t_2)][\overset{0}{\cancel{X(0)}} - X(t_2)] = 0 \Longrightarrow R_X(t_1, t_2) = E X^2(t_2)$$

$$t_1 \le 0 \le t_2 : \quad E[X(t_1) - \overset{0}{\cancel{X(0)}}][X(t_2) - \overset{0}{\cancel{X(0)}}] = 0 \Longrightarrow R_X(t_1, t_2) = 0$$

$$0 \le t_1 \le t_2 : \quad E[X(t_1) - \overset{0}{\cancel{X(0)}}][X(t_2) - X(t_1)] = 0 \Longrightarrow R_X(t_1, t_2) = E X^2(t_1)$$

با توجه به تعاریف فرایند X(t) در فواصل بدون اشتراک و اینکه EY(t) که فرایند در بازه $(t,t+\varepsilon)$ است

و اینکه امید ریاضی پرش خود در یک فاصله زمانی کوچک Δt برابر $a\Delta t$ است پس

$t_1+\varepsilon$

$t_2+\varepsilon$

$$(t_1,t_2) = \begin{cases} 0, & t_2>t_1+\varepsilon \text{ یا } t_1>t_2+\varepsilon \\ \frac{a}{\varepsilon^2}(t_1+\varepsilon-t_2), & t_2<t_1+\varepsilon \\ a/\varepsilon^2\,(t_2+\varepsilon-t_1), & t_1<t_2+\varepsilon \end{cases} \Rightarrow R_Y(\tau) = \begin{cases} 0, & \tau<-\varepsilon \text{ یا } \tau>\varepsilon \\ a/\varepsilon^2(\tau+\varepsilon), & \tau>-\varepsilon \\ a/\varepsilon^2(\varepsilon-\tau), & \tau<\varepsilon \end{cases} = \frac{a}{\varepsilon}$$

ساله ۵:

$$A)=n\} = \int_{-\infty}^{\infty} f_A(a)P\{X(A)=n|A=a\}da = \int_{-\infty}^{\infty} f_A(a)P\{X(a)=n|A=a\} \underset{X \perp\!\!\!\perp A}{=} \int_{-\infty}^{\infty} f_A(a)P\{X(a)=n\}da$$

[illegible]

$$= \int_0^1 \frac{\lambda}{e^\lambda-1} e^{\lambda a}\left(\frac{(\lambda a)^n}{n!}e^{-\lambda a}\right)da = \frac{\lambda^{n+1}}{(e^\lambda-1)n!}\int_0^1 a^n da = \frac{\lambda^{n+1}}{(e^\lambda-1)(n+1)!}$$

ساله ۶:

الف)

$$m = m_X(t+1) = 0,\quad \sigma^2_{X(t)} = \sigma^2_{X(t+1)} = C_X(0) = R_X(0) = 4$$

$$_{,X(t+1)} = C_X(1) = R_X(1) = 4e^{-1},\quad \rho = \frac{4e^{-1}}{4} = 1/e$$

پس متوسط و ماتریس کوواریانس بردار دو بعدی معلوم است

$$(0,0),\quad C_X = \begin{pmatrix} 4 & 4/e \\ 4/e & 4 \end{pmatrix}$$

$$(x_1,x_2)_{X(t+1)} = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^2\left|\begin{smallmatrix} 4 & 4/e \\ 4/e & 4 \end{smallmatrix}\right|}}\, e^{-\frac12(\tilde{x}_1\ \tilde{x}_2)\begin{pmatrix} 4 & 4/e \\ 4/e & 4 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \end{pmatrix}} = \frac{1}{8\pi\sqrt{1-1/e^2}}\, e^{-\frac{x_1^2-2/e\,x_1x_2+x_2^2}{8(1-1/e^2)}}$$

چگالی احتمال کناری:

$$) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,2}e^{-x_1^2/8},\quad f_{X(t+1)}(x_2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,2}e^{-x_2^2/8}$$

ب) بهترین تخمین، متوسط شرطی X(t+1) است (پس از رؤیت X(t)=a). چون توزیع نرمال است بهترین تخمین یک رابطه خطی با مقدار مشاهده شده دارد.

$$) = \rho\frac{\sigma_{X(t+1)}}{\sigma_{X(t)}}[X(t)-0]+0 = \frac1e X(t) \longrightarrow \hat{X}(t+1) = \frac1e a$$

$$= \sigma^2_{X(t+1)}(1-\rho^2) \Longrightarrow P_{min} = 4(1-1/e^2)$$

ساله ۷:

الف) چون متغیرهای تصادفی فرایند گاوسی نرمال هستند برای استقلال، کوواریانس آنها باید صفر باشد پس

$$C_X(\tau) = R_X(\tau) - |m_X|^2 = R_X(\tau) = 0 \Longrightarrow \tau = \begin{cases} n/4, & n\in Z, n\neq 0 \\ \infty \end{cases}$$

ب) Y_1 و Y_2 نیز گاوسی نرمال هستند. کوواریانس و متوسط آنها را بدست آوریم

$$_X - m_X = 0,\quad m_{Y_2} = m_X + m_X = 0$$

$$(X(t)-X(t-0.5))^2 = 2R_X(0) - 2R_X(0.5) = 32,\quad \sigma^2_{Y_2} = E[X(t)+X(t+0.5)]^2 = 2R_X(0)+2R_X(0.5) =$$

$$E(X(t)-X(t-0.5))(X(t)+X(t+0.5)) = R_X(0)+R_X(0.5)-R_X(0.5)-R_X(1) = 16$$

$$= \frac{1}{\sqrt{64\pi}}e^{-y_1^2/64},\quad f_{Y_2}(y_2) = \frac{1}{\sqrt{64\pi}}e^{-y_2^2/64},\quad f_{Y_1Y_2}(y_1,y_2) = \frac{1}{32\pi\sqrt3}\,e^{-\frac{y_1^2+y_2^2-y_1y_2}{48}}$$

ج) طبق فرضیات Z_1، Z_2، Z_3 مستقل از هم می‌باشند و لذا

$$\omega_2,\omega_3) = \prod_{i=1}^{3}\Phi_{Z_i}(\omega_i) = \prod_{i=1}^{3}e^{-8\omega_i^2} = e^{-8(\omega_1^2+\omega_2^2+\omega_3^2)}$$

۸: (الف)

$$R_x = E\begin{pmatrix} x(1) \\ x(2) \\ x(3) \end{pmatrix}(x(1), x(2), x(3)) = \begin{pmatrix} R_x(0) & R_x(1) & R_x(2) \\ R_x(1) & R_x(0) & R_x(1) \\ R_x(1) & R_x(1) & R_x(0) \end{pmatrix} \underset{R_x(\tau)=e^{-2\lambda|\tau|}}{=} \begin{pmatrix} 1 & e^{-2\lambda} & e^{-4\lambda} \\ e^{-2\lambda} & 1 & e^{-2\lambda} \\ e^{-4\lambda} & e^{-2\lambda} & 1 \end{pmatrix}$$

(ب)

$$P\{X_1 = X_2 = X_3\} = P\{X_1 = X_2 = X_3 = 1\} + P\{X_1 = X_2 = X_3 = -1\} = 2P\{X_1 = X_2 = X_3 = 1\}$$
$$= 2\left(\tfrac{1}{2}\right)\tfrac{1}{2}(1+e^{-2\lambda})\tfrac{1}{2}(1+e^{-2\lambda}) = \tfrac{1}{4}(1+e^{-2\lambda})^2$$

(ج)

$$m_{X_4} = E\,X(2+X_1) = P(X_1=1)\,E\,X(2+X_1)|_{X_1=1} + P(X_1=-1)\,E\,X(2+X_1)|_{X_1=-1}$$
$$= \tfrac{1}{2}\,E\,X(3)|_{X_1=1} + \tfrac{1}{2}E\,X(1)|_{X_1=-1} = \tfrac{1}{2}E\,X_3|_{X_1=1} + \tfrac{1}{2}E\,X_1|_{X_1=-1}$$
$$= \tfrac{1}{2}[(1)P(X_3=1|_{X_1=1}) + (-1)P(X_3=-1|_{X_1=1})] + \tfrac{1}{2}(-1) = \tfrac{1}{2}[\tfrac{1}{2}(1+e^{-4\lambda}) - \tfrac{1}{2}(1-e^{-4\lambda})] - \tfrac{1}{2}$$
$$= (e^{-4\lambda}-1)/2$$

$$r_{X_4} = E\,X^2(2+X_1) = 1$$

چون $X \in \{1,-1\}$ است پس $X^2=1$ است

$$\sigma_{X_4}^2 = r_{X_4} - m_{X_4}^2 = 1 - \frac{(e^{-4\lambda}-1)^2}{4}$$

۹:

$$\hat{s}(t) = \int_0^t [g(\alpha)+v(\alpha)]d\alpha - \frac{t}{T}\int_0^T [g(\alpha)+v(\alpha)]d\alpha = s(t) - \frac{t}{T}s(T) + \int_0^t v(\alpha)d\alpha - \frac{t}{T}\int_0^T v(\alpha)d\alpha$$

$$s(T) = 0 \Longrightarrow \hat{s}(t) = s(t) + \int_0^t v(\alpha)d\alpha - \frac{t}{T}\int_0^T v(\alpha)d\alpha$$

$$E\,\hat{s}(t) = s(t) + E\int_0^t v(\alpha)d\alpha - \frac{t}{T}E\int_0^T v(\alpha)d\alpha = s(t)$$

چون $s(t)$ غیرتصادفی و $E\,v(t)=0$ است

$$\sigma_{\hat{s}(t)}^2 = E[\hat{s}(t) - E\hat{s}(t)]^2 = E[\hat{s}(t)-s(t)]^2 = E\left[\int_0^t v(\alpha)d\alpha - \frac{t}{T}\int_0^T v(\alpha)d\alpha\right]\left[\int_0^t v(\beta)d\beta - \frac{t}{T}\int_0^T v(\beta)d\beta\right]$$
$$= \int_0^t\int_0^t R_v(\alpha-\beta)d\alpha d\beta + \frac{t^2}{T^2}\int_0^T\int_0^T R_v(\alpha-\beta)d\alpha d\beta - \frac{t}{T}\int_0^t\int_0^T [R_v(\alpha-\beta)+R_v(\beta-\alpha)]d\alpha d\beta$$
$$= N_0\int_0^t [u(t-\beta)-u(-\beta)]d\beta + N_0\frac{t^2}{T^2}\int_0^T [u(T-\beta)-u(-\beta)]d\beta - \frac{2t}{T}\int_0^t [u(T-\beta)-u(-\beta)]d\beta$$
$$= N_0\Big\{r(t) - \cancel{r(0)} - \cancel{r(0)} + r(-t) + \frac{t^2}{T^2}[r(T) - \cancel{r(0)} - \cancel{r(0)} + r(-T)] - \frac{2t}{T}[r(T) - r(T-t) - \cancel{r(0)} + r(-t)$$
$$= \begin{cases} N_0\left[t + \frac{t^2}{T^2}T - \frac{2t}{T}(T-T+t)\right] = N_0 t\left(1-\frac{t}{T}\right), & 0<t<T \\ N_0\left[t + \frac{t^2}{T} - \frac{2t}{T}(T)\right] = N_0 t\left(t/T - 1\right), & 0<T<t \end{cases} = N_0 t\left|1-\frac{t}{T}\right|$$

۱۱: (الف)

$$m_x(t) = E\,x(t) = \tfrac{1}{2}\sin^2 t + \tfrac{1}{2}\cos^2 t = \tfrac{1}{2}$$
$$\left.\langle x(t)\rangle = \begin{cases} \langle \sin^2(t)\rangle = \frac{1}{2}, & \zeta=\zeta_1 \\ \langle \cos^2(t)\rangle = \frac{1}{2}, & \zeta=\zeta_2 \end{cases}\right\} \Longrightarrow E\,x(t) = \langle x(t)\rangle$$

پس فرآیند ME است

(ب)

$$\langle x(t+\tau)x(t)\rangle = \begin{cases} \langle \sin^2(t+\tau)\sin^2(t)\rangle = \frac{1}{4} + \frac{1}{8}\cos(2\tau), & \zeta=\zeta_1 \\ \langle \cos^2(t+\tau)\cos^2(t)\rangle = \frac{1}{4} + \frac{1}{8}\cos(2\tau), & \zeta=\zeta_2 \end{cases}$$

$$R_x(t+\tau,t) = E\,x(t+\tau)x(t) = \tfrac{1}{2}\sin^2(t+\tau)\sin^2(t) + \tfrac{1}{2}\cos^2(t+\tau)\cos^2(t)$$
$$= \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{8}\cos(2\tau) + \tfrac{1}{4}\cos(4t+2\tau)$$

$$\langle x(t+\tau)x(t)\rangle \neq E\,x(t+\tau)x(t)$$

پس CE نیست

توجه شود که اگرچه $\langle x(t+\tau)x(t)\rangle$ در نقاط مختلف فضای نمونه یکسان بود ولی فرآیند CE نیست

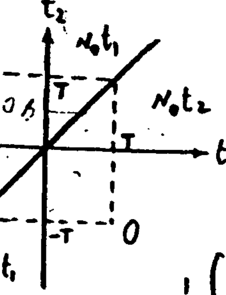
سئاله ۱۰: (الف)

$$t_2) = \int_0^{t_1}\int_0^{t_2} E\,W(\alpha)W(\beta)\,d\alpha\,d\beta = \int_0^{t_1}\int_0^{t_2} N_0\,\delta(\alpha-\beta)\,d\alpha\,d\beta$$

$$= N_0 \int_0^{t_1} [u(t_2-\beta) - u(0-\beta)]\,d\beta = N_0[r(t_2) - r(t_2-t_1) - r(0) + r(-t_1)]$$

که در آن $r(t) = \begin{cases} 0 & t \leq 0 \\ t & , t > 0 \end{cases}$ است

$$t_2) = \begin{cases} N_0[0-(t_2-t_1)-0-t_1] = -N_0 t_2 \;, & t_1<t_2<0 \\ N_0[t_2-(t_2-t_1)-0-t_1] = 0 \;, & t_1<0<t_2 \\ N_0[t_2-(t_2-t_1)-0-0] = N_0 t_1 \;, & 0<t_1<t_2 \end{cases} = \begin{cases} N_0 \min[|t_1|,|t_2|] \;, & \text{علامت} \\ 0 & \text{مختلف العلامه} \end{cases}$$



(ب) چون $m_X(t) = 0$ است لذا $C_{XX}(t_1,t_2) = R_{XX}(t_1,t_2)$ و در شکل روبرو مقادیر تابع فوق در نواحی مختلف صفحه t_1,t_2 نوشته شده است.

با توجه به تقارن

$$\frac{1}{4T^2}\int_{-T}^{T}\int_{-T}^{T} C_{XX}(\alpha,\beta)\,d\alpha\,d\beta = \frac{2}{4T^2}\int_0^T\int_0^T C_{XX}(\alpha,\beta)\,d\alpha\,d\beta$$

$$\int_0^T d\beta\,\left[\int_0^\beta N_0\alpha\,d\alpha + \int_\beta^T N_0\beta\,d\alpha\right] = \frac{N_0}{4T^2}\int_0^T \beta(2T-\beta)\,d\beta = \frac{N_0 T}{6}$$

چون مقدار آن وقتی $T\to\infty$ نامحدود است پس فرایند وینر ME نیست.

سئاله ۱۲:

(الف) چون فرایند در متوسط ساکن است و

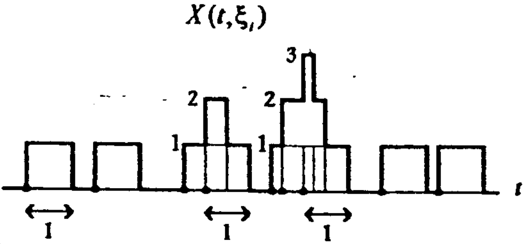
$$+\tau,t) = R_X(t+\tau,t) - m_X(t+\tau)m_X^*(t) = R_X(t+\tau,t) = e^{-t^2}\delta(\tau)$$

$$(t+\tau,t)\rangle_t\rangle_\tau = \langle\langle e^{-t^2}\delta(\tau)\rangle_t\rangle_\tau = \langle e^{-t^2}\rangle_t \langle\delta(\tau)\rangle_\tau = (0)(0) = 0$$

پس ME است

(ب) چون فرایند در تابع اتو ساکن نیست پس CE نمیتواند باشد.

مسائل سری سوم



لة ۱ - فرایند تصادفی $X(t)$ مرکب است از پالسهائی با عرض ۱
رتفاع ۱ که بطور تصادفی در زمان پراکنده هستند. زمان شروع این
سها را نقاط پواسن تشکیل می‌دهند یک تابع نمونه فرایند در شکل
رو نشان داده شده است.

تابع متوسط $m_X(t)$ و تابع همبستگی $R_X(t_1,t_2)$ و طیف
رت $S_X(f)$ و قدرت متوسط P_X را بدست آورید. دانسیته نقاط پواسن را λ و مستقل از زمان در نظر بگیرید.

مساحت زیر ۱
برابر 1 ا

لة ۲ - یک سیگنال PAM با شکل پالس $h(t)$ و دامنه‌های A_k که مستقل از هم و با متوسط و واریانس یکسان $m_{A_k}=m$ و
$\sigma_{A_k}^2 =$ می‌باشند در نظر بگیرید و رابطه زیر را برای طیف قدرت آن بدست آورید.

$$S_X(f)=\frac{\sigma^2}{T_0}|H(f)|^2+\frac{m^2}{T_0^2}\sum_{i=-\infty}^{\infty}|H(\frac{i}{T_0})|^2\,\delta(f-\frac{i}{T_0})$$

رابطه فوق ~~T_X~~ T_0 فاصله بین دو پالس مجاور می‌باشد.

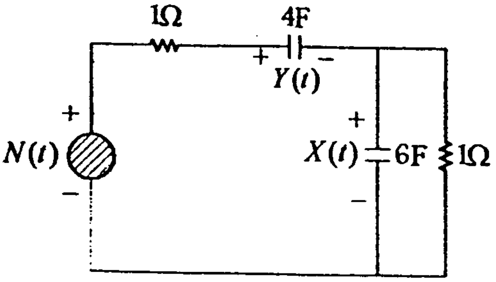
لة ۳ - در این مساله چگالی نقاط پواسن را بصورت تابع $\lambda = a\cos^2(\omega_0 t)$ در نظر بگیرید.

الف) ممانهای اول و دوم فرایند پواسن با فضای پارامتر $t\in[0,\infty)$ را بدست آورید.

ب) ممانهای اول و دوم فرایند ضربه‌های پواسن با فضای پارامتر $t\in(-\infty,\infty)$ را بدست آورید و ساکن یا ساکن دوری بودن آنرا مشخص نمائید.

ج) طیف قدرت فرایند ضربه‌های پواسن را تعیین کنید.

لة ٤ - در شکل روبرو $N(t)$ یک فرایند سفید با تابع همبستگی $R_X(\tau)=\delta(\tau)$ میباشد. ولتاژ دو سر خازنها [redacted] را فرایند $X(t)$ و فرایند $Y(t)$ [redacted] مینامیم.



الف) طیف قدرت فرایند $X(t)$ و طیف قدرت متقابل فرایندهای $X(t)$ و $Y(t)$ را پیدا کنید.

ب) قدرت فرایند $Y(t)$ چقدر است؟

ج) ضریب همبستگی متغیرهای تصادفی $X(1)$ و $Y(1)$ را محاسبه کنید.

Rxy(1,1)

✓ **مسالهٔ ۵** – فرض کنید $X(t)$ یک فرایند نرمال $X(\cdot) \sim \mathrm{N}(1, \exp(-\frac{}{2}))$ میباشد مشتق این فرایند را نیز $X'(t)$ می

الف) ماتریس همبستگی بردار سه بعدی متشکل از متغیرهای تصادفی $X(t_0)$ و $X'(t_0)$ و $X'(t_0 - 1)$

کنید.

ب) طیف قدرت فرایند $X'(t)$ و طیف قدرت متقابل دو فرایند $X(t)$ و $X'(t)$ را پیدا کنید.

ج) تابع چگالی احتمال توام دو متغیر تصادفی $X(t_0)$ و $X'(t_0)$ را بدست آورید.

د) متغیرهای تصادفی $X'(t_1)$ و $X'(t_2)$ به ازای چه مقادیری از t_1 و t_2 مستقل از هم میباشند و چرا؟

✓ **مسالهٔ ۷** – فرایند $W(t)$ نویزی سفید با تابع همبستگی $R_W(\tau) = \delta(\tau)$ می‌باشد. در رابطه با آن فرایند $X(t)$

$X(t) = \int_{2t}^{2t+T} W(\alpha) d\alpha$ تعریف می‌کنیم.

الف) توابع همبستگی و همبستگی متقابل فرایندهای X و W را بدست آورید و در مورد ساکن بودن دو فر

اظهار نظر فرمائید.

ب) طیف قدرت و طیف قدرت متقابل فرایندهای X و W را بدست آورید.

✓ **مسالهٔ ۸** – ثابت کنید در حالت کلی برای یک فرایند ساکن رابطه زیر برقرار است.

$$R_X(0) - R_X(\tau) \geq \frac{1}{4^n}[R_X(0) - R_X(2^n \tau)]$$

راهنمائی: میدانیم $1 - \cos(\alpha) \geq \frac{1}{4}(1 - \cos(2\alpha))$.

۹ - سیستمی با تابع تبدیل $H(f)=\dfrac{1}{-4\pi^2 f^2+j4\pi f+5}$ در نظر بگیرید. ورودی سیستم با فرایند ساکنی با قدرت P_X در نظر بگیرید تابع همبستگی ورودی $R_X(\tau)$ را به قسمتی تعین کنید که قدرت خروجی P_Y ماکزیمم شود.

۱۰ - طیف قدرت فرایند ساکن $X(t)$ بصورت زیر در دست است.

$$S_X(f)=\frac{(2\pi f-1)^2}{(2\pi f)^2+1}$$

الف) تابع همبستگی و تابع کواریانس فرایند را بدست آورید.

ب) فرایند $X(t)$ را بصورت رابطه‌ای خطی و علی برحسب یک فرایند سفید $W(t)$ بیان کنید.

۱۱ - فرض کنید که $R_N(\tau)=N\delta(\tau)$ و $X(t)=A\cos(\omega_0 t)+N(t)$ و $H(f)=\dfrac{1}{\alpha+j2\pi f}$ و $Y(t)=B\cos(\omega_0 t+\varphi)+Y_N$ باشد که در آن $Y_N(t)$ پاسخ سیستم به $N(t)$ است. مقدار α را به نحوی انتخاب کنید که ت سیگنال به نویز خروجی $\dfrac{S}{N}=\dfrac{|B|^2}{\mathrm{E}(Y_N^2(t))}$ ماکزیمم شود.

۱۲ - نشان دهید که اگر $R_X(\tau)=e^{-c|\tau|}$ باشد در اینصورت بسط K-L فرایند X در فاصله $t\in(-a,a)$ بصورت $\hat{X}(t)=\sum_{n=1}^{\infty}(\beta_n b_n\cos(\omega_n t)+\beta'_n b'_n\sin(\omega$ خواهد بود که در آن $\tan(a\omega_n)=\dfrac{c}{\omega_n}$ و $\cot(a\omega'_n)=\dfrac{-c}{\omega'_n}$ و $\beta_n=(a+\dfrac{\lambda_n}{2}$ و $\beta'_n=(a-\dfrac{\lambda'_n}{2})^{-1/2}$ و $\mathrm{E}b_n^2=\lambda_n=\dfrac{2c}{c^2+\omega_n^2}$ و $\mathrm{E}b_n'^2=\lambda'_n=\dfrac{2c}{c^2+\omega_n'^2}$ می‌باشد.

(حل مسائل سری ششم)

۱: فرایند $x(t)$ را میتوان نتیجه عبور فرایند ضربه‌های پواسن (مثلاً $x_1(t)$) از سیستم با پاسخ ضربه $h(t)$ چهارگوش به عرض ۱ و ارتفاع یک دانست

$$h(t) = rect(t) \leftrightarrow H(f) = Sinc(f)$$

$$m_x(t) = h(t) * m_{x_1}(t) = rect(t) * \lambda = \lambda, \quad S_{XX}(f) = S_{x_1x_1}(f)\,|H|^2 = [\lambda + \lambda^2\delta(f)]\, Sinc^2(f$$

$$S_{XX}(f) = \lambda\, Sinc^2(f) + \lambda^2\delta(f) \leftrightarrow R_{XX}(\tau) = \lambda\,\Lambda(\tau) + \lambda^2, \quad P_X = R_{XX}(0) = \lambda + \lambda^2$$

۲:

$$R_{AA}(i) = E\,A_{k+i}A_k = \begin{cases} E A_{k+i} E A_k = m^2 & , i \neq 0 \\ E A_k^2 = \sigma^2 + m^2 & , i = 0 \end{cases}$$

[illegible] $S_{DD}(f) = \frac{1}{T_0}\sum_i R_{AA}(i)\, e^{j2\pi f i T_0} = \frac{\sigma^2}{T_0} + \frac{m^2}{T_0}\sum_{i=-\infty}^{\infty} e^{j2\pi f i T_0}$

با استفاده از فرمول جمع پواسن

$$S_{DD}(f) = \frac{\sigma^2}{T_0} + \frac{m^2}{T_0^2}\sum_{i=-\infty}^{\infty}\delta(f - i/T_0)$$

برای شکل پالس $h(t) \leftrightarrow H(f)$ داریم

$$S_{XX}(f) = S_{DD}(f)|H|^2 = \frac{\sigma^2}{T_0^2}|H(f)|^2 + \frac{m^2}{T_0^2}\sum_{i=-\infty}^{\infty}\left|H\left(\frac{i}{T_0}\right)\right|^2\delta\left(f - \frac{i}{T_0}\right)$$

۳: الف) فرایند پواسن را $x(t)$ می‌نامیم

$$m_x(t) = a_{ot} = \int_0^t a\cos^2 w_0 t\, dt = at/2 + \frac{a}{4w_0}\sin 2w_0 t$$

$$C_{xx}(t_1,t_2) = a_{o,\min(t_1,t_2)} = m_x(t_1)u(t_2-t_1) + m_x(t_2)u(t_1-t_2)$$

ب) فرایند ضربه‌ای پواسن را $y(t)$ می‌نامیم و میدانیم $y(t) = x'(t)$ است

$$m_y(t) = m_x'(t) = \frac{a}{2} + \frac{a}{2}\cos 2w_0 t = a\cos^2 w_0 t$$

$$C_{yy}(t_1,t_2) = \frac{\partial^2}{\partial t_1 \partial t_2} C_{xx}(t_1,t_2) = \frac{\partial}{\partial t_2}\Big[m_x'(t_1)u(t_2-t_1) - m_x(t_1)\delta(t_2-t_1) + m_x(t_2)\delta$$

$$= m_x'(t_1)\delta(t_2-t_1) = a\cos^2(w_0 t_2)\,\delta(t_2-t_1)$$

$$R_{\tilde y\tilde y}(t+\tau,t) = C_{yy}(t+\tau,t) = a\cos^2 w_0 t\,\delta(\tau)$$

$$R_{yy}(t+\tau,t) = a\cos^2 w_0 t\,\delta(\tau) + m_y(t+\tau)m_y(t) = a\cos^2 w_0 t\,\delta(\tau) + a^2\cos^2 w_0 t\cos$$

روشن است که فرایند ساکن نیست ولی ساکن دوره‌ای با پریود $\frac{2\pi}{2w_0}$ است

$$m_y(t) = \frac{a}{2} + \frac{a}{2}\cos 2w_0 t \leftrightarrow M_y(f) = \frac{a}{2}\delta(f) + \frac{a}{4}\delta(f-2f_0) + \frac{a}{4}\delta(f+2f_0)$$

$$S_{m_ym_y}(f) = \frac{a^2}{4}\delta(f) + \frac{a^2}{16}\delta(f-2f_0) + \frac{a^2}{16}\delta(f+2f_0)$$

$$\langle R_{\tilde y\tilde y}(t+\tau,t)\rangle = \frac{a}{2}\delta(\tau) \leftrightarrow S_{\tilde y\tilde y}(f) = \frac{a}{2}, \quad S_{yy}(f) = S_{\tilde y\tilde y}(f) + S_{m_y}$$

$$\frac{}{1+4jw}+1+6jw \qquad 1+14jw-24w^2$$ (الف)

$$= S_N(f)|H_1|^2 = |H_1|^2 = \frac{16w^2}{(1-24w^2)^2+14^2w^2} = \frac{16w^2}{(1+4w^2)(1+144w^2}$$

$$) = \frac{Y(f)}{N(f)} = \frac{1/4jw}{1/4jw+1+\frac{1}{1+6jw}} = \frac{1+j6w}{1+14jw^2-24w^2}$$

$$f) = H_2(f)H_1^*(f)S_N(f) = H_2(f)H_1^*(f) = \frac{-4jw+24w^2}{(1+4w^2)(1+144w^2)}$$

(ب)

$$) = S_N(f)|H_2|^2 = |H_2|^2 = \frac{1+36w^2}{(1+4w^2)(1+144w^2)} = \frac{8/35}{1+4w^2}+\frac{27/35}{1+144w^2}$$

$$) = \frac{2}{35}e^{-\frac{1}{2}|\tau|} + \frac{9}{280}e^{-\frac{1}{12}|\tau|} \Longrightarrow P_y = R_y(0) = \frac{5}{56}$$

(ج)

$$0 \Rightarrow m_x = m_y = 0 \Longrightarrow C_x(\tau) = R_x(\tau) \,,\, C_y(\tau) = R_y(\tau), C_{yx}(\tau) = R_{yx}(\tau)$$

$$) = \frac{C_{yx}(0)}{\sqrt{C_x(0)C_y(0)}} = \frac{R_{yx}(0)}{\sqrt{R_x(0)R_y(0)}}$$

$$0) = \int_{-\infty}^{\infty} S_{yx}(f)\,df = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{-4jw\,dw}{(1+4w^2)(1+144w^2)} + \int_{-\infty}^{\infty}\frac{24w^2\,dw}{(1+4w^2)(1+144w^2)} = 0 + \frac{24}{16}\int_{-\infty}^{\infty} S_x(f)\,df$$

$$= \frac{3}{2}R_x(0)$$

$$= \frac{4/35}{1+4w^2} + \frac{-4/35}{1+144w^2} \Longrightarrow R_x(\tau) = \frac{1}{35}e^{-\frac{1}{2}|\tau|} - \frac{1}{210}e^{-\frac{1}{12}|\tau|} \Longrightarrow R_x(0) = \frac{1}{42}$$

$$\rho_{y(1),x(1)} = \frac{\frac{3}{2}\,\frac{1}{42}}{\sqrt{\frac{1}{42}\,\frac{5}{56}}} = \sqrt{0.6} = 0.775$$

سوال ۵ : (الف)

$$) = |m_x|^2 + C_x(\tau) = 1 + e^{-\tau^2/2}$$

$$(\tau) = -\frac{d}{d\tau}R_x(\tau) = \tau e^{-\tau^2/2} \quad , \quad R_{x'}(\tau) = -\frac{d^2}{d\tau^2}R_x(\tau) = (1-\tau^2)e^{-\tau^2/2}$$

$$E\begin{pmatrix} X(t_0) \\ X'(t_0) \\ X'(t_0-1)\end{pmatrix}\begin{pmatrix} X(t_0) & X'(t_0) & X'(t_0-1)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_x(0) & R_{xx'}(0) & R_{xx'}(1) \\ R_{xx'}(0) & R_{x'}(0) & R_{x'}(1) \\ R_{x'x}(-1) & R_{x'}(-1) & R_{x'}(0)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & e^{-0.5} \\ 0 & 1 & 0 \\ e^{-0.5} & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(ب)

$$) = |H|^2 S_x(f) = |jw|^2 S_x(f) = w^2(\delta(f) + \sqrt{2\pi}\,e^{-2\pi^2f^2}) = \sqrt{2\pi}\,4\pi^2f^2e^{-2\pi^2f^2}$$

$$f) = H\,S_x(f) = jw\,S_x(f) = jw(\delta(f) + \sqrt{2\pi}\,e^{-2\pi^2f^2}) = j2\pi f\sqrt{2\pi}\,e^{-2\pi^2f^2}$$

$$f) = H^*S_x(f) = -jw\,S_x(f) = -j2\pi f\sqrt{2\pi}\,e^{-2\pi^2f^2}$$

(ج) چون $X(t)$ نرمال است $X(t_0)$ و $X'(t_0)$ توأماً نرمال هستند و چون $R_{XX'}(0)=0$ است م

و چون $EX'(t_0) = m'_X(t_0) = 0$ است پس $X(t_0)$ و $X'(t_0)$ ناهمبسته و بدلیل نرمال بودن

$$t_0) = C_{x'}(0) = R_{x'}(0) = 1 \Longrightarrow f_{X'(t_0)}(x_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x_1^2/2}$$

$$1 \,,\, Var\,X(t_0) = C_x(0) = 1 \Rightarrow f_{X(t_0)}(x_2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-(x_2-1)^2/2}\Bigg\} \rightarrow f_{X'(t_0)X(t_0)}(x_1,x_2) = \frac{1}{2\pi}e^{-\frac{x_1^2+(x_2-1)^2}{2}}$$

(د) چون $X'(t_1)$ و $X'(t_2)$ توأماً نرمال هستند برای استقلال کافیست ناهمبسته باشند و چون متوسط صفر دا

متعامد باشند یعنی

$$) = 0 \Longrightarrow \tau = 1, \infty$$

ال ۷:

الف)

$$m_X(t) = E\int_{\alpha}^{2t+T} W(\alpha)\,d\alpha = \int_{2t}^{2t+T} \underbrace{EW(\alpha)}_{0}\,d\alpha = 0$$

$$R_X(t+\tau,t) = E\int_{2t+2\tau}^{2t+2\tau+T} W(\alpha)\,d\alpha \int_{2t}^{2t+T} W(\beta)\,d\beta = \int_{\alpha=2t+2\tau}^{2t+2\tau+T}\left(\int_{\beta=2t}^{2t+T}\delta(\beta-\alpha)\,d\beta\right)d\alpha$$

$$= \int_{2t+2\tau}^{2t+2\tau+T}[u(2t+T-\alpha)-u(2t-\alpha)]\,d\alpha = r(T-2\tau) - r(-2\tau) + r(-2\tau+T) - r(-2\tau)$$

$$= \begin{cases} 0, & \tau > \frac{T}{2} \\ T-2\tau, & \frac{T}{2} > \tau > 0 \\ T+2\tau, & 0 > \tau > -\frac{T}{2} \\ 0 & , \frac{-T}{2} > \tau \end{cases} = T\Lambda\left(\frac{2\tau}{T}\right)$$

پس فرایند X بمعنی ع ساکن است

$$R_{XW}(t+\tau,t) = \int_{2t+2\tau}^{2t+2\tau+T} EW(\alpha)W(t)\,d\alpha = \int_{2t+2\tau}^{2t+2\tau+T}\delta(\alpha-t)\,d\alpha = u(t+2\tau+T)-u(t+2\tau) = \begin{cases} 1, & -2\tau-T \\ 0, & \end{cases}$$

$$R_{WX}(t+\tau,t) = R_{XW}(t,t+\tau) = u(t-\tau+T)-u(t-\tau) = \begin{cases} 1, & \tau-T < t < \tau \\ 0, & \text{در سایر نقاط} \end{cases}$$

پس فرایندهای W, X توأماً ساکن نیستند

ب)

$$S_W(f) = \mathcal{F}R_W(\tau) = \mathcal{F}\delta(\tau) = 1$$

$$S_X(f) = \mathcal{F}\,T\Lambda\left(\frac{2\tau}{T}\right) = T\,\frac{T}{2}\,\mathrm{Sinc}^2\left(\frac{T}{2}f\right) = \frac{T^2}{2}\,\mathrm{Sinc}^2\left(\frac{Tf}{2}\right)$$

$$\langle R_{XW}(t+\tau,t)\rangle_t = 0 \Rightarrow S_{XW}(f) = \mathcal{F}(0) = 0\,,\quad S_{XW}(f) = S^*_{WX}(f) = 0$$

مسأله ۸:

$$(0)-R_{xx}(\tau)=\int_{-\infty}(1-e\;)\,S_{xx}(f)\,df=\int_{-\infty}(1-\cos 2\pi f\tau)S_{xx}(f)\,df$$

$$1-\cos 2\pi f\tau=2\sin^2\pi f\tau\geqslant 2\sin^2\pi f\tau\cos^2\pi f\tau=\frac{1}{2}\sin^2 2\pi f\tau=\frac{1}{4}(1-\cos 4\pi f\tau)\cdots\geqslant\frac{1}{4^n}(1-\cos 2$$

طرفین را در $S_{XX}(f)$ غیرمنفی ضرب و انتگرال بگیریم (نامساوی همچنان برقرار خواهد بود).

$$\int^{\infty}(1-\cos 2\pi f\tau)S_{xx}(f)\,df\geqslant\frac{1}{4^n}\int_{-\infty}^{\infty}(1-\cos 2^n 2\pi f\tau)S_{xx}(f)\,df\Rightarrow R_{xx}(0)-R_{xx}(\tau)\geqslant\frac{1}{4^n}(R_{xx}(0)-R_{xx}(2^n$$

مسأله ۹:

$$\int_{-\infty}^{\infty}S_{yy}(f)\,df=\int_{-\infty}^{\infty}|H|^2S_{xx}(f)\,df$$

اگر پیک $|H|^2$ در $f=f_0$ بوده و برابر $|H_m|^2$ باشد داریم

$$\leqslant|H_m|^2\xrightarrow{S_x(f)\geqslant0}|H|^2S_{xx}(f)\leqslant|H_m|^2S_{xx}(f)\xrightarrow{\int_{-\infty}^{\infty}}P_y\leqslant|H_m|^2\int_{-\infty}^{\infty}S_{xx}(f)\,df=|H_m$$

پس حداکثر قدرت خروجی $|H_m|^2$ است و این حداکثر وقتی حاصل میگردد (حالت تساوی) ا

$$\forall f;\ |H(f)|^2S_{xx}(f)=|H_m|^2S_{xx}(f)=|H(f_0)|^2S_{xx}(f)\Rightarrow S_{xx}(f)=K\,\delta(f-f_0)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}S_{xx}(f)\,df=1\Rightarrow K=1,\ S_{xx}(f)=\delta(f-f_0)$$

$$|H(f)|^2=\frac{1}{(5-4\pi^2f^2)^2+16\pi^2f^2}\xrightarrow{\partial|H|^2/\partial f=0}\begin{cases}f=f_0=\sqrt{3}/2\pi\\|H_m|^2=\frac{1}{16}\end{cases}$$

$$P_y=\frac{1}{16}\quad,\ S_{xx}(f)=\delta(f-\frac{\sqrt{3}}{2\pi})$$

مسأله ۱۰: الف)

$$(f)=1+\frac{-j}{j2\pi f+1}+\frac{-j}{j2\pi f-1}\leftrightarrow R_{xx}(\tau)=\delta(\tau)-je^{-\tau}u(\tau)+je^{\tau}u(-\tau)$$

$$:\text{WSS},\ S_{xx}(0)\neq\infty\Rightarrow m_x=0\overset{\Leftarrow}{\Rightarrow}C_{xx}(\tau)=\delta(\tau)-je^{-\tau}u(\tau)+je^{\tau}u(-\tau)$$

ب)

$$(f)=\frac{(2\pi f-1)(2\pi f-1)}{(j2\pi f+1)(-j2\pi f+1)}=H(f)H^*(f)$$

$$H(f)=\frac{2\pi f-1}{j2\pi f+1}=-j+\frac{j-1}{j2\pi f+1}\leftrightarrow h(t)=-j\delta(t)+(j-1)e^{-t}u(t)$$

$$t)=h(t)*w(t)\Rightarrow x(t)=-jw(t)+(j-1)\int_0^{\infty}e^{-\alpha}w(t-\alpha)\,d\alpha$$

مسأله ۱۱:

$$=A^2|H(f_0)|^2=\frac{A^2}{\alpha^2+4\pi^2f_0^2}\ ,\ Ey_m^2=\int_{-\infty}^{\infty}S_{NN}(f)\,|H(f)|^2df$$

$$(\tau)=N\delta(\tau)\Rightarrow S_{NN}(f)=N\overset{\Leftarrow}{\Rightarrow}Ey_m^2=N\int_{-\infty}^{\infty}|H|^2df=N\int_{-\infty}^{\infty}|h(t)|^2dt$$

$$f)=\frac{1}{j2\pi f+\alpha}\leftrightarrow h(t)=e^{-\alpha t}u(t)\overset{\Leftarrow}{\Rightarrow}Ey_m^2=N\int_0^{\infty}e^{-2\alpha t}dt=N/2\alpha$$

$$/Ey_m^2=\frac{2A^2}{N}\frac{1}{\alpha+4\pi^2f^2/\alpha}\xrightarrow{\partial/\partial\alpha(B^2/Ey_m^2)=0}\alpha=2\pi f_0\ ,\ \frac{B^2}{Ey^2}\Big|_{max}=\frac{A^2}{2\pi f_0N}$$

ل ۱۲: توابع ویژه و ... $R_{xx}(t)=e$ ... را برای ...

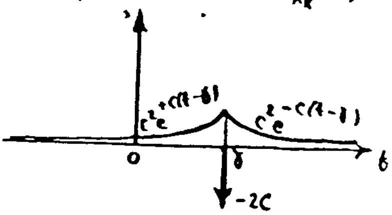
$$\int_{-a}^{a} R_{xx}(t-\gamma)\,\Phi(\gamma)\,d\gamma = \lambda\,\Phi(t) \quad , \quad |t|<a$$

دوبار نسبت به t مشتق میگیریم

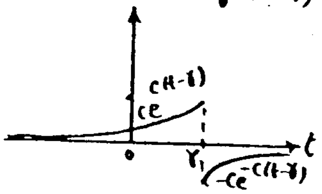
$$\int_{-a}^{a} \dot R_{xx}(t-\gamma)\,\Phi(\gamma)\,d\gamma = \lambda\,\dot\Phi(t) \quad , \quad |t|<a$$

$$\int_{-a}^{a} \ddot R_{xx}(t-\gamma)\,\Phi(\gamma)\,d\gamma = \lambda\,\ddot\Phi(t) \quad , \quad |t|<a$$

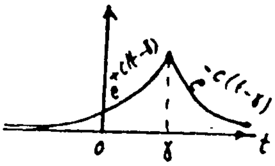
$$\ddot R_{xx}(t-\gamma) = -2C\delta(t-\gamma) + C^2 R_{xx}(t-\gamma)$$



$$\dot R_{xx}(t-\gamma) = -C R_{xx}(t-\gamma)\,Sgn(t-\gamma)$$



$$R_{xx}(t-\gamma)$$



$$\int_{-a}^{a} [C^2 R_{xx}(t-\gamma) - 2C\delta(t-\gamma)]\,\Phi(\gamma)\,d\gamma = \lambda\ddot\Phi(t) \Rightarrow C^2\lambda\,\Phi(t) - 2C\,\Phi(t) = \lambda\ddot\Phi(t)$$

$$\left.\begin{matrix}\ddot\Phi(t) + \omega^2\Phi(t) = 0 \\ \omega = \sqrt{2C/\lambda - C^2}\end{matrix}\right\} \Rightarrow \Phi(t) = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)$$

برای تعیین ضرایب ثابت مثلاً مشتق اول تساوی دو طرف معادله دوم در بالا را به ازای $t=a$ و $t=-a$ در نظر گرفت

$$t=a \Rightarrow \int_{-a}^{a} -C R_{xx}(a-\gamma)\,\underbrace{Sgn(a-\gamma)}_{\text{در ناحیه انتگرالگیری ۱ است}}\,\phi(a)\,d\gamma = \lambda\dot\Phi(a) \Rightarrow -C\lambda\,\Phi(a) = \lambda\dot\Phi(a)$$

$$t=-a \Rightarrow \int_{-a}^{a} -C R_{xx}(-a-\gamma)\,Sgn(-a-\gamma)\,\Phi(-a)\,d\gamma = \lambda\dot\Phi(-a) \Rightarrow C\lambda\,\Phi(-a) = \lambda\dot\Phi(-a)$$

$$\Rightarrow \begin{cases}(\omega\sin\omega a - C\cos\omega a)A - (\omega\cos\omega a + C\sin\omega a)B = 0 \\ (\omega\sin\omega a - C\cos\omega a)A + (\omega\cos\omega a + C\sin\omega a)B = 0\end{cases}$$

ملاحظه میگردد که ضرایب A و B ولذا $\Phi(t)$ صفر خواهد بود (که مورد نظر نیست) مگر آنکه یا $\omega\sin\omega a - C\cos\omega a = 0$ باشد و یا آنکه $\omega\cos\omega a + C\sin\omega a = 0$ باشد. حالت اول شرط زیر وجود دارد

$$tg\,\omega a = C/\omega \Rightarrow \omega = \omega_1, \omega_2, \omega_3, \cdots \Rightarrow \underset{\text{مقادیر ویژه}}{\lambda = \lambda_m} = \frac{2C}{C^2+\omega_m^2}, m=1,2,3,\ldots$$

و باید

$$B=0 \Rightarrow \Phi(t) = \Phi_m(t) = A_m\cos(\omega_m t)$$

$$\int_{-a}^{a} |\Phi_m(t)|^2 = 1 \Rightarrow A_m = \frac{1}{\sqrt{a+\lambda_m/2}}$$

که یک دسته از مقادیر ویژه و توابع ویژه متناظر را بدست میدهد.

حالت دوم شرط زیر وجود دارد

$$Cotg\,\omega a = \frac{-C}{\omega} \Rightarrow \omega = \omega'_1, \omega'_2, \omega'_3, \ldots \Rightarrow \underset{\text{مقادیر ویژه}}{\lambda = \lambda'_m} = \frac{2C}{C^2+\omega'^2_m}, m=1,2,3,\ldots$$

$$\Phi(t) = \Phi'_m(t) = B_m\sin(\omega'_m t)$$

و باید $A=0$ باشد

$$\int_{-a}^{a} |\Phi'_m(t)|^2 dt = 1 \Rightarrow B_m = \frac{1}{\sqrt{a-\lambda'_m/2}}$$

پس کلاً توابع ویژه $\{\Phi_m(t), \Phi'_m(t)\}$ و مقادیر ویژه متناظر آن $\{\lambda_m, \lambda'_m\}$ را داریم و بسط فرایند بصورت زیر خواهد بود

$$\hat X(t) = \sum_{m=1}^{\infty} b_m \frac{\cos\omega_m t}{\sqrt{a+\lambda_m/2}} + \sum_{m=1}^{\infty} b'_m \frac{\sin\omega'_m t}{\sqrt{a-\lambda'_m/2}} \quad , \quad \begin{cases} b_m = \int_{-a}^{a} x(\gamma)\Phi_m^*(\gamma)\,d\gamma \\ b'_m = \int_{-a}^{a} x(\gamma)\Phi'^*_m(\gamma)\,d\gamma \end{cases}$$

$$E|b_m|^2 = \lambda_m = \frac{2C}{C^2+\omega^2} \quad , \quad E|b'_m|^2 = \lambda' = \quad 2C$$

بسمه تعالی

مسائل سری چهارم

✓ **مسالهٔ ۱ -** فرایند $X(t)$ ساکن بمفهوم وسیع و با باند محدود به $|f| < W$ می‌باشد با فرض آنکه بدانیم متوسط آن $m_X(t)=m$ و قـدر
متوسط آن $E|X(t)|^2 = P$ بوده و ضمنا نمونه‌های آن، $\{X(n/2W)\}$، ناهمبسته هستند، طیف قدرت آنرا بدست آورید.

مسالهٔ ۲ - فرض کنید $X[n]$ فرایندی ساکن بمفهوم وسیع با تابع همبستگی $R_X[m] = 5\delta[m]$ می‌باشد در دو حالت زیر $EY^2[n]$
$R_{XY}[n_1,n_2]$ و $R_Y[n_1,n_2]$ را بدست آورید.

الف) $$Y[n] = 0.5Y[n-1] + X[n]$$

ب) $$Y[n] = \begin{cases} 0.5Y[n-1] + X[n], & n \geq 0 \\ 0, & n \leq -1 \end{cases}$$

مسالهٔ ۳ - فرض کنید $S[n]$ یک فرایند با تابع همبستگی $R_S[m] = 2^{-|m|}$ بوده و $V[n]$ نویز سفیدی عمود بر آن بـا تـابع همبستـ
$R_V[n] = 5\delta[n]$ باشد. نشان دهید که فرایند $X[n]=S[n]+V[n]$ یک فرایند ARMA است و طیف قدرت $X[n]$ را در حوزه فرکانـ
و در حوزه Z بدست آورید. معادله ARMA را نیز بدست آورید.

مسالهٔ ٤ - بین نویز سفید نرمالیزه $V[n]$ (با واریانس واحد) و فرایند $X[n]$ رابطه $\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)2^{-k}X[n-k] = V[n]$ برقرار است

الف) $X[n]$ را بر حسب نمونه های فرایند $V[n]$ بدست آوریدو نشان دهید که فرایند $X[n]$ یک فرایند MA است و معادله A
را بنویسید.

ب) تابع همبستگی و طیف قدرت فرایند $X[n]$ را بدست آورید.

مسالهٔ ۶ - فرایند $X[n]$ فرایندی با نمونه‌های مستقل از هم بوده و هر نمونه یکی از دو مقدار ۱+ و یا ۱- را با احتمال ½ اختیار می‌نمـ
در ارتباط با آن فرایند دیگری بصورت $Y[n] = \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k} X[n-k]$ تعریف می‌گردد.

الف) تابع همبستگی و طیف قدرت فرایند $X[n]$ را بدست آورید.

ب) مقدار متوسط، تابع همبستگی و طیف قدرت فرایند $Y[n]$ را بدست آورید.

ج) تابع مشخصه نمونه n ام فرایند X و همچنین تابع مشخصه نمونه n ام فرایند Y را بدست آورید.

د) تابع چگالی احتمال شرطی نمونهٔ n ام فرآیند Y وقتی کلیهٔ نمونه های قبلی آن معلوم است را نیز حساب کنید.

مسالہ ۷ - $X[n]$ یک فرایند AR با معادله تفاضلی $\sum_{k=0}^{N} a_k X[n-k] = b_o V[n]$ میباشد که در آن $a_o = 1$ ، $V[n]$ نوی

واریانس واحد است. ثابت کنید که اگر ریشه‌های معادله $\sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k} = 0$ همگی داخل دایره بشعاع واحد باشند. رابطه زیر

$$\sum_{k=0}^{N} a_k R_X[m-k] = \begin{cases} 0, & m \geq 1 \\ |b_o|^2, & m = 0 \end{cases}$$

مسالہ ۵ - طیف قدرت یک فرایند گسسته زمان ساکن $X(n)$ بصورت $_X(f) = \frac{1}{1+\alpha^2-2\alpha \cos 2\pi f}$
است. متوسط فرایند را صفر و α را عددی کوچکتر از واحد بگیرید.

(الف) تابع همبستگی فرایند را بدست آورید و ضریب همبستگی دو متغیر تصادفی مجاور یکدیگر فرایند را بیابید

(ب) چگونه میتوان این فرایند را بصورت سیستمی از ورودی فرایند سفید تولید کرد؟

(ج) تابع همبستگی فرایند $Y(n)$ که با رابطه
$n) - 2\alpha X(n-1) + \alpha^2 X(n-2)$
تعریف می‌شود را بدست آورید.

$1-2\alpha z^{-1}+\alpha^2 z^{-2} = (1-\alpha z^{-1})^2$

بسمه تعالی

(حل مسائل سری چهارم)

ه 1: میدانیم طیف قدرت $X(t)$ و لذا طیف قدرت $\tilde{X}(t)$ محدود به باند $|f|<W$ است پس قانون نمونه‌برداری در مورد تابع کواریانس $C_X(\tau)=R_{\tilde{X}}(\tau)$ را میتوان بصورت زیر نوشت:

$$C_X(\tau)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} C_X(kT)\,\mathrm{Sinc}\left(\frac{\tau-kT}{T}\right) \underset{T=\frac{1}{2W}}{=} \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_X\left(\frac{k}{2W}\right)\mathrm{Sinc}\left(\frac{\tau-k/2W}{1/2W}\right)$$

$$C_X\left(\frac{k}{2W}\right)=\begin{cases}0, & k\neq 0\\ P-|m|^2, & k=0\end{cases} \Longrightarrow C_X(\tau)=0+C_X(0)\,\mathrm{Sinc}\,\frac{\tau-0}{1/2W}+0$$

$$C_X(\tau)=(P-|m|^2)\,\mathrm{Sinc}(2W\tau) \Longrightarrow R_X(\tau)=C_X(\tau)+|m|^2=(P-|m|^2)\,\mathrm{Sinc}(2$$

$$\Longrightarrow S_X(f)=\frac{P-|m|^2}{2W}\,\mathrm{rect}\left(\frac{f}{2W}\right)+|m|^2\delta(f)$$

مسئله 5: (الف)

$$S_X(f)=\frac{1}{1+\alpha^2-\alpha e^{j2\pi f}-\alpha e^{-j2\pi f}} \Rightarrow S_X(z)=\frac{1}{1+\alpha^2-\alpha z-\alpha z^{-1}}$$

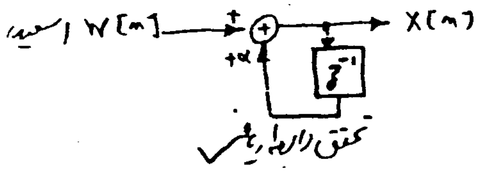
$$S_X(z)=\frac{1}{(1-\alpha z)(1-\alpha z^{-1})}=\frac{-z^{-1}/\alpha}{(1-z^{-1}/\alpha)(1-\alpha z^{-1})}=\frac{\frac{-1}{1-\alpha^2}}{1-z^{-1}/\alpha}+\frac{\frac{1}{1-\alpha^2}}{1-\alpha z^{-1}}$$

$$S_X(z)\leftrightarrow R_X(m]=\frac{1}{1-\alpha^2}\alpha^{-m}u[-m-1]+\frac{1}{1-\alpha^2}\alpha^{m}u[m]\Rightarrow \boxed{R_X[m]=\frac{\alpha^{|m|}}{1-\alpha^2}}$$

$$m_X[n]=0 \Rightarrow C_X[m]=R_X[m] \Longrightarrow \boxed{\rho=\frac{C_X[1]}{\sqrt{C_X[0]C_X[0]}}=\alpha}$$

(ب)

$$S_X(z)=\frac{1}{(1-\alpha z^{-1})(1-\alpha z)}=H_X(z)\,H_X^*(1/z) \Longrightarrow H_X(z)=\frac{1}{1-\alpha z^{-1}}$$ فیلتر ابداع



$$h_X[n]=\alpha^{n}u[n]$$

$$\boxed{X[n]=\sum_{k=0}^{\infty}\alpha^{k}w[n-k]}$$ رابطه صریح

(ج)

$$y[n]=\left(\delta[n]-2\alpha\delta[n-1]+\alpha^2\delta(n-2]\right)*X[n]$$

پس $y[n]$ هم ایستا است با طیف قدرت

$$S_y(z)=(1-2\alpha z^{-1}+\alpha^2 z^{-2})(1-2\alpha z+\alpha^2 z^2)\,S_X(z)$$

$$=(1-\alpha z^{-1})^2(1-\alpha z)^2\frac{1}{(1-\alpha z)(1-\alpha z^{-1})}=1+\alpha^2-\alpha z-\alpha z^{-1}$$

$$S_y(z)\longleftrightarrow \boxed{R_y[m]=(1+\alpha^2)\delta[m]-\alpha\delta[m-1]-\alpha\delta[m+1]}$$

مسأله ۲ | الف) میزان $y[n]$ را خروجی سیستم LSI با تابع تبدیل $H(z)$: ورودی $x[n]$ [illegible] است.

$$H(z)=\frac{Y(z)}{X(z)}=\frac{1}{1-z^{-1}/2} \leftrightarrow h[n]=2^{-n}u[n] \Rightarrow y[n]=\sum_{k=0}^{\infty}2^{-k}x(n-k)$$

ورودی ساکن و سیستم LSI لذا خروجی و ورودی توأماً ساکن میگردند

$$_{xy}(n+m,n)=R_{xy}[m]=R_{xx}(m)*h^*(-m)=5\,h^*(-m)=5\times 2^{m}u(-m)$$

بازای m مثبت صفر است یعنی هر نمونه x بر نمونه‌های قبلی y عمود است

$$[n+m,n]=R_{yy}[m]=h[m]*R_{xy}[m]=\sum_{k=0}^{\infty}2^{-k}\times 5\times 2^{m-k}u(k-m)$$

$$=\sum_{\substack{k=0\\k\geq m}}^{\infty}5\times 2^{m}\times 2^{-2k}=\begin{cases}5\times 2^{m}\sum\limits_{k=0}^{\infty}2^{-2k}=5\times 2^{m}\dfrac{1}{1-1/4} & ,m\leq 0\\ 5\times 2^{m}\sum\limits_{k=m}^{\infty}2^{-2k}=5\times 2^{m}\dfrac{2^{-2m}}{1-1/4} & ,m\geq 0\end{cases}$$

$$R_{yy}[m]=\frac{20}{3}2^{-|m|} \quad , \quad E|Y[n]|^2=R_{yy}[0]=\frac{20}{3}$$

ب)

$$y[0]=\tfrac{1}{2}y[-1]+x[0]=x[0]$$
$$y[1]=\tfrac{1}{2}y[0]+x[1]=\tfrac{1}{2}x[0]+x[1]$$
$$y[2]=\tfrac{1}{2}y[1]+x[2]=\tfrac{1}{4}x[0]+\tfrac{1}{2}x[1]+x[2]$$

بطور کلی

$$y[n]=\sum_{k=0}^{n}2^{-k}x[n-k] \;,\; n\geq 0$$

$$R_{xy}[n_1,n_2]=E\sum_{k=0}^{n_2}2^{-k}x^*[n_2-k]x(n_1)=\sum_{k=0}^{n_2}2^{-k}R_{xx}[n_1-n_2+k]=5\sum_{k=0}^{n_2}2^{-k}\delta(k+n_1-n_2$$

$$=\begin{cases}5\times 2^{-(n_2-n_1)} & , \quad 0\leq n_2-n_1\leq n_2\\ 0 & , \quad \text{بقیه نقاط}\end{cases}=\begin{cases}5\times 2^{-(n_2-n_1)} & ,n_2\geq n_1\geq 0\\ 0 & , \text{بقیه نقاط}\end{cases}$$

$$R_{yy}[n_1,n_2]=\sum_{k=0}^{n_1}\sum_{l=0}^{n_2}2^{-k-l}R_{xx}[n_1-n_2-k+l]=5\sum_{k=0}^{n_1}\sum_{l=0}^{n_2}2^{-k-l}\delta(n_1-n_2-k+l)$$

$$=5\sum_{\substack{k=0\\0\leq k-n_1+n_2\leq n_2}}^{n_1}2^{-k-(k-n_1+n_2)}=5\times 2^{n_1-n_2}\sum_{\substack{k=0\\k\geq n_1-n_2}}^{n_1}2^{-2k}=\begin{cases}5\times 2^{n_1-n_2}\dfrac{1-2^{-2n_1-2}}{1-1/4} & ,\\ 5\times 2^{n_1-n_2}\dfrac{2^{-2n_1+2n_2}-2^{-2n_1-2}}{1-1/4} & ,\end{cases}$$

$$=\begin{cases}5\times 2^{n_1-n_2}\dfrac{1-2^{-2n_1-2}}{1-1/4} & , \quad n_1-n_2\leq 0\\ 5\times 2^{n_1-n_2}\dfrac{2^{-2n_1+2n_2}-2^{-2n_1-2}}{1-1/4} & , \quad n_1-n_2\geq 0\end{cases}=\frac{20}{3}\left[2^{-|n_1-n_2|}-2^{-2-n_1-n_2}\right.$$

پس رابطه برای $n_1\geq 0$ و $n_2\geq 0$ بدست آمده است و در حالتیکه n_1 یا n_2 منفی باشد نمونه‌ها زمانی تابع همبستگی هم صفر است.

$$E|Y(n)|^2=R_{yy}(n,n)=\frac{20}{3}\left[1-4^{-1-n}\right] \quad , \quad n\geq 0$$
$$=0 \quad , \quad n<0$$

: ۱

$$R_S(m) = 2^{-|m|} = 0.5^{|m|} \Longrightarrow S_S(z) = \frac{1-(0.5)^2}{(1-0.5z^{-1})(1-0.5z)}$$

چون $S(n)$, $V(n)$ ... $\Longrightarrow$

$$S_X(z) = S_V(z) + S_S(z) = 5 + \frac{3/4}{(1-0.5z^{-1})(1-0.5z)} = \frac{28-10z-}{5-2z-2z}$$

$$S_X(f) = S_X(e^{j2\pi f}) = \frac{28-20\cos 2\pi f}{5-4\cos 2\pi f}$$

$$S_X(z) = \begin{cases} 0 \Rightarrow z = \begin{cases} y_0 = 0.42020 \\ 1/y_0^* = 2.37979 \end{cases} \\ \infty \Rightarrow z = \begin{cases} z_0 = 0.5 \\ 1/z_0^* = 2 \end{cases} \end{cases} \longrightarrow S_X(z) = \frac{\frac{10}{y_0}(1-y_0z^{-1})(1-y_0z)}{\frac{2}{0.5}(1-0.5z^{-1})(1-0.5z)} = L$$

$$L_X(z) = \sqrt{\frac{10}{4y_0}}\ \frac{1-y_0z^{-1}}{1-0.5z^{-1}} = \frac{2.439-1.025z^{-1}}{1-0.5z^{-1}} \equiv \frac{X(z)}{W(z)}$$

ر و قطب داخل دایره واحد

با فرض علّی بودن و تبدیل z معکوس $\Longrightarrow x(n) = 2.439w(n) + 0.5x(n-1) - 1.025w(n-1)$ ARMA(1,

---

له ۴: تبدیل z می‌گیریم

$$\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)2^{-k}z^{-k}X(z) = V(z) \Longrightarrow \frac{V(z)}{X(z)} = \sum_{k=0}^{\infty}(k+1)v^k = \frac{d}{dv}\sum_{k=0}^{\infty}v^{(k+1)},\ v = \frac{1}{2z}$$

$$\frac{V(z)}{X(z)} = \frac{d}{dv}\left(\frac{v}{1-v}\right) = \frac{1}{(1-v)^2} = \frac{1}{(1-z^{-1}/2)^2} \Longrightarrow X(z) = (1-z^{-1}+z^{-2}/4)V(z)$$

$$x[n] = v[n] - v[n-1] + \frac{1}{4}v[n-2] \Longrightarrow x[n] \sim MA(2)$$

$$S_{xx}(z) = (1-z^{-1}/2)^2(1-z/2)^2 S_v(z) = (5/4 - z^{-1}/2 - z/2)^2 = \frac{33}{16} - \frac{5}{4}z^{-1} - \frac{5}{4}z + \frac{1}{4}z$$

$$S_{xx}(z) \overset{z}{\longleftrightarrow} R_{xx}[m] = \frac{1}{4}\delta[m+2] - \frac{5}{4}\delta[m+1] + \frac{33}{16}\delta[m] - \frac{5}{4}\delta[m-1] + \frac{1}{4}\delta[m-2]$$

$$S_x(f) = S_{xx}(e^{j2\pi f}) = (5/4 - \cos 2\pi f)^2$$

ه ۱۱:۶ الف)

$$R_{xx}[n_1, n_2] = E\,x[n_1]x^*[n_2] = \begin{cases} \bar{x}^2 = 0, & n_1 \neq n_2 \\ \overline{|x|^2} = 1, & n_1 = n_2 \end{cases}$$

$$R_{xx}[m] = \delta[m] \longleftrightarrow S_{xx}(f) = 1$$

(ب)

$$y[n] = (2^{-n}u[n]) * x[n] \Longrightarrow Y(z) = \frac{X(z)}{1-z^{-1}/2} \Longrightarrow S_{yy}(z) = \frac{S_{xx}(z)}{(1-z^{-1}/2)(1-z/2)}$$

$$S_{yy}(z) = \frac{1}{(1-z/2)(1-z^{-1}/2)} \Longrightarrow S_{yy}(f) = \frac{1}{5/4 - \cos 2\pi f}$$

$$S_{yy}(z) = \frac{4/3}{1-z^{-1}/2} + \frac{-4/3}{1-2z^{-2}} \longleftrightarrow R_{yy}[m] = \frac{4}{3}2^{-|m|}$$

$$\left.\begin{array}{l} m_y[n] = h[n] * m_x[n] \\ m_x[n] = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow m_y[n] = 0$$

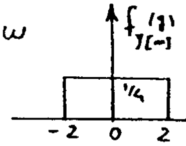
(ج)

$$\Phi_{x[n]}(\omega)=E\,e^{j\omega x[n]}=\frac{1}{2}e^{j\omega}+\frac{1}{2}e^{-j\omega}=\cos\omega$$

$$\Phi_{y[n]}(\omega)=E\,e^{j\omega\sum_{0}^{\infty}2^{-k}x(n-k]}\overset{\text{استقلال x ها}}{=}\prod_{k=0}^{\infty}E\,e^{j\omega 2^{-k}x(n-k]}=\prod_{k=0}^{\infty}\Phi_{x[n-k]}(2^{-k}\omega)=\prod_{k=0}^{\infty}\cos(2^{-k}\omega)$$

$$\Phi_{y[n]}=\lim_{N\to\infty}\prod_{k=0}^{N}\cos 2^{-k}\omega=\lim_{N\to\infty}\frac{1}{\sin(2^{-N}\omega)}\sin(2^{-N}\omega)\cos 2^{-N}\omega\cos 2^{-N+1}\omega\cdots\cos\omega$$

$$=\lim_{N\to\infty}\frac{2^{-N-1}\sin 2\omega}{\sin 2^{-N}\omega}=\frac{\sin 2\omega}{2\omega}=\text{sinc}\,4f\longleftrightarrow f_{y[n]}(y)=\frac{1}{4}\text{rect}(y/4)$$



(د) از قبل داریم

$$(z)=(1-z^{-1}/2)Y(z)\Rightarrow y[n]-\frac{1}{2}y[n-1]=x[n]$$

یعنی فرایند y یک AR مرتبه اول است

$$\{y[n]<y\,|\,y[n-1]=y_{n-1},\,y[n-2]=y_{n-2},\cdots\}=P\{y[n]-\frac{1}{2}y[n-1]\le y-\frac{1}{2}y_{n-1}\,|\,y[n-1]=y_{n-1},\cdots\}$$

$$=P\{x[n]\le y-\frac{1}{2}y_{n-1}\,|\,y[n-1]=y_{n-1},\cdots\}=P\{x[n]\le y-\frac{1}{2}y_{n-1}\,|\,x[n-1]=y_{n-1}-\frac{1}{2}y_{n-2},\cdots\}$$

از ان

$$=P\{x[n]\le y-\frac{1}{2}y_{n-1}\}=F_{x[n]}(y-\frac{1}{2}y_{n-1}).$$

از طرفین نسبت به y مشتق میگیریم

$$f_{y[n]}(y\,|\,y_{n-1},y_{n-2},\cdots)=f_{x[n]}(y-\frac{1}{2}y_{n-1})=\frac{1}{2}\delta(y-\frac{1}{2}y_{n-1}-1)+\frac{1}{2}\delta(y-\frac{1}{2}y_{n-1}+1)$$

مسأله ۷: فرایند x را میتوان خروجی سیستم با تابع تبدیل زیر به ورودی V دانست و چون قطبهای سیستم داخل دا
یره واحد |z|=1 قرار دارند این سیستم علّی است

$$(z)=\frac{b_0}{\sum_{k=0}^{N}a_k z^{-k}}=h[0]+h[1]z^{-1}+h[2]z^{-2}+\cdots$$

ضمناً از تساوی فوق به ازای $z^{-1}=0$ داریم

$$h[0]=\frac{b_0}{a_0}=b_0$$

$$S_x(z)=H(z)H^*(1/z)=\frac{b_0}{\sum a_k z^{-k}}(b_0^*+h^*[1]z+h^*[2]z^2+\cdots)$$

$$\Rightarrow\sum_{k=0}^{N}a_k z^{-k}S_{xx}(z)=|b_0|^2+b_0h^*[1]z^{+1}+b_0h^*[2]z^{+2}+\cdots$$

به حوزه زمان میبریم

$$\sum_{k=0}^{N}a_k R_{xx}[m-k]=|b_0|^2\delta[m]+b_0h^*[1]\delta[m+1]+b_0h^*[2]\delta[m+2]+\cdots$$

روشن است که

$$\sum_{k=0}^{N}a_k R_{xx}[m-k]=\begin{cases}0, & m>0\\ |b_0|^2, & m=0\end{cases}$$

یعنی همبستگی‌ها در رابطه AR مشابه صدق میکنند. همبستگی‌ها قابل سنجش هستند و روابط بالا به صورت یک دستگاه معادلات خطی روشی برای تعیین پارامترهای معادله AR یعنی a_k و b_0 نشان میدهد

بسمه تعالی

مسائل سری پنجم

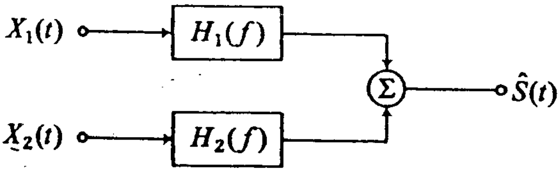
مسالهٔ ۱ - تخمین بهینهٔ درجه دوم متغیر تصادفی S را برحسب متغیر تصادفی X (یعنی به فرم $\hat{S} = a + bX + cX^2$) و با معیار MMS بدست آورید .

مسالهٔ ۲ - فرض کنید S=GW می باشد. در این رابطه $\mathbf{W}^T = \{W_1, W_2, W_3, W_4\}$ یک بردار تصادفی سفید نرمالیزه است که دو مولفهٔ اول آن یعنی W_1 , W_2 مشاهده شده است و G ماتریسی به قرار زیر است:

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} 6 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 6 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 6 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 6 \end{pmatrix}$$

الف) تخمینی با معیار LMMS دو مولفه دیگر یعنی W_3 , W_4 چیست و متوسط مربع خطای این تخمینی چقدر است؟

ب) تخمینی بامعیار LMMS بردار S را نیز بدست آورید و متوسط مربع خطای این تخمینی را نیز حساب کنید



مسالهٔ ۳ - برای تخمین خطی با معیار MMS فرایند ساکن $S(t)$ برحسب دو فرآیند ساکن قابل مشاهده $X_1(t)$, $X_2(t)$ سیستمی بصورت روبرو در نظر بگیرید و فرض کنید زمان مشاهده از $t = -\infty$ تا $t = \infty$ باشد.

الف) تابع تبدیل فیلترها $H_1(f)$, $H_2(f)$ را بدست آورید.

ب) با فرض آنکه $X_1(t)=S(t)+V_1(t)$ و همچنین $X_2(t)=S(t)+V_2(t)$ بوده که درآن $S(.) \perp V_1(.)$ و $S(.) \perp V_2(.)$ و $V_1(.) \perp V_2(.)$ است. تابع تبدیل فیلترها و متوسط مربع خطای تخمین را برحسب طیف قدرت فرایندهای $S(t)$ و $V_2(t)$ و V1(t) بیان کنید.

مسالهٔ ۴ - ثابت کنید که اگر $Z = \int_0^T S(t)dt$ باشد تخمین خطی Z برحسب $S(T)$ و $S(0)$ بصورت زیر خواهد بود :

$$\hat{Z} = \hat{\mathrm{E}}\{Z \mid S(0), S(T)\} = \frac{\int_0^T R_S(t)dt}{R_S(0) + R_S(T)}[S(0) + S(T)]$$

مسالهٔ ۵ - نشان دهید که اگر رابطه زیر برقرار باشد می‌توان نتیجه گرفت

$$\hat{\mathrm{E}}\{S(t+\lambda)||S(t),S(t-\tau)\}=\hat{\mathrm{E}}\{S(t+\lambda)|S(t)\}$$

مسالهٔ ۶ - رشته تصادفی $\{X_n\}$ را مارتینگل گویند هرگاه داشته باشیم:

$$\mathrm{E}\{X_n \mid X_{n-1},X_{n-2},\cdots,X_1\}=X_{n-1}$$

ثابت کنید که اگر متغیرهای تصادفی Y_1 مستقل از هم بوده و متوسط صفر داشته باشند آنگاه مجموع آنها $=Y_1+Y_2+\cdots+Y_n$

تولید یک رشته تصادفی مارتینگل می‌نماید.

مسالهٔ ۷ - یک رشته تصادفی $\{X_n\}$ را مارتینگل به مفهوم وسیع گویند هرگاه داشته باشیم:

$$\hat{\mathrm{E}}\{X_n \mid X_{n-1},X_{n-2},\cdots,X_1\}=X_{n-1}$$

الف) ثابت کنید که اگر رشته‌ای را بتوان بصورت $X_n=Y_1+Y_2+\cdots+Y_n$ نوشت که در آن Y_i ها متغیرهای تص

متعامد هستند این رشته $\{X_n\}$ مارتینگل به مفهوم وسیع خواهد بود.

ب) ثابت کنید که اگر رشته $\{X_n\}$ مارتینگل به مفهوم وسیع باشند خواهیم داشت: $\mathrm{E}X_n^2\geq \mathrm{E}X_{n-1}^2\geq\cdots\geq \mathrm{E}X_1^2$

راهنمائی : $X_n=(X_n-X_{n-1})+X_{n-1}$ و $(X_n-X_{n-1})\perp X_{n-1}$

مسالهٔ ۸ - فرض کنید $X(t)=S(t)+V(t)$ بوده و $R_{SV}(\tau)=0$ و $R_S(\tau)=A\frac{\sin^2(a\tau)}{\tau^2}$ و $R_V(\tau)=N\delta(\tau)$

فیلترهای لازم $H_2(f), H_1(f)$ برای تخمین به ترتیب $S(t)$ و $S'(t)$ و برحسب $\{X(\alpha):\alpha\in\mathbb{R}\}$ را بدست آورید.

مسالهٔ ۹ ثابت کنید که اگر $S_S(f)=\frac{1}{1+(2\pi f)^4}$ باشد آنگاه بهترین تخمین خطی $S(t+\lambda)$ برحسب $-\alpha):\alpha\geq 0\}$

برابر خواهد بود با $\hat{S}(t+\lambda)=b_oS(t)+b_1S'(t)$ که در آن $b_o=e^{-\frac{\lambda}{\sqrt{2}}}(\cos\frac{\lambda}{\sqrt{2}}+\sin\frac{\lambda}{\sqrt{2}})$ و $\sqrt{2}e^{-\frac{\lambda}{\sqrt{2}}}\sin\frac{\lambda}{\sqrt{2}}$

می‌باشد.

مسالهٔ ۱۰ - (الف) تابعی $h(t)$ پیدا کنید بطوریکه در معادله انتگرالی زیر (معادله وینر-هوف) صدق نماید.

$$R(\tau)=\frac{3}{2}e^{-\tau}+\frac{11}{3}e^{-3\tau}$$

$$\int_0^\infty h(\alpha)R(\tau-\alpha)d\alpha=R(\tau+\ln 2),\quad \tau\geq 0$$

ب) تابع $H(s)$ یک تابع کسری است که قطبهای آن در سمت چپ صفحه S قرار دارندو تابع $Y(s)$ هم در سمت چ

S تحلیلی است (یعنی هیچ قطبی ندارد) اگر بین ایندو تابع رابطه زیر برقرار باشد ایندو تابع را پیدا کنید.

$$[H(s)-2^s]\frac{49-25s^2}{9-10s^2+s^4}=Y(s)$$

ج) چه ارتباطی بین بند الف و بند ب وجود دارد؟

مسالهٔ ۱۱ - می‌خواهیم تخمین خطی سیگنال تلگرافی $S(t)$ را برحسب $X(t)=S(t)+V(t)$ و گذشته آن بدست آوریم که در آن $R_{SV}(\tau)=0$ و $R_V(\tau)=N\delta(\tau)$ و $R_S(\tau)=e^{-2\lambda|\tau|}$ می‌باشد.

ثابت کنید $\hat{S}(t)=(c-2\lambda)\int_0^{\infty}X(t-\alpha)e^{-c\alpha}d\alpha$ خواهد بود که در آن $c=2\lambda\sqrt{1+\frac{1}{\lambda N}}$ می‌باشد.

مسالهٔ ۱۲ - اگر $X(t)=S(t)+V(t)$ باشد که در آن $R_{SV}(\tau)=0$ و $R_V(\tau)=5\delta(\tau)$ و $R_S(\tau)=5e^{-0.2|\tau|}$ است

تخمینهای خطی زیر را بدست آورده و خطای آنها را پیدا کنید.

الف) تخمین $S(t)$ برحسب کل $X(t)$

ب) تخمین $S(t)$ برحسب $X(t)$ و گذشتهٔ آن

ج) تخمین $S(t+2)$ برحسب $S(t)$ و گذشتهٔ آن

د) تخمین $S(t+2)$ برحسب $X(t)$ و گذشتهٔ آن

مسالهٔ ۱۳ - یک فرایند AR(N) در نظر بگیرید.

$$S(n)=-a_1S(n-1)-a_2S(n-2)-\cdots-a_NS(n-N)+b_0V(n)$$

و فرض کنید که همه ریشه های معادله AR یعنی معادله $1+a_1z^{-1}+a_2z^{-2}+\cdots+a_Nz^{-N}=0$ داخل دایره واحد است.

الف) ثابت کنید $V(n)$ بر $S(n-1)$ و $S(n-2)$ و $S(n-3)$ و $\cdots$ یعنی بر کلیه نمونه های قبلی فرایند S حمود است.

ب) با استفاده از بند الف و بکمک اصل تعامد ثابت کنید که یک قدم پیشگوئی $S(n)$ از روی کل گذشته آن از رابطه زیر بدست می آید.

$$\widehat{S_1}(n)=\widehat{E}[S(n)\mid S(n-k):k\geq 1]=-\sum_{i=1}^{N}a_iS(n-i)$$

ج) با استفاده از بند الف و ب و بکمک اصل تعامد ثابت کنید که دو قدم پیشگوئی $S(n)$ از روی کل گذشته آن از رابطه زیر بدست می آید.

$$\widehat{S_2}(n)=\widehat{E}[S(n)\mid S(n-k):k\geq 2]=-a_1\widehat{S_1}(n-1)-\sum_{i=2}^{N}a_iS(n-i)$$

۱: نتیجه [illegible] را تحقیق میکنیم

$$\rho = E(s-\hat{s})^2 = E(s-a-bx-cx^2)^2$$

$$\partial\rho/\partial a = 0 \Longrightarrow E[-2(s-a-bx-cx^2)] = 0 \Longrightarrow a + b\bar{x} + c\overline{x^2} = \bar{s}$$

$$\partial\rho/\partial b = 0 \Longrightarrow E[-2x(s-a-bx-cx^2)] = 0 \Longrightarrow a\bar{x} + b\overline{x^2} + c\overline{x^3} = \overline{sx}$$

$$\partial\rho/\partial c = 0 \Longrightarrow E[-2x^2(s-a-bx-cx^2)] = 0 \Longrightarrow a\overline{x^2} + b\overline{x^3} + c\overline{x^4} = \overline{sx^2}$$

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \bar{x} & \overline{x^2} \\ \bar{x} & \overline{x^2} & \overline{x^3} \\ \overline{x^2} & \overline{x^3} & \overline{x^4} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \bar{s} \\ \overline{sx} \\ \overline{sx^2} \end{pmatrix}$$

تخمین خطی به عوامل مرتبه اول و دوم نیاز داشت. ملاحظه میگردد تخمین درجه دوم به عوامل تا مرتبه چهارم نیاز دارد.

۲: (الف) مولفه‌های بردار سفید متعامد هستند و روشن است که هیچیک نمی‌توانند کمکی به تخمین خطی دیگری کنند. لذا

$$\hat{E}(W_3|W_1,W_2) = 0,\ \hat{E}(W_4|W_1,W_2) = 0 \Longrightarrow \hat{P}(W_3|W_1,W_2) = E(W_3-0)^2 = 1,\ \hat{P}(W_4|W_1,W_2) = E(W_4-0)^2 = 1$$

بردار نرمالیزه ، بردار نرمالیزه

(ب)

$$S_1 = 6W_1+2W_2+3W_3 \Longrightarrow \hat{E}(S_1|W_1,W_2) = \hat{E}(6W_1+2W_2+3W_3|W_1,W_2) = 6W_1+2W_2+3\hat{E}(W_3|W_1,W_2)$$
$$= 6W_1+2W_2+0$$

بهمین ترتیب

$$S_2 = W_1+6W_2+2W_3+3W_4 \Longrightarrow \hat{E}(S_2|W_1,W_2) = W_1+6W_2+0+0$$

$$S_3 = W_2+6W_3+2W_4 \Longrightarrow \hat{E}(S_3|W_1,W_2) = W_2+0+0$$

$$S_4 = W_3+6W_4 \Longrightarrow \hat{E}(S_4|W_1,W_2) = 0+0$$

$$\longrightarrow \hat{\underline{S}} = \begin{pmatrix} 6W_1+2W_2 \\ W_1+6W_2 \\ W_3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= E\|\underline{S}-\hat{\underline{S}}\|^2 = E\left\|\begin{matrix} S_1-6W_1-2W_2 \\ S_2-W_1-6W_2 \\ S_3-W_2 \\ S_4 \end{matrix}\right\|^2 = E\left\|\begin{matrix} 3W_3 \\ 2W_3+3W_4 \\ 6W_3+2W_4 \\ W_3+6W_4 \end{matrix}\right\|^2 = E(9|W_3|^2+|2W_3+3W_4|^2+|6W_3+2W_4|^2+|W_3+6W_4|^2$$
$$= [9+(4+9+0)+(36+4+0)+(1+36+0)] = 9$$

۳: (الف)

$$\hat{S}(t) = \hat{E}(S(t)|X_1(\alpha), X_2(\alpha),\ \alpha\in R) = h_1(t) * X_1(t) + h_2(t) * X_2(t)$$

گر تخمین خطی از کلیه داده‌ها است. چون حدود مشاهده از $-\infty$ تا $+\infty$ است $h_1(t)$, $h_2(t)$ متغیرانتدار از $-\infty$ تا $+\infty$ ادا

باشند. شرط تعامد را می‌نویسیم

$$S(t)-\hat{S}(t) \perp X_1(t-\tau),\ \forall\tau\in R \Rightarrow R_{SX_1}(\tau) = R_{\hat{S}X_1}(\tau)$$

$$S(t)-\hat{S}(t) \perp X_2(t-\tau),\ \forall\tau\in R \Rightarrow R_{SX_2}(\tau) = R_{\hat{S}X_2}(\tau)$$

$$\begin{cases} R_{SX_1}(\tau) = h_1(\tau) * R_{X_1}(\tau) + h_2(\tau) * R_{X_2X_1}(\tau), & \forall\tau\in R \\ R_{SX_2}(\tau) = h_1(\tau) * R_{X_1X_2}(\tau) + h_2(\tau) * R_{X_2}(\tau), & \forall\tau\in R \end{cases} \xRightarrow{\text{تبدیل فوریه}} \begin{cases} H_1(f)S_{X_1}(f) + H_2(f)S_{X_2X_1}(f) = S_{SX_1} \\ H_1(f)S_{X_1X_2}(f) + H_2(f)S_{X_2}(f) = S_{SX_2} \end{cases}$$

دو معادله و دو مجهول داریم:

$$H_1(f) = \frac{S_{SX_1}(f)S_{X_2}(f) - S_{SX_2}(f)S_{X_2X_1}(f)}{S_{X_1}(f)S_{X_2}(f) - |S_{X_1X_2}(f)|^2},\quad H_2(f) = \frac{S_{SX_2}(f)S_{X_1}(f) - S_{SX_1}(f)S_{X_1X_2}(f)}{H_1(f)\ \text{همان مخرج}}$$

در این سوال داریم

$$S_{SX_1}(f) = S_{SX_2}(f) = S_{X_1X_2}(f) = S_{X_2X_1}(f) = S_S(f)$$

$$S_{X_1}(f) = S_S(f) + S_{V_1}(f),\quad S_{X_2}(f) = S_S(f) + S_{V_2}(f)$$

$$H_1(f) = \frac{S_S(f)S_{V_1}(f)}{S_S(f)S_{V_1}(f) + S_S(f)S_{V_2}(f) + S_{V_1}(f)S_{V_2}(f)},\quad H_2(f) = \frac{S_S(f)S_{V_2}(f)}{H_1(f)\ \text{همان مخرج}}$$

ین میکنیم

$$= E[S(t)-\hat{S}(t)]S^*(t) = R_S(0) - R_{\hat{S}S}(0) = \int_{-\infty}^{\infty}[S_S(f) - S_{\hat{S}S}(f)]\,df$$

$$S_S(f) - S_{\hat{S}S}(f) = S_S(f) - [H_1(f)S_{X_1S}(f) + H_2(f)S_{X_2S}(f)] = S_S(f)[1-H_1(f)-H_2(f)]$$
$$= S_S(f)\left[\frac{S_{V_1}(f)S_{V_2}(f)}{H_1(f)\ \text{همان مخرج}}\right]$$

$$\rho = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{S_S(f)S_{V_1}(f)S_{V_2}(f)}{S_S(f)S_V(f) + S_S(f)S_{V_2}(f) + S_{V_1}(f)S_{V_2}(f)}\,df$$

$\int_0 R_S(t-T)\,dt = aR_S(T) + bR_S(0)$

برای فرآیند حقیقی $R_S(\tau)=R_S(-\tau)$ است و لذا

$+b R_S(T) = \int_0^T R_S(t)dt$

$+bR_S(0) = \int_0^T R_S(t)dt \Longrightarrow a=b=\frac{\int_0^T R_S(t)dt}{R_S(0)+R_S(T)}$

مسأله ۵: برای $\tau>0$

$+\lambda)|s(t),s(t-\tau)] = \hat{E}[s(t+\lambda)|s(t)] = as(t)$

$$\begin{cases} S(t+\lambda)-aS(t) \perp S(t) \\ S(t+\lambda)-aS(t) \perp S(t-\tau) \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} R_S(\lambda) = aR_S(0) \\ R_S(\tau+\lambda) = aR_S(\tau) \end{cases}$$

پس میتوان نوشت

$+\lambda) = \frac{R_S(\lambda)}{R_S(0)} R_S(\tau);\ \tau>0$

نسبت به λ مشتق میگیریم و بجای λ مقدار $\lambda=0^+$ قرار میدهیم

$= \frac{R'_S(0^+)}{R_S(0)} R_S(\tau),\ \tau>0$

با فرض $\frac{R'_S(0^+)}{R_S(0)} = -\alpha$ که در آن α عدد مثبتی است (چون حداکثر $R(\tau)$ در مبدا است شیب در مبدا

$+\alpha R_S(\tau) = 0,\ \tau>0 \xrightarrow{\text{حل معادله دیفرانسیل}} R_S(\tau) = Ke^{-\alpha\tau},\ \tau>0$

با تبدیل τ به $-\tau$ و با توجه به اینکه R هرمیتیک است $R_S(-\tau)=R_S^*(\tau)$ خواهیم داشت

$-\tau) = Ke^{\alpha\tau},\ -\tau>0 \Longrightarrow R_S^*(\tau) = Ke^{\alpha\tau},\ \tau<0 \Longrightarrow R_S(\tau) = Ke^{\alpha\tau},\ \tau<0$

این دو ضابطه را میتوان با یک ضابطه هم نمایش داد:

$R_S(\tau) = Ke^{-\alpha|\tau|}$

مسأله ۶:

$+y_{n-1}+\cdots+y_1 = y_n + X_{n-1} =$ نمونه قبلی + نمو

$|X_{n-1}=x_{n-1}, X_{n-2}=x_{n-2}, \dots, X_1=x_1\} = E\{y_n|X_{n-1}=x_{n-1}, X_{n-2}=x_{n-2}, \dots, X_1=x_1\} + x_{n-1}$

$= Ey_n + x_{n-1} = x_{n-1}$

چراکه دو پیشامد زیر معادل هستند و y_i ها نیز مستقل هستند و لذا شرط روی امید ریاضی اول حذف شد.

$= x_{n-1}, X_{n-2}=x_{n-2}, \dots, X_1=x_1\} \equiv \{y_{n-1}=x_{n-1}-x_{n-2}, y_{n-2}=x_{n-2}-x_{n-1}, \dots, y_2=x_2-x_1, y_1=x_1\}$

مسأله ۷: اگر مارتینگل به مفهوم وسیع باشد داریم

$_{n-1} \perp X_i,\ i=1,2,\dots,n-1$

اگر $y_1=X_1$ تعریف شود و نمو از X_{i-1} تا X_i را $y_i \triangleq X_i - X_{i-1}$ نامیم داریم

$+y_2+y_3+\cdots+y_n$

$$\begin{aligned} &{}_{n-1} \perp X_1 = y_1 && \Longrightarrow && y_n \perp y_1 \\ &{}_{n-1} \perp X_2 = y_1+y_2 && \Longleftrightarrow && y_n \perp y_2 \\ &{}_{n-1} \perp X_3 = y_1+y_2+y_3 && \Longleftrightarrow && y_n \perp y_3 \\ &\vdots && \vdots && \vdots \\ & && && y_n \perp y_{n-1} \end{aligned}$$

حال فرض میکنیم شرط تعامد فوق برقرار باشد در اینصورت

$\Longrightarrow X_n - X_{n-1} \perp X_1$

$\Longleftrightarrow y_n \perp y_1+y_2 \Longrightarrow X_n - X_{n-1} \perp X_2$

$\vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots$

$_{n-1} \Longleftrightarrow y_n \perp y_1+y_2+\cdots+y_{n-1} \Longrightarrow X_n - X_{n-1} \perp X_{n-1}$

پس

$\hat{E}(X_n|X_{n-1}, X_{n-2}, \dots, X_1) = X_{n-1}$

(ب)

$(X_n-X_{n-1}+X_{n-1})^2 = E X_{n-1}^2 + E(X_n-X_{n-1})^2 + 2E(X_{n-1}(X_n-X_{n-1}))$

$$H_1(f) = \frac{S_{sx}(f)}{S_x(f)} = \frac{S_s(f)}{N + S_s(f)} \qquad \Rightarrow H_1(f) = \frac{\Lambda(\frac{\pi f}{a})}{\Lambda(\frac{\pi f}{a}) + \frac{N}{Aa\pi}}$$

$$R_s(\tau) = Aa^2 \mathrm{Sinc}^2(\frac{a\tau}{\pi}) \longleftrightarrow S_s(f) = Aa\pi \Lambda(\frac{\pi f}{a})$$

$$H_2(f) = \frac{S_{s'x}(f)}{S_x(f)} = \frac{j2\pi f S_{sx}(f)}{S_x(f)} = \frac{j2\pi f S_s(f)}{N + S_s(f)} \Rightarrow H_2(f) = \frac{j2\pi f \Lambda(\frac{\pi f}{a})}{\Lambda(\frac{\pi f}{a}) + \frac{N}{Aa\pi}}$$

$$S_s(f) = \frac{1}{1+s^4} = \frac{1}{(1+\sqrt{2}s+s^2)(1-\sqrt{2}s+s^2)} , \quad s = j2\pi f$$

$$= L_s(f) L_s^*(f) \Longrightarrow L_s(f) = \frac{1}{1+\sqrt{2}s+s^2}$$ باید جواب مینیمم فاز انتخاب شود یعنی

$$L_s(f) = \frac{r_1}{s-p_1} + \frac{r_2}{s-p_2} , \quad p_1, p_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2} \pm j\frac{\sqrt{2}}{2} , \quad r_{1,2} = \mp j\frac{\sqrt{2}}{2} \Longrightarrow l_s(t) = (r_1 e^{p_1 t} + r_2 e^{p_2 t})u(t$$

$$h_w(t) = \{l_s(t+\lambda)\}_{\geq 0} = \{(r_1 e^{p_1(t+\lambda)} + r_2 e^{p_2(t+\lambda)})u(t+\lambda)\}_{\geq 0} = (r_1 e^{p_1\lambda} e^{p_1 t} + r_2 e^{p_2\lambda} e^{p_2 t})$$

$$H(f) = \Gamma_s(f) H_w(f) = (1+\sqrt{2}s+s^2)\left[\frac{r_1 e^{p_1\lambda}}{s-p_1} + \frac{r_2 e^{p_2\lambda}}{s-p_2}\right] = -r_1 p_2 e^{p_1\lambda} - r_2 p_1 e^{p_2\lambda} + (r_1 e^{p_1\lambda} + r_2 e$$

$$= b_0 + b_1 s = b_0 + b_1 j2\pi f \Longrightarrow h(t) = b_0 \delta(t) + b_1 \delta'(t) \Longrightarrow \hat{s}(t+\lambda) = h(t) * s(t) = b_0$$

$$b_0 = -r_1 p_2 e^{p_1\lambda} - r_2 p_1 e^{p_2\lambda} = e^{-\frac{\lambda}{\sqrt{2}}}(\cos\frac{\lambda}{\sqrt{2}} + \sin\frac{\lambda}{\sqrt{2}}) , \quad b_1 = r_1 e^{p_1\lambda} + r_2 e^{p_2\lambda} = \sqrt{2} e^{-\frac{\lambda}{\sqrt{2}}} \sin(\frac{\lambda}{\sqrt{2}})$$

الف) معادله داده شده مربوط به پیشگوئی خالص $\lambda = \ln 2$ ثانیه بعد است لذا جواب آن بصورت زیراست

$$h(t) = \gamma(t) * h_w(t) , \quad h_w(t) = \{l(t+\ln 2)\}_{\geq 0}$$

$$S(f) = \mathcal{F}R(\tau) = \frac{\frac{3}{2}\times 2\times 1}{1+4\pi^2 f^2} + \frac{\frac{11}{3}\times 2\times 3}{9+4\pi^2 f^2} = \frac{49-25s^2}{(1-s^2)(9-s^2)} = \frac{(7-5s)(7+5s)}{(1-s)(1+s)(3-s)(3+s)} = L(f$$

$s = j2\pi f$

$$L(f) = \frac{7+5s}{(1+s)(3+s)} = \frac{1}{1+s} + \frac{4}{3+s} \Rightarrow l(t) = (e^{-t} + 4e^{-3t})u(t)$$ جواب مینیمم فاز انتخاب شود یعنی

$$h_w(t) = \{l(t+\ln 2)\}_{\geq 0} = (e^{-t-\ln 2} + 4e^{-3t-3\ln 2})u(t) = (\frac{1}{2}e^{-t} + \frac{1}{2}e^{-3t})u(t)$$

$$H(f) = \Gamma(f) H_w(f) = \frac{(1+s)(3+s)}{7+5s}\left(\frac{1/2}{1+s} + \frac{1/2}{3+s}\right) = \frac{2+s}{7+5s} = 0.2 + \frac{0.6}{7+5s} = 0.2 + \frac{0.12}{1.4+s}$$

$$h(t) = 0.2\delta(t) + 0.12 e^{-1.4t} u(t)$$

(ب

$$(H(s) - 2^s)\frac{49-25s^2}{9-10s^2+s^4} = y(s) \Longrightarrow \underbrace{H(s)\frac{7+5s}{(3+s)(1+s)}}_{\text{همه قطبها LHP ولذا علّی}} - \underbrace{y(s)\frac{(3-s)(1-s)}{7-5s}}_{\text{همه قطبها RHP ولذا ضدعلّی}} = 2^s \frac{7+5s}{(3+s)(1+s)}$$

$$H(s)\frac{7+5s}{(3+s)(1+s)} = \left\{2^s \frac{7+5s}{(3+s)(1+s)}\right\}_{\geq 0} = \left\{e^{(\ln 2)s}\frac{7+57}{(3+s)(1+s)}\right\}_{\geq 0} = H_w(s)$$

$$H(s) = \frac{(3+s)(1+s)}{7+5s} H_w(s) = \Gamma(s) H_w(s)$$ همانطور که دیده می‌شود جواب مثل بند الف است .

: فیلتر وینر علّی مورد نظر است . با توجه به اینکه مدل خطی با نویز سفید زائل گرفته شده است میتوان نوشت

$$H(f) = 1 - N\, \Gamma_x^*(\infty)\Gamma_x(f)$$

$$S_x(f) = N + S_s(f) = N + \frac{4\lambda}{4\lambda^2 + 4\pi^2 f^2} = \frac{(4\lambda^2 N + 4\lambda) + 4\pi^2 f^2 N}{4\lambda^2 + 4\pi^2 f^2} = N\frac{c^2 + 4\pi^2 f^2}{4\lambda^2 + 4\pi^2 f^2}$$

با انتخاب مینیمم فاز $\Gamma_x(f) = \frac{1}{\sqrt{N}}\frac{2\lambda + j2\pi f}{c + j2\pi f} \Longrightarrow H(f) = 1 - \frac{\sqrt{N}}{\sqrt{N}}\frac{2\lambda + j2\pi f}{c + j2\pi f} = \frac{c-2\lambda}{c + j2\pi f} \Rightarrow h(t) = (c-2\lambda)$

$$\hat{s}(t) = h(t) * x(t) = (c-2\lambda)\int_{\alpha=0}^{\infty} e^{-c\alpha} x(t-\alpha)\, d\alpha$$

در روابط فوق $c^2 = 4\lambda^2 + \frac{4\lambda}{N}$ است یعنی $c = 2\lambda\sqrt{1 + \frac{1}{\lambda N}}$

مسئله ۱۲ : [illegible]

$$f) = \frac{2}{0.04+(2\pi f)^2} \quad , \quad S_x(f) = N_0 + S_s(f) = \frac{2.2+5(2\pi f)^2}{0.04+(2\pi f)^2}$$

$$= L_s(f)L_s^*(f) \qquad\qquad = L_x(f)L_x^*(f)$$

$$L_s(f) = \frac{\sqrt{2}}{0.2+j2\pi f} \quad , \quad L_x(f) = \sqrt{5}\ \frac{\sqrt{0.44}+j2\pi f}{0.2+j2\pi f} = \sqrt{5}\left[1+\frac{\sqrt{0.44}-0.2}{0.2+j2\pi f}\right]$$

$$l_s(t) = \sqrt{2}\,e^{-0.2t}u(t) \quad , \quad l_x(t) = \sqrt{5}\left[\delta(t) + (\sqrt{0.44}-0.2)e^{-0.2t}u(t)\right]$$

الف) فیلتر وینر غیرعلی

$$) = \frac{S_{sx}(f)}{S_x(f)} = \frac{S_s(f)}{S_x(f)} = \frac{2}{2.2+20\pi^2 f^2} \Longrightarrow h(t) = \frac{1}{\sqrt{11}}e^{-\sqrt{0.44}|t|} \quad ,$$

$$\hat{s}(t) = h(t) * x(t) = \frac{1}{\sqrt{11}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\sqrt{0.44}|\alpha|}x(t-\alpha)\,d\alpha \ , \quad P_{\min} = N_0 h(0) = 1.51$$

ب) فیلتر وینر علی

$$) = 1 - N_0\Gamma_x^*(\infty)\Gamma_x(f) = 1-\sqrt{5}\ \frac{1}{\sqrt{5}}\ \frac{0.2+j2\pi f}{\sqrt{0.44}+j2\pi f} = \frac{\sqrt{0.44}-0.2}{\sqrt{0.44}+j2\pi f}$$

$$= (\sqrt{0.44}-0.2)e^{-\sqrt{0.44}t}u(t) \Longrightarrow \hat{s}(t) = (\sqrt{0.44}-0.2)\int_0^{\infty} e^{-\sqrt{0.44}\alpha}x(t-\alpha)\,d\alpha \ , \quad P_{\min} = N_0 h(0) = 2.31$$

ج) پیشگویی خالص $\lambda = 2$ ثانیه بعد

$$t) = \{l_s(t+2)\}_{\geq 0} = \sqrt{2}\,e^{-0.2(t+2)}u(t)$$

$$H(f) = H_w(f)\Gamma_s(f) = \sqrt{2}\,e^{-0.4}\frac{1}{0.2+j2\pi f}\ \frac{0.2+j2\pi f}{\sqrt{2}} = e^{-0.4} \Rightarrow h(t) = e^{-0.4}\delta(t)$$

$$\hat{s}(t+2) = h(t) * s(t) = e^{-0.4}s(t) \ , \quad P_{\min} = \int_0^2 |l_s(t)|^2 dt = (\sqrt{2})^2\int_0^2 e^{-0.4t}dt = 2.75$$

د) فیلترینگ + $\lambda=2$ ثانیه پیشگویی

$$t) = \{l_x(t+2)\}_{\geq 0} = \sqrt{5}(\sqrt{0.44}-0.2)e^{-0.2(t+2)}u(t)$$

$$) = \Gamma_x(f)H_w(f) = \frac{1}{\sqrt{5}}\frac{(0.2+j2\pi f)}{(\sqrt{0.44}+j2\pi f)}\sqrt{5}(\sqrt{0.44}-0.2)e^{-0.4}\frac{1}{(0.2+j2\pi f)} = \frac{0.3106}{\sqrt{0.44}+j2\pi f}$$

$$) = 0.3106\,e^{-\sqrt{0.44}t}u(t) \Longrightarrow \hat{s}(t+2) = 0.3106\int_0^{\infty} e^{-\sqrt{0.44}\alpha}x(t-\alpha)\,d\alpha \ , \quad P_{\min} = R_s(0) - \int_2^{\infty}|l_x(t)|^2 dt = 3.74$$

از هر سه حالت قبل بیشتر است و این طبیعی است .

مسئله ۱۴ : الف) با توجه به اینکه همه ریشه‌های معادله AR داخل دایره واحد است فیلتری که فرایند v(n) را به فرایند s(n)

تبدیل میکند یک فیلتر علی خواهد بود. اگر پاسخ ضربه این فیلتر را h(n) بنامیم میتوان نوشت:

$$s(n) = h(n) * v(n) = \sum_{k=0}^{\infty} h(k)v(n-k) = h(0)v(n) + h(1)v(n-1) + h(2)v(n-2) + \cdots$$

$$s(n-i) = h(0)v(n-i) + h(1)v(n-i-1) + h(2)v(n-i-2) + \cdots$$

برای $i \geq 1$ تمام جملات سمت راست بر v(n) عمود است پس مجموع آنها یعنی s(n-i) نیز برای

v(n) عمود است یعنی

$$) \perp s(n-1), s(n-2), s(n-3), \ldots$$

ب) کافی است اصل تعامد را چک کنیم

$$\hat{s}_1(n) = s(n) + \sum_{i=1}^{N} a_i s(n-i) = b_0 v(n) \perp s(n-1), s(n-2), s(n-3), \ldots$$

معادله AR

طبق بند الف

ج) باز هم کافیست اصل تعامد را چک کنیم

$$\hat{s}_2(n) = s(n) + a_1\hat{s}_1(n-1) + \sum_{i=2}^{N} a_i s(n-i)$$

$$= b_0 v(n) - a_1 s(n-1) + a_1\hat{s}_1(n-1) + b_0 v(n) + a_1\left[s(n-1) - \hat{s}_1(n-1)\right]$$

جمله اول یعنی b₀v(n) که طبق بند الف بر s(n-2) و s(n-3) و ... عمود است جمله دوم نیز که

پیشگویی است که بر داده‌ها و بر طبق s(n-2) و s(n-3) و ... عمود است. پس اصل تعامد صادق است

۲: تعریف احتمال، فضای پیشامدها، اصول احتمال

۳: احتمال شرطی، استقلال پیشامدها (۱)

الف- احتمال شرطی

ب- استقلال پیشامدها

۴: قضیه احتمال کلی و فرمول بیز (۲)

متغیر تصادفی

۱: معرفی متغیر تصادفی (۲)

الف- تعریف متغیر تصادفی

ب- تعریف تابع توزیع احتمال (CDF)

ج- تعریف تابع چگالی احتمال (pdf)

د- تعریف متغیر تصادفی گسسته و تابع جرم احتمال

۲: توابعی از متغیر تصادفی (۴)

۳: دو متغیر تصادفی، توابع CDF، pdf توأم و کناری آنها

الف- دو متغیر تصادفی، توابع CDF و pdf کناری آنها

ب- CDF توأم دو متغیر تصادفی

ج- pdf توأم دو متغیر تصادفی

۴: توابع توزیع احتمال شرطی، تعریف استقلال دو متغیر تصادفی (۷)

الف- pdf، CDF شرطی

ب- استقلال دو متغیر تصادفی

امید ریاضی (۹)

۱: کلیات

۲: گشتاورها

۳: چند نامساوی مفید

۴: تساوی دو متغیر تصادفی

الف- تساوی دو متغیر در همه جا (e)

ب- تساوی دو متغیر در میانگین مربع (MS)

ج- تساوی در توزیع (dist)

۵: تابع مشخصه و تابع مولد احتمال

الف- تابع مشخصه (CF) یک متغیر تصادفی

ب- تابع مولد احتمال (PGF) یک متغیر تصادفی

ج- CF، PGF توأم دو متغیر تصادفی

آشنایی با بیش از دو متغیر تصادفی

۱: معرفی چند متغیر تصادفی گسسته توأم

۲: معرفی چند متغیر تصادفی پیوسته توأم

۵- بردار تصادفی

۵-۱: مروری بر ماتریس‌ها و بردارها و ذکر چند قرارداد

۵-۲: توابع احتمال بردار تصادفی (CDF، pdf و CF)

۵-۳: گشتاورهای اول و دوم بردار تصادفی

۵-۴: رابطه خطی بین اعضای بردار تصادفی و خواص C_x

الف- رابطه خطی بین اعضای بردار تصادفی

ب- خواص ماتریس کوواریانس C_x