بسمه تعالی

جزوه

فیلتر و سنتز

دانشگاه

علم و صنعت

استاد

دکتر خلج

* فیلتر و سنتز مدار *

مراجع :

1- فیلتر و سنتز مدار « راهنمی » — 2. فیلتر و سنتز مدار HAKIN

3- قاضی GHAUSI — 4- LAM

5- TEMES — 6. فیلتر JOHN SON

7- ZEVEREV — 8- VANVALKENBERK

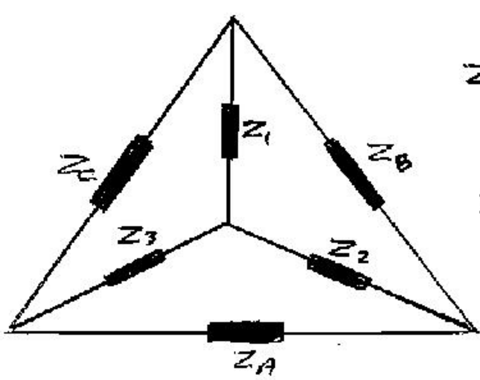
مباحث :

1- خصوصیت های شبکه های دو سر (دو قطبی) - پارامترهای مداری - تئوری هم ارزی - تئوری حداکثر انتقال
DPS - positiv Real function PRF
عناصر LC - سنتز فوستر و کایر - مشخصات مدار LC - سنتز DP با عناصر LC - RC
تقریب مداری و توابع انتقالی - شبکه های نردبانی RC ، LC - صفرهای - روشهای دارلینگتون - loss less
تکنیک بار انتهای باز شده

2- تقریب فیلتر : باتروورث - خصوصیت های اصلی - تابع انتقالی - تقریب مداری - تقریب چبی شف
چندجمله ای چبی شف - تابع انتقالی - فیلترهای بیضوی - تقریب بسل - طراحی تقریب مداری -
تقریب چبی شف معکوس - تبدیلات شبکه ای فرکانسی LP ، B.D - H.P ، B.K
مقیاس بندی فرکانسی و امپدانس - H.P.F - حساسیت های فیلتر .

3- فیلتر اکتیو : خصوصیت های تقویت کننده های عملیاتی - فیلترهای BT ، TW ، DBT ، DTT - فیلترهای اچل
فیدبک با تقویت محدود ... NI ، NIC - طراحی با NIC توسط ترانزیستور - ژیراتور - طراحی با ژیراتور

* فیلترها *

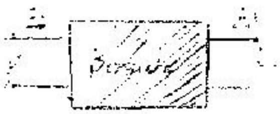


$$Z_A = \frac{Z_1 Z_2 + Z_2 Z_3 + Z_1 Z_3}{Z_1}$$

$$Z_B = \frac{Z_1 Z_2 + Z_2 Z_3 + Z_1 Z_3}{Z_3}$$

$$Z_C = \frac{Z_1 Z_2 + Z_2 Z_3 + Z_1 Z_3}{Z_2}$$

$$Z_1 = \frac{Z_C Z_B}{Z_A + Z_B + Z_C} \quad , \quad Z_2 = \frac{Z_A Z_B}{Z_1 + Z_2 + Z_3} \quad , \quad Z_3 = \frac{Z_A Z_C}{Z_1 + Z_2 + Z_3}$$



شبکه‌های دوقطبی:

* پارامترهای y، z، h، g، $A.B.C.D$، S و T

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} V_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ V_2 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} I_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ I_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ I_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_2 \\ -I_2 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = [S] \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} b_1 \\ a_1 \end{bmatrix} = [T] \begin{bmatrix} a_2 \\ b_2 \end{bmatrix}$$

مثال: رابطه های بین پارامترهای z و y را تعیین کنید.

$$\begin{cases} I_1 = y_{11} V_1 + y_{12} V_2 \\ I_2 = y_{21} V_1 + y_{22} V_2 \end{cases}$$

$$\left.\begin{cases} V_1 = Z_{11} I_1 + Z_{12} I_2 \\ V_2 = Z_{21} I_1 + Z_{22} I_2 \end{cases}\right\} \Rightarrow \quad I_1 = \frac{Z_{22} V_1 - Z_{12} V_2}{Z_{11} Z_{22} - Z_{21} Z_{12}} = \frac{Z_{22}}{\Delta Z} V_1 - \frac{Z_{12}}{\Delta Z} V_2$$

بقیه هم بهمین طریق محاسبه می‌شوند، پس

$$y_{11} = \frac{Z_{22}}{\Delta Z} \qquad y_{12} = \frac{-Z_{12}}{\Delta Z} \qquad y_{21} = \frac{-Z_{21}}{\Delta Z} \qquad y_{22} = \frac{Z_{11}}{\Delta Z} \qquad \Delta Z = Z_{11} Z_{22} - Z_{12} Z_{21}$$

$$Z_{11} = \frac{y_{22}}{\Delta y} \qquad Z_{12} = \frac{-y_{12}}{\Delta y} \qquad Z_{21} = \frac{-y_{21}}{\Delta y} \qquad Z_{22} = \frac{y_{11}}{\Delta y} \qquad \Delta y = y_{11} y_{22} - y_{21} y_{12}$$

H.W - رابطه بین پارامترهای A, B, C, D را برحسب z, y, h, g بدست آورید.

پارامترهای A, B, C, D

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ I_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_2 \\ -I_2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} V_1 = A V_2 - B I_2 \\ I_1 = C V_2 - D I_2 \end{cases}$$

پارامترهای y

$$\begin{cases} I_1 = y_{11} V_1 + y_{12} V_2 \\ I_2 = y_{21} V_1 + y_{22} V_2 \end{cases} \xrightarrow{\text{اگر } V_1 \text{ را حذف کنیم}} \begin{cases} V_1 = -\frac{y_{22}}{y_{21}} V_2 + \frac{1}{y_{21}} I_2 \\ I_1 = \frac{-\Delta y}{y_{21}} V_2 + \frac{y_{11}}{y_{21}} I_2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow A = \frac{-y_{22}}{y_{21}} \quad , \quad B = \frac{-1}{y_{21}} \quad , \quad C = \frac{-\Delta y}{y_{21}} \quad , \quad D = \frac{-y_{11}}{y_{21}}$$

با استفاده از روابط بین ΔY و ΔZ را محاسبه میکنیم

$$\Delta Y\,\Delta Z = (y_{11}y_{22} - y_{12}y_{21})\,\Delta Z$$

$$= \left(\frac{Z_{22}}{\Delta Z}\cdot\frac{Z_{11}}{\Delta Z} - \frac{-Z_{21}}{\Delta Z}\cdot\frac{-Z_{12}}{\Delta Z}\right)\Delta Z = 1$$

$$\boxed{\Delta Y\cdot\Delta Z = 1}$$

پس با استفاده از روابط بین y و D، C، B، A میتوان روابط A، B، C، D را برحسب Z تعیین کرد.

$$A = \frac{Z_{11}}{Z_{21}}\ ,\quad B = \frac{+\Delta Z}{Z_{21}}\ ,\quad C = \frac{1}{Z_{21}}\ ,\quad D = \frac{+Z_{22}}{Z_{21}}$$

$$V_1 = h_{11}I_1 + h_{12}V_2 \xrightarrow{I_1\ \text{حذف}} V_1 = -\frac{\Delta h}{h_{21}}V_2 + \frac{h_{11}}{h_{21}}I_2$$

$$I_2 = h_{21}I_1 + h_{22}V_2 \quad\Rightarrow\quad I_1 = -\frac{h_{22}}{h_{21}}V_2 + \frac{1}{h_{21}}I_2 \quad\Rightarrow$$

$$A = -\frac{\Delta h}{h_{21}}\ ,\quad B = \frac{-h_{11}}{h_{21}}\ ,\quad C = -\frac{h_{22}}{h_{21}}\ ,\quad D = \frac{-1}{h_{21}}$$

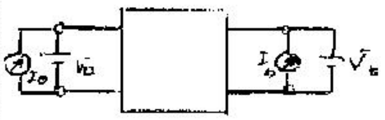
$$I_1 = g_{11}V_1 + g_{12}I_2 \xrightarrow{V_1\ \text{حذف}} I_1 = \frac{g_{11}}{g_{21}}V_2 - \frac{\Delta g}{g_{21}}I_2$$

$$V_2 = g_{21}V_1 + g_{22}I_2 \quad\Rightarrow\quad V_1 = -\frac{g_{22}}{g_{21}}I_2 + \frac{1}{g_{21}}V_2$$

$$\Rightarrow\quad A = \frac{1}{g_{21}}\ ,\quad B = +\frac{g_{22}}{g_{21}}\ ,\quad C = \frac{g_{11}}{g_{21}}\quad D = +\frac{\Delta g}{g_{21}}$$

یکی از خواص پارامترهای A، B، C و D (پارامترهای انتقال) این است که هرگاه چند سیستم بصورت cascade بسته شوند از ضرب کردن ماتریسهای انتقال ماتریس انتقال کل بدست خواهد آمد، ضمن پس از انجام محاسبات براحتی میتوان پارامترهای A، B، C، D را به پارامترهای دیگر تبدیل نمود.

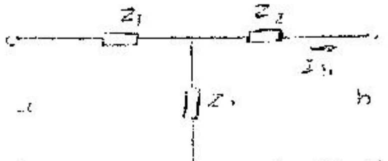
* تئوری هم پاسخی: میخواهیم در شبکه دوقطبی روبرو ثابت کنیم



$$\frac{V_a}{I_b} = \frac{V_b}{I_a}\bigg|_{V_a = V_b}$$

عبارت دیگر $Z_{12} = Z_{21}$ یا $y_{12} = y_{21}$

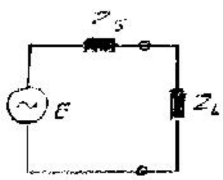
چون هر شبکه دوقطبی را میتوان بصورت مدار T نمایش داد پس این مطلب را برای مدار T ثابت میکنیم.



$$I_b = \frac{Z_3/(Z_3+Z_2)}{Z_1 + \dfrac{Z_2Z_3}{Z_2+Z_3}}\,V_a = \frac{Z_3V_a}{Z_1Z_2 + Z_1Z_3 + Z_2Z_3}$$

$$I_o = \frac{Z_1/Z_1+Z_3}{Z_2+\frac{Z_1Z_3}{Z_1+Z_3}} V_o = \frac{Z_3 V_b}{Z_2Z_1+Z_2Z_3+Z_1Z_3} \Rightarrow \frac{V_a}{I_b} = \frac{V_b}{I_a}\Big|_{V_a=V_b}$$

* قضیه انتقال حداکثر توان



$$\text{مختلط } \mathcal{P} = \frac{E^2}{Z_S+Z_L} = \frac{E^2}{R_S+R_L+j(X_S+X_L)} = \frac{E^2[(R_S+R_L)-j(X_S+X_L)]}{(R_S+R_L)^2+(X_S+X_L)^2}$$

توان را تشکیل می‌دهد $P = Re\,\mathcal{P} \Rightarrow P = \dfrac{E^2(R_S+R_L)}{(R_S+R_L)^2+(X_S+X_L)^2}$ $\qquad \dfrac{dP}{dX_L} = 0 \Rightarrow X_L = -X_S$

توان ارسالی به بار $P = \dfrac{E^2R_L}{(R_L+R_S)^2+(X_S+X_L)^2}$

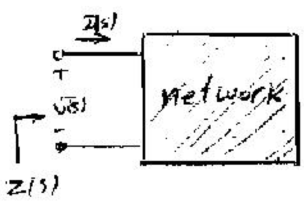
$$\frac{\partial P}{\partial R_L} = 0 \Rightarrow R_S = R_L \qquad \Rightarrow \boxed{Z_L = Z_S^*}$$

PRF $\qquad$ positive real function *

IF S is real then Z(s) IS real and $Re\{Z(s)\}$ Grater than zerro

یعنی تابعی وجود خواهد داشت که به ازای s های حقیقی Z(s) نیز حقیقی شود و همچنین به ازای هر s دلخواه این قسمت حقیقی Z(s) مثبت باشد.

اثبات:



$Z(s) \longrightarrow$ Driving point Impedance (DPI)

$$v(t) = e^{\sigma_1 t}\cos\omega_1 t \qquad z(t) = Z = |Z|e^{j\varphi}$$

$$\Rightarrow i(t) = \frac{e^{\sigma_1 t}\cos(\omega_1 t-\varphi)}{|Z|} \qquad \underbrace{w(t)}_{\text{کار مصرف شده}} = \int_0^T v(t)\cdot i(t)\,dt$$

$$\Rightarrow w(t) = \int_0^{T_1}\left[e^{2\sigma t}\cos\omega_1 t\,\cos(\omega_1 t-\varphi)\right]/|Z|\;dt$$

$$w(t) = \int_0^t \frac{e^{2\sigma t}}{2|Z|}\left(\cos(2\omega_1 t+\varphi)+\cos\varphi\right)dt = \int_0^t \frac{e^{2\sigma t}}{2|Z|}\cos(2\omega_1 t-\varphi)\,dt$$

$$+\int_0^t \frac{e^{2\sigma_1 t}}{2|Z|}\cos\varphi\,dt \Rightarrow w(t) = \frac{\cos\varphi\, e^{2\sigma_1 t}}{4\sigma_1|Z|} + \frac{1}{2|Z|}\int_0^t e^{2\sigma_1 t}\cos(2\omega_1 t-\varphi)\,dt$$

$$\Rightarrow w(t) = \frac{e^{2\sigma_1 t}\cos\varphi}{4\sigma_1|Z|} + \frac{1}{4|Z|}\left[\frac{\sigma_1}{\sigma_1^2+\omega_1^2}\cos(2\omega_1 t-\varphi) + \frac{\omega_1}{\omega_1^2+\sigma_1^2}\sin(2\omega_1 t-\varphi)\right]$$

مثال:

$$Z(s)=\frac{s+1}{s^2+s+1} \Rightarrow Z(s)=\frac{\sigma+j\omega+1}{(\sigma+j\omega)^2+\sigma+j\omega+1} \Rightarrow$$

$$Z(s)=\frac{(\sigma+1+j\omega)\left[\sigma^2-\omega^2+\sigma+1-j\omega(1+2\sigma)\right]}{(\sigma^2+\sigma+1-\omega^2)^2+\omega^2(1+2\sigma)^2} \Rightarrow Re\{Z(s)\}=\frac{(\sigma+1)(\sigma^2+\sigma+1)+\sigma\omega^2}{''}$$

IF $\sigma \geq 0 \Rightarrow Re\{Z(s)\} \geq 0$, IF s is real $\Rightarrow$ $Z(s)$ is real

پس تابع فوق PRF است.

مثال:

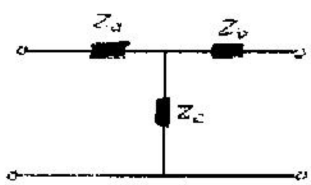
$$Z(s)=\frac{s+2}{s^2+s+1} \Rightarrow Z(s)=\frac{\sigma+2+j\omega}{(\sigma+j\omega)^2+\sigma+j\omega+1}$$

$$\Rightarrow Z(s)=\frac{(\sigma+2+j\omega)\left[\sigma^2+\sigma+1-\omega^2-j\omega(1+2\sigma)\right]}{''} \Rightarrow (\sigma+2)(\sigma^2+\sigma+1)+\omega^2(\sigma-1)\,/\,''$$

ملاحظه می شود که قسمت حقیقی $Z(s)$ امکان منفی شدن $Re\{Z(s)\}$ وجود دارد مثلاً برای $\sigma=1/2$, $\omega^2>35/4$ ؛ $Z(s)$ دیگر مثبت حقیقی نخواهد شد، پس P.R.F نیست

مدار T ، Π ، TΠ .

* مدار T



$$Z_{11}=\frac{V_1}{I_1}\Big|_{I_2=0}=Z_a+Z_c$$

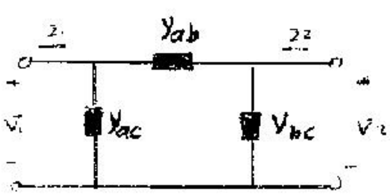
$$Z_{21}=\frac{V_2}{I_1}\Big|_{I_2=0}=Z_c$$

$$Z_{12}=\frac{V_1}{I_2}\Big|_{I_1=0}=Z_c \qquad Z_{22}=\frac{V_2}{I_2}\Big|_{I_1=0}=Z_b+Z_c$$

$$\begin{cases} Z_{11}=Z_a+Z_c \\ Z_{21}=Z_c \\ Z_{12}=Z_c \\ Z_{22}=Z_b+Z_c \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} Z_a=Z_{11}-Z_{21} \\ Z_c=Z_{21} \\ Z_b=Z_{22}-Z_{21} \end{cases}$$

با استفاده از روابط فوق هر مدار را میتوان تبدیل به مدار T نمود.

* مدار Π



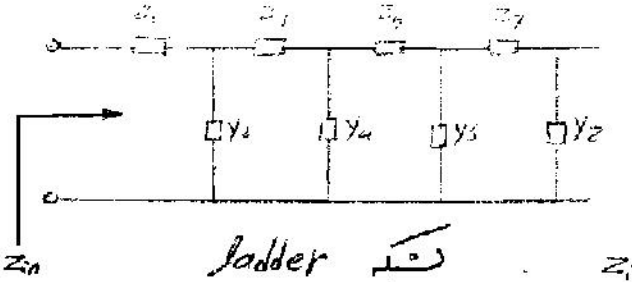
$$Y_{11}=\frac{I_1}{V_1}\Big|_{V_2=0}=Y_{ac}+Y_{ab}$$

$$Y_{12}=Y_{21}=\frac{I_1}{V_2}\Big|_{V_1=0}=-Y_{ab}$$

$$Y_{22}=\frac{I_2}{V_2}\Big|_{V_1=0}=Y_{bc}+Y_{ab}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} Y_{ab}=-Y_{12}=-Y_{21} \\ Y_{ac}=Y_{11}+Y_{12} \\ Y_{bc}=Y_{22}+Y_{12} \end{cases}$$

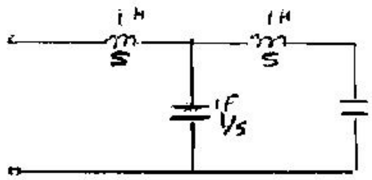
حال اگر T ، π را پشت سرهم ببندیم:



شبکه ladder

$$Z_{in} = Z_1 + \cfrac{1}{Y_2 + \cfrac{1}{Z_3 + \cfrac{1}{Y_4 + \cfrac{1}{Z_5 + \cfrac{1}{\cdots}}}}}$$

مثال:



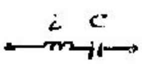
$Z_1 = S$ ، $Y_2 = S$ ، $Z_3 = S$ ، $Y_4 = S$

$$\Rightarrow Z_{in} = S + \cfrac{1}{S + \cfrac{1}{S + \cfrac{1}{S}}} = S + \cfrac{1}{S + \cfrac{S}{S^2+1}}$$

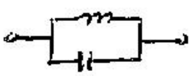
$$\Rightarrow Z_{in} = S + \frac{S^2+1}{S^3+2S} = \frac{S^4+3S^2+1}{S^3+2S} \quad (I)$$

- حال اگر تابعی بصورت (I) به ما بدهند با تقسیم های متوالی صورت و مخرج میتوان مدار را رسم کرد.

- سنتز مدارهای LC *



$$Z(s) = LS + \frac{1}{CS} = \frac{LCS^2+1}{CS} \Rightarrow Y(s) = \frac{CS}{1+LCS^2}$$



$$Y(s) = CS + 1/LS = \frac{1+LCS^2}{LS} \Rightarrow Z(s) = \frac{LS}{1+LCS^2}$$

سنتز فوستر I و II برای مدارات LC و RC ، LR

در فوستر I ، Z و در فوستر II ، Y را سنتز می‌کنیم.

خصوصیات شبکه های LC.

الف) $Z(s)$ یا DPI هیچ گونه قطب مثبتی در سمت راست صفحه موهومی و حقیقی ها ندارد

ب) صفرها و قطبها بطور تناوبی هستند یعنی همیشه بین دو صفر یک قطب و بین دو قطب یک صفر باشد.

ج) تمام جملات مثبت می‌باشند.

د) همیشه یک صفر یا یک قطب در مبدأ وجود دارد.

هـ) تفاوت مرتبه صورت و مخرج همیشه واحد است.

و) شیب منحنی همیشه مثبت است. ریشه های ادامه صورت محور موهومی خالص بوده، جبرانه قطب یا

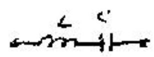
ز) صفر در مبدأ در بی نهایت.

فوستر I $\qquad Z(s) = Hs + \frac{k_0}{s} + \sum_{i=1}^{n} \frac{K_i s}{s^2+\omega_i^2} = Z_1 + Z_2 + \cdots$

فوستر II $\qquad Y(s) = \frac{1}{Z(s)} = Y_1(s) + Y_2(s) + \cdots = \frac{k_0}{s} + H(s) + \sum_{i=1}^{n} \frac{K_i s}{s^2+\omega_i^2}$

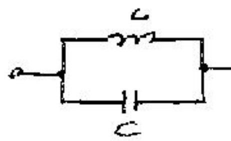
$(I)\ Z(s) = \frac{As^2+B}{Ds}$ $\quad (II)\ Z(s) = \frac{As}{Bs^2+D}$ $\quad (III)\ Y(s) = \frac{m+ns^2}{ks}$ $\quad (IV)\ Y(s) = \frac{ks}{ns^2+m}$

می‌خواهیم مقادیر خازن و سلف را برابر ...

(I)  $\quad Z(s) = \frac{1+LCs^2}{Cs} \Rightarrow Z(s) = \frac{s^2+1/LC}{\frac{1}{L}s}$

$Z(s) = \frac{s^2+B/A}{\frac{D}{A}s}$

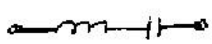
$Z(s) = \frac{As}{s^2+B}$



$\Rightarrow Z(s) = \frac{Ls}{1+LCs^2} = \frac{\frac{1}{C}s}{s^2+1/LC}$

$\Rightarrow A = 1/C \Rightarrow C = 1/A \quad , \quad LC = 1/B \Rightarrow L = \frac{1}{BC} = \frac{A}{B} \Rightarrow \boxed{\begin{cases} C = 1/A \\ L = A/B \end{cases}}$

$Y(s) = \frac{As}{s^2+B}$



$\Rightarrow Y(s) = \frac{Cs}{1+LCs^2} = \frac{\frac{1}{L}s}{s^2+1/LC}$

$\Rightarrow \boxed{\begin{cases} L = 1/A \\ C = A/B \end{cases}}$

مثال: شبکه مقابل را بصورت فوستر I و II سنتز کنید.

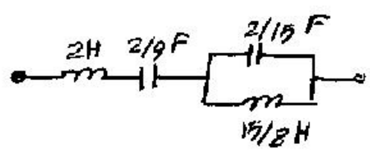
$Z(s) = \frac{2(s^2+1)(s^2+9)}{s(s^2+4)}$

جواب: تمامی شرایط شبکه‌های LC برقرار است.

$Z(s) = \frac{2s^4+20s^2+18}{s(s^2+4)} = 2s + \frac{A}{s} + \frac{Bs}{(s^2+4)} \Rightarrow \begin{cases} A+B=12 \\ 4A=18 \end{cases} \Rightarrow A = 9/2 \quad B = 15/2$

$= 2s + \frac{12s^2+18}{s(s^2+4)}$

$\Rightarrow Z(s) = 2s + \frac{9/2}{s} + \frac{15/2\,s}{s^2+4}$



نکته: تعداد المان‌ها به درجه DPI≡DPA بستگی دارد.

DPI : Driving point Impedance.

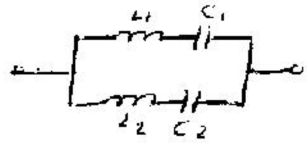
DPA : Driving point Admitance.

سنتز مدار فوق بروش فوستر II

$$Y(s) = \frac{s(s^2+4)}{2(s^2+1)(s^2+9)} = \frac{As}{(s^2+1)} + \frac{Bs}{s^2+9}$$

$A = 3/16 \quad B = 5/16$

$$\Rightarrow Y(s) = \frac{\frac{3}{16}s}{s^2+1} + \frac{\frac{5}{16}s}{s^2+9}$$



$L_1 = 16/3\,H \quad C_1 = 3/16\,F$

$L_2 = 16/5\,H \quad C_2 = 5/144\,F$

سنتز بروش cauer (شبکه ladder)

با تقسیمات متوالی صورت بر مخرج و مخرج بر صورت میتوان Z ها و Y ها را بدست آورد.
همیشه در این روش ابتدا Z(s) را بدست آورده یک جمله جدا از صورت یک جمله جدا از مخرج تعویض می‌کنیم

مثال: مثال قبل را بروش cauer سنتز کنید.

$$Z(s) = \frac{2(s^2+1)(s^2+9)}{s(s^2+4)} = \frac{2s^4+20s^2+18}{s^3+4s}$$

$s^3+4s \,)\, 2s^4+20s^2+18 \,(\; 2s \rightarrow Z$

$\quad 2s^4+8s^2$

$12s^2+18 \,)\, s^3+4s \,(\; \frac{1}{12}s \rightarrow Y$

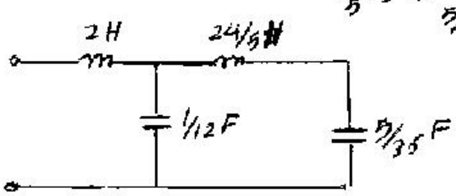
$\quad s^3+\frac{3}{2}s$

$\frac{5}{2}s \,)\, 12s^2+18 \,(\; \frac{24}{5}s \rightarrow Z$

$\quad 12s^2$

$18 \,)\, \frac{5}{2}s \,(\; \frac{5}{36}s \rightarrow Y$

$$\Rightarrow Z(s) = 2s + \cfrac{1}{\frac{1}{12}s + \cfrac{1}{\frac{24}{5}s + \cfrac{1}{\frac{5}{36}s}}}$$



روش بالا به کایر I موسوم است در این روش صورت و مخرج تابع شبکه را بصورت توانهای نزولی s مرتب می‌کنیم و سپس عمل تقسیمات متوالی را انجام می‌دهیم.

* کایر II در این روش صورت و مخرج را بر حسب توانهای صعودی s مرتب می‌کنیم و سپس عملیات را انجام می‌دهیم. در ضمن از DPA استفاده می‌کنیم.

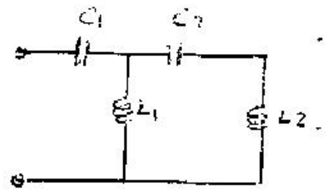
مثال: همان مثال قبل را بروش کایر II سنتز کنید.

$$Y = \frac{s^3+4s}{s^4+10s^2+9}$$

$$Y = \frac{4s+s^3}{9+10s^2+s^4}$$

ممکن است یکی از دو روش کایر I یا II جواب منفی بدهد که در اینصورت محاسبات را متوقف می‌کنیم و از روش دیگر ادامه می‌دهیم.

$4s+s^3 \,)\, 9+10s^2+s^4 \,)\, \frac{9}{4s} \rightarrow Z \Rightarrow C_1 = 4/9\,F$



$9+\frac{9}{4}s^2$

$\frac{31}{4}s^2+s^4 \,)\, 4s+s^3 \,)\, \frac{16}{31s} \rightarrow Y \Rightarrow L_1=\frac{31}{16}\,H$

$4s+\frac{16}{31}s^3$

$\frac{15}{31}s^3 \,)\, \frac{31}{4}s^2+s^4 \,)\, \frac{961}{60s} \rightarrow Z \Rightarrow C_2=\frac{60}{961}\,F$

$\frac{31}{4}s^2+\cdot$

$s^4 \,)\, \frac{15}{31}s^3 \,)\, \frac{15}{31s} \rightarrow Y \Rightarrow L_2=\frac{31}{15}\,H$

* گاهی ممکن است قسمتی از شبکه را با یک روش، قسمت دیگر را به روشی دیگر سنتز کنیم.

مثال:
$$Z(s)=\frac{5s(s^2+2)(s^2+4)(s^2+6)}{(s^2+1)(s^2+3)(s^2+5)} = 5s\left(A_0+\frac{A_1}{s^2+1}+\frac{A_2}{s^2+3}+\frac{A_3}{s^2+5}\right)$$

$$A_0=1 \qquad A_1=\frac{(s^2+2)(s^2+4)(s^2+6)}{(s^2+3)(s^2+5)}\Bigg|_{s^2=-1}=\frac{15}{8}\ ,\ A_2=\frac{3}{4}\ ,\ A_3=3/8$$

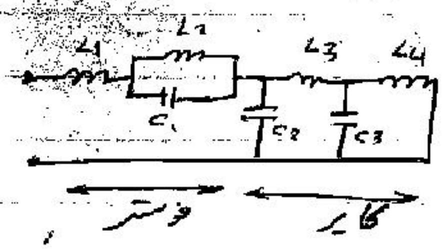
$$\Rightarrow Z(s)=5s\left(1+\frac{15/8}{s^2+1}+\frac{3/4}{s^2+3}+\frac{3/8}{s^2+5}\right) = 5s+\frac{75/8\,s}{s^2+1}+\frac{15/4\,s}{s^2+3}+\frac{15/8\,s}{s^2+5}$$

فرض می‌خواهیم دو جمله آخر را به صورت کاور I سنتز کنیم

$$Z(s)=5s+\frac{75/8\,s}{s^2+1}+Z_2(s)$$

$$Z_2(s)=\frac{\frac{45}{8}s^3+\frac{195}{8}s}{(s^2+3)(s^2+5)}=\frac{45s^3+195s}{8s^4+64s^2+120}$$

$45s^3+195s \,)\, 8s^4+64s^2+120 \,)\, \frac{8}{45}s \rightarrow Y$



$8s^4+\frac{8\times 13}{3}s^2$

$\frac{88}{3}s^2+120 \,)\, 45s^3+195s \,)\, \frac{135}{88}s \rightarrow Z$

$45s^3+\frac{2025}{11}s$

$\frac{120}{11}s \,)\, \frac{88}{3}s^2+120 \,)\, \frac{121}{45}s \rightarrow Y$

$88/3\,s^2+\frac{88}{3}$

$\frac{272}{3} \,)\, \frac{120}{11}s \,)\, \frac{45}{374}s \rightarrow Z$

$L_1=5H \qquad L_2=\frac{75}{8}H$

$C_1=\frac{8}{75}F \qquad C_2=\frac{8}{45}F$

$L_3=\frac{135}{88}H \qquad C_3=\frac{121}{45}F$

$L_4=\frac{45}{374}H$

متغیرهای پراکندگی ماتریس $[S]$

$$\begin{cases} [S] = \left([z'] - [1]\right)\left([z'] + [1]\right)^{-1} \\ [z'] = \dfrac{[z]}{(z_0)} \end{cases} \quad , \; Z_0 = \sqrt{\frac{L}{C}}$$

*** H.W. ***

* پارامترهای S_{11} ، S_{12} ، S_{21} ، S_{22} را برحسب پارامترهای Z تعیین کنید.

* transfer function from Amplitud function *

همیشه از آزمایش یک جعبه (شبکه) $|H(j\omega)|$ مشخص می‌شود. می‌خواهیم از خواص تابع شبکه استفاده کنیم و خود $H(j\omega)$ را بدست آوریم :

$$H^*(j\omega) = H(-j\omega) \Rightarrow |H(j\omega)|^2 = H(j\omega) \cdot H^*(j\omega) = H(j\omega) \cdot H(-j\omega)$$

$$\underset{\text{PRF}}{H(s)} \cdot \underset{\text{Not PRF}}{H(-s)} \Big|_{s = j\omega} = |H(j\omega)|^2 \qquad \text{IF } H(s) = \frac{P(s)}{Q(s)} \Rightarrow \frac{P(s)}{Q(s)} \cdot \frac{P(-s)}{Q(-s)} = |H(j\omega)|^2 \Big|_{\omega^2 = -s^2}$$

مثال : در $|H(j\omega)|^2$ به جای ω^2 مقدار $-s^2$ را قرار می‌دهیم سپس از آن دو قسمت $H(s)$ ، $H(-s)$ تقسیم می‌کنیم.

$$|H(j\omega)|^2 = \frac{4+\omega^2}{1+\omega^6} \qquad \omega^2 \longrightarrow -s^2 \quad \Rightarrow H(s) \cdot H(-s) = \frac{4-s^2}{1-6s^2} \Rightarrow$$

$$H(s) \cdot H(-s) = \frac{(2-s)(2+s)}{(1-s^3)(1+s^3)} = \frac{(2-s)(2+s)}{(1-s)(1+s^2+s)(1+s)(1-s+s^2)}$$

$$\Longrightarrow H(s) = \frac{s+2}{(1+s)(1+s^2+s)}$$

$$Z = \frac{1+RCS}{CS} \qquad Y = \frac{1+RCS}{R}$$

$$Y = \frac{CS}{1+RCS} \qquad Z = \frac{R}{1+RCS}$$

سنتز مدارهای RC : ابتدا RC سری و موازی را بررسی می‌کنیم :
کوچکترین فرکانس بحرانی در $Z(s)$ برای مدارات RC یک قطب است.
سنتز مدارهای RC نیز دقیقاً شبیه سنتز مدارهای RL است.
و روشهای فوستر I و II ، کاور I و II در اینجا نیز استفاده خواهد شد.

فوستر I

$$Z(s) = A_0 + \frac{A_1}{s} + \frac{A_2}{s+\sigma} + \frac{A_3}{s+\sigma_3} + \cdots$$

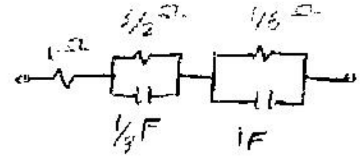
چون در فوستر I هر مدار RC موازی جمع خواهد شد $Z(s)$ به صورت $\frac{A}{s+\sigma}$ خواهد شد.

مثال: فوستر I

$$Z(s)=\frac{(s+4)(s+8)}{(s+2)(s+6)}$$

که دیده می‌شود دارای ۲ قطب است پس دو مرحله است.

$$Z(s)=A_0+\frac{A_1}{s+2}+\frac{A_2}{s+6}=1+\frac{3}{s+2}+\frac{1}{s+6}\Rightarrow$$



$$=1+\frac{1}{\frac{s}{3}+\frac{2}{3}}+\frac{1}{s+6}$$

* ولی در فوستر II ، $Y(s)$ بصورت ذیل بسط خواهد شد.

$$Y(s)=A_0+A_1s+\frac{A_2s}{s+\sigma_1}+\frac{A_3s}{s+\sigma_2}+\cdots$$

زیرا در این حالت RC های سری با هم موازی خواهند شد برای RC سری داریم

$$y=\frac{Cs}{1+RCs}$$

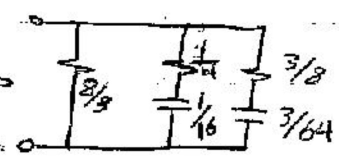
A_0 ، A_1s نیز نشان دهنده مقاومت و خازن است که احتمالاً با RC های سری موازی می‌شود.

مثال برای فوستر II

$$Y(s)=\frac{(s+2)(s+6)}{(s+4)(s+8)}$$

$$Y(s)=A_0+\frac{A_1s}{s+4}+\frac{A_2s}{s+8}=\frac{3}{8}+\frac{1/4\,s}{s+4}+\frac{3/8\,s}{s+8}$$

$$=\frac{3}{8}+\frac{1}{4+\frac{16}{s}}+\frac{1}{\frac{8}{3}+\frac{64}{3s}}\Rightarrow$$



همین مثال بروش کاور I

$$Z(s)=\frac{s^2+12s+32}{s^2+8s+12}$$

$s^2+8s+12\,)\,s^2+12s+32\,)\quad 1\rightarrow z$

$\quad s^2+8s+12$

$4s+20\,)\,s^2+8s+12\,)\quad \frac{1}{4}s\rightarrow y$

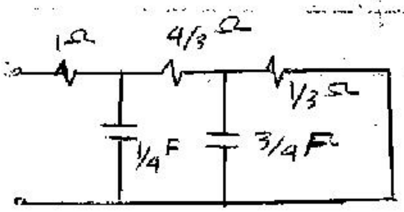
$\quad s^2+5s$

$3s+12\,)\,4s+20\,)\quad \frac{4}{3}\rightarrow z$

$\quad 4s+16$

$4\,)\,3s+12\,)\quad \frac{3}{4}s\rightarrow y$

$12\,)\,4\,)\quad \frac{1}{3}\rightarrow z$



همین مثال بروش کائر II

$$Z(s) = \frac{32+12s+s^2}{12+8s+s^2}$$

اگر صورت را بر مخرج تقسیم کنیم معلوم است که درجات سری است خواهیم آورد

پس ابتدا مخرج را بر صورت تقسیم می کنیم.

$$32+12s+s^2\ )\ 12+8s+s^2\ )\ \tfrac{3}{8} \rightarrow Y$$

$$12+4.5s+\tfrac{3}{8}s^2$$

$$3.5s+\tfrac{5}{8}s^2\ )\ 32+12s+s^2\ )\ 9.14/s \rightarrow Z$$

$$32+5.71s+\cdot$$

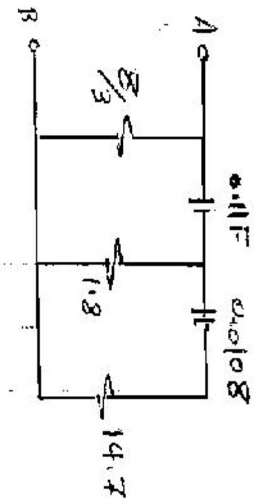
$$6.28s+s^2\ )\ 3.5s+\tfrac{5}{8}s^2\ )\ 0.55 \rightarrow Y$$

$$3.5s+0.55s^2$$

$$0.068s^2\ )\ 6.28s+s^2\ )\ 92.1/s \rightarrow Z$$

$$6.28s$$

$$s^2\ )\ 0.068s^2\ )\ 0.068 \rightarrow Y$$



سنتز مدارهای RL. گفتیم نظیر سری موازی برای Z(s) در مدارات RL مثل Y هاست. (تفاوت با RC)

$$Z = R + Ls \quad , \quad Y = \frac{1}{R+Ls}$$

$$Z = \frac{1}{Y} \qquad Y = \frac{1}{R} + \frac{1}{Ls} = \frac{Ls+R}{RLs} \Rightarrow Z = \frac{RLs}{Ls+R}$$

پس در فاستر I که RL های موازی با هم سری خواهند شد Z را به صورت $\sum \frac{A_i s}{s+\sigma_i}$ تجزیه خواهیم کرد در صورتی که در فاستر II که RL های سری با هم موازی خواهند شد Z را به صورت

$$\sum \frac{A_i}{s+\sigma_i}$$

تجزیه می کنیم.

* هنجاری * scaling

مقادیری که تا کنون در مسائل مطرح شده است مقادیر عملی نبوده اند بلکه مقادیر scale شده هستند.

مثلاً مقدار 2F بسیار معقول است.

مثال:

$$Z_{11} = \frac{s^4+4s^2+1}{s(s^2+1)} \qquad Z_{12} = \frac{2s^4+9s^2+1}{s(s^2+1)}$$

$$Z_{11} = s+\frac{1}{s}+\frac{2s}{s^2+1} \qquad Z_{12} = \frac{1}{s}+2s+\frac{6s}{s^2+1} \qquad Z_a = Z_{11}-kZ_{12}$$

$$\Rightarrow Z_a = s(1-2k) + \frac{1}{s}(1-k) + \frac{2s}{\sigma}(1-3k)$$

$$1-2k \geqslant 0 \qquad 1-k \geqslant 0 \qquad 1-3k \geqslant 0 \Rightarrow k \leqslant \frac{1}{3}$$

$$\text{IF} \quad k=1/3 \Rightarrow \qquad Z_a = \frac{s}{3}+\frac{2}{3s} \qquad Z_b = \frac{4}{3s}+\frac{5}{3}s+\frac{4s}{s^2+1}$$

---

* حالتی که فقط Z_{12} معلوم باشد.

$$2Z_{12} = Z_b - Z_a$$

در این حالت Z_{12} را تجزیه می‌کنیم و قسمتی مثبت را به عنوان Z_b و قسمت منفی را به عنوان Z_a انتخاب می‌کنیم.

مثال:

$$2Z_{12} = \frac{3s^2+6s+1}{(s+1)(s+2)(s+3)} = -\frac{1}{s+1}+\frac{5}{s+3}-\frac{1}{s+2} \Rightarrow Z_b = \frac{5}{s+3} \quad Z_a = \frac{1}{s+2}+\frac{1}{s+1}$$

یک انتخاب دیگر می‌تواند به صورت زیر باشد.

$$Z_b = \frac{5}{s+3}+\frac{1}{s+2} \qquad Z_a = \frac{1}{s+1}+\frac{2}{s+2}$$

---

* حالتی که TF معلوم باشد که اکثراً نیز چنین است.

$$H(s) = \left.\frac{V_2(s)}{V_1(s)}\right|_{I_2=0} = \frac{Z_{12}}{Z_{11}} = \frac{Z_b-Z_a}{Z_b+Z_a} = \frac{1-Z_a/Z_b}{1+Z_a/Z_b} = \frac{Z_b/Z_a-1}{Z_b/Z_a+1}$$

$$H(s) = \frac{Q(-s)}{Q(s)} = \frac{m(s)-n(s)}{m(s)+n(s)}$$

فرض می‌کنیم $H(s)$ یک چندجمله‌ای هرویتز باشد و از آن استفاده کنیم.
که $m(s)$ قسمت زوج $Q(s)$ و $n(s)$ قسمت فرد آن می‌باشد.

$$\Rightarrow H(s) = \frac{m(s)/n(s)-1}{m(s)/n(s)+1} = \frac{1-n(s)/m(s)}{1+n(s)/m(s)}$$

بنابراین ممکن است Z_a و Z_b به صورت زیر انتخاب شوند.

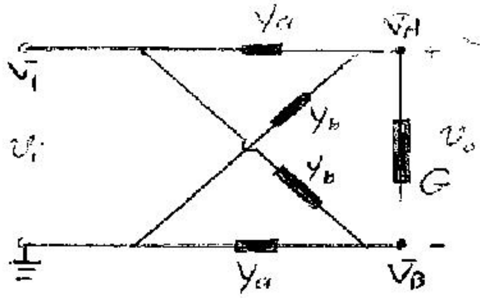
$$Z_a = 1 \,,\; Z_b = \frac{m(s)}{n(s)} \qquad \text{or} \qquad Z_b = 1 \,,\; Z_a = \frac{n(s)}{m(s)}$$

مثال:

$$H(s) = \frac{V_o}{V_i} = \frac{s^2-s+1}{s^2+s+1} = \underbrace{\frac{\frac{s^2+1}{s}-1}{\frac{s^2+1}{s}+1}}_{1} = \underbrace{\frac{1-\frac{s}{s^2+1}}{1+\frac{s}{s^2+1}}}_{2}$$

$$\Rightarrow 1 \Rightarrow Z_a = 1 \,,\; Z_b = s+\frac{1}{s} \qquad 2 \Rightarrow Z_b = 1 \,,\; Z_a = \frac{1}{s+\frac{1}{s}}$$

**+ حال حالتی را در نظر می‌گیریم که $I_2 \neq 0$ باشد، در چنین حالتی خواهیم داشت



$$H(s) = \frac{V_A - V_B}{V_1}$$

$$\begin{cases} G(V_A - V_B) + Y_b V_A + Y_a(V_A - V_1) = 0 \\ G(V_B - V_A) + Y_a V_B + Y_b(V_B - V_1) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} G + Y_b + Y_a & -G \\ -G & G + Y_b + Y_a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_A \\ V_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_a \\ Y_b \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \frac{V_A}{V_1} = \frac{Y_a(G + Y_a + Y_b) + G\,Y_b}{(G + Y_b + Y_a)^2 - G^2} \qquad \frac{V_B}{V_1} = \frac{Y_b(G + Y_b + Y_a) + G\,Y_a}{(G + Y_a + Y_b)^2 - G^2}$$

$$\Rightarrow H(s) = \frac{V_A - V_B}{V_1} = \frac{Y_a^2 - Y_b^2}{2G(Y_a + Y_b) + (Y_a + Y_b)^2} = \frac{Y_a - Y_b}{Y_a + Y_b + 2G}$$

$$\Rightarrow \boxed{H(s) = \frac{Y_a - Y_b}{Y_a + Y_b + 2G}} = \frac{\frac{1}{2}(Y_a - Y_b)}{\frac{1}{2}(Y_a + Y_b) + G} = \frac{-Y_{12}}{Y_{22} + G}$$

که از قبل ثابت کرده بودیم ←

$$\begin{cases} Y_a = Y_{22} + Y_{12} \\ Y_b = Y_{22} - Y_{12} \end{cases}$$

★ سنتز TF ★ صفرهای انتقال جهت سنتز مدارهای DPZ و DPA را به دو حالت تقسیم

$H(s)$ یا TF را سنتز کنیم.

★ حالت اول $R_L = \infty$ or $I_2 = 0$

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_{11} & z_{12} \\ z_{21} & z_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix}$$

$$I_2 = 0 \Rightarrow \begin{matrix} V_1 = z_{11} I_1 \\ V_2 = z_{21} I_1 \end{matrix} \Rightarrow \boxed{H(s) = \frac{z_{21}}{z_{11}}\bigg|_{I_2=0}}$$

● رابطه فوق نشان می‌دهد صفرهای z_{21} همان صفرهای $H(s)$ و صفرهای z_{11} همان قطبهای $H(s)$ هستند همچنین قطبهای z_{21} نیز همان قطبهای z_{11} هستند که از قبل نیز قابل پیش‌بینی بود زیرا هر دو امپدانس مدار هستند.

فرض می‌کنیم تابع انتقال بصورت روبرو باشد

$$H(s) = \frac{Ks^m}{s^n + b_{n-1}s^{n-1} + \dots + b_0}$$

در اینجا بین m و n سه حالت کلی وجود دارد عبارتند از

1) $m = 0$ فیلتر پایین گذر

2) $m = n$ فیلتر بالاگذر

3) $0 < m < n$ فیلتر میان گذر

یکی از راههای مناسب سنتز TF روش بروانی است. برای حالت I از کایر I استفاده می‌کنیم زیرا تمام صفرهای انتقال در بینهایت هستند و برای حالت II از کایر II استفاده می‌کنیم و برای

● حالت 3 m صفر را به روش کایر II جدا می‌کنیم و باقیمانده یعنی $n-m$ صفر بعدی را به روش کایر I

مثال برای حالت 1

$$H(s) = \frac{K}{(s+2)(s+4)} \Rightarrow$$

اگر بخواهیم مدار را بصورت RC سنتز کنیم باید z_{11} و z_{21} را بصورت

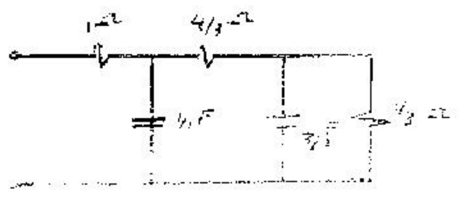
$$z_{11} = \frac{(s+2)(s+4)}{(s+1)(s+3)}$$

زیرا انتخاب کنیم.

زیرا باید کوچکترین فرکانس بحرانی یک قطب باشد و ثانیاً صفرها و قطبها یک در میان باشند

$$z_{12} = \frac{k}{(s+1)(s+3)}$$

$$z_{11} = 1 + \cfrac{1}{\frac{1}{2}s + \cfrac{1}{\frac{4}{3} + \cfrac{1}{\frac{3}{2}s + \frac{1}{2/3}}}}$$



$$s \to 0 \Rightarrow H(s) = \frac{K}{8}$$

$$H(s) = \frac{1/3}{\frac{1}{3} + \frac{4}{3} + 1} = \frac{1}{8}$$

$K = 1$

$$H(s) = \frac{Ks^2}{(s+4)(s+2)}$$

مثال برای حالت دوم

با روش حالت ۱ $Z_{11} = \frac{(s+4)(s+2)}{(s+1)(s+3)}$ را انتخاب می‌کنیم منتهی روش کاور را عوض می‌کنیم.

و بصورت زیر آن را سنتز می‌کنیم

$$Z_{11} = \frac{s^2+6s+8}{s^2+4s+3}$$

$8+6s+s^2 \;)\; 3+4s+s^2 \;)\; \frac{3}{8} \to y$

$3 + \frac{9}{4}s + \frac{3}{8}s^2$

$\frac{7}{4}s + \frac{5}{8}s^2 \;)\; 8+6s+s^2 \;)\; \frac{32}{7s} \to z$

$8 + \frac{20}{7}s$

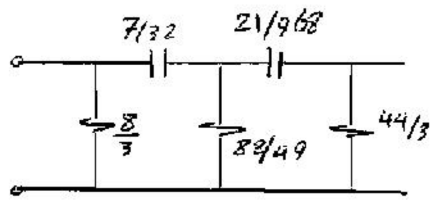
$\frac{22}{7}s + s^2 \;)\; \frac{7}{4}s + \frac{5}{8}s^2 \;)\; \frac{49}{88} \to y$

$\frac{7}{4}s + \frac{49}{88}s^2$

$\frac{6}{88}s^2 \;)\; \frac{22}{7}s + s^2 \;)\; \frac{968}{21s} \to z$

$\frac{22}{7}s$

$s^2 \;)\; \frac{6}{88}s^2 \;)\; \frac{6}{88} = \frac{3}{44} \to y$



$s \to \infty \Rightarrow \frac{V_o}{V_i} = H(s) = 1$

$H(s)\big|_{s\to\infty} = K \Rightarrow$

$K = 1$

مثال برای حالت سوم:

$$H(s) = \frac{Ks}{(s+2)(s+4)}$$

ابتدا به روش کائر I یک خازن را بیرون می‌کشیم

و بعد از حد مجاز بیرون آمدن یک خازن روش

سنتز را عوض می‌کنیم و بعد با روش کائر II سنتز می‌کنیم.

یا بالعکس

$$Z_{11} = \frac{(s+2)(s+4)}{(s+1)(s+3)} = \frac{s^2+6s+8}{s^2+4s+3}$$

$s^2+4s+3 \;)\; s^2+6s+8 \;)\; 1 \to z$

s^2+4s+3

$2s+5 \;)\; s^2+4s+3 \;)\; \frac{s}{2} \to y$

$s^2+2.5s$

$1.5s+3$

$$\Rightarrow Z_{11} = 1 + \frac{1}{\frac{s}{2} + Y_R(s)}$$

$$Y_{R(s)} = \frac{1.5s+3}{2s+5}$$

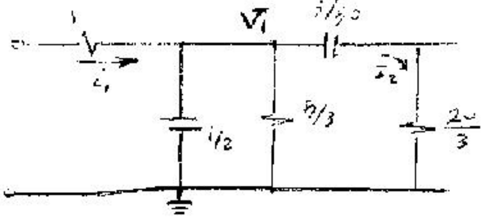
$5+2s \;)\; 3+1.5s \;)\; \frac{3}{5} \to y$

$3 + \frac{6}{5}s$

$0.3s \;)\; 5+2s \;)\; \frac{5}{0.3s} \to z$

5

$2s \;)\; 0.3s \;)\; 0.15 \to y$



برای بدست آوردن K که به عنوان ضریب انتقالی در مراحل قبل استفاده کردیم و با هم تابع شبکه را بدست آوردیم (از روی شکل) و با مقایسه آنها مقدار K را حساب کنیم.

$$H(s) = \frac{Ks}{s^2+6s+8}$$

برای تابع $H(s)$:

$$V_2 = 1 \Rightarrow I_2 = \frac{3}{2s} \Rightarrow V_1 = 1 + \frac{3}{2s} \times \frac{5s}{3s} = 1 + \frac{5}{2s} = \frac{2s+5}{2s}$$

$$i_1 = \frac{3}{2s} + \frac{3}{5}\cdot\frac{2s+5}{2s} + \frac{s}{2}\cdot\frac{2s+5}{2s}$$

$$\Rightarrow i_1 = \frac{s^2+4s+3}{2s} \Rightarrow$$

$$V_1 = \frac{s^2+4s+3}{2s} + \frac{2s+5}{2s} = \frac{s^2+6s+8}{2s} \Rightarrow H(s) = \frac{2s}{s^2+6s+8}$$

$$\Rightarrow K = 2$$

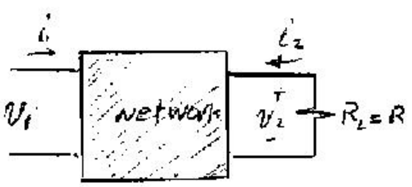
سنتز شبکه‌های LC و RL نیز درست به همین صورت است منتهی باید مشخص شود که چه نوع سنتزها را در نظر گرفته شود. مثلاً اگر بخواهیم $H(s) = \frac{Ks}{(s+2)(s+4)}$ را به صورت RL سنتز کنیم کافی است Z_{11} را به صورت $Z_{11} = \frac{(s+2)(s+4)}{(s+3)}$ انتخاب کنیم. زیرا با کوچکترین فرکانس بحرانی یک صفر است.

---

* Resistivly terminated network *

توابع انتقالی که تا کنون سنتز نمودیم همگی با فرض جریان خروجی ($R \to \infty$) بود. است همچنین $R_S = 0$ ولی در اینجا می‌خواهیم حالت‌های کلی‌تری را بررسی کنیم.

۱- حالتی که $R_L = R$ و $R_S = 0$



$$\begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} i_1 = y_{11}V_1 + y_{12}V_2 \\ i_2 = y_{21}V_1 + y_{22}V_2 \end{cases}$$

از طرفی $i_2 = -V_2/R$

$$\Rightarrow -\frac{V_2}{R} = y_{21}V_1 + y_{22}V_2 \Rightarrow (y_{22} + 1/R)V_2 = -y_{21}V_1$$

$$\Rightarrow \boxed{H(s) = \frac{-y_{12}}{y_{22} + 1/R}}$$

$y_{12} = y_{21}$

2- حالت $R_L=0$ ، $R_S\neq 0$

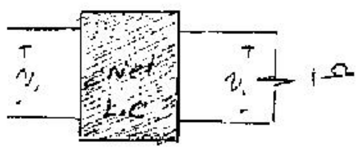
$$V_1 = Z_{11}I_1 + Z_{12}I_2$$
$$V_2 = Z_{21}I_1 + Z_{22}I_2 \Rightarrow \frac{V_2}{V_1} = \frac{Z_{21}}{Z_{11}}$$

$$V_S = V_1 + R_S I_1 \Rightarrow V_S = (Z_{11}+R_S)I_1 \Rightarrow \frac{V_2}{V_S} = \frac{Z_{21}}{Z_{11}+R_S}$$

$$\Rightarrow \boxed{H(s) = \frac{V_2}{V_S} = \frac{Z_{21}}{Z_{11}+R_S}}$$

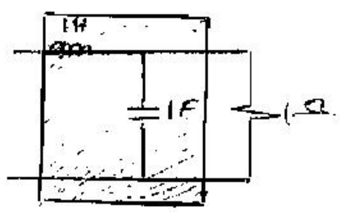
قبل از اینکه به ذکر حالت سوم ($R_L\neq 0$ ، $R_S\neq 0$) بپردازیم ابتدا در مورد حالت اول دو مسئله حل می‌کنیم تا با روش سنتز اتصال توابع آشنا شویم.

مثال، اگر تابع انتقال شبکه مقابل $H(s)=\frac{1}{s^2+s+1}$ باشد المان‌های شبکه را بدست آورید.



$$H(s) = \frac{1}{s^2+s+1} = \frac{1/s}{\frac{s^2+1}{s}+1} \Rightarrow Y_{12} = -\frac{1}{s} \,,\; Y_{22} = \frac{s^2+1}{s} = s+\frac{1}{s}$$

روش کاور I را سنتز می‌کنیم. زیرا صفر انتقال در بینهایت داریم.



* روش کلی‌تر چنین مسائلی به این صورت است:

$$-Y_{12} = \frac{A(s)}{B(s)} \qquad Y_{22} = \frac{C(s)}{B(s)} \Rightarrow H(s) = \frac{A(s)}{B(s)+C(s)}$$

و چون Y_{22} تابع ادمیتانس نقطه تحریک است بنابراین با یک تابع فرد باشد. پس کافی است مخرج $H(s)$ را به دو قسمت فرد و زوج تقسیم کنیم. سپس خواهیم داشت.

$$H(s) = \frac{A(s)/B(s)}{\frac{C(s)}{B(s)}+1} \qquad Y_{22} = \frac{C(s)}{B(s)}$$

(انتخاب کاور مثل حالت قبل است)

مثال:

$$H(s) = \frac{s^2}{s^2+3s+1} \Rightarrow H(s) = \frac{s^2/3s}{\frac{s^2+1}{3s}+1} \Rightarrow Y_{22} = \frac{s}{3} + \frac{1}{3s}$$

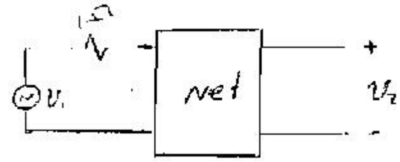
مثال:

$$H(s) = \frac{Ks}{s^3+s^2+3s+1} = \frac{Ks/s^2+1}{\frac{s^3+3s}{s^2+1}+1} \Rightarrow y_{22} = \frac{s^3+3s}{s^2+1}$$

کار I و II

مثال:

$K=3$



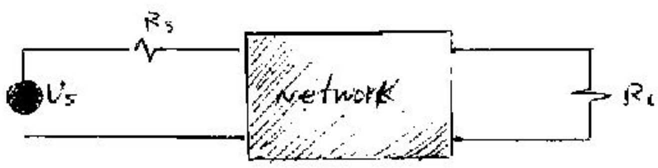
$$H(s) = \frac{s^2}{s^3+s^2+3s+1}$$

$$H(s) = \frac{Z_{12}}{Z_{11}+R} \qquad H(s) = \frac{s^2/s^3+3s}{\frac{s^2+1}{s^3+3s}+1} \qquad Z_{11} = \frac{s^2+1}{s^3+3s}$$

کار I و II

---

* معمولاً یک فیلتر بین منبع و بار قرار می‌گیرد زیرا هر منبع دارای یک مقاومت خروجی است پس در عمل بیشتر با مدارهایی سروکار داریم که $R_s \neq 0$ و $R_L \neq 0$ یعنی بصورت زیر:



$$H(s) = \frac{V_o}{V_s}$$

ابتدا پارامترهای ضریب انتقال و ضریب انعکاس را تعریف می‌کنیم.

ضریب انتقال $T^2 = \frac{\text{توان خروجی که در مقاومت بار تلف می‌شود}}{\text{حداکثر توان قابل دسترس}} = \frac{P_o}{P_a} = \frac{|V_o(j\omega)|^2/R_L}{|V_i(j\omega)|^2/4R_s}$

$$\Rightarrow \boxed{|T(j\omega)|^2 = \frac{4R_s}{R_L}|H(j\omega)|^2} \qquad \boxed{|\rho(j\omega)|^2 = 1-|T(j\omega)|^2}$$

$\rho(j\omega)$ ضریب انعکاس است

میتوان ثابت کرد که

$$\rho(j\omega) = \frac{Z_s - Z_{in}}{Z_s + Z_{in}} \qquad Z_s = 1 \Rightarrow$$

$$\rho(j\omega) = \frac{1-Z_{in}(j\omega)}{1+Z_{in}(j\omega)} \Rightarrow Z_{in}(j\omega) = \frac{1+\rho(j\omega)}{1-\rho(j\omega)}$$

$$\text{OR} \quad Z_{in}(j\omega) = \frac{1-\rho(j\omega)}{1+\rho(j\omega)}$$

پس روش حل چنین شد که ابتدا $T(j\omega)$ را داشته باشیم سپس از آن $\rho(j\omega)$ را بدست آوریم.

$$\boxed{Z_{in}(s) = \frac{1-\rho(s)}{1+\rho(s)}}$$

با استفاده از $\rho(j\omega)$ میتوان Z_{in} را محاسبه کرد و مدار را سنتز کرد.

$$\text{or} \quad \boxed{Z_{in}(s) = \frac{1+\rho(s)}{1-\rho(s)}} \quad \& \quad \boxed{|\rho(j\omega)|^2 = 1 - \frac{4R_S}{R_L}|H(j\omega)|^2}$$

مثال:

$$\frac{V_o}{V_S} = H(s) = \frac{K}{s^2+3s+3} \qquad H(s)\Big|_{s=0} = \frac{R_L}{R_L+R_S} = \frac{1}{2} = \frac{K}{3} \Rightarrow K = \frac{3}{2}$$

$$|T(j\omega)|^2 = \frac{4R_S}{R_L}|H(j\omega)|^2 \Rightarrow |\rho(j\omega)|^2 = 1 - \frac{4R_S}{R_L}|H(j\omega)|^2$$

$$\Rightarrow \rho(s)\cdot\rho(-s) = 1 - 4\ \frac{3/2}{s^2+3s+3}\cdot\frac{3/2}{s^2-3s+3} = 1 - \frac{9}{(s^2+3s+3)(s^2-3s+3)}$$

$$\Rightarrow \rho(s)\cdot\rho(-s) = \frac{s^4-3s^2}{(s^2+3s+3)(s^2-3s+3)} = \frac{s(s+\sqrt{3})(-s+\sqrt{3})(-s)}{(s^2+3s+3)(s^2-3s+3)}$$

$$\Rightarrow \rho(s) = \frac{s(s+\sqrt{3})}{s^2+3s+3}$$

یکی از انتخاب‌های ممکن برای ρ میتواند بصورت روبرو باشد.

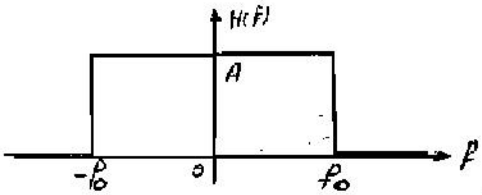
$$\Rightarrow Z_{in}(s) = \frac{1+\rho(s)}{1-\rho(s)} = \frac{2s^2+(3+\sqrt{3})s+3}{(3-\sqrt{3})s+3}$$

با زدن دو جواب‌ها را

حال میتوان بصورت کاور I سنتز کرد زیرا $\underbrace{\text{این}}_{H(s)}$ فیلتر LP است. ......

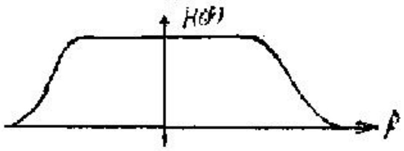
APROXIMATION

اساس کار وطراحی هر نوع فیلتری بر فیلتر پایین گذر (LPF) است بنابراین ابتدا فیلترهای پایین گذر را بررسی می‌کنیم و سپس بر مبنای آن فیلترهای بالاگذر - میان گذر و بالاگذر تبدیل می‌کنیم.



یک فیلتر پایین گذر ایده‌آل را با مشخصه فرکانسی روبرو است.

میدانیم اگر پاسخ زمانی فیلتر فوق را بدست بیاوریم (اگر تابع sinc است)
مشاهده می‌شود که چنین سیستمی نمی‌تواند وجود داشته باشد و به عبارتی دیگر تابع فوق یک تابع تحلیلی نیست



بهمین دلیل هست در طراحی فیلترها تقریب استفاده می‌شود.
مثلاً شکل مقابل میتواند تقریبی برای یک فیلتر پایین گذر باشد.
حال تقریبهای مختلف را بررسی می‌کنیم

* تقریب باتروث (Butterworth approximation)

تقریب باتروث بصورت مقابل است

$$|H(j\omega)|^2 = \frac{1}{1+\omega^{2n}}$$

که بازای n های بزرگ سمت ایده‌آل میل خواهد کرد.
هدف در اینجا بدست آوردن $H(s)$ و نهایتاً تحقق مدار است.
بعنوان مثال $H(s)$ را برای باتروث درجه 3 می‌سازیم

$$|H(j\omega)|^2 = \frac{1}{1+\omega^6}$$

$$\Rightarrow H(s)\cdot H(-s) = \frac{1}{1-s^6} = \frac{1}{1-s^3}\cdot\frac{1}{1+s^3} = \frac{1}{(1-s)(1+s+s^2)(1+s)(1-s+s^2)}$$

$$\Rightarrow H(s) = \frac{1}{s^3+2s^2+2s+1}$$

یکی از راههای محاسبه $H(s)$ بدست آوردن قطبهای $|H(j\omega)|^2$ است.

$$H(s)\cdot H(-s) = \frac{1}{Q(s)\cdot Q(-s)}$$

$$Q(s)\cdot Q(-s) = 1+(s^2)^n \qquad \text{IF } n=2k$$ زوج باشد

اگر n فرد باشد خواهیم داشت

$$Q(s)\cdot Q(-s) = 1+s^{2n}$$

$$1+S^{2n}=0 \Rightarrow S^{2n}=-1 = \cos(2k-1)\pi + j\sin(2k-1)\pi$$

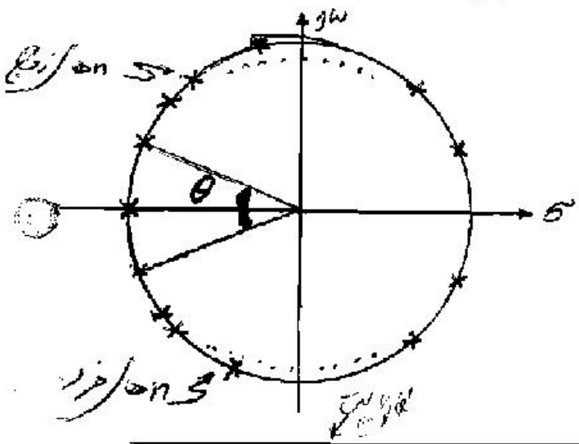
$$\Rightarrow S = \cos\frac{2k-1}{2n}\pi + j\sin\frac{2k-1}{2n}\pi = \cos\theta_k + j\sin\theta_k$$

حال باید ریشه‌های $Q(s)$, $Q(-s)$ را از هم جدا کنیم.

$$\theta_k = \frac{\pi}{2n}, \frac{3\pi}{2n}, \frac{5\pi}{2n}, \cdots$$

* فاصله بین دو قطب $\frac{\pi}{n}$ می‌باشد.

پس یک دایره دارای $2N$ ریشه است.



n زوج

$$\theta = \frac{\pi}{n}$$

که قطبهای طرف چپ قطبهای $Q(s)$ می‌باشند.

در فرمولهای بالا مبنای زاویه جهت مثبت محور σ است.

ولی اگر مبنا را جهت منفی محور σ بگیریم خواهیم داشت.

* n های زوج

$$\boxed{S = +\cos\theta_k + j\sin\theta_k \qquad \theta_k = \frac{2k-1}{2n}\pi}$$

برای n های فرد خواهیم داشت.

$$Q(s)\cdot Q(-s) = 1-s^{2n} = 0$$

$$\Rightarrow 1-s^{2n}=0 \Rightarrow s^{2n}=1 = \cos 2k\pi + j\sin 2k\pi$$

$$\Rightarrow S = \cos\frac{k}{n}\pi + j\sin\frac{k}{n}\pi$$

باز اگر مبنای زاویه را جهت منفی محور σ بگیریم خواهیم داشت.

* n های فرد.

$$\boxed{S = -\cos\theta_k + j\sin\theta_k \qquad \theta_k = \frac{k}{n}\pi}$$

مکان قطبها برای n های فرد

در شکل بالا نشان داده شده است. ملاحظه می‌شود که برای n های فرد همیشه یک ریشه در $S=-1$ خواهیم داشت

$$\boxed{H(s) = \frac{1}{Q(s)} = \frac{1}{\prod_{i=1}^{n}(s-P_i)}}$$

وقتی ریشه‌های $Q(s)$ معلوم شد می‌توان نوشت

وقتی $H(s)$ محاسبه شد می‌توان یک مدار که دارای تابع $H(s)$ باشد طرح کرد که این کار را بعداً خواهیم کرد.

$H(s) = \frac{1}{B_n(s)}$		
$B_n(s) = \sum_{k=0}^{n} a_k s^k$	$a_0 = 1$	$a_{k+1} = \left(\cos\frac{k\pi}{2n} / \sin\frac{(k+1)\pi}{2n}\right) a_k$

* راه دیگری برای تعیین H(s) بصورت زیر است * * * * * *

ضرایب چندجمله‌ای $B_n(s)$ متقارن هستند پس کافی است $\frac{n+1}{2}$ (برای n های فرد) و $\frac{n}{2}+1$ (برای n های زوج) ضرایب را حساب کنیم.

در زیر ضرایب $B_n(s)$ و مخرج H(s) برای n از 2 تا 8 آورده شده است.

$$H(s) = \frac{1}{B_n(s)}$$

$n=2 \qquad B_n(s) = s^2 + \sqrt{2}\, s + 1$

$n=3 \qquad B_n(s) = s^3 + 2s^2 + 2s + 1$

$n=4 \qquad B_n(s) = s^4 + 2.613 s^3 + 3.414 s^2 + 2.613 s + 1$

$n=5 \qquad B(s) = s^5 + 3.236 s^4 + 5.236 s^3 + 5.236 s^2 + \cdots$

$n=6 \qquad B_n(s) = s^6 + 3.857 s^5 + 7.464 s^4 + 9.141 s^3 + \cdots$

$n=7 \qquad B_n(s) = s^7 + 4.494 s^6 + 10.097 s^5 + 14.59 s^4 + \cdots$

$n=8 \qquad B_n(s) = s^8 + 5.125 s^7 + 13.137 s^6 + 21.84 s^5 + 25.688 s^4 + \cdots$

اگر از روابط بدست آمده در روش اول برای بدست آوردن H(s) کمک بگیریم متوجه می‌شویم که همه ریشه‌ها مزدوج هستند بجز یک ریشه در $s=-1$ برای n های فرد پس می‌توان روابط آن قسمت را بصورت ساده‌تر زیر تبدیل کرد.

$$H(s) = 1 \Big/ \prod_{i=1}^{n} (s - s_k), \quad s_k = -\cos\theta_k + j\sin\theta_k$$

$\theta_k = \frac{2k-1}{2n}\pi$ برای n های زوج — از قبل ثابت کردیم

$\theta_k = \frac{k}{n}\pi$ برای n های فرد

$$(s - s_k)(s - s_k^*) = s^2 + 2\cos\theta_k\, s + 1$$

$\Rightarrow \boxed{H(s) = \prod_{i=1}^{n/2} \left(\frac{1}{s^2 + 2\cos\theta_k s + 1} \right)}$ برای n های زوج

$\Rightarrow \boxed{H(s) = \left[\prod_{i=1}^{\frac{n-1}{2}} \frac{1}{s^2 + 2\cos\theta_k s + 1} \right] \cdot \frac{1}{s+1}}$ برای n های فرد

* حال میخواهیم درجه فیلتر یعنی n را برای مشخصات مختلف حساب کنیم *

$$|H(j\omega)|^2 = \frac{1}{1+(\omega/\omega_c)^{2n}}$$

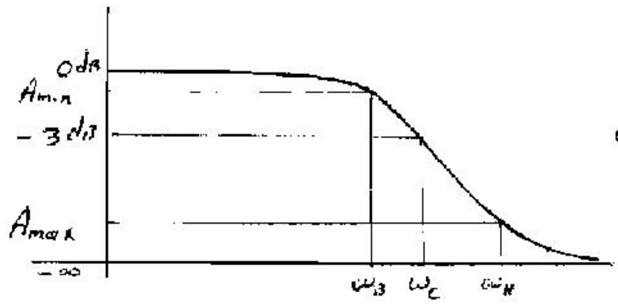
معمولاً وقتی از یک فیلتر خواسته می‌شود یا ω_c یا n آن معلوم است یا دو یا چند پارامتر دیگر را در اختیار ما قرار می‌دهند

A_{min} یعنی تضعیف در یک نقطه از باند عبور

A_{max} تضعیف مورد نیاز در یک نقطه از باند توقف

در واقع A_{min} بیشترین تضعیف مورد قبول و A_{max} کمترین تضعیف مورد قبول هستند.

با توجه به اطلاعات فوق میخواهیم n را حساب کنیم.



$$A = 10\log(1+\omega^{2n}) \quad \text{or} \quad A = 10\log\left[1+(\omega/\omega_c)^{2n}\right]$$

تضعیف $\equiv A$

$$A_{min} = 10\log\left(1+\left(\frac{\omega_B}{\omega_c}\right)^{2n}\right) \qquad A_{max} = 10\log\left(1+\left(\frac{\omega_H}{\omega_c}\right)^{2n}\right) \Rightarrow n = \frac{\log\dfrac{10^{0.1A_{max}}-1}{10^{0.1A_{min}}-1}}{2\log(\omega_H/\omega_B)}$$

$$\Rightarrow \boxed{n = \frac{\log\left[(10^{0.1A_{max}}-1)/(10^{0.1A_{min}}-1)\right]}{2\log(\omega_H/\omega_B)}}$$

پس از محاسبه n میتوان ω_c را محاسبه کرد.

$$A_{min} = 10\log\left[1+\left(\frac{\omega_B}{\omega_c}\right)^{2n}\right]$$

$$\Rightarrow \left(\frac{\omega_B}{\omega_c}\right)^{2n} = 10^{0.1A_{min}} - 1 \Rightarrow \boxed{\omega_c = \frac{\omega_B}{\sqrt[2n]{10^{0.1A_{min}}-1}}}$$

البته احتمال اینکه n یک عدد صحیح درآید خیلی کم است و معمولاً بصورت یک عدد اعشاری بدست می‌آید و از آنجایی که A_{min} حداکثر تضعیف مورد قبول در باند عبور و A_{max} حداقل تضعیف در باند عبور هستند حق نداریم که n کمتر در نظر بگیریم بنابراین همیشه n را عدد صحیح بزرگتر از خود در نظر می‌گیریم.

در این حالت اگر ω_c را با n اصلی (حالت اعشاری) بدست آوریم به دلیل اینکه n گرد شده A_{min} کوچکتر و A_{max} بزرگتر خواهد شد.

ممکن است بگوییم میخواهیم A_{min} ثابت بماند و A_{max} و ω_c تغییر کنند و هر ترکیب دیگری از اینها ممکن است انتخاب شود.

* تقریب چبی‌شف * Cheybyshev Approximation

برعکس فیلتر باترورث این فیلتر در باند عبور دارای ریپل است
این فیلتر دارای مجذور دامنه ای بصورت روبرو است

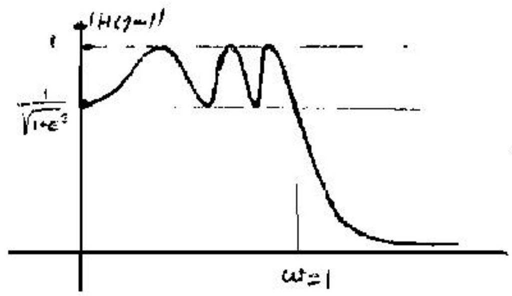
$$\boxed{|H(j\omega)|^2 = \frac{1}{1+\epsilon^2 C_n^2(\omega)}}$$

که $C_n(\omega)$ چندجمله ای درجه nام چبی‌شف است.
و ϵ یک عدد ثابت کوچکتر از واحد است
به ازای $\omega > 1$ خواهیم داشت

$$C_n(\omega) = \cos(n \cos^{-1}\omega)$$

$$C_n(\omega) = \cosh(n \cosh^{-1}\omega)$$

روابط فوق نشان می‌دهد که پاسخ فرکانسی فیلتر چبی‌شف
در باند عبور بصورت نوسانی و در باند توقف بصورت نمایی است
مثلاً در شکل مقابل پاسخ فرکانسی فیلتر به ازای $n=6$ رسم شده است
(البته بعداً بیشتر توضیح خواهیم داد)



در دید اول ممکن است گفته شود که چنین فیلتری با این همه ریپل در باند عبور بدرد چه کاری می‌خورد
ولی اینجا نظر را به این نکته جلب می‌کنیم که منابع اطلاعات خود دارای ریپل هستند و مثلاً هرگاه خود منبع اطلاعات 1 dB ریپل داشته باشد وجود 0.5 dB ریپل در فیلتر هیچ مشکلی بوجود نخواهد آورد. ولی در عوض فیلتر چبی‌شف در ناحیه توقف دارای تضعیف بالاتری نسبت به فیلتر باترورث با همان درجه است.

* نکاتی درباره چندجمله ای های چبی‌شف *

$$C_n(\omega) = \cos(n\cos^{-1}\omega)$$

$$\text{for } \omega > 1 \qquad \cos^{-1}\omega = jz \Rightarrow \cos(jz) = \omega = \frac{e^{j(jz)} + e^{-j(jz)}}{2} = \frac{e^{z}+e^{-z}}{2}$$

$$\Rightarrow \omega = \cosh z \Rightarrow z = \cosh^{-1}\omega \Rightarrow \cos^{-1}\omega = j\cosh^{-1}\omega$$

$$\Rightarrow C_n(\omega) = \cos(nj\cosh^{-1}\omega) \Rightarrow C_n(\omega) = \cosh(n\cosh^{-1}\omega)$$

$$C_n(0) = \cos(n\cos^{-1}0) = \cos\frac{n\pi}{2} \Rightarrow \begin{cases} C_n(0) = 0 & n \text{ odd} \\ C_n(0) = \pm 1 & n \text{ even} \end{cases}$$

$$C_n(1) = \cos(n\cos^{-1}1) = \cos(0) = 1 \qquad \text{for all } n$$

$\Rightarrow \quad \lvert H(j\omega)\rvert \big|_{\omega=0} = 1 \qquad n \text{ odd}$	$\lvert H(j\omega)\rvert \big|_{\omega=0} = \dfrac{1}{\sqrt{1+\varepsilon^2}} \qquad n \text{ even}$

$$\boxed{\lvert H(j\omega)\rvert \big|_{\omega=1} = 1 \quad \text{for all } n}$$

* با کسب یک معادله کلی برای تعیین چندجمله‌ای های چبی شف.

$$C_n(z) = \cos(n \cos^{-1} z)$$

$$\cos^{-1} z = \omega \Rightarrow z = \cos\omega$$

$$\Rightarrow C_n(\cos\omega) = \cos(n\omega) \Rightarrow$$

$$C_{n+1}(\cos\omega) = \cos(n\omega)\cos\omega - \sin(n\omega)\sin\omega$$

$$C_{n-1}(\cos\omega) = \cos(n\omega)\cos\omega + \sin(n\omega)\sin\omega$$

$$\Rightarrow C_{n+1}(\cos\omega) + C_{n-1}(\cos\omega) = 2\cos\omega\cos(n\omega)$$

$$= 2\cos\omega\, C_n(\cos\omega)$$

$$\Rightarrow \boxed{C_{n+1}(z) = 2z\,C_n(z) - C_{n-1}(z)}$$

از طرفی داریم:

$$\boxed{C_0(z) = 1 \quad , \quad Z_1(z) = Z}$$

با توجه به معادله کلی فوق می‌توان چندجمله‌ای های چبی شف را تا هر درجه‌ای محاسبه کرد.

* روابط فوق هم در باند عبور و هم در باند توقف معتبرند *

$$C_2(z) = 2z^2 - 1$$

$$C_3(z) = 4z^3 - 3z$$

$$C_4(z) = 8z^4 - 8z^2 + 1$$

$$C_5(z) = 16z^5 - 20z^3 + 5z$$

$$C_6(z) = 32z^6 - 48z^4 + 18z^2 + 1$$

$$C_7(z) = 64z^7 - 112z^5 + 56z^3 - 7z$$

$$C_8(z) = 128z^8 - 256z^6 + 160z^4 - 32z^2 + 1$$

$$C_9(z) = 256z^9 - 576z^7 + 432z^5 - 120z^3 + 9z$$

$$C_{10}(z) = 512z^{10} - 1280z^8 + 1120z^6 - 400z^4 + 50z^2 - 1$$

$$C_n(0) = \begin{cases} 0 & n \text{ odd} \\ \pm 1 & n \text{ even} \end{cases} \qquad C_n(1) = 1 \quad \text{for all } n$$

خاصیت چندجمله‌ای‌های چبی‌شف این است که در فاصله ۱- و ۱ مقدار $C_n(z)$ بین ۱ و ۱- نوسان می‌کند

$$|C_n| \leq 1 \quad \text{for} \quad -1 \leq z \leq 1$$

ولی خارج از این فاصله با دور شدن از ۱ و ۱- مقدار $|C_n|$ به سرعت افزایش می‌یابد.
و این مسئله برای مقاصد ما خیلی مفید است.

Ripple یک تابع نوسانات در ناحیه عبور ریپل نامیده می‌شود داریم.

$$R = 1 - \frac{1}{\sqrt{1+\epsilon^2}} \simeq \epsilon^2/2$$ زیرا $\epsilon \ll 1$ است.

$$\boxed{R = \epsilon^2/2}$$

- در منحنی $|H(j\omega)|$ در نقاط ماکزیمم خواهیم داشت $C_n(j\omega)=0$ و در نقاط مینیمم خواهیم داشت $C_n^2(j\omega)=1$
مثلاً برای چبی‌شف درجه 6 داریم.

$$C_n(j\omega)=0 \Rightarrow \cos(6\cos^{-1}\omega)=0 \Rightarrow 6\cos^{-1}\omega = \frac{2k+1}{2}\pi \Rightarrow \omega = \cos\frac{2k+1}{12}\pi$$

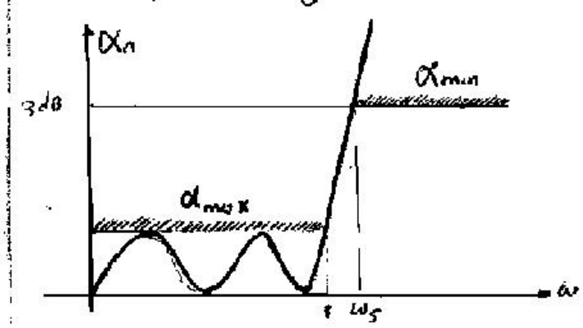
$$\Rightarrow \omega = 0.259 \qquad \omega = 0.707 \qquad \omega = 0.9659 \ldots$$

$$C_n(j\omega) = \pm 1 \Rightarrow 6\cos^{-1}\omega = k\pi \Rightarrow \omega = \cos\frac{k\pi}{6}$$

$$\Rightarrow \omega = 0 \qquad \omega = 0.5 \qquad \omega = 0.866 \qquad \omega = 1$$

$$\alpha_n = 10\log[1+\epsilon^2 C_n^2(\omega)]$$

* attenuation *



- ممکن است به جای مشخص کردن ϵ ماکزیمم تضعیف در باند عبور داده شود در چنین حالتی

$$\alpha_{max} = 10\log(1+\epsilon^2) \Rightarrow \boxed{\epsilon = \sqrt{10^{0.1\alpha_{max}}-1}}$$

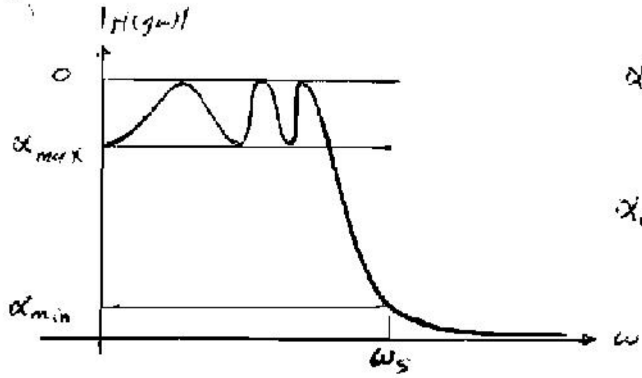
محاسبه فرکانس 3dB

چون $\omega_s > 1$

$$\cosh(n\cosh^{-1}\omega_s) = \frac{1}{\epsilon}$$

$$\Rightarrow \boxed{\omega_s = \cosh\left[\frac{1}{n}\cosh^{-1}\left(\frac{1}{\epsilon}\right)\right]}$$

برای فیلتر چبی‌شف نیز مثل فیلتر باترورث تضعیف در یک نقطه از باند توقف داده می‌شود در واقع این تضعیف کمترین تضعیف مورد قبول برای فیلتر است همچنین مقدار ریپل و یا ماکزیمم تضعیف در باند عبور مشخص است در چنین شرایطی می‌خواهیم درجه فیلتر را بدست آوریم.



$$\alpha_{max} = 10\log(1+\epsilon^2) \Rightarrow \boxed{\epsilon = \sqrt{10^{0.1\alpha_{max}} - 1}}$$

$$\alpha_{min} = 10\log\{1+\epsilon^2[\cosh(n\cosh^{-1}\omega_s)]^2\}$$

$$\Rightarrow \frac{\epsilon^2}{\epsilon^2}[\cosh(n\cosh^{-1}\omega_s)]^2 = \frac{10^{0.1\alpha_{min}}-1}{\epsilon^2}$$

$$\Rightarrow [\cosh(n\cosh^{-1}\omega_s)]^2 = \frac{10^{0.1\alpha_{min}}-1}{10^{0.1\alpha_{max}}-1}$$

$$\Rightarrow \boxed{n = \frac{\cosh^{-1}\left[(10^{0.1\alpha_{min}}-1)/(10^{0.1\alpha_{max}}-1)\right]^{1/2}}{\cosh^{-1}\omega_s}}$$

با مشخص بودن n و ϵ پاسخ مدار $[H(j\omega)]$ مشخص خواهد شد وظیفه بعدی ما نشان دادن محل قطبی‌ها می‌باشد.

---

* location of the chebyshev poles *

$$|H(j\omega)|^2 = \frac{1}{1+\epsilon^2 C_n^2(\omega)} \Rightarrow H(s)\cdot H(-s) = \frac{1}{1+\epsilon^2 C_n^2(\frac{s}{j})}$$

$$1+\epsilon^2 C_n^2(\tfrac{s}{j}) = 0 \Rightarrow C_n(\tfrac{s}{j}) = \pm\frac{j}{\epsilon}$$

$$\Rightarrow \underbrace{\cos[n\cos^{-1}(\tfrac{s}{j})] = \pm j/\epsilon}_{\text{* هدف حل این معادله است *}} \qquad \cos^{-1}\frac{s}{j} = w = u+jv$$

$$\Rightarrow \cos nw = \pm j/\epsilon \Rightarrow \cos(nu+jnv) = \pm j/\epsilon$$

$$\Rightarrow \cos nu\cos jnv - \sin nu \sin jnv = 0 \pm j/\epsilon$$

$$\cos jnv = \cosh nv \qquad \sin jnv = \frac{e^{j(jnv)} - e^{-j(jnv)}}{j2} = j\sinh nv$$

$$\Rightarrow \cos nu\cosh nv - j\sin nu\sinh nv = 0 \pm j/\epsilon$$

$$\Rightarrow \cos nu\cosh nv = 0 \Rightarrow \cos nu = 0 \Rightarrow nu = \frac{2k+1}{2}\pi$$

$$\Rightarrow \boxed{u = \frac{2k+1}{2n}\pi} \quad \Rightarrow \quad \sin nu = \pm 1$$

$$\Rightarrow \sinh nv = 1/\epsilon \quad \Rightarrow \quad \boxed{v = \frac{1}{n}\sinh^{-1}\frac{1}{\epsilon}} \qquad \boxed{a = \frac{1}{n}\sinh^{-1}\frac{1}{\epsilon}}$$

$$\Rightarrow \quad v = \frac{1}{n}\sinh^{-1}\frac{1}{\epsilon} = a$$

حال که مقادیر u و v را محاسبه کردیم برای بدست آوردن ریشه‌های معادله را تعیین می‌کنیم.

$$\cos^{-1}\left(\frac{s}{j}\right) = \omega \Rightarrow j\cos\omega = s \quad \Longrightarrow \quad s_k = j\cos(u+jv)$$

$$\Rightarrow \quad s_k = j\cos\left(\frac{2k+1}{2n}\pi + ja\right) = j\left[\cos\frac{2k+1}{2n}\pi\cosh a - j\sin\frac{2k+1}{2n}\pi\sinh a\right]$$

$$\Rightarrow \quad s_k = \sinh a\sin\frac{2k+1}{2n}\pi + j\cosh a\cos\frac{2k+1}{2n}\pi$$

$s_k = \sigma_k + j\omega_k$	$a = \frac{1}{n}\sinh^{-1}\frac{1}{\epsilon}$	* * * *
$\sigma_k = -\sinh a\sin\frac{2k+1}{2n}\pi$	$\omega_k = \cosh a\cos\frac{2k+1}{2n}\pi$	* * * *

* ریشه‌های فیلتر چبی‌شف * ↑ (نقاط قطبی طرف چپ صفحه s انتخاب شده‌اند)

$$\left(\frac{\sigma_k}{\sinh a}\right)^2 + \left(\frac{\omega_k}{\cosh a}\right)^2 = 1$$

(معادله بیضی)

رابطه روبرو نشان می‌دهد که قطبهای فیلتر چبی‌شف روی یک بیضی قرار دارند

* فرکانس 3dB در فیلتر چبی‌شف *

$$|H(j\omega)|^2 = \frac{1}{1+\epsilon^2 C_n^2(\omega)} \Rightarrow \frac{1}{1+\epsilon^2 C_n^2(\omega_{1/2})} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow C_n^2(\omega_{1/2}) = \frac{1}{\epsilon^2} \Rightarrow \cosh\left(n\cosh^{-1}\omega_{1/2}\right) = \frac{1}{\epsilon} \Rightarrow \boxed{\omega_{1/2} = \cosh\left(\frac{1}{n}\cosh^{-1}\frac{1}{\epsilon}\right)}$$

از آنجایی که معمولاً $\epsilon \ll 1$ است میتوان رابطه را ساده‌تر کرد.

$$\alpha = \frac{1}{n}\sinh^{-1}\frac{1}{\epsilon} \Rightarrow \frac{1}{\epsilon} = \sinh n\alpha$$

$$= \omega_{1/2} = \cosh\left(\frac{1}{n}\cosh^{-1}(\sinh n\alpha)\right)$$

$$-\sinh^2 n\alpha + \cosh^2 n\alpha = 1 \Rightarrow \cosh n\alpha = \left(1+\frac{1}{\epsilon^2}\right)^{1/2} \simeq \frac{1}{\epsilon} = \sinh n\alpha$$

$$\Rightarrow \boxed{\omega_{1/2} \simeq \cosh \alpha}$$

با نرمالیزه کردن فرکانس خواهیم داشت.

$$\begin{cases} \sigma_k' = -\tanh\alpha \sin\frac{2k-1}{2n}\pi \\ \omega_k = \cos\frac{2k-1}{2n}\pi \end{cases}$$

مقایسه چبی شف و باتروورث در فرکانسهای بالا: $\omega \gg \omega_c$ or $\omega \gg 1$

تضعیف

$$\omega \gg \omega_c \Rightarrow |H(s)|^2 = \frac{1}{1+(\omega)^{2n}} = \omega^{-2n} \Rightarrow A = 20\lg\omega^n$$

$$\Rightarrow A = 20n\lg\omega$$

$$\boxed{A_b = 20n\ \mathrm{dB/decade}}$$

$$|H(j\omega)|^2 = \frac{1}{1+\epsilon^2 C_n^2(\omega)} \qquad C_n(\omega) \text{ for } \omega \gg 1 \equiv 2^{n-1}\omega^n$$

$$|H(j\omega)|^2 \cong \frac{1}{\epsilon^2 C_n^2(\omega)} \Rightarrow A = 20\lg[\epsilon\cdot 2^{n-1}\omega^n] = 20n\lg\omega + 20\lg(\epsilon\cdot 2^{n-1})$$

$$\Rightarrow \boxed{A_{ch} = 20n\lg\omega + 6(n-1) + 20\lg\epsilon} \Rightarrow$$

$$A_{ch} - A_b = 6(n-1) + 20\lg\epsilon$$

هرگاه بخواهیم چبی شف و باتروورث هم مرتبه در فرکانسهای خیلی بالا را با هم مقایسه کنیم
$6(n-1)+20\lg\epsilon$ برابر صفر گردد، به ازای هر مرتبه‌ای می‌توان ϵ را پیدا کرد.

$$\boxed{A_{ch} - A_b = 6(n-1) + 20\lg\epsilon}$$