

فهرست

- 1- جدول توزیع فراوانی طبقه بندی نشده 1
- 2- دامنه تغییرات 1
- 3- شاخصهای مرکزی یا پارامترهای مکانی 1
- 1-3- میانگین حسابی (Mean) 1
- الف- اگر داده‌ها تکراری نباشند 1
- ب- اگر هر یک از داده‌ها تکراری باشند 1
- 3-2- میانه (Median) 2
- الف - تعیین میانه در جدول توزیع فراوانی دسته بندی نشده (طبقه بندی نشده) 2
- ب- تعیین میانه در جدول توزیع فراوانی طبقه بندی شده 3
- 3-3- مد یا نما 5
- 3-4- چارک‌ها (Quantile) 6
- 3-4-1- تعیین چارک اول و سوم در یک سری داده 6
- الف - تعیین چارک‌ها در جدول توزیع فراوانی طبقه بندی نشده 7
- ب- تعیین چارک‌ها در جدول توزیع فراوانی طبقه بندی شده 7

1- جدول توزیع فراوانی طبقه بندی نشده

از این جدول برای تنظیم داده های گسسته که تنوع داده ها اندک است استفاده می کنند و فراوانی هر داده در مقابل آن ثبت می شود.

مثال 1. برای نمرات یک کلاس 30 نفری داریم:

نمرات = X_i	تعداد دانش آموزان = F_i
8	2
10	1
12	6
13	5
17	6
19	8
20	2

2- دامنه تغییرات

اختلاف بین بزرگترین داده آماری و کوچکترین داده آماری را دامنه تغییرات گویند.

$$R = X_{\max} - X_{\min}$$

چنانچه داده های آماری با تقریب کمتر از واحد گرد شده باشند دامنه تغییرات برابر است با:

$$R = X_{\max} - X_{\min} + 1$$

3- شاخصهای مرکزی یا پارامترهای مکانی**3-1- میانگین حسابی (Mean)**

الف- اگر داده‌ها تکراری نباشند

$$\bar{X} = \frac{\sum X_i}{n}$$

ب- اگر هر یک از داده ها تکراری باشند

$$\bar{X} = \frac{\sum F_i X_i}{N}$$

مثال 2. در جدول زیر مطلوب‌ست میانگین حسابی: $\bar{X} = \frac{654}{50} = 13.08$

نماینده طبقات			
حدود طبقات	فراوانی	X_i	$F_i X_i$
2-4	2	3	6
5-7	3	6	18
8-10	5	9	45
11-13	10	12	120
14-16	25	15	375
17-19	5	18	90

$$\sum F_i = 50 \quad \sum F_i X_i = 654$$

3-2 - میان‌ه (Median)

عددی را که در یک مجموعه از اعداد مرتب شده آماری درست در وسط داده‌ها قرار گیرد، میان‌ه گویند. برای تعیین میان‌ه در یک سری داده‌های آماری ابتدا داده‌ها را به ترتیب صعودی یا نزولی مرتب می‌کنیم. در صورتیکه تعداد داده‌ها فرد باشد، عددی که در وسط قرار می‌گیرد عدد میان‌ه بوده و اگر تعداد داده‌ها زوج باشد نصف مجموع دو عددی که در وسط قرار گرفته عدد میان‌ه را مشخص می‌کند، میان‌ه را با

\tilde{X} نشان می‌دهیم.

مثال 3.

$$\begin{array}{ll} 4,7,6,9,1,5,3 & 10,12,16,14,26,5 \\ 1,3,4,5,6,7,9 & 5,10,12,14,16,26 \\ \tilde{X} = 5 & \tilde{X} = \frac{12+14}{2} = 13/5 \end{array}$$

الف - تعیین میان‌ه در جدول توزیع فراوانی دسته بندی نشده (طبقه بندی نشده)

ابتدا، $\sum F_i$ را به دست آورده و N می‌نامیم. سپس اولین ردیفی را که فراوانی تجمعی آن بزرگتر یا

مساوی $\frac{N}{2}$ است را به عنوان ردیف میان‌ه معین می‌کنیم. داده مربوط به این ردیف میان‌ه خواهد بود.

مثال 4.

X_i	F_i	CF_i
4	3	3
6	2	5
7	4	9
10	1	10
11	3	13
16	2	15
20	1	16

ردیف میانه ←

$$N = \sum F_i = 16$$

$$\frac{N}{2} = 8$$

$$\tilde{X} = 7$$

ب- تعیین میانه در جدول توزیع فراوانی طبقه بندی شده

در جدول توزیع فراوانی دسته بندی شده ابتدا مثل قبل ردیف میانه را مشخص کرده و سپس میانه

را از فرمول زیر به دست می آوریم:

$$\tilde{X} = L + \frac{\frac{N}{2} - CF_{i-1}}{F_i} \times C$$

که در این فرمول

$$\tilde{X} = \text{میانه}$$

L = کوچکترین عدد طبقه میانه دار (در صفات پیوسته کرانه پایین و در صفات گسسته حد پایین

طبقه میانه دار)

$$CF_{i-1} = \text{فراوانی تجمعی طبقه ماقبل طبقه میانه دار}$$

$$F_i = \text{فراوانی طبقه میانه دار}$$

$$C = \text{فاصله طبقات جدول (1+ حد پایین - حد بالا)}$$

مثال 5. در جدول ذیل میانۀ را مشخص کنید.

الف - اگر داده‌ها پیوسته باشند.

$$\frac{N}{2} = \frac{50}{2} = 25$$

$$\tilde{X} = 49/5 + \frac{25-20}{6} \times 5 = 53/66$$

ب- اگر داده‌ها گسسته باشند.

$$\frac{N}{2} = \frac{50}{2} = 25$$

$$\tilde{X} = 50 + \frac{25-20}{6} \times 5 = 54.167$$

	F_i	FC_i
40-44	12	12
45-49	8	20
50-54	6	26
55-59	10	36
60-64	4	40
65-69	10	50

ردیف میانۀ ←

نکته: اگر در ردیف فراوانی‌های تجمعی عدد $\frac{N}{2}$ عیناً وجود داشته باشد آنگاه کرانه بالای طبقه

میانۀ دار را میانۀ بدانید.

مثال 6.

	2-4	5-7	8-10	11-13	14-16	17-19
F_i	2	3	5	15	20	5
FC_i	2	5	10	25	45	50

$$\frac{N}{2} = \frac{50}{2} = 25$$

طبقه میانۀ دار ↑

$$\tilde{X} = 13/5$$

نکته: اگر در یک جدول توزیع فراوانیهای طبقه بندی شده مربوط به صفات پیوسته، مجموع

فراوانیهای طبقه ماقبل میانۀ دار برابر فراوانیهای طبقات ما بعد طبقه میانۀ دار باشد آنگاه نماینده

طبقه میانۀ دار را میانۀ خواهیم دانست.

مثال 7. جدول زیر مربوط به اندازه قد دانشجویان یک کلاس می باشد. میانۀ را مشخص کنید.

	10-14	15-19	20-24	25-29	30-34	35-69
F_i	4	10	6	16	12	8
CF_i	4	14	20	36	48	56

طبقه میانۀ دار ↑

$$\frac{N}{2} = \frac{56}{2} = 28$$

$$\begin{aligned} \text{مجموع فراوانی های قبل از طبقه میانه دار} &= 4+10+6=20 \\ \text{مجموع فراوانی های بعد از طبقه میانه دار} &= 12+8=20 \end{aligned} \Rightarrow \tilde{X} = \frac{25-29}{2} = 27$$

3-3- مد یا نما

در اعداد آماری، عددی که بیشترین تکرار (فراوانی) را داشته باشند، نما نامیده می شود. لذا یک نمونه آماری می تواند نما داشته باشد یا بیش از یک نما داشته باشد.

مثال 8.

1,1,2,2,3,4	1,1,1,2,2,2,3,4,5,5
Mode = 2	Mode = 1,2
1,2,3,4,5,6,7	1,1,1,2,2,2,3,3,3
مد ندارد	مد ندارد

- تعیین مد در جدول توزیع فراوانی های دسته بندی شده

ابتدا طبقه ای که بیشترین فراوانی را دارد به عنوان طبقه نمادار مشخص می کنیم و سپس مد را از رابطه زیر به دست می آوریم:

$$\text{Mode} = L + \frac{d_1}{d_1 + d_2} \times C$$

که در آن

M = نما

d₁ = تفاضل فراوانی طبقه نمادار با فراوانی طبقه ما قبلd₂ = تفاضل فراوانی طبقه نمادار با فراوانی طبقه ما بعد

C = فاصله طبقات

L = کوچکترین عدد طبقه نمادار (کرانه پایین)

مثال 9.

	10-19	20-29	30-39	40-49	50-59
F _i	12	17	20	40	10

طبقه مد دار ↑

$$\text{Mode} = 39/5 + \frac{20}{20+30} \times 10 = 43/5$$

نکته: اگر در جدول توزیع فراوانی ها فراوانی طبقات ماقبل و مابعد طبقه نمادار مساوی باشند، نماینده طبقه نمادار را نما بدانید.

فراوانی طبقه مابعد = فراوانی طبقه مابعد

مثال 10.

	10-12	13-15	16-18	19-21	22-24
F_i	10	12	8	16	8

$$\text{Mode} = \frac{19+21}{2} = 20$$

طبقه نما دار ↑

3-4- چارک ها (Quantile)

سه نوع چارک داریم: چارک اول (Q_1)، چارک دوم (Q_2) و چارک سوم (Q_3)

الف- چارک اول: عددی که در یک مجموعه از داده های آماری مرتب شده، مرز 25% داده ها را مشخص کند چارک اول است. بنابراین می توان ادعا کرد که 25% داده ها از نقطه Q_1 کوچکتر و 75% داده ها از این نقطه بزرگتراند.

ب- چارک دوم: همان میانه است.

ج- چارک سوم: نقطه یا عددی که در یک مجموعه از اعداد مرتب شده آماری مرز 75% داده ها را نشان دهد چارک سوم است. یعنی نقطه ای که 75% داده ها از آن کوچکتر و 25% داده از آن بزرگتراند.

3-4-1- تعیین چارک اول و سوم در یک سری داده

ابتدا داده های آماری را به صورت صعودی از چپ به راست مرتب می کنیم. سپس اعداد را به 2 نیم تقسیم می کنیم. میانه نیمه سمت چپ را چارک اول و میانه اعداد سمت راست را چارک سوم می نامند و خود میانه اعداد همان چارک دوم می باشد.

مثال 11.

$$\begin{array}{ccc}
 14,16,12,17,20,19,17,11,10,18 \\
 10,11,12,14, 16,17,17, 18,19,20 \\
 \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \\
 \overline{Q_1=12} \quad \overline{Q_2=16/5} \quad \overline{Q_3=18} \\
 \\
 7,4,2,1,3,5,6 \\
 1,2,3, 4,5, 6,7 \\
 \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \\
 \overline{Q_1=2} \quad \overline{Q_2=4} \quad \overline{Q_3=6}
 \end{array}$$

الف - تعیین چارک ها در جدول توزیع فراوانی طبقه بندی نشده

ابتدا فراوانی تجمعی را حساب می کنیم. سپس اولین طبقه ای که فراوانی تجمعی آن بیشتر از $\frac{N}{4}$ است طبقه چارک اول و داده مربوط به آن چارک اول، سپس اولین طبقه ای که فراوانی تجمعی آن بیشتر از $\frac{N}{2}$ است طبقه چارک دوم و داده مربوط به آن چارک دوم و اولین طبقه ای که فراوانی تجمعی آن $\frac{3N}{4}$ است طبقه چارک سوم و داده مربوط به آن چارک سوم است.

مثال 12.

X_i	8	10	15	16	20	28	40	42
F_i	3	8	7	13	12	23	24	10
CF_i	3	11	18	31	43	66	90	100

\uparrow طبقه چارک سوم \uparrow طبقه چارک دوم \uparrow طبقه چارک اول
 $Q_3=40$ $Q_2 = \tilde{X} = 28$ $Q_1=16$

$$N = 100 \quad \frac{N}{4} = 25 \quad \frac{N}{2} = 50 \quad \frac{3N}{4} = 75$$

ب- تعیین چارک ها در جدول توزیع فراوانی طبقه بندی شده

برای تعیین چارک اول ابتدا اولین طبقه ای را که فراوانی تجمعی آن بیشتر از $\frac{N}{4}$ است را به عنوان طبقه چارک اول تعیین کرده و چارک اول را از فرمول زیر به دست می آوریم:

$$Q_1 = L + \frac{\frac{N}{4} - CF_{i-1}}{F_i} \times C$$

چارک دوم را از تعریف میانه به دست می آوریم.

برای تعیین چارک سوم ابتدا اولین طبقه ای را که فراوانی تجمعی آن بیشتر از $\frac{3N}{4}$ است را به

عنوان طبقه چارک سوم تعیین کرده و چارک سوم را از فرمول زیر به دست می آوریم:

اگر داده ها از نوع پیوسته بود L کرانه پایین طبقه چارک دار است. و اگر داده ها از نوع گسسته بود

$$Q_3 = L + \frac{\frac{3N}{4} - CF_{i-1}}{F_i} \times C$$

L حد پایین طبقه چارک دار است.

مثال 13.

	10-14	15-19	20-24	25-29	30-34	35-39
F_i	2	8	6	14	7	3
CF_i	2	10	16	30	37	40

↑ طبقه چارک اول

$$Q_1 = 19/5$$

↑ طبقه چارک دوم و سوم

$$Q_3 = 29/5$$

$$N = 40 \quad \frac{N}{4} = 10 \quad \frac{N}{2} = 20 \quad \frac{3N}{4} = 30$$

$$Q_2 = \tilde{X} = 24/5 + \frac{20-16}{14} \times 5 = 25/92$$

نکته: چون $\frac{N}{4} = 10$ دقیقاً در ستون فراوانی تجمعی می باشد لذا Q_1 کرانه بالای طبقه چارک اول است.

همین نکته در مورد چارک سوم صدق می کند.

فهرست

1	1- تعاریف	1
1	1-1- تعریف جامعه (Population)	1
1	2-1- تعریف پارامتر (Parameter)	1
1	3-1- تعریف نمونه (Sample)	1
2	4-1- اندازه نمونه (Sample Size)	2
2	5-1- تعریف نمونه تصادفی (Random Sample)	2
2	6-1- توزیع نمونه	2
2	7-1- تعریف آماره	2
3	8-1- میانگین نمونه	3
3	9-1- گشتاور نمونه	3
3	10-1- گشتاور r ام حول میانگین	3
4	11-1- واریانس نمونه	4
4	12-1- انحراف معیار نمونه	4
5	13-1- قضیه حد مرکزی	5
5	14-1- توزیع Gamma	5
6	2- توزیع مربع کای (Chi Square)	6
10	3- توزیع t_{student}	10
13	4- توزیع تفاوت بین دو میانگین نمونه	13
16	5- توزیع F	16
19	6- توزیع میانگین جامعه های متنهای	19
22	7- آماره های ترتیبی	22

1- تعاریف**1-1- تعریف جامعه (Population)**

جامعه مجموعه عناصر مورد مطالعه است که ممکن است تعداد آن محدود یا نامحدود باشد. مثلاً جامعه متولدین در یک سال و یا قیمت یک کالا در طول زمان معین.

1-2- تعریف پارامتر (Parameter)

مقدار ثابتی مربوط به جامعه آماری است که معمولاً مورد علاقه بررسی کننده واقع می شود. مثلاً در مورد لامپ ها، متوسط طول عمر لامپ ها.

نکته: موقعی روش های آماری مفید است که پارامتر مجهول داشته باشیم.

X	0	1	2	مدل آمار
P	$\theta/2$	$1-\theta$	$\theta/2$	

X	0	1	2	مدل
P	$1/4$	$1/2$	$1/4$	

1-3- تعریف نمونه (Sample)

در حالاتی که به جامعه دسترسی نداریم و یا به علت محدودیت در زمان و هزینه، بناچار مطالعه و بررسی بر روی بخشی از جامعه به عنوان نمونه انجام می شود. نمونه باید به گونه‌ای باشد که معرف جامعه اصلی بوده و نتایج حاصل از آن بتواند قابل تعمیم به جامعه برگرفته از آن باشد.

الف- نمونه تصادفی از جامعه متناهی بدون جاگذاری

در این حالت نمونه باید طوری انتخاب شود که احتمال انتخاب تمام نمونه‌های ممکن برابر باشد.

مثلا اگر جامعه دارای N عضو است انتخاب هر نمونه n تایی با احتمال $\frac{1}{\binom{N}{n}}$ رخ می‌دهد.

تذکر: معمولا اگر در جریان انتخاب هیچ عاملی یا محدودیت و شرطی دخالت نکند نمونه تصادفی خواهد بود.

ب- نمونه تصادفی از جامعه نامتناهی (متناهی با جاگذاری)

مقدار هر متغیر که در نمونه تصادفی ظاهر می‌شود مربوط به یک متغیر تصادفی است و این متغیر دارای یک توزیع است.

4-1- اندازه نمونه (Sample Size)

تعداد افراد نمونه را حجم نمونه یا اندازه نمونه می‌نامند.

5-1- تعریف نمونه تصادفی (Random Sample)

متغیرهای تصادفی x_1, x_2, \dots, x_n تشکیل یک نمونه تصادفی به اندازه n می‌دهند اگر:

1- هم توزیع باشند.

2- از یکدیگر مستقل باشند.

6-1- توزیع نمونه

اگر x_1, x_2, \dots, x_n نشان دهنده نمونه‌ای به حجم n باشد بنا به تعریف، تابع توزیع توام

x_1, x_2, \dots, x_n را تابع توزیع نمونه می‌نامند. لذا اگر x_1, x_2, \dots, x_n یک نمونه تصادفی به حجم n از

جامعه $f_x(x)$ باشد در این صورت توزیع نمونه تصادفی x_1, x_2, \dots, x_n عبارتست از:

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = f_{x_1}(x_1) f_{x_2}(x_2) \dots f_{x_n}(x_n) = \prod_{i=1}^n f_{x_i}(x_i) = [f_x(x)]^n$$

7-1- تعریف آماره

تابعی است از نمونه تصادفی قابل مشاهده که شامل پارامتر مجهولی نیست (به پارامترهای نامعلوم

بستگی ندارد) مثلاً در یک نمونه‌گیری به اندازه n ، \bar{X} ، S^2 و S همه آماره‌اند. در این ارتباط توزیع آماره‌ها را توزیع نمونه‌ای می‌گویند و استنباطهای آماری معمولاً بر آماره‌ها متکی است.

8-1- میانگین نمونه

اگر x_1, x_2, \dots, x_n یک نمونه تصادفی از جامعه‌ای به حجم n باشد:

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$$

9-1- گشتاور نمونه

فرض می‌کنیم x_1, x_2, \dots, x_n یک نمونه تصادفی از جامعه با تابع چگالی احتمال $f_x(x)$ باشند. در این صورت r مین گشتاور نمونه حول مبدا برابر است با:

$$M'_r = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^r$$

که در حالت خاص $r=1$ ، میانگین نمونه بدست می‌آید.

10-1- گشتاور r ام حول میانگین

$$M_r = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^r \quad \text{گشتاور } r \text{ ام حول میانگین برابر است با:}$$

قضیه 1: فرض کنید x_1, x_2, \dots, x_n یک نمونه تصادفی از جامعه با تابع چگالی $f_x(x)$ باشد و

$$E[\bar{X}] = \mu \quad , \quad \text{Var}[\bar{X}] = \frac{\sigma^2}{n} \quad \text{میانگین نمونه باشد در این صورت:} \quad \bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$$

که در آن μ و σ^2 به ترتیب میانگین و واریانس جامعه هستند.

اثبات:

$$E[\bar{X}] = E\left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i\right] = \frac{1}{n} E\left[\sum_{i=1}^n x_i\right] = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n E(X_i) = \frac{1}{n} \cdot n\mu = \mu$$

$$\text{Var}[\bar{X}] = \text{Var}\left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i\right] = \frac{1}{n^2} \text{Var}\left[\sum_{i=1}^n x_i\right] = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \text{Var}(x_i) = \frac{1}{n^2} \cdot n\sigma^2 = \frac{\sigma^2}{n}$$

11-1- واریانس نمونه

فرض کنید x_1, x_2, \dots, x_n یک نمونه تصادفی از جامعه $f_x(x)$ باشد در این صورت:

$$S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 ; n > 1$$

واریانس نمونه نامیده می‌شود.

12-1- انحراف معیار نمونه

انحراف معیار n مشاهده x_1, x_2, \dots, x_n را به عنوان ریشه دوم واریانسهایشان تعریف می‌کنیم:

$$S = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}{n-1}}$$

قضیه 2: اگر تمام نمونه‌های تصادفی به حجم n از یک جامعه نرمال با میانگین μ و واریانس σ^2

باشد در این صورت \bar{X} دارای توزیع نرمال با میانگین μ و واریانس $\frac{\sigma^2}{n}$ است.

$$M_{\bar{X}} = M_X[(\sum x_i / n)t] = (M_X(t/n))^n = (e^{\mu(t/n) + 1/2(t/n)^2 \sigma^2})^n = e^{\mu t + \frac{1}{2}t(\sigma^2/n)}$$

قضیه 3: اگر تمام نمونه‌های تصادفی به حجم n از یک جامعه با میانگین μ و واریانس σ^2 با

جایگذاری انتخاب شود، توزیع نمونه \bar{X} تقریباً دارای توزیع نرمال با میانگین μ و واریانس $\frac{\sigma^2}{n}$

است.

نکته:

اگر $n \geq 30$ باشد، بدون توجه به نوع توزیع جامعه، توزیع \bar{X} نرمال است.

اگر $n < 30$ باشد، توزیع \bar{X} تقریباً نرمال است اگر توزیع جامعه تقریباً نرمال باشد.

13-1- قضیه حد مرکزی

اگر x_1, x_2, \dots, x_n نمونه‌ای تصادفی از یک جامعه نامتناهی با میانگین μ و واریانس σ^2 باشد

در این صورت توزیع حدی متغیر

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}$$

وقتی $n \rightarrow \infty$ ، توزیع نرمال استاندارد است.

14-1- توزیع Gamma

اگر متغیر تصادفی گاما دارای تابع چگالی ذیل است:

$$f_x(x) = \frac{\lambda e^{-\lambda x} (\lambda x)^{s-1}}{\Gamma(s)} \quad ; \quad x > 0$$

$$\phi(t) = \left(\frac{\lambda}{\lambda - t}\right)^s; E[x] = \frac{s}{\lambda}; \text{Var}(x) = \frac{s}{\lambda^2}$$

2- توزیع مربع کای (Chi Square)

توزیع مربع کای حالت خاصی از توزیع گاما است که در آن $s = \frac{v}{2}$; $\lambda = \frac{1}{2}$ است و بر این اساس تابع چگالی احتمال متغیر تصادفی مربع کای بشرح ذیل است.

$$f_x(x) = \frac{1}{2^{v/2} \Gamma\left(\frac{v}{2}\right)} x^{\left(\frac{v-2}{2}\right)} e^{-\frac{x}{2}} ; x > 0$$

که Γ معرف تابع گاما و معرف درجه آزادی است و

$$E(\chi^2) = v, \text{Var}(\chi^2) = 2v, M_x(t) = \phi(t) = (1-2t)^{-\frac{v}{2}}$$

قضیه 4: اگر متغیر تصادفی Z_1 دارای توزیع نرمال استاندارد باشد، آنگاه متغیر تصادفی Z_1^2 دارای توزیع مربع کای با 1 درجه آزادی خواهد بود. این قضیه در واقع بیانگر اهمیت توزیع مربع کای است.

قضیه 5: اگر $\chi_1^2, \chi_2^2, \dots, \chi_k^2$ متغیرهای تصادفی مستقل هر یک دارای توزیع مربع کای با درجات آزادی به ترتیب v_1, v_2, \dots, v_k باشند، آنگاه متغیر تصادفی $\chi^2 = \chi_1^2 + \chi_2^2 + \dots + \chi_k^2$ نیز یک توزیع مربع کای با $v = \sum_{i=1}^k v_i$ درجه آزادی دارد.

اثبات:

$$M_{x_i}(t) = (1-2t)^{-v_i/2}; M_{\sum x}(t) = \prod_{i=1}^n (1-2t)^{-v_i/2} = (1-2t)^{-\sum v_i/2}$$

قضیه 6: اگر متغیرهای تصادفی مستقل Z_v, \dots, Z_2, Z_1 دارای توزیع نرمال استاندارد باشند، آنگاه متغیر تصادفی $\chi^2 = Z_1^2 + Z_2^2 + \dots + Z_v^2$ یک توزیع مربع کای با v درجه آزادی خواهد بود.

تذکر: اگر x_1, x_2, \dots, x_v متغیرهای تصادفی مستقل نرمال به ترتیب با میانگین‌های $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_v$ و واریانسهای $\sigma_1^2, \sigma_2^2, \dots, \sigma_v^2$ باشند، جمع مربعات X ها یک توزیع مربع کای ندارد.

قضیه 7: اگر متغیرهای تصادفی x_1, x_2, \dots, x_v دارای توزیع نرمال مستقل با میانگین‌های

$$Z = \frac{x_i - \mu_i}{\sigma_i}$$

و واریانس‌های $\sigma_1^2, \sigma_2^2, \dots, \sigma_v^2$ باشند در این صورت متغیر تصادفی

برای $i=1,2,\dots,v$ دارای توزیع نرمال استاندارد می باشد و متغیر تصادفی:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^v \left(\frac{X_i - \mu_i}{\delta_i} \right)^2$$

دارای توزیع مربع کای با v درجه آزادی است.

قضیه 8: اگر Z_n, \dots, Z_2, Z_1 نمونه های تصادفی حاصل از توزیع نرمال استاندارد $N(0,1)$ باشند در

این صورت:

$$\bar{Z} - 1 \text{ دارای توزیع نرمال } N\left(0, \frac{1}{n}\right) \text{ است.}$$

$$\bar{Z} - 2 \text{ و } \sum_{i=1}^n (Z_i - \bar{Z})^2 \text{ از هم مستقلند.}$$

$$\sum_{i=1}^n (Z_i - \bar{Z})^2 \text{ دارای توزیع Chi Square با } n-1 \text{ درجه آزادی است.}$$

نتیجه: اگر x_n, \dots, x_2, x_1 نمونه تصادفی حاصل از جامعه $N(\mu, \sigma^2)$ باشد در این صورت متغیر

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^n \left(\frac{X_i - \bar{X}}{\sigma} \right)^2 \text{ تصادفی دارای توزیع مربع کای با } n-1 \text{ درجه آزادی است.}$$

قضیه 9: اگر x_n, \dots, x_2, x_1 یک نمونه تصادفی به اندازه n از یک جامعه نرمال با میانگین μ

و واریانس σ^2 باشد در این صورت $\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}$ یک توزیع مربع کای با $n-1$ درجه آزادی است.

اثبات: در ابتدا بدون اثبات می پذیریم که هرگاه x_n, \dots, x_1 یک نمونه تصادفی n تایی از یک جامعه

نرمال با میانگین μ و واریانس σ^2 باشند آنگاه توزیع های S^2, \bar{X} که به ترتیب میانگین و واریانس

نمونه است از یکدیگر مستقل هستند. حال داریم:

$$s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{X})^2$$

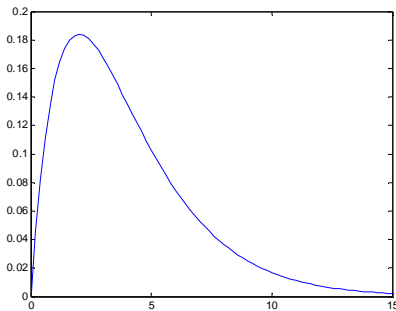
$$\frac{(n-1)s^2}{\sigma^2} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{X})^2}{\sigma^2}$$

$$\frac{(n-1)s^2}{\sigma^2} = \frac{\sum_{i=1}^n [(x_i - \mu) - (\bar{X} - \mu)]^2}{\sigma^2} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2}{\sigma^2} + \frac{n(\bar{X} - \mu)^2}{\sigma^2} - \frac{2(\bar{X} - \mu) \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)}{\sigma^2}$$

$$\frac{(n-1)s^2}{\sigma^2} = \underbrace{\sum_{i=1}^n \left(\frac{x_i - \mu}{\sigma} \right)^2}_{\text{توزیع مربع کای با } n \text{ درجه آزادی}} - \underbrace{\left(\frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \right)^2}_{\text{توزیع مربع کای با یک درجه آزادی}} = \chi_{(n-1)}^2$$

تذکر: در یک نمونه تصادفی، احتمال اینکه مقدار عددی یک متغیر تصادفی مربع کای بزرگتر از عدد مشخصی شود عبارتست از سطح زیر چگالی مربع کای دم سمت راست آن عدد مشخص و این عدد معمولاً توسط χ_{α}^2 نمایش داده می‌شود بطوری که سطح زیر چگالی توزیع مربع کای واقع در سمت راست آن عبارتست از α .

مثال توزیع مربع کای با چهار درجه آزادی.



قضیه 10: اگر x_1, \dots, x_n یک نمونه تصادفی از جامعه‌ای نامشخص $f_x(x)$ باشد آنگاه: $E[S^2] = \sigma^2$

اثبات:

$$\begin{aligned} E(S^2) &= E\left[\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2\right] = \frac{1}{n-1} E\left[\sum_{i=1}^n (x_i - \mu) - (\bar{x} - \mu)\right]^2 = \\ &= \frac{1}{n-1} E\left[\sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2 - 2\sum_{i=1}^n (x_i - \mu)(\bar{x} - \mu) + n(\bar{x} - \mu)^2\right] = \\ &= \frac{1}{n-1} E\left[\sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2 + n(\bar{x} - \mu)^2 - 2(\bar{x} - \mu) \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)\right] = \\ &= \frac{1}{n-1} E\left[\sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2 + n(\bar{x} - \mu)^2 - 2n(\bar{x} - \mu)^2\right] = \frac{1}{n-1} E\left[\sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2 - n(\bar{x} - \mu)^2\right] = \\ &= \frac{1}{n-1} \left[\sum_{i=1}^n E[(x_i - \mu)^2] - nE[(\bar{x} - \mu)^2]\right] = \frac{1}{n-1} \left[\sum_{i=1}^n \sigma^2 - n\text{Var}(\bar{x})\right] = \\ &= \frac{1}{n-1} \left(n\sigma^2 - n \frac{\sigma^2}{n}\right) = \sigma^2 \end{aligned}$$

قضیه 11: اگر x_1, \dots, x_n یک نمونه تصادفی از یک جامعه نرمال $N(\mu, \sigma^2)$ باشد آنگاه:

$$\text{Var}(S^2) = \frac{2\sigma^4}{n-1}$$

اثبات:

$$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} = \chi^2(n-1)$$

$$\text{Var}\left[\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\right] = 2(n-1)$$

$$\frac{(n-1)^2}{\sigma^4} \text{Var}(S^2) = 2(n-1) \rightarrow \text{Var}(S^2) = \frac{2\sigma^4}{n-1}$$

3- توزیع t_student

توزیع t حاصل از تقسیم دو متغیر تصادفی است که صورت کسر متغیر تصادفی نرمال استاندارد و مخرج کسر جذر یک متغیر تصادفی دارای توزیع مربع کای تقسیم بر درجه آزادی آن است یعنی:

$$t_{(v)} = \frac{Z}{\sqrt{\frac{\chi^2_{(v)}}{v}}}$$

با استفاده از تکنیک تبدیل متغیر در تابع توزیع تابعی از یک متغیر تصادفی، تابع چگالی احتمال متغیر تصادفی t-student بشرح ذیل خواهد بود.

$$f_{t(v)} = \frac{1}{\sqrt{\pi v}} \frac{\Gamma\left(\frac{v+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{v}{2}\right)} \left(1 + \frac{x^2}{v}\right)^{-\left(\frac{v+1}{2}\right)} \quad ; \quad -\infty < x < +\infty$$

$$E[x] = 0$$

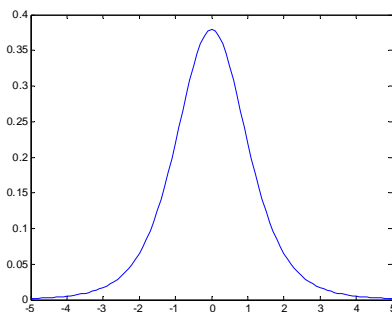
$$\text{Var}(x) = \frac{v}{v-2}; v > 2$$

شکل تابع چگالی متغیر تصادفی t، مانند توزیع نرمال با میانگین صفر حول نقطه صفر متقارن است.

تفاوت توزیع t با توزیع نرمال در آنست که توزیع t کمی پهن تر از توزیع نرمال است. در توزیع t با

افزایش درجه آزادی، واریانس کمتر می شود.

مثال: توزیع t با 5 درجه آزادی



نکته: در یک نمونه تصادفی، احتمال اینکه مقدار عددی یک متغیر تصادفی t بزرگتر از عدد

مشخصی باشد عبارتست از سطح زیر چگالی t در سمت راست آن عدد مشخص و این عدد معمولاً

با t_α نمایش داده می‌شود بطوری که سطح زیر چگالی t واقع در سمت راست t_α عبارتست از α .

$$\begin{aligned} P(T \geq t_{\alpha, \nu}) &= \alpha \\ P(T_{(10)} \geq 1.812) &= P(T \geq t_{(10), \%5}) = \%5 \\ P(T_{(5)} \geq 2.015) &= P(T \geq t_{(5), \%5}) = \%5 \end{aligned}$$

قضیه 12: در توزیع t هر چه ν بزرگتر باشد، توزیع t به سمت توزیع نرمال استاندارد میل خواهد

کرد و وقتی که $\nu = +\infty$ باشد توزیع t همان توزیع نرمال استاندارد است. یعنی:

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} t_{(\nu)} = Z$$

اهمیت توزیع t

در حالتیکه σ معلوم باشد بر اساس قضیه حد مرکزی، متغیر تصادفی $\frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}$ دارای توزیع نرمال

استاندارد است اما در عمل σ مجهول است لذا برای تصمیم‌گیری لازم است توزیع متغیر تصادفی

را داشته باشیم که این مهم بر اساس توزیع t و قضیه ذیل برآورده می‌شود.

قضیه 13: اگر x_n, \dots, x_2, x_1 نمونه تصادفی حاصل از جامعه $N(\mu, \sigma^2)$ و \bar{X} و S بترتیب

میانگین و انحراف معیار نمونه مزبور باشد در این صورت متغیر تصادفی $\frac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{n}}$ دارای

توزیع t با $n-1$ درجه آزادی است.

$$\begin{aligned} t_{\nu=(n-1)} &= \frac{Z}{\sqrt{\frac{\chi_{(n-1)}^2}{n-1}}} \\ t_{\nu=(n-1)} &= \frac{\frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}}{\sqrt{\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}/(n-1)}} = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} = \frac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{n}} \end{aligned}$$

لذا متغیر تصادفی $\frac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{n}}$ دارای توزیع t با $(n-1)$ درجه آزادی است.

نکته: اگر از یک جامعه نرمال $X \sim N(\mu, \sigma)$ یک نمونه n_1 تایی بگیریم و \bar{X} را بر اساس این نمونه

n_1 تایی تعریف کنیم و پس یک نمونه n_2 تایی مستقل از n_1 گرفته و S^2 را بر اساس آن تعریف

کنیم داریم آنگاه:

$$\frac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{n_1}} \sim t_{(n_2-1)}$$

$$t_{v=(n-1)} = \frac{Z}{\sqrt{\frac{\chi^2_{(n-1)}}{n-1}}}$$

$$t_{v=(n_1-1)} = \frac{\frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n_1}}}{\sqrt{\frac{(n_2-1)\sigma^2}{\sigma^2}/(n_2-1)}} = \frac{\bar{X} - \mu}{\frac{S}{\sigma}} = \frac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{n_1}}$$

نکته: اگر یک نمونه n_1 از جامعه $X \sim N(\mu_1, \sigma_1)$ گرفته و \bar{X} را از روی آن تعریف کنیم و سپس یک نمونه n_2 از جامعه $Y \sim N(\mu_2, \sigma_2)$ مستقل از X گرفته و S_y^2 را بر اساس آن تعریف کنیم داریم:

$$\frac{\sigma_2}{\sigma_1} \cdot \frac{\bar{X} - \mu_1}{S_y/\sqrt{n_1}} \sim t_{(n_2-1)}$$

نکته: توزیع t با یک درجه آزادی یک توزیع کوشی است. توزیع کوشی دارای میانگین نیست همچنین این توزیع دارای واریانس نیست.

$$f_{t(0)} = \frac{1}{\pi(1+x^2)} \quad ; \quad -\infty < x < +\infty$$

4- توزیع تفاوت بین دو میانگین نمونه

فرض کنید X_1, X_2, \dots, X_{n_x} یک نمونه تصادفی متشکل از n_x متغیر تصادفی مستقل با توزیع نرمال هر یک با میانگین μ_x و واریانس σ^2 باشد و فرض کنید Y_1, Y_2, \dots, Y_{n_y} یک نمونه تصادفی متشکل از n_y متغیر تصادفی مستقل با توزیع نرمال هر یک با میانگین μ_y و واریانس σ^2 باشد. همچنین فرض کنید که تمام X ها، Y ها مستقل باشند در این صورت:

الف- اگر σ معلوم باشد:

$$\bar{X} \sim N\left(\mu_x, \frac{\sigma^2}{n_x}\right)$$

$$\bar{Y} \sim N\left(\mu_y, \frac{\sigma^2}{n_y}\right)$$

$$\bar{X} - \bar{Y} \sim N\left(\mu_x - \mu_y, \frac{\sigma^2}{n_x} + \frac{\sigma^2}{n_y}\right)$$

آنگاه متغیر تصادفی $Z = \frac{(\bar{X} - \bar{Y}) - (\mu_x - \mu_y)}{\sigma \sqrt{\frac{1}{n_x} + \frac{1}{n_y}}}$ دارای توزیع نرمال استاندارد است

ب- اگر σ مجهول باشد:

$$\frac{(n_x - 1)S_x^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{(n_x - 1)}$$

$$\frac{(n_y - 1)S_y^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{(n_y - 1)}$$

آنگاه با استفاده از خاصیت جمع در توزیع مربع کای، متغیر تصادفی $\frac{(n_x - 1)S_x^2}{\sigma^2} + \frac{(n_y - 1)S_y^2}{\sigma^2}$ دارای

توزیع مربع کای با $n_x + n_y - 2$ درجه آزادی است. از طرفی توزیع آن از $\bar{X} - \bar{Y}$ مستقل است. بنا

به تعریف متغیر تصادفی t داریم:

$$\frac{\frac{(\bar{X} - \bar{Y}) - (\mu_x - \mu_y)}{\sigma \sqrt{\frac{1}{n_x} + \frac{1}{n_y}}}}{\sqrt{\frac{(n_x - 1)S_x^2 + (n_y - 1)S_y^2}{\sigma^2} / (n_x + n_y - 2)}} = \frac{(\bar{X} - \bar{Y}) - (\mu_x - \mu_y)}{\sqrt{\frac{(n_x - 1)S_x^2 + (n_y - 1)S_y^2}{n_x + n_y - 2}} \sqrt{\frac{1}{n_x} + \frac{1}{n_y}}}$$

لذا متغیر تصادفی $\frac{(\bar{X} - \bar{Y}) - (\mu_x - \mu_y)}{\sqrt{\frac{(n_x - 1)s_x^2 + (n_y - 1)s_y^2}{n_x + n_y - 2} \left(\frac{1}{n_x} + \frac{1}{n_y} \right)}}$ دارای توزیع t با $n_x + n_y - 2$ درجه

آزادی است

مثال: نمونه‌های تصادفی مستقل به اندازه $n_1 = 30$ و $n_2 = 50$ از دو جامعه نرمال با میانگین‌های

$\mu_1 = 78$ و $\mu_2 = 75$ و واریانس‌های $\sigma_1^2 = 150$ و $\sigma_2^2 = 200$ اختیار شده‌اند. احتمال اینکه میانگین

نمونه اول از میانگین نمونه دوم حداقل 4.8 بیشتر باشد چقدر است؟

$$\frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} \sim Z$$

$$P(\bar{X}_1 - \bar{X}_2 \geq 4.8) = P\left[\frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - (78 - 75)}{\sqrt{\frac{150}{30} + \frac{200}{50}}} \geq \frac{4.8 - (78 - 75)}{\sqrt{\frac{150}{30} + \frac{200}{50}}} \right] = P(Z \geq 0.53)$$

مثال: میانگین نمرات تست هوش دانشجویان سال اول یک دانشکده 540 و انحراف معیار آن 50

است. دو نمونه تصادفی با حجم $n_1 = 32$ و $n_2 = 50$ انتخاب می‌کنیم احتمال اینکه تفاضل

میانگین نمرات این دو نمونه:

الف- بیش از 20 باشد چقدر است؟

$$P(\bar{X}_1 - \bar{X}_2 > 20) = P\left[\frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{50\sqrt{\frac{1}{32} + \frac{1}{50}}} > \frac{20}{50\sqrt{\frac{1}{32} + \frac{1}{50}}} \right] =$$

$$P(Z > 1.76) = 1 - \phi(1.76)$$

ب- بین 5 و 10 باشد چقدر است؟

$$P(5 < \bar{X}_1 - \bar{X}_2 < 10) = P\left[\frac{5}{50\sqrt{\frac{1}{32} + \frac{1}{50}}} < Z < \frac{10}{50\sqrt{\frac{1}{32} + \frac{1}{50}}} \right] = P(0.44 < Z < 0.88)$$

نکته: نتایج بدست آمده از توزیع نمونه $\bar{X}_1 - \bar{X}_2$ ، نیز برای جمعیت‌های محدود و قتیکه نمونه گیری به روش بدون جایگذاری انجام می پذیرد صادق باشد، مشروط بر آنکه اندازه جمعیت ها یعنی N_1 و N_2 به ترتیب در مقابل اندازه نمونه یعنی n_1 و n_2 بزرگ باشد. بهر حال اگر جمعیت ها کوچک باشند و نمونه گیری به روش بدون جایگذاری انجام پذیرد در آن صورت ما باید $\sigma_{\bar{x}_1}$ و $\sigma_{\bar{x}_2}$ را بتوسط رابطه زیر محاسبه نمائیم:

$$\sigma_{\bar{x}}^2 = \frac{\sigma^2}{n} \cdot \frac{N-n}{N-1}$$

5- توزیع F

اگر متغیرهای تصادفی مستقل χ_1^2 و χ_2^2 دارای توزیع های مربع کای با درجات آزادی به ترتیب v_1 و v_2 باشند متغیر تصادفی:

$$F = \frac{\chi_1^2 / v_1}{\chi_2^2 / v_2}$$

توزیع F با v_1 و v_2 درجه آزادی دارد. بر این اساس تابع چگالی متغیر تصادفی F به صورت ذیل است:

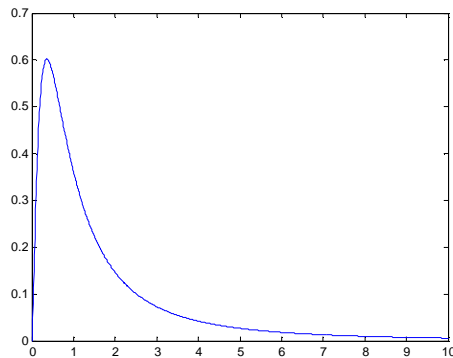
$$f_{F, v_1, v_2}(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{v_1 + v_2}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{v_1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{v_2}{2}\right)} (v_1)^{\frac{v_1}{2}} (v_2)^{\frac{v_2}{2}} \frac{x^{\left(\frac{v_1-1}{2}\right)}}{(v_2 + v_1 x)^{\frac{v_1+v_2}{2}}}; \quad x > 0$$

که در v_1 و v_2 بترتیب درجه آزادی صورت و مخرج است. شکل تابع چگالی متغیر تصادفی F مانند توزیع مربع کای است. اهمیت توزیع F در آنست که برای مقایسه واریانسهای دو جامعه بکار می‌رود. میانگین و واریانس توزیع F با درجات آزادی v_1 و v_2 به ترتیب برابر است با:

$$E[x] = \frac{v_2}{v_2 - 2}; \quad v_2 > 2$$

$$\text{Var}[x] = \frac{v_2^2(2v_2 + 2v_1 - 4)}{v_1(v_2 - 2)^2(v_2 - 4)}; \quad v_2 > 4$$

مثال : توزیع F با 5 درجه آزادی در صورت و 3 درجه آزادی در مخرج



نکته: در یک نمونه تصادفی، احتمال اینکه مقدار عددی یک متغیر تصادفی F بزرگتر از عدد مشخصی باشد عبارتست از سطح زیر چگالی F در سمت راست آن عدد مشخص و این عدد معمولاً با F_{α, v_1, v_2} نمایش داده می‌شود بطوری که سطح زیر چگالی F واقع در سمت راست آن عبارتست

$$P(F > F_{\alpha, v_1, v_2}) = \alpha \text{ یعنی } \alpha$$

قضیه 14: اگر X_1, \dots, X_{m+1} یک نمونه تصادفی به حجم $m+1$ از یک توزیع نرمال $N(\mu_x, \sigma^2)$ باشد، همچنین اگر Y_1, \dots, Y_{n+1} یک نمونه تصادفی به حجم $n+1$ از یک توزیع نرمال $N(\mu_y, \sigma^2)$ باشد و نمونه‌های تصادفی ناهمبسته باشند در این صورت:

$$\frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^{m+1} (X_i - \bar{X})^2 \sim \chi^2(m)$$

$$\frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^{n+1} (Y_i - \bar{Y})^2 \sim \chi^2(n)$$

$$\frac{\sum_{i=1}^{m+1} (X_i - \bar{X})}{\sum_{i=1}^{n+1} (Y_i - \bar{Y})} \sim F_{m, n}$$

قضیه 15: (توزیع نسبت دو واریانس) فرض کنید X_1, X_2, \dots, X_{n_x} یک نمونه تصادفی متشکل از n_x متغیر تصادفی با توزیع نرمال هر یک با میانگین μ_x و واریانس σ_x^2 باشد. همچنین فرض کنید Y_1, Y_2, \dots, Y_{n_y} یک نمونه تصادفی متشکل از n_y متغیر تصادفی با توزیع نرمال هر یک با میانگین μ_y و واریانس σ_y^2 باشد. همچنین فرض کنید تمام X ها و Y ها مستقل باشند لذا:

$$\frac{(n_x - 1)S_x^2}{\sigma_x^2} \sim \chi^2_{(n_x - 1)}$$

$$\frac{(n_y - 1)S_y^2}{\sigma_y^2} \sim \chi^2_{(n_y - 1)}$$

چون X ها و Y ها مستقل اند پس این دو متغیر تصادفی مربع کای مستقل از هم هستند.

اثبات: طبق تعریف متغیر تصادفی F داریم:

$$F_{v_1, v_2} = \frac{\chi^2_{(v_1)}/v_1}{\chi^2_{(v_2)}/v_2}$$

$$\frac{\frac{(n_x - 1)S_x^2}{\sigma_x^2} / (n_x - 1)}{\frac{(n_y - 1)S_y^2}{\sigma_y^2} / (n_y - 1)} = F_{n_x - 1, n_y - 1}$$

لذا متغیر تصادفی $\frac{S_x^2}{S_y^2} \cdot \frac{\sigma_y^2}{\sigma_x^2}$ دارای توزیع F با درجات آزادی $n_x - 1$ و $n_y - 1$ است.

چند نکته مهم

1- اگر x دارای توزیع F_{v_1, v_2} باشد آنگاه متغیر $Y = \frac{1}{X}$ نیز دارای توزیع F_{v_2, v_1} است.

2- مربع توزیع $t_{(v)}$ دارای توزیع F با درجات آزادی $v, 1$ است.

$$t_{(v)} = \frac{Z}{\sqrt{\frac{\chi^2_{(v)}}{v}}} \rightarrow t_{(v)}^2 = \frac{Z^2/1}{\chi^2_{(v)}/v}$$

$$F_{1-\alpha; v_2, v_1} \frac{1}{F_{\alpha; v_1, v_2}} \text{ یا } F_{\alpha; v_1, v_2} = \frac{1}{F_{1-\alpha; v_2, v_1}} \quad -3$$

4- اگر X_1 و X_2 یک نمونه تصادفی از پخش $f(x) = e^{-x}$; $x > 0$ باشد آنگاه $Z = \frac{X_1}{X_2}$ دارای

پخش $F_{2,2}$ است. توزیع F با درجات آزادی 2 و 2 به صورت زیر است:

$$f_z(z) = \frac{1}{(1+z)^2}$$

6- توزیع میانگین جامعه‌های متناهی

اگر آزمایش متشکل از انتخاب یک مقدار یا بیشتر از مجموعه‌ای متناهی از اعداد $\{c_1, \dots, c_n\}$ باشد این مجموعه را جامعه‌ای متناهی با اندازه N می‌نامند. اگر انتخاب بدون جایگذاری باشد و x_1 اولین و x_n امین عددی باشد که استخراج می‌شوند، این متغیرهای تصادفی، نمونه‌ای تصادفی به اندازه n این جامعه متناهی را تشکیل می‌دهند مشروط بر آنکه توزیع احتمال توأم آنها به ازای هر n تایی مرتب مقادیر انتخاب شده از مجموعه $\{c_1, \dots, c_n\}$ به صورت زیر باشد:

$$f(x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{N(N-1)\dots(N-n+1)}$$

$$f(x_i) = \frac{1}{N}, x_i = c_1, \dots, c_N, i = 1, \dots, n$$

میانگین و واریانس آنرا میانگین و واریانس جامعه متناهی می‌نامیم. یعنی میانگین و واریانس جامعه متناهی $\{c_1, \dots, c_N\}$ عبارتست از:

$$\mu = \frac{\sum_{i=1}^N c_i}{N}, \sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^N (c_i - \mu)^2}{N}$$

توزیع حاشیه‌ای توأم هر دو تا از متغیرهای تصادفی x_1, \dots, x_n برای هر زوج مرتب از مقادیر جامعه متناهی است و برابر است با:

$$g(x_i, x_j) = \frac{1}{N(N-1)}$$

و کوواریانس آنها عبارتست از:

$$\text{Cov}(x_i, x_j) = \frac{\sigma^2}{N-1}$$

اگر \bar{X} میانگین یک نمونه تصادفی به اندازه n از جامعه‌ای متناهی به اندازه N با میانگین μ و واریانس σ^2 باشد آنگاه:

$$E(\bar{x}) = \mu, \text{Var}(\bar{x}) = \frac{\sigma^2}{n} \cdot \frac{N-n}{N-1}$$

قضیه 16: اگر تمام نمونه‌های تصادفی n تایی ممکنه با روش بدون جایگذاری از یک جمعیت محدود N تایی با حد متوسط μ و انحراف معیار σ بیرون کشیده شود در آنصورت توزیع نمونه‌ای \bar{X} به طور تقریبی یک توزیع نرمال با حد متوسط و انحراف معیار زیر خواهد بود.

$$\mu_{\bar{x}} = \mu$$

$$\text{Var}(\bar{x}) = \frac{\sigma^2}{n} \cdot \frac{N-n}{N-1}$$

مثال:

جمعیت 1 و 1 و 3 و 4 و 5 و 6 و 6 و 6 و 7 داده شده است. نمونه تصادفی 36 تایی به روش جایگزین انتخاب شده است. احتمال اینکه میانگین نمونه بیشتر از $3/8$ و کوچکتر از $4/5$ باشد چقدر است؟

توزیع احتمال جمعیت مربوط به صورت زیر است:

x	1	3	4	5	6	7
P(x)	0.3	0.1	0.1	0.1	0.3	0.1

$$E(x) = \mu = 4$$

$$\text{Var}(x) = \sigma^2 = 5$$

$$\bar{x} \sim N\left(4, \frac{5}{36}\right)$$

$$P(3.8 < \bar{x} < 4.5) = P(-0.405 < z < 1.216) = 0.5453$$

نکته: برای N هایی که در مقابل تعداد نمونه n عدد بزرگی هستند، ضریب $\frac{N-n}{N-1}$ به سمت 1 میل می‌کند.

قضیه 17: اگر نمونه‌ای تصادفی به اندازه n از جامعه‌ای متناهی که متشکل از N عدد صحیح مثبت است انتخاب شود آنگاه:

$$E(\bar{x}) = \frac{N+1}{2}$$

$$\text{Var}(\bar{x}) = \frac{(N+1)(N-n)}{12n}$$

$$E(y) = \frac{n(N+1)}{2}$$

$$\text{Var}(y) = \frac{n(N+1)(N-n)}{12}$$

$$\mu = E(\bar{x}) = \sum_{i=1}^N x_i \cdot f(x_i) = \sum_{i=1}^N x_i \cdot \frac{1}{N} = \frac{1}{N} (x_1 + x_2 + \dots + x_N) = \frac{1}{N} \cdot \frac{N(N+1)}{2} = \frac{N+1}{2}$$

$$E(x^2) - (E(x))^2 = \sum_{i=1}^N x_i^2 \cdot f(x_i) - \frac{(N+1)^2}{4} = \frac{1}{N} \cdot \frac{N(2N+1)(N+1)}{6} - \frac{(N+1)^2}{4} = \frac{N^2-1}{12}$$

$$\text{Var}(\bar{x}) = \frac{\sigma^2}{n} \left(\frac{N-n}{N-1} \right) = \frac{N^2-1}{12n} \cdot \frac{N-n}{N-1} = \frac{(N+1)(N-n)}{12n}$$

7- آماره‌های ترتیبی

فرض کنید از یک جامعه نامتناهی پیوسته یک نمونه تصادفی n تایی بشرح X_1, \dots, X_n انتخاب کرده‌ایم. اگر کوچکترین مقدار x ها را Y_1 ، بزرگترین مقدار بعد از آن را Y_2 و به همین ترتیب بزرگترین آنها را Y_n بنامیم در این صورت $Y_1 < Y_2 < \dots < Y_n$ را آماره ترتیبی می‌نامیم.

قضیه 18: برای نمونه تصادفی به اندازه n از جامعه‌ای نامتناهی که دارای تابع چگالی $f(x)$ است.

چگالی r امین آماره ترتیبی y_r ، به ازای $-\infty < y_r < +\infty$ عبارتست از:

$$g_r(y_r) = \frac{n!}{(r-1)!(n-r)!} \left[\int_{-\infty}^{y_r} f(x) dx \right]^{r-1} f(y_r) \left[\int_{y_r}^{\infty} f(x) dx \right]^{n-1}$$

اثبات: فرض کنید که محور اعداد حقیقی را به سه بازه تقسیم کرده‌ایم یکی از $-\infty$ تا y_r ، دومی از y_r

تا y_r+h (که در آن h ثابت است) و سومی از y_r+h تا $+\infty$. در اینصورت اگر چگالی جامعه‌ای که از

آن نمونه برگرفته شده است $f(x)$ باشد، احتمال اینکه $r-1$ تا از نمونه‌ها در اولین باز قرار بگیرد،

یکی در بازه دوم و $n-r$ تا در بازه سوم قرار بگیرند طبق فرمول توزیع چند جمله‌ای عبارتست از

$$g_r(y_r) = \frac{n!}{(r-1)!(n-r)!} \left[\int_{-\infty}^{y_r} f(x) dx \right]^{r-1} \left[\int_{y_r}^{y_r+h} f(x) dx \right]^{r-1} \left[\int_{y_r}^{\infty} f(x) dx \right]^{n-1}$$

با استفاده از قضیه میانگین در حسابان داریم:

$$\left[\int_{y_r}^{y_r+h} f(x) dx \right] = f(\xi) \cdot h \quad y_r \leq \xi \leq y_r + h$$

و در زمانی که $h \rightarrow 0$ خواهیم داشت

$$\lim_{h \rightarrow 0} \int_{y_r}^{y_r+h} f(x) dx = f(y_r)$$

و سرانجام

$$g_r(y_r) = \frac{n!}{(r-1)!(n-r)!} \left[\int_{-\infty}^{y_r} f(x) dx \right]^{r-1} f(y_r) \left[\int_{y_r}^{\infty} f(x) dx \right]^{n-1}$$

بر این اساس توزیع اولین، آخرین و میانه آماره ترتیبی عبارتست از

الف - توزیع اولین آماره ترتیبی

$$g_1(y_1) = n f(y_1) \left[\int_{y_1}^{\infty} f(x) dx \right]^{n-1} \quad -\infty \leq y_1 \leq +\infty$$

ب- توزیع آخرین آماره ترتیبی

$$g_n(y_n) = n f(y_n) \left[\int_{-\infty}^{y_n} f(x) dx \right]^{n-1} \quad -\infty \leq y_n \leq +\infty$$

ج - در نمونه‌ای تصادفی به اندازه $n=2m+1$ توزیع $\tilde{x} = y_{m+1}$ میانه آماره‌های ترتیبی عبارتست از

$$h(\tilde{x}) = \frac{(2m+1)!}{m!m!} \left[\int_{-\infty}^{\tilde{x}} f(x) dx \right]^m f(\tilde{x}) \left[\int_{\tilde{x}}^{\infty} f(x) dx \right]^m \quad -\infty \leq \tilde{x} \leq +\infty$$

د - در نمونه‌ای تصادفی به اندازه $n=2m$ توزیع \tilde{x} میانه آماره‌های ترتیبی عبارتست از

$$h(\tilde{x}) = \frac{g_m(y_m) + g_{m+1}(y_{m+1})}{2}$$

ه- چگالی توام $g_{r,j}(y_1, y_j)$ عبارتست از

$$g_{r,j}(y_r, y_j) = \frac{n!}{(r-1)!(j-r-1)!(n-j)!} \left[\int_{-\infty}^{y_r} f(x) dx \right]^{r-1} f(y_r) \left[\int_{y_r}^{y_j} f(x) dx \right]^{j-1} f(y_j) \left[\int_{y_j}^{\infty} f(x) dx \right]^{n-j}$$

مثال: فرض کنید X_1, \dots, X_n یک نمونه تصادفی n تایی از یک جامعه‌ای نمایی با $\lambda = 1$ باشد. تابع چگالی اولین و آخرین آماره ترتیبی را بدست آورید.

$$g_1(y_1) = n e^{-y_1} \left[\int_{y_1}^{\infty} e^{-x} dx \right]^{n-1} = n e^{-y_1} (e^{-y_1})^{n-1} = n e^{-ny_1}$$

$$g_n(y_n) = n e^{-y_n} \left[\int_{-\infty}^{y_n} e^{-x} dx \right]^{n-1} = n e^{-y_n} (1 - e^{-y_n})^{n-1}$$

فهرست

- 1- مقدمه 1
- 2- برآورد نقطه‌ای (Point Estimator) 1
- 3- ارزیابی یک تخمین زنده یا مقایسه برآوردکننده ها 1
- 3-1- مقایسه دو برآوردکننده از طریق سنجش کارایی نسبی آنها 2
- 3-2- تعریف تخمین زنده بهینه 2
- 3-3- برآوردکننده های ناریب 2
- 3-4- برآوردکننده های سازگار 5
- 3-5- تخمین زنده های ناریب کارا 7
- 4- روش‌های برآورد نقطه‌ای 9
- 4-1- روش گشتاورها 9
- 4-2- روش حداکثر درستنمایی (روش MLE) 11
- 5- برآوردکننده های کافی 14

1- مقدمه

نظریه برآورد به دو موضوع برآورد نقطه‌ای و برآورد فاصله‌ای می‌پردازد. در برآورد نقطه‌ای یک آماره، تنها یک مقدار عددی بکار می‌رود تا بتوان به کمک آن یک پارامتر بخصوصی از جامعه را برآورد نمود در حالیکه در برآورد فاصله‌ای، یک فاصله مخصوصی معین می‌گردد که مقدار واقعی پارامتر در داخل این فاصله قرار دارد.

2- برآورد نقطه‌ای (Point Estimator)

یک مقدار به خصوصی از یک آماره که برای برآورد یک پارامتر مشخص به کار می‌رود به نام برآورد نقطه‌ای نامیده می‌شود. می‌توان مساله کلی برآورد نقطه‌ای را به شرح ذیل بیان کرد:

متغیر تصادفی X ، با تابع چگالی احتمال $f_X(x; \theta)$ مفروض است که در آن پارامتر θ مجهول می‌باشد. یک نمونه تصادفی، x_1, x_2, \dots, x_n از این جامعه انتخاب می‌نماییم و بر اساس تابعی از این نمونه تصادفی، $\hat{\theta} = \hat{\theta}(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ، مقدار پارامتر θ را برآورد می‌کنیم. در این صورت متغیر تصادفی $\hat{\theta}$ یک برآورد کننده برای پارامتر θ و مقداری که $\hat{\theta}$ می‌گیرد برآورد نقطه‌ای θ نامیده می‌شود.

بدیهی است، برای پارامتر θ ، تعداد زیادی برآورد کننده وجود دارد. اما یک برآورد کننده خوب آن است که تا حد ممکن به مقدار واقعی پارامتر نزدیک باشد. در اینجا این سوال مطرح می‌شود که از بین تخمین زنده‌های مختلف برای پارامتر θ کدام بهتر است؟

از آنجایی که تخمین زنده‌ها، متغیرهای تصادفی هستند پس عملکرد آنها را نمی‌توان برای یک مورد خاص مدنظر قرار داد. بنابراین برآورد کننده‌ها باید براساس عملکردشان در بلندمدت مورد ارزیابی قرار گیرند.

3- ارزیابی یک تخمین زنده یا مقایسه برآورد کننده‌ها

در برآورد پارامتر θ که بر اساس مقادیر نمونه تعیین می‌شود، در ابتدا تابع ضرر (زیان) به صورت ذیل تعریف می‌کنیم:

$$L(\hat{\theta}, \theta) = (\hat{\theta} - \theta)^2$$

از آنجایی که تابع زیان یک متغیر تصادفی است بنابراین منطقی بنظر می‌رسد از امید ریاضی تابع

زیان تحت عنوان تابع ریسک برای نیل به ارزیابی بهتر استفاده شود. تابع ریسک عبارتست از:

$$R(\hat{\theta}, \theta) = \text{MSE} = E[(\hat{\theta}, \theta)] = E(\hat{\theta} - \theta)^2$$

3-1- مقایسه دو برآوردکننده از طریق سنجش کارایی نسبی آنها

اگر برآورد کننده $\hat{\theta}_1$ دارای میانگین مربع خطای $E(\hat{\theta}_1 - \theta)^2$ (که آنرا با MSE_1 نشان می‌دهند) و برآوردکننده $\hat{\theta}_2$ دارای میانگین مربع خطای $E(\hat{\theta}_2 - \theta)^2$ (که آنرا با MSE_2 نشان می‌دهند) باشد در این صورت کارایی $\hat{\theta}_2$ نسبت به $\hat{\theta}_1$ بصورت $\frac{\text{MSE}_1}{\text{MSE}_2}$ یا $\frac{E(\hat{\theta}_1 - \theta)^2}{E(\hat{\theta}_2 - \theta)^2}$ تعریف می‌شود. اگر کارایی $\hat{\theta}_2$ نسبت به $\hat{\theta}_1$ کمتر از یک باشد، $\hat{\theta}_1$ برآورد کننده ای بهتر از $\hat{\theta}_2$ برای θ به شمار می‌آید. در غیر این صورت $\hat{\theta}_2$ برآوردکننده ای بهتر از $\hat{\theta}_1$ برای θ است.

3-2- تعریف تخمین زنده بهینه

تخمین زنده بهینه به تخمین زنده‌ای گفته می‌شود که MSE مربوط به آن، از MSE سایر تخمین زنده ها به ازای تمام مقادیر θ کمتر باشد. به عنوان مثال \bar{X} یک تخمین زنده بهینه μ مربوط به توزیع نرمال می باشد.

3-3- برآوردکننده های نارایب

$\hat{\theta}$ یک برآوردکننده نارایب برای θ است اگر امید ریاضی آن با θ مساوی شود. یعنی اگر به ازای تمام مقادیر θ داشته باشیم:

$$E(\hat{\theta}) = \theta$$

اگر یک برآوردکننده نارایب نباشد، اریب نامیده می شود و مقدار $b = E(\hat{\theta}) - \theta$ به عنوان اریبی شناخته می شود. در اینصورت، اگر $b > 0$ باشد اریبی مثبت و اگر $b < 0$ باشد اریبی منفی است. در اینصورت میانگین مربعات خطا بر حسب مقدار اریبی عبارتست از:

$$\text{MSE}(\hat{\theta}) = E(\hat{\theta} - \theta)^2 = \text{Var}(\hat{\theta}) + b^2$$

نکته: اگر متغیر تصادفی T یک برآوردکننده نارایب برای پارامتر مجهول θ باشد و $\text{Var}(T) \neq 0$ در این صورت T^2 همواره برای θ^2 اریب است.

مثال: دو برآوردکننده $\hat{\theta}_1$ و $\hat{\theta}_2$ برای پارامتر θ به شرح ذیل بیان شده است:

$$\begin{cases} E(\hat{\theta}_1) = \theta \\ \text{Var}(\hat{\theta}_1) = 7 \end{cases} \quad \begin{cases} E(\hat{\theta}_2) = \frac{2}{3}\theta \\ \text{Var}(\hat{\theta}_2) = 3 \end{cases}$$

بر حسب مقادیر مختلف θ این دو تخمین زنده را مقایسه کنید.

$$MSE(\hat{\theta}) = \text{Var}(\hat{\theta}) + b^2$$

$$MSE(\hat{\theta}_1) = 7 + [E(\hat{\theta}_1) - \theta_1]^2 = 7 + (0)^2 = 7$$

$$MSE(\hat{\theta}_2) = 3 + [E(\hat{\theta}_2) - \theta_2]^2 = 3 + \left(\frac{2}{3}\theta - \theta\right)^2 = 3 + \frac{1}{9}\theta^2$$

اگر $\hat{\theta}_2$ برآورد کننده بهتری برای θ باشد آنگاه:

$$MSE(\hat{\theta}_1) > MSE(\hat{\theta}_2)$$

$$7 > 3 + \frac{\theta^2}{9} \rightarrow -6 < \theta < 6$$

مثال 1: متغیر تصادفی X دارای توزیع نرمال با میانگین مجهول μ و واریانس مجهول σ^2 است. یک

نمونه تصادفی 9 تایی می‌گیریم و 2 برآورد کننده نقطه‌ای $T_1 = 0.1 \sum_{i=1}^9 (x_i - \bar{x})^2$ و

و $\text{Var}(T_1) = 0.16\sigma^4$ را برای $T_2 = 0.125 \sum_{i=1}^9 (x_i - \bar{x})^2$ تعریف می‌کنیم اگر

$\text{Var}(T_2) = 0.25\sigma^4$ باشد. کارایی T_1 نسبت به T_2 برابر است با:

$$\frac{\text{کارایی } T_1}{\text{کارایی } T_2} = \frac{MSE_2}{MSE_1} = \frac{\text{Var}(T_2) + (E(T_2) - \sigma^2)^2}{\text{Var}(T_1) + (E(T_1) - \sigma^2)^2} = \frac{0.25\sigma^4}{0.16\sigma^4 + 0.04\sigma^4} = 1.25$$

$$E(T_1) = 0.1 \times 8 \times \sigma^2 = 0.8\sigma^2$$

$$E(T_2) = 0.125 \times 8 \times \sigma^2 = \sigma^2$$

مثال 2: اگر X_1 و X_2 و X_3 یک نمونه تصادفی از جامعه نرمال با میانگین μ و واریانس σ^2 باشند،

کارایی نسبی برآورد کننده \bar{X} (میانگین نمونه) نسبت به برآورد کننده $\frac{x_1 + 2x_2 + x_3}{4}$ چقدر

است؟

$$\frac{\text{کارایی } \bar{x}}{\text{کارایی } y} = \frac{MSE(y)}{MSE(\bar{x})} = \frac{\text{Var}(y)}{\text{Var}(\bar{x})} = \frac{\frac{1}{16} \times 6\sigma^2}{\frac{\sigma^2}{3}} = \frac{9}{8}$$

مثال 3: فرض کنید T_1 و T_2 برآورد کننده های θ هستند و بصورت زیر بیان می‌شوند:

$$\begin{cases} E(T_1) = \theta \\ \text{Var}(T_1) = 4 \end{cases} \quad \begin{cases} E(T_2) > \theta \\ \text{Var}(T_2) = 2 \end{cases}$$

و $[E(T_2) - \theta]^2 = 7$ است. کدام برآوردکننده بهتری برای θ است؟

$$\text{MSE}_{T_1} = \text{Var}(T_1) + b^2 = 4 + 0 = 4$$

$$\text{MSE}_{T_2} = \text{Var}(T_2) + [E(T_2) - \theta]^2 = 2 + 7 = 9$$

چون $\frac{\text{MSE}_{T_1}}{\text{MSE}_{T_2}} < 1$ است لذا T_1 برآوردکننده بهتری برای θ است.

مثال 4: فرض کنید T بر اساس یک نمونه تصادفی n تایی، برآوردکننده‌ای برای θ باشد. اگر

$$E(x_i) = \theta \quad \text{و} \quad T = \sum a_i x_i \quad \text{باشد. } a_i \text{ ها چه محدودیتی باید داشته باشند تا } T \text{ یک برآوردکننده}$$

ناریب θ شود؟

$$T = \sum a_i x_i \rightarrow E(T) = E\left[\sum a_i x_i\right] = \sum [E(a_i x_i)] = \sum [a_i E(x_i)]$$

چون T یک برآوردکننده ناریب θ است لذا:

$$\theta = \sum (a_i \theta) = \theta = \theta \sum a_i \rightarrow \sum a_i = 1$$

مثال 5: فرض کنید $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ باشد. اگر $\hat{\theta}_1$ و $\hat{\theta}_2$ دو تخمین زننده برای پارامتر σ^2 باشند، آنها

را مقایسه کنید.

$$\hat{\theta}_1 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n-1}, \quad \hat{\theta}_2 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n+1}$$

$$E(\hat{\theta}_1) = E(S^2) = \sigma^2, \quad \text{Var}(\hat{\theta}_1) = \text{Var}(S^2) = \frac{2\sigma^4}{n-1}, \quad \text{MSE}(\hat{\theta}_1) = \frac{2\sigma^4}{n-1}$$

$$E(\hat{\theta}_2) = E\left[\frac{(n-1)S^2}{(n+1)}\right] = \frac{n-1}{n+1}\sigma^2$$

$$\text{Var}(\hat{\theta}_2) = \text{Var}\left[\frac{(n-1)S^2}{(n+1)}\right] = \frac{2(n-1)}{(n+1)^2}\sigma^4$$

$$\text{MSE}(\hat{\theta}_2) = \frac{2(n-1)}{(n+1)^2}\sigma^4 + \left[\frac{n-1}{n+1}\sigma^2 - \sigma^2\right]^2 = \frac{2\sigma^4}{n+1}$$

$\text{MSE}(\hat{\theta}_1) > \text{MSE}(\hat{\theta}_2) \Rightarrow \hat{\theta}_2$ برآورد کننده بهتر از $\hat{\theta}_1$ برای پارامتر σ^2 است

3-4- برآوردکننده های سازگار

خاصیت نارایی بر حسب تکرار آزمایش‌ها بیان شده است اما خاصیت سازگاری مربوط به رفتار یک تخمین زنده در یک آزمایش است و تئیکه حجم نمونه اجازه یابد بسیار بزرگ شود.

تعریف: گفته می شود برآورد کننده $\hat{\theta}_{(n)}$ یک برآورد کننده سازگار است هرگاه:

$$1-\hat{\theta}_{(n)} \text{ نارایب باشد.}$$

2- با بزرگ شدن اندازه نمونه (n) داشته باشیم:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \hat{\theta}_{(n)} = \theta, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \text{Var}(\hat{\theta}_{(n)}) = 0$$

نماد $\hat{\theta}_{(n)}$ به کار می رود تا نشان دهد که ممکن است برآوردکننده تابعی از نمونه تصادفی باشد. بطور کلی برآوردکننده‌هایی که تابع ریسک آنها، با بزرگ شدن اندازه نمونه به سمت صفر میل می‌گراید، برآوردکننده های سازگارند.

اگر این برآوردکننده ها اریب باشند، مقدار اریبی آنها نیز به سمت صفر میل می کند.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \text{MSE}_{\theta}(\hat{\theta}_{(n)}) = 0$$

مثال 6: نمونه تصادفی X_1, \dots, X_n را از متغیر تصادفی دلخواه X با میانگین μ واریانس σ^2 در نظر

$$\bar{x}_n = \frac{1}{n} \sum x_i; \quad U_n = \bar{x}_n + 1 \quad \text{می گیریم. فرض کنید:}$$

نشان دهید که \bar{X}_n یک برآوردکننده سازگار و U_n یک برآوردکننده ناسازگار برای μ می باشد.

$$E(\bar{X}_n) = \mu, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \text{Var}(\bar{X}_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sigma^2}{n} = 0 \quad \text{است. } \bar{X}_n \text{ یک برآوردکننده سازگار نارایب برای } \mu \text{ است.}$$

$$E(U_n) = E(\bar{X}_n + 1) = \mu + 1 \quad U_n \text{ یک برآوردکننده ناسازگار است.}$$

نکته: سازگاری یک خاصیت مجانبی است یعنی خاصیت حدی یک برآوردکننده است. به عبارت دیگر وقتی n به حد کافی بزرگ است می توانیم عملاً مطمئن باشیم که خطایی که با یک برآوردکننده سازگار صورت می گیرد از هر ثابت مثبت مفروضی کمتر خواهد بود.

نکته: شرط کافی (نه لازم) برای اینکه آماده $\hat{\theta}$ یک برآوردکننده سازگار پارامتر θ باشد این است

که:

(1) $\hat{\theta}$ ناریب باشد.

(2) وقتی $n \rightarrow \infty$ ، $\text{Var}(\hat{\theta}) \rightarrow 0$

این شرط، شرط کافی است و شرط لازم نیست. لذا یک برآوردکننده می تواند سازگار باشد بدون اینکه ناریب باشد.

مثال 7: نشان دهید برآوردکننده $\frac{x+1}{n+2}$ یک برآوردکننده سازگار پارامتر θ جامعه دو جمله ای است.

نکته: یک برآوردکننده اریب تنها وقتی می تواند سازگار باشد که بطور مجانبی ناریب باشد یعنی وقتی $n \rightarrow \infty$ ناریب باشد.

مثال 8: برآوردکننده مینیماکس پارامتر θ ی دو جمله ای یعنی $\frac{X + \frac{1}{2}\sqrt{n}}{n + \sqrt{n}}$ مجانباً ناریب است.

$$E\left(\frac{x + \frac{1}{2}\sqrt{n}}{n + \sqrt{n}}\right) = \frac{E(x) + \frac{1}{2}\sqrt{n}}{n + \sqrt{n}} + \frac{n\theta + \frac{1}{2}\sqrt{n}}{n + \sqrt{n}} \neq \theta$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E\left(\frac{x + \frac{1}{2}\sqrt{n}}{n + \sqrt{n}}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n\theta + \frac{1}{2}\sqrt{n}}{n + \sqrt{n}} = \theta$$

مثال 9: نشان دهید که واریانس نمونه ای S^2 ، برآوردکننده سازگار σ^2 برای یک نمونه تصادفی از جامعه های نرمال است.

$$1) E(S^2) = \sigma^2 \text{ ناریب است}$$

$$2) \text{Var}(S^2) = \frac{2\sigma^4}{n-1}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \text{Var}(S^2) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2\sigma^4}{n-1} = 0$$

مثال 10: نشان دهید که \bar{x}^2 یک برآوردکننده مجانباً ناریب μ^2 است.

$$E(\bar{x}^2) = \text{Var}(\bar{x}) + [E(\bar{x})]^2$$

$$E(\bar{x}^2) = \frac{\sigma^2}{n} + \mu^2$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E(\bar{x}^2) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\sigma^2}{n} + \mu^2 \right) = \mu^2$$

پس \bar{x}^2 یک برآوردکننده مجاناً نارایب است.

3-5- تخمین زننده های نارایب کارا

اگر برآوردکننده‌های پارامتر θ متعلق به طبقه برآوردکننده نارایب باشند تابع ریسک، همان واریانس برآوردکننده می‌شود. در صورت وجود، برآوردکننده بهینه، $\hat{\theta}_0$ ، در میان این طبقه برآوردکننده ای است که به ازای تمام مقادیر θ واریانس آن از واریانس هیچ برآوردکننده نارایب دیگر تجاوز نکند. اگر چنین تخمین زننده ای وجود داشته باشد تخمین زننده $\hat{\theta}_0$ به تخمین زننده نارایب با حداقل واریانس θ معروف بوده و نیز در این طبقه از همه کاراتر است.

برای جستجو برای یک چنین برآورد کننده‌ای، تعیین یک حد پائین برای واریانس تمام برآوردکننده های نارایب مفید خواهد بود. یک چنین حدی بوسیله یک نامساوی مشهور به نامساوی کرایمر- راثو ارائه می شود.

فرض کنید $\hat{\theta}$ ، یک برآورد کننده نارایب برای پارامتر θ از جامعه‌ای با تابع چگالی $f_x(x; \theta)$ باشد. تحت شرایط بسیار کلی $\hat{\theta}$ در نامساوی ذیل صدق می‌کند.

$$\text{Var}(\hat{\theta}) \geq \frac{1}{nE\left[\left(\frac{\partial \text{Ln}f(x; \theta)}{\partial \theta}\right)^2\right]}$$

است. اگر X گسسته باشد، $f_x(x; \theta)$ را برداشته و به جای آن از $P(x, \theta)$ استفاده می کنیم.

متأسفانه همواره برآوردکننده‌ای که عملاً دارای حد پائین کرایمر- راثو باشد وجود ندارد. اما در بسیاری از موارد می‌توان نشان داد که برآوردکننده‌ای مانند $\hat{\theta}_0$ دارای چنین حدی است در این صورت $\hat{\theta}_0$ باید برآوردکننده بهینه نارایب باشد. به عبارت دیگر حد پائین کرایمر- راثو متعلق به

تخمین زننده ناریب بهینه است.

قضیه: اگر $\hat{\theta}$ یک برآوردکننده ناریب θ باشد و $\text{Var}(\hat{\theta}) = \frac{1}{nE\left[\left(\frac{\partial \text{Ln}f(x;\theta)}{\partial \theta}\right)^2\right]}$ باشد، آنگاه $\hat{\theta}$ یک

برآوردکننده ناریب با کمترین واریانس از θ است.

مثال 11: نشان دهید \bar{X} یک برآوردکننده ناریب با کمترین واریانس برای میانگین جامعه نرمال است.

$$X \sim N(\mu, \sigma^2)$$

$$f_x(x; \mu) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2} \quad ; \quad -\infty < x < \infty$$

$$\text{Ln } f_x(x; \mu) = \text{Ln} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} - \frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2$$

$$\frac{d \text{Ln } f_x(x; \mu)}{d\mu} = \frac{x-\mu}{\sigma^2}$$

$$E\left\{\frac{d \text{Ln } f_x(x; \mu)}{d\mu}\right\}^2 = \frac{E(x-\mu)^2}{\sigma^4} = \frac{\sigma^2}{\sigma^4} = \frac{1}{\sigma^2}$$

$$\frac{1}{nE\left\{\frac{d \text{Ln } f_x(x; \mu)}{d\mu}\right\}^2} = \frac{\sigma^2}{n} \quad (1)$$

$$\text{Var}(\bar{x}) = \frac{\sigma^2}{n} \quad (2)$$

$$(1) = (2)$$

لذا واریانس میانگین نمونه به حد پائین کریمر-رائو می رسد. بنابراین \bar{X} برآوردکننده ناریب

کمترین واریانس برای میانگین توزیع نرمال با واریانس معلوم است.

4- روش‌های برآورد نقطه‌ای

4-1- روش گشتاورها

فرض کنید x_1, \dots, x_n یک نمونه تصادفی n تایی از یک توزیع دلخواه باشد. در این صورت k امین

گشتاور نمونه M'_k حول مبدا امین گشتاور توزیع حول مبدا بترتیب عبارتست از $M'_k = \frac{\sum_{i=1}^n X_i^k}{n}$

و $E(X^k)$ که گشتاور توزیع حول مبدا، عموماً تابعی از p پارامتر مجهول است. در روش گشتاورها

با برابر قرار دادن p گشتاور اول توزیع با گشتاورهای نظیر نمونه

$$\begin{aligned} M'_1 &= E(x) & \bar{x} &= E(x) \\ M'_2 &= E(x^2) & \frac{\sum x_i^2}{n} &= E(x^2) \\ & \vdots & \vdots & \\ & \vdots & \vdots & \\ M'_p &= E(x^p) & \frac{\sum x_i^p}{n} &= E(x^p) \end{aligned}$$

و حل دستگاه حاصل پارامترهای مجهول جامعه بدست می‌آید. بطور خلاصه: این روش عبارتست از

مساوی قرار دادن گشتاورهای جامعه با گشتاورهای نمونه و بعد حل دستگاه معادلات حاصل.

مثال 12: برآورد کننده های μ و σ^2 یک جامعه نرمال با میانگین مجهول μ و واریانس مجهول σ^2

را به روش گشتاورها تعیین کنید.

برای یک متغیر تصادفی با توزیع نرمال داریم:

$$\begin{aligned} E(x) &= \mu \\ E(x^2) &= \sigma^2 + \mu^2 \end{aligned}$$

در این صورت با مساوی قرار دادن دو گشتاور اول نمونه با دو گشتاور اول توزیع داریم:

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \mu \\ \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2 &= \sigma^2 + \mu^2 \end{aligned}$$

می انجامد. از حل توام این معادلات، برآورد کننده های روش گشتاورها عبارتند از:

$$\hat{\mu} = \bar{x}$$

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{n} - \bar{x}^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n}$$

مثال 13: اگر x_1, \dots, x_n مقادیر یک نمونه تصادفی به اندازه n از جامعه ای با چگالی

$$f(x; \theta) = \begin{cases} \frac{2(\theta - x)}{\theta^2} & ; 0 < x < \theta \\ 0 & \text{سایر مقادیر} \end{cases}$$

باشد. برآورد کننده ای برای θ به روش گشتاورها پیدا کنید.

$$E(x) = \int_0^{\theta} x \frac{2(\theta - x)}{\theta^2} dx = \frac{2}{\theta^2} \int_0^{\theta} (\theta x - x^2) dx = \frac{2}{\theta^2} \left[\frac{1}{2} \theta x^2 - \frac{1}{3} x^3 \right]_0^{\theta} = \frac{2}{\theta^2} \left(\frac{1}{2} \theta^3 - \frac{1}{3} \theta^3 \right) =$$

$$\frac{2}{\theta^2} \cdot \frac{1}{6} \theta^3 = \frac{1}{3} \theta$$

$$M'_1 = E(x)$$

$$\bar{x} = \frac{1}{3} \theta \rightarrow \hat{\theta} = 3\bar{x}$$

مثال 14: اگر x_1, \dots, x_n مقادیر یک نمونه تصادفی به اندازه n از جامعه هندسی باشد. برآورد کننده

پارامتر θ ی توزیع را به روش گشتاورها بدست آورید.

$$f_x(x; \theta) = \theta(1 - \theta)^{x-1}$$

$$E(x) = \frac{1}{\theta} \quad \bar{x} = \frac{1}{\theta} \rightarrow \theta = \frac{1}{\bar{x}}$$

مثال 15: نمونه تصادفی به اندازه n از جامعه گاما داریم. برای برآورد کردن پارامترهای α و β روش

گشتاورها را بکار ببرید.

$$\left. \begin{aligned} \bar{x} &= \alpha\beta \\ \frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{n} &= \alpha\beta^2 + \bar{x}^2 \end{aligned} \right\} \rightarrow \hat{\alpha} = \frac{n\bar{x}^2}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}, \quad \hat{\beta} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n\bar{x}}$$

مثال 16: اگر x_1, \dots, x_n مقادیر یک نمونه تصادفی به اندازه n از جامعه بتا با $\beta = 1$ باشد برآوردی

برای پارامتر α به روش گشتاورها بدست آورید.

$$f_x(x) = \frac{\Gamma(\alpha + \beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} x^{\alpha-1} (1-x)^{\beta-1}$$

$$E(x) = \frac{\alpha}{\alpha + \beta} \quad \bar{x} = \frac{\alpha}{\alpha + 1} \rightarrow \hat{\alpha} = \frac{\bar{x}}{1 - \bar{x}}$$

مثال 17: تابع چگالی زیر داده شده است که در آن θ پارامتر مجهول می باشد. θ را به روش گشتاورها تخمین بزنید.

$$f_x(x) = \theta x^{\theta-1} \quad ; \quad 0 < x < 1 \quad ; \quad 0 < \theta < \infty$$

$$E(x) = \int_0^1 x \theta x^{\theta-1} dx = \theta \int_0^1 x^\theta dx = \frac{\theta}{\theta+1} [x^{\theta+1}]_0^1 = \frac{\theta}{\theta+1}$$

$$\frac{\theta}{\theta+1} = \bar{x} \rightarrow \hat{\theta} = \frac{\bar{x}}{1 - \bar{x}}$$

2-4- روش حداکثر درست‌نمایی (روش MLE)

این روش عبارتست از حداکثر کردن درست‌نمایی احتمال بدست آوردن یک مجموعه از مقادیر نمونه تصادفی. فرض کنید x_n, \dots, x_2, x_1 یک نمونه به حجم n از یک جامعه پیوسته با چگالی احتمال $f_x(x, \theta)$ یا گسسته با احتمال $P_x(x, \theta)$ باشد که θ یک پارامتر مجهول است و باید برآورد شود. در حقیقت می‌خواهیم بجای برآورده θ ، آن تابعی از مشاهدات نمونه‌ای را قرار دهیم که احتمال نمونه به ازای آن حداکثر شود. تابع احتمال L را بصورت:

$$L = P(x_1, x_2, \dots, x_n | \theta) = \prod_{i=1}^n P(x_i = x_i)$$

$$L = f_x(x_1, x_2, \dots, x_n | \theta) = \prod_{i=1}^n f_x(x_i, \theta)$$

تعریف می‌کنیم که همان احتمال توأم برای مشاهدات نمونه است. تخمین θ باید به گونه‌ای صورت پذیرد که بیشترین احتمال برای مشاهده مقادیر x_n, \dots, x_2, x_1 حاصل شود. به عبارت دیگر تخمین زنده بیشترین احتمال $\hat{\theta}$ مقداری خواهد بود که به ازای آن تابع L حداکثر شود. به تابع L ، تابع درست‌نمایی می‌گویند و $\hat{\theta}$ حاصل از این روش را با نماد $\hat{\theta} = \text{MLE}(\theta)$ نمایش می‌دهیم.

توجه: اغلب در حداکثر کردن تابع $f(x_1, \dots, x_n | \theta)$ راحت‌تر است که $\ln L_n$ آن حداکثر شود زیرا

$\ln(L)$ یک تابع صعودی یکنواخت از L است و θ که L را ماکزیمم می‌کند $\ln(L)$ را نیز ماکزیمم می‌کند.

مثال 18: اگر x_1, x_2, \dots, x_n مقادیر یک نمونه تصادفی به اندازه n از یک جامعه نرمال $N(\mu, \sigma^2)$ باشد، برآورد کننده ای برای μ و σ بیابید.

$$L = f(x_1, \dots, x_n | \theta) = \prod_{i=1}^n f(x_i | \mu, \sigma) = \prod_{i=1}^n \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x_i - \mu)^2} =$$

$$\left(\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\right)^n e^{-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2}$$

$$\ln L = -n \ln \sigma\sqrt{2\pi} - \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2$$

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \mu} = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu) = 0 \rightarrow \sum_{i=1}^n (x_i - \mu) = 0 \rightarrow \hat{\mu} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} = \bar{x}$$

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \sigma} = -\frac{n}{\sigma} + \frac{1}{\sigma^3} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2 = 0 \Rightarrow \hat{\sigma}^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n}$$

مثال 19: اگر x_1, \dots, x_n مقادیر یک نمونه تصادفی به اندازه n از جامعه برنولی باشد. MLE پارامتر برنولی را بدست آورید.

$$p_x(x_i, p) = p^{x_i} (1-p)^{1-x_i}, x_i = 0, 1$$

$$L = p^{\sum x_i} (1-p)^{n - \sum x_i}$$

$$\ln L = (\ln p) \left(\sum_{i=1}^n x_i \right) + [\ln(1-p)] \left(n - \sum_{i=1}^n x_i \right)$$

$$\frac{d \ln L}{dp} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{p} - n - \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{1-p} = 0 \Rightarrow \frac{\sum x_i}{p} = \frac{n - \sum x_i}{1-p} \Rightarrow \sum_{i=1}^n x_i = np \Rightarrow p = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}$$

$$\hat{p} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} = \bar{x}$$

مثال 20: اگر x_1, \dots, x_n و x_2 نمونه ای به اندازه n از جامعه دو جمله ای با پارامتر $p = \theta$ باشد. MLE

پارامتر دوجمله‌ای را بدست آورید.

$$L(\theta) = f(x; \theta) = \binom{n}{x} \theta^x (1-\theta)^{n-x} \quad \text{راه حل اول:}$$

$$\frac{\partial f}{\partial \theta} = \binom{n}{x} \left[x \theta^{x-1} (1-\theta)^{n-x} - (n-x) \theta^x (1-\theta)^{n-x-1} \right] = 0$$

$$f_x(x; \theta) \left[x \theta^{-1} - (n-x)(1-\theta)^{-1} \right] = 0$$

$$\frac{x}{\theta} - \frac{n-x}{1-\theta} = 0 \Rightarrow x = n\theta \Rightarrow \hat{\theta} = \frac{x}{n}$$

راه حل دوم:

$$\ln L(\theta) = \ln \binom{n}{x} + x \ln \theta + (n-x) \ln(1-\theta)$$

$$\frac{d \ln L(\theta)}{d\theta} = \frac{x}{\theta} - \frac{n-x}{1-\theta} = 0 \Rightarrow \hat{\theta} = \frac{x}{n}$$

خواص MLE

1- با افزایش n توزیع MLE به توزیع نرمال میل می‌کند و در زمانیکه $n \rightarrow \infty$ MLE توزیع نرمال دارد.

2- در زمانیکه $n \rightarrow \infty$ ، MLE سازگار است و به تبع ناریب است.

3- اگر $\hat{\theta}$ برآورد کننده به روش حداکثر درست نمایی برای θ باشد و n به سمت ∞ میل کند، آنگاه واریانس $\hat{\theta}$ برابر حد پایین نامساوی کرایمر - راتو خواهد شد.

4- MLE دارای خاصیت پایایی است یعنی اگر فرض کنید $\hat{\theta} = (\hat{\theta}_1, \dots, \hat{\theta}_k)$ که در آن

$\hat{\theta}_j = \hat{f}(x_1, \dots, x_n)$ است که برآورد کننده درست‌نمایی ماکزیمم $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_4)$ در چگالی

$f(\theta_1, \dots, \theta_n)$ باشد، آنگاه برآورد کننده درست‌نمایی ماکزیمم $\tau(\theta) = (\tau_1(\theta), \dots, \tau_r(\theta))$ برابر است با

$$\tau(\hat{\theta}) = (\tau_1(\hat{\theta}), \dots, \tau_r(\hat{\theta}))$$

مثال 21: فرض کنید $x \sim N(\mu, 1)$ برآورد کننده MLE پارامتر $\alpha = \mu^2$ را پیدا کنید.

$$\hat{\mu} = \bar{x} \Rightarrow \hat{\alpha} = \hat{\mu}^2 = \bar{x}^2$$

5- برآوردکننده های کافی

برآورد کننده ای مانند $\hat{\theta}$ را کافی می نامیم در صورتی که از همه اطلاعات یک نمونه، مربوط به برآورد پارامتر θ یک جامعه بهره‌برداری کند. یعنی اگر تمام دانشی را که می توانیم با مشخص کردن مقادیر فردی نمونه ها و ترتیب آنها بدست آوریم، بتوانیم تنها با مشاهده مقدار آماره $\hat{\theta}$ هم بدست آوریم. این را می توان بر حسب توزیع شرطی مقادیر نمونه به فرض $\hat{\theta}$ بیان کرد. این کمیت با عبارت زیر داده می شود.

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n | \hat{\theta}) = \frac{f(x_1, x_2, \dots, x_n, \hat{\theta})}{g(\hat{\theta})}$$

اگر این عبارت به $\hat{\theta}$ بستگی داشته باشد، مقادیر خاص x_n, \dots, x_2, x_1 که $\hat{\theta}$ را بدست می دهند برای برخی مقادیر θ محتملتر از سایر مقادیرند و دانستن این مقادیر نمونه ای به برآورد θ کمک خواهد کرد. اگر این عبارت به θ بستگی نداشته باشد، مقادیر خاص x_n, \dots, x_2, x_1 که $\hat{\theta}$ را بدست می دهند برای هر مقدار θ به یک اندازه محتمل اند و دانستن این مقادیر نمونه ای به برآورد θ کمکی نخواهد کرد.

تعریف: آماره $\hat{\theta}$ یک برآوردکننده کافی پارامتر θ است اگر و تنها اگر به ازای هر مقدار $\hat{\theta}$ ، توزیع شرطی نمونه تصادفی x_n, \dots, x_2, x_1 به فرض $\hat{\theta}$ ، مستقل از θ باشد.

مثال 22: اگر x_n, \dots, x_2, x_1 متغیرهای تصادفی برنولی با پارامتر یکسان θ باشند. نشان دهید که

آماره $\hat{\theta} = \frac{X}{n}$ که در آن $X = x_1 + \dots + x_n$ ، برآورد کننده کافی برای θ است.

$$f(x; \theta) = \theta^{x_i} (1 - \theta)^{1 - x_i} \quad ; \quad x_i = 0, 1$$

$$f(x_1, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^n \theta^{x_i} (1 - \theta)^{1 - x_i} = \theta^{\sum x_i} (1 - \theta)^{n - \sum x_i} = \theta^x (1 - \theta)^{n - x} = \theta^{n\hat{\theta}} (1 - \theta)^{n - n\hat{\theta}}$$

X یک متغیر دو جمله ای با پارامترهای n و θ است لذا:

$$b(x; n, \theta) = \binom{n}{x} \theta^x (1-\theta)^{n-x}$$

$$g(\hat{\theta}) = \binom{n}{n\hat{\theta}} \theta^{n\hat{\theta}} (1-\theta)^{n-n\hat{\theta}} \quad ; \quad \hat{\theta} = 0, \frac{1}{n}, \dots, 1$$

$$f(x_1, \dots, x_n | \hat{\theta}) = \frac{f(x_1, \dots, x_n)}{g(\hat{\theta})} = \frac{\theta^{n\hat{\theta}} (1-\theta)^{n-n\hat{\theta}}}{\binom{n}{n\hat{\theta}} \theta^{n\hat{\theta}} (1-\theta)^{n-n\hat{\theta}}} = \frac{1}{\binom{n}{x}}$$

که به θ بستگی ندارد.

مثال 23: نشان دهید که آماره $y = \frac{1}{6}(x_1 + 2x_2 + 3x_3)$ برای برآورد پارامتر θ ی جامعه برنولی،

کافی نیست.

باید نشان دهیم $f(x_1, x_2, x_3 | y) = \frac{f(x_1, x_2, x_3, y)}{g(y)}$ به ازای برخی مقادیر x_3, x_2, x_1 مستقل از θ

نیست. بنابراین حالت خاصی را در نظر می‌گیریم که در آن $x_3 = 0, x_2 = 1, x_1 = 1$ بطوری که

$$f\left(1, 1, 0 \mid y = \frac{1}{2}\right) = \frac{P\left(x_1 = 1, x_2 = 1, x_3 = 0, y = \frac{1}{2}\right)}{p\left(y = \frac{1}{2}\right)} = \frac{f(1, 1, 0)}{f(1, 1, 0) + f(0, 0, 1)} = \frac{\theta^2(1-\theta)}{\theta^2(1-\theta) + \theta(1-\theta)^2} = \theta$$

که به θ بستگی دارد.

قضیه: آماره θ یک برآوردکننده کافی پارامتر θ است اگر و فقط اگر چگالی یا توزیع احتمال توام

نمونه تصادفی را بتوان تجزیه کرد بطوری که

$$f(x_1, \dots, x_n; \theta) = g(\hat{\theta}, \theta) h(x_1, \dots, x_n)$$

که در آن $g(\hat{\theta}, \theta)$ تنها به $\hat{\theta}$ و θ بستگی دارد و $h(x_1, \dots, x_n)$ به θ بستگی ندارد.

مثال 24: نشان دهید که \bar{x} یک برآورد کننده کافی μ جامعه نرمال یا واریانس معلوم σ^2 است.

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n, \mu) = \left(\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \right)^n \cdot e^{-\frac{1}{2}\sum \left(\frac{x_i - \mu}{\sigma} \right)^2}$$

$$\sum (x_i - \mu)^2 = \sum (x_i - \bar{x})^2 + n(\bar{x} - \mu)^2$$

$$f(x_1, \dots, x_n; \mu) = \left\{ \frac{\sqrt{n}}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{\bar{x} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \right)^2} \right\} \times \left\{ \frac{1}{\sqrt{n}} \left(\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \right)^{n-1} \cdot e^{-\frac{1}{2} \sum \left(\frac{x_i - \bar{x}}{\sigma} \right)^2} \right\}$$

که در آن اولین عامل سمت راست تنها به برآورد \bar{x} و به میانگین جامعه، μ ، بستگی دارد و دومین عامل شامل μ نیست. بنابراین \bar{x} یک برآورد کننده کافی μ جامعه نرمال با واریانس معلوم σ^2 است.

1-3- مقدمه

نوع دیگر برآورد، برآورد فاصله‌ای به شکل $[C_1, C_2]$ است که در آن C_1 حد پائین و C_2 حد بالا است بنابراین اگر پارامتری که باید برآورد کرده شود با θ معرفی شود، $[C_1, C_2]$ یک برآورد کننده فاصله‌ای θ است به طوری که با احتمال مفروض، $1-\alpha$ ، $C_1 \leq \theta \leq C_2$ باشد. C_2, C_1 حدود اطمینان پارامتر مفروض و فاصله بین آنها یک فاصله اطمینان $100(1-\alpha)\%$ نامیده می‌شود. به کسر $(1-\alpha)$ اغلب ضریب اطمینان گفته می‌شود.

2-3- فاصله اطمینان برای میانگین یک توزیع نرمال هرگاه انحراف معیار معلوم باشد

فرض کنید متغیر تصادفی x دارای توزیع نرمال $N(\mu, \sigma)$ است. یک نمونه تصادفی n تایی از این جامعه گرفته می‌شود. اگر \bar{x} میانگین نمونه باشد در نتیجه $\bar{x} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$ است. در این صورت فاصله اطمینان $100(1-\alpha)\%$ برای μ به صورت ذیل تعیین می‌شود:

$$\frac{\bar{x} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}} \sim Z$$

$$P\left\{-Z_{\frac{\alpha}{2}} < Z < Z_{\frac{\alpha}{2}}\right\} = 1 - \alpha$$

$$P\left\{-Z_{\frac{\alpha}{2}} \leq \frac{\bar{x} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}} \leq Z_{\frac{\alpha}{2}}\right\} = 1 - \alpha$$

$$P\left\{-Z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq \bar{x} - \mu \leq Z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right\} = 1 - \alpha$$

$$P\left\{\bar{x} - Z_{\frac{\alpha}{2}} \sigma / \sqrt{n} \leq \mu \leq \bar{x} + Z_{\frac{\alpha}{2}} \sigma / \sqrt{n}\right\} = 1 - \alpha$$

بنابراین فاصله اطمینان $100(1-\alpha)\%$ عبارتست از:

$$\bar{x} \pm z_{\frac{\alpha}{2}} \sigma / \sqrt{n}$$

یعنی:

$$\bar{x} - z_{\frac{\alpha}{2}} \sigma / \sqrt{n} \leq \mu \leq \bar{x} + z_{\frac{\alpha}{2}} \sigma / \sqrt{n}$$

و طول فاصله اطمینان برابر است با:

$$\frac{2z_{\alpha} \sigma}{\sqrt{n}}$$

در نهایت فاصله اطمینان یک طرفه $(1-\alpha)100\%$ عبارت است از:

$$\begin{aligned} p(z \geq -z_{\alpha}) &= 1-\alpha & p(z \leq z_{\alpha}) &= 1-\alpha \\ p\left\{\frac{\bar{x}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \geq -z_{\alpha}\right\} &= 1-\alpha & p\left\{\frac{\bar{x}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \leq z_{\alpha}\right\} &= 1-\alpha \\ \mu \leq \bar{x} + z_{\alpha} \sigma / \sqrt{n} & & \mu \geq \bar{x} - z_{\alpha} \sigma / \sqrt{n} & \end{aligned}$$

مثال 1. میانگین نمونه یک نمونه تصادفی 100 تایی از موشک‌های انبار شده 2208 شده است. انحراف معیار معلوم و مساوی 40 است. برای میانگین واقعی یک فاصله اطمینان 0/99 پیدا کنید.

$$\begin{aligned} p\left(\bar{x} - z_{\alpha} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{x} + z_{\alpha} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) &= 1-\alpha \\ 2208 - z_{0.005} 40.10 \leq \mu \leq 2208 + z_{0.005} 40.10 \end{aligned}$$

مثال 2. متغیر تصادفی x توزیع نرمال با میانگین مجهول μ دارد. یک فاصله اطمینان 95 درصد بصورت $[7/12$ و $3/72]$ برای μ ارائه شده است. بدین ترتیب، مقدار بدست آمده برای میانگین نمونه چقدر است؟

$$\begin{aligned} \bar{x} + Z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} &= 7.12 \\ \bar{x} - Z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} &= 3.72 \\ \hline 2\bar{x} &= 10.84 \Rightarrow \bar{x} = 5.42 \end{aligned}$$

تذکر: بنا به قضیه حد مرکزی، فاصله اطمینان فوق را در صورتی که $n \geq 30$ باشد، می‌توان در مورد جامعه‌های غیر نرمال نیز به کار برد و در زمانی که σ نامعلوم است به جای σ ، مقدار انحراف معیار نمونه s را قرار می‌دهیم.

3-3- فاصله اطمینان برای میانگین یک توزیع نرمال هرگاه انحراف معیار مجهول باشد

فرض کنید x یک متغیر تصادفی دارای توزیع نرمال با میانگین μ و انحراف معیار (مجهول) σ باشد. یک نمونه تصادفی n تایی گرفته و فرض کنید \bar{x} میانگین نمونه و S انحراف معیار نمونه باشد. در این صورت فاصله اطمینان $100(1-\alpha)\%$ برای μ بصورت ذیل بدست می‌آید.

$$\frac{\bar{x} - \mu}{s/\sqrt{n}} = t_{(n-1)}$$

$$P\left\{-t_{\frac{\alpha}{2}, n-1} \leq t_{(n-1)} \leq t_{\frac{\alpha}{2}, n-1}\right\} = 1 - \alpha$$

$$P\left\{-t_{\frac{\alpha}{2}, n-1} \leq \frac{\bar{x} - \mu}{s/\sqrt{n}} \leq t_{\frac{\alpha}{2}, n-1}\right\} = 1 - \alpha$$

$$P\left\{-t_{\frac{\alpha}{2}, n-1} \frac{s}{\sqrt{n}} \leq \bar{x} - \mu \leq t_{\frac{\alpha}{2}, n-1} \frac{s}{\sqrt{n}}\right\} = 1 - \alpha$$

$$P\left\{x - t_{\frac{\alpha}{2}, n-1} s/\sqrt{n} \leq \mu \leq \bar{x} + t_{\frac{\alpha}{2}, n-1} s/\sqrt{n}\right\} = 1 - \alpha$$

بنابراین فاصله اطمینان $100(1-\alpha)\%$ عبارتست از:

$$\bar{x} \pm t_{\frac{\alpha}{2}, n-1} s/\sqrt{n}$$

$$\bar{x} - t_{\frac{\alpha}{2}, n-1} s/\sqrt{n} \leq \mu \leq \bar{x} + t_{\frac{\alpha}{2}, n-1} s/\sqrt{n}$$

بعبارت دیگر:

طول فاصله اطمینان برابر است با:

$$2t_{\frac{\alpha}{2}, n-1} s/\sqrt{n}$$

و در نهایت فاصله اطمینان یکطرفه برای μ :

$$\begin{aligned}
 p\left\{-t_{\frac{\alpha}{2}, n-1} \leq t_{n-1}\right\} &= 1-\alpha & p(t_{n-1} \leq t_{\alpha}) \\
 p\left\{-t_{\alpha, n-1} \leq \frac{\bar{x}-\mu}{s/\sqrt{n}}\right\} &= 1-\alpha & p\left\{\frac{\bar{x}-\mu}{s/\sqrt{n}} \leq t_{\alpha, n-1}\right\} = 1-\alpha \\
 p\left\{\mu \leq \bar{x} + t_{\alpha, n-1} s/\sqrt{n}\right\} &= 1-\alpha & p\left\{\mu \leq \bar{x} - t_{\alpha, n-1} s/\sqrt{n}\right\} = 1-\alpha \\
 \mu \leq \bar{x} + t_{\alpha, n-1} s/\sqrt{n} & & \mu \geq \bar{x} - t_{\alpha, n-1} s/\sqrt{n}
 \end{aligned}$$

مثال 3. برای مدت چندین سال یک امتحان قوه ریاضی برای همه دانشجویان تازه وارد دانشگاهی ترتیب داده شده است. اگر برای 64 دانشجو که تصادف در این مدت زمان انتخاب شده اند متوسط زمانی که صرف جواب دادن به این امتحان کرده اند $28/5$ دقیقه و واریانس زمانها $9/3$ دقیقه باشد یک فاصله اطمینان 99% برای متوسط واقعی زمانی که یک دانشجویی سال اول صرف این امتحان می کند بسازید:

$$\begin{aligned}
 n &= 64 \\
 \bar{x} &= 28.5 & \bar{x} - t_{\frac{\alpha}{2}} s/\sqrt{n} < \mu < \bar{x} + t_{\frac{\alpha}{2}} s/\sqrt{n} \\
 s^2 &= 9.3 & 28.5 - t_{0.005} \sqrt{9.3}/8 < \mu < 28.5 + t_{0.005} \sqrt{9.3}/8 \\
 \alpha &= 0.01
 \end{aligned}$$

مثال 4. طول مجسمه های اسکلت فسیل شده نوعی از پرندگان که نسل آنها نابود شده است دارای میانگین $5/68$ cm و انحراف معیار $0/29$ cm است. با فرض اینکه چنین اندازه هایی بطور نرمال توزیع شده اند. یک فاصله اطمینان 95% برای طول میانگین این نوع پرندگان پیدا کنید.

$$\begin{aligned}
 \bar{x} - t_{\frac{\alpha}{2}} s/\sqrt{n} &< \mu < \bar{x} + t_{\frac{\alpha}{2}} s/\sqrt{n} \\
 5.68 - t_{0.025} 0.29/\sqrt{10} &< \mu < 5.68 + t_{0.025} (0/29)/\sqrt{10} \\
 5.68 - (2.262) \frac{0.29}{3.016} &< \mu < 5/68 + (2.262) \frac{0.29}{3.16} \\
 5.4724 &< \mu < 5.8875
 \end{aligned}$$

3-4- فاصله اطمینان برای انحراف معیار یک توزیع نرمال که μ آن مجهول است

فرض کنید متغیر تصادفی x داری توزیع نرمال با میانگین مجهول μ و انحراف معیار مجهول σ است. یک نمونه تصادفی n تایی را در نظر بگیرید. فاصله اطمینان $100(1-\alpha)\%$ برای σ^2 بصورت ذیل بدست می آید.

$$\frac{(n-1)s^2}{\sigma^2} = \chi_{(n-1)}^2$$

$$p\left\{\chi_{1-\frac{\alpha}{2},n-1}^2 \leq \chi_{(n-1)}^2 \leq \chi_{\frac{\alpha}{2}}^2\right\} = 1-\alpha$$

$$p\left\{\chi_{1-\frac{\alpha}{2},n-1}^2 \leq \frac{(n-1)s^2}{\sigma^2} \leq \chi_{\frac{\alpha}{2}}^2\right\} = 1-\alpha$$

$$p\left\{\frac{(n-1)s^2}{\chi_{\frac{\alpha}{2},n-1}^2} \leq \sigma^2 \leq \chi_{1-\frac{\alpha}{2},n-1}^2 \frac{(n-1)s^2}\right\} = 1-\alpha$$

لذا فاصله اطمینان $100(1-\alpha)\%$ برای σ^2 برابر است با:

$$\frac{(n-1)s^2}{\chi_{\frac{\alpha}{2},n-1}^2} \leq \sigma^2 \leq \frac{(n-1)s^2}{\chi_{1-\frac{\alpha}{2},n-1}^2}$$

و برای σ برابر است با:

$$s \sqrt{\frac{n-1}{\chi_{\frac{\alpha}{2},n-1}^2}} \leq \sigma \leq s \sqrt{\frac{n-1}{\chi_{1-\frac{\alpha}{2},n-1}^2}}$$

و در نهایت فاصله اطمینان یکطرفه $100(1-\alpha)\%$ عبارت است از:

$$p\left\{\chi_{1-\alpha,n-1}^2 \leq \chi_{(n-1)}^2\right\} = 1-\alpha \quad \left\{\chi_{(n-1)}^2 \leq \chi_{\alpha,n-1}^2\right\} = 1-\alpha$$

$$p\left\{\chi_{1-\alpha,n-1}^2 \leq \frac{(n-1)s^2}{\sigma^2}\right\} = 1-\alpha \quad p\left\{\frac{(n-1)s^2}{\sigma^2} \leq \chi_{\alpha,n-1}^2\right\} = 1-\alpha$$

$$p\left\{\sigma^2 \leq \frac{(n-1)s^2}{\chi_{1-\alpha,n-1}^2}\right\} = 1-\alpha \quad p\left\{\sigma^2 \geq \frac{(n-1)s^2}{\chi_{\alpha,n-1}^2}\right\} = 1-\alpha$$

$$\sigma^2 \leq \frac{(n-1)s^2}{\chi_{1-\alpha,n-1}^2} \quad \sigma^2 \geq \frac{(n-1)s^2}{\chi_{\alpha,n-1}^2}$$

$$\sigma \leq \sqrt{\frac{n-1}{\chi_{1-\alpha,n-1}^2}} \quad \sigma \leq \sqrt{\frac{n-1}{\chi_{\alpha,n-1}^2}}$$

مثال 5. قطر کامل شده کابل مسلح برق، دارای توزیع نرمال است. یک نمونه 20 تایی، دارای میانگین 0,79 و انحراف معیار 0,01 می‌دهد. یک فاصله اطمینان 95% برای σ پیدا کنید.

$$\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}; n-1}} < \sigma^2 < \frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}; n-1}}$$

$$\frac{19(0.0001)}{32.85} < \sigma^2 < \frac{19(0.0001)}{8.9}$$

3-5- فاصله اطمینان برای تفاوت بین میانگین‌های دو توزیع نرمال هرگاه انحراف معیار در هر دو جامعه معلوم باشند فرض کنید X یک متغیر تصادفی دارای توزیع نرمال با میانگین μ_x و انحراف معیار معلوم σ_x و Y یک متغیر تصادفی مستقل از X دارای توزیع نرمال با میانگین μ_y و انحراف معیار معلوم σ_y باشد. فرض کنید \bar{x} معرف میانگین یک نمونه تصادفی n_x تایی از X و \bar{y} معرف میانگین یک نمونه تصادفی n_y تایی از Y باشد. فاصله اطمینان $100(1-\alpha)\%$ برای $\mu_x - \mu_y$ عبارتست از:

$$\frac{(\bar{x} - \bar{y}) - (\mu_x - \mu_y)}{\sqrt{\frac{\sigma_x^2}{n_x} + \frac{\sigma_y^2}{n_y}}} = z$$

$$P\left\{-Z_{\alpha/2} \leq Z \leq Z_{\alpha/2}\right\} = 1 - \alpha$$

$$P\left\{-Z_{\alpha/2} \leq \frac{(\bar{x} - \bar{y}) - (\mu_x - \mu_y)}{\sqrt{\frac{\sigma_x^2}{n_x} + \frac{\sigma_y^2}{n_y}}} \leq Z_{\alpha/2}\right\} = 1 - \alpha$$

$$P\left\{\bar{x} - \bar{y} - Z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{\sigma_x^2}{n_x} + \frac{\sigma_y^2}{n_y}} \leq \mu_x - \mu_y \leq \bar{x} - \bar{y} + Z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{\sigma_x^2}{n_x} + \frac{\sigma_y^2}{n_y}}\right\} = 1 - \alpha$$

لذا فاصله اطمینان $100(1-\alpha)\%$ به صورت زیر است:

$$\bar{x} - \bar{y} \pm Z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{\sigma_x^2}{n_x} + \frac{\sigma_y^2}{n_y}}$$

فاصله اطمینان یک طرفه $100(1-\alpha)\%$:

یک فاصله اطمینان یک طرفه $100(1-\alpha)\%$ بالا به صورت

$$\bar{x} - \bar{y} + Z_{\alpha} \sqrt{\frac{\sigma_x^2}{n_x} + \frac{\sigma_y^2}{n_y}}$$

و یک فاصله اطمینان یک طرفه $100(1-\alpha)\%$ پائین به صورت

$$\bar{x} - \bar{y} - Z_{\alpha} \sqrt{\frac{\sigma_x^2}{n_x} + \frac{\sigma_y^2}{n_y}}$$

مثال 6. به منظور آزمایش تفاوت تاثیر دو روش کشت گندم، تجربه ای اجرا می شود. ده قطعه زمین شخم کم عمق و پانزده قطعه شخم عمیق زده می شوند. میانگین استحصال گروه اول در هر جریب 40/8 تن و میانگین گروه دوم 44/7 است. فرض کنید انحراف معیار شخم کم عمق معادل 0/6 تن و انحراف معیار شخم عمیق 0/8 باشد. یک فاصله اطمینان 90% برای تفاوت استحصال ارائه کنید.

$$\bar{x} - \bar{y} \pm Z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{\sigma_x^2}{n_x} + \frac{\sigma_y^2}{n_y}}$$

$$40.8 - 44.7 \pm Z_{\%5} \sqrt{\frac{0.36}{10} + \frac{0.64}{15}}$$

مثال 7. از دو نوع دستگاه فتوکپی نشان می دهد که زمان تعمیر V بار از کارافتادگی های دستگاه اول به طور متوسط 80/7 دقیقه و انحراف معیار دستگاه اول 19/4 دقیقه بوده است و زمان تعمیر 60 بار از کارافتادگی دستگاه دوم به طور متوسط 88/1 دقیقه و انحراف معیار دستگاه دوم 18/8 دقیقه بوده است. یک فاصله اطمینان 90% برای تفاضل بین زمانهای متوسط تعمیر از کارافتادگی های دو دستگاه فتوکپی پیدا کنید.

$$(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - Z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}} < \mu_1 - \mu_2 < (\bar{x}_1 - \bar{x}_2) + Z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}}$$

تذکر: می توان به کمک قضیه حد مرکزی، این نتیجه را برای نمونه های تصادفی از جامعه های غیرنرمال با واریانس های معلوم δ_1^2 و δ_2^2 نیز به کاربرد مشروط بر اینکه $n_1, n_2 \geq 30$ باشند.

نکته: برای ساختن یک فاصله اطمینان $100(1-\alpha)\%$ برای $\mu_1 - \mu_2$ موقعی که σ_1 و σ_2 نامعلوم باشند ولی $n_1, n_2 > 30$ باشند به جای σ_1 و σ_2 مقادیر انحراف معیارهای نمونه ای S_1 و S_2 را قرار می دهیم و مانند قبل عمل می کنیم.

3-6- فاصله اطمینان برای تفاوت بین میانگین‌های دو توزیع نرمال هرگاه هر دو انحراف معیار مجهول

ولی مساوی و $n_y \leq 30$ باشند: فرض کنید x یک متغیر تصادفی دارای توزیع نرمال با میانگین μ_y و انحراف معیار مجهول σ باشد. فرض کنید \bar{x} میانگین یک نمونه تصادفی متشکل از n_x مشاهده از x و \bar{y} میانگین یک نمونه تصادفی متشکل از n_y مشاهده از y باشد. فاصله اطمینان $100(1-\alpha)\%$ برای $\mu_x - \mu_y$ به صورت:

$$\frac{(\bar{x} - \bar{y}) - (\mu_x - \mu_y)}{\sqrt{\frac{(n_x - 1)S_x^2 + (n_y - 1)S_y^2}{n_x + n_y - 2}} \sqrt{\frac{1}{n_x} + \frac{1}{n_y}}} = t_{n_x + n_y - 2}$$

$n_x, n_y \leq 30$ نیز کوچک هستند.

$$P\left(-t_{\alpha/2; n_x + n_y - 2} \leq t_{n_x + n_y - 2} \leq t_{\alpha/2; n_x + n_y - 2}\right) = 1 - \alpha$$

$$P\left\{-t_{\alpha/2; n_x + n_y - 2} \leq \frac{(\bar{x} - \bar{y}) - (\mu_x - \mu_y)}{\sqrt{\frac{(n_x - 1)S_x^2 + (n_y - 1)S_y^2}{n_x + n_y - 2}} \sqrt{\frac{1}{n_x} + \frac{1}{n_y}}} \leq t_{\alpha/2; n_x + n_y - 2}\right\} = 1 - \alpha$$

$$P\left\{\bar{x} - \bar{y} - t_{\alpha/2; n_x + n_y - 2} \sqrt{\frac{1}{n_x} + \frac{1}{n_y}} \sqrt{\frac{(n_x - 1)S_x^2 + (n_y - 1)S_y^2}{n_x + n_y - 2}} \leq\right.$$

$$\left.\mu_x - \mu_y \leq \bar{x} + \bar{y} + t_{\alpha/2; n_x + n_y - 2} \sqrt{\frac{1}{n_x} + \frac{1}{n_y}} \sqrt{\frac{(n_x - 1)S_x^2 + (n_y - 1)S_y^2}{n_x + n_y - 2}} = 1 - \alpha\right.$$

لذا فاصله اطمینان $100(1-\alpha)\%$ عبارتست از:

$$\bar{x} - \bar{y} \pm t_{\alpha/2; n_x + n_y - 2} \sqrt{\frac{1}{n_x} + \frac{1}{n_y}} \sqrt{\frac{(n_x - 1)S_x^2 + (n_y - 1)S_y^2}{n_x + n_y - 2}}$$

فاصله اطمینان یک طرفه $100(1-\alpha)\%$:

یک فاصله اطمینان یک طرفه $100(1-\alpha)\%$ بالا به صورت

$$\bar{x} - \bar{y} + t_{\alpha; n_x + n_y - 2} \sqrt{\frac{1}{n_x} + \frac{1}{n_y}} \sqrt{\frac{(n_x - 1)S_x^2 + (n_y - 1)S_y^2}{n_x + n_y - 2}}$$

و یک فاصله اطمینان $100(1-\alpha)\%$ پائین به صورت

$$\bar{x} - \bar{y} - t_{\alpha; n_x+n_y-2} \sqrt{\frac{1}{n_x} + \frac{1}{n_y}} \sqrt{\frac{(n_x-1)S_x^2 + (n_y-1)S_y^2}{n_x+n_y-2}}$$

ارائه می‌شود.

مثال 8. مطالعه از دو نوع دستگاه فتوکپی نشان می‌دهد که زمان تعمیر 60 بار از کارافتادگی‌های دستگاه اول به طور متوسط 80/7 دقیقه با انحراف معیار 19/4 دقیقه بوده است و زمان تعمیر 60 بار از کارافتادگی دستگاه دوم به طور متوسط 88/1 دقیقه با انحراف معیار 18/8 دقیقه بوده است. یک فاصله اطمینان 90% برای تفاضل بین زمانهای متوسط تعمیر از کارافتادگی‌های دو دستگاه فتوکپی پیدا کنید.

$$n_1 = 60 \quad n_2 = 60$$

$$\bar{x}_1 = 80.7 \quad \bar{x}_2 = 88.1$$

$$S_1 = 19.4 \quad S_2 = 18.8$$

$$(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - Z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}} < \mu_1 - \mu_2 < (\bar{x}_1 - \bar{x}_2) + Z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}}$$

$$(80.7 - 88.1) - Z_{0.05} \sqrt{\frac{(19.4)^2}{60} + \frac{(18.8)^2}{60}} < \mu_1 - \mu_2 < (80.7 - 88.1) + Z_{0.05} \sqrt{\frac{(19.4)^2}{60} + \frac{(18.8)^2}{60}}$$

مثال 9. دوازده درخت نوع خاصی از مرکبات که به تصادف انتخاب شده‌اند دارای میانگین ارتفاع 13/8 با انحراف معیار 1/2 و پانزده درخت نوع دیگری که به تصادف انتخاب شده‌اند دارای میانگین ارتفاع 12/9 و انحراف معیار 1/5 است. با فرض اینکه نمونه‌های تصادفی از جامعه‌های نرمال با واریانسهای برابر انتخاب شده‌اند یک فاصله اطمینان 95% برای تفاضل‌های ارتفاع دو نوع درخت مرکب پیدا کنید.

$$\bar{x} - \bar{y} \pm t_{\alpha/2; n_x+n_y-2} \sqrt{\frac{1}{n_x} + \frac{1}{n_y}} \sqrt{\frac{(n_x-1)S_x^2 + (n_y-1)S_y^2}{n_x+n_y-2}} =$$

$$13.8 - 12.9 \pm t_{0.025; 26} \sqrt{\frac{1}{12} + \frac{1}{15}} \sqrt{\frac{11 \times (1.2)^2 + 14(1.5)^2}{26}} = 0.9 \pm 2.056(0.3873)(1.35)$$

$$-0.198 < \mu_1 - \mu_2 < 1.998$$

7-3- فاصله اطمینان برای $\mu_1 - \mu_2$ نمونه‌های کوچک در حالتی که $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$ و مجهول هستند

حال فرض کنید که مساله پیدا کردن یک فاصله اطمینان جهت $\mu_1 - \mu_2$ برای نمونه‌های کوچکی باشد که پراش جمعیت‌های آنها مساوی نبوده به علاوه این امکان هم وجود ندارد که نمونه‌ها را با اندازه‌های مساوی اختیار نمائیم.

آماره‌ای که در چنین حالت بکار گرفته می‌شود غالباً بصورت زیر است:

$$T' = \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}}}$$

که تقریباً دارای توزیع t با v درجه آزادی خواهد بود که v از رابطه زیر محاسبه می‌شود:

$$v = \frac{\left(\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}\right)^2}{\left[\frac{\left(\frac{S_1^2}{n_1}\right)^2}{n_1 - 1}\right] + \left[\frac{\left(\frac{S_2^2}{n_2}\right)^2}{n_2 - 1}\right]}$$

از آنجا که مقدار v فوق به ندرت عدد صحیح می‌شود لذا آنرا به نزدیکترین عدد صحیح گرد می‌کنیم.

با استفاده از آماره T' می‌توان نوشت:

$$P\left(-t_{\alpha/2} < T' < t_{\alpha/2}\right) = 1 - \alpha$$

لذا فاصله اطمینان $100(1 - \alpha)\%$ برای $\mu_1 - \mu_2$ بصورت زیر است:

$$(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - t_{\alpha/2} \sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}} < \mu_1 - \mu_2 < (\bar{x}_1 - \bar{x}_2) + t_{\alpha/2} \sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}}$$

که در آن \bar{x}_1 و \bar{x}_2 و S_1^2 و S_2^2 به ترتیب میانگین و پراش نمونه‌های کوچک به اندازه‌های n_1 و n_2 هستند که از جمعیت‌های تقریباً نرمال اختیار می‌شوند.

محاسبه خطا در برآورد μ بوسیله \bar{x} (محاسبه خطای ماکزیمم برآورد)

$$\bar{x} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} Z_{\alpha/2} < \mu < \bar{x} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} Z_{\alpha/2} \quad \text{اگر در فرمول:}$$

$$-\frac{\sigma}{\sqrt{n}} Z_{\alpha/2} < \mu - \bar{x} < \frac{\sigma}{\sqrt{n}} Z_{\alpha/2} \quad \text{از طرفین نامساوی، } \bar{x} \text{ را کم کنیم داریم:}$$

$$|\mu - \bar{x}| < \frac{\sigma}{\sqrt{n}} Z_{\alpha/2} \quad \text{و یا}$$

فرمول فوق نشان می‌دهد که اگر از \bar{x} به عنوان برآورد μ استفاده شود با $100(1-\alpha)\%$ اطمینان

می‌توان گفت که اختلاف مقدار واقعی μ و مقدار برآوردگر از مقدار $\frac{\sigma}{\sqrt{n}} Z_{\alpha/2}$ کمتر است. و قضیه

زیر را می‌توان بیان نمود.

قضیه: اگر از \bar{x} به عنوان برآورد μ استفاده شود با $100(1-\alpha)\%$ اطمینان می‌توان گفت که

حداکثر خطا برابر است با:

$$e = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} Z_{\alpha/2}$$

تذکر: با توجه به مقدار e داریم $L=2e$. به عبارت دیگر طول فاصله اطمینان با e نسبت مستقیم

دارد.

3-8- محاسبه اندازه نمونه

اگر از \bar{x} به عنوان برآورد μ استفاده شود با $(1-\alpha)100\%$ اطمینان می‌توان گفت خطا کمتر از مقدار e است اگر حجم نمونه را از فرمول زیر بدست آوریم:

$$n = \left(\frac{\sigma}{e} Z_{\alpha/2} \right)^2$$

تذکر: از فرمول فوق می‌توان استفاده کرد که σ معلوم باشد. اگر σ معلوم نباشد ابتدا نمونه‌ای با حجم $n \geq 30$ انتخاب و مقدار S را محاسبه می‌کنیم و در فرمول فوق به جای σ از S استفاده می‌کنیم.

محاسبه خطای ماکزیمم برآورد در صورتیکه σ مجهول باشد و $n < 30$ باشد:

$$\bar{x} - t_{\alpha/2} \frac{S}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{x} + t_{\alpha/2} \frac{S}{\sqrt{n}}$$

$$-t_{\alpha/2} \frac{S}{\sqrt{n}} < \mu - \bar{x} < t_{\alpha/2} \frac{S}{\sqrt{n}}$$

$$|\mu - \bar{x}| < t_{\alpha/2} \frac{S}{\sqrt{n}}$$

$$e = \frac{S}{\sqrt{n}} t_{\alpha/2}$$

$$n = \left(\frac{S}{e} t_{\alpha/2} \right)^2$$

مثال 10. یک مهندس علاقمند به استفاده از نمونه تصادفی به اندازه $n=150$ برای برآورد متوسط شایستگی مکانیکی کارگران خط مونتاژ در یک صنعت بزرگ می‌باشد. اگر بر اساس تجربه، مهندس بتواند برای داده‌ها $\sigma=6.2$ را فرض کند، او با احتمال 99% درباره اندازه ماکزیمم خطایش چه ادعایی بکند.

$$\alpha = 0.01$$

$$e = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} Z_{\alpha/2} = \frac{6.2}{\sqrt{150}} \times 2.575 = 1.3$$

مثال 11. یک کارگر محقق می‌خواهد متوسط زمانی که یک مکانیک صرف بازدید چرخهای یک ماشین می‌کند تعیین کند، همین‌طور بتواند با اطمینان 95% ادعا کند که متوسط نمونه‌اش به

اندازه 0/5 دقیقه انحراف دارد. اگر از تجربه گذشته اش $\sigma=1.6$ فرض کنید، اندازه نمونه را چقدر باید انتخاب کند؟

$$n = \left(\frac{\sigma Z_{\alpha/2}}{e} \right)^2 = \left(\frac{1.6 \times 1.96}{0.5} \right)^2 = 39.6 \approx 40$$

مثال 12. در 6 بار تعیین نقطه ذوب قلع، میانگین $232/26^\circ\text{C}$ با انحراف معیار 0/14 به دست آمده است. اگر این میانگین را به عنوان نقطه ذوب واقعی قلع به کار برود درباره خطای ماکزیمم با اطمینان 98% چه ادعایی می توان کرد؟

$$e = \frac{S}{\sqrt{n}} t_{\alpha/2} = \frac{0.14}{\sqrt{6}} t_{0.01} = 0.19$$

می توان با اطمینان 98% ادعا کرد که طرح برای نقطه ذوب قلع حداکثر 0/19 درجه منحرف است.

3-9- فاصله اطمینان برای $\mu_D = \mu_1 - \mu_2$

در این حالت نمونه‌ها مستقل از یکدیگر نبوده و پراش‌های دو جمعیت لزوماً مساوی نیستند. این در صورتی درست خواهد بود که ملاحظات در دو نمونه بصورت زوجی صورت پذیرد بطوریکه دو ملاحظه نیز به یکدیگر مربوط باشند.

به عنوان مثال، اگر آزمایشی را بر روی روش جدیدی در مورد رژیم گرفتن روی n فرد انجام دهید، وزن‌های قبل و بعد تکمیل تست، نمونه‌های ما را تشکیل می‌دهند. ملاحظات در دو نمونه که بر روی یک فرد انجام می‌پذیرد به یکدیگر مرتبط بوده و از این رو یک جفت را ایجاد می‌کند. برای تعیین اینکه رژیم گرفتن موثر است یا خیر ما باید اختلاف‌های d_i از ملاحظات دوتایی را بدست آوریم. این اختلاف‌ها مقادیری از متغیرهای تصادفی نمونه d_1, d_2, \dots, d_n از جمعیتی هستند که ما فرض می‌کنیم دارای توزیع نرمال با حد متوسط μ_D و پراش مجهول σ_D^2 باشند. ما S_d^2 را با σ_D^2 یعنی پراش اختلاف‌هایی که نمونه‌ها را می‌سازند تخمین می‌زنیم. در نتیجه S_d^2 مقداری از آماره S_d^2 است که از نمونه‌ای به نمونه دیگر نوسان می‌کند. تخمین نقطه‌ای $\mu_D = \mu_1 - \mu_2$ به توسط \bar{d} داده می‌شود.

فاصله اطمینان $100(1-\alpha)\%$ برای μ_D بصورت زیر نوشته می‌شود:

$$P\left(-t_{\alpha/2} < T < t_{\alpha/2}\right)$$

$$T = \frac{\bar{D} - \mu_D}{S_d / \sqrt{n}} \quad \text{که در آن آماره:}$$

دارای توزیع t با $n-1$ درجه آزادی است.

لذا فاصله اطمینان $100(1-\alpha)\%$ برای μ_D بصورت زیر است:

$$\bar{d} - t_{\alpha/2} \frac{S}{\sqrt{n}} < \mu_D < \bar{d} + t_{\alpha/2} \frac{S}{\sqrt{n}}$$

که در آن \bar{d} و S_d میانگین و انحراف معیار اختلاف n جفت اندازه‌گیری است.

مثال 13. تعداد 20 دانشجوی سال اول را به 10 جفت تقسیم می‌کنیم. هر عضوی از این جفت تقریباً دارای یک بهره هوشی هستند. از هر زوجی یکی بطور تصادفی انتخاب شده و به این گروه یک درس ریاضی به فرم ارائه کنفرانس آموخته شد. به اعضاء باقیمانده این جفتها عین همان درس بصورت تدریس معمولی توسط یک استادیار داده شد. در پایان ترم به هر دو گروه یک امتحان داده و نتایج زیر حاصل گشت. فاصله اطمینان 98% را برای اختلاف واقعی دو روش تدریس بدست آورید.

جفت	تدریس بصورت کنفرانس	روش معمولی	D_i
1	76	81	-5
2	60	52	8
3	85	87	-2
4	58	70	-12
5	91	86	5
6	75	77	-2
7	82	90	-8
8	64	63	1
9	79	85	-6
10	88	83	5

تخمین نقطه ای μ_D به توسط $\bar{d} = 1.6$ داده می‌شود. پراش S_d^2 اختلاف نمونه بصورت زیر است:

$$S_d^2 = \frac{n \sum d_i^2 - (\sum d_i)^2}{n(n-1)} = 40.7$$

$$S_d = 6.38$$

$$t_{\%1,9} = 2.821$$

$$-7.29 < \mu_D < 4.09$$

10-3- فاصله اطمینان برای نسبت انحراف معیارهای دو توزیع نرمال

فرض کنید که x یک متغیر تصادفی دارای توزیع نرمال با میانگین μ_x و انحراف معیار δ_x و y یک متغیر تصادفی مستقل از x دارای توزیع نرمال با میانگین μ_y باشد. فرض کنید S_x^2 واریانس یک نمونه تصادفی متشکل از n_x مشاهده از x و S_y^2 واریانس یک نمونه تصادفی متشکل از n_y مشاهده از y باشد، فاصله اطمینان $100(1-\alpha)\%$ برای $\frac{\sigma_x^2}{\sigma_y^2}$ به صورت:

$$\frac{\sigma_x^2}{\sigma_y^2} \cdot \frac{\sigma_y^2}{\sigma_x^2} = F_{n_x-1, n_y-1}$$

$$P\left\{F_{1-\frac{\alpha}{2}; n_x-1, n_y-1} \leq F_{n_x-1, n_y-1} \leq F_{\frac{\alpha}{2}; n_x-1, n_y-1}\right\} = 1-\alpha$$

$$P\left\{F_{1-\frac{\alpha}{2}; n_x-1, n_y-1} \leq \frac{\sigma_x^2}{\sigma_y^2} \cdot \frac{\sigma_y^2}{\sigma_x^2} \leq F_{\frac{\alpha}{2}; n_x-1, n_y-1}\right\} = 1-\alpha$$

$$P\left\{\frac{S_x^2}{S_y^2 F_{\frac{\alpha}{2}; n_x-1, n_y-1}} \leq \frac{\sigma_x^2}{\sigma_y^2} \leq \frac{S_x^2}{S_y^2 F_{1-\frac{\alpha}{2}; n_x-1, n_y-1}}\right\} = 1-\alpha$$

$$\left[\frac{\sigma_x^2}{\sigma_y^2} \cdot \frac{1}{F_{\frac{\alpha}{2}; n_x-1, n_y-1}}, \frac{\sigma_x^2}{\sigma_y^2} \cdot \frac{1}{F_{1-\frac{\alpha}{2}; n_x-1, n_y-1}} \right]$$

پس فاصله اطمینان $100(1-\alpha)\%$ عبارتست از:

فاصله اطمینان یکطرفه $100(1-\alpha)\%$:

یک فاصله اطمینان یک طرفه $100(1-\alpha)\%$ بالا به صورت:

$$\left[\frac{\sigma_x^2}{\sigma_y^2} \cdot \frac{1}{F_{1-\alpha; n_x-1, n_y-1}} \right]$$

و یک فاصله اطمینان یک طرفه $100(1-\alpha)\%$ پائین به صورت:

$$\left[\frac{\sigma_x^2}{\sigma_y^2} \cdot \frac{1}{F_{\alpha; n_x-1, n_y-1}} \right]$$

ارائه می شود.

تذکر: فواصل فوق برای $\frac{\sigma_x}{\sigma_y}$ به ترتیب بصورت زیر است:

$$\left[\frac{\sigma_x}{\sigma_y} \sqrt{\frac{1}{F_{\frac{\alpha}{2}; n_x-1, n_y-1}}}, \frac{\sigma_x}{\sigma_y} \sqrt{\frac{1}{F_{1-\frac{\alpha}{2}; n_x-1, n_y-1}}} \right]$$

$$\frac{\sigma_x}{\sigma_y} \sqrt{F_{\alpha; n_x-1, n_y-1}}$$

$$\frac{\sigma_x}{\sigma_y} \sqrt{\frac{1}{F_{\alpha; n_x-1, n_y-1}}}$$

مثال 14. دوازده درخت نوع خاصی از مرکبات که به تصادف انتخاب شده اند دارای میانگین ارتفاع

13/9 با انحراف معیار 1/2 و 15 درخت نوع دیگری که به تصادف انتخاب شده اند دارای میانگین

ارتفاع 12/9 و انحراف معیار 1/5 است. یک فاصله اطمینان 98% برای نسبت واریانس های دو جامعه

بسازید.

$$\frac{\sigma_x^2}{\sigma_y^2} \cdot \frac{1}{F_{\frac{\alpha}{2}; n_x-1, n_y-1}} < \frac{\sigma_x^2}{\sigma_y^2} < \frac{\sigma_x^2}{\sigma_y^2} \cdot \frac{1}{F_{1-\frac{\alpha}{2}; n_x-1, n_y-1}}$$

$$\frac{(1.2)^2}{(1.5)^2} \frac{1}{F_{0.01; 11, 14}} < \frac{\sigma_x^2}{\sigma_y^2} < \frac{(1.2)^2}{(1.5)^2} \frac{1}{F_{0.99; 11, 14}} \rightarrow 0.165 < \frac{\sigma_x^2}{\sigma_y^2} < 2.752$$

4-1. مقدمه

در بسیاری از مسائل روزانه باید در رد یا قبول یک عبارت در مورد برخی پارامترهای جامعه تصمیم‌گیری بعمل آید. برای مثال، آیا میانگین طول عمر یک واحد الکترونیکی برابر 200 ساعت است؟ آیا میانگین محصول یک نوع بذر اصلاح شده از نوع اصلاح نشده بیشتر است؟ آیا دقت یک نوع ماشین تراش از نوع دیگر کمتر است؟ آیا نسبت خرابی یک محصول برابر مقدار مشخصی است؟ آیا میانگین شویندگی یک ماده شوینده در ازای استفاده از مواد اولیه مختلف یکسان است؟ آیا توزیع عمر یک قطعه در دستگاه تراش از توزیع نمایی تبعیت می‌کند؟ آیا نوع گروه خونی و نژاد به هم بستگی دارند؟

4-2. فرضیه آماری

فرض یا بیان یا حدسی در باره توزیع جامعه یا پارامترهای جامعه را فرض آماری گویند. اگر این فرض آماری توزیع را کاملاً مشخص کند آنرا فرض ساده در غیر اینصورت آنرا فرض مرگ گویند. برای مثال، توزیع وزن جامعه ایران، نرمال با میانگین 75 و انحراف معیار 15 است، یک فرضیه ساده و توزیع وزن جامعه ایران، نرمال با میانگین 75، است، یک فرضیه مرکب است.

فرضیه صفر و مقابل: فرضیه های اصلی، محقق معمولاً دقیق و صحیح نیستند. برای مثال در فرضیه "میانگین محصول بذر نوع الف از نوع ب بیشتر است"، میزان فزونی محصول نوع الف از ب مشخص نیست و در عمل نمی‌توان حدی برای آن تعیین کرد و همه این موارد را رد یا تایید کرد.

مشاهده می‌شود فرضیه اصلی را نمی‌توان به صورت مستقیم آزمون کرد. اما از نظر منطقی می‌توان فرضیه های با اجزای مشخصی تعریف کرد و رد و یا پذیرش فرضیه اصلی را منوط به قبول و یا رد چنین فرضیه هایی نمود. در مورد مثال بالا فرضیه مزبور به صورت "میانگین محصول بذر نوع الف از نوع ب برابر است" تعریف می‌شود. چنین فرضیه هایی را فرض صفر H_0 می‌نامند زیرا منجر به خنثی کردن Nullify فرضیه های اصلی می‌شوند. با این وصف فرضیه اصلی را فرضیه مقابل Alternate Hypothesis نامیده می‌شود.

مرسوم است که بسیاری از محققین، فرضیه هایی را که به باور آنها نادرست به عنوان فرض صفر در نظر می‌گیرند به امید اینکه، روشهای آماری به رد آنها بینجامد. برای مثال اگر بخواهیم نشان دهیم که میانگین طول عمر باطری کارخانه الف از کارخانه ب بیشتر است، فرضیه صفر به این صورت فرمول بندی می‌شود که تفاوتی بین طول عمر باطری دو کارخانه نیست.

فرضیه صفر با H_0 و فرض آماری که در مقابل فرض صفر قرار می‌گیرد را با H_1 نشان داده می‌شود.

4-3. انواع فرضیه

1- فرضیه (آزمون) دو طرفه (دو دامنه): آزمون فرض را دو طرفه گوئیم، اگر فرض مقابل دو طرفه باشد بعبارت دیگر آزمون بصورت زیر باشد:

$$\begin{cases} H_0 : \theta = \theta_0 \\ H_1 : \theta \neq \theta_0 \end{cases}$$

2-فرضیه (آزمون) یکطرفه: (یک دامنه): آزمون فرض را یکطرفه می‌نامیم اگر فرض مقابل آن

یکطرفه باشد. عبارت دیگر آزمون به یکی از دو صورت زیر باشد:

$$\begin{cases} H_0 : \theta \leq \theta_0 \\ H_1 : \theta > \theta_0 \end{cases} \quad \text{الف:}$$

$$\begin{cases} H_0 : \theta \geq \theta_0 \\ H_1 : \theta < \theta_0 \end{cases} \quad \text{ب-}$$

4-4. طریقه ساختن فرضیه صفر و مقابل

برای نشان دادن چگونگی ساختن فرضیه صفر و مقابل به مثال های ذیل توجه نمایید.
مثال 1. تصور کنید که ارتش، پوتین های مورد نیاز خود را از یک تولید کننده خاص، تامین می کند که میانگین عمر پوتین های تولیدی وی 12 ماه است. یک تولید کننده جدید، ادعا می کند که پوتین هایی با میانگین عمر بیش از 12 ماه با همان قیمت ارائه می دهد. برای اثبات این مدعی، آزمایشی ترتیب داده می شود. با استفاده از نمادهای آزمون فرض، فرضیه صفر و مقابل را می توان به یکی از دو صورت ذیل فرموله کرد.

$$\begin{cases} H_0 : \mu \leq 12 \\ H_1 : \mu > 12 \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} H_0 : \mu \geq 12 \\ H_1 : \mu < 12 \end{cases} \quad (2)$$

در حالت اول، $\begin{cases} H_0 : \mu \leq 12 \\ H_1 : \mu > 12 \end{cases}$ ، پذیرش فرضیه صفر، به معنای ادامه همکاری با تولید کننده قدیمی، و رد آن به معنی شروع همکاری با شرکت جدید است. اگر میانگین عمر پوتین های شرکت جدید 12 ماه یا کمتر باشد، احتمال ادامه همکاری با تولید کننده قدیمی نزدیک به یک است. از سوی دیگر، اگر میانگین عمر پوتین ها مقدار جزئی از 12 ماه بیشتر باشد هنوز احتمال حفظ تولید کننده قدیمی کاملاً زیاد است. اگر میانگین عمر پوتین ها بطور قابل توجهی از 12 ماه بیشتر باشد، احتمال شروع همکاری با تولید کننده فزونی می یابد.

این فرموله بندی زمانی مطرح می شود که ارتش از تولید کننده داخلی بسیار راضی است. شرکت قدیمی کالای مطمئن و با کیفیت و همچنین به موقع ارسال می کند و تغییر به شرکت جدید باعث بروز مشکلات اداری خواهد شد. در این حالت، شرکت جدید موظف است تا نشان دهد پوتینهایش دارای میانگین عمری بسیار بزرگتر از 12 ماه هستند. ارتش تنها در شرایطی مشتاق تغییر به شرکت جدید است که در میانگین عمر افزایشی عمده پدید آید.

$$\text{در حالت دوم، } \begin{cases} H_0 : \mu \geq 12 \\ H_1 : \mu < 12 \end{cases} \text{، پذیرش فرضیه صفر، با خرید از شرکت جدید مترادف است و رد آن}$$

به معنای حفظ تولید کننده قدیمی است. اگر میانگین عمر پوتینهای شرکت جدید 12 ماه یا بیشتر باشد احتمال شروع همکاری با تولید کننده جدید نزدیک به یک است. همچنین، اگر میانگین عمر پوتین ها بطور قابل توجهی از 12 ماه کمتر باشد احتمال حفظ تولید کننده قدیمی فزونی می یابد.

حالت دوم در زمانی مطرح می‌شود که ارتش از تولید کننده فعلی ناخشنود است. در این حالت، نه تنها، اگر میانگین عمر پوتین های شرکت جدید بیشتر از 12 ماه باشد، بلکه حتی اگر میانگین عمر به مقدار جزئی کمتر از 12 ماه باشد، تولید کننده قدیمی کنار گذاشته می‌شود. در این صورت، تولید کننده جدید کافی است، نشان دهد میانگین عمر پوتین هایش بطور قابل توجهی از 12 ماه کمتر نیست.

مثال 2. یک تولید کننده لامپ روشنایی ادعا کرده که میانگین عمر کالای او از 1000 ساعت بیشتر است. در صورت سختگیری نسبت به ادعای مزبور فرضیه صفر و مقابل را فرموله نمایید. از آنجا که در مورد این ادعا برخورد سختگیرانه ای اتخاذ شده، و باور بر این است که میانگین عمر کالا کمتر از 1000 ساعت است، نحوه فرمولاسیون فرضیه صفر و مقابل به صورت ذیل است.

$$\begin{cases} H_0 : \mu \leq 1000 \\ H_1 : \mu > 1000 \end{cases}$$

5-4. طریقه تعیین مقدار پارامتر جامعه در فرضیه صفر

1- تجربیات و دانایی های گذشته و یا آزمایشی که در گذشته انجام شده و هدف از آزمون این است که آیا شرایط آزمایش تغییر کرده است.

2- بررسی درستی و نادرستی یک فرضیه

3- طراحی و مشخصات فنی و مهندسی و یا الزامات قراردادی

6-4. فرآیند آزمون فرضیه

پس از فرموله بندی فرضیه صفر و مقابل، باید روشی سیستماتیک مبتنی بر آمار، اتخاذ نمود تا بر اساس آن درستی و نادرستی فرضیه صفر و به تبع فرضیه مقابل معلوم شود. برای این هدف، می‌توان مجموعه اعضای جامعه را مطالعه کرد که این کار به سبب نامحدود بودن جامعه و تنگنای زمان و هزینه در عمل ناممکن است. در این صورت ناگزیر از نمونه گیری و تعمیم نتایج حاصل از نمونه به جامعه است. در واقع رد و یا قبول فرضیه صفر منوط به اطلاعات حاصل از نمونه است.

روش کار به این صورت است که با استفاده از داده های حاصل از نمونه یک شاخص نمونه ای و یا آماره آزمون به عنوان تخمینی از پارامتر جامعه محاسبه می‌شود، آنگاه مقدار آماره با مقدار پارامتر جامعه بر اساس یک معیار تحت عنوان ناحیه رد مقایسه می‌شود. ناحیه رد در یک آزمون فرضیه، در واقع به معنای تفاوت آشکار مقدار آماره با مقدار عددی پارامتر است. در صورتی که مقدار آماره در ناحیه رد قرار گیرد فرضیه صفر رد و در غیر این صورت قبول می‌شود.

فرض کنید می‌خواهیم فرضیه صفر $H_0 : \theta = \theta_0$ را در مقابل $H_0 : \theta \neq \theta_0$ آزمون کنیم. در این صورت، اگر برآورد نقطه ای $\hat{\theta}$ برای θ ، به θ_0 نزدیک باشد (در داخل ناحیه قبول قرار گیرد)، فرضیه صفر پذیرفته و در صورتی که $\hat{\theta}$ بسیار بزرگتر و یا کوچکتر از θ_0 باشد (در داخل ناحیه رد قرار گیرد)، فرضیه صفر رد می‌شود.

به طریق مشابه، در صورتی که بخواهیم فرضیه صفر $H_0 : \theta = \theta_0$ را در مقابل $H_0 : \theta < \theta_0$ آزمون کنیم. در این صورت، اگر برآورد نقطه ای $\hat{\theta}$ بسیار کوچکتر از θ_0 باشد، فرضیه صفر رد می‌شود.

همچنین در صورتی که بخواهیم فرضیه صفر $H_0: \theta = \theta_0$ را در مقابل $H_0: \theta > \theta_0$ آزمون کنیم. در این صورت، اگر برآورد نقطه‌ای $\hat{\theta}$ بسیار بزرگتر از θ_0 باشد، فرضیه صفر رد می‌شود. در مورد هریک از حالت‌های بالا، در مورد عبارات بسیار بزرگتر و بسیار کوچکتر مفاهیم ناحیه قبول و ناحیه رد تعریف می‌شود.

4-6-1. تعریف ناحیه پذیرش و ناحیه بحرانی

ناحیه‌ای که باعث قبول فرض صفر می‌شود را ناحیه پذیرش یا ناحیه قبولی و ناحیه‌ای که باعث رد فرض صفر می‌شود ناحیه بحرانی یا ناحیه رد گویند. مرز بین این دو ناحیه را مقدار بحرانی گویند. برای تبیین ریاضی ناحیه رد و قبول، از مفاهیم خطاهای آزمون فرض به طریقه ذیل استفاده می‌شود.

4-6-2. خطای نوع اول (I) و نوع دوم (II)

خطای نوع اول: رد فرض H_0 در صورتی که در واقع درست باشد، خطای نوع اول گفته می‌شود و آنرا با α نشان می‌دهند. و بیان ریاضی خطای نوع اول به صورت ذیل است.

$$\alpha = p(H_0 \text{ درست باشد} | \text{رد فرض } H_0)$$

خطای نوع دوم: قبول فرض H_0 در صورتی که در واقع نادرست باشد خطای نوع دوم گفته می‌شود و با β نشان داده می‌شود. بیان ریاضی خطای نوع دوم به صورت ذیل است

$$\beta = p(H_0 \text{ نادرست باشد} | \text{قبول فرض } H_0)$$

مثال 3. فرض کنید یک نوع کپسول سرماخوردگی A چند سال است که در کشور تولید می‌شود و ثابت شده است که پس از 5 روز 70 درصد مؤثر است کارخانه‌ای مدعی است که کپسولی مشابه a به نام B تولید کرده است که اثر آن پس از 5 روز بیشتر از 70 درصد است. می‌خواهیم بررسی کنیم که با توجه به هزینه‌ای که برای ساخت کپسول B باید صرف شود آیا استفاده از آن برفع ما است یا خیر؟ برای این منظور یک نمونه 20 تایی از افراد را انتخاب و کپسول B را به آنها داده ایم. اگر در این آزمایش پس از 5 روز تأثیر دارو بر روی کمتر از 16 نفر مؤثر واقع شده باشد ادعای کارخانه B را بی‌مورد می‌دانیم. مطلوبست محاسبه مقادیر خطای نوع اول و دوم.

$$\begin{cases} H_0: p = 0.7 \\ H_1: p > 0.7 \end{cases}$$

$$\alpha = p(\text{Reject } H_0 | H_0 \text{ is True}) = p(x \geq 16 | P = 0.7) = \sum_{x=16}^{20} b(x; 20, 0.7) = 0.2375$$

$$\beta = p(\text{Accept } H_0 | H_0 \text{ is False}) = p(x < 16 | p > 0.7)$$

ملاحظه می‌شود که β قابل محاسبه نمی‌باشد. زیرا فرض مقابل بطور کامل مشخص نشده اما اگر فرض مقابل را تغییر داده و بصورت $H_0: p = 0.8$ در نظر بگیریم:

$$\beta = p(x < 16 | p = 0.8) = \sum_{x=0}^{15} b(x; 20, 0.8) = 0.3704$$

واضح است که تصمیم‌گیری خوب وقتی انجام می‌پذیرد که هر دو نوع خطا کم باشند. بعبارت دیگر نه فرضی را بی‌دلیل رد و نه فرضی را بی‌دلیل قبول کنیم. در واقع در شرایط ایده‌آل، α و

β بطور همزمان کوچک هستند.

مثال: در مثال فوق اگر نقطه بحرانی از 16 به 15 تغییر دهیم. مقادیر α و β را تعیین کنید.

$$\alpha = p(x \geq 15 | p = 0.7) = \sum_{x=15}^{20} b(x; 20, 0.7) = 0.4164$$

$$\beta = p(x < 15 | p = 0.8) = \sum_{x=0}^{14} b(x; 20, 0.8) = 0.1958$$

ملاحظه می شود که با تعدیل نقطه بحرانی α زیاد و β کم می شود. به عبارت دیگر α و β به یکدیگر وابسته بوده و کاهش یکی باعث افزایش دیگری می شود. پس با تغییر نقطه بحرانی می توان یکی از خطاها را کم و دیگری را زیاد نمود.

مثال 4. در مثال قبل اگر یک نمونه 100 تایی انتخاب و نقطه بحرانی را عدد 74 اختیار کنیم، مقادیر α و β را محاسبه کنید.

$$\alpha = p(x \geq 74 | p = 0.7) = p\left(z > \frac{73.5 - 100 \times 0.7}{\sqrt{100 \times 0.7 \times 0.3}}\right) = p(z > 0.76) = 0.2236$$

$$\beta = p(x < 74 | p = 0.8) = p\left(z > \frac{74.5 - 100 \times 0.8}{\sqrt{100 \times 0.8 \times 0.2}}\right) = p(z < -1.375) = 0.085$$

بنابراین با افزایش حجم نمونه هر دو خطا بطور همزمان کاهش می یابد.

نتیجه: خطای نوع اول و دوم به یکدیگر وابسته بوده و افزایش یکی باعث کاهش دیگری می شود. با افزایش حجم نمونه می توان هر دو خطا را بطور همزمان کاهش داد. (هرچه n زیاد شود α کم می شود و در صورتیکه α ثابت باشد β کم می شود)

مثال 5. فرض کنید گزارش رسیده که میانگین قد دانشجویان یک دانشگاه 170 cm و انحراف معیار آن 9cm است. برای آزمایش آن یک نمونه تصادفی 36 تایی انتخاب و ناحیه پذیرش را بین 167/5 و 172/5 در نظر می گیریم. مقادیر α و β را حساب کنید.

$$\begin{cases} H_0 : \mu = 170 \\ H_1 : \mu \neq 170 \end{cases}$$

$$\alpha = p(\bar{x} > 172.5 | \mu = 170) + p(\bar{x} < 167.5 | \mu = 170) =$$

$$p\left(z > \frac{172.5 - 170}{9/\sqrt{36}}\right) + p\left(z < \frac{167.5 - 170}{9/\sqrt{36}}\right) = 0.97$$

برای اینکه آزمون خوبی داشته باشیم باید خطای نوع دوم را نیز محاسبه کنیم. اما در حالی که فرض مقابل بصورت $H_0 : \mu \neq 170$ باشد، محاسبه β امکان پذیر نیست. ولی با انتخاب مقادیر مختلف برای μ می توان β را محاسبه نمود تا تضمین کافی در مورد رد فرض صفر بدست آید.

$$H_1 : \mu = 175 \quad \text{مثلاً}$$

$$\beta = p(167.5 < \bar{x} < 172.5 | \mu = 175) = .097$$

بنابراین 9/7% از تمام نمونه های تصادفی که با حجم $n=36$ انتخاب می شوند باعث رد فرض H_0 می شوند.

مثال 6. در مثال قبل اگر حجم نمونه را 64 انتخاب کنیم مقادیر α و β را حساب کنید.

$$\alpha = p(\bar{x} > 172.5 | \mu = 170) + p(\bar{x} < 167.5 | \mu = 170)$$

$$= p\left(z > \frac{172.5 - 170}{9/\sqrt{64}}\right) + p\left(z < \frac{167.5 - 170}{9/\sqrt{64}}\right) = 0.0264$$

$$\beta = p(167.5 < \bar{x} < 172.5 | \mu = 175) = p\left(\frac{167.5 - 175}{9/\sqrt{64}} < z < \frac{172.5 - 175}{9/\sqrt{64}}\right)$$

$$= p(-6.66 < z < -2.22) = 0.0132$$

3-6-4. طریقه تعیین ناحیه بحرانی

با توجه به تعاریف خطای نوع اول و دوم برای تعیین اندازه ناحیه رد (بحرانی)، از ارتکاب به خطای نوع اول یعنی α استفاده می‌شود. در واقع، در توزیع نمونه ای $\hat{\theta}$ ، احتمال مشاهده مقادیر در ناحیه بحرانی برابر α است. از آنجایی که معمولاً α عدد کوچکی انتخاب می‌شود مفهوم "تفاوت آشکار $\hat{\theta}$ و θ_0 " معنا می‌شود. به این معنی که مقادیری که در ناحیه بحرانی مشاهده می‌شوند بسیار بزرگتر و یا بسیار کوچکتر از پارامتر جامعه هستند.

در نتیجه، اگر آماره‌ای که بر اساس آن تصمیم‌گیری می‌شود، دارای توزیع پیوسته باشد می‌توان ابتدا خطای نوع اول را اختیار کرد و به کمک آن ناحیه بحرانی را تعیین نمود. به اندازه ناحیه بحرانی سطح معنادار بودن گفته می‌شود.

مثال 7. فرض کنید می‌خواهیم این فرض صفر را که میانگین یک جامعه نرمال با واریانس σ^2 ، برابر μ_0 است، $H_0: \mu = \mu_0$ ، در برابر فرض مقابل $H_1: \mu > \mu_0$ ، آزمون کنیم. مقدار k را طوری تعیین کنید که $\bar{x} > k$ یک ناحیه بحرانی به اندازه $\alpha = 0.05$ برای نمونه تصادفی به اندازه n باشد.

$$Z_{0.05} = 1.645$$

$$Z_{0.05} = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$$

$$1.645 = \frac{k - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$$

$$k = \mu_0 + \frac{1.645\sigma}{\sqrt{n}}$$

در این صورت ناحیه بحرانی به اندازه $\alpha = 0.05$ عبارت است از $\bar{x} > \mu_0 + 1.645\sigma/\sqrt{n}$ و یا به

$$\text{عبارت ساده تر } Z = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} > Z_{0.05} \text{ است. در این صورت به } Z \text{ آماره آزمون گویند.}$$

با بدست آوردن ناحیه فوق، پس از نمونه‌گیری اگر میانگین نمونه و یا آماره آزمون در ناحیه بحرانی قرار گرفت فرضیه صفر رد و در غیر این صورت قبول می‌شود.

4-6-4. ارتباط بین فاصله اطمینان و آزمون فرض

اگر $[L, U]$ یک فاصله اطمینان در سطح $100(1-\alpha)\%$ باشد، در آزمون فرضیه $\begin{cases} H_0: \theta = \theta_0 \\ H_1: \theta \neq \theta_0 \end{cases}$

فرضیه صفر رد می‌شود اگر و فقط اگر θ_0 به این فاصله متعلق نباشد.

5-6-4. مراحل آزمون فرض

- فرموله کردن فرضیه صفر و مقابل
- تعیین اندازه ناحیه بحرانی و یا سطح معنادار بودن
- انتخاب آماره آزمون و محاسبه آن
- تعیین مقدار بحرانی از روی جدول و با توجه به سطح معناداری
- مقایسه آماره آزمون و مقدار بحرانی. در صورتی که آماره آزمون در ناحیه بحرانی قرار گرفت فرضیه صفر رد و در غیر این صورت رد قبول می‌شود. در صورتی که آماره آزمون در ناحیه بحرانی قرار گرفت اصطلاحاً گفته می‌شود که فرضیه صفر در سطح معناداری α ، معنادار نیست.

7-4. آزمون فرضیه برابری میانگین یک جامعه با یک مقدار معین

7-4-1. آزمون برابری میانگین یک جامعه نرمال با یک مقدار معین با فرض معلوم بودن واریانس جامعه فرض کنید می‌خواهیم با فرض معلوم بودن واریانس جامعه، σ^2 ، فرض برابری میانگین جامعه نرمال، μ ، با یک مقدار معین را در سطح معنادار بودن α آزمون کنیم. بیان ریاضی آزمون به صورت ذیل است:

$$\begin{cases} H_0: \mu = \mu_0 \\ H_1: \mu \neq \mu_0 \end{cases}$$

فرض کنید X_1, \dots, X_n ، یک نمونه تصادفی به حجم n ، از توزیع نرمال با میانگین مجهول μ و واریانس معلوم σ^2 باشد برای انجام آزمون فرضیه بالا، از متغیر تصادفی

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}}$$

که دارای توزیع نرمال استاندارد است، به عنوان آماره آزمون استفاده می‌شود. اگر مقداری که توسط آماره آزمون به دست می‌آید در ناحیه پذیرش قرار گیرد فرض H_0 را پذیرفته و در غیر این صورت H رد می‌شود.

$$\begin{cases} H_0: \mu = \mu_0 \\ H_1: \mu \neq \mu_0 \end{cases} \quad \left[-Z_{\alpha/2} \quad -Z_{\alpha/2} \right]$$

$$\begin{cases} H_0: \mu = \mu_0 \\ H_1: \mu > \mu_0 \end{cases} \quad] -\infty \quad Z_{\alpha}]$$

$$\begin{cases} H_0: \mu = \mu_0 \\ H_1: \mu < \mu_0 \end{cases} \quad [-Z_{\alpha} \quad -\infty [$$

مثال 8. ضروری است که میانگین مقاومت پارگی تارهای یک نوع پارچه از $\mu = 180 \text{ psi}$ کمتر نباشد. بر اساس تجارب گذشته، انحراف معیار مقاومت پارگی تارها، 4 psi است. مجموعه ای مرکب از یک انباشته از این پارچه از فروشنده دریافت می شود و از سه قطعه نمونه برداری می شود. این نمونه ها که تقریباً توزیع نرمال دارند آزمایش شده و نتایج زیر به دست آمده:

قطعه اول: 182 psi قطعه دوم: 172 psi قطعه سوم: 177 psi

در سطح $\alpha = 0,05$ ، نتیجه آزمون فرضیه ذیل چه خواهد بود.

$$\begin{cases} H_0 : \mu \geq 180 \\ H_1 : \mu < 180 \end{cases} \quad \text{ناحیه پذیرش} = [-1.64, \infty)$$

$$\bar{x} = 177$$

$$Z = \frac{\bar{x} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}} = \frac{177 - 180}{4 / \sqrt{3}} = -1.3$$

بنابراین فرضیه صفر قبول می شود.

مثال 9. در بررسی آماری که در گذشته انجام شده است، قد افراد دارای متوسط $68/5$ اینچ با انحراف معیار $2/7$ اینچ گزارش شده است. برای تایید یا رد این ادعا، اگر یک نمونه 50 تایی از افراد دارای متوسط قد $69/7$ اینچ باشد آیا دلیلی برای تصور تغییر در قد متوسط قد وجود دارد؟ (سزح معنا دار بودن $\alpha = 0,02$)

$$\begin{cases} H_0 : \mu = 68.5 \\ H_1 : \mu \neq 68.5 \end{cases} \quad Z = \frac{\bar{x} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}} = \frac{69.7 - 68.5}{2.7 / \sqrt{50}} = 3.143$$

بنابراین، H_0 رد می شود. $(-\infty, Z_\alpha] = (-\infty, 2.06]$: ناحیه پذیرش

مثال 10. یک شرکت باربری نسبت به ادعای تولیدکننده یک نوع لاستیک خودرو، مبنی بر اینکه طول عمر متوسط آنها حداقل برابر با 28000 مایل است، مظنون می باشد. برای بررسی این ادعا، شرکت 40 حلقه از این لاستیک ها را در ماشین ها استفاده می کند. طول عمر متوسط 40 حلقه مزبور، 27463 مایل با انحراف معیار 1348 مایل بوده است. اگر خطای نوع اول 1% باشد، شرکت چه تصمیمی می تواند اتخاذ کند؟

$$\begin{cases} H_0 : \mu \geq 28000 \\ H_1 : \mu < 28000 \end{cases} \quad n = 40 > 30 \Rightarrow \sigma \approx S$$

$$\alpha \leq 1\%$$

$$\text{ناحیه پذیرش} : [-Z_\alpha, \infty) = [-Z_{\%1}, \infty) = [-2.43, \infty)$$

$$Z = \frac{\bar{x} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}} = \frac{27463 - 28000}{1348 / \sqrt{40}} = -2.52$$

بنابراین، H_0 رد می شود.

2-7-4. آزمون برابری میانگین یک جامعه نرمال با یک مقدار معین با فرض مجهول بودن واریانس جامعه فرض کنید می‌خواهیم با فرض مجهول بودن واریانس جامعه، σ^2 ، فرض برابری میانگین جامعه نرمال، μ ، با یک مقدار معین را در سطح معنادار بودن α آزمون کنیم. بیان ریاضی آزمون به صورت ذیل است:

$$\begin{cases} H_0 : \mu = \mu_0 \\ H_1 : \mu \neq \mu_0 \end{cases}$$

فرض کنید x_1, \dots, x_n ، یک نمونه تصادفی به حجم n ، از توزیع نرمال با میانگین μ و واریانس مجهول σ^2 باشد برای انجام آزمون فرضیه بالا، از متغیر تصادفی

$$t = \frac{\bar{x} - \mu_0}{S/\sqrt{n}}$$

به عنوان آماره آزمون استفاده می‌شود که دارای توزیع t با $n-1$ درجه آزادی است. اگر مقدار آماره در ناحیه پذیرش قرار گیرد فرض H_0 پذیرفته می‌شود و در غیر این صورت H_0 رد می‌شود.

$$\begin{cases} H_0 : \mu = \mu_0 \\ H_1 : \mu \neq \mu_0 \end{cases} \quad \left[-t_{\alpha/2, n-1} \quad -t_{\alpha/2, n-1} \right]$$

$$\begin{cases} H_0 : \mu = \mu_0 \\ H_1 : \mu > \mu_0 \end{cases} \quad \left] -\infty, t_{\alpha, n-1} \right]$$

$$\begin{cases} H_0 : \mu = \mu_0 \\ H_1 : \mu < \mu_0 \end{cases} \quad \left[-t_{\alpha, n-1}, \infty \right[$$

مثال 11. در روش متداول استحصال بنزین از نفت، میانگین استحصال 26 واحد است. اخیراً روش تازه‌ای ابداع شده است که در ذیل آن ادعا می‌شود که بازده روش ابداعی از 26 واحد بیشتر است. الف) فرض صفر و فرض یک را بنویسید.

$$\begin{cases} H_0 : \mu = 26 \\ H_1 : \mu > 26 \end{cases}$$

ب) اگر نمونه تصادفی 9 تایی بگیریم و نتایج $S=2$ و $\bar{x}=28$ به دست آمده است. با فرض خطای نوع اول در سطح 1%، در مورد روش جدید چه می‌توان گفت؟

$$t_8 = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} = \frac{28 - 26}{2.2} = 3$$

$$\text{ناحیه پذیرش} = (-\infty, t_{0.01, 8}) = (-\infty, 2.896)$$

بنابراین، H_0 رد می‌شود.

8-4. آزمون فرضیه برابری واریانس جامعه نرمال با یک مقدار خاص

فرض کنید x_1, \dots, x_n نمونه‌ای تصادفی از یک جامعه نرمال با میانگین مجهول μ و واریانس مجهول σ^2 باشد. می‌خواهیم فرض‌های ذیل را آزمون کنیم.

$$\begin{cases} H_0: \sigma^2 = \sigma_0^2 \\ H_1: \sigma^2 \neq \sigma_0^2 \end{cases}$$

که در آن σ_0^2 مقدار معلومی است. برای انجام آزمون فرضیه بالا، از متغیر تصادفی

$$\chi^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}$$

که دارای توزیع مربع کای با $n-1$ درجه آزادی، به عنوان آماره آزمون استفاده می‌کنیم. اگر مقداری که توسط آماره آزمون به دست می‌آید در ناحیه پذیرش قرار گیرد فرض H_0 پذیرفته می‌شود و در غیر این صورت H_0 رد می‌شود.

$$\begin{cases} H_0: \sigma^2 = \sigma_0^2 \\ H_1: \sigma^2 \neq \sigma_0^2 \end{cases} \quad \left[\chi_{1-\frac{\alpha}{2}, n-1}^2, \chi_{\frac{\alpha}{2}, n-1}^2 \right]$$

$$\begin{cases} H_0: \sigma^2 = \sigma_0^2 \\ H_1: \sigma^2 < \sigma_0^2 \end{cases} \quad \left[\chi_{1-\alpha, n-1}^2, \infty \right)$$

$$\begin{cases} H_0: \sigma^2 = \sigma_0^2 \\ H_1: \sigma^2 > \sigma_0^2 \end{cases} \quad \left[0, \chi_{\alpha, n-1}^2 \right]$$

مثال 12. در یک نمونه تصادفی، زمانی که 30 زن برای جواب دادن به سوالات امتحان صرف کردند، دارای واریانس $6/4$ دقیقه بوده است. با فرض اینکه جامعه منظور نرمال باشد، فرض $H_0: \sigma = 8$ را در برابر فرض $H_0: \sigma < 8$ در سطح $\alpha = 0/05$ آزمون کنید.

$$n = 30, S = 6/4, \alpha = 0/05, \sigma_0^2 = 8^2$$

$$\chi^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} = \frac{29 \times (6.4)^2}{8^2} = 18.56$$

$$\chi^2 \leq \chi_{n-1, 1-\alpha}^1 = \chi_{29, 0.95}^2 = 17.7 \quad H_0 \text{ ناحیه رد}$$

بنابراین، نمی‌توان H_0 را رد کرد.

9-4. آزمون فرض برابری میانگین های دو جامعه

9-4-1. آزمون فرض برابری میانگین های دو توزیع نرمال زمانی که هر دو انحراف معیار معلوم باشند.
فرض کنید X_1, \dots, X_{n_x} و X_1, \dots, X_{n_y} دو نمونه مستقل از دو جامعه نرمال با میانگین های مجهول μ_x و واریانس مجهول σ_x^2 و σ_y^2 باشد. برای آزمون فرض

$$\begin{cases} H_0 : \mu_x = \mu_y \\ H_1 : \mu_x \neq \mu_y \end{cases}$$

با استفاده از آماره آزمون ذیل

$$Z = \frac{(\bar{x} - \bar{y}) - (\mu_x - \mu_y)}{\sqrt{\frac{\sigma_x^2}{n_x} + \frac{\sigma_y^2}{n_y}}}$$

زمانی که آماره آزمون در ناحیه پذیرش قرار گیرد، فرضیه صفر قبول و در غیر این صورت رد می‌شود.

$$\begin{cases} H_0 : \mu_x = \mu_y \\ H_1 : \mu_x \neq \mu_y \end{cases} \quad \left[-Z_{\alpha/2} \quad Z_{\alpha/2} \right]$$

$$\begin{cases} H_0 : \mu_x = \mu_y \\ H_1 : \mu_x < \mu_y \end{cases} \quad \left[-Z_{\alpha} \quad \infty \right)$$

$$\begin{cases} H_0 : \mu_x = \mu_y \\ H_1 : \mu_x > \mu_y \end{cases} \quad \left(-\infty \quad Z_{\alpha} \right]$$

مثال 13. در تحقیقات مربوط به انواع سوخت موشک که با هدف تقلیل زمان تأخیر بین لحظه آغاز شلیک و لحظه انفجار صورت می‌گیرد، تصور بر این است که جانشین کردن سوخت متداول با سوخت جدید می‌تواند تأثیر مثبتی داشته باشد. انحراف معیار نظیر سوخت متداول و سوخت جدید مساوی 0/04 است. قرار است در خلال یک تجربه، n موشک را با سوخت متداول و n موشک را با سوخت جدید شلیک کنیم. اگر در اثر استفاده از سوخت جدید زمان تأخیر به میزان 0/07 کاهش یابد، استفاده از سوخت جدید قابل توصیه خواهد بود. اگر بر اساس نمونه های $n = 32$ تایی مقادیر 0/261 ثانیه و 0/251 ثانیه برای متوسط زمان تأخیر به ترتیب سوخت متداول و سوخت جدید به دست آید، در سطح خطای نوع اول 5 درصد آیا سوخت جدید را توصیه می‌کنید.

$$\begin{cases} H_0 : \mu_x - \mu_y = 0.07 \\ H_1 : \mu_x - \mu_y < 0.07 \end{cases}$$

$$Z = \frac{(\bar{x} - \bar{y}) - (\mu_x - \mu_y)}{\sqrt{\frac{\sigma_x^2}{n_x} + \frac{\sigma_y^2}{n_y}}} = \frac{(0.261 - 0.251) - 0.07}{\sqrt{\left(\frac{0.04^2}{32} + \frac{0.04^2}{32}\right)}} = \frac{0.03}{0.01} = 3$$

$$\text{Acceptance Region} = (-\infty, 1.645]$$

بنابراین فرض صفر رد می‌شود.

2-9-4. آزمون فرض برابری میانگین دو جامعه نرمال در حالت واریانس های مجهول و مساوی

فرض کنید X_1, X_2, \dots, X_{n_x} و Y_1, Y_2, \dots, Y_{n_y} نمونه های مستقل از جامعه های نرمال با پارامترهای (μ_x, σ_x^2) و (μ_y, σ_y^2) باشند و فرض می کنیم تمام چهار پارامتر مجهولند. می خواهیم فرض صفر $H_0 = \mu_x = \mu_y$ را در مقابل فرض $H_1 = \mu_x \neq \mu_y$ آزمون کنیم.

$$\begin{cases} H_0 : \mu_x = \mu_y \\ H_1 : \mu_x \neq \mu_y \end{cases}$$

فرض می کنیم واریانس های مجهول σ_x^2 و σ_y^2 مساوی و برابر مقدار مشترک σ^2 است، یعنی:

$$\sigma_x^2 = \sigma_y^2 = \sigma^2$$

آماره آزمون برابر:

$$t_{n_x+n_y-2} = \frac{(\bar{x} - \bar{y}) - (\mu_x - \mu_y)}{\sqrt{\frac{1}{n_x} + \frac{1}{n_y} \sqrt{\frac{(n_x-1)s_x^2 + (n_y-1)s_y^2}{n_x+n_y-2}}}}$$

وقتی H_0 درست است، یعنی $\mu_x - \mu_y = 0$ آماره آزمون بصورت زیر تعریف می شود:

$$t_{n_x+n_y-2} = \frac{\bar{x} - \bar{y}}{\sqrt{\frac{1}{n_x} + \frac{1}{n_y} \sqrt{\frac{(n_x-1)s_x^2 + (n_y-1)s_y^2}{n_x+n_y-2}}}}$$

اگر مقداری که توسط آماره آزمون بدست می آید در ناحیه پذیرش قرار گیرد فرض H_0 پذیرفته و در غیر این صورت رد می شود.

$$\begin{cases} H_0 : \mu_x = \mu_y \\ H_1 : \mu_x \neq \mu_y \end{cases} \left[-t_{\frac{\alpha}{2}, n_x+n_y-2} \quad t_{\frac{\alpha}{2}, n_x+n_y-2} \right]$$

$$\begin{cases} H_0 : \mu_x = \mu_y \\ H_1 : \mu_x < \mu_y \end{cases} \left[t_{\alpha, n_x+n_y-2} \quad \infty \right]$$

$$\begin{cases} H_0 : \mu_x = \mu_y \\ H_1 : \mu_x > \mu_y \end{cases} \left[-\infty \quad t_{\alpha, n_x+n_y-2} \right]$$

مثال 14. از 8 موشک کوتاه بود از یک نوع دارای میانگین خطای اصابت $\bar{x}_1 = 98$ فوت با انحراف معیار $s_1 = 18$ فوت و 10 موشک کوتاه بود از نوع دیگر دارای میانگین خطای اصابت $\bar{x}_2 = 76$ فوت با انحراف معیار $s_2 = 15$ فوت باشد. فرض صفر $\mu_1 - \mu_2 = 15$ را در برابر فرض مقابل $\mu_1 - \mu_2 > 15$ آزمون کنید. اندازه ناحیه بحرانی را $\alpha = 5\%$ بگیرید. و فرض کنید که جامعه ها نرمال و دارای واریانس های یکسان اند.

$$\begin{cases} H_0 : \mu_1 - \mu_2 = 15 \\ H_1 : \mu_1 - \mu_2 > 15 \end{cases}$$

$$= (-\infty; t_{\alpha, n_1+n_2-2}] = (-\infty, t_{0.05, 16}] = (-\infty, 1.746]$$

$$t_{n_1+n_2-2} = \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}} \sqrt{\frac{(n_1-1)s_1^2 + (n_2-1)s_2^2}{n_1+n_2-2}}}$$

$$t_{16} = \frac{(97-96) - (15)}{\sqrt{\frac{1}{8} + \frac{1}{10}} \sqrt{\frac{7 \times 18^2 + 9 \times 15^2}{16}}} = 0.9$$

فرض H_0 رد نمی‌شود (نمی‌توان H_0 را رد کرد)

10-4. آزمون برابری واریانس های دو جامعه

فرض کنید $y_{n_y}, \dots, y_2, y_1, x_{n_x}, \dots, x_2, x_1$ نمونه هایی مستقل از دو جامعه نرمال با پارامترهای مجهول (μ_x, σ_x^2) و (μ_y, σ_y^2) باشند. می خواهیم فرض صفر $H_0 = \sigma_x^2 = \sigma_y^2$ را در مقابل فرض

$$\begin{cases} H_0 : \sigma_x^2 = \sigma_y^2 \\ H_1 : \sigma_x^2 \neq \sigma_y^2 \end{cases} \quad H_1 = \sigma_x^2 \neq \sigma_y^2 \text{ آزمون کنیم.}$$

آماره آزمون بصورت زیر است:

$$F_{n_x-1, n_y-1} = \frac{s_x^2}{s_y^2} \times \frac{S_y^2}{S_x^2}$$

وقتی H_0 درست است داریم:

$$F_{n_x-1, n_y-1} = \frac{S_x^2}{S_y^2}$$

اگر مقداری که آماره آزمون بدست می دهد در ناحیه پذیرش بود فرض صفر را می پذیریم و در غیر این صورت رد می کنیم.

$$\begin{cases} H_0 : \sigma_x^2 = \sigma_y^2 \\ H_1 : \sigma_x^2 \neq \sigma_y^2 \end{cases} \quad F_{n_x-1, n_y-1} = \frac{S_x^2}{S_y^2} \left[F_{1-\frac{\alpha}{2}; n_x-1, n_y-1} \quad F_{\frac{\alpha}{2}; n_x-1, n_y-1} \right]$$

$$\begin{cases} H_0 : \sigma_x^2 = \sigma_y^2 \\ H_1 : \sigma_x^2 < \sigma_y^2 \end{cases} \quad \left[F_{1-\frac{\alpha}{2}; n_x-1, n_y-1} \quad \infty \right)$$

$$\begin{cases} H_0 : \sigma_x^2 = \sigma_y^2 \\ H_1 : \sigma_x^2 > \sigma_y^2 \end{cases} \quad (0 \quad F_{\alpha; n_x-1, n_y-1}]$$

مثال 15. مقدار موم موجود در دو طرف پاکت های مومی یک متغیر تصادفی است. شواهدی مبنی بر بیشتر بودن موم سطح داخلی پاکت وجود دارد. مقدار موم سطح داخلی و خارجی را متغیرهای تصادفی مستقل با پارامترهای مجهول بگیرد. مقدار موم موجود بر سطح داخلی و خارجی نمونه های تصادفی 75 تایی گرفته شده نتایج ذیل بدست آمده است:

سطح خارجی	سطح داخلی
$\bar{x} = 0.948$	$\bar{y} = 0.652$
$\sum y_i^2 = 91$	$\sum y_i^2 = 84$

به ازای $\alpha = 1\%$ فرض بیشتر بودن پراکندگی سطح داخلی را آزمون کنید.

$$\begin{cases} H_0 : \sigma_x^2 = \sigma_y^2 \\ H_1 : \sigma_x^2 > \sigma_y^2 \end{cases}$$

$$s_y^2 = \frac{\sum x_i^2 - n(\bar{x})^2}{n-1} = \frac{91 - 75(0.948)^2}{74} = 0.318881$$

$$s_y^2 = \frac{\sum y_i^2 - n(\bar{y})^2}{n-1} = \frac{84 - 75(0.652)^2}{74} = 0.704286$$

$$F_{74,74} = \frac{0.318881}{0.704286} = 0.452772$$

$$[0, F_{\%1,74,74}] = [0, 1.7676]$$

H_0 رد نمی شود.

مثال 16. مفروضات زیر در رابطه با زمان نمایش فیلم های تهیه شده توسط 2 شرکت می باشد. فرضیه $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ را در برابر $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$ در سطح 0/1 تست کنید.

		زمان برحسب دقیقه					
شرکت 1	102	86	98	109	92		
شرکت 2	81	165	97	134	92	87	114

$$\text{ناحیه پذیرش: } \left[F_{1-\frac{\alpha}{2}, 4, 6}, F_{\frac{\alpha}{2}, 4, 6} \right] = [0.163, 4.53]$$

$$F_{20,24} = \frac{70}{48} = 1.458 \quad F = \frac{s_1^2}{s_2^2} = \frac{8.877}{30.22} = 0.0863$$

بنابراین H_0 رد می شود.

11-4. آزمون مشاهدات زوجی

یک مورد خاص و مهم وقتی مطرح می‌شود که مشاهدات به صورت ذوبی تهیه شده و هر زوج تحت شرایط تجربی یکسان بدست آید بطوریکه شرایط از یک زوج به زوج دیگر تغییر کنند. روش آزمایش به تفاوت بین هر زوج از مشاهدات مربوط می‌شود. فرض کنید $(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$ مجموعه از n زوج متغیر تصادفی باشد که به ترتیب، معرف مقادیر قابل سنجش نظیر آزمایش $1, \dots, n$ هستند. تفاوت‌های موجود بین هر زوج مشاهده را بترتیب به صورت $D_{1n}=x_1-y_1, \dots, D_n=x_n-y_n$ به دست آورید. چنین فرض می‌شود که این تفاوتها متغیرهای تصادفی مستقل دارای توزیع نرمال هر یک با میانگین مشترک و مجهول μ_D و انحراف معیار مشترک و مجهول σ_D است.

احتمال دارد به خاطر تغییر شرایط تجربی از یک زوج به زوج دیگر، μ_D از زوجی به زوج دیگر یکسان باشد حتی اگر میانگین‌های x و y از هم متفاوت باشند. انحراف معیار σ_D ، گرچه مجهول است اما به σ_x^2 و σ_y^2 بستگی دارد. بدون اینکه σ_x و σ_y لزوماً با هم مساوی باشند. اگر x و y مستقل باشند در اینصورت $\sigma_D = \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2}$ است.

با این فرض‌ها، آشکار است که آزمون برابری میانگین‌ها معادل آزمون فرض $\mu_D = 0$ است وقتی که انحراف معیار σ_D مجهول باشد، آماره آزمون بصورت ذیل است:

$$t_{(n-1)} = \frac{\bar{D}}{S_D \sqrt{n}}$$

$$\bar{D} = \frac{\sum_{i=1}^n D_i}{n}, \quad s_D = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (D_i - \bar{D})^2}{n-1}} \quad \text{که در آن داریم:}$$

$$\begin{cases} H_0 : \mu_D = 0 \\ H_1 : \mu_D \neq 0 \end{cases}$$

مثال 17. تجربه ای مبتنی بر مقایسه خوردگی لوله با دو نوع پوشش بصورت زیر انجام شده است. قرار است به منظور بررسی میزان خوردگی نمونه برداری‌های زوجی انجام شده و طی آن یک نمونه از هر پوشش در هر زوج شرکت داده شود و هر زوج در یک نوع خاک، در عمق یکسان، با موقعیتی مشابه و برای مدتی یکسان دفن شود. از دیدگاه علمی، کشف یک تفاوت 11% اینچی در میانگین عمق بزرگترین حفره‌های هر پوشش با احتمال بزرگتر یا مساوی بودن با 0/95 مهم شمرده می‌شود. قرار است آزمون به ازای $\alpha = 5\%$ اجرا شود. براساس تجارب گذشته می‌دانیم که انحراف معیار عمیق بزرگترین حفره برای پوشش‌های مشابه مقدار تقریبی 0/008 اینچ را دارد. نتایج 15 نمونه به شرح زیر است:

تفاوت	پوشش B	پوشش A
25	40	65
7	68	75
22	51	73
2	41	43
12	41	53
11	47	58
15	32	47
28	24	52
-5	43	38
8	53	61
4	52	56
-1	57	56
-10	44	34

$$\sigma_D = \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2} = \sqrt{(0.008)^2 + (0.008)^2} = \%113$$

$$\bar{D} = \frac{\sum_{i=1}^n D_i}{n} = \frac{120}{15} = 8$$

$$s_D = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (D_i - \bar{D})^2}{n-1}} = \sqrt{121.571}$$

$$t_{14} = \frac{5\sqrt{15}}{\sqrt{121.571}} = 2.81$$

$$t_{0.025,14} = 2.145$$

بین دو نوع پوشش از نظر میزان خوردگی تفاوت قابل توجهی وجود دارد.

12-4. آزمون نسبت

فرض کنید p احتمال موفقیت در هر مرحله آزمایش دو جمله ای آزمایش دو جمله ای است و فرض کنید در یک جامعه دو جمله ای می‌خواهیم آزمونی را به یکی از صورت های زیر بررسی کنیم.

$$\begin{cases} H_0 : p = p_0 \\ H_1 : p \neq p_1 \end{cases} \quad \begin{cases} H_0 : p = p_0 \\ H_1 : p < p_0 \end{cases} \quad \begin{cases} H_0 : p = p_0 \\ H_1 : p > p_0 \end{cases}$$

P_0 نسبت موفقیت در آزمایش بینم است.

می‌دانیم که آماره مناسب برای P که تصمیم‌گیری بر اساس آن صورت می‌گیرد آماره $\hat{p} = \frac{x}{n}$ است که دارای توزیع دو جمله ای است.

از طرفی هرگاه n بزرگ باشد احتمالات مربوط به دو جمله ای را نمی‌توان مستقیماً از جدول دو جمله ای محاسبه نمود و از تقریب دو جمله ای به توسط پواسون یا نرمال استفاده می‌کنیم که اگر p خیلی به صفر یا یک نزدیک نباشد از توزیع نرمال استفاده می‌شود لذا برای تعیین ناحیه بحرانی دو حالت در نظر می‌گیریم.

الف- اگر n کوچک باشد، چون توزیع P دو جمله ای است برای تشکیل ناحیه بحرانی ابتدا نقطه ای دلخواه را بعنوان نقطه بحرانی اختیار کرده و به کمک آن α را محاسبه می‌کنیم. یکی از نقاط بحرانی که مورد استفاده قرار می‌گیرد نقطه x تعداد موفقیت‌ها در نمونه منتخب، است. چون میانگین $\mu = np_0$ است، بنابراین مقادیری از x که فاصله زیادی با $\mu = np_0$ داشته باشد باعث رد

فرض صفر خواهد شد. در نتیجه برای آزمون فرضی به صورت $\begin{cases} H_0 : p = p_0 \\ H_1 : p < p_0 \end{cases}$ با استفاده از توزیع دو

جمله ای $b(x, n, p_0)$ مقدار احتمال $\alpha_1 = p(x \leq x | H_0 \text{ is True})$ که در آن x تعداد موفقیت‌ها در نمونه به حجم n باشد را محاسبه کرده و در صورتیکه α_1 کمتر از α (سطح تشخیص انتخاب شده)

باشد، فرض صفر را رد می‌کنیم. به همین ترتیب برای آزمونی به صورت $\begin{cases} H_0 : p = p_0 \\ H_1 : p \neq p_0 \end{cases}$ با استفاده

از توزیع دو جمله ای $b(x, n, p_0)$ مقدار احتمال زیر را بدست می‌آوریم:

$$\alpha_1 = p(x \leq x | p = p_0) \quad \text{if } x < np_0$$

$$\alpha_1 = p(x > x | p = p_0) \quad \text{if } x > np_0$$

اگر $\alpha_1 < \frac{\alpha}{2}$ باشد. فرض صفر را رد می‌کنیم.

بطور کلی مطالب بالا را به صورت 6 مرحله زیر می‌توان خلاصه کرد:

آزمون فرض برای p ، هنگامی که n کوچک باشد.

(1) تشکیل فرض صفر $H_0: p = p_0$

(2) تشکیل فرض مقابل $p \neq p_0$ یا $p > p_0$ یا $p < p_0$

(3) انتخاب α

4) ناحیه بحرانی:

الف) اگر فرض مقابل $p < p_0$ باشد، تمام مقادیر x بطوریکه:

$$p(x \leq x | p = p_0) < \alpha$$

ب) اگر فرض مقابل $p > p_0$ باشد، تمام مقادیر x بطوریکه:

$$p(x \geq x | p = p_0) < \alpha$$

ج) اگر فرض مقابل $p \neq p_0$ باشد، اگر $x < np_0$ تمام مقادیر x بطوریکه:

$$p(x \leq x | p = p_0) < \frac{\alpha}{2}$$

و اگر $x > np_0$ باشد، تمام مقادیر x بطوریکه

$$p(x \geq x | p = p_0) < \frac{\alpha}{2}$$

5) محاسبات: به کمک نمونه منتخب با حجم n به مقدار x را تعیین و احتمال لازم در ناحیه بحرانی را محاسبه می‌کنیم.

6) نتیجه گیری: اگر x در ناحیه بحرانی قرار گرفت، فرض صفر را رد می‌کنیم.

مثال 18. بازیکنی مدعی است که 60% از توپ‌هایی که پرتاب می‌کند وارد سبد می‌شوند از 15 توپی که پرتاب کرده 10 توپ وارد سبد شده است. آیا می‌توان این ادعا را پذیرفت؟ $\alpha = 5\%$

$$\begin{cases} H_0 : p = 0.6 \\ H_1 : p \neq 0.6 \end{cases}$$

$$\alpha = 5\% \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = 2.5\%$$

$$\mu = np_0 = q$$

$$x = 10 \Rightarrow x > np_0$$

$$\text{ناحیه بحرانی } p(x \geq x | p = 0.6) < 0.025$$

$$p(x \geq 10 | p = 0.6) = 1 - p(x < 10) = 1 - \sum_{x=0}^9 \text{bin}(x, 15, 0.6) = 1 - 0.5968 = 0.4032$$

فرض H_0 را رد نمی‌کنیم $0.4032 > 0.025 \Rightarrow$

ب- اگر n نسبتاً بزرگ باشد، بنا به قضیه حد مرکزی، $\hat{p} = \frac{x}{n}$ تقریباً دارای توزیع نرمال با میانگین

$$\sigma = \sqrt{\frac{p_0 q_0}{n}}, \mu = p_0$$
 می‌باشد و در نتیجه تصمیم‌گیری بر اساس آماره زیر خواهد بود:

$$z = \frac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{\frac{p_0 q_0}{n}}} = \frac{x - np_0}{\sqrt{np_0 q_0}}$$

بنابراین اگر فرض مقابل:

$H_1: p < p_0$ باشد، ناحیه بحرانی $z < -z_\alpha$ و ناحیه پذیرش $[-z_\alpha, \infty)$

$H_1: p > p_0$ باشد، ناحیه بحرانی $z > z_\alpha$ و ناحیه پذیرش $(-\infty, z_\alpha]$

$H_1: p \neq p_0$ باشد، ناحیه بحرانی و $z < z_{\frac{\alpha}{2}}$ ناحیه پذیرش $\left[-z_{\frac{\alpha}{2}}, z_{\frac{\alpha}{2}}\right]$ خواهد بود.

مطالب بالا را در 6 مرحله زیر می‌توان خلاصه کرد.

آزمون فرض برای p هنگامی که n بزرگ است:

(1) تشکیل فرض صفر $H_0: p = p_0$

(2) تشکیل فرض مقابل $H_1: p < p_0$ یا $p > p_0$ یا $p \neq p_0$

(3) انتخاب سطح تشخیص α

(4) ناحیه بحرانی:

الف) برای $H_1: p < p_0$ $z < -z_{\alpha}$

ب) برای $H_1: p > p_0$ $z > z_{\alpha}$

ج) برای $H_1: p \neq p_0$ $z > z_{\frac{\alpha}{2}}$ یا $z < -z_{\frac{\alpha}{2}}$

(5) محاسبات: اگر z را از فرمول $z = \frac{x - np_0}{\sqrt{np_0q_0}}$ محاسبه می‌کنیم

(6) نتیجه‌گیری: اگر z در ناحیه بحرانی قرار گرفت، فرض H_0 را رد می‌کنیم.

مثال 19. سکه ای را 900 بار پرتاب می‌کنیم، 490 بار شیر می‌آید. آیا سکه ناریب است؟

$$\begin{cases} H_0: p = \frac{1}{2} \\ H_1: p \neq \frac{1}{2} \end{cases}$$

$\alpha = 5\%$

$$z = \frac{490 - 900 \times \frac{1}{2}}{\sqrt{900 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}}} = 2.667$$

ناحیه پذیرش $(-\infty, z_{\alpha}] = (-\infty, 1.64)$

بنابراین فرضیه صفر رد می‌شود.

مثال 20. فرض کنید سکه ای را 100 بار پرتاب می‌کنیم و 65 بار شیر آمده است. فرض سالم

بودن سکه در کدام سطح رد می‌شود؟ ($\alpha = 0,025$)

$$\begin{cases} H_0: p = \frac{1}{2} \\ H_1: p \neq \frac{1}{2} \end{cases} \quad \text{ناحیه پذیرش: } \left[-z_{\frac{\alpha}{2}}, z_{\frac{\alpha}{2}}\right]$$

$$z = \frac{x - np_0}{\sqrt{np_0q_0}} = \frac{65 - 50}{5} = 3$$

ناحیه پذیرش: $\left[-z_{\frac{\alpha}{2}}, z_{\frac{\alpha}{2}}\right] = [-1.96, 1.97]$

H_0 رد می‌شود یعنی سکه ناریب است.

مثال 21. یک شرکت تولید ادعا می‌کند که تنها 5 درصد تولیدات او ممکن است معیوب باشد. از 400 نمونه‌ای که از این شرکت خریداری کردیم 30 عدد معیوب بود. آیا می‌توان ادعای شرکت را قبول کرد؟ $\alpha=5\%$

$$\begin{cases} H_0 : p = 0.05 \\ H_1 : p > 0.05 \end{cases} \quad \hat{p} = \frac{x}{n} = \frac{30}{400} = 0.075$$

$$z = \frac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{p_0 q_0 / n}} = (0.05 - 0.075) / \sqrt{\frac{0.05 \times 0.95}{400}} = 2.29$$

$$\text{ناحیه پذیرش: } (-\infty, z_\alpha] = (-\infty, 1.64)$$

بنابراین فرضیه صفر رد می‌شود.

4-13. آزمون تفاضل نسبتها در دو جامعه

یعنی مواقع علاقمند به تست تساوی دو نسبت هستیم. یعنی می‌خواهیم فرضیه خنثی $H_0: p_1 = p_2 = p$ را در مقابل فرض $H_1: p_1 \neq p_2$ آزمون کنیم، که پارامترهای p_1 و p_2 عبارت از نسبت مورد تحقیق در دو جمعیت است. از دو جامعه بترتیب دو نمونه مستقل به حجم‌های n_1 و n_2 انتخاب می‌کنیم و نسبت‌های موفقیت \hat{p}_1 و \hat{p}_2 را از دو فرمول زیر حساب می‌کنیم:

$$\hat{p}_1 = \frac{x_1}{n_1}, \hat{p}_2 = \frac{x_2}{n_2}$$

که در آن x_1 و x_2 بترتیب تعداد موفقیت در دو جامعه اند.

می‌دانیم که متغیر تصادفی دارای توزیع نرمال استاندارد است. در صورتیکه H_0 درست باشد:

$$z = \frac{\hat{p}_1 - \hat{p}_2}{\sqrt{\frac{p_1 q_1}{n_1} + \frac{p_2 q_2}{n_2}}}$$

و n_1 و n_2 اعداد بزرگی هستند.

با ادغام دو نمونه با هم یک برآورد نااریب برای p (نسبت مشترک دو جامعه تحت فرض H_0) بدست می‌آید:

$$\hat{p} = \frac{x_1 + x_2}{n_1 + n_2} = \frac{n_1 \hat{p}_1 + n_2 \hat{p}_2}{n_1 + n_2}$$

که در آن x_1 و x_2 تعداد موفقیت در هر یک از دو نمونه می‌باشند.

در اینصورت مقدار z بصورت زیر خواهد بود:

$$z = \frac{\hat{p}_1 - \hat{p}_2}{\sqrt{\hat{p}\hat{q}\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}}$$

که در آن $\hat{q} = 1 - \hat{p}$ است.

بطور خلاصه: برای تست تساوی دونسبت در حالت بزرگ بودن نمونه‌ها، 6 مرحله زیر انجام می‌شود:

(1) تشکیل فرض $H_0: p_1 = p_2 = p$

(2) تشکیل فرض مقابل $p_1 \neq p_2$ یا $p_1 > p_2$ یا $p_1 < p_2$

(3) انتخاب سطح تشخیص α

(4) ناحیه بحرانی

الف) برای $p_1 < p_2$ $z < -z_\alpha$

ب) برای $p_1 < p_2$ $z > z_\alpha$

ج) برای $p_1 \neq p_2$ $z > z_{\frac{\alpha}{2}}$ و $z < -z_{\frac{\alpha}{2}}$

5) محاسبات: مقادیر $\hat{p}_1 = \frac{x_1}{n_1}$ و $\hat{p}_2 = \frac{x_2}{n_2}$ و $\hat{p} = \frac{x_1 + x_2}{n_1 + n_2}$ را محاسبه نموده و سپس عبارت زیر را

بیابید:

$$z = \frac{\hat{p}_1 - \hat{p}_2}{\sqrt{\hat{p}\hat{q}\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}}$$

6) نتیجه گیری: اگر z داخل ناحیه بحرانی قرار گرفت، H_0 رد می شود.

مثال 22. در شهر A از هر 1000 نفر 450 نفر مشتری یک نوع چای بخصوصی هستند. و در شهر B از هر 800 نفر 400 نفر مشتری این نوع چای بودند. آیا می توان گفت مردم در هر دو شهر بیک اندازه علاقمند به این نوع چای هستند؟ (خطای نوع اول را ده درصد در نظر بگیرید)

$$\begin{cases} H_0 : p_1 = p_2 = p \\ H_1 : p_1 \neq p_2 \end{cases}$$

$$\hat{p}_1 = \frac{x_1}{n_1} = \frac{450}{1000} = 0.45$$

$$\hat{p}_2 = \frac{x_2}{n_2} = \frac{400}{800} = 0.5$$

$$\hat{p} = \frac{x_1 + x_2}{n_1 + n_2} = \frac{450 + 400}{1000 + 800} = 0.47$$

$$\hat{q} = 1 - 0.47 = 0.53$$

$$z = \frac{0.45 - 0.5}{\sqrt{0.47 \times 0.53 \left(\frac{1}{1000} + \frac{1}{800}\right)}} = -2.08$$

$$\text{ناحیه پذیرش } [-z_{\alpha/2}, z_{\alpha/2}] = (-1.645, 1.645)$$

فرض H_0 رد می شود.

مثال 23. قبل از برقراری قانون مالک و مستاجر از 500 نفر 400 نفر از مستاجرین با صاحب خانه مسأله نداشتند. پس از آن از هر 600 نفر 400 نفر مسأله ای نداشتند. آیا می توان گفت که برقراری قانون موجب افزایش اختلاف شده است؟ (خطای نوع اول را 5 درصد در نظر بگیرید)

$$\begin{cases} H_0 : p_1 = p_2 \\ H_1 : p_1 > p_2 \end{cases}$$

$$\hat{p}_1 = \frac{400}{500} = 0.8, \quad \hat{p}_2 = \frac{400}{600} = 0.67$$

$$\hat{p} = \frac{400+400}{500+600} = \frac{8}{11}, \quad \hat{q} = 1 - \frac{8}{11} = \frac{3}{11}$$

$$z = \frac{0.8 - 0.67}{\sqrt{\frac{8}{11} \times \frac{3}{11} \left(\frac{1}{500} + \frac{1}{600} \right)}} = 4.81$$

$$\text{تاحیه پذیرش: } [z_{\alpha}, +\infty) = [1.645, +\infty)$$

مثال 24. در یک بیمارستان از 956 نوزاد 52/5 درصد پسر بودند در حالیکه وقتی نوزادان 2 بیمارستان را در نظر گرفتیم از 1406 نوزاد 0/4960 درصد پسر بودند. آیا اختلاف معنی داری در مورد نسبت نوزادان پسر در دو بیمارستان وجود دارد؟

$$n_1 = 956$$

$$n_1 + n_2 = 1406 \Rightarrow n_2 = 450$$

$$\hat{p}_1 = 0.525$$

$$\hat{p} = \frac{n_1 \hat{p}_1 + n_2 \hat{p}_2}{n_1 + n_2} \Rightarrow 0.496 = \frac{956 \times 0.525 + 450 \hat{p}_2}{1406} \Rightarrow \hat{p}_2 = 0.434$$

$$\begin{cases} H_0 : p_1 = p_2 \\ H_1 : p_1 \neq p_2 \end{cases}$$

$$z = \frac{0.525 - 0.434}{\sqrt{0.496 \times 0.504 \left(\frac{1}{956} + \frac{1}{450} \right)}} = 3.37$$

$$\text{تاحیه پذیرش: } [-z_{\alpha/2}, z_{\alpha/2}] = (-1.645, 1.645)$$

بنابراین فرضیه صفر رد می شود.

4-14. آزمون‌های مربوط به تفاضل‌های بین k نسبت

هدف این آزمون‌ها این است که باید تصمیم بگیریم که آیا تفاضل‌هایی که بین نسبت‌های نمونه‌ای (یا درصدها) مشاهده می‌شوند معنی‌دار هستند یا اینکه آنها را می‌توان معلول تصادف دانست. برای اشاره به یک روش کلی در حل این نوع مسائل، فرض کنید که Z_k, \dots, X_2, X_1 مقادیر مشاهده شده مجموعه‌ای از متغیرهای تصادفی مستقل Z_k, \dots, X_2, X_1 باشند که دارای توزیع‌های دو جمله‌ای با پارامترهای مربوط $(n_k, \theta_x), \dots, (n_1, \theta_1)$ هستند اگر n ها بقدر کافی بزرگ باشند می‌توانیم توزیع‌های متغیر تصادفی مستقل را با توزیع‌های نرمال استاندارد تقریب کنیم.

$$z_i = \frac{x_i - n_i \theta_i}{\sqrt{n_i \theta_i (1 - \theta_i)}}; i = 1, \dots, k$$

و با توجه به اینکه اگر $x \sim Z$ داشته باشد آنگاه $x^2 \sim \chi^2_{(1)}$ دارد، می‌توانیم

$$\chi^2_{(k)} = \sum_{i=1}^k \frac{(x_i - n_i \theta_i)^2}{\sqrt{n_i \theta_i (1 - \theta_i)}}$$

را بعنوان مقداری از یک متغیر تصادفی که توزیع فی دو با k درجه آزادی دارد تلقی کنیم.

$$\begin{cases} H_0 : \theta_1 = \theta_2 = \dots = \theta_k = \theta_0 \\ H_1 : \text{حداقل یکی از } \theta \text{ ها برابر } \theta_0 \text{ نیست} \end{cases}$$

بنابراین برای آزمون فرض

می‌توانیم از ناحیه بحرانی $\chi^2 \geq \chi^2_{\alpha, k}$ استفاده کنیم که در آن است

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^k \frac{(x_i - n_i \theta_0)^2}{n_i \theta_0 (1 - \theta_0)}$$

وقتی θ_0 معین نیست، یعنی وقتی توجه ما تنها به فرض صفر $\theta_1 = \theta_2 = \dots = \theta_k$ است، به جای θ برآورد ادغام شده را قرار می‌دهیم و ناحیه بحرانی بصورت $\chi^2 \geq \chi^2_{\alpha, k-1}$ در می‌آید که در آن از بین رفتن یک درجه آزادی یعنی تغییر در ناحیه بحرانی از $\chi^2_{\alpha, k}$ به $\chi^2_{\alpha, k-1}$ ناشی از این واقعیت است که به جای پارامتر نامعلوم θ ، برآورد آن قرار داده شده است. با مرتب کردن داده‌ها بصورت جدول زیر:

	پیروزی‌ها	شکست‌ها
نمونه 1	x_1	$n_1 - x_1$
نمونه 2	x_1	$n_2 - x_2$

درایه‌های آنرا فراوانی‌های مشاهده شده f_i می‌نامیم که در آن اولین اندیس نشانه سطر و دومین اندیس نشانه ستون این جدول $k \times 2$ است.

تحت فرض $\theta_1 = \theta_2 = \dots = \theta_k = \theta_0$ امید فراوانی‌های خانه‌ای مشاهده شده برای اولین ستون به ازای k و $I=1, \dots, k$ بصورت: $e_{i1} = n_i \hat{\theta}, e_{i2} = n_i (1 - \hat{\theta})$ برآورد می‌کنیم. مقدار آماره χ^2 بصورت زیر است:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^2 \frac{(f_{ij} - e_{ij})^2}{e_{ij}}$$

مثال 25. بر مبنای داده‌های نمونه‌ای که در جدول زیر نشان داده شده تعیین کنید که نسبت واقعی مشتریان که ماده پاک‌کننده را به ماده پاک‌کننده B ترجیح می‌دهند در هر سه شهر یکسان است یا نه $\alpha=0/05$

$$\begin{cases} H_0 : \theta_1 = \theta_2 = \theta_3 \\ H_1 : \text{نادرست } H_0 \end{cases}$$

$$\hat{\theta} = \frac{232 + 260 + 197}{400 + 500 + 400} = 0.53$$

$$\chi^2 \geq \chi_{0.05, 2}^2 = 5.991 \text{ ناحیه بحرانی}$$

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^2 \frac{(f_{ij} - e_{ij})^2}{e_{ij}}$$

$$e_{11} = 400 \times 0.53 = 212 \quad e_{12} = 400 \times 0.47 = 188$$

$$e_{21} = 500 \times 0.53 = 265 \quad e_{22} = 500 \times 0.47 = 235$$

$$e_{31} = 400 \times 0.53 = 212 \quad e_{32} = 400 \times 0.47 = 180$$

$$\chi^2 = \frac{(232 - 212)^2}{212} + \frac{(260 - 265)^2}{265} + \frac{(197 - 212)^2}{212} + \frac{(168 - 188)^2}{188} + \frac{(240 - 235)^2}{235}$$

$$+ \frac{(203 - 188)^2}{188} = 6.48 \Rightarrow H_0 \text{ رد می‌شود}$$

15-4. آزمون استقلال

آماره آزمون عبارتست از

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^k \frac{(o_i - e_i)^2}{e_i}$$

که داری توزیع مربع کای با $(c-1)$ و $(r-1)$ درجه آزادی است.

که در آن مجموع روی تمام عناصر جدول $r \times c$ بعدی جدول توافقی است محاسبه می شود.

اگر $\chi^2_{(2-1)(c-1)} > \chi^2_{\alpha; (r-1)(c-1)}$ باشد در اینصورت فرضیه H_0 را مبنی بر استقلال متغیرها در سطح α رد می شود.

مثال 26. برای بررسی ارتباط بین گرایش مذهبی و منطقه جغرافیایی آزمایشی به شرح زیر انجام شده:

2 گروه از مردم بطور تصادفی انتخاب شده اند، یک گروه از ناحیه شمال و گروه دیگر از ناحیه جنوب و هر شخص متعلق به یکی از 3 گروه شیعه، سنی و سایر مذاهب خواهد بود. فراوانی های ملاحظه شده در جدول زیر داده شده است:

نوع مذهب				
منطقه جغرافیایی	شیعه	سنی	سایرین	جمع
شمال	182 ₍₂₀₂₎	215 ₍₁₁₂₎	203 ₍₁₈₇₎	600
جنوب	154 ₍₁₃₆₎	136 ₍₁₄₀₎	110 ₍₁₄₀₎	400
جمع	336	351	313	1000

در سطح $\alpha=0/05$ آیا عقاید مذهبی و ناحیه ای که فرد زندگی می کند مستقل از یکدیگرند؟

A_1 = فرد انتخابی از قسمت شمال باشد.

A_2 = فرد انتخابی از قسمت جنوب باشد.

B_1 = فرد انتخابی از مذهب شیعه باشد.

B_2 = فرد انتخابی از مذهب سنی باشد.

$$\left\{ \begin{array}{l} H_0: \text{فرد انتخابی از سایر مذاهب باشد. استقلال رابطه منطقه جغرافیایی و نوع مذهب.} \\ H_1: \text{درست نیست } H_0 \end{array} \right.$$

$$= \frac{600}{1000} \times \frac{436}{1000}$$

تعدادی که ما انتظار داریم در صورتیکه H_0 درست باشد $= \left(\frac{600}{1000}\right)\left(\frac{336}{1000}\right)(1000) = 202$

افرادی که هم شمالی و هم شیعه هستند.

$$p(A_1 \cap B_2) = p(A_1)p(B_2) = \frac{600}{100} \times \frac{351}{1000}$$

$$n = \left(\frac{600}{1000}\right) \left(\frac{351}{1000}\right) (1000) = 211$$

به همین ترتیب برای بقیه محاسبه می‌شود.

$$\chi_{(2-1)(3-1)}^2 = \frac{(182-202)^2}{202} + \frac{(215-211)^2}{211} + \frac{(203-187)^2}{187} + \frac{(154-134)^2}{134} + \frac{(136-140)^2}{140} + \frac{(110-126)^2}{126}$$

$$= 8.556$$

$$\chi_{0.05,2}^2 = 5.991$$

چون $8/556 > 5/991$ است پس فرضیه H_0 رد می‌شود.

تذکر 1: برای تست استقلال برای این فرضیه که k جمعیت ببینیم دارای یک پارامتر p باشند یعنی

$$\begin{cases} H_0 : P_1 = P_2 = \dots = P_k = P \\ H_1 : H_0 \text{ is not true} \end{cases}$$

برای انجام آزمون

از آماره مربع کای استفاده می‌شود.

برای تشکیل چنین تستی نمونه‌های تصادفی n_1, n_2, \dots, n_k تایی از k جمعیت انتخاب نموده و آنها را در یک جدول توافقی $2 \times k$ نظیر جدول زیر مرتب می‌کنیم.

	نمونه		
	1	...	k
موفقیت	x_1	...	x_k
عدم موفقیت	$n_1 - x_1$...	$n_k - x_k$

مقادیر انتظاری را نیز طبق مسئله قبل محاسبه می‌نمائیم و بالاخره مقادیر ملاحظه شده و انتظاری را در فرمول آماره مربع کای زیر قرار می‌دهیم:

$$\chi_{(k-1)}^2 = \sum_{i=1}^k \frac{(o_i - e_i)^2}{e_i}$$

اگر $\chi_{(k-1)}^2 > \chi_{\alpha, k-1}^2$ باشد فرضیه H_0 رد می‌شود.

مثال 27. یک نمونه تصادفی از 30 نفر بزرگسال برحسب جنس و تعداد ساعتی که در هفته تلویزیون تماشا می‌کنند دسته بندی شده اند:

	مرد	زن
بالای 25 سال	6/53	7/46
	5	9
زیر 25 سال	7/46	8/53
	9	7

با استفاده از سطح $0/01$ فرضیه استقلال بین جنس و مدت زمان تماشای تلویزیون را تست نمائید.

$$\chi^2_{(1)} = \frac{(5 - 6.53| - 0.5)^2}{6.53} + \frac{(9 - 7.46| - 0.5)^2}{7.46} + \frac{(9 - 7.46| - 0.5)^2}{7.46} + \frac{(7 - 8.53| - 0.5)^2}{8.53} =$$

$$0.5768$$

$$\chi^2_{0.01,1} = 6.635$$

H_0 رد نمی شود.

16-4. آزمون درستی انطباق

آزمون درستی انطباق، بین فراوانی‌های ملاحظه شده و انتظاری براساس کمیت ذیل است:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^n \frac{(o_i - e_i)^2}{e_i}$$

که دارای توزیع مربع کای است.

O_i مقادیر ملاحظه شده و e_i مقادیر انتظاری در سلول i ام است.

اگر $\chi^2 > \chi_{\alpha-1-k}^2$ باشد، فرض H_0 را رد می‌کنیم.

تعداد پارامترهای تخمین زده شده از روی داده‌ها - 1 - تعداد سلول‌ها = درجه آزادی توزیع مربع کای

مثال 28. یک تاس 120 مرتبه انداخته می‌شود و نتایج زیر به دست آمده است:

x	1	2	3	4	5	6
f	20	22	17	18	19	24
انتظاری	20	20	20	20	20	20

$$\begin{cases} H_0 : P(x=i) = \frac{1}{6} \\ H_0 : P(x=i) \neq \frac{1}{6} \end{cases}$$

آیا این تاس سالم است؟ $\alpha=0/05$

اگر تاس سالم باشد، انتظار خواهیم داشت که هر یک از اعداد 1 تا 6 را 20 بار نشان دهد.

$$\chi_{(15)}^2 = \frac{(20-20)^2}{20} + \frac{(22-20)^2}{20} + \frac{(17-20)^2}{20} + \frac{(18-20)^2}{20} + \frac{(19-20)^2}{20} + \frac{(24-20)^2}{20}$$

$$= 1.7$$

$$\chi_{0.05,5}^2 = 11.07$$

چون $1.7 < 11.07$ است پس H_0 پذیرفته می‌شود و نتیجه می‌گیریم توزیع یکنواخت است و تاس سالم است.

مثال 29. فرض کنید طول عمر 40 باطری از توزیع نرمال پیروی می‌کند. فراوانی مشاهده شده

برای هر طبقه داده شده است طول عمر 40 باطری دارای حد متوسط $\bar{x} = 3/4125$ و انحراف معیار

$S = 0/703$ است. در سطح $\alpha=0/05$ آیا طول عمر باطری‌ها از توزیع نرمال پیروی می‌کند یا خیر؟

چون بعضی از مقادیر مشاهده شده و انتظاری از 5 کمتر هستند در هم ادغام شده‌اند.

حدود طبقه ها	o_i	e_i
1/45-1/95	2	0/6
1/95-2/45	1	2/7
2/45-1/95	4	6/8
2/95-3/45	15	10/6
3/45-3/95	10	10/3
3/95-4/45	5	6/1
4/45-4/95	3	2/2

$$P(1.45 < x < 1.95) = P\left(\frac{1.45 - 3.4125}{0.703} < Z < \frac{1.95 - 3.4125}{0.703}\right) = 0.015 \rightarrow e_i = 0.015 \times 40 = 0.6$$

$$P(2.95 < x < 3.45) = P\left(\frac{2.95 - 3.4125}{0.703} < Z < \frac{3.45 - 3.4125}{0.703}\right) = 0.2659$$

$$P(4.45 < x < 3.95) = P\left(\frac{4.45 - 3.4125}{0.703} < Z < \frac{3.95 - 3.4125}{0.703}\right) =$$

$$n(1.45 < x < 1.95) =$$

$$n(2.95 < x < 3.45) = (0.2659)(40) = 10.6$$

$$n(4.45 < x < 4.95) =$$

درجه آزادی = 4 - 3 = 1

$$\chi^2_{(1)} = \frac{(7 - 10.1 - 0.5)^2}{10.1} + \frac{(15 - 10.6 - 0.5)^2}{10.6} + \frac{(10 - 10.3 - 0.5)^2}{10.2} + \frac{(8 - 8.3 - 0.5)^2}{10.3} =$$

$$2.1129$$

$$\chi^2_{0.05,1} = 3.841$$

H_0 رد نمی شود.

مثال 30. از 1000 خانواده که دارای 5 بچه هستند تعداد دخترها مطابق جدول زیر به دست آمده است:

دختر	0	1	2	3	4	5
فراوانی	38	144	342	287	164	25

آیا این تولدها از توزیع دو جمله ای پیروی می کند؟

$$\mu = \frac{\sum x_i}{n} = \frac{2470}{1000} = 2.47$$

$$P = \frac{\mu}{n} = \frac{2.47}{5} = 0.494$$

$$P(x = x) = \binom{5}{x} (0.494)^x (0.506)^{5-x}$$

$$P(x = 0) = \binom{5}{0} (0.494)^0 (0.506)^5 = 0.03317$$

$$n = (x = 0) = (0.03317)(1000) = 33.2$$

o_i	38	144	342	287	164	25
e_i	33/2	161/9	316/2	308/7	150/7	29/4

$$\chi_{(25)}^2 = \frac{(38-33.2)^2}{2} + \frac{(144-161.9)^2}{161.9} + \frac{(342-316.2)^2}{316.2} + \frac{(287-308.7)^2}{308.7} + \frac{(164-150.7)^2}{150.7} = 2.2$$

$$\chi_{(2)}^2 = \frac{(32-32.2)^2}{32.2} + \frac{(144-161.9)^2}{161.9} + \frac{(342-316.2)^2}{316.2} + \frac{(287-308.7)^2}{308.7} + \frac{(164-150.7)^2}{150.7} + \frac{(25-201.4)^2}{29.4} = 7.54$$

$$\chi_{0.05,5}^2 = 11.07$$

H_0 قبول می‌شود.