تئوری صف

دکتر جولای

دانشکده فنی دانشگاه تهران

3 یا 4 مسئله

1 سؤال برای دقت مطالعاتی

1 تکنیکی را اثبات کنید

1 فرآیندهای احتمالی (حالات مختلف را رسم کنید)

1 اگر مدل صف پیدا شد (از احتمالات استفاده ...)
حالات مدل را تشخیص دهید.

۲ فهرست مطالب

۱.۲ مقدمات

- کاربردها
- اجزای سیستم صف
- مغیارهای صف
- نمادهای صف

۲.۲ مروری بر احتمالات ← Introduction to probability models

- توابع توزیع پر کاربرد
- تبدیل‌های لاپلاس و Z و مولد گشتاور و اشاره به کاربرد آنها

۳.۲ مروری بر فرآیندهای احتمالی

- زنجیره‌های مارکوف گسسته
- زنجیره‌های مارکوف پیوسته
- پروسه‌های تولد-مرگ
- فرآیند پواسون
-

۲

۴.۲ سیستم‌های صف

- سیستم‌های صف قطعی (سیستم M/M/*)
- سیستم‌های توزیع کلی (M/G/۱ , G/M/۱ , G/G/۱)
- سیستم‌های خاص (انباشته‌ای ، شکست ماشین و غیره)

۵.۲ شبکه‌های صف

۶.۲ سایر موارد

- بهینه سازی، طراحی و پیاده سازی صف
- روشهای کوتاه کردن طول صف
- شبیه سازی صف
- نمونه‌های کاربردی

بسمه تعالی

الهام ابوطالبی

سیستم های صف

کارشناسی ارشد صنایع

سال ۱۳۹۰

۲۰٪ تمرین و کوئیز (گروه‌های سه نفره، mail کنید، عکس بگیرید از تمرین بفرستید.)

شنبه ۱۴٫۴۵-۱۰٫۴۵

P.Pourhaji@gmail.com

TA - سه‌شنبه ۲ اسفند

f (همون حقایق تابع توزیع گسسته)

$$G(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

ضریبشون به‌ n ها بستگی هستند

همگرا

→ $G(z)$ تابع مولد هست.

۱) یا یک رابطه‌ی بازگشتی داده می‌شه که از طریق تابع مولد بگیریم f چیه.

۲) یا عبارت مقابل رو بسازیم، واریانس و امید ریاضی رو حساب کنیم.

مثال: (تیپ ۱) می‌خواهیم توزیع f_n رو با استفاده از تابع توزیع احتمال دربیاریم.

از خاصیت $G(z)$ استفاده می‌کنیم.

two

$$f_{n+2} - 2f_{n+1} - f_n = a \qquad n = 1, 2, \dots$$

مفروضات: $f_0 = f_1 = 0$

$$\sum f_{n+2} z^n + z\sum f_{n+1} z^n + \sum f_n z^n = a\sum z^n$$

بسط سری‌ها

این دو تا رو باید تبدیل کنیم

از ۲ شروع می‌شه ← $n+2$

$$z^{-2}\sum_{n=0} f_{n+2} z^{n+2} + z^{-1}\left(z\sum f_{n+1} z^{n+1}\right) + \sum f_n z^n = \frac{a}{1-z}$$

برای بالا باید توان z از ۰ شروع بشه.

$$z^{-2}\left(F(z) - z\cancel{f_1} - \cancel{f_0}\right) - 2z^{-1}\left[F(z) - \cancel{f_0}\right] + F(z) = \frac{a}{1-z}$$

$G(z)$ ← همون $F(z)$ که همه شرایط رو داره.

این دو تا رو نداره

جای f_0 و f_1 صفر می‌ذاریم.

$$z^{-2}F(z) - 2z^{-1}F(z) + F(z) = \frac{a}{1-z}$$

$$F(z) = \frac{az^2}{(1-z)^3}$$

(چون لازم نداریم می‌خوایم z از بین بره)

حالا می‌دونیم که: $\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z}$ → دوبار مشتق → $\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) z^{n-2} = \frac{2}{(1-z)^3}$

به ازای هر بار مشتق n یکی اضافه می‌شه

پس داریم $F(z) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{az^2}{2} n(n-1) z^{n-2} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{an(n-1)}{2} z^n$

← تفاوتش با مدل اصلی این هست که n از ۲ شروع شده

ولی چون تو فرض داشتیم $f_0 = f_1 = 0$ پس مشکلی نداره.

$$\Rightarrow f_n = \frac{an(n-1)}{2}$$

۳ مقدمه

مشتری و سرویس کننده دو طرف یک صف هستند.

مثال: بانک، تعمیرگاه، صندوق فروشگاه.

معطل ماندن مشتری ⟵ از دست دادن اعتبار موسسه

وقتی تقاضا از امکانات بیشتر است ⟵ از دست دادن مشتریان

۱.۳ دلایل کم بودن امکانات

- از لحاظ اقتصادی قراردادن سرویس کافی در اختیار مشتری امکان‌پذیر نیست (موسسات خصوصی).
- وجود محدودیت فضا برای افزایش امکانات سرویس (مثلاً فضای آموزش یا محل تعمیرات ماشین).

۲.۳ آیا باید برای رفع کمبود سرمایه گذاری کنیم؟

برای اطلاع از این‌که چه مقدار سرویس باید در اختیار داشته باشیم (بر روی امکانات سرمایه گذاری کنیم یا خیر) باید دو سوال پاسخ داده شود:

۱- چه مدت یک مشتری باید صبر کند؟

۲- طول صف چقدر است؟

به سوالات فوق ،در تئوری صف، در درجه اول از طریق آنالیز ریاضی و در غیر این‌صورت از طریق شبیه‌سازی پاسخ داده می‌شود. و این دو سوال معیار ارزیابی سیستم موجود و یا معیارهای طراحی سیستم جدید هستند.

توجه: لزوماً مشتری یک انسان نیست مثلاً برنامه کامپیوتری یا نامه‌های تایپی، هواپیما، قطعات تولیدی و غیره، نیز مشتری محسوب می‌شوند.

مثال - (تیپ 2)

$$G(z) = \sum_{n=0}^{\infty} g_n z^n$$

یک بار مشتق $z=1$ و

$$G^{(1)}(z)\Big|_{z=1} = E\left[X \cancel{z^{x-1}}\right] = E(X)$$

گشتاور فاکتوریل i ام

$$G^{(i)}(z) = E\left(X(X-1)\dots(X-i+1)\right) = F_i$$

$$\begin{cases} F_1 = E(X) \\ F_2 = E(X^2) - E(X) \\ F_3 = E(X^3) - 3E(X^2) + 2E(X) \end{cases}$$

مثلاً در تابع برنولی:

$$G(z) = P_0 z^0 + P_1 z^1 = q + pz$$

$$G^{(1)}(z)\Big|_{z=1} = p = E(X)$$

$$Var(X) = G^{(2)}(z) - G^{(1)}(z)\left(1 - G^{(1)}(z)\right)\Big|_{z=1} = p(1-p)$$

$$G^{(2)}(z) \rightarrow E(X^2)$$

فصل 3

6 - الف) احتمال این که تا ساعت 10:40 سه جزوه الف به جا بخونه برسه.

پواسون $\lambda_1 = 16$ ↓ جزوه الف $\lambda_2 = 10$ ↓ جزوه ب

الان ساعت 10:38 است. آخرین جزوه نوع الف 10:25 و آخرین جزوه ب 10:18

به طور میانگین در دو ساعت 16 تا جزوه الف و 10 تا جزوه ب می‌رسد. $(10+16) = 26$

26	60
?	2

$$\lambda = \frac{2\times 26}{60} = \frac{26}{30}$$

حالا از اون حالت زمان دار بودن دور میده.

$$P(X=3) = \frac{e^{-26/30}\left(26/30\right)^3}{3!}$$

ب) تا ساعت 10:40 یک جزوه ب برسه و دو جزوه الف

	دقیقه	جزوه
برای جزوه الف	60	16
	2	?

$$\Rightarrow \lambda_1 = \frac{16}{30}$$

برای جزوه ب $\frac{10}{30}$

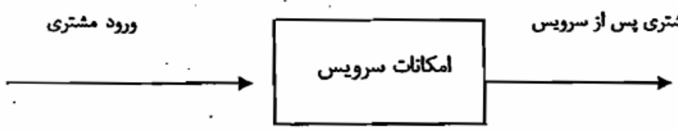
$$\Rightarrow p(\text{الف}=2, \text{ب}=1) = p(\text{الف}=2)\times p(\text{ب}=1)$$

$$= \frac{e^{-16/30}\times\left(\frac{16}{30}\right)^2}{2!} \times \frac{e^{-10/30}\times 10/30}{1!}$$

Queuing Pro.

۴ توصیف مسأله صف[1]

یک سیستم صف را می‌توان به صورت مشتریانی تعریف کرد که برای سرویس گرفتن وارد سیستم می‌شوند و اگر سرویس در اختیار نباشد برای آن منتظر می‌مانند و پس از انجام سرویس سیستم را ترک می‌کنند.



اما بهترین طریقه برای توصیف یک مسئله تشریح اجزاء آن با دقت و به‌طور کامل است. اجزاء یک سیستم صف عبارتند از:

۱. الگوی ورود مشتریان
۲. الگوی سرویس سرویس کنندگان
۳. نظم صف
۴. ظرفیت سیستم
۵. تعداد کانالهای سرویس
۶. مراحل سرویس

[1] Description of Queuing problem

ج) اولین جزوه‌ای که به جا گونه می‌رسه، الف باشه.

$$P(\text{ب} > \text{الف}) = \frac{\lambda_{\text{الف}}}{\lambda_{\text{الف}} + \lambda_{\text{ب}}} = \frac{1/16}{1/16 + 1/10}$$

← چون زمان رسیدن رو می‌خوایم، زمان رسیدن نمایی هست. $\frac{1}{\lambda}$ باید بذاریم.

د) در فاصله بین اومدن دو جزوه فوق 10:18 تا 10:25 (7 دقیقه) سه تا جزوه برسه.

یعنی مهم نیست حتما 2 دقیقه باشه

ب الف

$16 + 10 = 26$

$$26 \times \frac{7}{60} = A$$

$$P = (X = 3) = \frac{e^{-A} \cdot A^3}{3!}$$

هـ) اگر ساعت شروع کار 7 باشه و تا ساعت 9، 12 تا جزوه الف داشته باشیم میانگین کل جزوه‌های رسیده؟

$$E(\text{کل}) = \overset{\text{الف}}{12} + 20 = 32$$

چون مستقل هستند کاری نداریم.
ب داره با میانگین خودش کاری کنه.

(12) یک کارخونه هر 12 روز 4 تا ونه اتفاق می‌افته. ‎%25 حوادث جروح داره (Z)
‎%75 حوادث جروح نداره (Y)

زمان بین حوادث توزیع نمایی داره.

الف) احتمال این که در 8 روز آینده، 4 تا ونه داشته باشیم.

تابع ارلنگ: فاصله حوادث نمایی هست. ارلنگ نمایی هست. تو یه مدت زمان می‌خوایم ببینیم چندتا کار رخ داده. که پواسون این خاصیت رو نداره.

$$f(x) = \frac{1/4\, e^{-1/4 \times 8} \times (1/4 \times 8)^{4-1}}{\Gamma(4)} = \frac{e^{-2}\, 2^3}{4!}$$

$$\lambda x = 1/4 \times 8$$

← تو یک روز 1/4 بار ونه.

$$\text{ارلنگ} = \frac{\lambda e^{-\lambda x} (\lambda x)^{r-1}}{\Gamma(r)}$$

ب) احتمال این که در 8 روز آینده هیچ حادثه‌ای منجر به جراحت نشه. یعنی جز ‎%75 باشه. هم اینکه ‎%25 اتفاق نیفته. پس:

$$P(Z=0) = \underbrace{\frac{e^{(-1/4 \times 8 \times 0.25)} \times (1/4 \times 8 \times 0.25)^0}{0!}}_{\text{ببین! شد پواسون!}}$$

ج) احتمال این که اولین حادثه‌ای که اتفاق می‌افته، جزئی باشه.

یعنی مجروح کننده دیرتر اتفاق بیفتم

$$P(Z > Y) = \frac{\lambda_{\text{جزئی}}}{\lambda_{\text{جزئی}} + \lambda_{\text{مجروح کننده}}} = \frac{1/4 \times 3/4}{\frac{3}{16} + \frac{1}{16}}$$

۱.۴ الگوی ورود مشتریان

تعداد متوسط ورودی در واحد زمان (میانگین نرخ ورودی) یا زمان متوسط مابین ورودی‌های متوالی، از هر کدام استفاده کنید فرقی نمی‌کند و مشخص کننده الگوی ورود مشتریان است و دو حالت کلی دارد :

۱- قطعی (توزیع آماری خاص وجود ندارد و متوسط نرخ ورودی آن را تعیین می‌کند.)

۲- تصادفی (عدم قطعیت داریم و به میانگین و واریانس ... و نوع توزیع برای مسئله خودمان نیاز داریم.)

۲.۴ نوع ورود مشتریان

۱- تک به تک

۲- انباشته‌ای یا گروهی[1]: در یک لحظه بیش از یک ورودی به سیستم(نه سرویس) داریم. تعداد مشتریان انباشته یا قطعی است یا تصادفی. (ورود مشتریان که همزمان بوسیله اتوبوس وارد رستوران بین راهی می‌شوند)

۳.۴ نوع واکنش مشتریان (آنکه ورود مشتری به طول صف بستگی دارد)

- یعنی مشتری به محض ورود به سیستم چه تصمیمی می‌گیرد:
- هر اندازه صف طولانی باشد صبر می‌کند
- balking به نظر او صف طولانی است و سیستم را بلافاصله ترک می‌کند[2]
- Reneging به نظر او صف طولانی است و سیستم را پس از مدتی انتظار ترک می‌کند[3]

---

[1] Batches or Bulks

[2] balking

[3] Reneging

د) احتمال این که حداقل یک حادثه جزئی اتفاق بیفته $(Y\geq 1)$ ، و هیچ حادثه جروح کننده ای اتفاق نیفته. $(Z=0)$

$$P(Y\geq 1) * P(Z=0) \equiv 1 - P(Y\leq 0) = 1 - e^{-1/16}$$

$$e^{-3/16}$$

(15) یک سری ماشین داریم که دوتا موتور دارند. می فرستیم تعمیرگاه برای تعمیر مدت زمان تعمیر هر موتور، توزیع نمایی داره با میانگین ۱۰ دقیقه. $\frac{1}{\lambda} = 10'$

احتمال اینکه فقط یک موتور خراب بشه P_1 60%

احتمال این که هر دوتا موتور خراب بشه P_2 40%

میانگین ؟ واریانس ؟

$M_1 \leftarrow$ یک موتور خراب بشه

$M_2 \leftarrow$ دو موتور خراب بشه

میانگین خرابی ماشین

$$E(x) = E(X|M_1)P(M_1) + E(X|M_2)P(M_2)$$

$$= \underset{\text{له برعکس شده}}{\lambda} \times 0.6 + \underset{\text{دوموتور خراب شده}}{2\lambda} \times 0.4 = 14$$

$$E(x^2) = \underbrace{E(x^2|M_1)}_{\sigma^2 + \mu^2} P(M_1) + E(x^2|M_2) \cdot P(M_2)$$

$$= (100+100)\times 0.6 + (2\times 10^2 + 20^2)\times 0.4 = 440$$

مستقل اند، جمع می کنیم.

$$Var(x) = 440 - 14^2 = 194$$

✍ گاهی اوقات پس از مدتی انتظار صف را ترک می‌کند ولی به صف دیگری در سیستم که به نظر او کوتاهتر است می‌رود[1]

۴.۴ نوع الگوی ورودی نسبت به زمان

۱- الگوی ورودی نسبت به زمان ثابت است، یعنی شکل و مقادیر پارامترها و توزیع مستقل از زمان هستند و تغییر نخواهند کرد[2] (همگن بودن الگوی ورود)

۲- الگوی ورودی یا یکی از پارامترها با زمان تغییر می‌کند[3]. مثلاً قطعات ورودی به یک گارگاه عروسک سازی در ایام عید بیشتر است، یا مقدار کالائی که می‌سازند سال به سال به علت تغییرات تکنولوژی کمتر می‌شود. یک سیستم تلفن

۵.۴ الگوی سرویس

اکثر موارد الگوی ورودی در اینجا نیز صادق است.

ما به‌دنبال یافتن نرخ سرویس‌دهی هستیم: میانگین تعداد مشتریانی که در واحد زمان سرویس می‌شوند[4].

یا میانگین لازم برای سرویس یک مشتری[5] هستیم.

الگوی خدمت (مدت زمانی که ارائه خدمت به یک مشتری طول می‌کشد) ↓λ ↓ طول صف و زمان انتظار ↓

آهنگ خدمت دهی: میانگین تعداد مشتریانی که در واحد زمان از یک خدمت دهنده خدمت دریافت می‌کنند.

---

[1] Jockeying

[2] Stationary

[3] Non Stationary

[4] Mean Service rate

[5] Mean Service time

پروژه

← زمان تقسیم به بازه‌های ثابت شده.

- سیستم صف تک کاناله ← گسستگی زمان

نقاط ضعف و قوت

عیب: بی حوصلگی N پیام ← ظرفیت N تایی اصلاح شده
اندازه است

← و اگر سرویس تو زمان پیوسته است،
در صورتی سرویس دهی را آغاز می‌کند.

- بیشتر سیستم‌های پیوسته بررسی شده
- زمان سرویس‌ها یکسان و زمان سرویس‌ها متفاوت فرض شده
- ظرفیت N تایی در ~~مدل~~ های پیوسته

Discrete time. multiserver queues:

finite or infinite population

عوض کردن فرض‌ها:

✓ سرویس به صورت تک مرحله‌ای است.

ورودی‌ها تک تک وارد می‌شوند.

~~مستقل~~ زمان بر اساس اندازه‌ی ... سرویس در نظر گرفته شده

تعداد سرویس دهنده هست ← تک کاناله

نرخ ورود پیام‌ها یکسان

تقدم تعریف نشده.

نرخ سرویس برای همه پیام‌ها یکسان هست

نظم صف FCFS در نظر گرفته شده

stochastic
با فرض حل شده

مقاله‌های ...

✍ **توجه:** وقتی راجع به نرخ یا میانگین صحبت می‌کنیم مقادیر شرطی هستند. این شرط که سیستم خالی از مشتری نباشد. اگر سیستم خالی باشد امکانات سرویس بلا استفاده می‌ماند.

۶.۴ سرویس به حالات

✍ قطعی یا احتمالی

✍ فردی[1] یا انباشته‌ای (حمل و نقل)

سرویس مستقل از طول صف یا وابسته به آن:

✍ سرویس وابسته به تعداد مشتریان[2] (افرادی که وارد سیستم شده‌اند)، مثلاً اگر صف طولانی شود یا سریع‌تر کار می‌کند یا دست‌پاچه می‌شود، یا مستقل از تعداد افراد سیستم است.

توجه: در الگوی ورود نیز می‌توانستیم عدم صبر مشتری را بعنوان ورودی وابسته به حالت بگیریم.

۱.۶.۴ سرویس به حالات (مدت خدمت دهی ممکن است نسبت به زمان ثابت یا متغیر باشد)

✍ پایدار

✍ ناپایدار نسبت به زمان (سرویس کننده با کسب تجربه کار خود را بهتر فرا می‌گیرد) نیز تقسیم می‌شود.

توجه: وابستگی حالت به مدت زمانی که سیستم درکار بوده بستگی ندارد بلکه به حالت سیستم در یک زمان داده شده بستگی دارد. اما نوع دوم به زمان وابسته است.

توجه: یک سیستم می‌تواند هر دو نوع وابستگی را داشته باشد.

---

[1] Single

[2] State Dependant Service

۷.۴ نظم صف

اشاره به طریقه‌ای دارد که مشتریان برای انجام سرویس انتخاب می‌شوند.

- اولین فرد (یا انباشته‌ی) ورودی برای سرویس انتخاب می‌شود[۱].
- آخرین ورودی اولین سرویس[۲]: در انبارهائی که کالای اسقاط ندارند رایج است چون دسترسی به اقلام راحت‌تر است.
- به‌طور تصادفی و مستقل از زمان ورود به صف مشتری انتخاب می‌شود[۳]. SIRO

توجه: در خیلی مواقع هیچ نظمی را نمی‌توان برقرار کرد. مثلاً در سر چهار راه برای عبور از چراغ کلاً نظمی نیست. کلاً در جاهائی‌که مردم عادت به صف بستن ندارند این حالت روی می‌دهد.

- طرح‌های تقدم تاخر: (به مشتریان موقع ورود نمره و حق تقدم داده می‌شود و مشتریان با نمره بالا صرف نظر از زمان و ورودشان زودتر سرویس می‌شوند.) : به دو حالت همراه با تخلیه یا قطع[۴] و غیر تخلیه تقسیم میشوند.

در حالت تخلیه کار مشتری جاری قطع شده و مشتری با حق تقدم بالاتر هنگام ورود سرویس داده می‌شود. در این حالت یا سرویس قطع شده در موقع ادامه از نقطه قطع ادامه می یابد یا سرویس قطع شده از نو شروع می‌شود. در حالت غیر تخلیه مشتری با تقدم بالا در جلوی صف قرار می‌گیرد.

توجه: اگر هم‌زمان بیش از یک مشتری دارای تقدم یکسان باشند، می‌توان براساس یکی از موارد قبل نظم داخلی را تعیین کرد.

---

[۱] FIFO

[۲] LIFO

[۳] Select in Random Order. (SIRO)

[۴] preemptive

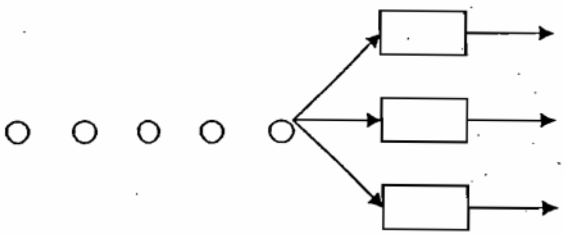
نکته: می‌توان هم‌زمان حالت تخلیه و عدم تخلیه داشته باشیم. مثلاً پیام‌های نظامی که به یک مرکز می‌رسند، اپراتور تنها وقتی پیام جاری را قطع کند که پیام اضطراری دریافت شده باشد و یا می‌توان حالت پیچیده‌تر ساخت به این صورت که اگر مدت زمان زیادی از سرویس نگذشته باشد تخلیه صورت گیرد و گرنه ادامه یابد .

۸.۴ ظرفیت سیستم (یا مدل‌های صف محدود) = معمولاً تعداد افراد صف + در حال سرویس (حداکثر تعداد مشتریان در صف)

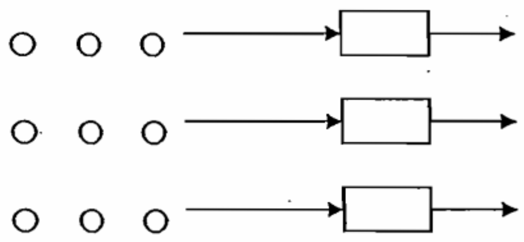
منظور محدودیت فیزیکی برای اندازه محل انتظار مشتریان است. در نتیجه وقتی صف به حد معینی رسید مشتریان اجازه ورود ندارند (به عبارت دیگر یک نوع امتناع اجباری مشتری است).

۹.۴ تعداد کانال‌های سرویس

منظور تعداد ایستگاه های سرویس موازی است که به‌طور هم‌زمان به مشتریان سرویس می‌دهند و دو نوع می‌باشند. نوع اول که برای همه سرورها یک صف واحد داریم:



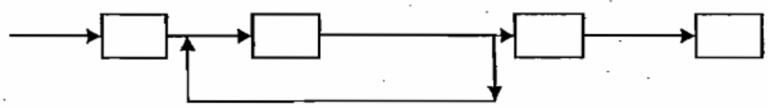
و نوع دوم که هر کانال یک صف جداگانه دارد:



۱۰.۴ مراحل سرویس (سری - موازی - ترکیبی)

گاهی اوقات چند مرحله سرویس داریم. مثل انجام آزمایشات و معاینات پزشکی. در اینجا دو حالت وجود دارد:

- بدون سیکل برگشت
- با سیکل برگشت (دوباره کاری ضایعات خطوط تولید)

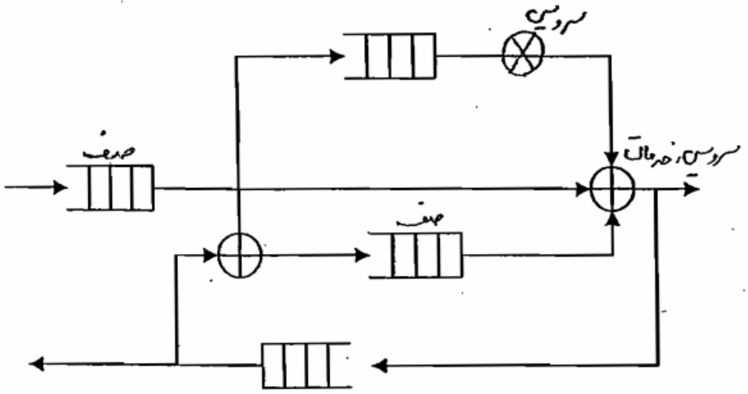


برای شبکه‌های صف علاوه بر موارد یک سیستم صف اطلاعات دیگری نیز باید ذکر شوند:

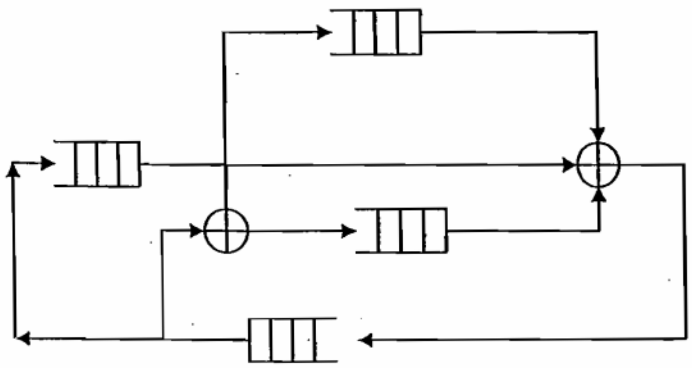
چگونگی ارتباط و اتصال صف‌ها با یکدیگر

- استراتژی مسیر حرکت- قطعی یا احتمالی با احتمالات داده شده
- استراتژی که بدنبال وقوع حالت بلوکه شدن باید دنبال کرد (در حالت ظرفیت محدود مکان انتظار مشتری)
- شبکه‌های باز و شبکه‌های بسته دو نوع کلی و استاندارد هستند

شبکه باز به‌صورت شکل زیر می‌باشد:



نمایش شبکه بسته به صورت ذیل می‌باشد:



گاهی اوقات تشخیص موارد فوق به سادگی میسر نسیت. مثلاً اینکه مشتری را چه چیزی بگیریم، یا سرویس دهنده ممکن است حالت‌های مختلف و ناواضحی داشته باشد. کاربردهای تئوری صف مختلف است. علاوه بر موارد ذکر شده در کنترل موجودی، بارگیری و تخلیه کشتی، بیمارستان‌ها، جریان تولید و طرح سیستم کاربرد دارد.

۱۱.۴ معیارهای ارزیابی[1]

برای سنجش عملکرد یک سیستم صف از سه معیار زیر بهره می‌گیرند.

[1] Measure of effectiveness

- طول صف (تعداد مشتریانی که در صف منتظر دریافت خدمت هستند یا تعداد مشتریان داخل سیستم)
- زمان انتظار هر مشتری در صف یا سیستم (زمان انتظار در صف + مدت زمان دریافت سرویس)
- درصدی از زمان که سیستم به علت نبودن مشتری بیکار است (درصدی از زمان که سیستم مشغول به کار است).

چون سیستم‌ها تصادفی هستند اغلب اوقات ارزش انتظاری یا میانگین این معیار ها مد نظر است.

۱۲.۴ تعاریف و اصطلاحات

برای بیان مختصر یک مسئله صف روش‌های مختلفی ارائه شده است. از جمله کندال[1] (۱۹۵۳) یک مسئله صف را با حروفی که با خط مورب از هم جدا شده‌اند نشان داد: (*A/B/X/Y/Z*)

ویژگی	سمبل نشانه	توضیحات	ویژگی	سمبل	توضیحات
توزیع زمان مابین ورودی‌های متوالی *A*	*M* *D* E_k *GI*	توزیع نمایی قطعی ارلنگ توزیع نوع k زمان‌های با توزیع مستقل کلی	*X*	۱, ۲, ... , ∞	

B توزیع زمان مدت خدمت دهی

نظم صف (*Z*)	FIFO LIFO SIRO	منظم (به اولین ورودی، زودتر از بقیه سرویس‌دهی می‌شود) منظم (به آخرین ورودی، زودتر از بقیه سرویس‌دهی می‌شود) ← مستقل از زمان ورود دهی

[1] Kendall

A / B / X / Y / Z

زمان مابین ورود
زمان خدمت دهی
تعداد خدمت دهنده
ظرفیت سیستم
نظم صف

	PRI	تصادفی.
	GD	برخی ورودی‌ها نسبت به بقیه دارای ارجحیت هستند کلی (تصمیم‌گیری مبنایی ندارد)

x تعداد خدمت دهنده ، y ظرفیت سیستم (صف)

مثال: $M/D/2/\infty/FIFO$

مقطعی
تعادلی

اگر $y=\infty$ and $z = FIFO$ باشد ذکر نمی‌شوند $M/D/2$.

در GI ، تنها مستقل بودن توزیعات و یکسان بودن آنها لازم است.

E_k ارلنگ نوع k می‌باشد و جمع k متغیر تصادفی نمایی است (یا تابع گاما با درجات صحیح آزادی).

M نمایی است. چون تنها تابع نمایی دارای خاصیت مارکوفی است (یعنی احتمال اینکه بدانیم در لحظه آینده چند نفر وارد سیستم می‌شوند مشروط به وضعیت فعلی است نه وضعیت گذشته)، بنابراین با M نشان داده می‌شود. این سمبل‌ها کافی نیستند. مثلا برای سرویس انباشته‌ای یا ورودی انباشته‌ای یا نمایش مراحل و یا سرویس وابسته به حالت نمادی ارائه نشده است.

M/Ph/1	1 سرویس ، رفتار چند سرویس گیرنده پشت سرهم را دارد. (فازی) (از چند تکه عملیات زمانی تشکیل شده (زمان سرویس از چند مرحله تشکیل شده)

تمرینات

۱- اجزای سیستم‌های صف زیر را مشخص کنید. (الگوی ورود مشتری، الگوی ورود سرویس، نظم صف، ظرفیت سیستم، تعداد کانال سرویس،

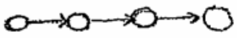
الف- انبار ابزار کارخانه

ب- مرکز اورژانس شهر : مشتری (بیمار)، پرستار (خدمت‌دهنده)، نوبت‌دهی با اولویت، تعداد تخت‌های موجود،

ج- مخزن سد آب :

د- باجه عوارضی در ابتدای بزرگراه

هـ- خط تولید محصول با سه نوع عملیات و یک مورد بازرسی در انتهای خط



۲- سیستم انبارداری محصولی را در نظر بگیرید که تعداد موجودی آن محصول به اضافه تعدادی که نمایش داده شده است همیشه برابر N باشد. به عبارت دیگر موقعی که یک واحد محصول فروخته می‌شود، بلافاصله برای جایگزینی آن واحد دیگری از محصول سفارش داده شود. سیستم صف را برای این مسئله تعریف کنید.

۳- یک پارکینگ اتومبیل را با ظرفیت معین به صورت سیستم در نظر بگیرید. اجزای آن یعنی نوع خدمت، خدمت دهندگان و تعداد آنها، مشتری، جمعیت مشتریان بالقوه همگن بودن یا نبودن آهنگ ورودی مشتری، مدت زمان خدمت، آهنگ خدمت دهی و آهنگ خروج مشتری و طول صف را مشخص کنید.

۱ مروری بر احتمالات

۱.۱ فضای نمونه

مجموعه نتیجه‌هایی است که می توان از یک تجربه (آزمایش) تصادفی انتظار داشت.

(مثال ۱) یک مشتری وارد یک سیستم صف می گردد که حداکثر ظرفیت آن ۵ نفر است. او نمی‌داند که هنگام ورودش چند نفر در سیستم هستند و لیکن اطمینان دارد که بیش از ۵ نفر نمی باشند. بنابراین چنانچه نتیجه آزمایش را تعداد مشتریان داخل سیستم تعریف کنیم داریم: $S=\{۰،۱،۲،...،۵\}$

۲.۱ پیشامد

پیشامد فضای نمونه

هر زیر مجموعه‌ی فضای نمونه را یک پیشامد گویند. اگر مجموعه E یک پیشامد باشد: $E\subset S$

(مثال ۲) در مثال اول، $E=\{۰\}$ پیشامد سیستم خالی بودن سیستم در هنگام ورود یک مشتری است.

۳.۱ احتمال وقوع یک پیشامد

براساس سه اصل زیر تعریف می شود:

$$
\begin{aligned}
&(1)\quad if \quad E_1E_2=\phi \rightarrow P(E_1\cup E_2)=P(E_1)+P(E_2)\\
&(2)\quad P(S)=1\\
&(3)\quad 0\le P(E)\le 1
\end{aligned}
$$

۴.۱ متغیر تصادفی

عبارت از تابعی عددی است که روی فضای نمونه تعریف می‌شود. به هر عضو فضای نمونه عددی اختصاص داده می شود. به عنوان مثال متغیرهای تصادفی زیر را در نظر بگیرید:

متغیر تصادفی زمان سرویس دهی X

$$Y=\begin{cases}1 & \text{اگر زمان سرویس بزرگتر از ۶ باشد}\\ 0 & \text{در غیر این‌صورت}\end{cases}$$

تابع توزیع (تجمعی) متغیر تصادفی X به ازای تمام مقادیر X عبارتست از:

$$F(x) = P(X \le x) : (-\infty , +\infty)$$
$$a \le b \rightarrow F(a) \le F(b)$$
$$P(a \le x \le b) = F(b) - F(a)$$

برای متغیر گسسته داریم:

اگر a یک عنصر از مجموعه قابل شمارش باشد: $P(a)=P(X=a)$ تابع احتمال تعریف می‌شود و داریم:

$$\sum_{a=-\infty}^{+\infty} p(a) = 1$$
$$F(x) = P(X \le x) = \sum_{a=-\infty}^{+\infty} p(a)$$

برای متغیر پیوسته داریم: $f(x)=\dfrac{dF(x)}{da}$ که تابع چگالی متغیر تصادفی تعریف می‌شود و داریم:

$$F(x) = P(X \le x) = \int_{-\infty}^{x} f(y)dy$$
$$P(a \le X \le b) = F(b) - F(a) = \int_{a}^{b} f(y)dy; \quad P(x=a)=0$$

۵.۱ امید ریاضی

امید هر چی یعنی خودش رو ضربدر احتمالش می‌کنیم و سیگما می‌گیریم.

$$E[x] = \sum_{i=1}^{n} x_i p(x_i) \qquad ; E[x] = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx$$
$$E[ax+b] = aE[x] + b \qquad ; E[ax+by] = aE[x] + bE[y]$$

۶.۱ واریانس متغیر تصادفی

$$Var[x]=E[(x-E[x])^2]=E[x^2]-(E[x])^2$$
$$Var[ax+b]=a^2\times Var[x]$$
$$if\ \ b\in R\Rightarrow Var[b]=0$$

۷.۱ تابع توزیع توام

احتمال اینکه هر دو متغیر تصادفی X و Y با هم روی دهند عبارتست از:

$$F(x<y)=p(X\le x,y\le y)$$

و نحوه محاسبه احتمالات تکی به‌صورت ذیل خواهند بود:

$$F_x(x)=P(X\le x,y<\infty)=\lim_{y\to\infty}F(x,y)=F(x,\infty)$$
$$f(a,b)=\frac{\partial^2}{\partial a\partial b}F(a,b)\qquad f_x(x)=\int_{\infty}^{\infty}f(x,y)dy$$

۸.۱ متغیرهای تصادفی مستقل

اگر دو متغیر تصادفی مستقل باشند، داریم:

$$P(X\in A,y\in B)=P(x\in A)p(X\in B)$$

بنابراین اگر به ازای همه مجموعه‌های عددی A و B رابطه فوق صادق باشد، آنگاه دو متغیر تصادفی X و Y را مستقل گویند. متغیرهای مستقل دارای خواص زیر هستند.

$$F(x,y)=F_x(x)F_y(y)$$
$$P(x,y)=P_x(x)P_y(y)$$
$$F(x,y)=f_x(x)f_y(y)$$
$$\operatorname{cov}(x,y)=E(xy)-E(x)E(y)=0$$
$$\Rightarrow\boxed{E(xy)=E(x)E(y)}$$ مستقل

برای تمام متغیرهای مستقل و غیرمستقل داریم:

$$\boxed{V(X+Y)=Var(X)+Var(Y)+2\operatorname{cov}(X,Y)}$$

۹.۱ احتمال شرطی

$P(E|F)$ احتمال اتفاق افتادن پیشامد E است، مشروط بر این‌که پیشامد F اتفاق افتاده باشد.

اگر F و E مستقل باشند:

$$P(E/F)=\frac{P(E\cap F)}{P(F)}=\frac{P(E)\times P(F)}{P(F)}=P(E)$$

(مثال ۳) دو مشتری وارد یک سیستم شده اند. با فرض اینکه احتمال ورود یک مشتری مرد برابر ۰/۶ باشد, احتمال پیشامد: {مرد بودن هر دو مشتری} $=E$ را در سه حالت زیر حساب کنید:

الف _ بدون اطلاعات اضافی:

$P(E)=۰/۶(۰/۶)=۰/۳۶$

ب _ اگر بدانیم مشتری اول مرد است (پیشامد F):

$$P(E/F)=\frac{P(EF)}{P(F)}$$

$P(EF)=P$ (مرد بودن هر دو مشتری و مرد بودن مشتری اول)

P(E|F)

$=P$ (مرد بودن هر دو مشتری) $=۰/۳۶$

$P(F)=0.6 \rightarrow P(E/F)=0.6$

ج – اگر بدانیم حداقل یکی از دو مشتری مرد است (پیشامد G) P(G) = 1 - P (زن بودن هر دو مشتری) = 1-0/16 = 0/84

$$P(E/G)=\frac{P(EG)}{P(G)} \qquad \rightarrow P(E|G)=0.43$$

$P(E\cap G)=0.36$

$P(G)=1-P$ (زن بودن هر دو مشتری) $=1-0.16=.84$

۱۰.۱ امید شرطی

امید ریاضی X مشروط بر آنکه متغیر تصادفی Y مقدار y داشته باشد:

$$E(X|Y=y)=\sum_x xP(X=x|y=y)$$

$$E(X|Y=y)=\frac{\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x,y)dx}{\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dx}$$

کاربرد:

$$E[x]=\sum_y E(x/Y=y)P(Y=y) \quad , \quad E[x]=\int_{-\infty}^{+\infty} E(x/Y=y)f_y(y)dy$$

$$P(A)=\sum P(A/Y=y)P(Y=y) \quad , \quad P(A)=\int_{-\infty}^{\infty} P(A/Y=y)f(y)dy$$

۱۱.۱ فرمول بیز

$$\boxed{P(A/B)=\frac{P(A,B)}{P(B)}}=\frac{P(B/A)P(A)}{P(B)}=\boxed{\frac{P(B/A)P(A)}{P(B/A)P(A)+P(B/A^c)P(A^c)}}$$

(مثال ۴) کارخانه ای دارای دو کارگاه است. محصولات کارگاه اول در ۹۰ درصد اوقات و محصولات کارگاه دوم در ۴۰ درصد اوقات استاندارد می باشند. با فرض اینکه میزان تولیدات کارگاه اول سه برابر تولید کارگاه دوم است, یک واحد کالای استاندارد این کارخانه با چه احتمالی در کارگاه اول تولید شده است؟

حل: تعریف پیشامدها

A: کالا از گروه تولیدات کارگاه اول است

19

B: کالا با استاندارد تطبیق کند.

$$P(A,B)=?$$
$$P(B/A)=0.9,\quad P(B/A^c)=0.4,\quad P(A)=0.75$$
$$P(A/B)=\frac{(0.9)0.75}{0.9(0.75)+0.4(0.25)}=\frac{27}{31}$$

تابع مولد گشتاور

۱۲.۱ تابع مولد گشتاور

گشتاور n ام متغیر تصادفی x برابر مشتق n ام تابع مولد است. $t=0$ $M_x(t)=E(e^{tx})$

می‌دانیم:

$$M_x(t)=E[e^{tx}] \;\rightarrow\; \frac{dM_x(t)}{dt^n}\Big|_{t=0}=E(X^n)_{n=1,2,\ldots}$$

به شرط استقلال x و y:

$$M_{x+y}(t)=E[e^{t(x+y)}]=E[e^{t(x)}]E[e^{t(y)}]=M_x(t)M_y(t)$$

تبدیل Z یا تابع مولد منحصراً برای توابع گسسته خواهد شد: (نقش و کاربردی شبیه تابع مولد گشتاور دارد)

می‌توان بصورت ضرب عدد در تابع z نوشت.

$$\text{if } P_i=P[x=i] \;\rightarrow\; P(z)=\sum_{i=0}^{\infty}P_iZ^i$$

به شرط آنکه Z به نحوی انتخاب شود که سری P_iZ^i همگرا باشد. $0<P_i<1$

رابطه بین P_i و $P(z)$ منحصر به فرد است و با داشتن یکی، دیگری بدست می آید.

$$P_n=\frac{1}{n!}\frac{d^nP(z)}{dz^n}\Big|_{z=0}\qquad n=1,2,\ldots \qquad E(x^i)=\left(z\frac{d}{dz}\right)^i G(z)$$
$$=\frac{1}{n!}G^{(i)}(0)$$

با کمک $G(z)$ می‌توان احتمالات P_i را راحت تر بدست آورد. معمولاً $G(z)$ را به‌صورت یک سری، در می‌آورند. در این سری ضرایب Z^i را P_iها تشکیل می دهند.

و یا آن‌را به‌صورت جز به جز به فرمی در می‌آورند که تبدیل اجزا آن از قبل شناخته شده است.

(مثال ۵)

$$G(z)=\frac{1}{1-z^2}=1+z^2+z^4+\cdots$$ سری همگراست $\Leftarrow |z|<1 \Leftarrow$ تمام مقادیر

$$P_i=\begin{cases}1 & \text{for } n \text{ be an even number} \\ 0 & \text{for } n \text{ be an odd number}\end{cases}$$ زوج / فرد $\quad G(z)=\sum_{i=0}^{\infty} P_i z^i$

تابع مولد $$G(z)=\frac{2}{(1-z)(2-z)}=\frac{2}{1-z}-\frac{2}{2-z}=\frac{2}{1-z}-\frac{1}{1-z/2}$$

$$\frac{2}{1-z}=2(+1)^i \qquad \frac{1}{1-z/2}=(\tfrac{1}{2})^i$$

چون $\frac{A}{1-az}$ (بسته) برابر توالی Aa^i (باز) است داریم:

$$2(1)^i-1(\tfrac{1}{2})^i$$

$$P_i=2(1)^i-1(\frac{1}{2})^i=2-(\frac{1}{2})^i$$ مقادیر بازه ... ۲

۱۳.۱ محاسبه گشتاور های توزیع با کمک $G(z)$

$$G(z)=E(z^x)$$

چون P_i احتمال هستند، جمع آنها برابر ۱ است:

$$G(1)=G^{(0)}(1)=\sum_{i=1}^{\infty}P_i1^i=1$$

به ازای $z=1$

با مشتق‌گیری داریم:

مشتق اول $$G^{(1)}(z)=\frac{d}{dz}E[Z^x]=E[xZ^{x-1}]$$

$$G^{(1)}(1)=E[x] \ldots G^{(i)}(1)=E[x(x-1)\ldots(x-i+1)]=F_i$$

F_i را گشتاور فاکتوریال i ام گویند.

یه بار مشتق می‌گیریم $E(z^x)$ از ... F_1 ... دوبار مشتق می‌گیریم

ارتباط زیر بین F_i با M_i (گشتاور مرکزی) $E[x^i]=1$ وجود دارد:

به z یک می‌دهیم

مشتق دوم: $d\,E(x(x-1)z^{x-2})$

$$E(x(x-1)(x-2))$$

$$F_1=M_1$$

$$F_2=M_2-M_1 \qquad \begin{cases}M_1=F_1\\ M_2=F_2+F_1\\ M_3=F_3+3F_2+F_1\end{cases}$$

$$E(x^3-3x^2-x^2+2x)$$

$$E(x^3-3x^2+2x)$$

$$F_3=E(x^3)-3E(x^2)+2E(x)$$

$$M_3=F_3+3F_2+F_1=E(x^3)-3E(x^2)+2E(x)+3E(x^2)-3E(x)+E(x)$$

$$M_3=E(x^3)$$

(مثال ۶)

$$F_2 = G^{(2)}(1) = E[X(X-1] = E[X^2] - E[X]$$
$$M_2 = F_2 + F_1 = G^{(2)}(1) + G^{(1)}(1) \Rightarrow V[x] = M_2 - M_1^2$$
$$= G^{(2)}(1) + G^{(1)}(1) - (G^{(1)}(1))^2$$

طرف۱: گشتاورها مستقیماً نیز (بدون F_i) از توابع مولد قابل استحصال هستند:

$E(z^x)$

$$\frac{dG(Z)}{dz}\Big/_{z=1} = E[Xz^{X-1}]_{z=1} = E[X]$$
$$\frac{d}{dz}(Z\frac{d}{dz})G(z)_{/z=1} = E[X^2 z^{X-1}]_{z=1} = E[x^2]$$
$$E[x^i] = \frac{d}{dz}(z\frac{d}{dz})^{i-1}G(z)_{/Z=1} = (Z\frac{d}{dz})^i G(z)_{/z=1}$$

$$G_{X+Y}(z) = E[z^{X+Y}] = E[z^X z^Y] = E[z^X]E[z^Y] \text{ if X and Y are dependent}$$ (استقلال)
$$= G_X(z).G_Y(z)$$

تابع مولد برای توزیعی که از کانولیشن دو توزیع بدست می‌آید برابر حاصل ضرب توابع توزیع‌های مربوطه می‌باشد. به زبان احتمالی :

$$P\{X+Y=k\} = (p \times q)_k = \sum_{i=0}^{k} p_i q_{k-i} \quad where \quad p_i = P\{X=j\}$$
$$\rightarrow \quad q_j = P\{Y=j\}$$

۱۴.۱ توزیع مرکب[1] و تابع مولد آن

$$Y = X_1 + X_2 + ... + X_N; \quad for\ i=1,...,N \quad X_i\ are\ IID$$ مستقل

N متغیر تصادفی غیرمنفی با توزیع یکسان و مستقل از هم داریم.
تعداد هم متغیر تصادفی است .

[1] Compound distribution

$E(x) = E(E(x|y))$

اگر $G_X(Z)$ برای X_i ها مشترک و $G_N(Z)$ ها داده شده باشند, برای محاسبه $G_Y(Z)$ داریم:

چون مستقل هستند در هم ضرب می شوند.

چرا به شرط N؟

چون N خودش یه متغیر تصادفیه

$$G_Y(z) = E[z^Y]$$
$$= E\left[E[z^Y \mid N]\right] = E\left[[z^{X_1+X_2+\dots X_n} \mid N]\right] = E\left[E[z^{X_1} \dots z^{X_n} / N]\right]$$
$$= E[G_X(z)^N] = G_N(G_X(z)$$

۲ اسفند - سه‌شنبه

۱ توزیع‌های احتمال گسسته

۱.۱ توزیع برنولی[1]

برای یک آزمایش دو احتمال موفقیت و شکست داریم. مثلاً جریان برق از یک سیم عبور می‌کند یا عبور نمی‌کند. احتمال موفقیت برابر p بوده که در این صورت مقدار متغیر تصادفی $X=1$ است و در غیر این صورت (یعنی با احتمال $1-p$) مقدار متغیر تصادفی $X=0$ خواهد بود.

$$G(Z)=p_{\circ}Z^{0}+p_{1}Z^{1}=q+z^{1}=q+pz \qquad E[x]=G^{1}(1)=p \qquad V[x]=pq$$

۲.۱ توزیع دو جمله‌ای[2]

اگر صف دو اولویتی بود، مثلاً از این استفاده می‌کنیم.

در این توزیع متغیر تصادفی X تعداد موفقیت‌های موجود در n آزمایش برنولی متوالی و مستقل است، یعنی داریم:

$$y_i \sim \text{Bernoulli}(p) \quad \text{Where} \quad X=\sum_{i=1}^{n} y_i$$

در تعریف فوق، y_iها مستقل از هم می‌باشند.

تعمیم اینکه مستقل باشند، میشه ضرب توابع مولد

احتمالات

$$G(z)=(q+pz)^{n}=\sum_{i=1}^{n}\binom{n}{i}p^{i}(1-p)^{n-i}z^{i}$$

$$\xrightarrow{\text{where}} p_i=P\{X=i\}=\binom{n}{i}p^{i}(1-p)^{n-i}$$

$$E[X]=nE[Y_i]=np \quad , \quad V[X]=nV[Y_i]=np(1-p)$$

نکته) در حالت حدی وقتی تعداد آزمایشات $n\to+\infty$ میل می‌کند، اگر $E[X]=np=\lambda$ ثابت باشد به توزیع پواسون می‌رسیم، یعنی: (با لامبدا تابع مولد)

[1] Bernoulli distribution

[2] Polynomial distribution

$$G(z) = \left(1-(1-z)p\right)^n = \left(1-(1-z)(\lambda/n)\right)^n \longrightarrow e^{(z-1)\lambda}$$

تابع مولد پواسون

نکته) اگر X_iها دارای توزیع دو جمله‌ای با پارامتر یکسان p باشند (با n_iهای متفاوت) توزیع جمعی آن‌ها برابر است با:

p یکسان با n های متفاوت

$$X_1 + X_2 + \ldots + X_n \sim \text{Bin}\,(n_1 + n_2 + \ldots + n_n,\ p)$$

یعنی صف های با اولویت

۳.۱ توزیع چند جمله‌ای[۱] هر مشتری از کلاس مختلف باشد؛

در اولویت بندی نظم صف کاربرد دارد.

یک توالی از n آزمایش را در نظر بگیرید که این بار هر آزمایش دارای $k \geq 2$ پیشامد ممکن است. در هر آزمایش احتمال‌های پیشامدها برابر $p_1, p_2, \ldots, p_k$ و $\sum_{i=1}^{k} p_i = 1$ است. (دو آزمایش k پیشامد مستقل دارد)

n_i تعداد دفعات وقوع پیشامد iام در توالی آزمایشات است. می‌خواهیم احتمال توأم واقعه متشکل از پیشامدهای $N_1 = n_1, N_2 = n_2, \ldots, N_k = n_k$ را بدست آوریم:

$$G(z_1, z_2, \ldots, z_k) = E[z_1^{N_1} \ldots z_k^{N_k}] = \sum_{n_1=0}^{\infty} \sum_{n_2=0}^{\infty} \ldots \sum_{n_k=0}^{\infty} P(n_1, n_2, \ldots, n_k) z_1^{n_1} \ldots z_k^{n_k}$$

$\sum_{i=1}^{k} N_i = N \le n$

بعد از یک آزمایش یکی از n_iها برابر با یک و بقیه برابر صفر هستند بنابراین تابع مولد برابر است با:

یکی از k حالت رخ می‌دهد.

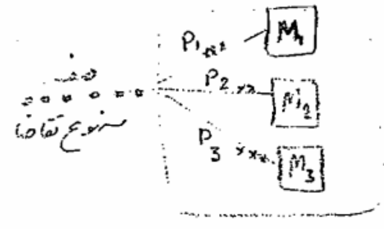
$$p_1 z_1 + p_2 z_2 + \ldots + p_k z_k$$

تابع مولد n آزمایش مستقل، از ضرب تابع مولد یک آزمایش حاصل می‌شود بنابراین داریم:

$$G(z) = (p_1 z_1 + p_2 z_2 + \ldots + p_k z_k)^n$$

از ضرایب توان های مختلف Z_i داریم:

$$P(n_1, n_2, \ldots, n_k) = \frac{n!}{n_1! n_2! \ldots n_k!} p_1^{n_1} \ldots p_k^{n_k}$$



[۱] Multinomial distribution

۴.۱ توزیع هندسی[۱] ← مدل‌های صف با این توزیع به بهترین شرایط خاصیت صف رو نشون میدن.

در این توزیع متغیر تصادفی X، مقدار آزمایشات مورد نیاز در دنباله‌ای از آزمایشات برنولی (با احتمال موفقیت p) برای رسیدن به اولین موفقیت است. گاهی اوقات متغیر $X-1$ را هندسی تعریف می‌کنند (که از صفر شروع می شود). احتمال آن‌که اولین موفقیت بیش از n آزمایش لازم داشته باشد.

خاصیت بدون حافظه بودن این توزیع، یعنی اگر تا به حال j آزمایش بدون موفقیت داشته باشیم احتمال آن‌که پس از i آزمایش به موفقیت برسیم همانند آن است که i آزمایش جدید از اول شروع کرده باشیم. ادامه

$$P_i = (1-p)^{i-1} p \quad , \quad G(z) = \sum_{i=1} p(1-p)^{i-1} z^i = \frac{pz}{1-(1-p)z}$$

احتمال اینکه تعداد آزمایش از n بیشتر شود $P(X>n) = \sum_{i=n+1}^{\infty} P_i = (1-p)^n$

۵.۱ توزیع دو جمله‌ای منفی[۲]

در این توزیع X، تعداد آزمایشات مورد نیاز در یک توالی از آزمایشات برنولی برای n موفقیت است. اگر $X=i$ باشد به این معنی است که در بین $i-1$ آزمایش اول باید $n-1$ موفقیت وجود داشته باشد و ← nامین موفقیت مورد نظر ماست.

iامین آزمایش هم با موفقیت همراه باشد. بنابراین تعداد آزمایشات برای رسیدن به اولین موفقیت از توانایی هندسی Geom (P) پیروی می کند. به همین نحو تعداد آزمایشات لازم از آن نقطه تا موفقیت بعدی نیز Geom (p) است بنابراین است که در آن یکسان هستند. تابع مولد، میانگین و واریانس این توزیع n برابر توزیع هندسی می باشند. (برابر ضرب n توزیع هندسی مستقل است) چون تعداد آزمایشات لازم برای رسیدن به n موفقیت جمع تعداد آزمایش‌های بین هر موفقیت است

تابع مولد توزیع هندسی $G(z) = \left(\frac{pz}{1-qz}\right)^n \quad , \quad \mu = n/p \quad . \quad \sigma^2 = nq/p^2$

۶.۱ متغیر تصادفی هندسی

ادامه

تعداد آزمایشات برنولی یکسان و مستقل تا رسیدن به اولین موفقیت از توزیع هندسی پیروی می‌کند، که در آن p احتمال موفقیت در هر آزمایشی برنولی است.

---

[۱] Geometric distribution

[۲] Negative binomial

در محیط صنعتی زمان لازم برای انجام یک کار، نصب یک ابزار، حمل یک قطعه، آماده سازی ماشین و نیز تعداد واحد زمانی که یک ماشین تا زمان خرابی می تواند مستمر کار کند و تعداد واحد زمانی لازم برای تعمیر آن (یا یک قطعه از آن) بکار رود. در ارتباط با خاصیت بدون حافظه (عدم حافظه) توزیع هندسی، رابطه ذیل قابل اثبات است:

اثبات ماشین

$$p(X=m+n \mid X>m)=P(X=n)$$

یعنی به m که تاریخچه متغیر X است بستگی ندارد.

مثال: عمر یک ابزار ماشین کاری با تعداد باری که استفاده شده است قبل از آنک بشکند نشان داده می‌شود. فرض کنید عمر یک ابزار خاص با متغیر تصادفی X از توزیع هندسی پیروی می‌کند ($p=0.01$) بنابراین ابزار تا ۱۰۰ بار می تواند بطور متوسط استفاده شود اگر بدانیم که تا به حال ۵۰ بار مورد استفاده قرار گرفته است:

مثال: نشان دهید توزیع هندسی تنها توزیع گسسته دارای خاصیت بدون حافظه است.

اثبات: اگر خاصیت $p(X=m+n \mid X>m)=P(X=n)$ برای متغیر تصادفی X برقرار باشد، با قراردادن $m=1$ و $n=k;\ k=1,2,\ldots$ در رابطه داریم: الف m عدد صحیح و مثبت فرض می‌شود.

$$P(X>m)=1-P(X\le m)=1-P(X=1)-P(X=2)\cdots=1-p-(1-p)p-\cdots-p(1-p)^{m-1}=(1-p)^m$$

بنابراین به تابع برگشت زیر می رسیم:

(برای خاصیت عدم حافظه)

توجه) ب- جهت ← $P(X=m+n \mid X>m)$ صادق است با $m,n\ge 1$ $=\dfrac{P(X=m+n)}{P(X>m)}=\dfrac{p(1-p)^{m+n-1}}{(1-p)^m}$

اثبات ② $p(X=k+1)=(1-p)\times p(X=k);\ p=p(X=1)$ $\quad (1-p)^{i-1}p$

$P(X=n)=p(1-p)^{n-1}$ ← در نتیجه خاصیت عدم حافظه برقرار است.

← اگر این کار را جایگزین کنیم می‌رسیم

همان احتمال موقعیت برنولی خواهد شد. با جایگزینی مکرر خواهیم داشت:

اثبات: $P_i=(1-p)^{i-1}\cdot p$ توزیع هندسی

خاصیت عدم حافظه به صورت شرطی ← $p(X>i+j \mid X>j)=\dfrac{P(X>j+i)}{P(X>j)}=\dfrac{(1-p)^{i+j}}{(1-p)^j}=(1-p)^i \Rightarrow P(X>n)=\sum P_i=(1-p)^n$

یعنی فقط اطلاعات مورد نیاز را دارد.

۴-۱.۷.۱

اثبات ②: با فرض $m=1$

$$p(X=k)=p(X=k+1 \mid X>1),\quad p(X=k)=\frac{p(X=k+1,\ X>1)}{p(X>1)} \rightarrow p(X=k)=\frac{p(X=k+1)}{1-p(X=1)}$$

$$p(X=k+1)=(1-p)^k p$$

اصولاً اثبات‌ها با استفاده از همین روابط recursive به دست می‌آید.

که توزیع هندسی با پارامتر P است.

۷.۱ توزیع پواسون[۱]

X یک متغیر تصادفی غیرمنفی عدد صحیح با احتمالات نقطه ای است.

یا خروج مشتری یا بیکار بودن و...

فرایندهای تصادفی ← به همین طریق می‌توان این توزیع را به‌عنوان تعداد دفعات وقوع یک واقعه (ورود مشتری) در یک فاصله زمانی به طول t از یک فرایند پراسون به چگالی λ تعریف کرد: $X \sim Poisson(\lambda t)$

- احتمال وقوع واقعه (پیشامد موفقیت) در فاصله زمانی کوچک dt از λdt است.
- احتمال وقوع همزمان دو واقعه $O(\lambda dt)$ است.
  مقدار کوچکی است، هرچه فاصله کمتر، به سمت صفر میل می کند.
- تعداد وقایع در فواصل زمانی بدون هم پوشی مستقل از هم هستند.

$$G(z)=\sum P_i z^i = e^{-\lambda}\sum_{i=0}^{\infty}\frac{(z\lambda)^i}{i!} = e^{(z-1)\lambda}$$

خواص توزیع پواسون:

۱- جمع دو متغیر تصادفی پواسون از توزیع پواسون پیروی می کند. $X=X_1+X_2$

۲- اگر N را تعداد عناصر یک مجموعه تعریف کنیم که از توزیع پواسون پیروی کند:
(تعداد مشتری در صف)

$N \sim \text{poisson}(a)$

و با احتمال p (هر عنصر مستقل از دیگری با این احتمال انتخاب می شود) از این مجموعه انتخابی صورت دهیم, اندازه مجموعه انتخاب شده k یک متغیر تصادفی پوآسون است:

$K \sim \text{poisson}(pa)$

اثبات: K از توزیع مرکب پیروی می کند.

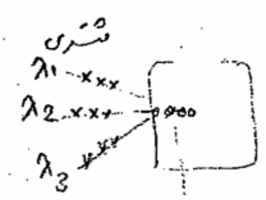
$$1.\quad X=X_1+X_2 ,\quad X_1=Poisson(\lambda_1) ,\quad X_2=Poisson(\lambda_2)$$

$$G_X(z)=e^{(z-1)\lambda_1}\cdot e^{(z-1)\lambda_2}=e^{(\lambda_1+\lambda_2)(z-1)} \Rightarrow X\sim Poisson(\lambda_1+\lambda_2)$$

در مدل صف $M/G/1$ تعداد ورودی ها خواص پواسون را دارند.

[۱] Poisson distribution

چهارراه



صف کلی نیز توزیع پواسون خواهد بود.

۳- اگر تعداد عناصر یک مجموعه از $N \sim \text{poisson}(a)$ پیروی کند و بطور تصادفی به یکی از دو گروه ۱ و ۲ با احتمال و تخصیص یابند در آن صورت اندازه های مجموعه های ۱ و ۲ مستقل از هم با توزیع های زیر هستند:

اثبات: با استفاده از قانون احتمالات کل.

بنابراین توزیع احتمالی توام از نوع ضربی است که از حاصل ضرب در توزیع پراسون با پارامترهای () حاصل می شوند (نتیجه فوق قابل تعمیم است).

۱.۷.۱ Method of collective Marks

برای Z یک تعبیر احتمالی هم ساخته اند, هر چند خود آن یک متغیر کمکی است.

با تعبیر داده شده اثبات ها راحتر می شود.

$N = 0,1,2,...$ را متغیر تصادفی عدد صحیح غیرمنفی و () را تابع مولد آن فرض می‌کنیم.

تعبیر) به N به عنوان متغیری که اندازه یک مجموعه را نشان می دهد نگاه کنید. هر عضو از آن را بطور مستقل با احتمال $1-Z$ علامت می‌زنیم و با احتمال Z به حال خود رها می کنیم. در آن صورت احتمال آن خواهد بود که در کل مجموعه موجود, هیچگونه علامتی وجود نداشته باشد.

مثال: تابع مولد یک توزیع مرکب.

احتمال آنکه هیچ کدام از زیر مجموعه ها علامت نخورند.

احتمال آنکه یک زیر مجموعه علامت نخورده باشد.

۲.۷.۱ Method of probability shift

روشی برای تخمین احتمالات گسسته است. خیلی از توزیعات با میانگین بزرگ را با توزیع نرمال تقریب می زنند. بعنوان مثال:

۱-۲.۷.۱

$N(a,a) \sim$ poisson, when a >> 1

این ترتیب ها در حول و حوش میانگین خوب هستند، اما در نزدیک توزیع معمولاً خطا زیاد است. روش‌هایی وجود دارند که این تقریب را بهبود می‌دهند.

اگر تابع مولد توزیع احتمال نقطه ای معلوم باشد می توان احتمال آن را خوب تقریب زد.

مسئله عبارتست از محاسبه متغیر تصادفی X با احتمال نقطه‌ای.

when $i >> E[X]$

در این روش متغیر تصادفی شیفت داده شده X' را با توزیع نقطه ای زیر در نظر می گیریم، این یک توزیع نرمال شده است. گشتاورهای توزیع شیفت داده شده عبارتند از.

پارامتر شیفت Z را برای Z^* به نحوی انتخاب می کنیم که $M'(Z^*)=i$ یعنی میانگین توزیع جدید در نقطه مورد نظر ما i باشد.

حال اگر توزیع شیفت داده شده را با توزیع نرمال تقریب بزنیم.

به طریق معکوس با حل از رابطه قبلی تقریب دلخواه را بدست می آوریم

بنابراین تنها باید تابع مولد X را بدانیم تا را حساب کنیم.

این روش اگر X جمع چند متغیر تصادفی مستقل ولیکن با توزیعات مختلف باشد کاربرد مفیدی دارد.

مثال : توزیع پواسون:

که توزیع poisson (Za) عبارت خواهد بود از:

در نتیجه برای گشتاور آن داریم:

حل معادله $M'(Z^*)=i$ خواهد بود

تقریب حاصل بسیار نزدیک به توزیع اصلی پواسون است. اگر دقت شود در مخرج $i!$ با تقریب معروف استرلینگ جایگزین شده است

اگر تعداد عناصر مجموعه‌ای $N \sim \text{poisson}(a)$ پیروی کند و یک عضو از آن بطور تصادفی به یکی از دو گروه ۱ یا ۲ تخصیص یابد (با احتمال p_1 و $p_2 = 1 - p_1$) در آن صورت اندازه‌های مجموعه‌های ۱ و ۲ (N_2, N_1) دارای توزیع‌های زیر هستند:

$N_1 \sim \text{poisson}(p_1 a)$

$N_2 \sim \text{poisson}(p_2 a)$

Method of Collective Marks (Dantzig)

برای Z یک تعبیر احتمالی ارائه می‌دهد.

$N = 0,1,...$ را یک متغیر تصادفی عدد صحیح غیرمنفی و $G_N(Z)$ را تابع مولد آن فرض می‌کنیم.

$$G_N(Z) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n Z^n, \quad P_n = P\{N = n\}$$

به N به صورت متغیری که اندازه یک مجموعه را نشان می‌دهد نگاه می‌کنیم.

اگر هر عضو این مجموعه را به طور مستقل با احتمال $1-Z$ علامت بزنیم و با احتمال Z به حال خود رها کنیم در آن صورت $G_N(Z)$ احتمال آن است که هیچ عضوی در مجموعه علامت نخورده باشد.

مثال:

$$Y = X_1 + X_2 + ... + X_N \qquad \begin{cases} x_1 \sim x_2 \sim ... \sim x_N \sim G_X(Z) \\ iid \\ G_N(Z) \end{cases}$$
$$G_Y(Z) = P$$

$G_N(G_X(Z))$ = احتمال اینکه هیچکدام از عناصر X_iها علامت نخورد.

۱ توزیع‌های پیوسته

۱.۱ تبدیل لاپلاس

در تبدیل لاپلاس متغیر غیرمنفی $x \ge 0$ با تابع چگالی احتمال $f(x)$ برابر زیر است:

$$f^{*}_{(s)} = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t)dt \Rightarrow E\left[e^{-sx}\right] = \int_0^{\infty} e^{-st} dF(t)$$

به عبارت ریاضی تبدیل لاپلاس pdf را داریم که با $L_x(s)$ هم نشان می‌دهند و برای توزیع پیوسته همان نقشی را دارد که توابع مولد در توزیعات گسسته داشتند. (اگر X مقداری صحیح و گسسته باشد و $X \ge 0$ در آن صورت $f^{*}_{(s)} = G\left(e^{-s}\right)$). اگر X و Y متغیرهای مستقل با تبدیل‌های $f^{*}_{X}(s)$ و $f^{*}_{Y}(s)$ باشند:

به شرط استقلال

$$f^{*}_{(x+y)}(s)=E\left[e^{-s(x+y)}\right]=E\left[e^{-sx}e^{-sy}\right]=E\left[e^{-sx}\right]E\left[e^{-sy}\right]=f^{*}_{x}(s)f^{*}_{y}(s)$$

۱.۱.۱ محاسبهٔ گشتاورها با کمک تبدیل لاپلاس

مشتق اول تابع لاپلاس

$$f^{*\prime}_{(s)} = \frac{d}{ds}E\left[e^{-sx}\right] = E\left[-xe^{-sx}\right]$$

$$\vdots$$

مشتق n ام تابع لاپلاس

$$f^{*(n)}_{(s)} = \frac{d^n}{ds^n}E\left[e^{-sx}\right] = E\left[(-x)^n e^{-sx}\right]$$

با ارزیابی این عبارت در نقطهٔ $s = 0$ خواهیم داشت:

تبدیل لاپلاس :

	پارامتر	تبدیل لاپلاس
نمایی	λ	$\frac{\lambda}{\lambda+s}$
ارلنگ	λ, k	$\left(\frac{\lambda}{\lambda+s}\right)^{k}$
گاما	λ, α	$\left(\frac{\lambda}{\lambda+s}\right)^{\alpha}$

Queuing Network شبکه‌های صف

& Markov Chains.

(فصل 3)

$$E[x] = -f^{*'}(0)$$
$$E[x^2] = +f^{*''}(0)$$
$$\vdots$$
$$E[x^n] = (-1)^n f^{*(n)}(0)$$

۲.۱.۱ تبدیل لاپلاس یک جمع تصادفی[۱]

$Y = X_1 + X_2 + \ldots + X_N$; X_i are I.I.D with common $f^*_{x_i}(s)$

$N \geq 0$ integer, with $G_N(Z)$

با در نظر گرفتن شرط استقلال داریم:

$$\begin{aligned} f^*_y(s) &= E[e^{-sy}] = E[E[e^{-sy} \mid N]] = E[E[e^{-s(x_1+\ldots+x_N)} \mid N]] \\ &= E[E[e^{-sx_1}] \ldots E[e^{-s(x_N)}]] \\ &= E[(f^*_x(s))^N] = G_N(f^*_x(s)) \end{aligned}$$

که براساس تعریف $E[Z^n] = G_N(z)$ بدست می‌آید.

۳.۱.۱ تبدیل لاپلاس در روش Collective Marks

تعبیر خاصی برای تبدیل لاپلاس $f^*_{(s)} = E[e^{-sx}]; \ x \geq 0$ وجود دارد.

به X به عنوان طول یک فاصله نگاه کنید. فرض کنید این فاصله در معرض یک پروسهٔ علامت‌زنی پواسون با چگالی s است. در این صورت $f^*_{(s)}$ این احتمال را نشان می‌دهد که در طول این فاصله علامتی را مشاهده نکنیم. براساس قانون احتمال کل:

$$\begin{aligned} P\{x \ has \ no \ marks\} &= E\left[P\{x \ has \ no \ marks \mid x\}\right] \\ &= E\left[P\{\text{تعداد وقایع در طول فاصلهٔ x صفر باشد} \mid x\}\right] \\ &= E\left[e^{-sx}\right] = f^*_{(s)} \end{aligned}$$

---

[۱] Random sum

$P\{$ وجود n واقعه در طول فاصلهٔ x $| x\} = \frac{(sx)^n}{n!} e^{-sx}$

$P\{$ وجود n واقعه در طول فاصلهٔ x $| x\} = e^{-sx}$

$$f^*(s) = L_X(s)$$
$$Y = X_1 + X_2 + \ldots + X_N \, ; \, G_N(z), \quad X_i \sim f_X^*(s)$$
$$f_y^*(s) = G_N\left(f_X^*(s)\right)$$

$f_X^*(S)$: احتمال آنکه در یک زیر فاصله علامت نخورد.

$f_y^*(s)$: احتمال آنکه هیچکدام از زیر فواصل علامت نخورند.

اگر متغیر تصادفی Z با احتمال q برابر متغیر X و با احتمال $1-q$ برابر با متغیر تصادفی Y گردد داریم:

$$f_z^*(s) = q \times f^*{}_x(s) + (1-q) \times f_y^*(s)$$

مثال: تبدیل لاپلاس یک جمع تصادفی‌تر با این دیدگاه دوباره حل می‌کنیم.

$$y = x_1 + x_2 + \ldots x_N \qquad \begin{cases} x_1 \sim x_2 \sim \ldots x_N & \text{common} \quad f^*(s) \\ N \quad r.v. & \text{with} \quad G_N(t) \end{cases}$$

احتمال آنکه هیچکدام از زیر فواصل علامت نخورند $= G_N(f_x^*(s))$

تذکر) اگر متغییر تصادفی Z با احتمال q برابر متغیر X و با احتمال $1-q$ برابر متغیر تصادفی Y گردد داریم :

$$f_t^*(s) = q \times f_x^*(s) + (1-q) \times f_y^*(s)$$

(رابطه فوق برای توزیعات گسسته نیز صادق است)

۲.۱ توزیع یکنواخت[۱]

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a} & a\le x\le b\\ 0 & else\end{cases}$$

$$E(X)=\frac{a+b}{2} \quad و \quad Var(X)=\frac{(b-a)^2}{12}$$

اگر $u_1,u_2,...,u_n$ دارای توزیع یکنواخت در بازه بسته $[0,1]$ بوده و مستقل باشند آنگاه:

۱.تعداد متغیرهایی که از x $(0\le x\le 1)$ کوچکترند از توزیع $\text{Bin}(n\,,\,x)$ پیروی می‌کنند.

۲.اگر $u_1,u_2,...,u_n$، n متغیر تصادفی یکنواخت باشد و به ترتیب صعودی فهرست شده باشند، آنگاه:

$$U(0)=0\,,\;U(n+1)=1$$

در آن‌صورت تمام فواصل بین u_iها از نوع یکسان زیر پیروی می‌کنند.

$$p\{U_{(i+1)}-U_{(i)}>x\}=(1-x)^n\;,\quad i=1,2,3,...$$

۳.۱ توزیع نمایی

با نماد $x\sim EXP(\lambda)$ نشان داده می‌شود. گاهی اوقات پارامتر توزیع $1/\lambda$ نشان داده می‌شود که مقدار میانگین است ولیکن λ نرخ این توزیع است.

$$f(x)=\begin{cases}0 & x<0\\ 1-e^{-\lambda x} & x\ge 0\end{cases}$$

$$f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x} & x\ge 0\\ 0 & x<0\end{cases}$$

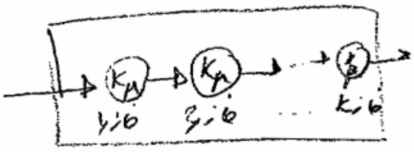
$$f^{*}(s)=\frac{\lambda}{\lambda+s}$$

$$E(x)=-f^{*\prime}(0)=\frac{1}{\lambda} \quad و \quad V(x)=\frac{1}{\lambda^2}$$

---

۱ Uniform distribution

Erlang -k



نرخ ← μ

$$F_X(x) = 1 - e^{-k\mu x} \cdot \sum_j \frac{(k\mu x)^j}{j!} \qquad x \geq 0 \quad k = 1, 2, \ldots$$

$$\bar{X} = \frac{1}{\mu} \qquad f_x = \frac{k\mu (k\mu x)^{k-1}}{(k-1)!} e^{-k\mu x}$$

$$\operatorname{Var} x = \frac{1}{k\mu^2}$$

$$C_x = \frac{1}{\sqrt{K}} < 1$$ ضریب تغییرات

اگر توزیع مورد نظر جایی بود که ضریب تغییرات را بود از حدود نمایی است از نمایی استفاده می‌کنیم

〃 〃 〃 〃 〃 ولی 〃 〃 بزرگتر از یک بود از Hyperexpotential .

〃 〃 〃 〃 〃 〃 کوچکتر از یک 〃 〃 Erlang .

Hypoexponential (نوعی ارلنگ است)

$$\bar{X} = \frac{1}{\mu_1} + \frac{1}{\mu_2} \qquad C_x < 1$$

۱.۳.۱ خاصیت بدون حافظه بودن

$$p\{X > t + x | X > t\} = p\{X > x\}$$

مثال : یک صف و دو سرویس‌دهنده که دارای زمانهای سرویس نمایی هستند (با پارامتر یکسان) در نظر بگیرید. اگر هر دو سرویس‌دهنده مشغول بوده و مشتری در صف انتظار باشد، احتمال آنکه مشتری در صف آخرین نفر خروجی باشد چیست؟

λ λ $\boxed{A}$ $\boxed{B}$ C

$\boxed{C}$ $\boxed{B}$

$x_C > x_B$

با توجه به بدون حافظه بودن توزیع نمایی احتمال $\frac{1}{2}$ حاصل می‌شود

احتمال پایانی یک فاصله دارای توزیع نمایی

$\frac{\lambda_B}{\lambda_C+\lambda_B} = \frac{\lambda}{\lambda+\lambda} = \frac{1}{2}$

احتمال اتمام فاصله تا $t+h$ $\quad p\{x \le t + h | x > t\}$

$$\lambda h + o(h) = p\{x \le h\} = 1 - e^{-\lambda h} = 1 - (1 - \lambda h + \frac{1}{2}(\lambda h)^2 - \ldots)$$

رابطه فوق نشان دهنده احتمال اتمام یک فاصله (مکالمه تلفنی) در واحد زمان همیشه مقدار ثابت و برابر λ است. توزیعات مربوطه متغیر تصادفی حداقل و حداکثر یکسری از متغیرهای تصادفی نمایی :

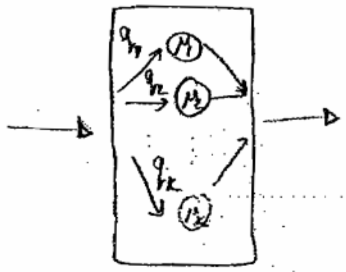
$$p\{Max(x_1 \ldots و\ x_n) \le x\} = (1 - e^{-\lambda x})^n$$

$$p\{\min(x1\ و \ldots و\ x_n) > x\} = e^{-n\lambda x} \sim EXP(n\lambda)$$

$$X_1, X_2, \ldots X_n \sim iid\ EXP(\lambda)$$

ضریب تغییرات = انحراف معیار / میانگین

Hyper expontial



$$F_x = \sum_{j=1}^{k} q_j (1 - e^{-\mu_j x})$$

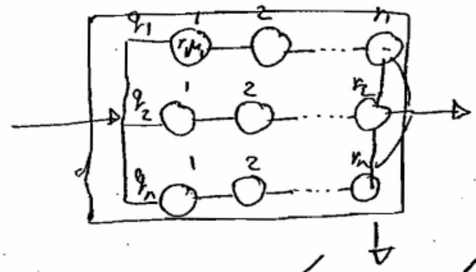
$$f_X(x) = \sum_j q_j \mu_j e^{-\mu_j x}$$

توزیع گاما: توزیع ارلنگ با ضریب تغییرات آزاد (درحالیکه باید ارلنگ [illegible])

$$f_x(x) = \frac{\alpha\mu\cdot(\alpha\mu x)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} e^{-\alpha\mu x} \qquad \bar{X} = \frac{1}{\mu} \qquad var = \frac{1}{\alpha\mu^2}$$

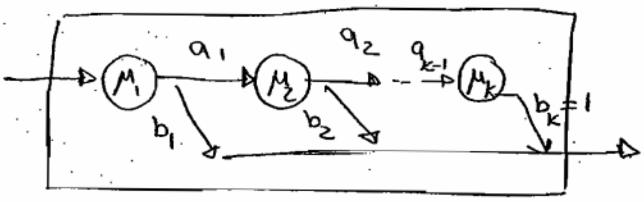
$$C_x = \frac{1}{\sqrt{\alpha}}$$

Generalized Erlang.



ترکیبی از ارلنگ و هایپر اکسپوننشیال.

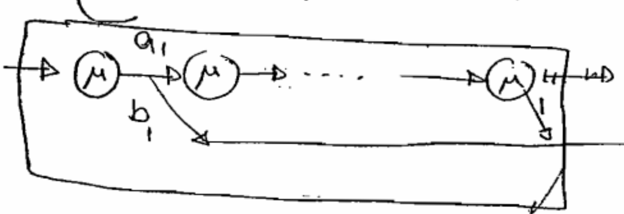
Cox Distribution C_K



همه‌ی μ ها در فازهای مختلف می‌توانند متفاوت باشند.

مدل‌سازی follow shop ← کالاها به ترتیب مراحل را تا انتها طی می‌کنند

Job Shop یا open shop ← ترتیبی ندارد که مراحل طی شوند (مدل این توزیع؟)



تقریب این توزیع توسط شکل ساده شده زیر تقریباً دقیق است.

$$C_x^2 = \frac{k + b_1(k-1)(b_1(1-k)+k-2)}{[illegible]}$$

$C_x < 1$ [illegible]

$k = [illegible]$

۱ پروسه‌های احتمالی

یک پروسه احتمالی مجموعه‌ای از متغیرهای تصادفی $\{x(t): t\in T\}$ است که در آن $x(t)$ به ازاء هر $t\in T$ یک متغیر تصادفی است.

T = مجموعه اندیس فرآیند (پروسه).

مقادیر x = حالات فرآیند. (تعداد مشتریان)

S = فضای حالت فرآیند. ← مجموعه مقادیری که متغیرهای تصادفی با اندیس مختلف می‌توانند اختیار کنند.

اگر T قابل شمارش باشد، فرآیند احتمالی زمان گسسته و اگر یک فاصله (زمانی) از اعداد حقیقی باشد فرآیند پارامتر (زمان) پیوسته گویند. اگر S مجموعه‌ای قابل شمارش باشد، پروسه احتمالی را زنجیره گویند. ۴ حالت ممکن وجود دارد: اندیس رو زمان میگیم زمان هست.

گسسته	گسسته	زمان (T)
پیوسته	پیوسته	

فرایندهای احتمالی
فضای حالت گسسته اندیس گسسته | فضای گسسته اندیس پیوسته | فضای پیوسته اندیس گسسته | فضای پیوسته اندیس پیوسته
مارکوف | غیرمارکوف

مثال: بررسی یک دستگاه در لحظات خاصی از زمان از نظر سالم یا خراب بودن:
همگن غیرهمگن

اگر t_1 , t_2 , ... t_n... لحظات بررسی باشند و x_i وضعیت (حالت) دستگاه را در لحظه i ام نشان دهد، $\{x_i: i\in N\}$ که در آن x_i متغیر گسسته با مقادیر ممکن ۱ (دستگاه در حال کار) و صفر (دستگاه خراب) است . تشکیل یک فرایند احتمالی به صورت زنجیره زمان گسسته می‌دهد.

$$T=\{t_1,t_2,...\},\quad S=\{0,1\}$$

و اگر حالت ماشین در هر لحظه دلخواه بررسی گردد. $T=[0,\infty]$ بوده و پروسه $\{x(t): t\geq 0\}$ تشکیل یک زنجیره زمان پیوسته را خواهد داد.

وقتی می‌خواهیم بهاره خرابی یک دستگاه را چک کنیم، فضای پیوسته داریم ولی اگر دفعه به دفعه بریم و چک کنیم اندیس گسسته ولی اگر با ما بتونیم طور پیوسته چک کنیم، اندیس پیوسته است.

در فرایند احتمالی $\{x(t), t\geq 0\}$ ، $x_n, ..., x_0$ را مقادیر متناظر $x(t)$ و x_0 مقدار اولیه نامیده می‌شود.
$x_n=j$ را "حالت فرایند در زمان t_n برابر j است" می‌گویند.

توزیع پارتو Pareto مثلاً در دراپلت‌های اسپری نفتی استفاده می‌شود.

رفتاری شبیه به پواسون دارد.

— در صف یا از توزیع نمایی یا ارلنگ یا Cox استفاده می‌شود.

اگر در فرآیند احتمالی $\{x(t): t \geq 0\}$ ، $T=\{t_1,t_2,\ldots\}$ و $S=N=\{0,1,2\ldots\}$ باشد، $x_0,x_1,\ldots,x_n,\ldots$ را مقادیر متناظر (x_t) در نظر می‌گیرند و x_0 مقدار اولیه است. برای $j\in N,\, n\in N$ اگر $x_n=j$ باشد گوییم حالت فرآیند در زمان t_n برابر j است.

وقتی مارکوف می‌گویند، خاصیت گسستگی توش هست مگر اینکه continous را ذکر کند.

۲ زنجیره مارکوف زمان گسسته

یک زنجیره مارکوف زمان گسسته (DTMC) فرآیند احتمالی زمان گسسته است که دارای فضای حالت قابل شمارش S است به نحوی‌که به ازاء تمام $j,i\in S,\, n\in N$ و $i_0,i_1,\ldots,i_{n-2}$ داریم:

مشروط به این که بدانیم در ساعات قبل از t_n چه مقدار و کسری داشتیم مثلاً

$$p\{x_n=j\mid x_{n-1}=i, x_{n-2}=i_{n-2};\ldots x_1=i_1, x_0=i_0\}=P\{x_n=j\mid \underline{x_{n-1}=i}\}$$

به تعریف زنجیره مارکوف

همون آخری مهم هست فقط.
(عدم حافظه)

یک DTMC با احتمالات انتقال n مرحله‌ای زیر تشریح می‌گردد.

احتمال این که از حالت i به j برویم (در حالت $m+n$ حالت) مثلاً سالم در ساعت 8 $m=8$ ساعت 12 خراب $n=4$

$$p_{ij}(m,m+n)=p\{x_{m+n}=j\mid x_m=i\}\text{ for } m,n\in N;\; i,j\in S$$

در ساعت 8 یعنی اگر احتمال خرابی دستگاه در یک ساعت بعد 3 باشد همون احتمال رو در خرابی ساعت 12 داریم یعنی ساعت 12 درست بوده ولی یک ساعت بعد خراب شده

اگر مقدار هر کدام از $p_{ij}(m,m+n)$ از m مستقل باشند، یک DTMC همگن داریم: یعنی تنها به n بستگی دارد.

خراب سالم
$S=\{0,1\}$

$$p_{ij}(m,m+n)=p_{ij}(n);\ \forall ij\in S,\quad \forall m,n\in N$$

احتمال این که دستگاه از i به j تغییر کند
4 تا حالت هست از سالم به خراب، خراب به خراب و ...

به عبارت دیگر در تمام لحظات زمانی مقادیر احتمالات انتقال یکسان باقی می‌ماند.

۱.۲ احتمالات انتقال یک مرحله‌ای در حالت همگن

$$p_{ij}(1)=\boxed{p_{ij}}=p\{x_n=j\mid x_{n-1}=i\},\ n\geq 1$$

به فرم ماتریسی داریم:

حل مسأله فقط با دونستن ماتریس‌های انتقال یک مرحله‌ای امکان‌پذیر هست.

۶

ماتریس احتمالات انتقال

$$P=[p_{ij}]=\begin{bmatrix} p_{00} & p_{01} & p_{02}\cdots \\ p_{10} & p_{11} & p_{12}\cdots \\ p_{..} & p_{21} & p_{22}\cdots \end{bmatrix}=TPM\begin{cases}\sum_j p_{ij}=1 & \forall i \\ 0\le p_{ij}\le 1 & \forall ij\end{cases}$$

حالت‌ها — جمع سطرها — زمان اقامت در حالت i ام.

T_i = Sojourn Time in state i = تعداد مراحل زمانی که DTMC $\{x_n\in S:n\in N\}$ در حالت i ام (قبل از رفتن به حالت دیگری) قرار می‌گیرد = متغیر تصادفی توزیع هندسی با میانگین $(1-p_{ii})$ است.

یعنی به یک حالت غیر از خودش بره. یعنی از خودش به خودش. یعنی خرابه یک ساعت بعدهم خراب باشه.

مثال برای DTMC: (مشاهدات ساعت به ساعت هست) $t=1,2,\dots,n$

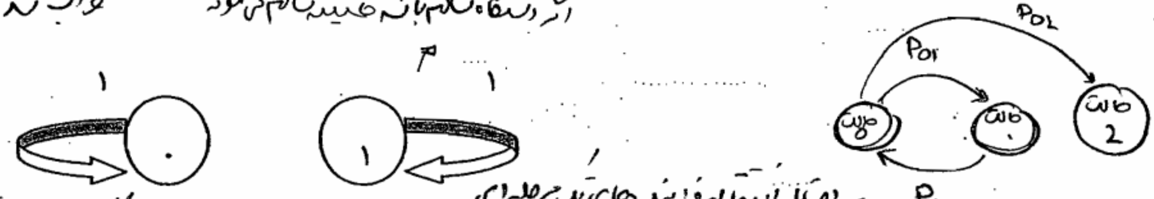
یک سیستم تولیدی شامل یک دستگاه در معرض شکست و خرابی را در نظر بگیرید. در هر لحظه زمانی یا دستگاه به درستی کار می‌کند (حالت صفر) یا به علت خرابی تحت تعمیر است (حالت ۱) اگر a احتمال وقوع خرابی در یک ساعت (احتمال شرطی خراب شدن دستگاه در مشاهده بعدی به شرط سالم بودن آن در مشاهده فعلی) و b احتمال تعمیر شدن آن در یک ساعت (احتمال سالم بودن در مشاهده بعدی به شرط خراب بودن آن در حال حاضر) تعریف شود یک DTMC با مشخصات زیر خواهیم داشت:

$$\text{DTMC }\{x_n\in S:n\in N\}\quad \text{where}\quad S=\{0,1\},\ t_0,t_1\ldots=0,\ 1h,\ 2h,\ \ldots$$

$$P=\begin{array}{c} \\ 0 \\ 1\end{array}\!\!\begin{array}{c}\begin{array}{cc}0 & 1\end{array}\\ \begin{bmatrix}1-a & a\\ b & 1-b\end{bmatrix}\end{array};\quad 0\le a,b\le 1$$

دیاگرام حالات سیستم تحت شرایط مختلف به شکل زیر است:

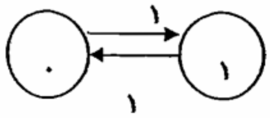
- فرض ۱: اگر $a=b=0$ باشد، آنگاه میانگین زمان اقامت در هر حالت بی نهایت است. مثلاً تعمیرکار نداریم و یک دستگاه داریم که خراب شده، یک نو جایگزینش می‌کنیم. اگر دستگاه سالم باشه همیشه سالم می‌مونه.



اگر خراب باشه هم همیشه خراب می‌مونه. احتمال انتقال فرایندهای تک مرحله‌ای

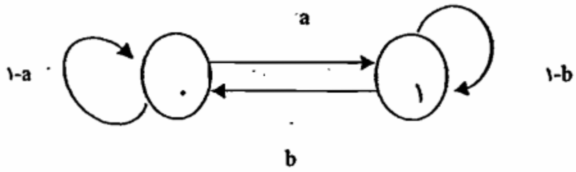
- فرض ۲: اگر $a=b=1$ باشد، آنگاه میانگین زمان اقامت هر حالت برابر با ۱ است.

یعنی اگر سالم است حتماً خراب می‌شود و برعکس (یک ساعت بعد)



⊗ نباید b-1 باشه؟

● فرض ۳: میانگین اقامت حالت 1 $\frac{1}{b}$ و حالت 0 $\frac{1}{a}$ است.



دیاگرام مثل صفر و یک هم همین طوریه.

معادلات C-K

برای $m,n \ge 0$ $i,j \in S$, در DTMC $\{x_n \in S : n \in N\}$ معدلات ذیل را خواهیم داشت:

پس حالت شروع رو حتماً داریم.

∑ روی کل حالات ساده بسته می‌شه. که می‌شه احتمال رو از طریق حالات میانی هم می‌شه حساب کرد.

$$p_{ij}(m+n) = \sum_{k \in s} p_{ik}(m) p_{kj}(n) \quad \text{chapmon} - \text{kolmogorov}$$

می‌توانیم از n مرحله‌ای را تفکیک کنیم؛ یعنی از حالت (c-k) ... پس اگر ... ما ... n ... حساب کنیم.

با شرط $P(0) = I$

ماتریس واحد

احتمال انتقال n مرحله‌ای:

$$p_{(n)} = [p_{ij}(n)] = p^n; n \ge 0$$

ماتریس انتقال n مرحله‌ای، ماتریس انتقال یک مرحله‌ای به توان n است. اگر داشته باشیم:

$S = \{0,1,2,...\}$, $p_j(n) = p\{x_n = j\}$; $n = 0,1,2,...$, $j = 0,1,2,....$

بعد از گذر از n مرحله در حالت j باشد به شرطی که بدانیم در حالت صفر چی بوده.

در آن صورت داریم:

$$p_j(n) = \sum_{i \in S} p_i(0) p_{ij}(n)$$

به فرم ماتریس داریم:

$\Pi(n) = \Pi(0) \times P(n) = \Pi(0) P^n \quad n = 0,1,2... \quad \Pi(n)[p_0(n) \quad p_1(n)....]$

$\pi = P_0 \;\; P_1 \;\; P_2 \; ... \; P_n$

یعنی با داشتن pmf متغیر تصادفی اولیه X_0 و TPM می‌توان pmf کلیه X_n $(n \in N)$ را حساب کرد.

مثال DTMC (۲):

با فرض‌های مختلف داریم:

۲) یعنی که هیچ وقت فرایند تغییر نمی‌شه این به n نباید بستگی داشته باشه، از هرجا شروع کنیم همان جا می‌مانیم.

فرض ۱: اگر $a=b=0$ باشد در آن صورت $\overset{\text{TPM}}{P}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}=I$ بوده و $P_{(n)}=P^n=I$. با شروع از حالت صفر $\Pi(0)=[1 \quad 0]$ بوده و $\Pi(n)=[1 \quad 0]$ $n=1,2,3...$ است.

با شروع از حالت یک $\Pi(0)=[0 \quad 1]$ بوده و $\Pi(n)=[1 \quad 0]$ می‌ماند. از هر حالتی شروع کنه، بعد از

۲) مراحل زوج تغییر نمی‌کنه ولی بعد از مراحل فرد تغییر می‌کنه پس به n بستگی داره.

فرض ۲ : اگر $a=b=1$ باشد، برای n های فرد داریم: $P=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$ و برای n های زوج نیز خواهیم داشت: $P=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$

در نتیجه :

If $\pi(0)=[1 \quad 0] \rightarrow$	$\pi(n)=[1 \quad 0]$	For n even
	$\pi(n)=[0 \quad 1]$	For n odd

فرض ۳ : اگر $|1-a-b|<1$ باشد (Bhat ۱۹۸٤):

$$P^n=\begin{bmatrix}(b+ax^n)/(a+b) & (a-ax)/(a+b)\\ (b-bx^n)/(a+b) & (a+bx^n)/(a+b)\end{bmatrix}; x=1-a-b$$

اگر حالت اولیه صفر باشد:

$$\pi(0)=[1 \quad 0]\rightarrow \pi(n)=\pi(0)P^n=[\,(b+ax^n)/(a+b) \quad (a-ax^n)/(a+b)\,] \; ; \; n=1,2,...$$

اگر حالت اولیه یک باشد:

$$\pi(0)=[0 \quad 1]\rightarrow \pi(n)=[\,(b-bxn)/(a+b) \quad (a+bxn)/(a+b)\,] \; ; \; n=1,2,...$$

$\sum p_{ii}^{(k)}$ یعنی فقط برگرده یعنی داریم : $P_{13}P_{31} + P_{33}P_{33}$

$\sum f_{ii}^{(k)}$ فقط برای اولین بار برگردیم : $P_{13}P_{31} + \cancel{P_{33}P_{33}}$

۲ تا راه داریم برای برگشت پذیر بودن .

(x) $\sum_{n=1}^{\infty} f_{ii}^{(n)} = 1$

(x) $\sum P_{ii}^{(n)} = \infty$

وقتی $f_{JJ}=1$ است : $m_{JJ} = \sum_{n=1}^{\infty} n f_{JJ}^{(n)}$ متوسط زمان برگشت

$$\begin{cases} f_{JJ}=1 & \text{حالت برگشت پذیر} \\ f_{JJ}<1 & \text{حالت موقت (گذرا)} \end{cases}$$

همگن
- یکپارچه (تنها یک کلاس حالت دارد.)
- غیر یکپارچه (بیش از یک کلاس حالت داشته باشد.)

اگر i و j دو حالت متعلق به فضای حالت باشند ($i,j \in S$) مگر $P_{ij}(n)>0$ دو حالت i و j را مرتبط گویند.
یک کلاس دارای حالتی است که با یکدیگر در ارتباط هستند.
اگر تنها یک کلاس در DTMC باشد آن را یکپارچه "irreducibility" گویند.

$f_{ii}(k)$ = احتمال آنکه DTMC بعد از گذشت k مرحله برای اولین بار به i برگردد. (از i به i بعد از k مرحله)

f_i = احتمال برگشت DTMC به حالت i از تمام طرق ممکن

$$f_i = \sum_{k=1}^{\infty} f_{ii}(k)$$

$$f_{ii}(1) = P_{ii}$$

میانگین $\nu_i = \sum k f_{ii}(k)$
مراحل مورد نیاز برای رسیدن به i پس از ترک

اگر حالت i ام از یک DTMC برگشت پذیر است "recurrence" اگر $f_i=1$ باشد، در غیر این صورت $f_i<1$ آن را گذرا "Transit" گویند.

۲.۲ آنالیز حالت پایدار

به شرط منحصر به فرد بودن حدهای حاصل:

$$\lim_{n\to\infty} P_j(n) = \lim_{n\to\infty} P_{ij}(n) \;;\quad i=0,1,2,\ldots$$

$$\lim_{n\to\infty} P_n = \begin{bmatrix} y \\ y \\ \vdots \\ y \end{bmatrix} \;;\quad y = [y_0 \quad y_1 \quad \ldots\; y_n \ldots] \;;\quad y_j = \lim_{n\to\infty} P_j(n)$$

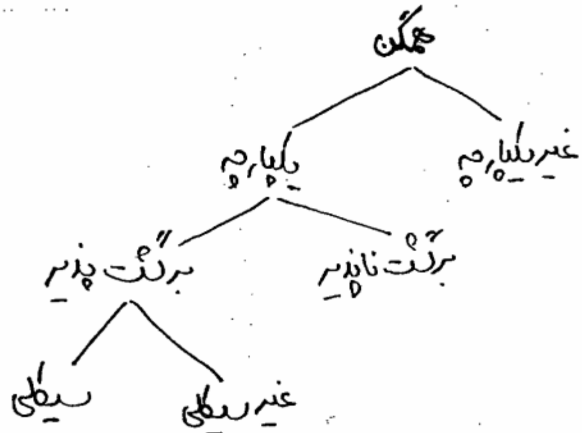
۳.۲ کلاسهای ارتباط و یکپارچگی[1]

اگر $i, j \in S$ بوده و حالت j از حالت i قابل دسترسی باشد ($P_{ij}(n) > 0$ برای تعدادی $n \geq 0$)، دو حالت i,j را قابل ارتباط گویند اگر از طریق یکدیگر در دسترس باشند. در یک DTMC که حالات مختلف آن بر اساس در ارتباط بودن آنها با یکدیگر دسته بندی شده باشند، هر دسته را یک کلاس ارتباط[2] گویند.

کلاس ارتباط A در یک DTMC با فضای حالت S را بسته گویند اگر از هیچ کدام از حالت A نتوان به یکی از حالات S (که به A تعلق ندارد) رسید (در غیر این‌صورت کلاس باز نام دارد). اگر تنها یک کلاس در DTMC باشد ، آن‌را یک‌پارچه گویند.

مثال DTMC (۳):

- فرض ۱ : حالتهای صفر و یک تنها با خودشان در ارتباط هستند و DTMC یکپارچه نیست و دو کلاس بسته $\{0\}$ و $\{1\}$داریم.
- فرض ۲ : حالت صفر با حالت یک مرتبط است و زنجیره یکپارچه داریم با کلاس بسته $\{1\text{و } 0\}$



---

[1] irreducibility

[2] Communication

• فرض ۳ : $|1-a-b|<1$ حالت صفر با حالت ۱ در ارتباط است و زنجیره یکپارچه داریم.

برای زنجیره DTMC $\{X_n\,;\,n\geq 0\}$ تعریف می‌کنیم:

$f_{ii}(k)$ = احتمال اینکه DTMC پس از k مرحله برای اولین بار به حالت i برگردد ($i=0,1,2,\ldots$)

f_i=احتمال برگشت DTMC به حالت i از تمام طرق ممکن:

$$f_j=\sum_{k=1}^{\infty} f_{ii}(k),\quad f_{ii}(1)=p_{ii}\,,\quad v_i=\sum_{k=1}^{\infty} kf_{ii}(k)$$

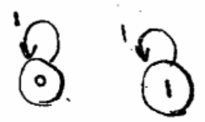
v_i =میانگین مراحل مورد نیاز DTMC برای رسیدن به حالت i پس از ترک آن.

حالت i ام از یک DTMC برگشت پذیر[1] است اگر $f_i=1$ باشد. در غیر این‌صورت (یعنی $f_i<1$) آن را گذار[2] گویند. دور های برگشت یک حالت برگشت پذیر (سیکل حالت) را با d_i نشان می‌دهیم. اگر d_i باشد حالت غیر سیکلی[3] و اگر $D_i>1$ باشد حالت سیکلی با دورهای d_i داریم. حالات غیر سیکلی و برگشت پذیر مثبت را" ارگودیک" گویند. در یک حالت برگشت پذیر مثبت I (یا با نام برگشت پذیر غیرتهی[4]) v_i مقدار متناهی دارد.

زنجیره های مارکوفی ارگودیک دارای حالات غیر سیکلی و برگشت پذیر با ν متناهی هستند.
برگشت پذیر مثبت

مثال DTMC (۴) :

با فرض ۱ :



برگشت پذیر $f_0=f_1=1 \;\rightarrow$ $\quad f_{00}(1)=1\,;\,f_{00}(k)=0\,;\,$ for $k=2,3,\ldots$

غیر سیکلی و برگشت پذیر مثبت $v_0=v_1=1 \;\rightarrow$ $\quad f_{11}(1)=1\,;\,f_{11}(k)=0\,$ for $k=2,3,\ldots$

یه تعریف ای هست که می‌گه اگه یه حالت برگشت پذیر مثبت توی زنجیره باشه. بقیه هم این خاصیت رو دارند.

---

[1] recurrence

[2] Transience

[3] aperiodic

[4] non-null

با فرض ۲ :

$a=b=1$

$\rightarrow$

$f_{00}(1)=0 \;;\; f_{00}(2)=1 \;;\; f_{00}(k)=0 \;;\; for\ k=3,4,\ldots$

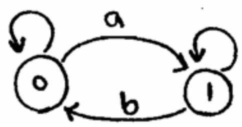
$f_{11}(1)=0 \;;\; f_{11}(2)=1 \;;\; f_{11}(k)=0 \;;\; for\ k=3,4,\ldots$

$f_0=f_1=1 \longrightarrow$ حالات برگشت پذیر

$d_0=2 \;,\; d_1=2$

$v_0=v_1=2 \;,\; (P_{00}(2k)=1 \,,\, P_{00}(2k+1)=0,\; k=0,1,2,\ldots) \;\longrightarrow$ حالت صفر سیکلی با پریود ۲

به همین نحو حالت یک سیکلی با پریود ۲ است.



فرض ۳: $|1-a-b|<1$

$f_{00}(1)=1-a \quad ; f_{00}(2)=ab \quad ; f_{00}(3)=a(1-b)b \quad ; f_{00}(k+2)=a(1-b)^k b \quad k=2,3,\ldots$

$f_0=1 \longrightarrow$ برگشت پذیر ، $v_0=(1-a)+2(ab)+\sum_{k=3}^{\infty} ka(1-b)^{k-2}b<\infty$ مثبت غیر سیکلی

اگر DTMC ارگودیک باشد، احتمالات حالات پایدار v ، $v=vP$ خواهد بود.

$P_{ij}(m,m+n) \xrightarrow{\text{همگن}} P_{ij}(n) \xrightarrow{\text{مثلا؟؟؟}} P_j(n) \xrightarrow{\text{ارگودیک}} P_j$

۴.۲ تعاریف

تمام حالات در یک کلاس ارتباطی باز، گذار هستند.

تمام حالات در یک کلاس ارتباطی بسته محدود، برگشت پذیر مثبت هستند.

حالات برگشت پذیر تهی تنها در کلاس‌های ارتباط بسته و نامحدود روی می‌دهد.

در یک DTMC یک‌پارچه و محدود تمام حالات برگشت‌پذیر مثبت هستند.

اگر و فقط اگر $n_i=\infty$ باشد، حالت i برگشت‌پذیر است:

$$n_i=\sum_{k=1}^{\infty} P_{ii}(k)$$

مثال DTMC (۵):

با فرض ۲ :	$P_{ii}(k)=1$ for $k=2,4,6,\dots$	هر دو برگشت پذیرند $n_i=\infty$	
	$P_{ii}(k)=0$ for $k=1,3,5,\dots$	$\rightarrow$	
با فرض ۳	$P_{00}=(b+ax^n)/(a+b)$	$P_{11}(k)=(a+bxk)/(a+b)$, $x=1-a-b\rightarrow$	$n_0=\infty$ $n_1=\infty$

اگر DTMC یک‌پارچه با حالات برگشت‌پذیر مثبت باشد احتمالات y_j وجود دارند که منحصر به فرد بوده و مستقل از احتمال اولیه است.

$$Y_j=\lim_{n\to\infty} P_j(n) \qquad j=0,1,2,\dots \qquad y_j\geq 0$$

$$Y_j=\sum y_i P_{ij} \qquad i=0,1,2,\dots \qquad y=yP \quad \text{where } y=[y_0, y_1, y_2,\dots]$$

Y بردار احتمالات پایدار نام دارد.

مثال DTMC (۶):

مثال تک ماشین با حالات $S=\{0,1\}$ را در نظر بگیرید. در فرض سوم که $|1-a-b|<1$ بود، $Y=(y_0, y_1)$ است. دیدیم که DTMC کاهش ناپذیر است و غیر سیکلی با حالات برگشت پذیر مثبت است. بنابراین می توانیم احتمالات پایدار منحصر به فرد را با حل معادلات زیر به دست آوریم :

$$[y_0 \quad y_1]=[y_0 \quad y_1]\begin{bmatrix}1-a & a\\ b & 1-b\end{bmatrix}$$

$$y_0+y_1=1$$

$$\rightarrow\ y_0=b/(a+b)\ ,\quad y_1=a/(a+b)$$

که در مثال ۱۴ نیز آن را به دست آوردیم. با $a=1/5$ و $b=3/5$ مقادیر $y_0=3/4$ و $y_1=1/4$ بدست می‌آید. یعنی به طور متوسط DTMC حالت صفر را در ۷۵٪ تعداد مراحل زمانی و حالت ۱ را در ۲۵٪ کل تعداد مراحل زمانی ملاقات می کند.

با فرض $a=b=1$ بار دیگر DTMC کاهش‌ناپذیر با حالات برگشت‌پذیر مثبت است ولیکن سیکلی با سیکل ۲ است. در این حالت نیز احتمالات پایدار منحصر به فرد با $y_0=1/2$ و $y_1=1/2$ داریم. یعنی به طور متوسط ۵۰٪ دیدارهای ما در حالت صفر و ۵۰ ٪ دیگر در حالت ۱ سیستم است. با فرض $a=b=0$ در کلاس ارتباط $\{0\}$ و $\{1\}$ داریم. معادله $y=yP$ و $y_0+y_1=1$ منجر به تعداد نامتناهی حل می‌گردد:

$$Y=[y_0 \quad 1-y_0],\quad 0\le y_0\le 1$$

هر کلاس بردار احتمال پایدار خاص خود را دارد که در اینجا $y_0=1$ و $y_1=1$ است اما برای کل سیستم تعداد بردارها نامتناهی است.

معمولا این شرایط برای DTMC های غیر کاهش پذیر نیز روی می دهد که هر کلاس ارتباطی بسته بردار احتمال پایدار خاص خود را دارد.

۱ مدل های زنجیرهٔ مارکوف زمان پیوسته (CTMC)

تعریف : فرآیند زمان پیوسته با فضای حالت گسسته $\{x(t);st \geq 0\}$ را زنجیرهٔ مارکوف پیوسته گویند اگر:

for all $s \geq 0,\ U \geq 0\ \ t \geq s$ and $i,j,\ x(t) \in S$

$$P\{X(t)=j|X(s)=i\ ;\ X(u)=x(u)\quad \text{for}\quad 0 \leq u \leq s\} = P\{X(t)=j|X(s)=i\}$$

احتمالات انتقال عبارتند از :

$$P_{ij}(s,t) = P\{X(t)=j|X(s)=i\} \qquad t \geq s,\ s \geq 0,\ i,j \in S$$

تعریف: CTMC $\{x(t):t \geq 0\}$ را همگن (دارای احتمالات انتقال پایدار) گویند اگر $P_{ij}(s,t)$ به ازاء کلیه $s \geq 0$ و $t \geq s$ فقط به t-s بستگی داشته باشد و از s مستقل باشد.

$$P_{ij}(s,t) = P_{ij}(t-s) = P\{X(u+t-s)=j|x(u)=j\}\quad \forall u \geq 0$$

زمان اقامت:T_iدر حالت i یک متغیر تصادفی پیوسته نمایی است. $T_i = Exp(a_i)$

اگر $0 < a_i < \infty$ باشد ، حالت را پایدار گویند. در صورت $a_i = 0$ حالت جاذب و $a_i = \infty$ حالت لحظه‌ای داریم .

$\pi_j(v) = \sum P_{ij}(u,v)\pi_i(u)$

$\pi(v) = \pi(u)P(u,v)$

$\pi(t) = \pi(0)P(t) = \pi(0)P(0,t)$

۱.۱ معادلات C-K

chapman - kolmogorov

$$P_{ij}(s,t) = \sum_k P_{i,k}(s,u)P_{k,j}(u,t);\quad 0 \leq s \leq u \leq t$$

حالات میانی

به فرم ماتریسی :

$$H(s,t) = H(s,u)H(u,t)$$

۲.۱ معادلات پیشرو ـ پسرو کلموگورف

۱.۲.۱ معادلات پیشرو

$$\frac{dH(s,t)}{dt} = H(s,t)Q(t)$$

۲.۲.۱ معادلات پس‌رو

$$\frac{dH(s,t)}{ds} = -Q(s)H(s,t)$$

۳.۱ ماتریس گذار CTMC

$$Q(t) = \underset{h\to 0}{Limit}\left(\frac{H(t,t+h)-I}{h}\right) \qquad H(s,s) = I$$

درواقع چون احتمال نداریم، نرخ تعریف می‌کنیم. که این نرخ خروج است و عکس نرخ ورود می‌شود.

عناصر $Q(t)$:

$$\text{عناصر} = \begin{cases} q_{ii}(t) = \underset{h\to 0}{Limit}\dfrac{P_{ii}(t,t+h)-1}{h} \\ q_{ij}(t) = \underset{h\to 0}{Limit}\dfrac{P_{ij}(t,t+h)}{h} \end{cases} \xrightarrow{\ i \neq j\ } \begin{cases} 1-P_{ij}(t,t+h) = -hq_{ij}(t) + O_{(h)} \\ P_{ij}(t_1+th) = hq_{ij}(t) + O(h) \end{cases}$$

$$\frac{d\pi_j(t)}{dt} = \sum_{i\in S} q_{ij}\pi_i(t) \qquad Q = |q_{ij}|$$

$-q_{ii}(t)$ = نرخی که با آن از حالت i ام در زمان t خارج می‌شویم:

$$\Rightarrow \sum_j q_{i,j}(t) = 0\,,\ \forall_i$$

$$\mathring{\pi}(t) = \frac{d\pi(t)}{dt} = \pi(t)Q.$$

۴.۱ آنالیز CTMC همگن

$$P_{ij}(t) = P_{ij}(x,x+t)\,,\ \forall x\ ;\quad q_{ij} = q_{ij}(x), \forall x\ ;\quad Q = Q(x) = [q_{ij}]\,,\ \forall x$$

تابع نمایی می‌شود چون تنها تابعی است که خاصیت عدم خاطره در حالت پیوسته دارد.

در حالت پایدار باید ورود و خروج تمام تعادل باشد:

$$\pi_{ij} = \frac{-1}{M_i q_{ii}}$$

سیستم: روش تحقیق، mcdm، صف، احتمال دفرد.

منابع: سمینار، mcdm، طراحی آزمایشها، روش آماری، صف
α ✓ ✓

کتاب‌ها مونده به آخر

Example 3.3 Queuing in markof chain
3.5

۵.۱ معادلات C – K

$$H(t)=H(x,x+t)=\lfloor P_{ij}(t)\rfloor \;,\; \forall x \;;\quad H(x+t)=H(x)H(t)$$

و معادلات پیش رو ـ پس رو خواهند شد :

$$\frac{dH(t)}{dt}=H(t)Q \;;\quad H(0)=I$$

$$\frac{dH(t)}{dt}=QH(t) \;;\quad H(0)=I \quad\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{dP_{ij}(t)}{dt}=q_{jj}p_{ij}(t)+\sum\limits_{k\neq j}q_{kj}p_{ik}(t)\\[2mm]\dfrac{dP_{ij}(t)}{dt}=q_{ii}p_{ij}(t)+\sum\limits_{k\neq i}q_{ikj}p_{kj}(t)\end{cases}$$

با حل معادلات $H(t)=Exp(Qt)$ می توان $P_{ij}(t)$ را حساب کرد.

$$P_j(t)=P\{x(t)=j\},\; j=0,1,2,\ldots \;,\; \pi(t)=[P_0(t),P_1(t),\ldots]\quad t\geq 0$$

$$\Rightarrow\qquad \pi(t)=\pi(0)Exp(Qt)\quad\leftarrow\quad \frac{d\pi(t)}{dt}=\pi(t)Q$$

برای یک CTMC همگن و برگشت‌پذیر مثبت و یک‌پارچه $\pi_j=\underset{t\to\infty}{Limit}\,P_i(t)$ همواره وجود دارند.

این احتمالات در بلندمدت درصد اوقاتی هستند که در حالات میمانیم و مستقل از حل اولیه و منحصر به فرد هستند. این احتمالات یک CTMC ارگودیک می سازند که چون از زمان مستقل هستند، $\frac{d\pi(t)}{dt}=0$ را می‌سازند. یکی از عناصر $\pi Q=0$ به صورت زیر است:

$$q_{jj}\pi_j+\sum_{k\neq j}q_{kj}\pi_k=0\;,\quad j=0,1,2,\ldots$$

معادلات حل ارگودیک:

$$\begin{cases}\pi Q=0\\ \sum\pi_j=1\;,\quad j=0,1,2,\ldots\\ \pi_j\geq 0\end{cases}$$

با کمک $\sum_j q_{ij} = 0$ می توان آن را به صورت $\pi_j \left(\sum_{k \neq j} q_{jk} \right) = \sum_{k \neq j} q_{kj} \pi_k$ نوشت که بـه معـادلات تعـادل حالت معروف هستند .

۶.۱ فرآیندهای تولد ـ مرگ (حالت خاص CTMC)

تعریف : CTMC همگن $\{x(t) : t \geq 0\}$ با فضای حالت $\{0,1,2,...\}$ را فرآیند تولد- مـرگ (BD) گوینـد.

اگر مقادیر ثابت λ_i و μ_i $(i = 1,2,...)$ بتوان یافت که:

ـ هم صفر هستند به جز اونایی که

سایر نرخ های انتقال

$$q_{i,i+1} = \lambda_i , \quad q_{i,i-1} = \mu_i \; ; \quad i = 0,1,2,... , \quad q_{ij} = 0 \quad \text{for} \quad |i-j| > 1$$

می دونیم هم هستند یعنی فقط q_{12} و q_{21} داریم ، q_{13} صفر هست .

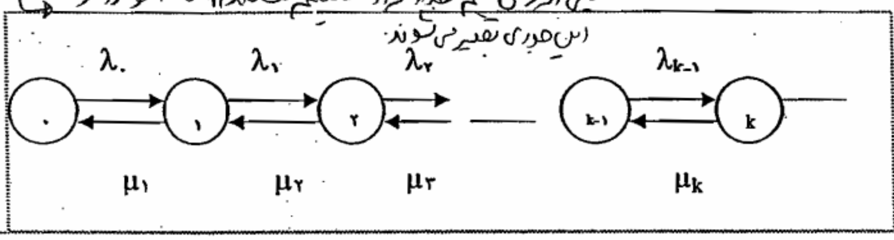
فرآیند BD دارای تعداد حالات متناهی و نامتناهی است . تمام حالات یک BD متنـاهی و یـک‌پارچـه، برگشت‌پذیر مثبت هستند . حالات معرف تعداد افراد توی صف یا توی سیستم هستند

q_{01} یا $q_{i,i+1}$ → تولد

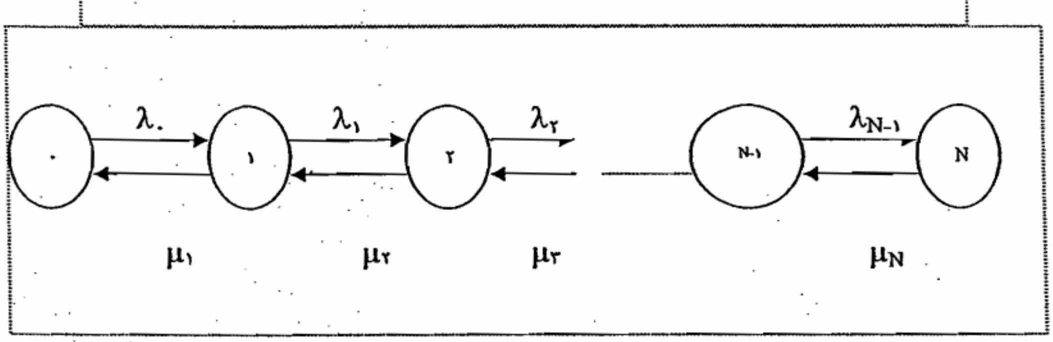
q_{21} یا $q_{i,i-1}$ → مرگ

یعنی اگر فرض کنیم تعداد افراد سیستم هستند q ها ، تولد و مرگ ها این طوری تغییر می شوند

← یک فرایند تولد مرگ با تعداد حالات نا محدود .



← این با تعداد حالات محدود .



$$\pi_0 \lambda_0 = \mu_1 \pi_1$$

$$\pi_1 (\mu_1 + \lambda_1) = \pi_0 \lambda_0 + \pi_2 \mu_2$$

$\pi Q = 0$

$\sum \pi_i = 1$

۱.۶.۱ احتمالات حدی

$$\pi_k = \pi_0 \prod_{i=0}^{k-1} \left(\frac{\lambda_i}{\mu_{i+1}} \right) ; \quad k \geq 0$$

به تعداد ۰ تا k

(حالت اول سیستم خالی بودن اون هست یعنی صفر)

$$Q = \begin{bmatrix} -\lambda_0 & \lambda_0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \mu_1 & -(\mu_1+\lambda_1) & \lambda_1 & 0 & & 0 \\ 0 & \mu_2 & -(\mu_2+\lambda_2) & \lambda_2 & & \\ \cdot & \cdot & \cdot & & & \end{bmatrix}$$

$$\pi = [\pi_0 \; \pi_1 \; \pi_2 \; ...]$$

← برسیم به این ← حل مساله صف .

اگر π را در Q ضرب کنیم و مساوی صفر بگذاریم ، باز هم همین روابط بدست می آید.

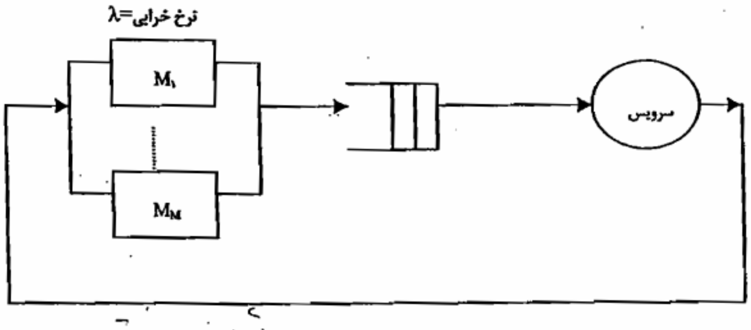
π_i چی بود ؟ درصد اوقاتی که سیستم در بلند مدت دارای i حالت هست

(اگر بخواهیم در طول فصل لوله ها صورت صحیح بکنیم باید تولید ... ... حالت ... داریم) ← در بلند مدت ... توزیع ...

$$\pi_0 = \frac{1}{1+\sum_{k\geq1}^{k-1}\prod_{i=0}^{k-1}\left(\frac{\lambda_i}{\mu_{i+1}}\right)}$$

✓ **مثال BD :**

M ماشین موازی و یک تجهیزات تعمیر داریم.



به هیچ ماشینی خراب نیست (محدود)

اگر k تعداد ماشین های خراب را حالات سیستم بگیریم $(k = 0,1,2,...,M)$ سیستمی BD با $M+۱$
احتمال این که ۲ یا ۳ ماشین با هم خراب شوند صفر است.
حالت خواهیم داشت:

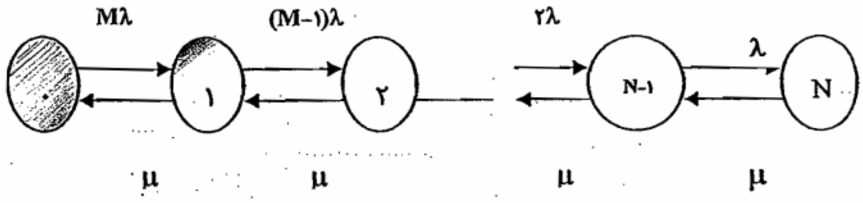
فرض: ماشین ها یکسان هستند.
در یک مقطع زمانی بیشتر از یک دستگاه خراب نمی شه یعنی
نرخ های رفتن از حالت 3 دستگاه به ۴ دستگاه
خراب فقط توقف می شوند

$$\mu_k = \mu;\ k = 1,2,...,M$$

به هر ماشین خرابی ها تعمیر می شه.

هر چی ماشین های خراب بیشتر بشوند.

$$\begin{cases}\lambda_k = (M-k)\lambda; & k = 0,1,2,...,M-1\\ \lambda_k = 0 & ; \quad k = M\end{cases}$$



البته ها
یک تعمیرکار بیشتر نداریم.

$$\pi_k = \frac{\frac{M!}{(M-k)!}(\lambda/\mu)^k}{1+\sum(\lambda/\mu)^k\frac{M!}{(M-k)!}}\ ; \quad k = 0,1,2,...,M$$

$$\text{متوسط ماشین های خارج از کار} = \sum_{k=0}^{M} k\pi_k$$

برای $M=1$ داریم:

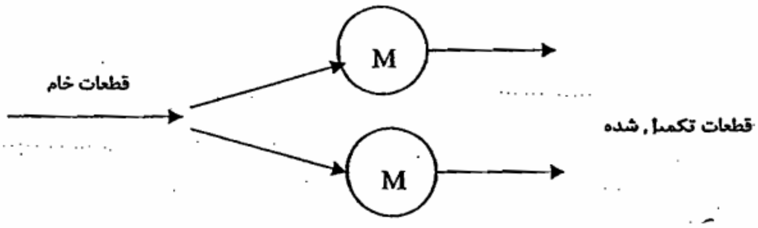
$$\pi_0 = \frac{1/\lambda}{1/\lambda + 1/\mu} \;,\; \pi_1 = \frac{1/\lambda}{1/\lambda + 1/\mu}$$

$$\text{درصدی از زمان که هر ماشین در حال کار است} = \frac{\text{متوسط تعداد ماشین ها درحال کار}}{\text{تعداد کل ماشین ها}} = \frac{M - \sum_{k=0}^{M} k\pi_k}{M}$$

$$\text{احتمال آن‌که حداقل } k \text{ ماشین در حال کار باشد} = \text{احتمال آن‌که کمتر از } k \text{ ماشین خراب شود} = 1 - \sum_{i=k+1}^{M} \pi$$

مثال CTMC:

دو ماشین M_1 و M_2 که در آن M_1 سریع‌تر از M_2 است در نظر بگیرید. قطعات خام به مقدار کافی همیشه در دسترس هستند.



(امکان خرابی هر دو با هم هست.)

امکان خرابی ماشین ها وجود دارد که در صورت وقوع بلافاصله شروع به تعمیر می شوند. μ_1 و μ_2 ($\mu_1 > \mu_2$) زمان عملیات روی ماشین های M_1 و M_2 نمایی بوده و زمان شکست توزیع نمایی با نرخ f و زمان تعمیر نیز نمایی با نرخ r است. حالات سیستم عبارتند از:

خراب ۱ — سالم ۰

حالت صفر (۰۰) : M_1 و M_2 هر دو مشغول کارند .

حالت ۱ (۰۱) : M_1 در حال کار و M_2 خراب است .

حالت ۲ (۱۰) : M_1 خراب و M_2 در حال کار است .

حالت ۳ (۱۱) : هر دو خراب هستند .

هدف : تعیین تعداد کمینه پرسنل فنی . ولی حالات سیستم شکل مسأله قبل توقف

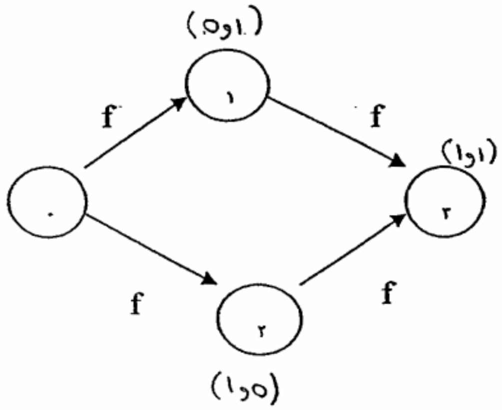
متوسط خروجی سیستم در حالت صفر $\mu_1+\mu_2$ ، حالت ۱ μ_1 و حالت ۲ μ_2 است و در حالت ۳ خروجی نداریم .

توزیع ماندن در یک حالت توزیع نمایی دارد با نرخ q_{ii}

q_{ii} : مجموع نرخ‌های نهایی آن‌هایی که از آن خارج می‌شوند

اگر تعداد تعمیرکاران $n=0$ باشد (حالت جاذب) $T_3=\infty$ و $T_1=Exp(f)=T_2$ و $T_0=Exp(2f)$ و ۲f می‌شود.

CTMC یک‌پارچه نخواهد بود.



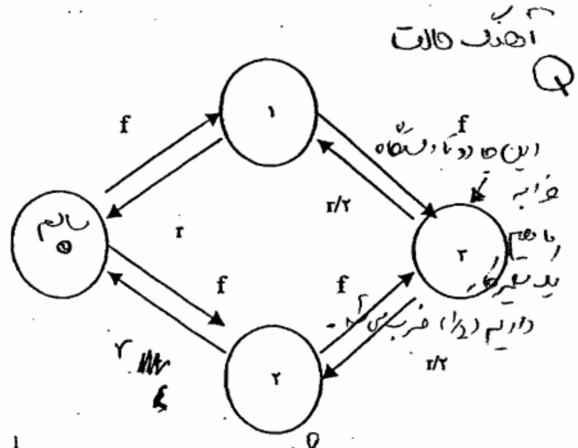
اینو نمی‌شه راحت تحلیل کرد. گره 3 گره جاذب هست و برگشت‌پذیر نیست. پس باید بنشینیم. ارگودیک(؟) نیست.

اگر $n=1$ باشد: ← وین بدیم

در حالت ۳ هم داریم .

$T_1=Exp(2f)$, $T_1=T_2=Exp(f+r)$, $T_3=Exp(r)$

حالت بولد-برک: از هر حالتی می‌دانیم به ماورای برویم.



آهنگ حالات

$$
Q=\begin{array}{c|cccc}
 & 0 & 1 & 2 & 3 \\
\hline
0 & -2f & f & f & 0 \\
1 & r & -r-f & 0 & f \\
2 & r & 0 & -r-f & f \\
3 & 0 & r/2 & r/2 & -r
\end{array}
$$

$\Sigma\pi=1$

$\Sigma\pi Q=1$

ماشین m_2 سالم است ولی m_1 خراب است.

اگر $n=2$ باشد، مانند $n=1$ است ولیکن $T_3 = Exp(2r)$

$\lambda \equiv f$
$\mu \equiv r$

اگر با $n=1$ احتمالات را بدست آوریم، خواهیم داشت:

یعنی این‌ها را توی گره‌ها تعادل بنویسیم.

$$\pi_0 = \frac{r^2}{r^2+2fr+2f^2}$$

$$\pi_1 = \pi_2 = \frac{fr}{r^2+2fr+2f^2}$$

$$\pi_3 = \frac{2f^2}{r^2+2fr+2f^2}$$

و با $n=2$ این احتمالات خواهند بود:

$$\pi'_0 = \frac{r^2}{r^2+2fr+f^2}$$

$$\pi'_1 = \pi'_2 = \frac{fr}{r^2+2fr+f^2}$$

$$\pi'_3 = \frac{f^2}{r^2+2fr+2f^2}$$

$$\Rightarrow \pi'_0 \rangle \pi_0 \quad , \quad \pi'_0 \rangle \pi_1 \quad , \quad \pi'_2 \rangle \pi_1 \quad , \quad \pi'_3 \langle \pi_3$$

هردو خراب

(هرچی تعمیرکار بیشتره احتمال خرابی کمتره)

متوسط نرخ خروجی سیستم

نرخ سرویس‌دهی هر دو سالم

شاخص کارایی (تولید) $R = \pi_0(\mu_1 + \mu_2) + \pi_1\mu_1 + \pi_2\mu_2$

حالت ۱، دستگاه ۱ سالم بود، دیگری خراب

$R' = \pi'_0(\mu_1 + \mu_2) + \pi'_1\mu_1 + \pi'_2\mu_2$

متفاوت

حفظ دو تا تعمیرکار $R' \rangle R$

احتمال آن‌که حداقل یک ماشین در حال کار باشد:

(شاخص تقسیم‌پذیری) $A = 1 - \pi_3$

خروجی هم نیست، هم اینکه دستگاه کار کند، نیستیم خوابیم.

$A' = 1 - \pi'_3$

$A' \rangle A$

تا الان به فرآیندهای تغییر فضا و فیزیکی مثل توزیع کاری نپرداختیم.

۱ فرآیند پواسون

یعنی الان داریم شرایطی رو بررسی می‌کنیم که فرآیند احتمالی ما خواص توزیع پواسون رو داره و ساده ترینشه. خاصیت آخر کلمه

پروسه پواسون یک پروسه احتمالی زمان پیوسته با فضای حالت گسسته است که دارای خواص مناسبی جهت مدل‌سازی ورود قطعات به کارگاه‌های تولیدی، ورود کارها به یک مرکز رایانه، ورود مکالمات تلفنی به مرکز تلفن و غیره است. این پروسه ارتباط جالبی با خاصیت عدم حافظه دارد زیرا فواصل زمانی ورود در این پروسه مستقل از هم و متغیر تصادفی نمایی یکسان هستند.

فقط تولد داریم.

✓ مثال: یک کارگاه صنعتی را در نظر بگیرید که قطعات مواد اولیه بطور تصادفی و یک به یک وارد می‌شوند.
بین ورودی تا مقطع t ... فرآیند تصادفی ... چون ... تصادفی ...

$X(t)$ را تعداد قطعات وارد شده در فاصله زمانی $[0,t]$ در نظر بگیرید. واضح است که $X(t)$ متغیر تصادفی گسسته با محدوده مقادیر $\{0,1,2,\ldots\}$, $\{x(t);\ t\geq 0\}$ پروسه احتمالی زمان پیوسته با فضای حالت گسسته است. حال فاصله زمانی را به n زیر فاصله مساوی $\frac{t}{n}$ تقسیم می کنیم. اگر n خیلی بزرگ باشد، $\frac{t}{n}$ رقم بسیار کوچکی خواهد گرفت که در آن صورت در هر زیر فاصله حاصل شده، ورود حداکثر یک قطعه معقول خواهد بود و هر چقدر $n\to\infty$ برود احتمال ورود ۲ یا تعداد بیشتری قطعه به صفر میل می کند. فرضیات دیگر عبارتند از:

ورودی اول، ورودی دوم، ورودی ۳ — $\frac{t}{n}$ $\frac{t}{n}$ t

هدف: شناسایی $X(t)$ ← شناسایی performance
احتمال موفقیت

۱- احتمال ورود یک قطعه در فاصله ای به اندازه $\frac{t}{n}$ متناسب با طول آن است. اگر این تناسب ثابت و برابر λ باشد، در آن صورت احتمال ورود دقیقاً یک قطعه برابر $\frac{\lambda t}{n}$ و احتمال عدم ورودی $1-\frac{\lambda t}{n}$ است. دقیقاً k ورودی یعنی k تا موفقیت

۲- ورودی های از انواع مختلف بطور مستقل روی می دهند.

در شرایط فوق هر زیر فاصله حاصل $\frac{t}{n}$ به چشم آزمایش برنولی با تعریف موفقیت برابر ورود یک قطعه و شکست بعنوان عدم ورود قطعه منظور می گردد. تعداد ورودی ها در فاصله $[0,t]$ یک متغیر

تصادفی دو جمله ای بامقدار آزمایشات n و احتمال موفقیت $\frac{\lambda t}{n}$ است. با استفاده از pmf متغیر تصادفی دو جمله‌ای برای مقادیر $k = ۰, ۱, ۲, ..., n$ داریم:

$P\{x(t) = k\}$ = $P\{$ دقیقاً K ورودی در فاصله $[۰,t]$ داشته باشیم $\}$

$$=\binom{n}{k}\left(\frac{\lambda t}{n}\right)^k\left(1-\frac{\lambda t}{n}\right)^{n-k}=\frac{n(n-1)....(n-k+1)}{n^k}\frac{(\lambda t)^k}{K!}\left(1-\frac{\lambda t}{n}\right)^{n-k}$$

اگر $n \to \infty$ برای هر $k = ۰, ۱, ۲..., n$ داریم:

(به این رسیدیم که $x(t)$ یک فرایند پواسون هست

$$P\{x(t)=k\}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n}\frac{n-1}{n}......\frac{n-k+1}{n}=\frac{(\lambda t)^k}{k!}(1-\frac{\lambda t}{n})^{n-k}$$
$$=\frac{(\lambda t)^k}{ki}\lim_{n\to\infty}(1-\frac{\lambda t}{n})^{n-k}=\frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^k}{ki};k=0,1,2....$$

عبارت فوق (pmf) توزیع پواسون بامیانگین λt است. بنابراین تعداد ورودی ها در فاصله $[۰,t]$ یک متغیر تصادفی پواسون است.

مثلا فاصله بین ورود دو مشتری متوالی

برای حالت $K=۰$، عدم ورود در فاصله $[۰,t]$ داریم:

کسی وارد نشه

$$P\{x(t)=0\}=e^{-\lambda t}(t>0) \longrightarrow$$ تابع توزیع نمایی

اگر T را فاصله زمانی بین دو ورودی متوالی تعریف کنیم؛ احتمال فوق را به فرم دیگری می توان نوشت:

$$P\{T>t\}=e^{-\lambda t}(t>0)$$

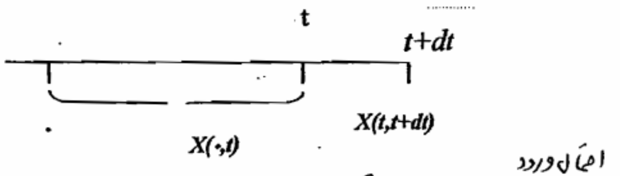
مشاهده می شود که T توزیع نمایی دارد.

سه تعریف بیان شده یعنی ۱- فرآیند پواسون یک فرایند تولد خالص است ۲- تعداد ورودی ها در فاصله t توزیع پواسون $P\{x(t)=n\}=\frac{(\lambda t)^n}{ni}e^{-\lambda t}$ دارند و ۳- فواصل زمانی دو ورودی متوالی نمایی است قابل تبدیل به یکدیگرند.

قضیه ۱: خاصیت ۱ و ۲ معادل اند: برای اثبات پواسون بودن یک فرایند اثبات یک دو نه کافیه.

مهم

فرایند



فرض کنید ورودی ها در فواصل زمانی مختلف مستقل و $\boxed{P\{\text{ورودی در فاصله } (t,\ t+dt)\}=\lambda dt}$ باشد. تابع مولد متغیر تصادفی تعداد ورودی ها در طی زمان t ، $G_t(Z)$، را در نظر بگیرید:

تابع مولد احتمال متغیر تصادفی تعداد ورودی‌ها تا لحظه‌ی t

$$G_t(Z)=E[Z^{x(0,t)}]$$
$$G_{t+dt}(Z)=E[Z^{x(0,t+dt)}]=E[Z^{x(0,t)+x(t,t+dt)}]=G_t(Z)E[Z^{N(t,t+dt)}]$$
$$=G_t(Z)\{(1-\lambda dt)Z^0+\lambda.dtZ^1\}=G_t(Z)-\lambda dt(1-Z)G_t(Z)$$
$$\frac{G_{t+dt}(Z)-G_t(Z)}{dt}=\lambda(Z-1)G_t(Z)\Rightarrow\frac{dG_t(Z)}{dt}=\lambda(Z-1)G_t(Z)$$
$$\Rightarrow\frac{d}{dt}\log G_t(Z)=\lambda(Z-1)\Rightarrow\log G_t(Z)-\log G_0(Z)=\lambda(Z-1)t$$
$$\Rightarrow G_t(Z)=e^{(Z-1)}\lambda t\to\text{poisson dist.}$$

قضیه۲: در فرآیند، توزیع پواسون منجر به یک فرآیند تولد خالص می‌شود:

فرایند تولد خالص هست و استقلال وجود دارد.

فرض کنید:

$$P\{x(t)=n\}=\frac{(\lambda t)^n}{ni}e^{-\lambda t}$$

then

مقادیر جزئی

$$\begin{cases}P\{X(dt)=0\}=e^{-\lambda dt}=1-\lambda dt+O(dt)\\ P\{X(dt)=1\}=\frac{\lambda dt}{1i}e^{-\lambda dt}=\lambda dt+O(dt)\end{cases}$$

با بر مقادیر قابل چشم پوشی هستند.

پس فرایندی که ورود در آن از توزیع پواسون پیروی کند یک فرایند تولید خالص است.

۲

اثبات رسیدن از ۲ به ۳ قبلاً گفته شده است.

اثبات رسیدن از ۳ به ۱: قبلاً دیدیم که (در معرفی تابع نمایی) اگر $X \approx Exp(\lambda)$ باشد، در آن صورت احتمال پایان در فاصله dt (وقوع ورودی) برابر $\lambda dt + O(dt)$ است.

اما قبل از تعریف رسمی پروسه پواسون به چند تعریف دیگر نیاز داریم.

تعریف: پروسه احتمالی $\{x(t): t > 0\}$ را شمارشی یا پروسه ورودی گویند اگر $X(t)$ نماینگر تعداد کل وقایع روی داده تا زمان t باشد. (برای مثال ورود قطعات خام به سیستم تولیدی).

تعریف: پروسه شمارشی $\{x(t): t > 0\}$ را پروسه شمارش دارای افزایش مستقل گویند اگر متغیرهای تصادف نماینگر تعداد وقایع روی داده در فواصل مجزا و مستقل از هم باشند.

تعریف: پروسه شمارشی $\{x(t): t > 0\}$ را دارای افزایش های پایدار گویند اگر تعداد ورودی ها در فاصله $[t, t+h]$ که با مقدار $x(t+h)-X(t)$ نشان داده می شود مستقل از t دوره زمانی باشد.

تعریف: یک پروسه شمارشی $\{x(t): t > 0\}$ را پروسه پواسون گویند اگر:

$X(0)=0$

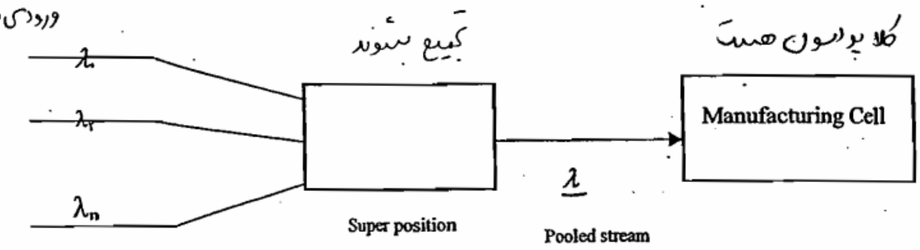
پروسه افزایش های مستقل داشته باشد.

پروسه افزاش های پایدار داشته باشد.

احتمال دو یا تعداد بیشتری ورودی در فاصله زمانی h به سمت صفر میل کند اگر h به سمت صفر برود. خواص این پروسه ای با تعریف فوق را بدون اثبات جزئیات بیان می‌کنیم.

۱.۱ جمع پروسه پواسون[۱]: superposition

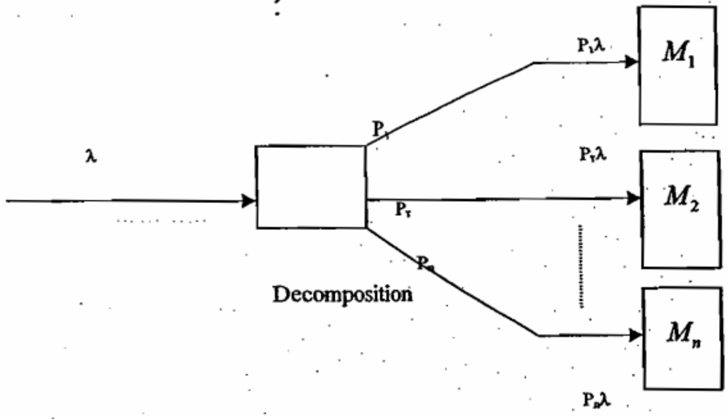
ورودی‌ها فرآیند پواسون با $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$



اگر در کارگاهی ورودی های مختلف با نرخ های $\lambda_n, \ldots, \lambda_2, \lambda_1$ از پروسه های پواسون مختلف داشته باشیم. ورودی کل به کارگاه (شکل زیر) از پروسه پواسون با نرخی معادل جمع کل تک تک نرخ های ورودی پیروی می کند.

۲.۱ تفکیک یک پروسه پواسون[۲]: decomposition.

فرض کنید قطعات به کارگاهی که دارای n ماشین است وارد می‌شوند و از توزیع پواسون با نرخ λ پیروی می‌کنند. بطور تصادفی یک قطعه به یکی از n ماشین تخصیص می‌یابد. احتمال تخصیص از توزیع $[P_1, P_2, \ldots, P_n]$ با خاصیت $P_1 + P_2 + \ldots + P_n = 1$ پیروی می کند.

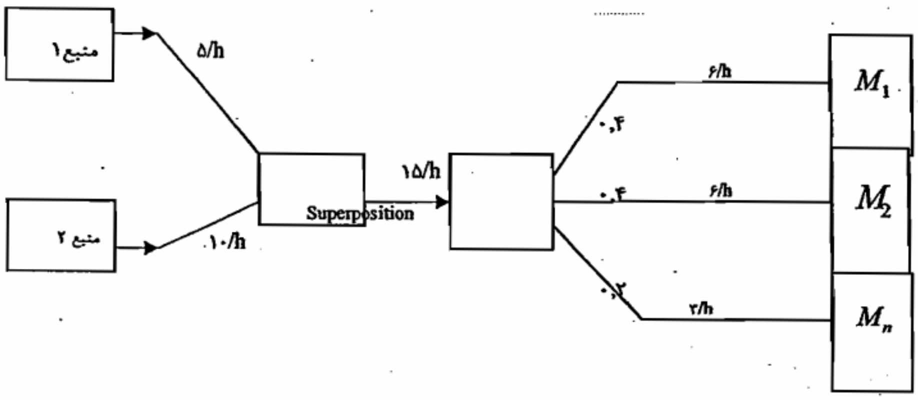


[۱] Superposition

[۲] decomposition

می توان نشان داد که جریان ورودی حاصل برای هر ماشین i ام از توزیع پواسون با نرخ λP_i پیروی می‌کند.

مثال ۹: فرض کنید ورود قطعات به کارگاهی از دو منبع جداگانه با نرخ های ۵ , ۱۰ ساعت /عدد از پروسه پواسون پیروی می کند (شکل زیر). بنابراین نرخ کلی ورود از پروسه پواسون با نرخ ۱۵ عدد در ساعت پیروی خواهد نمود.



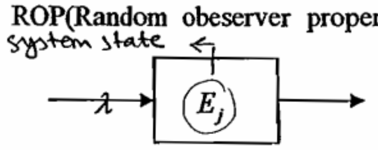
بنابراین فاصله بین دو ورودی متوالی $\frac{1}{15}$ ساعت یا ۴ دقیقه است. اگر سیستم دارای سه ماشین باشد که ۴۰٪ قطعات به M_1 و ۴۰% به M_2 و مابقی به M_3 تخصیص یابند در آن صورت سه جریان قطعات پروسه مستقل از هم خواهیم داشت که برای M_1 و M_2 میانگین زمان بین دو ورودی متوالی ۱۰ دقیقه و برای M_3 , ۲۰ دقیقه است.

۳- در طول فاصله زمانی $(0,t)$ اگر مقدار ورودی ها $X(t)=n$ بوده باشد، ورودی ها بطور یکنواخت توزیع شده اند. به عبارت دیگر برای تولید یک فرآیند تصادفی پواسون کافی است n را از توزیع پواسون $\text{poisson}(\lambda t)$ تولید کرده و موقعیت هر ورودی را در طول $(0,t)$ بطور مستقل از دیگر با توزیع یکنواخت بدست آوردیم.

۴- اگر از فرآیند پواسونی با نرخ λ یک انتخاب تصادفی انجام دهیم به طوریکه یک ورودی با احتمال P مستقل از دیگران انتخاب شده باشد، فرآیند حاصل نیز فرآیند پواسون با نرخ $P\lambda$ است.

۵- PASTA (process Arrivals see Time Averages): مشتریان یک فرآیند پواسون در هر لحظه زمانی دلخواه که بطور تصادفی در نظر بگیریم سیستم را به صورتی که در هنگام ورود دیده اند خواهند دید (صرف نظر از تغیر و تحولاتی که در این فاصله روی داده باشد).

خاصیت PASTA نقش کلیدی در تئوری صف دارد و ROP(Random obeserver property) نام گذاری می شود.



سیستمی را در نظر بگیرید که در حالات مختلف E_j قرار می‌گیرد. ورودی‌ها نیز از فرآیند پواسون با نرخ λ پیروی می‌کنند. در حالت پایدار به ازا هر حالتی دو احتمال مختلف داریم:

۱- احتمال حالتیکه که از دید یک مشاهده گر خارج از سیستم تخصیص داده می شود: احتمال آنکه سیستم در حالت E_j (در یک لحظه تصادفی) $=\pi_j$

۲- احتمال حالتیکه از دید یک مشتری وارد شده به سیستم تخصیص داده می شود: احتمال آنکه سیستم درست قبل از ورودمشتری (تصادفی) در حالت E_j باشد $=\pi^*_j$

در حالت کلی $\pi_j \neq \pi^*_j$ است.

مثال: PC خود را در نظر بگیرید (یک مشتری – یک سرویس دهنده)

$$\begin{cases} E_0 = \text{PC آزاد است} \\ E_1 = \text{PC مشغول است} \end{cases}$$

چون رایانه شما هرگاه بخواهید با آن کار کنید آزاد است $\begin{cases}\pi^*_0 = 1 \\ \pi^*_1 = 0\end{cases}$.

شاخص کارایی رو میگیرن میزان نسبت کامپیوتر نیستش.

۲ ساعت در روز تو دفتره ۱ ساعت کار می‌کنه.

از صورت سوال کنن که چند درصد مشغوله، ۵۰٪ هم هست

برای ما مستقل نیست. می‌دونیم که خالیه کامپیوتر ها می‌بره و پواسون نیست.

کلیک به نوک بیرونه، از میزان کارایی ما متفاوته با کلیک درون

π_0 PC ۱> درصدي از زمان كه
آزاد است
π_1 PC

توجه داشته باشید که پروسه ورودی پواسون نمی باشد. زیرا ورودی ها در زمان های مختلف مستقل نمی باشند(هنگامیکه کار خود با PC را شروع کرده‌اید، یعنی یک ورودی داشته ایم، برای مدت زمان احتمال ورود مشتری دیگری وجود ندارد). اما در حالت فرآیند پواسون $\pi_j = \pi_j^*$ است. $(\times)$

۳.۱ فرآیند پواسون ناهمگن[۱]

اگر به جای λ ، $\lambda(t)$ که تابعی غیراحتمالی از زمان است داشته باشیم فرآیند پواسون ناهمگن خواهیم داشت. در این صورت احتمال ورود یک مشتری در فاصله زمانی کوتاه $(t, t+dt)$ برابر $\lambda(t)dt + O(dt)$ است. احتمال ورود بیشتر از یک مشتری از درجه $O(dt)$ است.

متوسط ورود در طول $(t, t+dt)$ برابر است با:

$$E[x(t,t+dt)] = \sum_{n=0}^{\infty} n.P\{(t,t+dt)\,|\,n\} = \lambda(t)dt + O(dt)$$

متوسط ورود در طول $(0,t)$:

$$E[x(0,t)] = E[\int_0^t x(u,u+du)] = \int_0^t E[x(u,u+du)] = \int_0^t \lambda(u)du$$

همانند حالت همگن داریم:

$$\frac{dG_t(Z)}{dt} = (Z-1)\lambda(t)G_t(Z) \rightarrow \frac{d}{dt}\log G_t(Z) = (Z-1)\lambda(t)$$
$$\rightarrow G_t(Z) = e^{(Z-1)\int_0^t \lambda(u)du}$$

---

۱ Inhomogeneous Poisson Process

اگر $a(t)=E[x(t)]=\int_0 \lambda(u)du$ تعریف شود، $X(t)\approx Poisson(\lambda(t))$، خواص حالت همگن را به حالت ناهمگن تعمیم می دهیم:

۱- Superposition: با $\lambda_1(r)$ و $\lambda_2(t)$ فرآیند پواسرن $\lambda(t)=\lambda_1(t)+\lambda_2(t)$ خواهیم داشت.

۲- اگر فرآیند $\lambda(t)$ با احتمالات $(P_1(t)+P_2(t)=1)P_2(t),P_1(t)$ به دو فرایند تقسیم شود، دو فرآیند مستقل ناهمگن پواسون $P_1(t)\lambda(t)$ و $P_2(t)\lambda(t)$ خواهیم داشت.

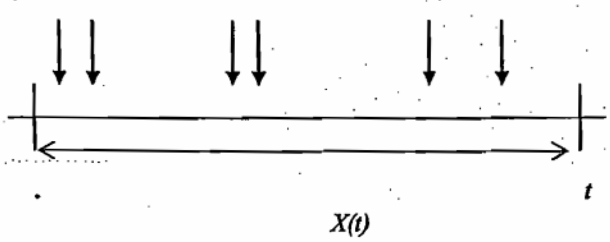
۳- با داشتن $X(t)=n$ ورودی در فاصله $(\cdot,t)$ از فرآیند ناهمگن پواسون، توزیع n ورودی بطور مستقل در فاصله $(\cdot,t)$ از توزیع چگالی $\frac{\lambda(t)}{\int_0 \lambda(u)du}$ پیروی می کند.

۴- اگر انتخاب تصادفی یک ورودی از یک فرآیند پواسون ناهمگن با پارامتر $\lambda(t)$، با احتمال $P(t)$ مستقل از دیگران صورت پذیرد، فرآیند حاصل نیز پواسون $P(t)\lambda(t)$ است.

۴.۱ فرآیند پواسون

فرآیند پواسون، یک پروسه احتمالی زمان پیوسته با فضای حالت گسسته می‌باشدکه به فرآیند شمارشی نیز معروف است و برای مدل‌سازی جریان ورودی به کار می‌رود.

تعریف فرآیند شمارشی: در فرآیند احتمالی $\{X(t);\ t=>\cdot\}$ اگر $X(t)$ نمایانگر تعداد کل وقایع روی داده تا زمان t باشد، آن‌را شمارشی می‌نامند (مثلا تعداد قطعات وارد شده به یک سیستم تولید).



اگر فاصله زمانی t به n زیرفاصله t/n تقسیم شود و n خیلی بزرگ باشد،آنگاه این فرض که در فاصله t/n تنها یک ورودی داشته باشیم، قابل قبول است.

احتمال ورود یک قطعه متناسب با طول t/n است.اگر این تناسب ثابت و برابر با λ باشد،احتمال ورود دقیقا یک قطعه برابر با $\lambda t/n$ است و عدد ورودی برابر با $\lambda t/n$ -۱.

با توجه به اینکه ورود قطعه در فاصله t/n را می توان آزمایش برنولی تعریف کرد،در طول $(0,t)$ یک توزیع دوجمله ای خواهیم داشت که اگر n به سمت بینهایت میل کند،به توزیع پواسون می‌رسیم (یعنی $X(t)$ از توزیع پواسون پیروی می‌کند)

$$P\{X(t)=K\}=\frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^K}{K!} \quad ; K= 0, 1, 2 \ldots$$

$$P\{X(t)=0\}=e^{-\lambda t} \quad ; \ t>0$$

فاصله ما بین دو ورود متوالی نیز دارای توزیع نمایی است:

$$P\{T>t\}=e^{-\lambda t} \quad ; \quad t>0$$

همیشه روند سیستم های صف همین صورتی هست

+Δt ...

یک سرویس دهنده

λ با نرخ μ میانگین 1/μ

۱. سیستم M/M/1

ساده‌ترین مدل، مدل M/M/1/∞/FIFO است که در آن داریم:

$\alpha(t) = \lambda e^{-\lambda t}$ و $b(t) = \mu e^{-\mu t}$

مدل هدف: یعنی احتمالات حالات سیستم را حساب کنیم.

برای $n \geq 1$:

$\Pr\{$ یک ورودی در Δt $\} = \lambda\Delta t + O(\Delta t)$ و $\Pr\{$ یک سرویس در فاصله $\Delta t\} = \mu\Delta t + O(\Delta t)$ با استفاده از اینها

در لحظه t، n نفر در سیستم اند.

روش کلاسیک

- $P_n(t+\Delta t) = \Pr\{$سیستم در زمان $t+\Delta t$ در E_n باشد$\}$ (حالت n) $= P_n(t) \times \{$ورودی هیچ سرویسی و Δt نباشد$\}$ + $\{$یک سرویس در فاصله Δt و بدون ورودی$\} \times P_n(t)$ + $\{$یک ورودی و یک سرویس در فاصله $\Delta t\} \times P_{n+1}(t)$ + $\{$ یک ورودی در Δt بدون سرویس$\} \times P_{n-1}(t)$ + $\{$حالاتی که بیش از یک سرویس و ورودی داشته باشیم$\} \times O(\Delta t)$

یعنی حالت اینکه در لحظه t، n نفر در سیستم باشند ⇐ $P_n(t)\{1-\lambda\Delta t\}\{1-\mu\Delta t\}$ + ⇐ (کسی نره) (کسی نیاد)

$$\Rightarrow P_n(t+\Delta t) = P_n(t) \times [1-\lambda\Delta t - \mu\Delta t] + P_{n+1}(t) \times [O(\Delta t)] + P_{n-1}(t)[\lambda\Delta t] + O(\Delta t)$$

حالت بعدی ⇐ $P_n(t)\{\lambda\Delta t\}\{\mu\Delta t\} + O(\Delta t)$ + $P_{n+1}(t)[1-\lambda\Delta t][\mu\Delta t]$ ⇐ (در لحظه t+Δt یک نفر بره) (در لحظه t، n+1 نفر) (در لحظه t، n نفر در سیستم اند) وارد نشه

روش سنتی

- $P_0(t+\Delta t) = P_0(t)\{$ هیچ ورودی در $\Delta t\}$ + $P_1(t) \times \{$بدون ورودی و انجام یک سرویس در $\Delta t\}$ + $O(\Delta t)$

$$\Rightarrow P_0(t+\Delta t) = P_0(t) \times (1-\lambda\Delta t) + P_1(t) \times (\mu\Delta t) + O(\Delta t); \quad n = 0$$

queue system with feedback

این جا فرایند سرویس و فرایند ورود فرق داره. یعنی مستقل اند

که کسی تو سیستم نیست امکان سرویس نداریم — کسی وارد نشه — چون یه نفر از سیستم بره.

کسی که تو سیستم هست در حال سرویس دهی هست.

معادلات دیفرانس- دیفرانسیل یا پیشرو:

retrial queue

$$dP_n(t)/dt = -(\lambda+\mu).P_n(t) + \mu P_{n+1}(t) + \lambda P_{n-1}(t), \quad dP_0(t)/dt = -\lambda P_0(t) + \lambda P_1(t)$$ ← تشکیل معادلات دیفرانسیلی

(چون معادله چپمن-کولموگروف رو نوشتیم)

در حالت پایا (یعنی هنگامی که t به سمت بینهایت میل می‌کند) $\lim dP_n(t)/dt = 0$ می باشد :

احتمالات حالت پایدار:

$$\begin{cases} P_{n+1} = (\lambda/\mu+1)P_n - (\lambda/\mu)P_{n-1}, \\ P_1 = (\lambda/\mu)P_0 \\ \\ \sum_{n=0}^{\infty} P_n = 1 \end{cases}$$

و داریم:

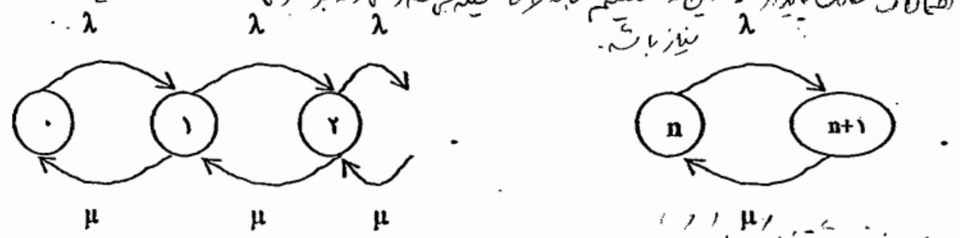
شرط همگرا شدن سری

درباره تعداد افراد سیستم $P_n = (\lambda/\mu)^n(1-\lambda/\mu)$ if $\lambda < \mu$

از طریق دیاگرام انتقال حالات هم می‌توانستیم معادلات فوق را بدست آوریم. به دیاگرام ذیل توجه نمایید:

جریان ورودی

شرط این حالت برای رسیدن به احتمالات حالت پایدار : این که سیستم بالا فوق تحلیل می‌شود می‌تونه جوابگوی نیاز باشه.



جریان سرویس‌دهی

ρ : ضریب بهره نرخ انتقال در فرآیند پواسون

برای حالات مختلف سیستم خواهیم داشت:

$$
Q = \begin{cases} n=0 \quad : \lambda \times P_0 = \mu \times P_1 & P_1 = \lambda/\mu \, P_0 = \rho P_0 \quad , \quad \rho = \frac{\lambda}{\mu} \\ n=1 \quad : (\lambda+\mu)\times P_1 = \lambda \times P_0 + \mu \times P_2 & P_2 = \rho^2 P_0 \\ \vdots & \vdots \\ n \mp n \quad : (\lambda+\mu)\times P_n = \lambda \times P_{n-1} + \mu \times P_{n+1} & P_n = \rho^n P_0 \end{cases}
$$

$$(R_0) \quad \Rightarrow P_n = \rho^n (1-\rho)$$

هیچ‌وقت توی سیستم بیکار نیست.

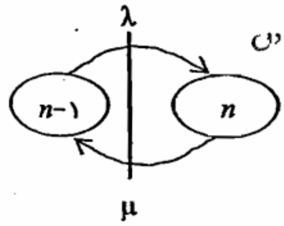
$$\sum_{n=0} P_n = 1 \Rightarrow P_0 + \rho P_0 + \dots + \rho^n P_0 = 1$$

$$P_0 (1 + \rho + \rho^2 + \dots + \rho^n) = 1$$

$$\frac{1}{1-\rho} \text{ if } \rho < 1 \Rightarrow P_0 = \frac{1}{\frac{1}{1-\rho}} = 1-\rho \quad \text{if } \rho<1 \text{ or } \lambda/\mu < 1$$

۲. روش Global Balance

به نمودار ذیل توجه نمایید:



حالا به جای نرخ‌های ورود و خروج برای تک تک حالات، این نرخ‌ها رو برای برش در نظر می‌نویسیم.

معادلات تعادلی را که برای هر حالتی جداگانه نوشته‌ایم، برای کل حالات $A=\{0, 1, 2, \dots, n-1\}$ نیز می‌توان جداگانه نوشت. به‌عبارت دیگر، جریان ورودی و خروجی مجموعه A معادل هم هستند.

$$\lambda \times P_{n-1} = \mu \times P_n \quad \text{یا} \quad P_n = \rho \times P_{n-1} \quad \Rightarrow P_n = \rho^n \times P_0$$

$$\rho \to \lambda/\mu$$

و همچنین داریم:

$$\sum_{i=0}^{\infty} P_i = 1 \to P_0 = \frac{1}{\sum_{n=0}^{\infty} \rho^n} = 1-\rho$$

$$\sum \rho^n P_0 = 1$$

$$G(z) = \sum P_n z^n \quad , |z| \leq 0$$

$$P_{n+1} z^n = (1+\rho) P_n z^n - \rho P_{n-1} z^n$$

معادلات حالت پایدار =

$$\begin{cases} P_1 = \rho P_0 & , n=0 \\ P_{n+1} = (1+\rho) P_n - \rho P_{n-1} & , n \geq 1 \end{cases}$$

$$\times z^n \Rightarrow z^{-1} P_{n+1} z^{n+1} = (1+\rho) P_n z^n - \rho z P_{n-1} z^{n-1}$$

از جمله صفر دارد و در آن اضافه می‌کنیم ←

$$z^{-1} \sum_{n=1}^{\infty} P_{n+1} z^{n+1} = (1+\rho) \sum_{n=1}^{\infty} P_n z^n - \rho z \sum_{n=1} P_{n-1} z$$

$$z^{-1} \left[\sum_{n=-1}^{\infty} P_{n+1} z^{n+1} - P_1 z - P_0 \right] = (1+\rho) \left[\sum_{n=0}^{\infty} P_n z^n - P_0 \right] - \sum_{n=1}^{\infty} P_{n-}$$

$$P_1 = \rho P_0$$

$$\to z^{-1} \left[G(z) - P_1(z) - P_0 \right] = (1+\rho) \left[G(z) - P_0 \right] - \rho z G(z) \Rightarrow G(z) = \frac{P_0}{1-z\rho} \quad I$$

$G(1) = 1 \Rightarrow G(1) = \frac{P_0}{1-\rho} = 1 \Rightarrow P_0 = 1-\rho \quad II$

$I, II \Rightarrow G(z) = \frac{1-\rho}{1-z\rho}$, $G(z) = (1-\rho)[1 + z\rho + (z\rho)^2 + \dots]$

$= (1-\rho)\sum_{n=0}^{\infty}(z\rho)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\underbrace{(1-\rho)\rho^n}_{P_n} z^n$

۳. مقایسات کارایی

الف: محاسبه مقادیر متوسط L, L_q, L'_q

(همون طول صف) از افراد صف — افراد صف — از افراد سیستم — به شرط خالی نبودن سیستم

- متغیر تصادفی تعداد افراد سیستم $= N$

$\rightarrow$ $0 \times P_0$

$$L = E[N] = \sum_{n=0}^{\infty} nP_n = \sum_{n=0}^{\infty} n\rho^n(1-\rho) = (1-\rho)\sum_{n=0}^{\infty} n\rho^n = \rho(1-\rho)\sum_{n=1}^{\infty} n\rho^{n-1} = \rho(1-\rho)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{d}{d\rho}\rho^n$$

این روابط برای تک کاناله صادق صرف نظر از زمان ورود

$$= \rho(1-\rho)\frac{d}{d\rho}\sum_{n=1}^{\infty}\rho^n = \rho(1-\rho)\frac{d}{d\rho}\left(\frac{1}{1-\rho}\right) = \frac{\rho}{1-\rho}$$

$\rho = \lambda/\mu \rightarrow L = \lambda/(\mu-\lambda)$, $\boxed{L = \rho + \rho^2/(1-\rho) = \text{مشتریان در انتظار + مشتریان در سرویس}}$

$\boxed{L = L_q + \rho} = L_q + (1-P_0)$

$\frac{\rho}{1-\rho} = \frac{\rho^2}{1-\rho} + \rho \Rightarrow L_q = \frac{\rho^2}{1-\rho}$

مسئله برای یک مدل صفی L در بیاد و Lq دربیاد و یا برعکس

- متغیر تصادفی تعداد افراد در صف $= N_q$

جمله اول صفر است و در حقیقت از ۲ شروع می‌شود — از یک شروع می‌شه

$$L_q = E[N_q] = 0 \times P_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\underbrace{(n-1)}_{\text{تعداد افراد در صف}}P_n = \sum_{n=1}^{\infty} nP_n - \sum_{n=1}^{\infty} P_n = L - (1-\rho)\sum_{n=1}^{\infty}\rho^n$$

$$= L - (1-\rho)\left[\frac{1}{1-\rho} - 1\right] = L - \rho = \frac{\rho^2}{1-\rho}$$

- $L_q = L - \sum_{n=1}^{\infty} P_n = L - (1-P_0)$

روابط فوق برای تمامی سیستم‌های صف تک‌کاناله صرف نظر از نوع توزیع‌های ورودی و سرویس‌دهی، صادق است.

Sahar polumpotent

- متوسط طول صف در زمانیکه صف خالی نبوده است $= L'_q$

$$L'_q = E[N_q \mid N_q \neq 0] = \underline{\underline{\sum_{n=1}^{\infty}(n-1)p_n'}}$$

- توزیع احتمال شرطی افراد درسیستم به شرط آن‌که صف خالی نبوده است $= P_n'$

$\frac{P_r(\text{n نفر در سیستم})}{P_r(\text{خالی نبودن سیستم})}$ ← خالی نبودن صف

$$P_n' = P\{n \mid n \geq 2\} = \frac{P_n}{P\{n \geq 2\} = 1 - \{P_0 + P_1\}} \Rightarrow P_n' = \frac{P_n}{\rho^2}$$

از طریق بررسی های نقطه ای

$* P\{N > n\} = \rho^n *$

$$\Rightarrow L_q' = \sum_{n=2}^{\infty}(n-1)\frac{P_n}{\rho^2} = \frac{1}{\rho^2}\sum_{n=2}^{\infty}(n-1)P_n = \frac{1}{\rho^2} \times L_q = \frac{1}{1-\rho} = \frac{\mu}{\mu-\lambda}$$

ب: توزیع‌های زمان انتظار (با فرض آن‌که نظم صف FIFO است)

- T_q= متغیر تصادفی زمان انتظار در صف (متغیر پیوسته به غیر از حالت زمان انتظار صفر)
- $W_q(t)$= توزیع جمعی زمان انتظار در صف:

$$W_q(0)=P\{T_q \le 0\}=P_0=1-\rho$$

اگر مشتری به محض ورود n نفر را در سیستم مشاهده کند باید منتظر سرویس آن‌ها بماند، با توجه به آنکه جمع n متغیر تصادفی ارلنگ n ام است داریم:

$$W_q(t)=\sum_{n=1}^{\infty} P_r\{\text{زمان تکمیل سرویس } n \text{ نفر} \le t \mid \text{در ورود به سیستم } n \text{ نفر را مشاهده کند}\}\cdot P_n + W_q(0)$$

$$W_q(t)=(1-\rho)\sum_{n=1}^{\infty}\rho^n \underbrace{\int_0^t \frac{\mu(\mu x)^{n-1}}{(n-1)!}e^{-\mu x}dx}_{\text{مدت زمان انتظار که از نوع ارلنگ است. }(n,\mu)}+\underbrace{(1-\rho)}_{\text{حالت } t=0}$$

با توجه به $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\mu x\rho)^{n-1}}{(n-1)!} = e^{\mu x\rho}$ داریم:

$$W_q(t)=(1-\rho)\rho\int_0^t \mu e^{\mu x(1-\rho)}dx+1-\rho$$

$$=1-\rho e^{-\mu(1-\rho)t}+1-1\ \rho$$

$$\Rightarrow W_q(t)=\begin{cases}1-\rho & t=0\\ 1-\rho e^{-\mu(1-\rho)t} & t>0\end{cases}$$

$$W_q=E[T_q]=\int_0^{\infty} t\,dW_q(t)=\frac{\lambda}{\mu(\mu-\lambda)} = \frac{L}{\mu}$$

- T= متغیر تصادفی زمان انتظار در سیستم
- W= متوسط زمان انتظار در سیستم

$W=$ زمان سرویس $+T_q$

- $\omega(t)$= تابع چگالی زمان انتظار در سیستم

$$W=E[T]=E[\text{زمان سرویس}]+E[T_q]$$

$$W=\frac{1}{\mu-\lambda}=W_q+1/\mu$$

$$*\ \omega(T)=(\mu-\lambda)e^{-(\mu-\lambda)t}\ ,\ T\sim \underline{Exp(\mu-\lambda)}\ *$$

$\lambda = 5$ نفر/ساعت

M/M/1

مثال: روزهای پنج‌شنبه مشتریان یک آرایشگاه بر طبق فرآیند پواسون با نرخ ۵ نفر در ساعت وارد می‌شوند. به‌طور متوسط هر اصلاح ۱۰ دقیقه (واحدها را یکی کنید) به‌طول می‌انجامد (توزیع نمایی).

الف) متوسط تعداد مشتریان و متوسط مشتریان منتظر چقدر است؟ واحدهای اندازه‌گیری باید حتماً یکی باشد. (مثلاً زمان‌ها)

μ و λ نرخ است.

نرخ ورود، نرخ سرویس

$$\lambda = 5\ \frac{\text{نفر}}{\text{ساعت}},\quad \mu = 6\ \frac{\text{نفر}}{\text{ساعت}} \Rightarrow \rho = \frac{\lambda}{\mu} = 5/6 < 1$$

دقیقاً چک کنید ← وقتی نرخ ترافیک باشد

$$L = \frac{\rho}{1-\rho} = 5,\quad L_q = \frac{\rho^2}{1-\rho} = \rho \times L = 5 \times \frac{5}{6} = \frac{25}{6}$$

یعنی به صورت ریتم قابل مطالعه نیست.

$$L'_q = 6\ \text{نفر} = \frac{1}{1-\rho}$$

ب) چند درصد مشتریان بدون انتظار وارد سرویس سیستم می شوند؟

$$P_0 = 1-\rho = 1-\frac{5}{6} = \frac{1}{6}$$

به‌عبارتی $\frac{1}{6}$ اوقات آرایشگر بیکار است.

مواقعی سیستم از ۵ به بالا یعنی مشتری می‌ماند ... می‌شود.

ج) اگر ۴ محل انتظار برای مشتریان وجود داشته باشد، احتمال آن‌که مشتری به محض ورود صندلی خالی پیدا نکند چقدر است؟

$$P\{n \geq 5\} = \left(\frac{5}{6}\right)^5 = 0.402$$

پس یعنی مرتبه احتمال این که تعداد افراد سیستم ۵ به بالا باشه.

بنابراین ۴۰ درصد از زمان یک مشتری سر پا است. همچنین داریم:

د) احتمال این که زمان انتظار بیش از یک ساعت باشه. (جواب صفحه بعد)

$$W_q=\frac{\lambda}{\mu(\mu-\lambda)}=\frac{5}{6}\ Hour=50\ Minute$$

$$W=\frac{1}{\mu-\lambda}=1\ Hour=60\ Minute$$

$$W_q'=E[T_q\mid T_q>0]=\frac{1}{\mu-\lambda}=60\ Minute$$

این جا $$\Pr\{T_q>1\}=1-\Pr\{T_q\le 1\}=1-W_q(1)=\frac{5}{6}e^{-1}=0.306$$

- تذکر مهم: W,W_q به نظم صف بستگی ندارند و لیکن $W(t),W_q(t)$ (توزیعات آن‌ها) بـه نظـم صف بستگی دارند.

۴. قانون (فرمول) لیتل: برقراری ارتباط بین اقامت‌ها.

اگر یکـی از مجهـولات $\{L,L_q,W,W_q\}$ را داشته باشـیم، بقیـه مجهـولات را مـی‌تـوان بـه کمـک فرمول‌های زیر بدست آورد:

$$(1)\quad W=W_q+\frac{1}{\mu}$$

این رو بکار برده دانشیم
$$(2)\quad L_q=\lambda\times W_q$$

$$(3)\quad L=\lambda\times W$$ ← متوسط زمان اقامت در سیستم

فرمول‌های بالا به فرمول‌های لیتل معروف هستند و برای هر سیستم صف تک‌کاناله که شرایط زیـر را داشته باشند صادق است: شرط اول و ۲ محدود کننده است

وقتی این جوری است که ۱) سیستم با احتمال ۱ در آینده خالی گردد. چون گفتیم بالاخره یک جایی سیستم خالی می‌شه.

روزهایی از هفته پواسون ۲) هروقت سیستم خالی شد مکانیسم ورودی و سرویس با اولین ورودی به حال اول برگردد.
در روزهای غیر پواسون است باید جدا جدا بررسی کنیم از دو زمان بدست آمده، میانگین بگیریم.

ولی این محدود کننده نیست. بالاخره همون ← ۳) L در اولین دوره‌ای که سیستم به بیکاری می‌رسد محدود باشد (دوره مشغول).
چون براساس شرط ۱ گفتیم سیستم خالی می‌شه. این می‌گه که اون اولین دوره اون قدر نباشه که بی‌نهایت باشه.

۴) میانگین زمان انتظار و میانگین زمان بین دو ورودی متوالی در دوره مشغول محدود است.
(مشغول بودن محدودیم) همین دوره.
این هم محدودکننده نیست.

Ateke

W → L → Lq → Wq

• تذکر: فرمول‌های ذیل

$$\boxed{L = L_q + (1 - P_0);\ \ P_0 = 1 - \lambda/\mu \quad (4)}$$

برای تمام صف‌های تک‌کاناله با سرویس غیرانباشته‌ای صادق است و نیز فرمول

$$\boxed{W_q = L/\mu \quad (5)}$$

تنها برای مدل‌های $M/M/1$ صادق است.

$L = \frac{\rho}{1-\rho}$

به‌طور حسی می‌توان درستی روابط ۲ و۳ و ۵ را اثبات کرد و نیز می‌توان نشان داد:

$(L \times 1/\mu)$

برای M/M/1

$$if\begin{cases} L=\lambda \quad W \to W=\dfrac{L}{\lambda} \\ W=W_q+\dfrac{1}{\mu}=\dfrac{L}{\mu}+\dfrac{1}{\mu}\end{cases} \to \quad \frac{L}{\lambda}=\frac{L}{\mu}+\frac{1}{\mu} \quad \to \quad L=\frac{\lambda/\mu}{1-\lambda/\mu}=\frac{\rho}{1-\rho} \quad (6)$$

$\mu_1 = 10$, $\mu_2 = 20$, $C_1 = 100$, $C_2 = 180$, $\lambda = 8$

✓ **مثال:** دو سیستم تولیدی $M/M/1$ را درنظر بگیرید. در اولین سیستم نرخ تولید ۱۰ قطعه در ساعت و در دومین سیستم نرخ تولید ۲۰ قطعه در ساعت است هزینه نگهداری سیستم اول ۱۰۰ واحد پولی درماه و سیستم دومی ۱۸۰ واحد پولی در ماه است. نرخ ورود قطعات ۸ عدد در ساعت است . نگهداری یک قطعه در یک ساعت یک واحد پولی هزینه دربر خواهد داشت اگر در هرماه ۲۰۰ ساعت کارگاه مشغول به کار باشد کدام سیستم اقتصادی‌تر خواهد بود؟

متوسط هزینهٔ کل سیستم i در یک ساعت $= L_i \times 1 + \frac{C_i}{200}$

این هزینه نگهداری سیستم در هر ساعت!

$$C_1 = 100 \qquad \rho_1 = \frac{\lambda}{\mu_1} = \frac{8}{10} = 0.8 \qquad L_1 = \frac{\rho_1}{1-\rho_1} = 4$$

$$C_2 = 180 \qquad \rho_2 = \frac{\lambda}{\mu_2} = \frac{8}{20} = 0.4 \qquad L2 = \frac{\rho_2}{1-\rho_2} = \frac{2}{3}$$

$\Rightarrow$

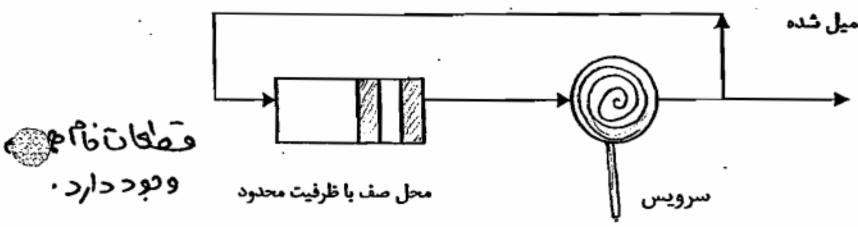
$$\text{Average Cost of System } (1) = 4.5 \ > \ \text{Average Cost of System } (2) = 1.567$$

درشرایطی که تقاضا کم هست. اقتصادی

• تذکر: اگر نرخ ورود قطعات ۲ عدد در ساعت شود سیستم اول اقتصادی‌تر خواهد بود.

مثال: سیستم تولیدی زیر را در نظر بگیرید که قطعات خام به تعداد لازم در آن وجود دارد و لیکن تنها N فیکسچر موجود است انبار کارگاه نیز تنها ظرفیت پذیرش $N-1$ فیکسچر را دارد (قطعات نصب شده در فیکسچر). بعد از اتمام عملیات قطعه از فیکسچر باز شده و فیکسچر مورد استفاده مجدد قرار می‌گیرد.

resource هستند!



در اینجا $\mu=\lambda$ برابر است چون فیکسچرها مشتری است.

با فرض متوسط زمان سرویس $1/\mu$ و بدون زمان سوارکردن و بازکردن قطعه از روی فیکسچر، نرخ ورود قطعات نیز μ خواهد بود. چون همواره N قطعه در سیستم است با استفاده از قانون لیتل میزان انتظار (تاخیر) در سیستم بدست می‌آید: $W=\dfrac{N}{\mu}$.

$L=W\lambda$
$N=W\mu$

یادآوری: تو فرمول لیتل μ، نقش λ رو بازی می‌کنه. ورود یا تقاضا همون سرویس هست پس نرخ سرویس نقش λ رو داره.

مثال: کتابخانه‌ای عمومی که فقط یک کتابدار دارد را درنظر بگیرید. اعضای کتابخانه طبق فرآیند پواسون میانگین ۱۰ نفر در ساعت وارد می‌شوند. مدت زمانی که طول می‌کشد تا این کتابدار به تقاضای یک عضو رسیدگی کند متغیری تصادفی با میانگین ۵ دقیقه است.

الف) چند درصد اوقات این کتابدار بیکار است؟

ب) احتمال این‌که ۳ نفر منتظر باشند تا کتابدار به تقاضای آنها رسیدگی کند چقدر است؟

ج) به‌طور متوسط یک مشتری چه مدت منتظر می‌ماند تا کتابدار به تقاضای او رسیدگی کند؟

د) احتمال این‌که یک مشتری اصلاً منتظر نماند چقدر است؟

ه) احتمال آن‌که حداقل یک ساعت منتظر بماند چقدر است؟

ی) احتمال آن‌که تعداد اعضای کتابخانه که منتظرند تا نوبت به آن‌ها برسد بیش از ۵ نفر باشد چقدر است؟

$$\lambda = 10 \qquad \mu = 12 \qquad \rightarrow \qquad \rho = \frac{5}{6}$$

الف (a) $\quad P_0 = 1 - \rho = \frac{1}{6}$

ب (b) $\quad P_4 = (1-\rho) \times \rho^4 = 0.08$

ج (c) $\quad W_q = \frac{10}{12(2)} = 25 \quad Minute$

د (d) $\quad P(T_q = 0) = P_0 = \frac{1}{6}$

ه (e) $\quad P(T_q > 1) = \frac{5}{6} e^{-12\left(\frac{1}{6}\right)} = 0.11$

ی (f)

P (طول صف $> n$) = P ($n+۲$ نفر در سیستم باشند) $= \sum_{i=n+2}^{\infty} P_i = \sum_{i=n+2}^{\infty} \rho^i (1-\rho) = \rho^{n+2}$

P (طول صف $>$ ۵) $= \rho^7 = (5/6)^7$

باید n=۷ بررسی شود چون ۵ نفر در صف هستند و یک نفر در سرویس می‌شه ۶، پس از ۷ شروع می‌کنیم.

ن.
تلفت ۱ به
به ما هم تلفت بالا

در مدل $M/M/1$، به ازای تمام i ها نرخ ورود و خروج به ترتیب $\lambda_i = \lambda$ و $\mu_i = \mu$ می‌باشد. با این فرض به معادلات قبلی می‌رسیم. برای نمایش قدرت معادلات به دست آمده، فرض کنید $\lambda_n = \lambda$ و $\mu_n = n\mu$ باشد، می‌خواهیم P_0 و P_n را حساب کنیم:

$$p_n = p_0 \prod_{i=1}^{n} \left(\frac{\lambda}{i\mu}\right) \rightarrow p_n = p_0 \frac{\lambda^n}{\mu^n n!} = p_0 \frac{\left(\lambda/\mu\right)^n}{n!}$$

- تذکر: در این حالت سری مورد نظر ما به $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n}{n!}$ تبدیل می‌شود.

از طرفی به ازای تمامی مقادیر محدود $\frac{\lambda}{\mu}$ داریم:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\lambda/\mu)^n}{n!} = e^{\lambda/\mu} - 1$$

$$p_0 = \frac{1}{1+e^{(\lambda/\mu)}-1} = e^{-\lambda/\mu} \rightarrow p_0 = \frac{e^{-\lambda/\mu}(\lambda/\mu)}{n!} = \frac{e^{-\rho}\rho^n}{n!}$$

- تذکر: تنها شرط $\rho \neq \infty$ بودن است و رابطه P_n یک توزیع پواسون با پارامتر $\frac{\lambda}{\mu}$ است. بدین طریق می‌توان مدل‌های بیشتری از صف بسازیم.

از این جا رفتم جلسه دهم صفحه ۸

تلفن!

در ادامه سیستم $M/M/1$، فرآیند $\{N(t);t\geq 0\}$ را در نظر بگیرید. این فرآیند تشکیل یک CTMC می‌دهد که حالت خاص فرآیند تولد و مرگ با λ_k ، μ_k است. معادلات پیشرو و پسرو به صورت زیر است:

$$\begin{cases} \dfrac{dp_n(t)}{dt} = -(\lambda_n+\mu_n)\,p_n(t)+\mu_{n+1}p_{n+1}(t)+\lambda_{n-1}p_{n-1}(t) \\ \dfrac{dp_0(t)}{dt} = -\lambda_0 p_0(t)+\mu_1 p_1(t) \end{cases}$$

در حالت پایدار خواهیم داشت:

$$p_n(t)\to p_n$$

$$\frac{dp_0(t)}{dt}=0$$

$$t\to\infty$$

بنابراین می‌توان نوشت:

$$\to\begin{cases} p_{n+1}=\dfrac{\lambda_n+\mu_n}{\mu_{n+1}}p_n-\dfrac{\lambda_{n-1}}{\mu_{n+1}}p_{n-1} \\ p_1=\dfrac{\lambda_0}{\mu_0}p_0 \end{cases}$$

همچنین با جایگذاری‌های متوالی خواهیم داشت:

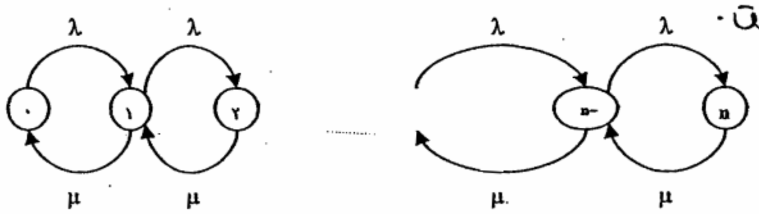
$$\to\begin{cases} p_0=\dfrac{1}{\left[1+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\prod\limits_{i=1}^{n}\dfrac{\lambda_{i-1}}{\mu_i}\right]} \\ p_n=\dfrac{\lambda_0\lambda_1\lambda_2\ldots\lambda_{n-1}}{\mu_1\mu_2\ldots\mu_n}p_0=p_0\prod\limits_{i=1}^{n}\dfrac{\lambda_{i-1}}{\mu_i} \end{cases}$$

- تذکر: شرط وجود معادلات حالت پایدار تقارب سری $\sum\prod\limits_{i=1}^{n}\frac{\lambda_{i-1}}{\mu_i}$ است.

۵. ظرفیت سیستم محدود باشد (صف‌های دارای بریدگی[1]) $M/M/1/K$

این سیستم زمانی به‌کار می‌رود که ظرفیت سیستم محدود باشد یا صف دارای بریدگی باشد. با توجه به شکل زیر، K نقطه بریدگی است (یعنی حداکثر تعداد K نفر مجاز به ورود به سیستم هستند).

n حداکثر k است.



بنابراین $n+1$ حالت وجود دارد که در ذیل نشان داده شده است.

$$\begin{cases} \lambda_j = \lambda : j = 0,1,2,\ldots,N-1 \\ \lambda_j = 0 : j \ge k \end{cases}$$

اگر k نفر در سیستم باشند، جلوی ورود را می‌گیریم.

تا وقتی $k-1$ نفر در سیستم هستند ($n=k-1$)، معادلات حالت $M/M/1/\infty$ صادق است. در حالت $n=k$ احتمال این‌که یک نفر وارد شود، صفر است.

$$P_k(t+\Delta t) = P_k(t)[1-\mu\Delta t] + P_{k-1}(t)[\lambda\Delta t][1-\mu\Delta t]$$

$$\Rightarrow P_k = \frac{\lambda}{\mu} P_{k-1}$$

در ادامه خواهیم داشت:

در این حالت‌ها به غیر از حالت اول، حالت آخر هم (به دلیل برش) فرق می‌کند.

$$\begin{cases} P_1 = \dfrac{\lambda}{\mu} P_0 \\ P_{n+1} = \dfrac{\lambda+\mu}{\mu} P_n - \dfrac{\lambda}{\mu} P_{n-1} & : 1 \le n \le k-1 \\ P_k = \dfrac{\lambda}{\mu} P_{k-1} & : n = k \end{cases}$$

[1] Finite System Capacity Queues with Truncation

از مدل قبلی می دانیم که: $P_n=\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n P_0$ (برای $n\le k-1$)، بنابراین از رابطه P_k مشاهده می‌شود که: $P_n=\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n P_0$ به ازای $n=k$ نیز صادق است، به عبارتی داریم:

$$P_n=\rho^n P_0 \qquad n\le k$$

می‌توان نوشت:

$$\sum_{n=0}^{k}\rho^n P_0=1 \quad\Rightarrow\quad P_0=\frac{1}{\sum_{n=0}^{k}\rho^n}$$

$$\sum_{n=0}^{k}\rho^n=\frac{1-\rho^{k+1}}{1-\rho} \qquad (\rho\ne 1)$$

$$\sum_{n=0}^{k}\rho^n=k+1 \qquad (\rho=1)$$

قبلاً می‌گفتیم $\rho<1$ ولی الان این شرط را نداریم.

با توجه به فرمول‌های فوق داریم:

$$\Rightarrow P_n=\begin{cases}\dfrac{\rho^n}{k+1} & if \quad \rho=1\\[2mm] \dfrac{\rho^n(1-\rho)}{1-\rho^{k-1}} & if \quad \rho\ne 1\end{cases} \qquad \Rightarrow\begin{cases}\dfrac{1-\rho}{1-\rho^{k+1}} & \rho\ne 1\\[2mm] \dfrac{1}{1+k} & \rho=1\end{cases}$$

۶. مقیاسات کارایی در حالت $M/M/1/K$

برای محاسبه طول صف در این حالت از فرمول ذیل استفاده می‌شود:

$$L=\sum_{n=0}^{k}nP_n=\begin{cases}\sum_{n=0}^{k}n\dfrac{\rho^n}{k+1}=\dfrac{1}{k+1}\sum_{n=0}^{k}n=\dfrac{k}{2} & if \quad \rho=1\\[2mm] \sum_{n=0}^{k}n\rho^n P_0=P_0\rho\sum_{n=0}^{k}nP^{n-1}=P_0\rho\dfrac{d}{d\rho}\sum_{n=0}^{k}\rho^n=\dfrac{\rho[1-(k+1)\rho^k+k\rho]}{(1-\rho^{k+1})(1-\rho)} & if\ \rho\ne 1\end{cases}$$

- تذکر: $L_q=L-(1-P_0)=L-\dfrac{\rho(1-\rho^k)}{1-\rho^{k+1}}$ برای تمام صف‌های تک‌کاناله صادق است.

برای محاسبه میانگین زمان انتظار باید میانگین نرخ مشتریانی که عملا وارد سیستم شده‌اند[۲] ((λ')) را بدست آوریم. بنابراین داریم:

$$\lambda' = \lambda(1-P_k)$$

در این حالت تمامی روابط که براساس فرمول لیتل بدست آوردیم با λ' نیز صدق می‌کند.

$$w = \frac{L}{\lambda'}$$

$$w = w_q + \frac{1}{\lambda} \quad , \quad w_q = \frac{L_q}{\lambda'}$$

$$w = \frac{1-\rho^k - k\rho^k(1-\rho)}{\mu(1-\rho)(1-\rho^k)}$$

$$w_q = \frac{\rho[1-\rho^k - k\rho^{k-1}(1-\rho)}{\mu(1-\rho)(1-\rho^k)}$$

مثال آرایشگاه: فرض کنید مشتریان وقتی صندلی خالی نباشد، سیستم را ترک می‌کنند. در این حالت میانگین اندازه سیستم، میانگین طول صف و متوسط زمان انتظار برای سرویس و متوسط زمان صرف شده در سیستم برای آن‌دسته از مشتریانی که وارد آرایشگاه می‌شوند را محاسبه کنید:

$$(\text{حالت قبلی})\ L = \frac{\frac{5}{6}\left[1-6\left(\frac{5}{6}\right)^5 + 5\left(\frac{5}{6}\right)^6\right]}{\left[\frac{1}{6}\right]*\left[1-\left(\frac{5}{6}\right)^6\right]} = 1.97 \qquad < 5$$

$$L_q = L-(1-P_0) = 1.97-(1-P_0) = 1.97 - \frac{\frac{5}{6}\left[1-\left(\frac{5}{6}\right)^5\right]}{1-\left(\frac{5}{6}\right)^6} = 1.22 \qquad < 4.17$$

برای محاسبه W از $L = \lambda' W$ استفاده می شود.

$$\lambda' = \lambda(1-P_k)$$

---

۲ Effective Arrival Rate

$$\text{در ساعت } k=5 \quad \Rightarrow \quad P_5=\frac{\left(\frac{5}{6}\right)^5\left(1-\left(\frac{5}{6}\right)\right)}{1-\left(\frac{5}{6}\right)^6}=0.1 \quad \Rightarrow \quad \lambda'=5(1-0.1)=4.5$$

$$W=\frac{L}{\lambda'}=\frac{1.97}{4.5}=0.438 \qquad \text{۲۶/۳ دقیقه}$$

اگر بخواهیم بدانیم به‌طور متوسط چند نفر از مشتریان از دست می‌روند، اول باید احتمال ۴ نفر مشتری در صف (یا ۵ نفر در سیستم) را هنگام ورود به‌دست آوریم. ضرب این احتمال در λ متوسط مشتریانی را می‌دهد که وارد آرایشگاه پر می‌شوند.

$\lambda P_5=5(0.1)=0.5$ مشتری در ساعت (نفر در ساعت)

$P_5 \xrightarrow{\lambda} P_6$

بنابراین ۱ مشتری در هر ۲ ساعت از دست می رود.

مثال: با مدل‌سازی یک مرکز ماشین کاری توسط $M/M/1/N$ (پارامترهای λ و μ) می‌توان نرخ سرویسی که حداکثر سود را ایجاد می‌کند محاسبه کرد. اگر C_μ هزینه عملیاتی شدن سیستم با نرخ μ باشد و q سود حاصل از هر قطعه باشد، داریم:

$$\text{نرخ تولید مرکز ماشین کاری} = \mu(1-P_0)=\frac{\rho(1-\rho^N)}{1-\rho^{N+1}}\mu=\frac{\lambda\mu(\mu^N-\lambda^N)}{\mu^{N+1}-\lambda^{N+1}}$$

$$\text{سود حاصل از تولید در واحد زمان (واحد زمان } \mu\text{)} \quad P=\frac{\lambda\mu(\mu^N-\lambda^N)}{\mu^{N+1}-\lambda^{N+1}}q-C_\mu$$

- تذکر: با مشتق‌گیری از رابطه P نسبت به μ، مقدار بهینه بدست می‌آید.

۱. سرویس وابسته به حالت[1]

در این نوع سرویس‌دهی، میانگین سرویس‌دهی به تعداد افراد در سیستم (حالت سیستم) بستگی دارد. مدلی که در نظر می‌گیریم دارای دو میانگین نرخ (کند و سریع) است. به عنوان مثال تا وقتی‌که K نفر در سیستم وجود دارند، سیستم با نرخ کند کار می‌کند و پس از این نقطه سیستم به نرخ سریعش منتقل می‌شود (نرخ ورودی براساس توزیع پواسون= λ).

زمان سرویس + زمان در صف = زمانی که تو sys هستیم

$$\mu_n = \begin{cases} \mu_1 & 0 \le n < k \\ \mu_2 & n \ge k \end{cases}$$

$W = W_q + \frac{1}{\mu}$

L = زمان ورود × تعداد افراد در sys

$W = L \times \frac{1}{\lambda}$

$$P_n = \prod_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i - 1}{\mu_i} P_i \qquad P_n = \begin{cases} (\lambda/\mu_1)^n P_0 & 0 \le n < k \\ \dfrac{\lambda^n}{\mu_1^{k-1}\mu_2^{n-k+1}} & n \ge k \end{cases}$$

$$P_0 = \left[\sum_{n=0}^{k-1}\left(\frac{\lambda}{\mu_1}\right)^n + \sum_{n=k}^{\infty}\frac{\lambda^n}{\mu_1^{k-1}\mu^{n-k+1}}\right]^{-1} \qquad \boxed{\frac{\lambda}{\mu_1} = \rho_1} \quad \boxed{\frac{\lambda}{\mu_2} = \frac{\lambda}{\mu} = \rho}$$

$$\rightarrow P_0 = \left[\frac{1-\rho_1^k}{1-\rho_1} + \frac{\rho\rho_1^{k-1}}{1-\rho}\right]^{-1} \qquad \rho < 1$$

$$L = \sum_{n=0}^{\infty} nP_n = P_0\left[\frac{\rho_0[1+(k-1)\rho_1^k - K\rho_1^{k-1}]}{(1-\rho_1)^2} + \frac{\rho\rho_1^{k-1}[k-(k-1)\rho]}{(1-\rho)^2}\right]$$

برای تمام سیستم‌های تک کانال صادق است

$$L_q = L - (1 - P_0) \qquad \boxed{W = L/\lambda} \quad W_q = \frac{lq}{\lambda}$$

- تذکر: فرمول $W = W_q + 1/\mu$ در این حالت صادق نیست. زیرا μ بستگی به نقطه انتقال حالت سیستم دارد بنابراین براساس فرمول لیتل و فرمول L_q می‌توان نوشت: $W = W_q + \frac{1-P_0}{\lambda}$.

$\rho = 1 - P_0$

همچنین داریم:

$\rho = \frac{\lambda}{\mu} \rightarrow \mu = \frac{\lambda}{\rho}$

$$\boxed{\mu = \frac{\lambda}{1-P_0} \quad \text{متوسط نرخ سرویس}}$$

$1 - P_0$ یا $1 - \rho$

[1] State-Dependent service

مثال: یک گاراژ شستشوی اتومبیل در روز شنبه مشتریان را براساس FIFO سرویس می‌دهد. ماشین شستشو در دو سرعت کار می‌کند در سرعت پایین به طور متوسط ۴۰ دقیقه و در سرعت بالا به طور متوسط ۲۰ دقیقه وقت لازم است. به محض این‌که انتقال سرعت صورت می‌گیرد دوباره توزیع نمایی فرض می‌شود. مشتریان بر طبق فرآیند پواسون با متوسط زمان مابین ورودی‌های متوالی ۳۰ دقیقه وارد می‌شوند. دو سیاست زیر مد نظر مدیران گاراژ است:

(۱) انتقال به سرعت بالا اگر هر تعداد مشتری در حال انتظار وجود داشته باشد (دو نفر یا بیشتر در سیستم باشند).

(۲) انتقال به سرعت بالا تنها موقعی که بیشتر از یک مشتری در حال انتظار باشند (سه نفر بیشتر در سیستم باشند). اگر در هر لحظه بتوان سرعت را تغییر داد (حتی اگر در حال کار باشد) متوسط زمان انتظار در تحت دو سیاست چه مقدار است؟

حل)

$$\rho_1=\frac{\lambda}{\mu_\circ}=\frac{1/30}{1/40}=\frac{4}{3}\qquad \rho=\frac{\lambda}{\mu}=\frac{1/30}{1/20}=\frac{2}{3}<1$$

$$K=2\qquad P_\circ=\left[\frac{1-(4/3)^2}{1-4/3}+\frac{(2/3)(4/3)}{1-(2/3)}\right]^{-1}=1/5=0.2$$

$$L=0.2\left[\frac{4/3[1+(4/3)^2-2(4/3)]}{(-1/3)^2}+\frac{(2/3)(4/3)[2-(2/3)^2]}{(1/3)^2}\right]=2.4$$

$$W=\frac{L}{\lambda}=\frac{2.4}{1/30}=72$$

$$K=3\qquad P_\circ=\left[\frac{1-(4/3)^3}{1-4/3}+\frac{2/3(4/3)^2}{1-2/3}\right]^{-1}=0.13\qquad L=2.96\rightarrow W=89$$

$$\begin{array}{r}89\\-72\\\hline 17\end{array}$$

مشاهده می‌شود انتقال به سرعت بالاتر در $K=3$ تغییر زیادی در زمان انتظار نمی‌دهد (۱۷ دقیقه)، در حالی‌که سرعت بالاتر هزینه بیشتری دارد. اگر هر ساعت کار در سرعت پائین ۵ تومان هزینه و در سرعت بالا ۸ تومان هزینه داشته باشد , ارزش انتظاری هزینه با انتقال سرعت در K خواهد بود:

$$C(k)=5\sum_{n=1}^{k-1}P_n+8\sum_{n=k}^{\infty}P_n \to C(k)=5\sum_{n=1}^{k-1}\rho_1^n P_\circ+8(\sum_{n=0}^{\infty}P_n-\sum_{n=0}^{k-1}P_n)$$

$$C(2)=5(\rho_1\times P_\circ)+8(1-\rho_1 P_\circ+\rho_1 P_\circ)=5(4/3)(0.2)+8\times[1-0.2-4/3(0.2)]$$

$$C(3)=5(\rho_1 P_\circ+\rho_1^2 P_\circ)+8[1-(P_\circ+\rho_1 P_\circ+\rho_1^2 P_\circ)]=5(0.13)[4/3+(4/3)^2]$$

$$=1-(0.13)(1+4/3-(4/3)^2]=5.72$$

۲. سیستم $M/M/1$ با قرارداد جنبی ساخت[۲] ـ کشتیبه ۱۶ اردیبهشت

اغلب وقتی بار کاری زیاد می‌شود، فرآیند سرویس‌دهی برای بخشی از مشتریان را به بیرون از سیستم منتقل می‌کنند. استفاده از قراردادهای جنبی ساخت و قبول نکردن تعدادی از مشتریان به میزان بار کاری (مدت زمانی که یک قطعه از سیستم عبور می کند و یا تعداد قطعات و غیره) بستگی دارد.

مثال: فرض کنید دو نوع قطعه ۱ و ۲ وارد یک سیستم تولیدی تک‌ماشین می‌شوند. نرخ ورود قطعات λ و بر اساس توزیع پواسون است. متوسط زمان سرویس هر کدام از قطعات $\frac{1}{\mu}$ است (توزیع نمایی). α احتمال آن است که یک قطعه ورودی از نوع ۱ باشد. قطعات نوع ۱ همواره پذیرفته می‌شوند و لیکن بسته به تعداد کل قطعات سیستم، قطعات نوع دوم ممکن است رد شوند.
ظرفیت سیستم N است.
اگر تعداد کل قطعات سیستم N یا بیشتر شود، قطعات نوع دوم را نمی‌پذیریم. قطعات پذیرفته شده به ترتیب FIFO پردازش می‌شوند.

سیستم فوق یک فرآیند مارکوفی است. حالت سیستم کل قطعات داخل سیستم می‌باشد و چون زمان فرآیند هر دو نوع قطعه یکسان است، نوع کلاس مهم نخواهد بود. همچنین اگر P_k توزیع تعادل حالت k ام باشد (k قطعه در سیستم باشند)، معادله تعادل کلی برای مجموعه حالات $\{0,1,...,k\}$ خواهد بود:

هر دو نوع را گرفته چون بستگی دارد که N را نسبت به کدام کار (دومی یا قبلی) بسنجیم.

$$\lambda P_k=\mu P_{k+1} \qquad 0\le k\le N$$

[۲] Sub Contracting

$$\alpha\lambda P_k = \mu P_{k+1} \qquad k \ge N$$

با تعریف $\rho = \dfrac{\lambda}{\mu}$ خواهیم داشت:

$$\boxed{\begin{array}{ll} P_k = \rho^k P_0 & 0 \le k \le N \\ P_{N+k} = \rho^N (\alpha\rho)^k P_0 & k \ge 0 \end{array}}$$

با کمک معادله نرمال‌سازی کردن احتمالات $\sum_{k=0}^{\infty} P_k = 1$ داریم:

$$\frac{1}{P_0} = \sum_{k=0}^{N-1} \rho^N + \frac{\rho^N}{1-\alpha\rho} = \frac{1-\rho^N}{1-\rho} + \frac{\rho^N}{1-\alpha\rho}$$

- تذکر: یکی از مهم‌ترین معیارهای کارایی این نوع سیستم‌های تولیدی، P_{rej} یا درصدی از قطعات نوع دوم است که وارد سیستم نمی‌شوند. $E(S_1)$ و $E(S_2)$ نیز میانگین زمان اقامت کارهای دو نوع قطعه می‌باشند.

← میانگین اقامت قطعات ۱ و ۲

با استفاده از قانون PASTA خواهیم داشت:

احتمال حالاتی که هنوز به N نرسیده ←

$$(*) \quad P_{rej} = \sum_{k=0}^{\infty} P_{N+k} = \frac{P_0 \rho^N}{1-\alpha\rho}$$

تعداد افرادی که در سیستم هستند

$$E(S_2) = P_0 \sum_{k=0}^{N-1} \rho^k (k+1) \frac{1}{\mu} = P_0 \frac{1-\rho^{N+1} - (N+1)\rho^N (1-\rho)}{(1-\rho)^2} \frac{1}{\mu}$$

خودش که تازه رسیده

چون k از صفر شروع شده پس k+N+1 می‌نویسیم.

$$E(S_1) = P_0 \sum_{k=0}^{N-1} \rho^k (k+1) \frac{1}{\mu} + P_0 \sum_{k=0}^{\infty} (\alpha\rho)^k \rho^N (k+N+1) \frac{1}{\mu}$$

تا وقتی که به N نرسیده — از N به بعد

$$= P_0 \left(\frac{1-\rho^{N+1} - (N+1)\rho^N (1-\rho)}{(1-\rho)^2} + \frac{\rho^N N}{1-\alpha\rho} + \frac{\rho^N}{(1-\alpha\rho)^2} \right) \frac{1}{\mu}$$

را این صفحه رو ملاحظه نه!

- تذکر: توجه داشته باشید که میانگین زمان اقامت یک کار دلخواه از نوع ۲ با میانگین زمان اقامت یک کار نوع ۲ که وارد سیستم شده است فرق می‌کند؛ دومی میانگین شرطی است :($E(S_2 | \text{accepted})$)

زمان اقامت S_2

$$E(S_2) = P_{rej} \times 0 + (1 - P_{rej}) \times E(S_2 | \text{accepted})$$

همچنین کاری که وارد سیستم می‌گردد، دارای توزیع ارلنگ با پارامترهای $k+1$ و μ خواهد بود اگر در هنگام ورود k مشتری در سیستم بوده باشند.

- نکته ۱: اگر سیستمی داشته باشیم که چنانچه تعداد کارهای سیستم از N بیشتر گردد، سرعت ماشین از μ به $\mu(1+\alpha)$ افزایش یابد، و همچنین اگر تعداد کارهای سیستم از N کمتر باشد، به μ برگردد، فرآیندمارکوف حاصل شبیه قرارداد جنبی است.

تا آخر پایان

- نکته ۲: در مثال فوق نرخ انتقال از حالت i به خود i بستگی دارد. نرخ ورود به حالت i به ازاء $i \le N$ برابر λ است و اگر $i \ge N$ باشد، این نرخ $\alpha\lambda$ است. مدل حاصل یک حالت خاص از فرآیند تولد- مرگ است که در آن نرخ رفتن از حالت i به $i+1$، λ_i و رفتن از حالت i به $i-1$، μ_i است. می توان مشاهده کرد که برای این سیستم احتمالات تعادل به صورت ذیل خواهند بود:

$$P_i = \frac{\rho_i}{\sum_{j=0}^{\infty} \rho_j} \quad i \ge 0$$

که در فرمول بالا $\rho_0 = 1$ است و نیز داریم:

$$\rho_i = \frac{\lambda_0 \lambda_1 \ldots \lambda_{i-1}}{\mu_1 \mu_2 \ldots \mu_i} \quad i \ge 1$$

✓ **۳. سیستم $M/M/1$ با اولویت‌بندی بین کارها** نرخ‌های ورود این‌ها متفاوت است.

فرض کنید دو نوع ۱ و ۲ از کارها وجود دارند که به ترتیب با نرخهای λ_1 و λ_2 بر اساس فرآیند پواسون وارد یک سیستم می‌شوند. توزیع زمان فرآیند همه قطعات نمایی با میانگین $\frac{1}{\mu}$ است و

فرض می‌کنیم که نرخ اشتغال ناشی از کار نوع iام به صورت ذیل باشد:

کارهای با اولویت پایین‌تر رو قطع می‌کنیم، کارهای با اولویت بالاتر رو می‌داریم.

فرض اولیه: $\rho_1+\rho_2<1\,;\quad \rho_i=\frac{\lambda_i}{\mu}$

همچنین فرض می‌کنیم کارهای نوع ۱ نسبت به نوع ۲ دارای تقدم می‌باشند. دو حالت را در نظر می گیریم:

وقتی بریدگی داریم سوال این است که در هنگام از سرگیری از ادامه‌ی آن کار قبلی است یا خیر. این مسئله خاص مورد نظر داره

- **حالت ۱:** تقدم با بریدگی و از سرگیری مجدد کار قطع شده[۳]: Preemptive - Resume

کار ۱ تقدم مطلق بر کار ۲ دارد، یعنی اگر در حال سرویس‌دهی به کار نوع ۲ باشیم و کاری از نوع ۱ وارد شود، بلافاصله کار نوع دوم قطع شده و مادامی که از کار نوع ۱ وجود دارد، کار دوم منتظر می‌ماند. هرگاه دیگر کار نوع ۱ نبود از نقطه‌ای که کار نوع دوم قطع شده بود مجدداً از سر گرفته می‌شود: از دید مشتری نوع ۱ سیستم $M/M/1$ است.

آنالیز میانگین انجام می‌دهیم با تکنیک بهره‌ی شاخص حساب می‌کنیم.

$L_i=$ تعداد قطعات نوع iام

$S_i=$ زمان اقامت[۴] نوع iام

Throughput time

چون برای قطعه نوع ۱، نوع ۲ وجود ندارد، داریم:

چون خاصیت تقابل $\rho_1+\rho_2<1$ وجود داره می‌شه از خاصیت‌های $M/M/1$ استفاده کرد.

$$E(L_1)=\frac{\rho_1}{1-\rho_1} \quad \text{و} \quad E(S_1)=\frac{\frac{1}{\mu}}{1-\rho_1}$$

- تذکر: کل تعداد کارهای سیستم بستگی به ترتیب پردازش شدن آن‌ها ندارد (چون بدون حافظه است)، در نتیجه فرض می کنیم کارهای نوع ۱ و ۲ پشت سر هم اجرا می‌شوند:

---

[۳] Preemptive-Resume
[۴] Throughput Time

$$E(L_1)+E(L_2)=\frac{\rho_1+\rho_2}{1-(\rho_1+\rho_2)}$$

با جایگزینی داریم:

شاخص کارایی میانگین افراد ۲ هست.

$$E(L_2)=\frac{\rho_1+\rho_2}{1-(\rho_1+\rho_2)}-\frac{\rho_1}{1-\rho_1}=\frac{\rho_2}{(1-\rho_1)(1-\rho_1-\rho_2)}$$

و با قانون لیتل داریم:

$$E(S_2)=\frac{E(L_2)}{\lambda_2}=\frac{\frac{1}{\mu}}{(1-\rho_1)(1-\rho_1-\rho_2)}$$

$\lambda=0.8$, $\mu=1$

مثال: اطلاعات زیر از یک سیستم صف در دست است: $\lambda_1=0.2$، $\lambda_2=0.6$ و $\mu=1$. اگر در این سیستم بدون تقدم و تأخر عمل کنیم داریم:

ρ کلی $=\rho_1+\rho_2=\frac{0/6}{1}+\frac{0/2}{1}=0/8$

$$E(s)=\frac{1}{1-0.8}=5$$

اگر کار نوع ۱ تقدم مطلق نسبت به کار نوع ۲ داشته باشد خواهیم داشت:

$$E(S_1)=\frac{1}{1-0.2}=1.25 \quad , \quad E(S_2)=\frac{1}{(1-0.2)(1-0.8)}=6.25$$

از ۲ نفر ما E شون بهتر نشده. $5>1.25$ در $6.25>5$

- **حالت ۲:** سیاست بدون بریدگی.

اگر کار نوع ۱ برتری تقریباً مطلق بر کار ۲ داشته باشد، یعنی این‌که در صورت مشاهده یک کار نوع ۲ در سرویس صبر کند تا آن به اتمام برسد، خواهیم داشت: پس زمان انتظارش در قسمت داره.

$$(*)\quad E(S_1)=E(L_1)\frac{1}{\mu}+\frac{1}{\mu}+\rho_2\frac{1}{\mu} \qquad (1)$$

تعداد افرادی که از نوع خودش هست و صبر می‌کنه

زمان خودش که باید تجربه سرویس

احتمال بودن نوع ۲

زمانی که نوع ۲ می‌خواهد زمان انتظار

ρ_2 احتمال است اگر در ۱۰۰ ضرب شود می‌شه درصد

در رابطه فوق مؤلفه سوم مربوط به زمان سرویس قطعه نوع دوم است که در حالت سرویس توسط

بالا فرم ρ_2 درصدی از اوقات یا احتمال؟

یک مشتری نوع اول دیده می‌شود. ρ_2 درصدی از اوقات است که سیستم به سرویس قطعه نوع دوم اختصاص می‌یابد (مطابق PASTA). حال با کمک قانون لیتل داریم:

$$E(L_1)=\lambda_1 E(S_1) \qquad (۲)$$

با قرار دادن رابطه (۲) در (۱) داریم:

$$E(S_1)=\frac{\left(\frac{1+\rho_2}{\mu}\right)}{1-\rho_1}, \quad E(L_1)=\frac{(1+\rho_2)\rho_1}{1-\rho_1}$$

با کمک رابطه $E(L_1)+E(L_2)=\dfrac{\rho_1+\rho_2}{1-\rho_1-\rho_2}$ خواهیم داشت:

$$E(L_2)=\frac{(1-\rho_1(1-\rho_1-\rho_2))\rho_2}{(1-\rho_1)(1-\rho_1-\rho_2)}$$

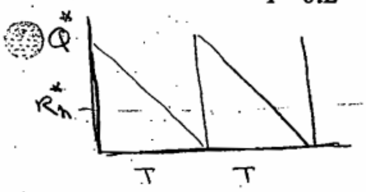
در ادامه با قانون لیتل داریم:

$$E(S_2)=\frac{(1-\rho_1(1-\rho_1-\rho_2))}{(1-\rho_1)(1-\rho_1-\rho_2)}$$

مثال: اگر داشته باشیم: $\lambda_1=0.2$، $\lambda_2=0.6$ و $\mu=1$. در نتیجه در این حالت می‌توان نوشت:

پس وضعیت کار با بدتر شد ← تقریبا ۲ برابر شده

$$E(S_1)=\frac{1+0.6}{1-0.2}=\overset{1.25}{2}, \quad E(S_2)=\frac{1-0.2(1-0.8)}{(1-0.2)(1-0.8)}=6$$



حالت ①

اول حالت ۲ رو می‌گیم بعد ترکیبشون.

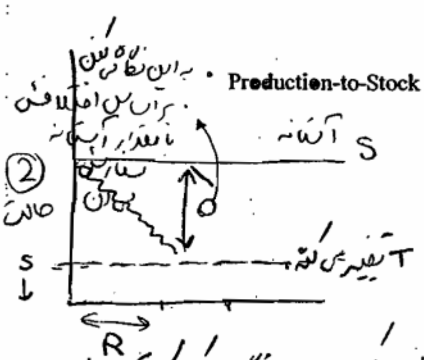
۴- یک سیستم $M/M/1$ تولید برای انبار[۵]

در سیستم‌های Make-to-Stock نسبت به Make-to-Order زمان تحویل کوتاه‌تری داریم و لیکن هزینه انبار بیشتری خواهیم داشت. μ نرخ تولید و λ نرخ تقاضا است $(\rho=\frac{\lambda}{\mu}<1)$. بر اساس سیاست base-stock مادامی‌که سطح موجودی ها به S نرسیده است، تولید می‌کنیم. فرض برآن

یعنی ظرفیت تولید از تقاضا بیشتر است.

اول حالت ۲ را در نظر می‌گیریم.

همه‌اش در حال تولیدیم؟



← دو روش داریم یکی در زمان‌های منظم هر چه قدر کم داریم سفارش می‌دیم. یک R هست

در روش دیگه، آن قدر می‌مونیم تا موجودی به یه حدی برسد بعد سفارش می‌دیم همیشه اندازه سفارش ثابت. برحسب مقدار موجودی

در واقعیت از ترکیب دو روش استفاده می‌کنیم.

سیستم سیاست (s,S) ← یک s کوچک تعریف می‌کنیم یعنی باید نگاه می‌کنیم که آیا سطح موجودی من از s بیشتره یا کمتره. اگر هنوز ندیدیم به s نرسیده سفارش نمی‌دیم. [illegible] این که پایین‌تر بریم.

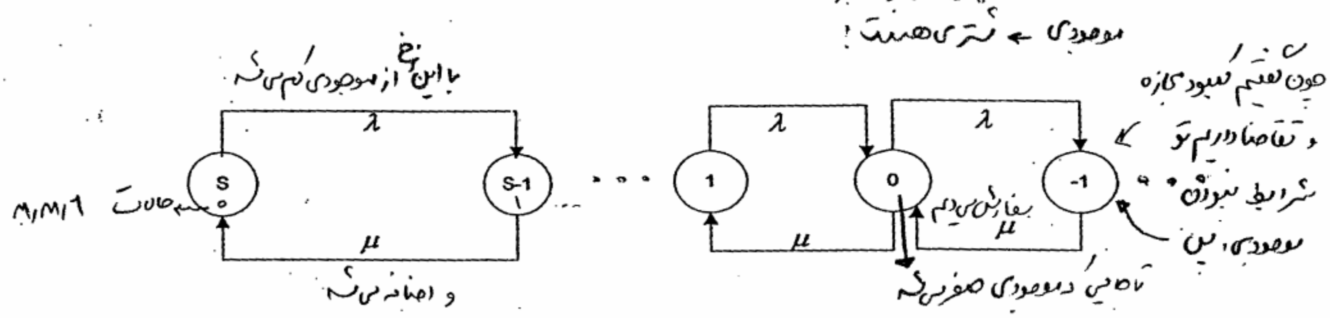
است در مواقع کمبود موجودی، سفارشات به‌طور کامل عقب افتاده می‌شود (یعنی با تأخیر تأمین می‌شود). دو نوع هزینه داریم:

مشتری بوده اما عرضه نبوده، نداشتیم — هزینه هم می‌دیم

h هزینه نگهداری واحد کالا در واحد زمان و b هزینه عقب افتادن یک واحد کالا در واحد زمان است. به‌دنبال یک S هستیم که حداقل هزینه میانگین در واحد زمان را ایجاد کند. حالت سیستم با تعداد اقلام موجودی منهای تعداد سفارشات عقب افتاده مشخص می‌شود. بنابراین مجموعه حالات ممکن $\{S, S-1, \dots, 1, 0, -1, \dots\}$ خواهند بود. دیاگرام جریان سیستم به صورت ذیل خواهد بود:

S^* که هزینه حداقل شود

منفی هم می‌تونه باشه چون کمبود داریم — ولی از S بیشتر نمی‌شه. موجودی ← مشتری هست!



P_n را احتمال تعادل قرار گرفتن سیستم در حالت n می نامیم. با توجه به تشابه سیستم فوق با $M/M/1$ بلافاصله داریم:

$P_n = (1-\rho)\rho^n$ احتمال حالت در M/M/1

$$P_n = (1-\rho)\rho^{S-n} \;;\quad n = S, S-1, S-2, \dots$$

با کمک این احتمالات توزیع تعداد قطعات در انبار و سفارشات عقب افتاده را می‌توانیم بدست می‌آوریم:

$\underbrace{\text{در انبار}}_{I}$ ، $\underbrace{\text{سفارشات عقب افتاده}}_{B}$

چون حالت سیستم محدود نیست $(-\infty, \dots, -2, -1, 0, 1, \dots)$

توزیع موجودی — منفی‌ها در واقع حالت‌هایی‌اند که کمبود داریم

$$P(I=0) = \sum_{n=0}^{\infty} P_{-n} = \rho^S = (1-\rho)\rho^S\sum_{n=0}^{\infty}\rho^n = (1-\rho)\rho^S\times\frac{1}{1-\rho} = \rho^S$$

$$P(I=n) = P_n = (1-\rho)\rho^{S-n} \;;\quad \cancel{n=1,2,\dots,S} \quad n=S, S-1, \dots, 1 \Rightarrow E[I] = S - \frac{\rho}{1-\rho}(1-\rho^S)$$

توزیع کمبود موجودی — چون حالت‌های منفی را شامل می‌شه و فقط با حالت I=n داریم

$$P(B=0) = \sum_{n=0}^{S} P_n = 1-\rho^{S+1}$$

$$E(B) = \frac{\rho^{S+1}}{1-\rho}, \quad TC = hE[I] + bE[B]$$

$$P(B=n) = P_{-n} = (1-\rho)\rho^{S+n} \;;\quad n = 1, 2, \dots, S, \dots$$

در نتیجه مقادیر میانگین به صورت زیر خواهند بود:

$$(4)\quad \sum_{n=0}^{S}(1-\rho)\rho^{S-n} = (1-\rho)\rho^S + (1-\rho)\rho^{S-1} + \dots + (1-\rho)\rho^1 + (1-\rho)\rho^0 = (1-\rho)\sum \rho^i = (1-\rho)\frac{1-\rho^{S+1}}{1-\rho} = 1-\rho^{S+1}$$

$$E(I)=S-\frac{\rho}{1-\rho}(1-\rho^{S})\ ,\quad E(B)=\frac{\rho^{S+1}}{1-\rho}$$

و همچنین میانگین هزینه در واحد زمان برابر است با:

$$E(C)=E(I)\times h+E(B)\times b$$

- تذکر: با شروع از $S=0$ و $S=1$ و غیره می‌توان حداقل مقدار $E(C)$ را به‌دست آورد (زیرا $E(C)$ محدب است).
- نکته: اگر فروش از دست رفته به جای فروش معوقه داشته باشیم، فضای حالت سیستم محدود به $\{S, S-1, \ldots, 0\}$ می‌شود.

۵. مدل‌های موجودی با سیاست (s, S)

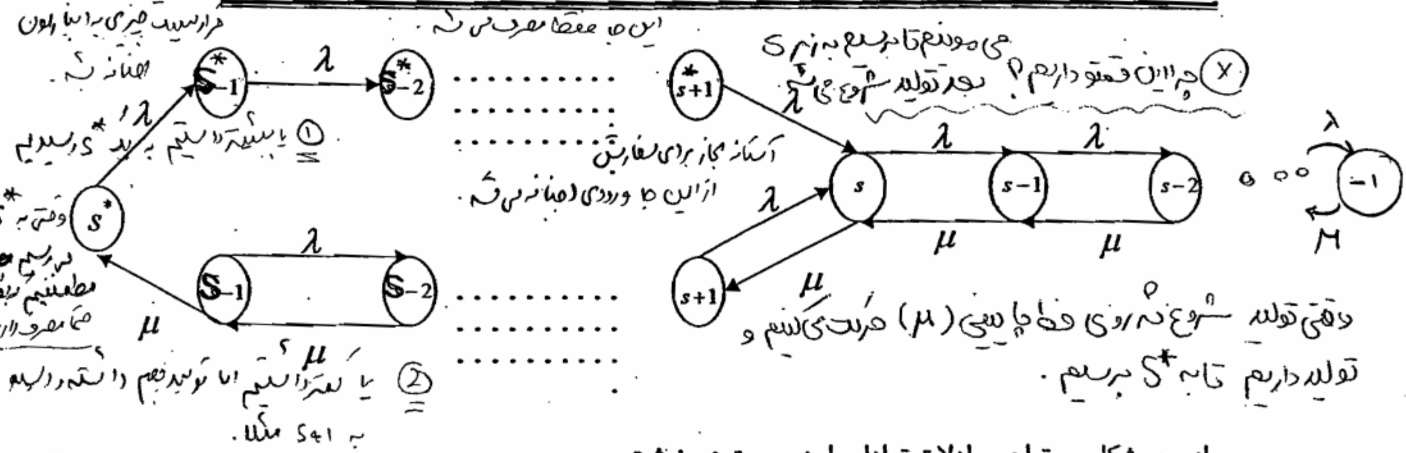
اغلب اگر محصول جدیدی تولید شود یک هزینه آماده سازی K نیز روی خواهد داد. در این مواقع سیاست base-stock معقول به نظر نمی‌رسد (چون انباشته‌های کوچک و هزینه زیاد دارد) بلکه از سیاست (s, S) استفاده می‌شود. به این معنی که اگر تعداد اقلام موجودی انبار به زیر s واحد رسید تولید آن شروع و تا زمانی‌که به سطح S برسد ادامه می‌یابد. توجه داشته باشید اگر $s=S-1$ باشد سیاست (s, S) مشابه سیاست قبل خواهد بود. مدل قبلی را داده، تعمیم می‌دهیم به حالت general.

این‌بار دیگر حالت‌های سیستم تعداد اقلام موجودی منهای تعداد سفارشات عقب افتاده می‌باشد. اما باید مشخص کنیم آیا تعداداقلام از s کمتر شده است یا خیر، تا بتوان تولید را آغاز کرد. اگر n قطعه در انبار وجود داشته باشد و ماشین در حال تولید باشد، سیستم را در حالت n گوئیم و اگر n قطعه در انبار باشد و دستگاه در حال کار نباشد سیستم را در حالت n^{*} گوئیم. کل حالات ممکن سیستم به صورت زیر خواهد بود:

پس که شرایطی که اجازه تولید داریم مشخص کنیم.

$$\{S-1, S-2, \ldots, 1, 0, -1, \ldots\} \cup \{S^{*}, \ldots, (S+1)^{*}\}$$

فقط اون حالتیه که تولید نداریم



از روی شکل می‌توان معادلات تعادل را به صورت زیر نوشت:

$$P_{n*} = D\,; \quad n = S,\dots,s+1$$

$$P_n = D\times \rho^{s-n}\sum_{j=1}^{S-s}\rho^j\,; \quad n = s,\ s-1,\dots$$

$$P_n = D\times \sum_{j=1}^{S-n}\rho^j\,; \quad n = S-1,\dots,\ s+1$$

- تذکر: D یک مقدار ثابت است و از معادله نرمال‌سازی کردن احتمالات بدست می‌آید. در ادامه داریم:

$$E(C) = \lambda P_{(S+1)*}K + \sum_{n=1}^{s}\rho_n nh + \sum_{n=s+1}^{S-1}(P_n + P_{n*})nh + P_{S*}Sh + \sum_{n=1}^{\infty}P_{-n}nh$$

در این حالت یافتن (s, S) که حداقل مقدار $E(C)$ را بدهد، ساده نمی‌باشد.

۶. صف‌های همراه با شکست ماشین آلات

در حالت کلاسیک تئوری صف، فرض بر آن است که سرویس دهندگان همیشه قادر به کار هستند. ولیکن در محیط تولیدی، تعمیرات دستگاه‌ها امری عادی بوده و بهتر است معیارهای کارایی تحت این شرایط بدست آیند. در این بخش یک سیستم $M/M/1$ را با فرض این‌که سرویس دهنده در معرض شکست و خرابی است در نظر می‌گیریم.

یک مرکز ساخت
λ نرخ ورود قطعات
M نرخ سرویس
f نرخ خرابی دستگاه
r نرخ تعمیر دستگاه

زمان‌ها نمایی و مستقل از هم هستند.

- **فرموله کردن مسئله:**

فرض کنید یک مرکز ساخت وجود دارد که مواد خام با نرخ λ وارد و با نرخ λ سرویس می‌شوند. دستگاه تولیدی بر اساس توزیع نمایی با نرخ f در معرض خرابی قرار دارد. زمان تعمیر نیز نمایی با پارامتر r فرض می‌شود. زمان‌های مابین ورود سرویس، زمان‌های شکست و زمان‌های تعمیر همگی مستقل از هم می‌باشند. فرضیات زیر در نظر گرفته شده است:

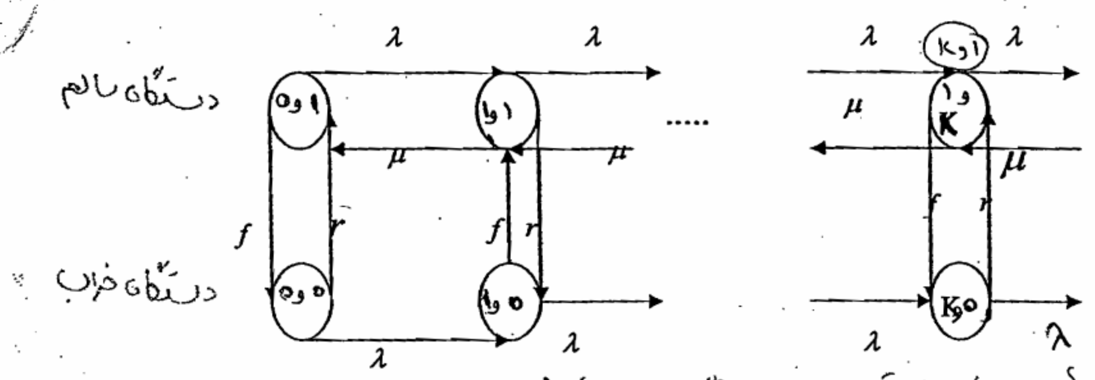
۱. هنگامیکه ماشین تحت تعمیر است هیچگونه شکستی روی نمی‌دهد.

۲. شکست ماشین‌آلات چه در هنگام بیکاری و چه در هنگام سرویس روی می‌دهد به محض وقوع شکست دستگاه متوقف و سرویس‌دهی به قطعه به دو صورت زیر پس از تعمیر دستگاه ادامه خواهد یافت:

- (Pre-emptive Resume) RRS: از همان نقطه‌ای که سرویس قطع شده بود ادامه می‌یابد.
- (Pre-emptive repeat) RRT: سرویس از ابتدا بر روی قطعه جدیدی آغاز می‌گردد.

- **آنالیز حالت پایدار:**

در شرایط بالا، فرض بر آن است که حالت PRS روی می‌دهد. فرض کنید پروسه احتمالی
تعداد مشتریان
$\{X(t),Y(t):t\geq 0\}$ نمایان‌گر حالت سیستم باشد که درآن $X(t)$ حالت سرویس‌دهنده و $Y(t)$
حالت سرویس دهنده 1 سالم ، 0 درحال تعمیر
تعداد مشتریان داخل سیستم در لحظه t باشند. $X(t)=1$ نمایان‌گر حالت آماده سرویس دادن و $X(t)=0$ نمایان‌گر حالت تحت تعمیر بودن دستگاه است. احتمال آن‌که سیستم در حالت $i=0,1$ و $j=0,1,2,...$ باشد را با $\pi(i,j)$ نشان می‌دهیم. شکل زیر دیاگرام حالات سیستم را نشان می‌دهد:



مثلاً مدل برنامه‌ریزی تولید با خرابی دستگاه همین می‌شه 2

معادلات تعادل سیستم عبارتند از:

برای گره‌های میانی →
$$(\lambda + i\mu + if + (1-i)r)\pi(i,k) =$$
$$\lambda\pi(i,k-1) + i\mu\pi(i,k+1) + ir\pi(1-i,k) + (1-i)f\pi(1-i,k)$$
$$i = 0,1 \quad k \geq 1$$

گره اول →
$$(\lambda + if + (1-i)r)\pi(i,0) =$$
$$i\mu\pi(i,1) + ir\pi(1-i,0) + (1-i)f\pi(1-i,0);\ i = 0,1 \quad K=0$$

با تعریف توابع مولد $G_i(Z)$ بصورت:

$$G_i(Z) = \sum_{i=0}^{\infty}\pi(i,j)Z^i\ ;\ \text{for } i = 0,1$$

$$\begin{cases}(1-\lambda(z-1)+r)G_0(z) - fG_1(z) = 0\\ -\lambda z(z+1) + \mu(z-1) + fzG_1(z) - rzG_0(z) = \mu(z-1)\pi(1,0)\end{cases}$$

دو طرف روابط تعادل را در Z^j ضرب وبرروی j جمع می‌بندیم:

$$[\lambda z(1-z) - i\mu(1-z) + ifz + |(1-i)rz]G_i(z)$$
$$= (1-i)fzG_{1-i}(z) + irzG_{1-i}(z) - (1-z)i\mu\pi(i,0)\ ]\ ;\ \text{for } i = 0,1$$

پس از ساده‌سازی برای $i = 0, 1$ داریم:

$$\begin{cases}(-\lambda(z-1)+r)G_0(z) - fG_1(z) = 0\\ [-\lambda z(z-1) + \mu(z-1) + fz]G_1(z) - rzG_0(z) = \mu(z-1)\Pi(1,0)\end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} G_0(Z) = \dfrac{f\mu\pi(1,0)}{\lambda(\lambda z-\mu)(z-1) - \lambda(f+r)z + r\mu} \\[2ex] G_1(Z) = \dfrac{[r-\lambda(z-1)]\mu\pi(1,0)}{\lambda(\lambda z-\mu)(z-1) - \lambda(f+r)z + r\mu}\end{cases}$$

در ادامه برای محاسبه $\pi(1,0)$ از رابطه $G_0(1)+G_1(1)=1$ استفاده می‌کنیم:

$$\pi(1,0)=\frac{r\mu-\lambda f(r+f)}{\mu(r+f)}$$

بنابراین تابع مولد $G(Z)=G_0(Z)+G_1(Z)$ براساس λ و μ و f و r قابل محاسبه است و مقادیر متوسط را می‌توان حساب نمود:

$$L=\frac{dG(Z)}{dZ}\bigg|_{z=1}=\frac{\lambda\left[(f+r)^2+\mu f\right]}{(f+r)\left[r(\mu-\lambda)-\lambda f\right]}$$

مقدار زمان انتظار (میانگین) در سیستم نیز از قانون لیتل بدست می‌آید:

$$W=\frac{L}{\lambda}=\frac{(f+r)^2+\mu f}{(f+r)\left[r(\mu-\lambda)-\lambda f\right]}$$

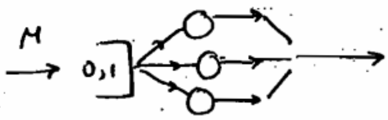
براساس این معادلات شرایط پایدار بودن سیستم قابل اقتباس است:

$$\boxed{\mu>\lambda(1+\frac{f}{r})}$$

صف های چندکاناله

$$\lambda_n=\lambda \qquad P_n=P_0\prod_{i=1}^{n}\frac{\lambda_{i-1}}{\mu_i}$$

$$\mu_n=\begin{cases} n\mu & 1\leq n<c \\ c\mu & n\geq c \end{cases}$$



۱. $M/M/C$ صف‌هایی که دارای کانال‌های موازی هستند[1]

به علت پواسون بودن توزیع ورودی‌ها و نمایی بودن سرویس‌دهی، با پروسه تولد- مرگ مواجهیم و که تمام مقادیر ممکن n و $\lambda_n=\lambda$ را شامل می‌شود و لذا می‌توانیم از فرمول $P_n=P_0\prod_{i=1}^{n}\frac{\lambda_{i-1}}{\lambda_i}$ استفاده کنیم. ولیکن قبل از آن باید μ_i را نیز مشخص نماییم. برای محاسبه میانگین نرخ سرویس‌دهی در این سیستم داریم:

- اگر بیش از c مشتری در سیستم باشد، تمام سرویس دهندگان مشغول‌اند و هر سرویس‌کننده با نرخ μ کار می‌کند. بنابراین میانگین نرخ خروجی $c\mu$ است.
- اگر تعداد افراد سیستم از c کمتر باشد ($n<c$)، در این صورت تنها n تا از c سرویس‌کننده مشغول‌اند و میانگین نرخ $n\mu$ است.

می‌شه گفت μ_n از ضرب min n, c در μ بدست می‌آید.

$$\mu_n=\begin{cases} n\mu & 1\le n<c \\ c\mu & n\ge c \end{cases}$$

بنابراین برای محاسبه P_n نیز دو حالت داریم:

$$P_n=\begin{cases} P_n=P_0\dfrac{\lambda^n}{n!\mu^n} & 1\le n<c \\ P_n=P_0\dfrac{\lambda^n}{c^{n-c}c!\mu^n} & n\ge c \end{cases} \qquad \begin{matrix} 1\le n<c \\ n\ge c \end{matrix}$$

← از عدد c به بعد ثابت fix هست.

همچنین برای محاسبه P_0 داریم:

$$\sum_{n=0}^{\infty}P_n=1$$

$$\Rightarrow P_0\left[\sum_{n=0}^{c-1}\frac{\lambda^n}{\mu^n n!}+\underbrace{\sum_{n=c}^{\infty}\frac{\lambda^n}{\mu^n c!c^{n-c}}}_{\sum \frac{r^n}{c!\,c^{n-c}}}\right]=1$$

در ادامه خواهیم داشت:

$$=\frac{r^c}{c!}\sum\frac{r^{n-c}}{c^{n-c}}$$

$$=\frac{r^c}{c!}\sum_{i=0}^{\infty}\rho^i$$

[1] Queues with Parallel channels

کل ظرفیت ما $c\mu$ هست. قبلا توی تک کاناله، μ بود.

$$\begin{cases} r=\dfrac{\lambda}{\mu} \\ \rho=\dfrac{r}{c}=\dfrac{\lambda}{c\mu} \\ \boxed{i=n-c} \end{cases}$$

$$P_0\left[\sum_{n=0}^{c-1}\frac{r^n}{n!}+\sum_{n=c}^{\infty}\frac{r^n}{c!c^{n-c}}\right]=1$$

$$\sum_{n=c}^{\infty}\frac{r^n}{c!c^{n-c}}=\frac{r^c}{c!}\sum_{i=c}^{\infty}\frac{r^{n-c}}{c^{n-c}}=\frac{r^c}{c!}\sum_{i=0}^{\infty}\rho^i$$

در نهایت با در نظر گرفتن شرط تقارب $\rho<1$ (یا $\lambda<C\mu$) داریم:

$$\frac{r^c}{c!}\sum_{i=0}^{\infty}\rho^i=\frac{r^c}{c!}\frac{1}{1-\rho}=\frac{r^c}{c!}\frac{1}{1-r/c}=\frac{r^c}{(c-1)!}\frac{1}{c-r}$$

شرط همگرایی $\boxed{\text{باشرط}\quad \rho<1}$

$$P_0=\left[\sum_{n=0}^{c-1}\frac{r^n}{n!}+\frac{cr^c}{c!(c-r)}\right]^{-1}$$ ← از اون بالا می‌رسیم

$\lambda<c\mu$

قطعاتی که تو سیستم اند یا تو صف اند یا سیستم ← n حالات قطعات توی سیستم هست.

۲. محاسبه مقیاس‌های کارایی

ابتدا L_q را بدست می آوریم که ساده تر از L بدست می‌آید:

← افرادی که صف اند n نفر تو سیستم باشند اونایی که تو صف.

$$L_q=\sum_{n=c}^{\infty}(n-c)P_n$$

$$=\sum_{n=c}^{\infty}(n-c)\frac{\lambda^n}{\mu^n c!c^{n-c}}P_0=\left[\frac{r^{c+1}/c}{c!(1-\frac{r}{c})^2}\right]P_0$$

$n\geq c$

پس از فرمول دومی استفاده می‌کنیم.

برای یافتن L دو راه داریم:

$$L=\sum_{n=0}^{\infty}nP_n=\sum_{n=0}^{c}nP_n+\sum_{n=c+1}^{\infty}nP_n$$

و با روش ساده‌تر براساس فرمول لیتل خواهیم داشت:

2 $W_q=\dfrac{L_q}{\lambda}$

3 $L=\lambda W$

4 $W=W_q+\dfrac{1}{\mu}$ مقدار کانال تاثیری ندارد.

$$L_q = w_q = \frac{L_q}{\lambda}$$

مجدداً نظم سیستم صف FIFO است (اولین ورودی اولین نفر ورودی به سرویس (نه خروج) است)

$$L = r + \frac{r^{c+1}/c}{c!(1-r/c)^2} P_0$$

در ضمن برای معیار زمان انتظار داریم:

در واقع T_q نمی‌تونه منفی بشه ولی چون پیوسته است و نمی‌تونیم متغیر پیوسته رو منفی صفر بذاریم این طوری می‌نویسیم.

$$W_q(0) = p_r[T_q \le 0] = \Pr[\text{تعداد افراد سیستم کمتر یا مساوی } C-1 \text{ نفر باشد}] = \sum_{n=0}^{c-1} p_n = P_0 \sum_{n=0}^{C-1} \frac{r^n}{n!} = \frac{1}{P_0} - \frac{Cr^c}{c!(c-r)}$$

$$= 1 - \frac{C(\lambda/\mu)C}{C!(c-\lambda/\mu)} p_0 \qquad \text{برای } t=0$$

$$W_q(t) = \sum_{n=c}^{\infty} p_r \; [\text{ورودی } n \text{ نفر را در سیستم مشاهده کند} \mid \text{زمان تکمیل سرویس } n-c+1 \text{ نفر} \le t] \quad P_n + w_q(0)$$

از n نفر $(n \ge c)$ c نفر در سرویس هستند و $n-c$ نفر در صف اول باید منتظر اتمام سرویس $n-c$ نفر جلوی خود و یک نفر در حال سرویس باشد. (براساس ارلنگ نوع $n-c+1$ در حال خدمت گیری در صف بدست می‌آید)

$$W_q(t) = \frac{(\lambda/\mu)^c (1-e^{-(\mu c-\lambda)t})}{(c-1)!(C-\lambda/\mu)} P_0 + W_q(0) \quad ; \quad t > 0$$

- تذکر: رابطه ذیل برای تمام معادلات $M/M/C$ معتبر است:

$$\left\{ W_q = \frac{(\lambda/\mu)^c \mu}{(c-1)!(c\mu-\lambda)^2} P_0 \right.$$

تعداد کانال = 3

✓ **مثال:** در یک کلینیک چشم پزشکی سه متخصص کار می‌کنند. یک آزمایش چشم به‌طور متوسط ۲۰ دقیقه طول می‌کشد. بیماران به‌طور میانگین ۶ نفر در ساعت وارد می‌شوند (بر طبق پروسهٔ پواسون). به‌طور متوسط چند نفر انتظار می‌کشند؟ متوسط زمانی که یک بیمار در کلینیک صرف

λ

می‌کند چقدر است؟ متوسط درصد زمانی که هریک از دکترها بیکار هستند (احتمال این‌که یک دکتر بیکار باشد) چقدر است؟ احتمال این‌که حداقل یک دکتر بیکار باشد چقدر است؟

حل: $\lambda = 6$ نفر/ساعت $\mu = 3$ نفر/ساعت

$c=3$ $\lambda = 6$ ساعت/نفر $\mu = 1$ نفر/۲۰دقیقه = ۳ نفر/ ساعت ← $r = \frac{\lambda}{\mu} = 2$

$$\rho = \frac{\lambda}{c\mu} = \frac{r}{c} = \frac{2}{3} < 1$$

$$\rightarrow P_0 = \left[1 + 2 + \frac{2^2}{2!} + \frac{3(2)^3}{3!(3-2)}\right]^{-1} = \frac{1}{9} \Rightarrow \begin{cases} L_q = \frac{8}{9} \\ W = \frac{13}{27} hr = 28\text{min.} \end{cases}$$

با فرض انتخاب تصادفی دکترها در هنگامی که بیش از یک دکتر بیکار است داریم:

ρ درصد اشتغال سیستم است، پس $1-\rho$ حالتی است که به بیکاری در سیستم پیش بیاید.

$$\text{Pr}\,\{\text{سرویس‌کننده بیکار باشد}\} = \left(\frac{3}{3}\right)P_0 + \left(\frac{2}{3}\right)P_1 + \left(\frac{1}{3}\right)P_2 = \frac{1}{3}$$

احتمال بیکاری اگر کسی در سیستم نباشد.

دو دکتر از سه دکتر وقتی یک نفر در سیستم است بیکارند. ← یک انتخاب به تصادفی هست، فرقی نمی‌کند کی باشه

بنابراین احتمال بیکاری $\frac{1}{3}$ است. یا به عبارتی یک دکتر، در یک سوم از اوقات خود، بیماری برای معاینه ندارد. برای احتمال فوق عبارت کلی $1-\rho = 1-\frac{\lambda}{\mu c}$ وجود دارد که برای مدلهای $M/M/C$ صادق است.

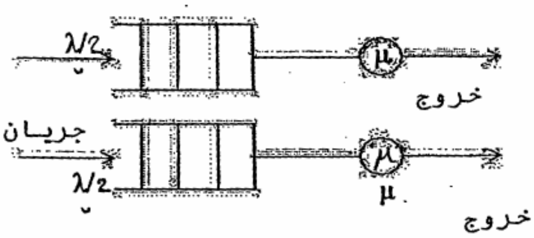
$$1 - \frac{6}{3\times 3} = \frac{1}{3}$$

- تذکر: احتمال این‌که حداقل یک سرویس‌دهنده بیکار باشد $1-\rho$ نبوده بلکه $\sum_{n=0}^{c-1} P_n$ است.

یعنی اگر کسی از بیرون بیاید تو سیستم ببیند از نظر او از اوقات سیستم رو خالی و بیکار می‌بیند

برای مثال فوق داریم: $P_0 + P_1 + P_2 = \frac{5}{9}$ یعنی متجاوز از نیمی از زمان، حداقل یکی از دکترها بیکار است. درحالیکه هر دکتر خاصی $\frac{1}{3}$ اوقات بیکار است.

مثال: سه شکل(a), (b), (c) را درنظر بگیرید. درشکل a دو سیستم صف مجزا و یکسان *M/M/۱* با پارامترهای μ و $\frac{\lambda}{2}$ داریم.

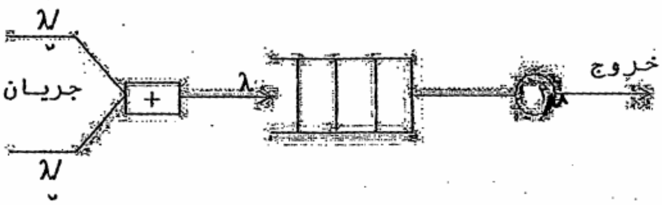


$$\omega_1 = \frac{1}{\mu-\lambda} = \frac{1}{\mu-\frac{\lambda}{2}} = \frac{2}{2\mu-\lambda}$$

در فرمول ω، نرخ خروجی را نمی‌داریم بلکه برای هر صف را می‌داریم.

شکل (a) : دو صف مجزا

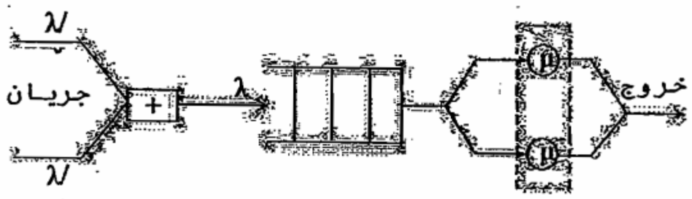
در شکل b دو جریان مجزای یکی شده با نرخ ورود λ و نرخ سرویس 2μ در یک سیستم *M/M/۱* خواهیم داشت:



$$\omega_2 = \frac{1}{2\mu-\lambda}$$

شکل (b) : صف مشترک با یک سرویس دهنده

در شکل c یک صف مشترک با یک سرویس‌دهنده دارای دو دستگاه را مشاهده می‌کنید، بنابراین یک سیستم *M/M/۲* خواهیم داشت. پارامترهای این سیستم *M/M/۲*، λ و μ هستند.



M/M/2

شکل (c) : صف مشترک با دو سرویس دهنده

توجه داشته باشید که در هر سه سیستم نرخ مؤثر ورود λ و نرخ مؤثر سرویس 2μ است. هدف آن است که بدانیم کدام سیستم حداقل زمان تولید را دارند. برای این سه سیستم داریم:

ω

$$W_1 = \frac{2}{2\mu-\lambda} = \frac{1}{\mu-\lambda/2}$$

$$W_2 = \frac{1}{2\mu-\lambda}$$

$$W_3 = \frac{4\mu}{4\mu^2-\lambda^2}$$

باید بذاریم تو سیستم های M/M/2 ×

شرط : $\lambda < 2\mu$

شرط پایداری سیستم $\lambda < 2\mu$ است، بنابراین:

نرخ موثرها را در رابطه قرار می‌دهیم.

$$W_3 = \left(\frac{4\mu}{2\mu+\lambda}\right)\left(\frac{1}{2\mu-\lambda}\right) > \frac{1}{2\mu-\lambda} = w2$$

$$W_3 = \left(\frac{2\mu}{2\mu+\lambda}\right)\left(\frac{2}{2\mu-\lambda}\right) < W_1$$

$$\left(\frac{2\mu}{2\mu+\lambda}\right)\left(\frac{2}{2\mu-\lambda}\right) \qquad , \qquad \frac{2}{2\mu-\lambda}$$

$\rightarrow W_1 > W_3 > W_2$

مثال: اگر $\lambda = 15$ و $\mu = 10$ و هر ساعت وقت سرویس‌دهنده ۱۲۰ تومان، هر ساعت اتلاف وقت مشتری در صف ۳۶۰ تومان هزینه دربر داشته باشد و افزایش سرویس‌دهنده هزینه‌ای به سیستم تحمیل نکند، تعداد بهینه‌ی سرویس‌دهندگان در یک مدل $M/M/m$ را تعیین کنید.

حل:

میانگین سرویس‌دهندگان مشغول به کار $= L - L_q$

$m - L + L_q =$ میانگین سرویس‌دهندگان بیکار

که اگه مدل M/M/1 باشه سرابرا $P_0 = 1-\rho$ چرا با L_q جمع می‌کنیم وقتی
اگه مدل M/M/2 باشه P_0+P_1 که L_q را داریم یعنی سرویس‌دهندگان
داریم ۱ نه L_q را میانگین

$C_s = 120\ \dfrac{\text{tooman}}{\text{hr.}} =$ هزینهٔ وقت سرویس‌دهنده (چه در حالت بیکاری و چه درحالت مشغول بودن)

$C_m = 0 =$ هزینهٔ افزایش یک سرویس‌دهنده

در نتیجه داریم:

تعداد سرویس‌دهندگان بیکار — تعداد سرویس‌دهندگان مشغول به کار

$$TC(m) = \overbrace{120(m - L + L_q) + 120(L - L_q)}^{120m} + mC_m + 360L_q = 120m + 360L_q$$

* چه در حالت مشغولیت و چه در بیکاری هزینه روی خرخود دارد.

$$L_q = \left[\frac{\dfrac{r^{m+1}}{m}}{m!(1-\dfrac{r}{m})^2}P_0\right] \quad و \quad P_0 = \left[\sum_{n=0}^{m-1}\frac{r^n}{n!} + \frac{mr^m}{m!(m-r)}\right]^{-1}$$

با توجه به شرط پایداری داریم:

$$r = \lambda/\mu = \frac{15}{10} \rightarrow m \geq 2 \quad ; \quad r/m < 1 \quad یا \quad \rho < 1$$

$$\frac{15}{10m} < 1 \Rightarrow 15 < 10m \Rightarrow 1.5 < m \Rightarrow 2 \leq m$$

Total Cost

$TC(m)$	L_q	P_0	m
۱,۹۲۸	۱۳٤,۲	۰,۱٤	۲
* ۰,۲۳٦	٤٤٥,۳	۰,۲۱	۳
۰٤٤۷	٤۹٦,۱	۰,۲۲	٤

$$\Rightarrow m^* = 3$$

۳. صف‌هایی که دارای کانال موازی و بریدگی هستند. $M/M/C/K$

نرخ ورود و خروج به این سیستم به صورت ذیل است:

$$\lambda_n = \begin{cases} \lambda & 0 \leq n < k \\ 0 & n \geq k \end{cases}$$

$$\mu_n = \begin{cases} n\mu & 0 < n \leq c \\ c\mu & c \leq n \leq k \end{cases}$$

k= تعداد افراد مجاز در سیستم است.(ظرفیت محدود)

$$P_n=\prod_{i=1}^{n}\frac{\lambda_{i-1}}{\mu_i}P_0=\begin{cases}\dfrac{\lambda^n}{n\mu\times(n-1)\mu\times\ldots\times1\mu} & 0<n\le c\\[2ex] \dfrac{\lambda^n}{\underbrace{c\mu\times c\mu\times\ldots\times c\mu}_{(n-c)\ \text{Statements}}\times\underbrace{(c-1)\mu\times(c-2)\mu\times\ldots\times1\mu}_{c\ \text{times}}}P_0 & c\le n\le k\end{cases}$$

$$\Rightarrow P_n=\begin{cases}\dfrac{\lambda^n}{\mu^n n!}P_0\\[2ex]\dfrac{\lambda^n}{c^{n-c}\mu^n c!}P_0\end{cases}$$

$$\sum_{n=0}^{k}P_n=1\quad\Rightarrow\quad\sum_{n=0}^{c-1}\frac{1}{n!}(\lambda/\mu)^n P_0+\sum_{n=c}^{k}\frac{1}{c^{n-c}c!}(\lambda/\mu)^n P_0=1$$

برای خلاصه کردن رابطهٔ فوق داریم:

$$\sum_{n=c}^{k}\frac{1}{c!c^{n-c}}r^n=\frac{r^c}{c!}\sum_{n=c}^{k}\frac{r^{n-c}}{c^{n-c}}=\frac{r^c}{c!}\sum_{n=c}^{k}\rho^{n-c}$$

تصاعد هندسی

$$\sum_{n=c}^{k}\rho^{n-c}=\underbrace{\rho^0+\rho^1+\ldots+\rho^{k-c}}_{(k-c+1)\ \text{Statements}}=\frac{1-\rho^{k-c+1}}{1-\rho}$$

$\lambda/c\mu$

$$\sum_{n=c}^{k}\frac{1}{c!c^{n-c}}r^n=\begin{cases}\dfrac{r^c}{c!}\dfrac{1-\rho^{k-c+1}}{1-\rho} & \rho\ne1\\[2ex]\dfrac{r^c}{c!}(k-c+1) & \rho=1\end{cases}$$

$$\boxed{P_0=\begin{cases}\left[\displaystyle\sum_{n=0}^{c-1}\frac{r^n}{n!}+\frac{r^n}{c!}\frac{1-\rho^{k-c+1}}{1-\rho}\right]^{-1} & \text{if}\quad \dfrac{\lambda}{c\mu}\ne1\\[3ex]\left[\displaystyle\sum_{n=0}^{c-1}\frac{r^n}{n!}+\frac{r^n}{c!}(k-c+1)\right]^{-1} & \text{if}\quad \dfrac{\lambda}{c\mu}=1\end{cases}}$$

۴. مقایس‌های کارایی

$$L_q=\sum_{n=c}^{k}(n-c)P_n=\frac{P_0(c\rho)^c\rho}{c!(1-\rho)^2}\left[1-\rho^{k-c+1}-(1-\rho)(k-c+1)\rho^{k-c}\right]$$

$$L = L_q + c - P_0 \sum_{n=0}^{c-1} (c-n) \frac{(\rho c)^n}{n!}$$

$$W = \frac{L}{\lambda'} \rightarrow L = W\lambda'$$

در استفاده از مدل‌های قبلی، وقتی ظرفیت محدود می‌شود، نیاز به تعریف یک λ' است.
$(\lambda' = \lambda(1-P_k))$

$$W_q = \frac{L_q}{\lambda'} \rightarrow L_q = W_q \lambda'$$

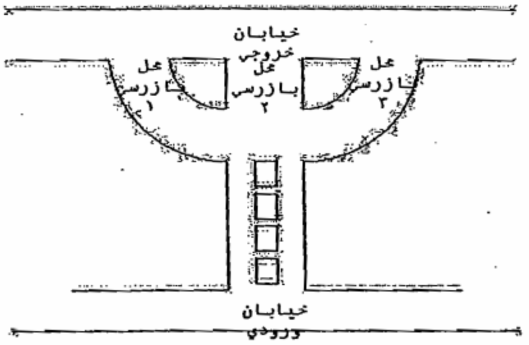
نرخ ورود مؤثر $= \lambda' = \lambda(1-P_k)$

احتمال پر بودن

$$W_q = W - \frac{L}{\mu}$$

K ظرفیت کل سیستم است و مربوط به تعداد در ایستگاه است. یعنی تعداد در حال سرویس + تعداد افراد در صف.

مثال: ایستگاه بازرسی فنی اتومبیلی را درنظر بگیرید که دارای سه محوطهٔ بازرسی است. هر محوطه می‌تواند تنها یک اتومبیل را در خود جای دهد. اتومبیل‌ها به نحوی منتظر می‌مانند که وقتی یک سرویس خالی می‌شود اتومبیلی که در جلوی صف بوده وارد سرویس می‌شود. محل انتظار حداکثر ۴ اتومبیل را در خود جای می‌دهد.



در اوج شلوغی میانگین ورود یک ورودی در هر دقیقه می‌باشد. زمان سرویس نمایی با میانگین ۶ دقیقه می‌باشد. $\mu = 1/6$ متوسط تعداد اتومبیل در سیستم، متوسط زمان انتظار در ایستگاه، متوسط تعداد اتومبیل در ساعت که به علت کمبود جا نمی‌توانند وارد ایستگاه شوند را بدست‌آورید.

حل:

$k = 7$ ، $\lambda = 1$ نفر/دقیقه ، $\frac{1}{\mu} = 6$ دقیقه $\rightarrow$ $\mu = \frac{1}{6}$ نفر/دقیقه $= 1$ نفر/۶دقیقه $\rightarrow$ $r = 6$

بازرسی ها + محل انتظار

$$\rho=\frac{r}{c}=\frac{6}{3}=2 \rightarrow \qquad P_0=\left[\sum\frac{6^n}{n!}+\frac{6^3}{3!}\frac{1-2^5}{1-2}\right]^{-1}=\frac{1}{1144}$$

(درفرمولی که $\rho\neq1$ است)

$$L_q=P_0\frac{6^3\times2}{3!(1-2)^2}\left[1-2^5(1-2)2^4\right]=3525P_0=3.09 \quad \text{اتومبیل}$$

$$L=3.09+3-\frac{1}{1144}\sum_{n=0}^{2}\frac{(3-n)}{n!}6^n=6.06 \quad \text{اتومبیل}$$

$$W=\frac{L}{\lambda'}\ ,\ \lambda'=\lambda(1-P_k),\ P_k=P_7=\frac{P_0 6^7}{3^4 3!} \quad \rightarrow \quad W=12.3 \ \text{دقیقه}$$

$P_k=$ احتمال وارد نشدن اتومبیل‌ها به سیستم

$\lambda P_k=$ متوسط تعداد افرادیکه در دقیقه نمی‌توانند وارد سیستم شوند.

$60\lambda P_k=$ متوسط تعداد افرادیکه در ساعت نمی‌توانند وارد سیستم شوند= ۳۰,۴ اتومبیل/ساعت

مثال: در یک کارگاه تولیدی به علت محدودیت فضای انبار حداکثر تعداد مشتریان پذیرفته شده محدود است. هدف تعیین تعداد بهینه ظرفیت سیستم و تعداد ماشین‌ها می‌باشد. مدت زمان سرویس نمایی با میانگین ۱۵ دقیقه و ورود مشتریان پواسون با میانگین هر ساعت ۱۶ مشتری می‌باشد. هزینه افزایش یک ظرفیت بیشتر ۱۰ تومان، هزینه بیکاری سرویس دهنده ۱۰۰ تومان در ساعت و هزینه اداره آن در یک ساعت (هزینه عملیاتی) ۲۰۰ تومان است. خسارت ناشی از، از دست رفتن یک مشتری ۳۰۰ تومان و خسارت ناشی از تاخیر در کار مشتری به ازای هر مشتری ۱۵۰ تومان است. (چه در صف و چه در حال سرویس)

$K^*=?$ $\quad C_m=10$

$C^*=?$ $\quad 100$ هزینه بیکاری سرویس کننده

$\frac{1}{\mu}=15$ $\quad 200$ هزینه اداره در یک ساعت

$\lambda=16$ $\quad 300$ خسارت ناشی از دست رفتن مشتری

حل:

مدل $M/M/m/k$ می‌باشد. بنابراین داریم:

$L-L_q=$ میانگین سرویس دهندگان مشغول

تعداد مشتریان از دست رفته $=\lambda P_k$

$$L = L_q + \frac{\lambda'}{\mu} \Rightarrow L - L_q = \frac{\lambda(1-\rho_k)}{\mu} = \frac{16}{4}(1-\rho_k) = 4 - 4\rho_k$$

TC=هزینه افزایش یک سرویس دهنده + هزینه بیکاری سرویس دهنده + هزینه عملیاتی + ۳۰۰(نرخ ورود مشتری به سیستم − نرخ مراجعه مشتری به سیستم) + هزینه اتلاف وقت مشتری در صف + هزینه اتلاف وقت مشتری در سیستم

$TC(m,K)$

$300(16-16(1-\rho_K))$

$$TC = 10\, \cancel{K}^{\,m} + 100\,(m - L + L_q) + 200\,(L - L_q) + \cancel{300\,(16\rho_k)}$$
$$+ 150\, L_q + 150\,(L - L_q) = 100\, m + 10\, K + 150\, L_q + 3800\, \rho_k + 1000$$

for $m \le K$ $\quad = 100m + 10k + 150 Lq + ۳۸۰۰ P_K + ۱۰۰۰$

M \ K	۲	۳	۴	۵	....	۱۱	۱۲
۲	۲۵۵۸	۲۴۰۹					
۳	-	۲۰۴۲					
٤	-	-					
٥	-	-					
٦	-	-				$\boxed{۸۱۵}$	۸۱٦
۷	-	-					
۸	-	-					

۵. فرمول ارلنگ $M/M/C/C$ — سه‌شنبه 26

در سال ۱۹۱۷ توسط ارلنگ سیستمی با $K=C$ و عدم اجازه تشکیل صف مورد بررسی قرار گرفت.

فرمول فقدان ارلنگ: $$\rho_C = \frac{\dfrac{(\lambda/\mu)^c}{C!}}{\sum_{i=0}^{c} \dfrac{(\lambda/\mu)^i}{i!}}$$ اولین فرمول ارلنگ

با قرار دادن $n=c$ در فرمول فوق، $\rho_n = \dfrac{(\lambda/\mu)^n / n!}{\sum_{i=0}^{n} (\lambda/\mu)^n / n!}$ معروف به اولین فرمول ارلنگ به دست می‌آید.

سوال ۱: در مورد کدام فرمول است که قربانی شده است.

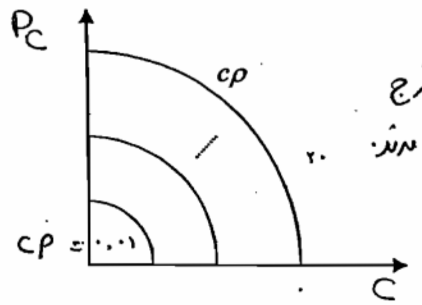
۲ فرمولی است که عرض زدن ✓

۳- هیچکدام

۴- همه موارد

گزینه صحیح: ۲

فرمول فوق در طراحی سیستم‌های تلفن کاربرد دارد. ولی نتیجه شگفت‌آور آن در این است که P_c برای تمام $M/G/C/C$ صادق است حتی برای $M/D/C/C$.



این نمودارها با ضرب $e^{-c\rho}$ در صورت و مخرج رابطه P_c با کمک جداول پواسون به دست آمدند.

Doeh در سال ۱۹۶۰ مجموعه ای از منحنی ها را برای P_c بدست آورد.

$$\frac{\lambda}{\mu} = r = c\rho$$

$$P_c = \frac{(c\rho)^c / C!}{\sum_{i=0}^{C} \frac{(c\rho)^i}{i!}}$$

اگر صورت و مخرج رابطه را در $e^{-c\rho}$ ضرب کنیم، صورت احتمال وجود c نفر در سیستم است و مخرج احتمال اینکه تا c نفر در سیستم باشند. این احتمالات را می توان از جداول مخصوص بدست آورد و P_c را مشخص کرد.

مرکز تلفن!

✓ مثال: به یک ایستگاه ~~راه‌آهن~~ به طور متوسط مطابق پروسه پواسون ۸۴/۳ تماس تلفنی در هر ساعت صورت می گیرد. مسوولین می خواهند که علامت اشغال به طور متوسط یک‌بار در هر ساعت پیش آید. اگر متوسط زمان سرویس ۰/۱۰۳ ساعت باشد، چه تعداد خط تلفن مناسب خواهد بود؟

از دست دادن یک مشتری در هر ساعت (X)

زمان سرویس = $1/\mu = 0.103$

$\lambda = 84.3$ تلفن در ساعت

← علامت اشغال وقتی هست که خطوط پر هستند دیگه.

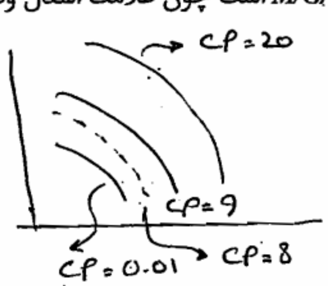
حل: از اینایه خط بازبود ۸٫۷ رو بذار توش

مدل $M/G/C/C$ است چون علامت اشغال وقتی روی می‌دهد که تمام کانال‌ها مشغول باشند.

$\lambda = 84.3$ تلفن/ساعت

$\frac{1}{\mu} = 0.103$ ساعت

$$r = c\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{84.3}{(0.103)^{-1}} = 8.7$$



احتمال از دست دادن مشتری یا پر بودن کانالها ی تلفن P_c است (اگر c کانال داشته باشیم).

سیاست مدیریت از دست دادن یک مشتری در دو ساعت یا ۱/۲ مشتری در یک ساعت است

بنابراین:

$$\lambda\rho_c = 1/2$$

$$\rho_c = \frac{1}{2\lambda} = \frac{1}{2(84.3)} = 0.0059$$

حال از منحنی ها می توان c را به دست آورد. چون P_c را داریم واگر منحنی ۸/۷ (cp) را داشته باشیم، c به دست می آید. حال که منحنی ۸/۷ در دسترس نیست از اینترپولیشن استفاده می‌کنیم.

کاربردهای معمول ← (مثل کانال‌های سرویس که محل توقف اتومبیل‌هاست (درون پای) چون قدر که کانال داریم ظرفیت داریم، یا طراحی فضای انبار)

مثال: در طراحی یک پارکینگ، هدف اصلی تعیین فضای آن است. اگر ظرفیت آن تکمیل شود اتومبیل‌ها به پارکینگ دیگری می‌روند و سود حاصله که ۵ تومان در ساعت است از بین می‌رود. اتومبیل‌ها طبق فرآیند پواسون با میانگین هر ساعت ۴۰ دستگاه وارد می‌شوند و مدت زمان توقف نمایی با میانگین نیم ساعت است. هزینه ایجاد فضای یک اتومبیل برابر ۲ تومان در واحد زمان است.

حل:

مدل $M/M/m/m$ داریم با: $\lambda = 40 \frac{\text{ماشین}}{\text{ساعت}}, \mu = 2\frac{\text{ماشین}}{\text{ساعت}}$

سود: ۵ تومان/ساعت
هزینه: ۲ "

$$TC(m) = 2m + 5(\underbrace{40 - 40(1-\rho_m)}_{40\rho_m}) = 2m + 200m$$

$TC(m)$	P_m	m
٦۰,۱	۰,۰۵	۲۵
٥۹,٤۳	۰,۰۳۷	۲٦
[redacted]	۰,۰۲٦	۲۷
٥۹,۷٥	۰,۰۱۸	۲۸

m=۲۷

۶. صف‌هایی که برای سرویس نامحدود است $M/M/\infty$ مثال: برنامه‌های تلویزیونی

موقعیت سلف سرویس نمونه چنین حالتی است.

$$P_n=\prod\frac{\lambda_i-1}{\mu}\qquad \lambda_n=\lambda\qquad \mu_n=\mu$$

$$P_n=\frac{(\lambda/\mu)^n}{n!}P_0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}P_n=1\quad\Rightarrow\quad P_0=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\lambda/\mu)^n}{n!}=1\quad\Rightarrow\quad P_0e^r=1\rightarrow P_0=e^{-\lambda/\mu}$$

یعنی P_0 تابع توزیع پوآسون با میانگین λ/μ دارد. برای هرمدلی که M/G/∞ باشد به شرط آن‌که P_n تنها به میانگین زمان سرویس بستگی داشته باشد (نه تابع زمان سرویس) صادق است.

$$L=\sum_{n=0}^{\infty}nP_0=\text{میانگین تابع توزیع پوآسون}=\lambda/\mu$$

چون صف تشکیل نمی‌شود
$$L_q=0$$
$$W_q=\frac{L_q}{\lambda}=0$$
$$W=\frac{1}{\mu}$$

- تذکر: توزیع زمان انتظار $W_{(t)}$ توزیع نمایی با میانگین $\frac{1}{\mu}$ می‌باشد.

تلویزیون و انرژی خورشیدی جزء این گروه می‌شود.

مثال: یکی از کانال‌های تلویزیون می‌خواهد بداند به‌طور متوسط چند نفر در یک ساعت خاص یک برنامه خاص را می‌بینند. بررسی‌های گذشته نشان می‌دهد که به‌طور متوسط صد هزار نفر در ساعت، راس ساعت خاص، تلویزیون خود را روشن می‌کنند که بخوبی می‌توان با توزیع پوآسون آن‌ها را نشان داد. از بین پنج کانال تلویزیون هر بیننده به‌طور تصادفی یکی را انتخاب می‌کند. همچنین به‌طور متوسط ۹۰ دقیقه تلویزیون را تماشا می‌کنند و تقریباً توزیع نمایی است.

100,000

μ ۹۰ دقیقه = ۱/۵ ساعت

حل:

برای یافتن L باید λ/μ را داشته باشیم.

$$\lambda=\frac{100000}{5}=20000$$ میانگین نرخ ورودی

فرض شرایط مساوی

$$\frac{\lambda}{\mu}=\frac{20000}{1/1.5}=30000$$ نفر

۱/۵ ساعت = ۹۰ دقیقه = میانگین زمان سرویس

$L=$ ۳۰۰۰۰ نفر $\Rightarrow$ $W=$ ۱/۵ ساعت

...The End...

۷. صف‌هایی که دارای منبع محدود هستند[۲] عارضی برای غالب این فرض صدید نداریم.

در موارد قبل فرض کرده بودیم که جمعیتی که برای سرویس می‌آیند نامحدود است، زیرا پروسه پواسون داشتیم که اندازه فضای آن نامحدود است. اگر جمعیت تقاضاکننده محدود باشد چه اتفاقی می‌افتد؟ مثلاً M نفر باشند. یک کاربرد این مدل در تعمیر و نگهداری ماشین‌ها است که سرویس‌دهندگان، تعمیرکنندگان هستند و ماشین‌آلات مشتریان.

فرض کنید C سرویس‌دهنده داریم. زمان‌های سرویس با میانگین $1/\mu$ متغییر نمایی هستند و پروسه ورودی به شریح زیر است:

اگر در زمان t تقاضاکننده‌ای در سیستم نباشد احتمال این‌که تا زمان $t+\Delta t$ وارد شود $\lambda.\Delta t+O(\Delta t)$ است یعنی زمانی‌که یک واحد تقاضا کننده در خارج از سیستم صرف می‌کند نمایی با میانگین $1/\lambda$ است.

$n=$ تعداد ماشینها در سیستم

[۲] Finite Source Queues

n = تعداد مشتریان (ماشین‌ها)

M جمعیت تقاضا کننده (حداکثر مشتریان)

C = تعداد سرویس کنندگان

- مشتری‌ها از قبل محدود دارد یعنی دیگر ورود تصادفی نداریم.
- کلاً می‌توانیم داریم، $\frac{1}{\lambda}$ که از توزیع نمایی پیروی می‌کند.
- قبلاً می‌گفتیم فقط ظرفیت K تا مشتری می‌پذیریم، حالا از صف محدود می‌کنیم.

$$\lambda_n=\begin{cases}(M-n)\lambda & 0\le n<M\\ 0 & n\ge M\end{cases}\qquad \mu_n=\begin{cases}n\mu & 1\le n<C\\ C\mu & n\ge C\end{cases}$$

$$P_n=\prod_{i=1}^{n}\frac{\lambda_{i-1}}{\mu_i}P_0$$

از نقد فرایند احتمالی تغییری حاصل نشده.

$$P_n=\begin{cases}\dfrac{M!/(M-n)!}{n!}\left(\dfrac{\lambda}{\mu}\right)^n P_0 & 0\le n<C\\[2ex] \dfrac{M!/(M-n)!}{C^{n-c}C!}\left(\dfrac{\lambda}{\mu}\right)^n P_0 & C\le n\le M\end{cases}\qquad \text{or } P_n=\begin{cases}\dbinom{M}{n}\left(\dfrac{\lambda}{\mu}\right)^n P_0\\[2ex] \dbinom{M}{n}\dfrac{n!}{C^{n-c}C!}\left(\dfrac{\lambda}{\mu}\right)^n P_0\end{cases}$$

$$P_0=\left[\sum_{n=0}^{C-1}\frac{M!/(M-n)!}{n!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n+\sum_{n=C}^{M}\frac{M!/(M-n)!}{C^{n-c}C!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n\right]^{-1}$$

$$L=\sum_{n=0}^{M}nP_n=P_0\left[\sum_{n=0}^{C-1}n\binom{M}{n}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n+\sum_{n=C}^{M}n\binom{M}{n}\frac{n!}{C^{n-c}C!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n\right]$$

$$L_q=\sum_{n=0}^{M}(n-C)P_n=\sum_{n=C}^{M}nP_n-C\sum_{n=C}^{M}P_n=L-\sum_{n=0}^{C-1}nP_n-C\left(1-\sum_{n=0}^{C-1}P_n\right)=L-C+\sum_{n=0}^{C-1}(C-n)P_n$$
$$=L-C+P_0\sum_{n=0}^{C-1}(C-n)\binom{M}{n}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n$$

۸. محاسبه مقیاسات کارایی وابسته به زمان

فرق این حالت با حالت‌های دیگه این که سطرها تا بی‌نهایت نمی‌رود بلکه تا M می‌رود.

اگر در یک سیستم n نفر باشند، در خارج از سیستم $M-n$ نفر وجود دارد که هر یک دارای میانگین نرخ ورودی λ است. پس میانگین نرخ ورود به سیستم $(M-n)\lambda$ می‌باشد که پس از جمع زدن روی تمام حالات و وزن‌دهی آن با P_n، متوسط نرخ ورود موثر به سیستم (λ') به‌دست می‌آید:

imp

میانگین λ_n نرخ ورود

$$\lambda'=\sum_{n=0}^{M}\underbrace{(M-n)\lambda}_{\lambda_n}P_n=M\lambda\underbrace{\sum_{n=0}^{M}P_n}_{1}-\lambda\underbrace{\sum_{n=0}^{M}nP_n}_{L}=M\lambda-\lambda L=\lambda(M-L)$$

$$W=\frac{L}{\lambda(M-L)}\qquad W_q=\frac{L_q}{\lambda(M-L)}\qquad W=W_q+\frac{1}{\mu}\rightarrow \underline{\underline{\lambda'}}=\mu(L-L_q)$$

که به طور حسی هم قابل اقتباس بود. زیرا بطور متوسط L نفر در سیستم هستند و M-L نفر در خارج سیستم می‌باشند و هر کدام نرخ λ دارند:

در فرمول لیتل باید میانگین λ را بذاریم چون لیتل در بلندمدت بررسی می‌کند (از سر ظاهر!)

$$L = \lambda' W$$

$$W = \frac{L}{\lambda'} = \frac{L}{\lambda (M - L)}$$

$$W_q = \frac{L_q}{\lambda'} = \frac{L_q}{\lambda (M - L)}$$

اینا به درد می‌خوان!

- تذکر: رابطه $W = W_q + 1/\mu$ و فرمول لیتل همواره روش دیگری برای محاسبه λ' بدست می‌دهند:

$$\lambda' = \mu(L - L_q)$$

این فرمول برای تمامی مدلهایی که فرمول لیتل برای آنها صدق می‌کند معتبر است.

مثال: در یک کارخانه که دارای ۳۰ ماشین است، هدف تعیین تعداد بهینه تعمیرکاران است. مدت زمان تعمیر هر ماشین دارای توزیع نمایی با میانگین ۳ ساعت و مدت زمانی که ماشین کار می‌کند (قبل از اینکه خراب شود) نیز دارای توزیع نمایی با میانگین ۲۴۰ ساعت است. خسارت قطع تولید هر ماشین ساعتی ۱۰۰۰ تومان و حقوق هر ساعت کار تعمیرکار را ۳۰۰ تومان فرض کنید.

حل: چون کارخونه تولیدی است اگر دستگاهی خراب بشه، تولید متوقف میشه، هزینه داریم.

$$M = 30 \qquad \mu = 1/30, \quad \lambda = 1/240$$

$$C_1 = C_2 = 1000$$

$$C(m) = \underbrace{300m}_{\text{هزینه‌ی کارگر}} + 1000L$$

کل هزینه برای هر ساعت

تعداد ماشین خراب

متوسط تعداد افراد داخل سیستم میشه
متوسط تعداد ماشین های خراب

$C(m)$	L	P_0	M
۷۸۶۲	۶,۹۲	۰,۰۴	۳
۴۵۸۹	۳,۳۷	۰,۱۶۸	۴
۳۴۷۲	۱,۹۷	۰,۳	۵
۳۱۴۴	۱,۳۴	۰,۴	۶
۳۱۰۷	۱,۰۶۷	۰,۴۸	۷

۳۲۰۱	۰٫۸	۰٫۵٤	۸

۹. پروسه خروجی صف *M/M/m*

یک نتیجه مهم برای سیستم‌های *M/M/m* توسط Burke اثبات گردیده است که نشان می‌دهد فرآیند خروج مشتریان از سیستم یک فرآیند پواسون در شرایط پایدار است.

برای $N(t)$ مقدار مشتریان سیستم در زمان t داریم:

$$N(t) = n_A(t)n_D(t)$$

که در آن $\{n_A(t): t \geq 0\}, \{n_D(t): t \geq 0\}$ پروسه‌های ورود و خروج صف هستند. و نیز داریم:

$$P\{N(t)=k\} = T_k^1 \qquad k = 0,1,2,...$$

متغیر X را برابر زمان مابین دو خروجی مقداری سیستم تعریف می‌کنیم. یک خروجی سیستم را وقتی ترک می‌کند k مشتری در سیستم هنوز وجود ندارد($k=0,1,2,..$). اگر $k \geq m$ باشد، در آن صورت زمان لازم برای خروجی بعدی $e^{-\mu m}$ است. اگر $1 \leq k \leq m$ باشد این زمان $e^{-\mu m}$ است و اگر $k=0$ باشد، این زمان جمع زمان ورودی بعدی با زمان سرویس آن است:

$$E \times P(\lambda) + E \times p(\mu)e^{-\lambda} + e^{-\mu}$$

$X = E \times P(m\mu)$	$\sum_{j=m}^{\infty} \pi_j$	با احتمال
$= E \times P(k\mu)$	$(k=1,2,...,m-1)\pi_k$	با احتمال
$= E \times P(\lambda) + E \times P(\mu)$	π_0	با احتمال

با استفاده از قانون احتمال کل داریم:

$$X = \sum_{j=m}^{\infty} \pi_j E \times P(\mu m) + \sum_{k=1}^{m-1}[\pi_k E \times P(k\mu)] + \pi_0[E \times P(\lambda) + E \times P(\mu)]$$
$$= E \times P(\lambda)$$

$(t) \sim$ و X مستقل از هم هستند و نیز زمان‌های مابین خروجی‌ها iid هستند بنابراین xهای یک سیستم *M/M/m* در حالت پایدار تشکیل فرآیند پروسون با نرخ λ را می‌دهند.

- J.Virtamo
- queuening theory
- M/G/1

۱. سیستم صف M/G/1

به خاطر نبود خاصیت عدم حافظه در این توزیع دچار مشکل می شیم.

در این سیستم ورودی‌ها دارای فرآیند ورودی پواسون با چگالی (نرخ) λ هستند (M: Memory less).

خروجی‌های این سیستم درای توزیع زمان سرویس دهی کلی با میانگین $\bar{s}=\frac{1}{\mu}$ هستند (G: General). بنابراین این سیستم سرویس تک کاناله با $\rho=\lambda\bar{s}$ ($\rho<1$ در حالت پایدار) دارد.

این تنها شرط ، داشتن $\bar{s}$ هست.

$N(t)$ تعداد افراد سیستم تشکیل یک فرآیند مارکوفی نمی‌دهند. احتمال انتقال در واحد زمان برای رفتن به حالت $\{N=n\}$ از حالت $\{N=n-1\}$ به مدت زمانی که مشتری در حال سرویس سپری کرده بستگی دارد و این اطلاعات از متغییر $N(t)$ بدست نمی‌آید. مقادیر میانگین طول صف، زمان انتظار و نیز زمان اقامت به راحتی بدست می‌آیند (فرمول P-K).

۲. فرمول میانگین (Pollaczek - Khinchin) P-K

← از یک دیگری متفاوت مشهور و قانون لیتل استفاده می‌کنه

با یافتن مقدار W_q شروع می‌کنیم که میانگین زمان انتظار یک مشتری است.

$$E[W_q] = \underbrace{\underbrace{E[N_q]}_{\text{میانگین طول صف}} \; * \; \underbrace{E[s]}_{\text{میانگین زمان سرویس}}}_{\text{میانگین زمان مورد نیاز سرویس مشتریان صف}} + \underbrace{E[R]}_{\text{مقدار باقیمانده از سرویس مشتری در حال سرویس}}$$

Remaining service time

به خاصیت عدم حافظه ندارد ← زمان انتظار مشتری توصیف با $E[R]$ نشون داده میشه. باقیمانده زمان سرویس هست

این جا تک کانال داریم دیگه صف

R نشان‌دهنده زمان باقیمانده از سرویس مشتری در حال سرویس است. اگر سرویس‌کننده بیکار باشد، $R=0$ است. در اینجا خاصیت PASTA فرآیند پواسون و نیز قانون لیتل صادق است بنابراین خواهیم داشت:

$$E[N_q]=\lambda E[W_q] \xrightarrow{\text{با جایگذاری رابطه فوق}} E[W_q]=\frac{E[R]}{1-\rho}$$

۲

برای یافتن مقدار $E[R]$ نیز به طریق گرافیکی عمل می‌کنیم.

S_i ها متغیر تصادفی اند

$$E[R]=\frac{\text{مساحت}}{\text{طول زمان}}$$

تعداد مثلث‌ها (یا تعداد مشتری‌ها) $n=\lambda t$ تعداد ورودی‌ها

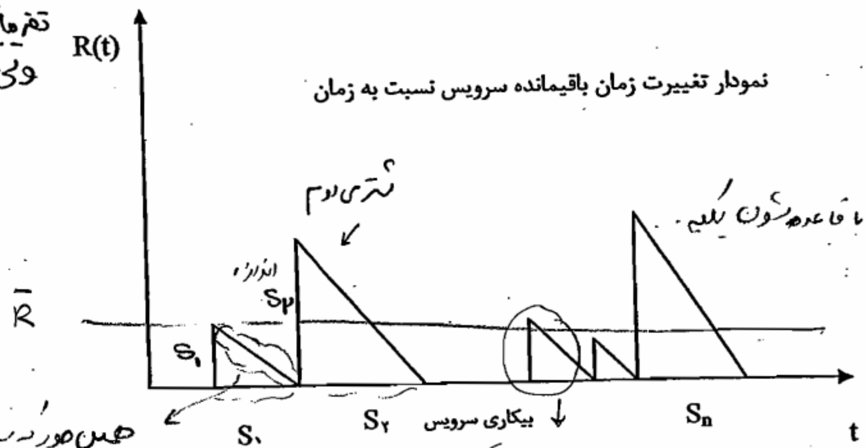
$$E[R]=1/t\int_0^t R(t')dt'=1/t\sum_{i=1}^{n}1/2S_i^2=\frac{n}{t}\times\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{S_i^2}{2}=\lambda\times 1/2E[S^2]$$

از این می‌توانیم ...

$$\Rightarrow\quad \boxed{E[W_q]=\frac{\lambda E[S^2]}{2(1-\rho)}}$$

فرمول مهم M/G/1

تقریباً همون M/M/1 هست ولی در یه ضریبی ضرب شده



نمودار تغییرت زمان باقیمانده سرویس نسبت به زمان

همین جور که سرویس رو دریافت می‌کنه باقیمانده زمان هم کم می‌شه.

این یه زمانیه که تو سرویس و تو صف مشتری نبوده، سرویس خالی بوده.

برای یافتن زمان w داریم:

$$E[w]=E[S]+E[w_q]$$

$$\Rightarrow\begin{cases}E[w_q]=\dfrac{\lambda E[S^2]}{2(1-p)}=\dfrac{1+C_v^2}{2}\cdot\dfrac{p}{1-p}E[s] \\ E[w]=E[s]+\dfrac{\lambda E[S^2]}{2(1-p)}=\left(1+\dfrac{1+C_v^2}{2}\cdot\dfrac{p}{1-p}\right)E[s]\end{cases}$$

اینا مهم هستند

که در آن $C_v^2=\dfrac{V[s]}{E[s]^2}$ است و C_v ضریب تغییرات متغیر تصادفی S است.

تنها توزیعی که ضریب تغییراتش یکی است توزیع نمایی است.

$$E[s^2]=v[s]+E[s]^2=(1+C_v^2)E[s]^2$$

با بکارگیری قانون لیتل تعداد متوسط افراد در صف و سیستم نیز بدست می‌آید:

اگر زمان سرویس قطعی باشه ← واریانس = صفر

ضریب تغییرات = صفر

$$\Rightarrow \begin{cases} E[w_q] = L_q = \lambda E[w_q] = \dfrac{\lambda^2 E[S^2]}{2(1-p)} = \dfrac{1+C_v^2}{2} . \dfrac{p^2}{1-p} \\ E[N] = L = \lambda E[w] = \lambda E[s] + \dfrac{\lambda^2 E[S^2]}{2(1-p)} = p + \dfrac{1+C_v^2}{2} . \dfrac{p}{1-p} \end{cases}$$

مشاهده می‌شود فرمول‌ها با $M/M/1$ در یک ضریب $\frac{1+C_V^2}{2}$ تفاوت دارند و تنها به میانگین و واریانس توزیع نیاز داریم.

خوبیه این روش اینکه ما باید میانگین و واریانس توزیع رو داشته باشیم فقط .

مثال: در صف $M/M/1$ و $M/D/1$ مقادیر W,L را حساب نمائید:

$M/M/1 =$

$V[s] = E[s]^2 \Rightarrow C_V^2 = 1$

$E[N] = L = p + \dfrac{p^2}{1-p} = \dfrac{p}{1-p}$

$E[w] = w(1+\dfrac{p}{1-p})E[s] = \dfrac{1}{1-p}E[s]$

$M/D/1$

$V[s] = 0 \Rightarrow C_V^2 = 0$

$L = p + 1/2\dfrac{p^2}{1-p}$

$w = (1+1/2\dfrac{p}{1-p}).E[s]$

← تا اینجا باید میانگین رو حساب کردیم ؛

۳. یافتن توزیع طول صف در $M/G/1$

تعریف: با داشتن CTMC $\{x(t), t \ge 0\}$ یک فرآیند گسسته $\{x_n; n = 0,1,2,...\}$ قابل تعریف است که نمایانگر حالات CTMC در مقاطع زمانی تغییر حالات آن می‌باشد. x_n حالت سیستم CTMC بعد از n تغییر است. به این فرآیند زنجیره مارکوف محاطی[1] گویند.

زنجیره مارکوف محاطی دارای احتمالات حالات پایدار منحصر به فرد است و اگر برگشت‌پذیر مثبت و کاهش ناپذیر باشد CTMC نیز دارای این خواص خواهد بود.

خاصیت عدم خاطره را ایجاد می‌کنیم. علیرغم این که زمان سرویس این خاصیت رو نداره .

[1] Embedded Markov chain (EMC)

۴. روش زنجیره مارکوف محاطی

با در نظر گرفتن صفی که پشت سر یک خروجی باقی می‌ماند (افراد داخل سیستم در مقاطع زمانی خروج مشتری از سیستم)، یک زنجیره مارکوفی محاطی خواهیم داشت. برای این سیستم علایم ذیل قابل تعریف هستند:

- $N_-^* =$ طول صف درست قبل از ورود یک مشتری (از دید یک مشتری ورودی)،
- $N_+^* =$ طول صف درست قبل از خروج یک مشتری (از دید یک مشتری خروجی)،
- $N =$ طول صف در یک لحظه دلخواه.

با توجه به خاصیت PASTA فرآیندهای پواسون می‌دانیم که $N_-^* \sim N$، و برای هر سیستمی که ورودی و خروجی تکی دارند داریم: $N_+^* \sim N_-^*$ (خاصیت level Crossing). در نتیجه: $N_+^* \sim N$ است. بنابراین برای یافتن توزیع N کافی است توزیع لحظات زمانی خروجی مشتریان را محاسبه نماییم. در ادامه جهت اختصار N_+^* را با N نشان می‌دهیم و نیز تعریف می‌کنیم:

- $N_k =$ طول صف بعد از خروج k امین مشتری،
- $V_k =$ تعداد مشتریان جدیدی که در طی زمان سرویس مشتری k ام وارد شده‌اند.

قضیه: فرآیند زمان گسسته N_t یک زنجیره مارکوف غیر از تولد- مرگ می‌سازد.

اثبات: با داشتن N_k، N_{k+1} را می‌توان بر اساس آن و متغیر تصادفی V_{k+1} که مستقل از N_k و تاریخچه آن است بیان کرد:

$$N_{K+1} = \begin{cases} N_K - 1 + V_{K+1}; & N_K \ge 1 \\ V_{K+1} \; ; & N_K = 0 \end{cases}$$

اگر $N_K \ge 1$ باشد، درست در لحظهٔ خروج مشتری k، مشتری $k+1$ ام که در صف است وارد سرویس می‌گردد. بعد از خروج مشتری $k+1$ ام یکی از طول صف کم می‌گردد. در طول سرویس مشتری $k+1$ ام V_{k+1} مشتری نیز وارد صف شده‌اند.

اگر $N_K=0$ باشد، مشتری $k+1$ ام صف خالی در پشت خود باقی می‌گذارد. پس از ورود مشتری $k+1$ ام طول صف یکی افزایش و پس از خروج آن نیز یکی کاهش می‌یابد. بنابراین صف تنها از مشتریانی که در طول سرویس مشتری $k+1$ ام وارد شده‌اند تشکیل خواهد شد. چون زمان‌های سرویس مستقل از هم بوده و فرآیند ورودی پواسون است، V_k ها نیز از یکدیگر مستقل بوده و بعلاوه V_{k+1} از فرآیند طول صف قبل از خروج مشتری $k+1$ ام (یعنی N_K) و مقادیر قبلی آن مستقل است. در نتیجه ویژگی احتمالی N_{k+1} به N_K بستگی دارد نه به مقادیر قبلی آن.

- **تعریف:**

$$\hat{N}_k=(N_k-1)^+=\begin{cases}N_k-1 & , \quad N_k\ge 1\\ N_k(=0) & , \quad N_k=0\end{cases}$$

در نتیجه $N_{k+1}=\hat{N}_k+V_{k+1}$ یعنی گام‌های فرآیند رو به جلو مقادیر دلخواه می‌گیرند ولیکن گام‌های رو به عقل یک مرحله‌ای هستند. در حالت تعادل متغیرهای N_K و N_{k+1} و غیره توزیع یکسان دارند (و نیز $V_k,\hat{N}_k$) بنابراین رابطه فوق را به صورت $N=\hat{N}+V$ می‌نویسیم. به دلیل این‌که V و $\hat{N}$ مستقل هستند داریم:

$$G_N(z)=G_{\hat{N}}(z)\;\;G_V(z)$$

حال باید توابع $G_V(z),G_{\hat{N}}(z)$ را محاسبه نماییم:

$$G_{\hat{N}}(z)=E[z^{\hat{N}}]=z^0\underbrace{p\{\hat{N}=0\}}_{p\{N=0\}+p\{N=1\}}+\sum_{i=1}^{\infty}z^i\underbrace{p\{\hat{N}=i\}}_{p\{\hat{N}=i+1\}}=$$

$$p\{N=0\}+\frac{1}{z}\sum_{i=1}^{\infty}z^ip\{N=i\}=\underbrace{p\{N=0\}}_{=1-\rho}(1-\frac{1}{z})+\frac{1}{z}\sum_{i=1}^{\infty}z^i\underbrace{p\{N=i\}}_{G_N(z)}$$

$$\Rightarrow G_{\hat{N}}(z)=\frac{G_N(z)-(1-p)\;\;(1-z)}{z}\;\;,\;\;p=\lambda E[s]$$

X را یک متغیر تصادفی دلخواه نمایانگر یک فاصله زمانی در نظر بگیرید. به‌دنبال یافتن توزیع تعداد ورودی، K، از یک فرآیند پواسون (با چگالی λ) در طی زمان x هستیم (به ویژه $G_k(z)$).

$$G_k(z)=E[z^k]=E[\underbrace{E[z^k]}_{k\sim poisson(\lambda x)}]=E[e^{-(1-z)\lambda x}]$$
$$=X^*((1-z)\lambda)$$
$$=X^*(s)=E[e^{-sx}] \qquad \text{تعریف } X^*$$

حال با توجه به این‌که فاصله زمانی مورد نظر ما زمان سرویس یک مشتری است داریم:

$$\boxed{G_V(z)=S^*((1-z)\lambda)}$$

۵. تفسیر $G_k(z)$ با روش Collective Marks

$G_k(z)$ احتمال آن است که هیچ کدام از k ورودی در طی فاصله X علامت نخورند چنانچه هر ورودی با احتمال $1-z$ و مستقل از دیگری شانس علامت خوردن داشته باشد. فرآیند علامت زدن که در آن به‌طور تصادفی از یک فرآیند پواسون (ورودی‌ها) یک انتخاب صورت می‌گیرد تشکیل یک فرآیند پواسون با چگالی $\lambda(1-z)$ می‌دهد.

- تفسیر تبدیل لاپلاس با روش Collective Marks: $X^*(s)$ احتمال آن است که در فاصله زمانی X از فرآیند پواسون با چگالی s ورودی نداشته باشیم:

$$X^*(s)=E[e^{-sx}]=E[p\{\text{عدم ورودی در فاصله X} \mid X\}]=p\{\text{هیچ ورودی در فاصله}\}$$

اگر چگالی فرآیند علامت زنی $\lambda(1-z)$ باشد، احتمال علامت نخوردن $X^*((1-z)\lambda)$ است.

بنابراین در این مقطع با کنار هم قرار دادن نتایج داریم:

$$G_N(z)=G_{\hat{N}}(z).G_V(z)=\frac{G_N(z)-(1-p)(1-z)}{z}S^*((1-z)\lambda)$$
$$\Rightarrow G_N(z)=\frac{(1-p)(1-z)}{S^*((1-z)\lambda)-z}S^*((1-z)\lambda)$$
$$\boxed{G_N(z)=\frac{(1-p)(1-z)}{1-z/S^*((1-z)\lambda)}}$$

مثال: در صف $M/M/1$ داریم:

$$S \sim E \times p(\mu) \Rightarrow S^*(s) = \frac{\mu}{s+\mu}$$

$$\Rightarrow S^*((1-z)\lambda) = \frac{\mu}{(1-z)\lambda+\mu} = \frac{1}{(1-z)p+1} \quad , p = \lambda/\mu$$

$$G_N(z) = \frac{(1-p)(1-z)}{1-z[((1-z)p+1]} = \frac{(1-p)(1-z)}{(1-z)(1-pz)} = \frac{1-p}{1-pz}$$

$$= (1-p)(1+(pz)+(pz)^2+....)$$

که توزیع صف $M/M/1$ را به‌دست می‌دهد.

۶. یافتن توزیع زمان اقامت در سیستم صف $M/G/1$

بر اساس اصول استفاده شده در یافتن توزیع طول صف می‌توان نوشت:

$$G_N(t) = W^*((1-z)\lambda)$$

W^* تبدیل لاپلاس زمان اقامت در سیستم است.

- نکته: با مشتق‌گیری از رابطه فوق و ارزیابی آن در $t=1$ داریم:

$$G'_N(1) = E[N] = -\lambda W^{*\prime} = \lambda E[w]$$

که همان نتیجه مورد انتظار از قانون لیتل است، بنابراین داریم:

$$W^*((1-z)\lambda) = \frac{(1-p)(1-z)}{S^*((1-z)\lambda)-z} \; S^*((1-z)\lambda)$$

z یک متغیر آزاد است و با تعریف $S(1-z)\lambda$ خواهیم داشت $z = 1-\frac{s}{\lambda}$.

فرمول تبدیل P-K برای زمان اقامت عبارتست از:

$$W^*(S) = \frac{(1-p)s}{S-\lambda+\lambda S^*(s)} \; S^*(s)$$

مثال: در صف $M/M/1$ داریم:

$$S' \sim E \times p(\mu) \Rightarrow S^*(s) = \frac{\mu}{\mu+s}$$

$$T^*(s) = \frac{(1-p)s}{s-\lambda+\lambda\dfrac{\mu}{s+\mu}} \cdot \frac{\mu}{s+\mu} = \frac{\mu-\lambda}{s+(\mu-\lambda)} \Rightarrow W \sim E \times p(\mu-\lambda)$$

• یافتن توزیع زمان انتظار در صف (W_q) :

در حالت کلی داریم: $w = w_q + s =$ زمان سرویس + زمان انتظار

چون S , w_q مستقل از هم می‌باشند داریم: $W^*(s) = W^*_q(s).S^*(s)$ در نتیجه فرمول تبدیل p-k

برای زمان انتظار در صف به صورت ذیل خواهد بود:

$$p = \lambda E[s] \qquad W^*_q(s) = \frac{(1-p)s}{s-\lambda+\lambda S^*(s)}$$

عبارت فوق را به شکل دیگری نیز می‌توان نوشت: ابتدا عبارت سمت راست را به شکل معادل

دیگری می‌نویسیم:

$$W^*_q(s) = \frac{1-p}{1-p\dfrac{1-S^*(s)}{sE[S]}}$$

و نیز می‌توان نشان داد که زمان باقیمانده از سرویس (R) به شرط آن‌که یک مشتری در سرویس

باشد دارای تابع چگالی زیر است:

$$f_R(t) = \frac{1-F_s(t)}{E[s]} \rightarrow R^*(s) = \frac{1-S^*(s)}{sE[S]}$$

در نتیجه رابطه جدید به صورت زیر خواهد بود:

$$W^*_q(s) = \frac{1-p}{1-pR^*(s)}$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} (1-p)\rho^n R^*(s)^n$$

به عبارت دیگر زمان انتظار مشتریان بر اساس مقدار کار باقیمانده (زمان انتظار مجازی) بیان شده است.

۷. سیستم صف $G/M/1$

در این سیستم زمان‌های ما بین دو ورود متوالی از توزیع یکسان و مستقل از هم پیروی می‌کنند که با B(t) نشان می‌دهیم و میانگین زمان بین دو ورود $\frac{1}{\lambda}$ است. زمان‌های سرویس نیز توزیع‌های مستقل از هم نمایی با میانگین زمان سرویس $\frac{1}{\mu}$ است. فاکتور بهره‌وری $\rho<1$ تعریف می‌شود.

اگر B* (s) تبدیل لاپلاس توزیع زمان‌های بین ورود مشتریان باشد، $x<1$ را جواب منحصر به فرد معادله $x=B^*(\mu(1-n))$ تعریف می‌کنیم. می‌توان نشان داد که:

B*(s) تبدیل لاپلاس توزیع B(t)

$$p\{N=K\}=\begin{cases}1-\rho & k=0\\ \rho x^{k-1}(1-x) & k=1,2,.....\end{cases}$$

در نتیجه داریم:

$$L=\frac{\rho}{1-x}\ ,\ W=\frac{1}{\mu(1-n)}$$

تابع توزیع تجمعی متغیر W در حالت پایدار نیز برابر $F_{\omega}(t)\begin{cases}0 & (t\le 0)\\ 1-e^{-\mu(1-n)t} & (t>0)\end{cases}$ است.

مثال: سیستم $M/M/1$ را در نظر بگیرید که برای آن داریم $B(s)=\frac{\lambda}{s+\lambda}$. به‌دنبال x هستیم که در رابطه زیر صدق کند $X=B^*(\mu(1-x))=\frac{\lambda}{\mu(1-x)+\lambda}$. در نتیجه: $(x-1)(\mu x-\lambda)=0$ است. از دو جواب ممکن $x=1$ غیر ممکن و $x=\rho$ قابل قبول خواهد بود.

مثال: سیستم $E_2/M/1$ را در نظر بگیرید که زمان‌های ما بین ورود از توزیع ارلنگ-۲ پیروی می‌کنند، در این سیستم داریم:

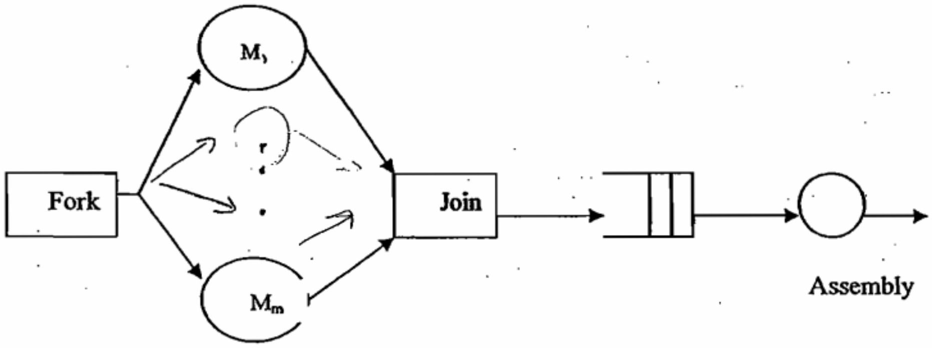
$$B^*(s)=\frac{2\mu^2}{(s+\mu)(s+2\mu)}$$

از رابطه x داریم:

$$X=\frac{2\mu^2}{(\mu-\mu_n+\mu)(\mu-\mu_n+2\mu)}$$

در ادامه حل به معادله درجه سوم $x^3-5x^2+6x-2=0$ می‌رسیم. این معادله دارای ریشه‌های $x=1$, $x=2+\sqrt{2}$, $x=2-\sqrt{2}$ است. واضح است که $x=2-\sqrt{2}$ تنها ریشه قابل قبول این معادله بوده و بر اساس آن معیارهای کارایی سیستم قابل محاسبه است.

مثال: سیستم صف زیر را در نظر بگیرید.



ایستگاه کاری مونتاژ، m قطعه را بر هم سوار کرده و به صورت محصول نهایی از سیستم خارج می‌کند. این m قطعه از مرکز ماشین کاری می‌آیند و در پشت ایستگاه مونتاژ جمع می‌شوند. در مرکز ماشین کاری m ماشین وجود دارد که از m قطعه خام که همیشه در دسترس هستند استفاده می‌کند. زمان مونتاژ $\frac{1}{\mu}$ و نمایی است. در لحظه‌ای‌که تمام m ماشین کار خود را به پایان ببرند همگی به محل انتظار حمل می‌شوند و مرکز ماشین کاری عملیات m قطعه بعدی را هم‌زمان شروع

می‌کند. زمان پروسه ماشین‌ها نمایی مستقل از هم با نرخ‌های $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_m$ است. هم‌زمان بدون شروع کار m ماشین حتی اگر بعضی از آن‌ها زودتر کار خود را تمام کنند با خط‌چین و در باکس Fork-join نشان داده شده است. واضح است که با این فرض زمان‌های ما بین ورود قطعات به ایستگاه مونتاژ متغیر تصادفی $\max_{1 \le i < m} E \times p(\mu_i)$ است. بنابراین یک صف G/M/1 خواهیم داشت.

۸. سیستم صف G/G/1

نتایج بسیار کمی برای این سیستم وجود دارد. تنها حدهایی بر روی مقادیر متوسط در حالت پایدار یافت شده است.

$$L \le p + \frac{\lambda^2 (V_a + V_s)}{2(1-p)}$$

$$W \le E(t_s) + \frac{\lambda (Va + V_s)}{2(1-p)}$$

t_a , t_s زمان‌های ما بین دو ورودی و زمان سرویس بوده و V_a , V_s نیز واریانس این زمان‌ها می‌باشند. در این رابطه $p = \dfrac{E[t_s]}{E[t_a]}$ است.

t_a : زمان‌های ما بین دو ورود

t_s : زمان سرویس

V_a : واریانس t_a

V_s : واریانس t_s

$$L_i = \lambda_i \omega_i$$

$$\Sigma \quad L = \Sigma \lambda_i \omega_i$$

$$L = \lambda \omega \longrightarrow \omega = \frac{L}{\lambda} = \frac{\Sigma L_i}{\Sigma \lambda_i} = \frac{\Sigma \lambda_i \omega_i}{\Sigma \lambda_i}$$

معرفي شبكه‌هاي صف

شبكه‌هاي باز : چند محل ورود و معمولا چند محل خروج ورود دارد.

شبكه‌هاي بسته : مقدار مشتريان ثابت است.

شبكه ةاي تركيبي : بعضي از مشتريان در شبكه باز و بعضي در شبكه بسته هستند.

مثال‌هاي صنعتي :

-۱

-۲

m-۳ ماشين موازي و r وسيله حمل و نقل مشابه وجود دارد. تمام قطعات از مركز ماشين‌كاري عبور مي‌كند سپس توسط يكي از AGVها حمل مي‌شوند.

٤- دو نوع قطعه داريم كه توسط AGV حمل مي‌شوند. سه نوع ماشين M_3, M_2, M_1 وجود دارد. نوع ۱ توسط M_1 يا M_2 نوع دوم قطعات توسط M_2 يا M_3 فرآيند مي‌شود. يك قطعه تنها يك عمليات لازم دارد. پس از فرآيند بدون نياز به AGV قطعه برداشته مي‌شود. مقدار فيكسچرها n_2, n_1 محدود است. انبار M_2 مي‌تواند هر دو نوع قطعه را در خود جاي دهد. φ_{ij} احتمالات مسير هستند.

قانون لتيل در شبكه‌هاي صف : قانون های لیتل می‌تواند در همه ی سیستم‌های تولیدی پیاده شود به شرط این که آن چهار شرط وجود داشته باشد.

يك سيستم توليدي را در نظر بگيريد كه از M مركز ماشين‌كاري تشكيل شده است. M_1, M_2, M_3 قطعات از يك منبع خارجي وارد شده برطبق يك ماتريس مسير حركت از مراكز مي‌گذرند و از سيستم خارج مي‌شوند. λ متوسط نرخ ورود قطعات فامر است L متوسط مقدار قطعات در سيستم (در جريان ساخت) و W متوسط مدت زمان ساخت MANUFECTURING LEODTIME است. با قانون سيتل داريم

$$\boxed{L = \lambda W}$$

براي هر مركز ماشين‌كاري i داريم : λ_i = نرخ ورود به مركز i ام

L_i = متوسط قطعات سيته ساخته ترمز

$i = 1,2,\ldots,m$ $\quad \boxed{L_i = \lambda_i W_i} \longleftarrow W_i$ = متوسط زمان ديدار مركز M_i

برای سیستم

با توجه به اينكه WIP كل سيستم برابر WIP تك‌تك مراكز است داريم : $\boxed{L = L_1 + L_2 + \ldots L_m}$ (توجه : اگر مركز مونتاژ داشته باشيم رابطة فوق صادق نيست).

$$\boxed{MLT = W = \frac{\sum^{m} \lambda_i W_i}{\sum_{i=1}^{m} \lambda_i}}$$

اگر يك قطعه بيش از يكبار يك مركز را ديدار كند، T_i كل زمان صرف شده در مركز i ام توسط قطعه در تمام ديدارهايش مي‌ناميم.

قطعات از خارج وارد مرکز شده و باید احتمالاتی از مرکز ماشین کاری عبور می کند

$L = \lambda W$

$L_i = \lambda_i W_i$

λ : نرخ ورود قطعات به مرکز

W : متوسط زمان ساخت

L : متوسط موجودی در جریان ساخت

$$\boxed{L_i = \lambda T_i} \qquad i = 1,2,\dots,m$$

یعني نسبت زمان ساخت در هر ایستگاه به کل زمان انتظار $\boxed{\dfrac{T_i}{W} = \dfrac{L_i}{L}}$ $\Rightarrow$ از رابطهٔ فوق و

$$\boxed{L = \lambda W}$$

برابر نسبت WIP مرکز به کل WIP است. از بین MLT و WIP اگر شما یکي را حداقل تستي دیگري مهم حداقل مي‌شود.

توجه : ما زمتي در رابطه با نوع زمان و ورودي ذکر کردیم :

مثال : فرض یك سیستم FMS سه نوع قطعه تولید مي‌کند. λ_i ، L_i ، W_i به ترتیب نرخ ورود، میزان در جریان ساخت و مدت‌زمان متوسط در جریان ساخت برون قطعه نوع i باشد. داریم

$$L_i = L_1 + L_2 + L_3 \qquad \lambda = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 \qquad \to W = \frac{\sum \lambda_i W_i}{\sum \lambda_i}$$

یعني متوسط زمان انتظار براي تمام قطعات ترکیب خطي از متوسط زمان انتظار در سیستم هر نوع قطعه است.

مثال ۲: در مثال فوق فرض کنید مقدار کل مشتریان سیستم N نفر و ثابت باشد. n_i کل تعداد مشتریان نوع iام است به نحوي که $\sum_{i=1}^{3} n_1 = N$. براساس قانون میتل داریم : (۱)

ین جا شرط ثابت بودن N
اعمال می‌شه

$$n_i = \lambda_i W_i \qquad i = 1,2,3$$
$$N = \lambda W \qquad \text{وبنابراین} \qquad \to \qquad W = \frac{\sum \lambda_i W_i}{\sum \lambda_i} = \frac{N}{\sum_{i=1}^{3} \lambda_i}$$

شبکه‌هاي صف باز (شبکه‌هاي صف جکسون)

شرح مسئله :

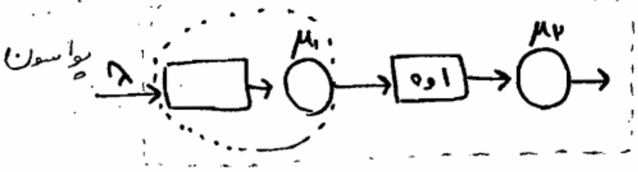
یك سیستم سادهتر سري با سرویس کننده را در نظر بگیرید. مشتریان با نرخ λ بر اساس پواسون وارد مي‌شوند و به ترتیب از سرویس کننده‌هایي و درم رد مي شوند (با میانگین زمان سرویس μ_2, μ_1). در مقابل هر سرویس کننده مي‌توان یك صف داشت.

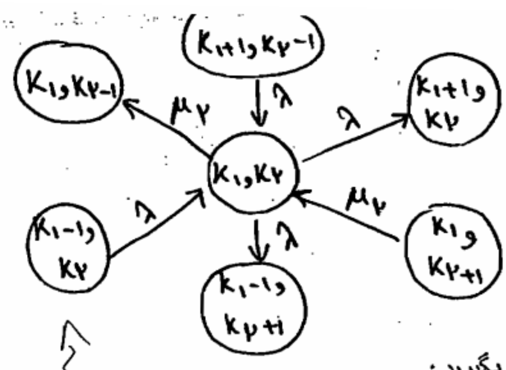
$N_1(t)$ و $N_2(t)$ را به ترتیب تعداد مشتریان در اولین و دومین گروه در زمان T مي‌نامیم.

پروسهٔ $\{X(t) = (N_1(t), N_2(t) : t \ge 0\}$ یك پروسهٔ زنجیروی مارکوفي است با فضاي حالت $\{(k_1, k_2) : k_1, k_2 = 0,1,\dots\}$ در حالت پایدار N_2, N_1 متوسط طول صف مي‌باشند.

$$P(k_1, k_2) = P\{N_1 = K_1 \quad N_2 = k_2\}$$

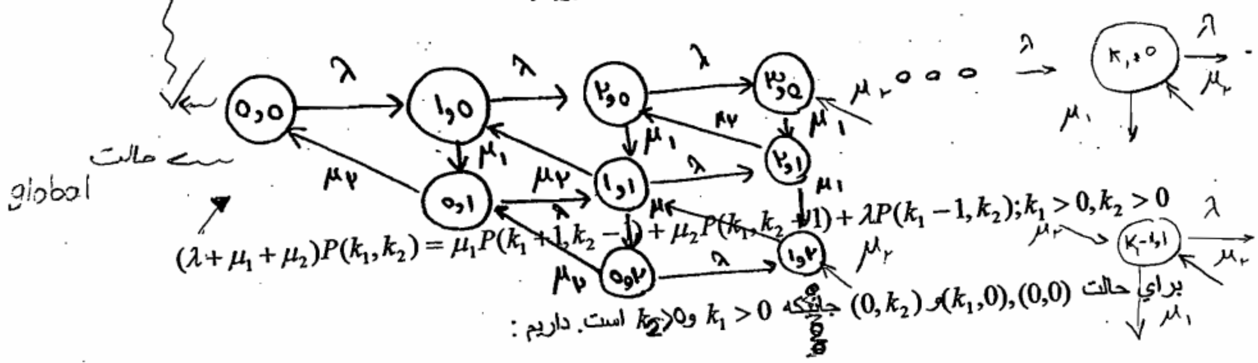
$P(k_1, k_2)$ احتمال حالت پایدار یافتن k_1 کار در سرویس ۱ و k_2 کار در سرویس ۲ است. اگر یك ذره‌اي یا سرویس از هر کدام از سرویس دهنده‌ها و رشته باشیم حالت عوض مي‌شود.





دیاگرام حالت با دو سرویس کننده سری

برای بدست آوردن احتمالات حالت شکل کلی زیر را در نظر بگیرید :



$$(\lambda+\mu_1+\mu_2)P(k_1,k_2)=\mu_1 P(k_1+1,k_2-1)+\mu_2 P(k_1,k_2+1)+\lambda P(k_1-1,k_2);k_1>0,k_2>0$$

برای حالت $(0,k_2)$ و $(k_1,0),(0,0)$ جائیکه $k_1>0$ و $k_2>0$ است. داریم :

$$\begin{cases} \lambda P(0,0)=\mu_2 P(0,1) \\ (\mu_1+\lambda)P(k_1,0)=\mu_2 P(k_1,1)+\lambda P(k_1-1,0) \\ (\mu_2+\lambda)P(0,k_2)=\mu_1 P(1,k_2-1)+\mu_2 P(0,k_2+1) \\ \sum_{k_1\ge 0}\sum_{k_2 0} P(k_1,k_2)=1 \quad , \quad \rho_1=\lambda/\mu_1 \quad , \quad \rho_2=\lambda/\mu_2 \\ P(k_1,k_2)=(1-\rho_1)\rho_1^{k_1}(1-\rho_2)\rho_2^{k_2} \qquad P(0,0)=(1-\rho_1)(1-\rho_2) \end{cases}$$

$\rho_1=\frac{\lambda}{\mu_1}$ $\rho_2=\frac{\lambda}{\mu_2}$

معادلهٔ فوق بصورت ضربی است. گرهٔ ۱ یك M/M/M و گره دوم هم یك M/M/M است. به نحویکه

$$P(k_1)=(1-p_1)p_1^{k_1} \qquad , p(k_2)=(1-p_2)P_2^{k_2}$$

بنابراین توزیع توام $P(k_1,k_2)$ حاصل ضرب احتمالات حاشیه‌ای $P_1(k_1)$ و $P_2(k_2)$ است و مستلزم

$$L_{\text{سیستم}}=\frac{P_1}{1-p_1}+\frac{P_2}{1-p_2}$$

$$W_{\text{سیستم}}=1/\lambda\left[\frac{p_1}{1-p_1}+\frac{p_2}{1-p_2}\right]$$

مثال: دو ماشین M_2,M_1 با فضای انبار نامحدود بصورت سری قرار گرفته‌اند. قطعات با نرخ ۱ قطعه در هر ۲ دقیقه وارد می‌شوند. زمان پروسه، ماشین ۱ و ۲ به ترتیب ۱ و ۲ دقیقه است. بنابراین

$$\lambda=0.5 \qquad \rho_1=0.5 \qquad ,\rho_2=0.25 \qquad \begin{pmatrix}\mu_1=1\\ \mu_2=2\end{pmatrix}$$

متوسط مقدار قطعات در ایستگاههای ۱، ۲

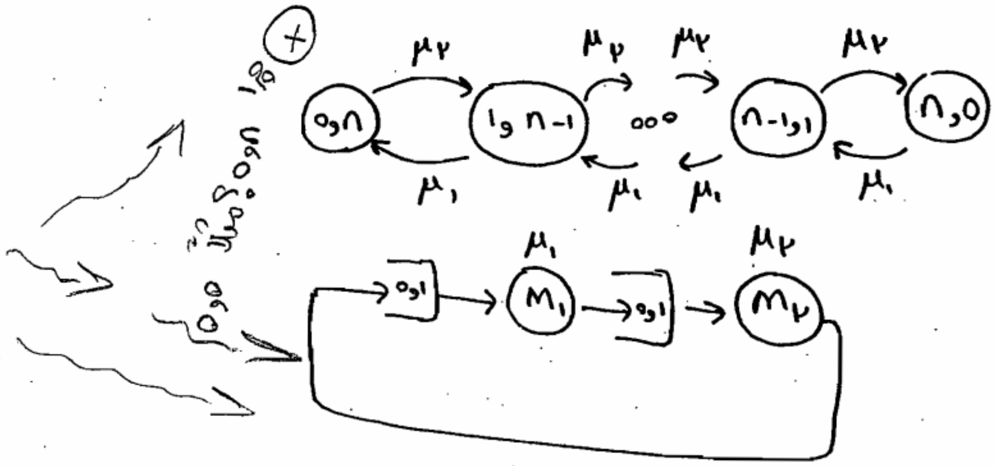
$$\begin{cases} L_1=\frac{p_1}{1-p_1}=1 \\ L_2=\frac{p_2}{1-p_2}=1/3 \end{cases} \xrightarrow[\text{سیکل}]{\text{با}}$$

متوسط زمان انتظار در ایستگاهها

$$\begin{cases} W_1=\frac{L_1}{\lambda}=2\min \\ W_2=\frac{L_2}{\lambda}=2/3\min \end{cases}$$

در نتیجه $W = W_1 + W_2 = 8/3\,\text{min}$ (مشاهده کنید که $W = \dfrac{L_1 + L_2}{\lambda}$ است.)

حالت ۱:



در حالت اولش در نظر می‌گیره که هیچ‌کی تو اول نیست و همه تو دومی هستن
(0, n)

حال يك شبكه بسته را از نظر بگيريد
تعداد كل مشتريان N نفر است كه در سيستم ثابت مي‌باشند.
يك سيستم AMS را در نظر بگيريد كه N پالت وارد به نحوي كه N كار را در سيستم گردش مي‌دهند
به محض اينكه يك كار به اتمام مي رسد فرض مي‌شود كار ديگري وارد سيستم مي‌شود و پالت آزاد شده
را اشغال مي‌كند. بنابراين ورود يك كار به سيستم بستگي به خروج كار ديگر دارد نه حالت سيستم.
* يك خط سري بسته را با دو ماشين M_2, M_1 در نظر بگيريد
دوباره حالت سيستم را با (k_1, k_2)
نشان مي‌دهيم كه مقدار كارها در M_2, M_1 هستند. $k_1 + k_2 = n$ است. زمان سرويس M_2, M_1
نمايي فرض مي‌شوند و باز هر سرويس دهنده حداقل N-1 محل وارد تا حلات بلوكاژ روي ندهد.
دياگرام حالت سيستم عبارتست از : هر بافر دارای n-1 مکان است.

معادلات تعادل عبارتند از :

$$(\mu_1 + \mu_2)P(k, n-k) = \mu_1 P(k+1, n-k-1) + \mu_2 P(k-1, n-k+1) \quad k \neq 0, k \neq n$$

$$\mu_2 P(0,n) = \mu_1 P(1, n-1)$$
$$\mu_1 P(n,0) = \mu_2 P(n-1,1)$$

فرض كنيد $\rho_1 = \dfrac{a}{\mu_1}$, $\rho_2 = \dfrac{a}{\mu_2}$ و a يك ثابت دلخواه باشد، در اين صورت

$$P(k_1, k_2) = \frac{1}{C(n)} \rho_1^{k_1} \rho_2^{k_2}$$

$C(a)$ به نحوي انتخاب مي‌شود كه $\sum_{k=0}^{n} P(k, n-k) = 1$ باشد.

اگر $a = \lambda_1$ قرار داده شود و λ_1 نرخ ورودي كارها به M_1 باشد همان تدابير سابق براي ρ_1 و ρ_2 را خواهيم داشت.

توجه : $\lambda_1 = \mu_2(1 - P(n,0))$

مثال: دو انتخاب معمول براي a عبارتند از : $a = 1$ و $a = \mu_1$ با اين آخري داريم

$$\rho_1 = 1, \quad \rho_2 = \frac{\mu_1}{\mu_2} \longrightarrow P(k, n-k) = \frac{1}{C(n)} \rho_2^{n-k} \qquad k = 0,1,\dots n$$

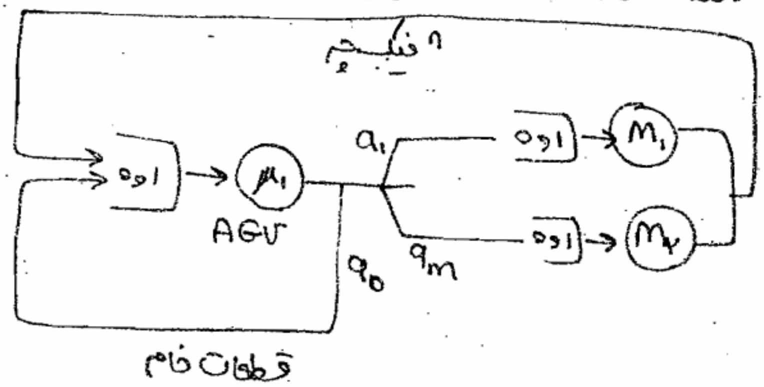
$$\frac{1}{C(n)} \sum_{k=0}^{n} \rho_2^{n-k} = \frac{1}{C(n)} \frac{1 - P_2^{n+1}}{1 - P_2} = 1 \longrightarrow \begin{cases} C(n) = \dfrac{1 - \rho_2^{n+1}}{1 - \rho_2} & \mu_1 \neq \mu_2 \\ C(n) = n+1 & \mu_1 = \mu_2 \end{cases}$$

$$\text{if} \quad \mu_1 \neq \mu_2 \longrightarrow u_1 = 1 - P(0,n) = 1 - \frac{P_2^n}{C(n)} = \frac{P_2(1 - P_2^n)}{1 - P_2^{n+1}}$$

بهره وری M_1

$$u_2 = 1 - P(n,0) = 1 - \frac{1}{C(n)} = \frac{p_2(1-p_2^n)}{1-p_2^{n+1}}$$

راندمان کلی سیستم با $u_2\mu_2$ بدست می‌آورید که در این حالت خاص برابر $u_1\mu_1$ است.



حالت سیستم $(k_0, k_1, \dots, k_m)$

$$\sum_{i=0}^{m} k_i = n$$

تعداد تقسیمات ممکن n کار در $m+1$ گره $\binom{n+m}{m}$ است.

اگر $q_0 > 0$ باشد یک CTMC خواهیم داشت:

ماتریس احتمالات انتقال

$$P = \begin{bmatrix} q_0 & q_1 & \dots & q_m \\ \vdots & & & \\ 1 & 0 & & 0 \end{bmatrix}$$

با حل $V = VP$ می‌توان تعداد بار ویزیت یک قطعه از یک مرکز را معین کرد. $(V_0, V_1, \dots, V_m)$

$m+1$ معادله

$$\begin{cases} V_0 = V_0 q_0 + \sum_{i=1}^{m} V_i \\ V_i = q_i V_i \qquad i = 0, 1, \dots, m \end{cases}$$

با انتخاب یک مقدار دلخواه V_0 ($\frac{1}{q_0}$ و μ_1 و λ) می‌توان V_n ها را از معادلات فوق حل کرد.

$$\pi(k_0, k_1, \dots, k_m) = \frac{1}{C(n)} \prod_{i=0}^{m} \rho_i^{k_i}$$

$$= \frac{1}{C(n)} \prod_{i=0}^{m} \left(\frac{V_i}{\mu_i}\right)^{k_i}$$

اگر $m+1$ گره با زمان سرویس نمایی $\frac{1}{\mu_i}$ داشته باشیم، P_{ij} احتمال رفتن از گره i به گره j باشد. $\sum_{j=0}^{m} P_{ij} = 1$

$\lambda_i = \sum_{j=0}^{m} \lambda_j P_{ji}$ $\quad i = 0, 1, 2, \dots, m$ متوسط کل ورودی‌های هر گره i در زمان

معادلات ترافیک:

$$V_i = \sum_{j=0}^{m} V_j P_{ji}$$

$L_i(n)$: متوسط تعداد کارهای گره i ام

$W_i(n)$: متوسط زمان سپری کردن یک کار در گره i ام

v_i: تعداد ملاقات گره i ام

$T(n)$: خروجی سیستم (متوسط تعداد کارهایی که سیستم را ترک می کنند.)

(1) $$W_i = \frac{L_i(n)}{U_i(n)\mu_i} = \frac{[1+L_i(n-1)]}{\mu_i} \qquad i=1,2,\dots,m$$

$$\lambda_i = T(n)v_i$$

(2) $$L_i(n) = T(n)\, v_i\, W_i(n)$$

$$\sum_{i=0}^{m} L_i(n) = n \longrightarrow \boxed{T(n)\sum v_i W_i = n}$$

(3) $$T_n = \frac{n}{\sum_{i=0}^{m} v_i W}$$

مثال:

مقادیر داده شده $\begin{cases} L_0(0)=L_1(0)=L_2(0)=0 \\ V_0=\mu_0 \qquad V_0 = \dfrac{\mu\,\mu_1}{\mu_1-\mu} = \mu_1 \end{cases}$

$$W_0(1)=\frac{1}{\mu_0}, \quad W_1(1)=\frac{1}{\mu_1} \quad \text{و} \quad W_2(1)=\frac{1}{\mu_2}$$

$$V_0W_0(1)=1 \qquad V_1W_1(1)=V_2W_2(1)=r$$

$$T(1)=\frac{1}{1+2r} \Rightarrow$$ مقادیر $L_i(1)$ ها قابل محاسبه می شوند.

$$L_0(1)=\frac{1}{1+2r}$$

$$L_1(1)=L_2(1)=\frac{r}{1+2r}$$

۲ زنجیره‌های مارکوف

فرآیندهای مارکوفی ابزاری قدرتمند، انعطاف‌پذیر و کارآ برای تحلیل سیستم‌های صف هستند به طوری که بسیاری از سیستم‌های صف را می‌توان به صورت یک زنجیره مارکوف مدل کرده و خصوصیات آن مانند کارآیی، طول صف، زمان انتظار و ... را به راحتی محاسبه کرد. بسیاری از قوانین و روش‌های تحلیل صف با استفاده از فرآیندهای مارکوفی اثبات می‌شود و حتی صحت فرمولهایی که در تحلیل سیستم‌های صف مورد استفاده قرار می‌گیرد با استفاده از فرآیندهای مارکوفی بررسی می‌شود.

فرآیندهای تصادفی در ابتدا در علم فیزیک و برای توصیف پدیده‌های تصادفی که حالت آنها در طی زمان تغییر می‌کند مطرح شد. در مدلسازی هر سیستم تصادفی که حالت آن در طی زمان (فضا یا سایر پارامترها) تغییر می‌کند، مدل باید قادر به توصیف حالت سیستم در طول زمان باشد. به عبارت دیگر مدل شامل دنباله‌ای از متغیرهای تصادفی که پدیده تصادفی را توصیف کند.

تعریف ۲-۱.

فرض کنید t متغیر زمان و $x(t)$ متغیر تصادفی متناسب با t باشد. در این صورت یک فرآیند تصادفی مجموعه‌ای از متغیرهای تصادفی $\{x(t):t\in T\}$ است که در آن $x(t)$ به ازای هر $t\in T$ یک متغیر تصادفی است.

با این توضیح فرآیندهای تصادفی مفهوم تعمیم یافته متغیرهای تصادفی است. برای تعریف یک فرآیند تصادفی داریم:

T = مجموعه اندیس فرآیند (فرآیند).

مقادیر x = حالات فرآیند.

S = فضای حالات فرآیند.

اگر T قابل شمارش باشد، فرآیند تصادفی زمان-گسسته و اگر یک فاصله (زمانی) از اعداد حقیقی باشد فرآیند پارامتر (زمان)-پیوسته گویند. به طور مثال $\{x(t):t\geq 0\}$ فرآیند تصادفی زمان-پیوسته و $\{x_n:n=0,1,2,\ldots\}$ فرآیند تصادفی زمان-گسسته است. همین طور مقادیر متغیر تصادفی هم می‌توانند پیوسته و یا گسسته باشد. به طور خاص اگر

S مجموعه‌ای قابل شمارش باشد، فرآیند تصادفی را زنجیره گویند. با توجه به توضیحات بالا، فرآیندهای تصادفی را می‌توان به ۴ دسته تقسیم کرد:

۱. زمان-گسسته؛ فضای حالت گسسته

۲. زمان گسسته؛ فضای حالت پیوسته

۳. زمان پیوسته؛ فضای حالت گسسته

۴. زمان پیوسته؛ فضای حالت پیوسته

فضای حالت گسسته

با توجه به تعریف زنجیره ها، دسته اول و سوم تشکیل زنجیره می‌دهند.

مثال ۲-۱

فرض کنید $x(t)$ نمایش دهنده تعداد مشتریانی است که در زمان t وارد یک فروشگاه می‌شوند. در این صورت زنجیره $\{x(t):t\geq 0\}$ در دسته سوم جای می‌گیرد.

مثال ۲-۲

می‌خواهیم یک دستگاه را در لحظات خاصی از زمان از نظر سالم یا خراب بودن بررسی کنیم. اگر $t_1, t_2, \ldots t_n$ لحظات بررسی باشند و x_i وضعیت (حالت) دستگاه را در لحظه i ام نشان دهد، $\{x_i:i\in N\}$ که در آن x_i متغیر گسسته با مقادیر ممکن ۱ (دستگاه در حال کار) و صفر (دستگاه خراب) است، تشکیل یک فرآیند تصادفی به صورت زنجیره زمان-گسسته می‌دهد.

$$T=\{t_1,t_2,\ldots\};S=\{0,1\}$$

اگر حالت ماشین در هر لحظه دلخواه بررسی گردد، مجموعه به صورت $T=[0,\infty]$ بوده و فرآیند $\{x(t):t\geq 0\}$ تشکیل یک زنجیره زمان-پیوسته را خواهد داد.

۱.۲ زنجیره مارکوف زمان گسسته (DTMC)

فرض کنید یک سیستم را در زمان‌های مشخص $t=0,1,2,3\ldots$ مشاهده کنیم و مشاهدات خود را با $x_0,x_1,x_2,\ldots$ نشان دهیم. بنابراین x_n متغیر تصادفی است که حالت سیستم را نشان می‌دهد. در این صورت $x_n=i$ یعنی سیستم در زمان nام در حالت i

قرار داشته است. این نماد گذاری برای حالت زمان-پیوسته نیز صادق است بنابراین $x_t = i; t \geq 0$ یعنی اینکه سیستم در زمان t در حالت i قرار دارد.

یک زنجیره مارکوف زمان گسسته (DTMC)، فرآیند تصادفی زمان-گسسته‌ای است که دارای فضای حالت قابل شمارش S است به نحوی‌که به ازای تمام $j, i \in S$, $n \in N$ و $i_0, i_1, \dots, i_{n-2}$ داریم:

معادله ۲-۱

$$p\{x_n = j \mid x_{n-1} = i, x_{n-2} = i_{n-2}; \dots x_1 = i_1, x_0 = i_0\} = P\{x_n = j \mid x_{n-1} = i\}$$

رابطه بالا بیان می‌کند که وضعیت آینده سیستم از مسیری که سیستم تا به حال طی کرده است مستقل است. به عبارت دیگر، این فرآیند تصادفی دارای خاصیت عدم خاطره است. به چنین فرآیندی، یک زنجیره مارکوف گویند. احتمال شرطی $P\{x_n = j \mid x_{n-1} = i\}$ احتمال گذار از حالت i به حالت j نامیده می‌شود که به صورت کلی زیر نمایش داده می‌شود و به طور خلاصه با نماد زیر نمایش داده می‌شود:

معادله ۲-۲

$$P_{ij}(n) = P\{x_n = j \mid x_{n-1} = i\}$$

بنابراین $P_{ij}(n)$ احتمال این است که اگر سیستم در حال حاضر در وضعیت i قرار داشته باشد، در مرحله بعدی در وضعیت j قرار گیرد.

مثال ۲-۳

هوای یک شهر در یک روز خاص را در نظر بگیرید که می‌تواند آفتابی یا بارانی باشد. بارانی و یا آفتابی بودن هوا یک پدیده کاملا تصادفی نیست و به عوامل مختلفی بستگی دارد. فرض کنید که هوای یک روز شهر فقط به هوای روز قبل آن بستگی داشته باشد. به طور مثال اگر امروز بارانی باشد هوای فردا به احتمال ۶۰٪ بارانی و به احتمال ۴۰٪ آفتابی است و اگر هوای امروز آفتابی باشد؛ فردا به احتمال ۵۵٪ آفتابی و به احتمال ۴۵٪ بارانی است. حال اگر اثبات کنیم که هوای فردا فقط و فقط به هوای امروز بستگی دارد، می‌توانیم برای پیش بینی هوای فردای شهر از مدلسازی مارکوفی استفاده کنیم. فرض کنید هوای آفتابی را با صفر و هوای بارانی را با یک نمایش دهیم. در این صورت برای حرکت از یک وضعیت به وضعیت دیگر احتمال ثابت و مشخصی وجود دارد که به صورت زیر نمایش می‌دهیم:

$$P = \begin{bmatrix} p_{00} & p_{01} \\ p_{10} & p_{11} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.55 & 0.45 \\ 0.4 & 0.6 \end{bmatrix}$$

به طور مثال، p_{01} یعنی احتمال اینکه فردا بارانی باشد به شرط اینکه امروز هوا آفتابی بوده باشد.

تعریف ۲-۲

اگر احتمال انتقال بین مراحل یک زنجیره مارکوف ، فقط و فقط به فاصله بین مراحل وابسته باشد، به آن زنجیره مارکوف همگن می‌گویند یعنی:

معادله ۲-۳

$$p_{ij}(n) = P\{x_n = j \mid x_{n-1} = i\} = P\{x_{n+m} = j \mid x_{n+m-1} = i\}; \quad \forall m = -(n-1), -(n-2), \dots, 0, 1, \dots$$

با مقایسه معادله ۲-۱ و معادله ۲-۳ می‌بینید که در زنجیره مارکوف همگن، عملا احتمال انتقال به پارامتر n وابسته نیست. می‌توان $p_{ij}(n)$ را به صورت ساده p_{ij} نمایش می‌دهیم که نشان دهنده احتمال تغییر حالت از j به i در طی یک واحد زمان است. مثال بالا مثالی از زنجیره مارکوف همگن است.

تعریف ۲-۳

P، ماتریس احتمال انتقال یک مرحله ای یک زنجیره مارکوف به صورت زیر تعریف می‌شود:

معادله ۲-۴

$$P = [p_{ij}] = \begin{bmatrix} p_{00} & p_{01} & p_{02} \cdots \\ p_{10} & p_{11} & p_{12} \cdots \\ p_{\dots} & p_{21} & p_{22} \cdots \end{bmatrix}$$

به ماتریس بالا که اجزای آن در قوانین پایه‌ای احتمالات صدق می‌کنند، ماتریس احتمال گذار گفته می‌شود. این قوانین عبارت اند از:

معادله ۲-۵

$$\begin{cases} \sum_j p_{ij} = 1 & \forall i \\ 0 \leq p_{ij} \leq 1 & \forall ij \end{cases}$$

نمونه از ماتریس احتمال انتقال یک مرحله ای را در مثال ۲-۳ دیدیم.

مثال ۲-۴

Fuzzy

سه نفر با هم توپ بازی می‌کنند. فرد الف توپ را همیشه برای فرد ب می‌اندازد و فرد ب نیز توپ را برای فرد ج می‌اندازد. ولی ج توپ را با احتمال $1/3$ برای الف و با احتمال $2/3$ برای فرد ب می‌اندازد. ماتریس احتمال انتقال یک مرحله ای آن به صورت زیر خواهد بود.

$$P=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1/3 & 2/3 & 0 \end{bmatrix}$$

مشخص است که جمع احتمال انتقالات در هر سطر برابر واحد است و هرکدام از آنها نیز در قوانین پایه ای احتمالات صدق می‌کنند.

مثال ۲-۵

فرض کنید دو کیسه داریم که در هر کدام از آنها سه توپ وجود دارد. از این شش توپ، سه توپ سفید و سه توپ دیگر سیاه هستند. در یک بازی به طور همزمان، یک توپ از هر کدام برداشته و به دیگری منتقل می‌کنیم. اثبات کنید که تعداد هر توپ در هر کیسه، تشکیل یک زنجیره مارکوفی می‌دهد.

در اینجا تعداد توپ سفید را در کیسه اول بررسی می‌کنیم (مشخص است که تفاوتی بین توپ سفید و سیاه و یا کیسه اول یا دوم وجود ندارد). در هر بار بازی، تعداد توپ سفید در کیسه اول می‌تواند ۰، ۱، ۲، یا ۳ باشد. فرض کنید که صفر توپ سفید در کیسه اول باشد. بدیهی است که $p_{00}=0$ و در حرکت بعدی حتما یک توپ سفید وارد کیسه می‌شود بنابراین $p_{01}=1$ و همین طور امکان ندارد در یک حرکت بیش از یک توپ وارد کیسه شود($p_{03}=0$ و $p_{02}=0$).

در صورتی که یک توپ درکیسه اول باشد، بدیهی است که $p_{13}=0$. این توپ ممکن است به احتمال $\frac{1}{3}$ انتخاب شده و به کیسه دوم برود. به احتمال $\frac{1}{3}$ هم ممکن است یک توپ سیاه از کیسه دوم انتخاب شود و وارد کیسه اول شود. بنابراین $p_{10}=\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}$ همین طور با احتمال $\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}$ ممکن است توپ سفید کیسه اول موجود در کیسه اول با یک توپ سفید از کیسه دوم جابجا شود و همینطور با احتمال $\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}$ یک توپ سیاه از کیسه اول با توپ سیاه کیسه دوم جابجا شود تا تعداد توپ سفید در کیسه اول ثابت باقی بماند. بنابراین $p_{11}=\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}+\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}$ به همین ترتیب ماتریس گذار را به صورت زیر خواهیم داشت:

$$P=\begin{array}{c|cccc} & 0 & 1 & 2 & 3 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{1}{3}\times\frac{1}{3} & \frac{1}{3}\times\frac{2}{3}+\frac{2}{3}\times\frac{1}{3} & \frac{2}{3}\times\frac{2}{3} & 0 \\ 2 & 0 & \frac{2}{3}\times\frac{2}{3} & \frac{1}{3}\times\frac{2}{3}+\frac{2}{3}\times\frac{1}{3} & \frac{1}{3}\times\frac{1}{3} \\ 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}$$

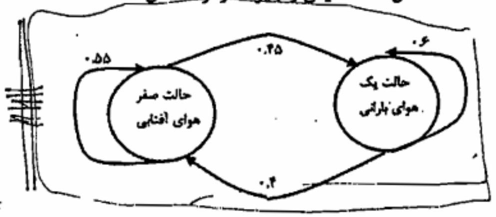
مثال ۲-۶

فرآیند برنولی را در نظر بگیرید که پارامتر $0 \prec p \prec 1$ دارد. می‌توان متغیر تصادفی برنولی را به صورت یک فرآیند برنولی با شرط زیر مدل کرد:

$$p_{ij}=\begin{cases} p & j=i+1 \\ 1-p & j=i \end{cases}$$

شیوه دیگری از نمایش زنجیره مارکوف استفاده از نمودار حالات است. نمودار حالات مربوط به مثال ۲-۳ در شکل ۲-۱ نمایش داده شده است.

شکل ۲-۱-نمایش زنجیره مارکوف مثال ۲-۳



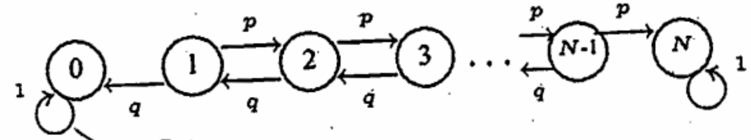
مثال ۲-۷

مسئله نابودی قمارباز را در نظر بگیرید. بازی به این صورت است دو قمار باز در مجموع n واحد پول دارند (فرض کنید قمار باز اول i واحد و قمارباز دوم j واحد و در مجموع n واحد پول برای بازی وجود دارد). سکه ای را پرتاب می‌کنند. در صورتی که شیر بیاید قمار باز اول یک واحد از قمار باز دوم پول دریافت می‌کند و در غیر این صورت قمار باز دوم یک واحد پول از قمار باز اول پول دریافت می‌کند. فرض کنید سکه اریب بوده و با احتمال p شیر و با احتمال 1-p خط می‌آید. در شکل ۲-۲ گراف این بازی را به صورت یک زنجیره

مارکوف می‌بینید. ماتریس احتمال انتقال حالت این بازی را برای حالت خاص n=3 به صورت زیر است:

$$P=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 1-p & 0 & p & 0\\ 0 & 1-p & 0 & p\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

شکل ۲-۲- دیاگرام حالات زنجیره مارکوف مسئله نابودی قمارباز



چون ورودی

۱.۱.۲ احتمالات انتقال چند مرحله‌ای در حالت همگن

زوار پول‌ها به صفر برسد دیگر بازی تمام است

در مثال ۲-۳ فرض کنید که هوای امروز بارانی است. با توجه به مقادیر احتمال انتقال یک مرحله‌ای، می‌توان هوای فردا را حدس زد. ولی آیا می‌توان هوای m روز بعد را نیز حدس زد؟ پاسخ مثبت است. اگر بتوانیم ماتریس احتمال انتقال را برای چند مرحله تعمیم دهیم؛ می‌توان به این هدف دست پیدا کرد. برای به دست آوردن ماتریس احتمال انتقال n مرحله ای، به چند قضیه و تعریف مبنایی نیاز داریم که در ادامه به بررسی آنها می‌پردازیم.

تعریف ۲-۴

به طور تعمیم یافته، یک DTMC با احتمالات انتقال n مرحله‌ای به صورت زیر زیر تشریح می‌گردد:

معادله ۲-۶
$$p_{ij}(m,\, m+n) = p\{x_{m+n} = j \mid x_m = i\} \quad \text{for } m,n \in N;\; i,j \in S$$

این معادله بیان می‌کند: اگر الان (که در زمان m هستیم) سیستم در وضعیت i باشد، با چه احتمالی پس از گذشت n مرحله به حالت j می‌رسد. احتمال انتقال n مرحله ای از حالت i به حالت j را به طور خلاصه با $p_{ij}^{(n)}$ نمایش می‌دهیم.

نکته ۲-۱

حالت خاص احتمال انتقال n مرحله ای زمانی اتفاق می‌افتد که n=1 باشد که به آن احتمال انتقال یک مرحله ای می‌گویند. در این صورت خواهیم داشت:

معادله ۲-۷
$$p_{ij}^{(1)} = p_{ij} = p\{x_n = j \mid x_{n-1} = i\},\; n \ge 1$$

تعریف ۲-۵

بردار وضعیت اولیه سیستم را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\pi(0) = \{\pi_0, \pi_1, \dots, \pi_n\}$$

به طوریکه

$$\pi_j = P(X_0 = j) \quad j \in N$$

π_j احتمال حضور سیستم در وضعیت j در لحظه صفر (آغازین) را نشان می‌دهد.

تعریف ۲-۶

اگر مقدار $p_{ij}(m,m+n)$ از زمان فعلی سیستم مستقل باشند، DTMC همگن است و تنها به n بستگی دارد. یعنی در گذار چند مرحله‌ای، احتمال فقط به تعداد مراحل گذار بستگی دارد:

معادله ۲-۸
$$p_{ij}(m,\, m+n) = p\{x_n = j \mid x_0 = i\} = p_{ij}^{(n)};\; \forall ij \in S,\;\; \forall m,n \in N$$

دقت کنید، این عبارت به این معنی است که در تمام لحظات، مقادیر احتمالات انتقال یکسان باقی می‌ماند و برای همه m، این عبارت صحیح است (معادله ۲-۶ و معادله ۲-۸ را مقایسه کنید). با توجه به اینکه این مقدار مستقل از m است، احتمال گذار چندمرحله‌ای در زنجیره‌های همگن را با $p_{ij}^{(n)}$ نمایش می‌دهیم.

مبنای تمام تحلیل‌هایی که در تئوری صف انجام می‌شود، (معادله معروف به چاپمن کولموگرف است. صورت این معادله به شرح زیر است:)

تعریف ۲-۷

برای $m,n \ge 0$، $i,j \in S$ در $\text{DTMC}\{x_n \in S : n \in N\}$ و $k \in S$ ؛ معادلات ذیل برقرار است:

معادله ۲-۹
$$p_{ij}^{(m+n)} = \sum_{k\in s} p_{ik}^{(m)} p_{kj}^{(n)} \quad \text{chapmon} - \text{kolmogorov}$$

که صورت ماتریسی آن به صورت زیر نمایش داده می‌شود:

معادله ۲-۱۰
$$p^{(n+m)} = p^{(m)} p^{(n)}$$

معادله ۲-۱۰ نشان می‌دهد که می‌توان ماتریس احتمال گذار چند مرحله‌ای را از ضرب دو ماتریس احتمال چندمرحله‌ای به دست آورد. به عبارتی دیگر می‌توان احتمال انتقال از حالت i به j در طی $m+n$ را با ضرب احتمال انتقال m مرحله‌ای به حالت میانی k و احتمال انتقال nمرحله‌ای k به j به دست آورد. با استفاده از این مفهوم، می‌توان محاسبه احتمال انتقال را ساده کرد.

تعریف ۲-۸

ماتریس احتمال انتقال n مرحله ای ($P^{(n)}$) برابر است توان nام ماتریس احتمال انتقال یک مرحله ای (P^n):

معادله ۲-۱۱
$$*\ P^{(n)} = [p_{ij}^{(n)}];\ n \ge 0$$

دقت کنید که موارد ذکر شده در معادله ۲-۴ در اینجا برقرار است. برای اثبات کافی است صورت ماتریسی قضیه کولموگرف را در نظر بگیرید. داریم:

$$\boxed{p^{(n)} = p^{(r)} p^{(n-r)}}$$

حال به صورت زیر داریم:

$$p^{(n)} = p^{(1)} p^{(n-1)} = p^1 p^{(n-1)}$$
$$p^{(n)} = p^1 p^{(1)} p^{(n-2)} = p^1 p^1 p^{(n-1)} = p^2 p^{(n-1)} \ldots$$

معادله ۲-۱۲
$$p^{(n)} = p^n$$

با داشتن بردار وضعیت اولیه به فرم ماتریسی داریم:

معادله ۲-۱۳
$$\Pi(n) = \Pi(0) \times P^{(n)} = \Pi(0) P^n \qquad n = 0,1,2\ldots$$
$$\Pi(n)\boxed{p_0(n) \quad p_1(n)\ldots}$$

که $\Pi(0)$ نشان دهنده بردار وضعیت اولیه است(تعریف ۲-۵). $p_i(n)$ احتمال حضور سیستم در وضعیت iام در مرحله nام است.(بنابراین با داشتن p.nf وضعیت اولیه، می‌توان بردار احتمال وضعیت سیستم در آینده را محاسبه کرد.)

مثال ۲-۸

مثال ۲-۳ را در نظر بگیرید. احتمال این که ۴ روز بعد، هوای بارانی باشد به شرط اینکه هوای امروز بارانی بوده باشد، چه قدر است؟

ما به دنبال ماتریس احتمال انتقال ۴ مرحله ای هستیم. بنابراین

$$p^{(4)} = P^4 \overset{\text{بارانی}}{=} * \begin{bmatrix} 0.55 & 0.45 \\ 0.4 & 0.6 \end{bmatrix}^4 = \begin{bmatrix} 0.4708 & 0.5291 \\ 0.4703 & 0.5296 \end{bmatrix}$$

بنابراین، احتمال اینکه هوای ۴ روز بعد بارانی باشد به شرط اینکه امروز بارانی بوده باشد برابراست با : $p_{11}^{(4)} = 0.5296$ می‌توانستیم محاسبات را به شیوه پیشرفته تری نیز انجام دهیم (معادله ۲-۱۳). به این صورت که میدانیم هوای امروز بارانی بوده است. در نتیجه$[0,1] = \pi(0)\ \pi(0)$ ماتریس وضعیت اولیه است. آنگاه

$$\pi(4) = \pi(0)P^4 = [0,1]\begin{bmatrix} 0.55 & 0.45 \\ 0.4 & 0.6 \end{bmatrix}^4 = [0.4703, 0.5296] =$$
$$[p_0(n), p_1(n)]$$

ماتریس نهایی شامل بردار احتمالی آب و هوا پس از ۴ روز است.

مثال ۲-۹

فرض کنید که یک کارمند بازنشسته، در پایان هر ماه ۲ واحد پولی حقوق می‌گیرد. مخارج زندگی او در خلال هر ماه با احتمال p_i برابر i واحد پولی است ($\sum_i p_i = 1; i = 1,\ldots,4$). در صورتی که در انتهای ماه بیش از ۳ واحد پولی در دست داشته باشد، مازاد آن را به پسرش می‌دهد. اگر در ابتدای این ماه سرمایه‌ای معادل ۵ واحد پولی در دست داشته باشد، با چه احتمالی پس از چهار ماه، سرمایه او به یک یا کمتر کاهش می‌یابد؟

این زنجیره می‌تواند حالات $\{\le 1,2,3\}$ بگیرد، چرا که اگر بیش از سه واحد پولی در دست داشته باشد، مازاد آن را به فرزند خود می‌دهد. همچنین ≤ 1 حالتی است که یک

واحد پولی یا کمتر در دست داشته باشد. به راحتی می‌توان دید که ماتریس گذار این زنجیره به شکل زیر است:

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \end{array} \\ P= & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ P_3+P_4 & P_2 & P_1 \\ P_4 & P_3 & P_1+P_2 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \leq 1+2 \\ 2+2 \\ 3+2 \end{array}$$

چون با ازای واحی دیگر ۵ را در سطر نمی‌گیرد.

با توجه به اینکه این فرد ۵ واحد پول در ابتدای ماه دارد و ۲ واحد نیز در انتهای ماه حقوق می‌گیرد، حداقل ۷ واحد پولی به صورت بالقوه در دست اوست. از طرفی حداکثر مخارج او برابر ۴ واحد در ماه است و به عبارتی دیگر، با کم کردن هزینه‌های زندگی حداقل ۳ واحد پولی برای او در انتهای ماه باقی می‌ماند. با این فرض که او مازاد ۳ واحد پولی را به فرزندش می‌دهد، بنابراین حالت این زنجیره در انتهای ماه ۳ است. حال احتمال اینکه بعد از ۴ ماه یک واحد پولی یا کمتر پول داشته باشد برابر است با $P_{3,1}^{(4)}=P_{3,1}^{4}$ که به راحتی محاسبه می‌شود.

۱+۲
۲+۲
۳+۲
۴+۲

مثال ۲-۱۰

فرآیند $\{X_n, n=0,1,\ldots\}$ زیر را در نظر بگیرید:

$$P\{X_{n+1}=j \mid X_n=i, X_{n-1}=i_{n-1},\ldots,X_0=i_0\}=\begin{cases} P_{ij}^{I} & n:Even \\ P_{ij}^{II} & n:Odd \end{cases};i,j=0,1,2.$$

و داریم:

$$\sum_{j=1}^{2} P_{ij}^{I}=\sum_{j=1}^{2} P_{ij}^{II}=1$$

آیا زنجیره فوق مارکوفی است؟ فضای حالت را بازتعریف کنید تا به صورت یک زنجیره مارکوفی تبدیل شود.

در زنجیره مارکوف، حالت آینده سیستم فقط به وضعیت جاری سیستم بستگی دارد و از گذشته مستقل است. ولی در زنجیره فوق‌الذکر، حالت سیستم با توجه به زوج و فرد بودن مرحله گذار این خاصیت را رعایت نمی‌کند:

$$P^{I}=\begin{bmatrix} p_{00}^{I} & p_{01}^{I} & p_{02}^{I} \\ p_{10}^{I} & p_{11}^{I} & p_{12}^{I} \\ p_{20}^{I} & p_{21}^{I} & p_{22}^{I} \end{bmatrix},\ P^{II}=\begin{bmatrix} p_{00}^{II} & p_{01}^{II} & p_{02}^{II} \\ p_{10}^{II} & p_{11}^{II} & p_{12}^{II} \\ p_{20}^{II} & p_{21}^{II} & p_{22}^{II} \end{bmatrix}$$

می‌توان فضای حالت زنجیره مارکوف را به صورت زیر تعریف کرد $\{0,1,2,\tilde{0},\tilde{1},\tilde{2}\}$ که اعدادی که $\tilde{0}$ مربوط به حالت زوج و 0 مربوط به حالت فرد است. بدیهی است امکان ندارد که سیستم از حالت زوج به زوج و یا از فرد به فرد برود:

$$\begin{array}{cc} & \\ P= & \begin{array}{c} 0 \\ \tilde{0} \\ 1 \\ \tilde{1} \\ 2 \\ \tilde{2} \end{array}\begin{bmatrix} 0 & p_{00}^{I} & 0 & p_{01}^{I} & 0 & p_{02}^{I} \\ p_{00}^{II} & 0 & p_{01}^{II} & 0 & p_{02}^{II} & 0 \\ 0 & p_{10}^{I} & 0 & p_{11}^{I} & 0 & p_{12}^{I} \\ p_{10}^{II} & 0 & p_{11}^{II} & 0 & p_{12}^{II} & 0 \\ 0 & p_{20}^{I} & 0 & p_{21}^{I} & 0 & p_{22}^{I} \\ p_{20}^{II} & 0 & p_{21}^{II} & 0 & p_{22}^{II} & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

مثال ۲-۱۱

یک سیستم تولیدی شامل یک دستگاه در معرض شکست و خرابی را در نظر بگیرید. در هر لحظه زمانی یا دستگاه به درستی کار می‌کند (حالت صفر) یا به علت خرابی تحت تعمیر است (حالت ۱) اگر a احتمال وقوع خرابی در یک ساعت (احتمال شرطی خراب شدن دستگاه در مشاهده بعدی به شرط سالم بودن آن در مشاهده فعلی) و b احتمال تعمیر شدن آن در یک ساعت (احتمال سالم بودن در مشاهده بعدی به شرط خراب بودن آن در حال حاضر) تعریف شود یک DTMC با مشخصات زیر خواهیم داشت:

DTMC $\{x_n \in S : n \in N\}$ where $S=\{0,1\}$, $t_0,t_1\ldots=0,\ 1h,\ 2h,\ \ldots$

$$P=\begin{bmatrix} 1-a & a \\ b & 1-b \end{bmatrix};\ 0\leq a-b\leq 1$$

فرضیات مختلفی را می‌توان در نظر گرفت.

۲.۱.۲ کلاسهای ارتباط و یکپارچگی[1]

در ابتدا به تعریف کلاس‌های ارتباطی پرداخته و ضمن مثال‌هایی مفهوم آن را روشن می‌کنیم.

تعریف ۲-۹

زنجیره مارکوف همگن متناهی $\{X_n, n \geq 0\}$ را در نظر بگیرید که P ماتریس احتمال انتقال یک مرحله ای و $i, j \in S$ باشد. گفته می‌شود حالت j از حالت i قابل دسترسی است اگر $P_{ij}(n)>0$ (برای تعدادی $n \geq 0$) باشد. دو حالت i,j را مرتبط گویند اگر هر دو از طریق یکدیگر در دسترس باشند. در یک DTMC که حالات مختلف آن بر اساس در ارتباط بودن آنها با یکدیگر دسته‌بندی شده باشند، هر دسته را یک کلاس ارتباط[2] گویند.

کلاس ارتباط A در یک DTMC با فضای حالت S را بسته گویند اگر از هیچ کدام از حالت A نتوان به یکی از حالات S (که به A تعلق ندارد) رسید (در غیر این‌صورت کلاس باز نام دارد). اگر DTMC فقط شامل یک کلاس باشد، آن‌را یکپارچه گویند. بنابراین در یک زنجیره مارکوف یکپارچه همه حالات با هم در ارتباط هستند.

در صورتی که از یک حالت به هیچ حالت دیگری دسترسی وجود نداشته باشد، گفته می‌شود این حالت جاذب است. به این معنی که در صورت ورود سیستم به این حالت امکان خروج از این حالت برابر صفر است و سیستم فقط وضعیت فعلی را با احتمال ۱۰۰ درصد بازتولید می‌کند.

مثال ۲-۱۲

ازحالت
j از i قابل دسترسی هستند اگر $P_{ij}(n)>0$ $(n\geq 0)$
دو حالت مرتبط ← از i ← j و j ← i بتوان رفت
کلاس بسته ← از A نتوان به S رفت
مارکوف یکپارچه ← فقط یک کلاس

[1] irreducibility
[2] Communication

فرض ۱: اگر a=b=0 باشد، $P=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}=I$ بوده و $P^{(n)}=P^n=I$. اگر دستگاه سالم شروع به کار کند یعنی بردار وضعیت اولیه آن به صورت $\Pi(0)=[1 \quad 0]$ باشد، $\Pi(n)=[1 \quad 0]$ $n=1,2,3...$ است. همچنین با شروع از حالت یک $\Pi(0)=[0 \quad 1]$ بوده و $\Pi(n)=[1 \quad 0]$ می‌ماند.

فرض ۲: اگر a=b=1 باشد، $P=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}=I$ است و

به ازای nهای زوج $\quad P^n=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$

به ازای nهای فرد $\quad P^n=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$

حال به طور مثال اگر ماشین از وضعیت صفر (سالم) شروع به کار کند، بردار وضعیت سیستم در مرحله n به صورت زیر خواهد بود:

$$\pi(0)=[1,0] \qquad \pi(n)=[1,0] \quad \text{n زوج}$$

$$\pi(n)=[0,1] \quad \text{n فرد}$$

فرض ۳: اگر $|1-a-b|<1$ باشد ماتریس گذار به شکل زیر است (Bhat 1984):

$$P^n=\begin{bmatrix}(b+ax^n)/(a+b) & (a-ax)/(a+b)\\ (b-bx^n)/(a+b) & (a+bx^n)/(a+b)\end{bmatrix};\ x=1-a-b$$

اگر حالت اولیه سیستم، صفر باشد:

$$\pi(0)=[1,0] \qquad \pi(n)=\pi(0)P^n=\left[\frac{(b+ax^n)}{(a+b)},\frac{(a-ax^n)}{(a+b)}\right];n=1,2,3,...$$

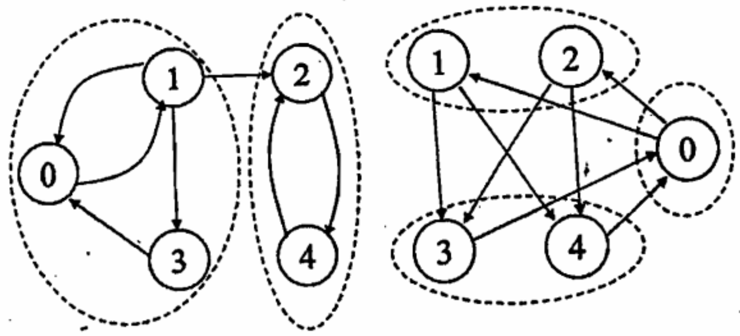
و اگر حالت اولیه سیستم یک باشد:

$$\pi(0)=[0,1] \qquad \pi(n)=\pi(0)P^n=\left[\frac{(b-bx^n)}{(a+b)},\frac{(a+bx^n)}{(a+b)}\right];n=1,2,3,...$$

ماتریس مقابل یک ماتریس یکپارچه است، زیرا همه حالات به هم دسترسی دارند. به طور مثال می‌توان از مسیر $0 \to 1 \to 2$ از حالت صفر به حالت ۲ رسید.

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

شکل ۲-۳-۲.۱.۲ کلاسهای ارتباط و یکپارچگی



مثال ۲-۱۳

ماتریس زیر یک ماتریس یکپارچه نیست، زیرا از حالت صفر به سایر حالات دسترسی وجود ندارد.

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 & 0.5 \\ 0 & 0.5 & 0 & 0.5 \\ 0 & 0.5 & 0.5 & 0 \end{bmatrix}$$

مثال ۲-۱۴

ماتریس احتمال گذار زیر شامل حالات ۰، ۱، ۲ و ۳ است:

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

این زنجیره شامل ۳ کلاس $\{0,1\}$، $\{2\}$ و $\{3\}$ است. دقت کنید که حالات صفر و یک از حالت ۲ قابل دسترسی است، ولی عکس آن وجود ندارد. همچنین با توجه به اینکه حالت ۳ جاذب است، از این حالت به حالات دیگر دسترسی وجود ندارد. چطوری می فهمیم جاذبه؟
در $P_{33}=1$ فقط ۳ و

مثال ۲-۱۵

در ادامه مثال ۲-۱۱ داریم.

فرض ۱ : حالتهای صفر و یک تنها با خودشان در ارتباط هستند و DTMC یکپارچه نیست و دو کلاس بسته $\{0\}$ و $\{1\}$ داریم.

فرض ۲ : حالت صفر با حالت یک مرتبط است و زنجیره یکپارچه داریم با کلاس بسته $\{1$ و $0\}$.

فرض ۳ : $|1-a-b|<1$ حالت صفر با حالت ۱ در ارتباط است و زنجیره یکپارچه داریم.

تعریف ۲-۱۰

فرض کنید $i \to i$، یعنی هر حالت به خودش دسترسی دارد، یعنی mی وجود دارد که $p_{ii}^m > 0$ است. در این صورت، بزرگترین مقسوم علیه مشترک mهایی که به ازای آن $p_{ii}^m > 0$ است را دوره یا پریود حالت i میگویند و آن را با $d(i)$ نشان میدهند. در صورتی که $d(i) = 1$ باشد حالت i را غیرپریودی و یا غیر سیکلی و در صورتی که این مقدار بزرگتر از یک باشد آن حالت را پریودی یا سیکلی می‌گویند. در زنجیره‌های مارکوف یکپارچه چه از نوع سیکلی و چه از نوع غیر سیکلی دوره تمام حالات یکسان است یعنی $d(i) = d(j) = \cdots$.

تعریف ۲-۱۱

$f_{ij}(k)$ برابر است با احتمال اینکه زنجیره مارکوف دقیقا پس از k مرحله در حالت j قرار گیرد، به شرط آنکه در حال حاضر در وضعیت i قرار داشته باشد(ضمن این شرط که در طی مسیر، هیچگاه به j وارد نشود). واضح است که $f_{ij}(0) = 0$ و $f_{ij}(1) = p_{ij}$ در نتیجه:

معادله ۲-۱۴

$$*f_{ij}^{(k+1)} = \sum_{\substack{r \\ r\neq j}} p_{ir} f_{rj}^{(k)}$$

معادله ۲-۱۴ را می‌توان به صورت زیر بازنویسی کرد:

معادله ۲-۱۵

$$p_{ij}^{(n)} = \sum_{r=0}^{n} f_{ij}^{(r)} p_{jj}^{(n-r)} = \sum_{r=0}^{n} f_{ij}^{(n-r)} p_{jj}^{(r)}$$

نکته ۲-۲

فرض کنید که

$$\boxed{n_i = \sum_{k=1}^{\infty} p_{ii}^{(k)}}$$

در صورتی که $n_i = \infty$ باشد، حالت i برگشت‌پذیر است و در غیراینصورت گذراست.

تعریف ۲-۱۲

فرض کنید $f_{ii}(k)$ احتمال این باشد که DTMC پس از k مرحله برای اولین بار به حالت i برگردد $(i=0,1,2,\ldots)$ و f_i احتمال برگشت DTMC به حالت i از تمام طرق ممکن باشد. داریم:

معادله ۲-۱۶

$$f_i = \sum_{k=1}^{\infty} f_{ii}(k)$$

$$f_i = \sum_{k=1}^{\infty} f_{ii}(k) \qquad n_i = \sum_{k=1}^{\infty} P_{ii}^{(k)}$$

حالت iام از یک DTMC برگشت پذیر[1] است اگر $(f_i = 1)$ باشد. در غیر این‌صورت (یعنی اگر $(f_i < 1)$) آن را گذرا[2] گویند. در این صورت احتمال اینکه سیستم از حالت i شروع کنید و به آن برگردد برابر f_i و احتمال اینکه هرگز به i برنگردد برابر $1-f_i$ است.

تعریف ۲-۱۳

حال اگر بخواهیم میانگین مراحل مورد نیاز DTMC برای رسیدن به حالت i پس از ترک آن را محاسبه کنیم داریم:

معادله ۲-۱۷

$$\boxed{v_i = \sum_{k=1}^{\infty} k f_{ii}(k)}$$

در صورتی که $v_i < \infty$ باشد، برگشت پذیر مثبت و اگر $v_i = \infty$ باشد برگشت پذیر تهی نام دارد.

تعریف ۲-۱۴

$d=1$ $\quad$ $v_i<\infty$

حالات غیر سیکلی و برگشت پذیر مثبت را" ارگودیک" گویند. در یک حالت برگشت پذیر مثبت i، v_i مقدار متناهی دارد.

مثال ۲-۱۶

می‌توان به سادگی نشان داد که تمام حالات ماتریس مقابل برگشت پذیر هستند.

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

برگشت پذیر $\rightarrow f_i = \sum_{k=1}^{\infty} f_{ii}(k) = 1$

گذرا $\rightarrow f_i < 1$

مثال ۲-۱۷

[1] recurrence
[2] Transience

ماتریس احتمال گذار زیر با حالات ۰، ۱، ۲، ۳ و ۴ را در نظر بگیرید:

$$\begin{array}{c|c} & \begin{array}{ccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} & \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \end{array}$$

این زنجیره شامل کلاسهای $\{0,1\}$، $\{2,3\}$ و $\{4\}$ است. دو کلاس اول برگشت پذیر و کلاس سوم گذرا است.

مثال ۲-۱۸

$$\begin{array}{c|c} & \begin{array}{cc} 0 & 1 \end{array} \\ \begin{array}{c} 0 \\ 1 \end{array} & \begin{bmatrix} 1-a & a \\ b & 1-b \end{bmatrix} \end{array}$$

در ادامه مثال ۲-۱۱ داریم:

برای اولین بار

با فرض ۱ :

برگشت پذیر	$f_0 = f_1 = 1$	$f_{00}(1) = 1, f_{00}(k) = 0; k = 2,3,\ldots$
غیر سیکلی و برگشت پذیر مثبت	$\nu_0 = \nu_1 = 1$	$f_{11}(1) = 1, f_{11}(k) = 0; k = 2,3,\ldots$

با فرض ۲ :

$a = b = 1$	$f_{00}(1) = 0, f_{00}(2) = 1, f_{00}(k) = 0; k = 3,4,\ldots$
	$f_{11}(1) = 0, f_{11}(2) = 1, f_{11}(k) = 0; k = 3,4,\ldots$

و

حالات برگشت پذیر $f_0 = f_1 = 1$

حالت صفر سیکلی با پریود ۲ $\nu_0 = \nu_1 = 2; p_{00}(2k) = 1, p_{00}(2k+1); k = 0,1,2,\ldots$

به همین نحو حالت یک سیکلی با پریود ۲ است.

فرض ۳ $|1-a-b| < 1$:

$1 \times f_{00}(1) = 1-a$ $\qquad f_{00}(2) = ab$

$3 \times f_{00}(3) = a(1-b)b$ $\qquad f_{00}(k+2) = a(1-b)^k b; k = 2,3,\ldots$

$f_0 = 1 \rightarrow$ برگشت پذیر

$\nu_0 = (1-a) + 2ab + \sum_{k=3}^{\infty} ka(1-b)^{k-2} b < \infty \rightarrow$ مثبت غیر سیکلی

در ادامه این بخش، برخی نتایج مفید را بدون اثبات بیان می‌کنیم.

kf_1

$f_0 = 1 - a(1-b)^n$

نکته ۲-۳

تمام حالات در یک [redacted] هستند.

نکته ۲-۴

تمام حالات در [redacted] محدود، [redacted] هستند.

نکته ۲-۵

حالات [redacted] تنها در [redacted] روی می‌دهد.

نکته ۲-۶

در [redacted] هستند.

نکته ۲-۷

اگر یک زنجیره مارکوف n حالت داشته باشد، به راحتی شهود می‌شود که این امکان وجود دارد که حداکثر در n حرکت می‌توان از هر حالی به حالت دیگر رفت (در صورتیکه حالت ابتدایی به حالت نهایی دسترسی داشته باشد).

don't worry every Thing is ok

مثال ۲-۱۹

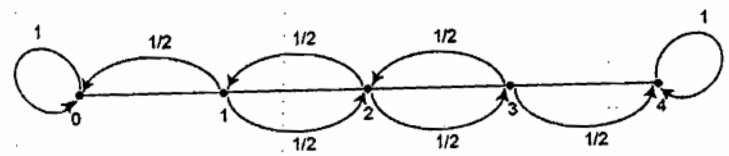
در ادامه مثال ۲-۱۱ داریم:

فرض ۲	$p_{ii}(k)=1; k=2,4,..$ $p_{ii}(k)=0; k=1,3,..$	$n_i=\infty$ هر دو برگشت پذیرند	
فرض ۳	$p_{00}=\dfrac{b+ax^n}{a+b}$	$p_{11}(k)=\dfrac{a+bx^k}{a+b}; x=1-a-b$	$n_0=\infty$ $n_1=\infty$

مثال ۲-۲۰

فرض کنید یک نفر بر روی ۴ موزاییک که به صورت متوالی کنار هم قرار داده شده اند حرکت می‌کند. او می تواند به احتمال‌های مساوی به چپ یا راست حرکت کند. با این فرض که اگر به خانه صفر یا n (آخرین خانه) برسد، در جای خود ثابت می‌ماند و حرکت نمی‌کند. در صورتی که حالت سیستم را شماره موزاییکی فرض کنیم که این فرد بر روی آن قرار دارد، حالت‌های صفر و حالت نهای جاذب اند. برای حالت خاص n=4، نمودار حالت آن را در شکل ۲-۴ می‌بینید. بدیهی است در صورتی که حالتی جاذب نباشد، به آن حالت گذرا گفته می‌شود.

شکل ۲-۴- نمودار مثال ۲-۲۰



مثال ۲-۲۱

زنجیره مارکوفی مقابل را در با N حالت در نظر بگیرد. می‌خواهیم نشان دهیم که این زنجیره برگشت پذیر نیست. در ابتدا و

$$\begin{cases} p_{j,j+1}=1-\dfrac{1}{j} \\ p_{j1}=\dfrac{1}{j} \end{cases}$$

برای فهم بهتر ماتریس آن را رسم می‌کنیم.

این ماتریس به شکل مقابل است. فرض کنید که زنجیره در وضعیت j قرار داشته باشد ($1<j<N$). در این صورت می‌تواند یک مرحله به جلو برود و یا اینکه به وضعیت ۱ که حالت جاذب است برود. در صورت ورود به حالت ۱، عملا امکان خروج از آن را ندارد. بنابراین در صورتی که زنجیره در حالت j قرار داشته باشد، امکان بازگشت مجدد به آن وجود ندارد و در نتیجه $f_j=\sum_{k=1}^{\infty} f_{ii}(k)\neq 0$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & & & 0 \\ \frac{1}{2} & & \frac{1}{2} & & & & \\ \frac{1}{3} & & & \frac{2}{3} & & & \\ \frac{1}{4} & & & & \frac{3}{4} & & \\ \frac{1}{5} & & & & & \cdots & \\ & & & & & \ddots & 0 \\ \frac{1}{N} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{N-1}{N} \end{bmatrix}$$

مثال ۲-۲۲

زنجیره مارکوفی زیر را در نظر بگیرید:

$$p_{ij}=\begin{cases} \dfrac{i}{i+1} & j=i+1 \\ 1-\dfrac{i}{i+1} & j=1 \\ 0 & otherwise \end{cases}$$

الف) نشان دهید احتمال عدم بازگشت به حالت 1 در k مرحله اول عبارت است از:

$$\prod_{j=1}^{k}\frac{j}{j+1}=\frac{1}{t+1}$$

همچنین احتمال عدم بازگشت به حالت یک برابر صفر است و این حالت برگشت پذیر است.

ب) نشان دهید $f_{11}(k)=\dfrac{1}{k(k+1)}$.

ج) نشان دهید:

$$h_{1,1}=\sum_{k=1}^{\infty}k.f_{11}(k)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k+1}=\infty$$

ماتریس گذار زنجیره فوق به شکل زیر است:

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & & & \\ \frac{1}{3} & & \frac{2}{3} & & \\ \frac{1}{4} & & & \frac{3}{4} & \\ \frac{1}{5} & & & & \frac{4}{5} \end{bmatrix}$$

الف) با توجه به ماتریس بالا، احتمال عدم بازگشت زنجیره به حالت ۱ در k مرحله اول عبارت است از:

$$\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\times\frac{3}{4}\times\frac{4}{5}\times\cdots=\frac{t!}{(t+1)!}=\frac{1}{t+1}$$

حال اگر $t\to\infty$ میل کنید، کسر بالا برابر صفر می‌شود که نشان می‌دهد که احتمال عدم بازگشت به حالت اول در بینهایت گذار، برابر صفر خواهد بود.

ب) احتمال اینکه سیستم پس از k مرحله به وضعیت ۱ بازگردد عبارت است از:

$$\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\times\frac{3}{4}\times\frac{4}{5}\times\cdots\times\frac{t-1}{(t-1)+1}\left(1-\frac{t}{t+1}\right)=\frac{1}{t(t+1)}$$ *

ج)

$$h_{1,1}=\sum_{k=1}^{\infty}k.f_{11}(k)=\sum_{k=1}^{\infty}k\frac{1}{k(k+1)}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(k+1)}=\infty$$

مثال ۲-۲۳

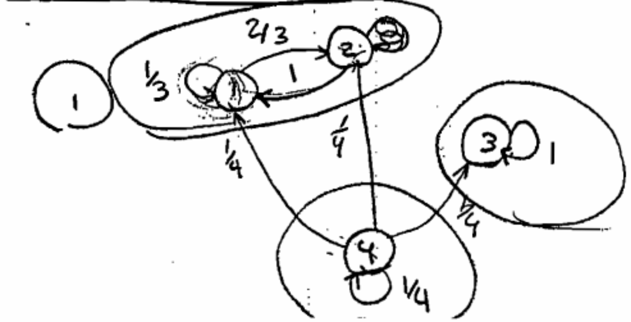
برای هرکدام از زنجیره‌های مارکوف زیر، کلاس ها را مشخص کرده و گذرا یا برگشت پذیر بودن هر حالت را تعیین کنید.

$$P=\begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

ماتریس مقابل را در نظر بگیرید. در این ماتریس، حالت‌های اول و دوم با یکدیگر در ارتباط هستند زیرا هم از یک به دو و هم دو به یک می‌توان دسترسی پیدا کرد. اما این حالت‌ها با حالت‌های ۳ و ۴ در ارتباط نیستند. بنابراین حالت‌های ۱ و ۲ با هم تشکیل یک کلاس می‌دهند.

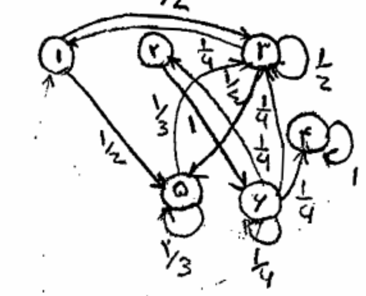
حالت ۴ به سایر حالات دسترسی دارد اما هیچکدام از این حالتها به حالت ۴ دسترسی ندارند. بنابراین ۴ هم یک کلاس جداگانه محسوب می‌شود. حالت ۳ نیز با توجه به اینکه احتمال گذار از حالت ۳ به ۳ برابر یک است و احتمال گذار به سایر حالت‌ها برابر صفر است، یک کلاس جاذب محسوب می‌شود. بنابر این {۳} برگشت‌پذیر و جاذب است و {۴} گذراست. اعضای کلاس {۱و۲} نیز از جهت برگشت‌پذیر بودن نیز یک حالت دارند و به طور مثال

$f_1=1-p\{$شروع از یک و هرگز برنگشتن به یک$\}=1-0=1$



ماتریس زیر را نیز بررسی می‌کنیم. در این زنجیره، {۱و۳و۵} برگشت‌پذیرند.

$$\begin{array}{c|c} & \begin{array}{cccccc} ۱ & ۲ & ۳ & ٤ & ۵ & ۶ \end{array} \\ \begin{array}{c} ۱ \\ ۲ \\ ۳ \\ ٤ \\ ۵ \\ ۶ \end{array} & P=\begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix} \end{array}$$



حالت ۵ را در نظر بگیرید:

$f_5 = 1 - p\{$شروع از پنج و هرگز برنگشتن به پنج$\}$

$$=1-\lim\left(\frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{2}\right)^n+\frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{4}\right)^n+\frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{2}\right)^k\times\left(\frac{1}{4}\right)^{n-k}\right)=1-0=1$$

بنابراین ۵ برگشت پذیر است و چون ۱ و ۳ نیز با ۵ در یک کلاس ارتباطی هستند نیز برگشت‌پذیر هستند. {۴} جاذب و {۶} گذراست.

قبل از تعریف خاصیت ارگودیک به تعریف توزیع حالت پایدار می‌پردازیم.

تعریف ۲-۱۵

زنجیرهٔ مارکوف $\{X_n\}$ با ماتریس احتمال انتقال P را در نظر بگیرید. در صورتی که بردار احتمال $\pi = (p_1, p_2, ..)$ $(\sum p_i = 1\ ;\ \gamma \geq 0)$ وجود داشته باشد به قسمی که

معادله ۲-۱۸ $\quad \pi P = \pi$

به بردار Y توزیع حالت پایدار سیستم می‌گویند. در اینصورت به ازای هر زنجیره مارکوف یکپارچه متناهی، یک بردار ثابت وجود دارد که یکتا است و داریم:

معادله ۲-۱۹ $\quad \pi e = 1$

که در آن e بردار ستونی است که همه درایه‌های آن دارای مقدار یک هستند.

تعریف ۲-۱۶

خاصیت ارگودیکی بیان می‌کند به ازای زنجیر مارکوف یکپارچه متناهی در $n \to \infty$ یعنی در بی نهایت داریم:

معادله ۲-۲۰ $\quad P^{n} \to eY$

مفهوم این عبارت این است که در بی نهایت ماتریس احتمال انتقال n مرحله‌ای به سمت توزیع حالت پایدار میل می‌کند. همچنین به شرط منحصر به فرد بودن حدهای حاصل روابط زیر برقرار است:

معادله ۲-۲۱ $\quad \lim_{n\to\infty} p_j(n) = \lim_{n\to\infty} p_{ij}(n)\ ;\ i = 0,1,2, ...$

معادله ۲-۲۲ $\quad \lim_{n\to\infty} p_n = \begin{bmatrix} y \\ y \\ \vdots \\ y \end{bmatrix};\pi = [p_0, p_1, ..., p_n, ...];$

$p_j = \lim_{n\to\infty} p_j(n)$

گاهی به بردار توزیع حالت پایدار زنجیره مارکوف، بردار ثابت احتمال نیز می‌گویند.

$\pi P = \pi$

تعریف ۲-۱۷

یک زنجیره مارکوف، زنجیره با قاعده نامیده می‌شود اگر در برخی از توان‌های ماتریس گذار، تمام عناصر آن مثبت باشد.

$\pi P = \pi$ $\quad \pi e = 1$ $\quad \neq \quad$ ← باقاعده

مثال ۲-۲۴

ماتریس $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0.5 & 0.5 \end{bmatrix}$ مربوط به یک زنجیره مارکوف با قاعده نیست زیرا هر چه قدر این ماتریس به به توان برسانیم در گوشه بالا سمت راست ماتریس، همچنان یک عدد صفر وجود خواهد داشت. (مثال ۲-۱۱ را مجددا مورد بررسی قرار دهید).

تعریف ۲-۱۸

اگر DTMC یکپارچه با حالات برگشت‌پذیر مثبت باشد احتمالات p_j وجود دارند که منحصر به فرد بوده $\boxed{\text{مستقل از احتمال اولیه است}}$ به عبارت دیگر در n به سمت بی نهایت، تمام عناصر یک ستون ماتریس احتمال انتقال n مرحله ای به یک عدد مشخص میل می‌کند. در صورتی که بخواهیم روابط ماتریسی بالا را باز نویسی کنیم، داریم:

معادله ۲-۲۳
$$p_j = \lim_{n\to\infty} p_j(n)\,; \quad j = 0,1,2,\ldots;\ y_j \geq 0$$

و

معادله ۲-۲۴
$$p_j = \sum p_i p_{ij}; i = 1,2,\ldots; \pi = \pi P; y = [p_0, p_1, \ldots]$$

مثال ۲-۲۵

زنجیره مارکوف با فضای حالات $S = \{0,1,2\}$ را در نظر بگیرید:

$$\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & 0 \end{bmatrix}$$

$[p_1\ p_2\ p_3]$

با نوشتن معادلات $\pi P = \pi$ داریم:

$$p_1 = \frac{1}{2}p_2 + \frac{3}{4}p_3$$
$$p_2 = \frac{1}{3}p_1 + \frac{1}{4}p_2$$
$$p_3 = \frac{2}{3}p_1 + \frac{1}{2}p_2$$

با توجه به اینکه یکی از معادلات اضافه است با در نظر گرفتن $\sum p_i = 1$ داریم:

$$\pi = (p_1, p_2, p_3) = \left(\frac{21}{53}, \frac{12}{53}, \frac{20}{53}\right)$$

بدیهی است می‌توانستیم با به توان رساندن ماتریس گذار، بردار واحد این ماتریس را محاسبه کنیم. با محاسبه ماتریس احتمال انتقال ۲۰ مرحله ای داریم:

$$P^{20} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & 0 \end{bmatrix}^{20} = \begin{bmatrix} 0.3967 & 0.2263 & 0.3769 \\ 0.3962 & 0.2264 & 0.3773 \\ 0.3957 & 0.2265 & 0.3777 \end{bmatrix}$$

اگر به ماتریس بالا توجه کنید می‌بینید که سطرهای این ماتریس یکسان و معادل بردار ثابت احتمال است. نتیجه اینکه با هر دو روش می‌توان بردار ثابت احتمال را محاسبه کرد.

مثال ۲-۲۶

آیا ماتریس $\begin{bmatrix} 0.88 & 0.12 \\ 0.15 & 0.85 \end{bmatrix}$ ماتریس احتمالات و ارگودیک است؟ احتمال حالت پایدار آن را محاسبه کنید.

بر اساس معادله ۲-۱۸

$$[p_1\ \ p_2]\begin{bmatrix} 0.88 & 0.12 \\ 0.15 & 0.85 \end{bmatrix} = [p_1\ \ p_2]$$

با حل معادلات خوایخم داشت $p_1 = \frac{5}{9}$ و $p_2 = \frac{4}{9}$. با به نمای بینهایت رساندن ماتریس، همین اعداد به دست می‌آمد. بدیهی است وضعیت سیستم در بی نهایت با احتمال $\frac{5}{9}$ در p_1 و با احتمال $\frac{4}{9}$ در p_2 است.

مثال ۲-۲۷

ماشین با حالات $S=\{0,1\}$ در مثال ۲-۱۱ را در نظر بگیرید. در فرض سوم که $|1-a-b|<1$ باشد، $\pi = (p_0, p_1)$ است، دیدیم که DTMC یکپارچه، غیر سیکلی با حالات برگشت پذیر مثبت است. بنابراین می توانیم احتمالات پایدار منحصر به فرد را با حل معادلات زیر به دست آوریم :

$$[p_0\ \ p_1] = [p_0\ \ p_1]\begin{bmatrix} 1-a & a \\ b & 1-b \end{bmatrix}$$

$$* p_0 + p_1 = 1 \to p_0 = \frac{b}{a+b};\ p_1 = \frac{a}{a+b}$$

با $a = 1/5$ و $b = 3/5$ مقادیر $p_0 = 3/4$ و $p_1 = 1/4$ بدست می‌آید. یعنی به طور متوسط DTMC حالت صفر را در ۷۵٪ تعداد مراحل زمانی و حالت ۱ را در ۲۵٪ کل تعداد مراحل زمانی ملاقات می کند.

اگر $0 \leq a = b \leq 1$ باشد. با حل معادله $\pi P = \pi$ خواهیم داشت:

$$\pi = [0.5\ \ 0.5]\ \forall a,b$$

و داریم :

$$P^n = e\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}(1-2a)^n\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

و در نتیجه به ازای $a = b = 0$ زنجیره شامل دو حالت جاذب ۰ و ۱ می‌شو و دو کلاس ارتباط {۰} و {۱} داریم. معادله $\pi P = \pi$ و $p_0+p_1=1$ منجر به تعداد نامتناهی حل می‌گردد:

$$Y=[p_0 \quad 1-p_0],\ 0 \le p_0 \le 1$$

هر کلاس بردار احتمال پایدار خاص خود را دارد که در اینجا $y_0=1$ و $y_1=1$ است اما برای کل سیستم تعداد بردارها نامتناهی است.

با فرض $a=b=1$ داریم:

$$P^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \forall n \text{ زوج}$$

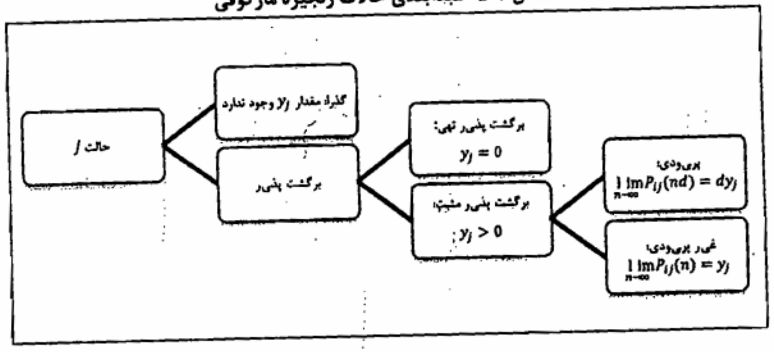
$$P^n = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \forall n \text{ فرد}$$

بار دیگر DTMC یکپارچه با حالات برگشت‌پذیر مثبت است ولیکن سیکلی با سیکل ۲ است. در این حالت نیز احتمالات پایدار منحصر به فرد با $p_0=1/2$ و $p_1=1/2$ داریم. یعنی به طور متوسط ۵۰٪ دیدارهای ما در حالت صفر و ۵۰٪ دیگر در حالت ۱ سیستم است

معمولا این شرایط برای DTMC های یکپارچه نیز روی می دهد که هر کلاس ارتباطی بسته دارای بردار احتمال پایدار خاص خود است.

نکته: از مثال بالا می‌توان نتیجه گرفت که وجود π الزاما به معنی وجود حد ماتریس احتمال انتقال n مرحله ای در بی نهایت نیست.

شکل ۲-۵-طبقه‌بندی حالات زنجیره مارکوفی



مثال ۲-۲۸

زنجیره مارکوف زیر را نظر بگیرید:

$$X_{k+1} = X_k = X_{k-1} = 1/3; \forall k$$

که ماتریس آن به صورت مقابل است. توزیع حالت تعادل این زنجیره را به دست آورید.

$$\begin{bmatrix} & & \cdots & & \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & & \\ & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \\ & \ddots & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ & & \cdots & & \end{bmatrix}$$

با نوشتن معادله ۲-۱۸ داریم:

$$p_k = \frac{1}{3}p_{k-1} + \frac{1}{3}p_k + \frac{1}{3}p_{k+1}; \forall k \longrightarrow \Pi P = P$$

بنابراین p_k از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$2p_k = p_{k-1} + p_{k+1}; \forall k$$
$$\sum_{k=0}^{\infty} p_k = 1;\ p_k \ge 0$$

نشان می‌دهیم که احتمال به دست آوردن یک پاسخ مناسب برای مجموعه معادلات بالا وجود ندارد:

$$p_2 = 2p_1 - p_0$$
$$p_3 = 2p_2 - p_1 = 2(p_1 - p_0) - p_1 = 3p_1 - 2p_0$$
$$\vdots$$
$$p_k = kp_1 - (k-1)p_0$$

سه حالت زیر پیش می‌آید:

$p_0 = p_1 > 0 \quad \Rightarrow \quad p_k = p_1; \sum_{k=-\infty}^{\infty} p_k > 1$

$p_0 < p_1 \quad \Rightarrow \quad p_k \to \infty$

$p_0 > p_1 \quad \Rightarrow \quad p_k \to -\infty$

$p_0 = p_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad p_k = 0$

مثال ۲-۲۹

یک کارگر خیاط را در نظر بگیرید که با استفاده از یک دستگاه ماشین چرخ خیاطی، قسمتی از فرآیند دوخت یک لباس را بر عهده دارد. این فاز برای هر قواره دقیقا ۳۰ دقیه طول میکشد. یک پیام‌رسان هر سی دقیقه به میز خیاطی این کارگر سر می‌زند تا قواره‌های دوخته شده را جمع کرده و قواره‌های جدید را به او تحویل دهد. تعداد قواره‌هایی که به کارگر تحویل می‌دهد عددی تصادفی است. او در سی درصد اوقات هیچ قواره‌ای به کارگر تحویل نمی‌دهد ولی در ۵۰ درصد اوقات یک قواره و در بیست درصد اوقات دو قواره به او تحویل می‌دهد. البته در صورتی که بیش از سه قواره ناقص در میز خیاط وجود داشته باشد، هیچ قواره جدیدی به او تحویل داده نمی‌شود. (سیاست کار این است که در این صورت قواره جدید به شخص دیگری واگذار شود). درصد زمانیکه این خیاط بیکار است را در صورتی محاسبه کنید که اگر در انتهای روز، قواره ای ناقص بماند به روز کاری بعد منتقل می‌شود.

در هر فاصله زمانی نیم ساعت، تعداد قواره‌های ناقص بر روی میز این خیاط می‌تواند به صورت ۰، ۱ یا ۲ قواره باشد. در صورتی که (درست قبل از رسیدن پیام رسان) یک قواره ناقص بر روی میز و در حال کار داشته باشد، با رسیدن پیام رسان کار آن را به اتمام می‌رساند و با احتمال ۵۰ درصد یک قواره، ۲۰ درصد دو قواره و با احتمال ۳۰ درصد قواری از او تحویل نمی‌گیرد. بنابراین $p_{11} = 0.5$ ،$p_{10} = 0.3$ و $p_{12} = 0.2$. همین طور برای سایر حالات محاسبه می‌شود و ماتریس احتمال انتقال حالات به صورت زیر است.

$$\begin{array}{c|ccc} & & & \\ 0 & 0.8 & 0.2 & 0 \\ 1 & 0.3 & 0.5 & 0.2 \\ 2 & 0 & 0.3 & 0.7 \end{array}$$

قواره قابل تحویل

با حل معادلات زیر با فرض $\sum p_i = 1$

صفر یا درست بار به پیک تحویل می‌دهد

یک قواره درست

یا هیچی نمی‌دهد.

$$[p_0 \quad p_1 \quad p_2]\begin{bmatrix}0.8 & 0.2 & 0\\ 0.3 & 0.5 & 0.2\\ 0 & 0.3 & 0.7\end{bmatrix} = [p_0 \quad p_1 \quad p_2]$$

خواهیم داشت:

$$\begin{bmatrix}\frac{9}{16} & \frac{6}{16} & \frac{4}{16}\end{bmatrix}$$

که نشان می‌دهد این خیاط در دراز مدت در $\frac{9}{16}$ زمان‌ها (قبل از ورود پیام رسان) هیچ قواره ای در دست ندارد. در صورتی که احتمال اینکه پیام رسان به او هیچ قواره ای تحویل ندهد را در این عدد ضرب کنیم خواهیم داشت:

$$0.3\frac{9}{16} = 0.1421$$

که نشان می‌دهد این خیاط در ۱۴ درصد زمان کاری خود بیکار است.

مثال ۲-۳۰

دنباله‌ای از آزمایشات وابسته به هم به گونه‌ای اجرا می‌شود که در صورت دو موفقیت پیاپی، احتمال موفقیت آزمایش بعدی برابر ۰.۸ است. در غیر این صورت احتمال موفقیت آزمایش بعدی به ۰.۵ کاهش می‌یابد. نسبت آزمایش‌های موفق را در دراز مدت محاسبه کنید.

فضای حالت را به شکل زیر تعریف می‌کنیم:

0: اگر دو آزمایش متوالی موفقیت باشد.

1: اگر بین دو آزمایش، اولی شکست و دومی موفقیت باشد.

2: اگر دومین آزمایش شکست باشد (اولی می‌تواند موفقیت یا شکست باشد).

ماتریس گذار به شکل زیر خواهد بود:

$$\begin{bmatrix}0.8 & 0 & 0.2\\ 0.5 & 0 & 0.5\\ 0 & 0.5 & 0.5\end{bmatrix}$$

توزیع حالت پایدار به شکل زیر خواهد بود:

$$p_0=\frac{5}{11}\quad p_1=\frac{2}{11}\quad p_2=\frac{4}{11}$$

بنابراین احتمال موفقیت در درازمدت به صورت $p_0+0.5(1-p_0)=7/11$ است.

مثال ۲-۳۱

دنباله‌ای از آزمایشات وابسته را در نظر بگیرید که در هر آزمایش، احتمال موفقیت برابر $\frac{k+1}{k+2}$ است که در آن k برابر تعداد موفقیت در دو آزمایش قبلی است. عبارت $\lim_{n\to\infty} P\{\text{success on the } n^{th} \text{trial}\}$ را محاسبه کنید.

فضای حالت به شکل زیر تعریف می‌شود:

1: اگر دو آزمایش متوالی موفقیت باشد.

2: اگر بین دو آزمایش، اولی شکست و دومی موفقیت باشد.

3: اگر دومین آزمایش شکست باشد (اولی می‌تواند موفقیت یا شکست باشد)

4: هر دو آزمایش شکست باشد.

ماتریس گذار به شکل زیر است:

$$\begin{bmatrix} \frac{3}{4} & 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

با نوشتن معادلات تعادل داریم:

$$p_1=\frac{3}{4}p_1+\frac{2}{3}p_2 \qquad p_3=\frac{1}{4}p_1+\frac{1}{3}p_2$$

$$p_2=\frac{2}{3}p_3+\frac{1}{2}p_4 \qquad p_4=\frac{1}{3}p_3+\frac{1}{2}p_4$$

$$p_1+p_2+p_3+p_4=1$$

و درنتیجه داریم:

$$p_1=\frac{1}{2}\quad p_2=\frac{3}{16}\quad p_3=\frac{3}{16}\quad p_4=\frac{1}{8}$$

بنابراین $p_1+p_2=\frac{11}{16}$.

مثال ۲-۳۲

ثابت کنید در صورتی که λ بردار ویژه یک ماتریس احتمالات باشد، $\lambda\le 1$ است.

فرض کنید که بردار ویژه سمت راست[1] ماتریس احتمالات را به صورت $E=(e_1,\dots,e_n)$ فرض می‌کنیم. در این صورت بر اساس تعریف بردار ویژه داریم:

$$PE=\lambda E$$

که می‌توان به صورت زیر بازنویسی کرد

$$\sum_{k=1}^{N} p_{jk}e_k=\lambda e_k$$

فرض کنید بزرگ ترین عنصر این بردار e_l باشد یعنی

$$e_l=\max{}_k\, e_k$$

طبیعی است که تمام عناصر این بردار مثبت هستند.

$$\lambda e_l=\sum_{k=1}^{N} p_{jk}e_k\le e_l\sum_{k=1}^{N} p_{jk}=e_l$$

طبیعتا اثبات می‌شود که $\lambda\le 1$

مثال ۲-۳۳

در یک فروشگاه، مدل خاصی از یک دوربین فیلمبرداری فروخته می‌شود که به صورت هفتگی سفارش داده می‌شود. فرض کنید D_i تقاضای هفته اُم یک متغیر تصادفی با تابع

[1] Right eigenvector

توزیع پواسون با میانگین یک است. X_t را تعداد دوربین در دست (در آخر هفته) فرض کنید. در آخرین روز هر هفته، تعدادی دوربین بر حسب درخواست این فروشگاه از انبار مرکزی به این فروشگاه منتقل می‌شود تا تقاضای هفته بعد مشتریان تامین شود. سیاست فروشگاه این طور است که در صورتی که هیچ دوربینی در مغازه نباشد، ۳ دوربین از انبار مرکزی درخواست می‌کند. در غیر این صورت درخواست هیچ کالایی از انبار نمی‌کند. در صورتی که مشتری به فروشگاه مراجعه کند در حالی که در فروشگاه دوربینی وجود نداشته باشد، مشتری از دست رفته محسوب می‌شود. حال فرض کنید $X_0 = 3$ است. واضح است که احتمال تغییر حالت فقط و فقط به X_t و D_t بستگی دارد. میزان D_t به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$P(D_{t+1} = n) = e^{-1}1^n/n!\,;\; n = 0, 1, \ldots$$
$$P(D_t = 0) = e^{-1} = 0.368$$
$$P(D_t = 1) = e^{-1} = 0.368$$
$$P(D_t = 2) = (1/2)e^{-1} = 0.184$$
$$P(D_t \geq 3) = 1 - P(D_t \leq 2) = 1 - (.368 + .368 + .184) = 0.08$$

و

$X_{t+1} = \max(3-D_{t+1}, 0)$ if $X_t = 0$ and $X_{t+1} = \max(X_t - D_{t+1}, 0)$ if $X_t \geq 1$, for $t = 0, 1, 2, \ldots$

در نتیجه

$P_{03} = P(D_{t+1} = 0) = 0.368$ $\quad$ $P_{02} = P(D_{t+1} = 1) = 0.368$

$P_{01} = P(D_{t+1} = 2) = 0.184$ $\quad$ $P_{00} = P(D_{t+1} \geq 3) = 0.080$

و به همین طریق بقیه موارد محاسبه می‌شود.

	0	1	2	3
0	.080	.184	.368	.368
1	.632	.368	0	0
2	.264	.368	.368	0
3	.080	.184	.368	.368

می‌توان نشان داد که رفتار این زنجیره در دراز مدت به صورت (0.286,0.285,0.263,0.166) است.

مثال ۲-۳۴

فرض کنید که ژنتیک افراد جامعه‌ای با فاکتورهای A و a شناخته می‌شود به طوری که ژن هر فرد به صورت یکی از سه حالت AA، aa و Aa است. ژن فرزند هر جفت از افراد نیز متاثر از ژن والیدن آنها است. یعنی یکی از فاکتورهای ژن پدر به صورت تصادفی با یکی از فاکتورهای ژن مادر ترکیب شده و ژن فرزند را تشکیل می‌دهند. به طور مثال اگر پدر دارای ژن AA و مادر دارای ژن Aa باشد، ممکن است فاکتور a از مادر با فاکتور A از پدر با هم ترکیب شوند. فرض کنید هم اکنون نسبت ژنهای AA، aa و Aa در جامعه به ترتیب برابر p_0، q_0 و r_0 باشد ($p_0 + q_0 + r_0 = 1$). می‌خواهیم در درازمدت، نسبت هرکدام از ژنها را به کل جامعه به دست بیاوریم.

می‌دانیم که یک فاکتور A یا از فرد دارای ژن AA جدا می‌شود یا از فرد دارای ژن Aa. بنابراین می‌توان احتمال کلی انتخاب یک فاکتور A را به دست آورد:

$$P\{A\} = P\{A \mid AA\}p_0 + P\{A \mid aa\}q_0 + P\{A \mid Aa\}r_0 = p_0 + {r_0}/{2}$$

به همین شیوه، برای فاکتور a نیز داریم:

$$P\{a\} = q_0 + {r_0}/{2}$$

فرض کنید p احتمال تولد یک فرد با ژن AA در نسل بعد باشد. با توجه به مطالب بالا، p به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$p = P\{A\}P\{A\} = \left(p_0 + {r_0}/{2}\right)^2$$

همین طور اگر q احتمال تولد فردی با ژن aa باشد:

$$q=P\{a\}P\{a\}=\left(q_0+\frac{r_0}{2}\right)^2$$

و r نیز احتمال تولید فردی با ژن Aa باشد:

$$r=2P\{A\}P\{a\}=2\left(p_0+\frac{r_0}{2}\right)\left(q_0+\frac{r_0}{2}\right)$$

از طرفی نسبت تعداد فاکتور A در ژنهای جامعه برابر است با $p+\frac{r}{2}$ (نسبت افرادی که دارای ژن AA هستند و نیمی از نسبت افرادی که ژن Aa دارند). به عبارتی دیگر:

$$p+\frac{r}{2}=\left(p_0+\frac{r_0}{2}\right)^2+\left(p_0+\frac{r_0}{2}\right)\left(q_0+\frac{r_0}{2}\right)=$$

$$\left(p_0+\frac{r_0}{2}\right)\left(p_0+q_0+r_0\right)=p_0+\frac{r_0}{2}=P\{A\}$$

نتیجه مهمی که حاصل می‌شود این است که نسبت فاکتورها در جامعه در طی زمان ثابت می‌ماند. به طور مثال دیدیم که در نسل اولیه $P\{A\}$ یا نسبت فاکتور A در جامعه برابر $\left(p_0+\frac{r_0}{2}\right)$ بود. از طرفی میزان همین فاکتور پس از یک نسل برابر $p+\frac{r}{2}$ شد. با محاسبات بالا دیدیم که این دو عبارت دارای مقادیری مساوی هستند.

حال می‌خواهیم ماتریس احتمال گذار زنجیره مارکوفی مورد نظر مسئله را تشکیل دهیم. این ماتریس شکل زیر خواهد بود:

$$P=\begin{array}{c|ccc} & AA & aa & Aa \\ \hline AA & p+\frac{r}{2} & 0 & q+\frac{r}{2} \\ aa & 0 & q+\frac{r}{2} & p+\frac{r}{2} \\ Aa & \frac{p}{2}+\frac{r}{4} & \frac{q}{2}+\frac{r}{4} & \frac{p}{2}+\frac{q}{2}+\frac{r}{2} \end{array}$$

محاسبه اجزای این ماتریس کاری بسیار ساده است. به طور مثال اگر یکی از والدین حتما دارای ژن AA باشد و دیگری می‌تواند دارای ژن AA، Aa یا aa باشد (سطر اول ماتریس). بدیهی است که در این صورت فرزند قطعا دارای ژن aa نخواهد بود. بنابراین باید دید که چه میزان از فرزندان دارای ژن AA و چه میزان دارای ژن Aa خواهند بود. از آنجا که فاکتور اول ژن فرزند حتما A است، باید فاکتور دوم آن را مد نظر قرار دهیم. یعنی با احتمال $p+\frac{r}{2}$ فاکتور دوم آن A و با احتمال $q+\frac{r}{2}$ فاکتور دوم آن a خواهد شد. با توجه به اینکه در قسمت قبل نشان دادیم که نسبت فاکتورها در طول زمان تغییر نمی‌کند، رفتار بلند مدت سیستم نیز باید همین را نشان دهد. به سادگی نشان داده می‌شود که $[p,q,r]P=[p,q,r]$.

مثال ۲-۳۵

مثال ۲-۳۳ را با فرض امکان پس افت بررسی کنید. فرض کنید که دوربین ها به صورت مضربی از ۳ سفارش داده می‌شود. آنقدر سفارش داده می‌شود که موجودی بیشتر از یک واحد شود (فروشگاه به تجربه دریافته است که میانگین فروش او برابر یک است). فروشگاه می‌خواهد موجودی خود را در پایین ترین سطح نگه دارد. تقاضاهای بالاتر از سه را در نظر نمی‌گیریم یعنی P(Dt =3) = 0.080.

یعنی تولید سفارش نمی‌دهم ولی در صف سفارش می‌دهیم سه تا پس در حداکثر حالت به موجودی سه می‌رسیم.

گستره حالت‌هایی که این زنجیره مارکوف را شامل می‌شود بین ۲ تقاضای پس افت و حداکثر ۳ موجودی در درست است (چرا؟) ماتریس احتمال انتقال حالت به صورت زیر است:

$$P=\begin{array}{c|cccccc} & -2 & -1 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ \hline -2 & 0.08 & 0.18 & 0.368 & 0.368 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0.08 & 0.18 & 0.18 & 0.368 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.08 & 0.18 & 0.18 & 0.368 \\ 1 & 0.08 & 0.18 & 0.18 & 0.368 & 0 & 0 \\ 2 & & 0.08 & 0.18 & 0.18 & 0.368 & 0 \\ 3 & & & 0.08 & 0.18 & 0.18 & 0.368 \end{array}$$

پس سفارش بالا ندارم

در صورتی که دو تقاضای پس افت وجود داشته باشد، ۳ عدد دوربین سفارش داده می‌شود که دو تای آن صرف تقاضای پس افت می‌شود. ممکن است بین ۰ تا ۳ تقاضا وجود داشته باشد. در صورتی که ۳ تقاضا وجود داشته باشد، مجددا دو تا از تقاضا به صورت پس افت به

$$\underbrace{-2}_{\text{تقاضای پس افت از دوره } t}+\underbrace{3}_{\text{سفارش در دوره } t+1}-\underbrace{3}_{\text{تقاضای دوره } t+1}=-2$$

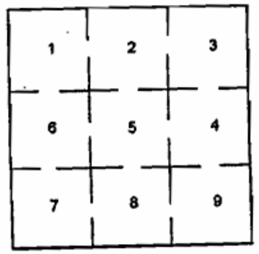
(-۲) (-۱) (۰) (۱) (۲) (۳)

هفته بعد منتقل می‌شود. بدیهی است که در صورتی که محصول در دست یک یا بیشتر باشد، محصولی از انبار مرکزی به فروشگاه انتقال داده نمی‌شود. بقیه مسئله سرراست است.

مثال ۲-۳۶

فرض کنید یک موش صحرایی را در اتاق پر پیچ و خم شکل ۲-۶ قرار دهیم. در این محل ۹ اتاقک وجود دارد که با راهروهایی به هم متصل اند. موش مورد آزمایش، این راهروها را به صورت اتفاقی طی می‌کند. در صورتی که k راهرو در مقابل خودش ببیند، هریک از k راهرو را با احتمال مساوی طی می‌کند. می‌توان مسیری که موش طی می‌کند را به صورت زنجیره مارکوفی مدل کرد.

شکل ۲-۶ – مثال ۳۶-۲



این زنجیره، با قاعده نیست. پاسخ تحلیلی آن به این صورت است که این موش از خانه با شماره‌های فرد فقط به خانه‌های زوج دسترسی دارد و از خانه‌های زوج فقط و فقط به خانه‌های فرد دسترسی دارد. بنابراین حرکت موش به طور متناوب بین خانه‌های فرد و زوج تغییر می‌کند. بنابراین همیشه در این ماتریس در نماهای بالاتر صفر وجود دارد. در عوض با یک نگاه دقیق می‌توان دید که این موش می‌تواند از هر خانه به خانه دیگری دسترسی پیدا کند. بنابراین زنجیره ارگودیک است و ماتریس گذار آن به شرح زیر است.

$$
\begin{array}{c|ccccccccc}
 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\
1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\
2 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
3 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
4 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} \\
5 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & 0 \\
6 & \frac{1}{30} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\
7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\
8 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\
9 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0
\end{array}
$$

برای دستیابی به رفتار این موش در بلند مدت باید ۱۰ معادله ۹ مجهولی حل کنیم و بدیهی است که این روش بسیار زمان بر است. می‌توان به طور شهودی دید که درصد اقامت موش در هر اتاق متناسب با تعداد درهای ورودی به آن است. تعداد درهای ورودی به ترتیب شماره اتاق عبارت اند از:

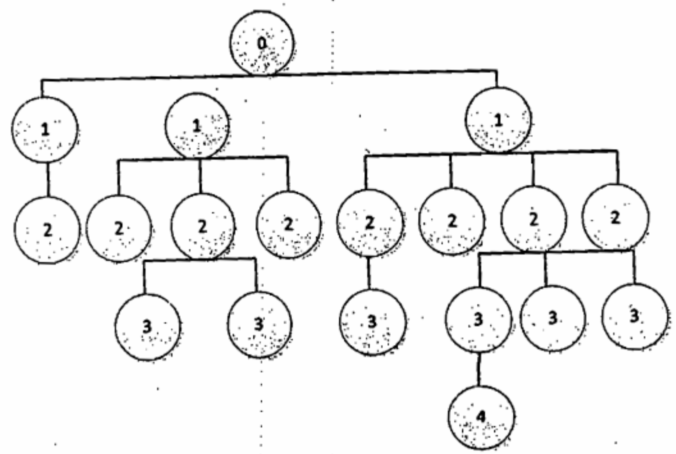
$$\checkmark X = (2,3,2,3,4,3,2,3,2)$$

به راحتی می‌توان بردار فوق را نرمال کرد تا احتمال حضور موش در هریک از اتاق‌ها را به صورت زیر به دست آورد:

$$\checkmark X = \left(\frac{2}{24},\frac{3}{24},\frac{2}{24},\frac{3}{24},\frac{4}{24},\frac{3}{24},\frac{2}{24},\frac{3}{24},\frac{2}{24}\right)$$

مثال ۲-۳۷

یک باکتری را در نظر بگیرید که با تابع احتمال مشخصی تولید مثل می‌کند. همچنین فرزندان او نیز با همین تابع احتمال و به صورت مستقل تولید مثل می‌کنند (به شکل رجوع کنید؛ محور عمودی نشان دهنده نسل است). بدیهی است که این باکتریها ممکن است تولید مثل نکنند. فرض کنید که X_n تعداد باکتری‌ها در نسل n باشد. همچنین $Y_{i,n}$ نشان دهند تعداد فرزندانی است که باکتری iام در نسل nام تولید می‌کند.



رابطه زیر بین دو متغیر X و Y برقرار است:

$$X_{n+1} = Y_{1,n} + Y_{2,n} + \ldots + Y_{X_n,n} = \sum_{i=1}^{X_n} Y_{i,n}$$

الف) نشان دهید که $X_n = (X_0, X_1, \ldots)$ زنجیره مارکوفی تشکیل می‌دهد که ماتریس گذار آن به شکل زیر است:

$$P(x,y) = f^{*x}(y); f^{*x}(y): \text{convolution power of degree n of f}$$

فرض کنید $f(y)$ تابع توزیع زاد و ولد (احتمال تولید y باکتری از هر والد) باشد.

ب)ماتریس گذار را در حالت های زیر تعیین کنید:

هر باکتری بر اساس توزیع پواسان با پارامتر λ تولید مثل می‌کند.

هر باکتری بر اساس توزیع هندسی با احتمال موفقیت p تولید مثل می‌کند.

هر باکتری بر اساس توزیع دوجمله‌ای با احتمال موفقیت p و k بار آزمایش تولید مثل می‌کند.

ج) فرض کنید که توزیع زاد و ولد به شکل $f(0)=1-p$ و $f(2)=p$ باشد. یعنی هر باکتری یا می‌میرد و یا دو باکتری دیگر تولید می‌کند. تابع چگالی (X_1, X_2, X_3) را به دست آورید. فرض کنید که در ابتدا یک باکتری وجود دارد.

د) فرض کنید که m بنابر با میانگین تابع توزیع زاد و ولد باشد. موارد زیر را اثبات کنید:

$$E(X_{n+1}) = E(X_n) \forall n$$
$$E(X_n) = m^n E(X_0) \forall n$$

الف) با توجه به اینکه تعداد باکتری‌های به وجود آمده در هر مرحله تنها به تعداد باکتری‌های مرحله قبل که تولید مثل می‌کنند بستگی دارد، تعداد باکتری‌های به وجود آمده از این نسل را می‌توان به صورت تابعی از تعداد باکتری‌های نسل قبل بیان کرد.

ب) اگر تابع توزیع تولید مثل هر باکتری پواسون با پارامتر λ باشد، احتمال اینکه x باکتری در این نسل به y باکتری در نسل بعد تبدیل شوند عبارت است از:

$$p(x,y) = e^{-\lambda x} \frac{(\lambda x)^y}{y!}; x \in N, y \in N$$

و اگر بر اساس توزیع هندسی با احتمال موفقیت p تولید مثل کنند:

$$p(x,y) = \binom{x+y-1}{y-1} p^y (1-p)^x; x \in N, y \in N$$

و اگر بر اساس توزیع دوجمله‌ای با احتمال موفقیت p و k بار آزمایش تولید مثل داریم:

$$p(x,y)=\binom{kx}{y}p^{y}(1-p)^{kx-y};\ x\in N, y\in\{0,1,2,\dots,kx\}$$

ج) $g(0,0,0)$ بدین معنی است باکتری اولیه می‌میرد و جمعیت نسل اول صفر است. بنابراین $P(X_1=0)=1-p$ است. طبیعتا جمعیت صفر امکان زاد و ولد ندارد و بنابراین $P(X_2=0)=1$ و $P(X_3=0)=1$ است. آنگاه

$$g(0,0,0)=1-p$$

احتمال $g(2,0,0)$ به این معنی است که باکتری اولیه دو باکتری تولید کند (p) و سپس هر دو بمیرند ($(1-p)^2$). طبیعتا در صورتی که هیچ باکتری در نسل دوم وجود نداشته باشد، $P\{X_3=0\}=1$ است. در نتیجه داریم:

$$g(2,0,0)=p(1-p)^2 \qquad g(2,2,0)=2p^2(1-p)^3$$

$$g(2,2,2)=4p^3(1-p)^2 \qquad g(2,2,4)=2p^4(1-p)$$

$$g(2,4,0)=p^3(1-p)^4 \qquad g(2,4,2)=4p^4(1-p)^3$$

$$g(2,4,4)=6p^5(1-p)^2 \qquad g(2,4,6)=4p^6(1-p)$$

$$g(2,4,8)=p^7$$

د) با توجه به رابطه داریم:

$$X_{n+1}=\sum_{i=1}^{X_n}Y_{i,n}$$

با توجه به استقلال X_n و $Y_{i,n}$ و $E[X_n]=m$ داریم:

$$E\left[\sum_{i=1}^{X_n}Y_{i,n}\right]=E[X_n]E\left[\sum_{i=1}^{X_n}Y_{i,n}\mid X_n\right]=mE[X_n]$$

$$\Rightarrow E[X_{n+1}]=mE[X_n]$$

$$E[X_n]=mE[X_{n-1}]$$

$$\vdots$$

$$E[X_{n+1}]=m^nE[X_0]$$

P*P*P*

۳.۱.۲ محاسبات جانبی DTMC

در این قسمت می‌خواهیم بررسی کنیم که اگر زنجیره ای از حالت i شروع کند، پس از چند مرحله به طور میانگین به همین حالت بر میگردد این مفهوم را با r_j نشان می‌دهیم. مثال ۲-۳۶ را در نظر بگیرید. فرض کنید موش از اتاق ۱ شروع به حرکت کرده است. این موش ممکن است به اتاق‌های دیگر وارد شود و پس از گذشت مراحلی مجددا به همین اتاق برگردد. می‌خواهیم میانگین این عدد را محاسبه کنیم. بدیهی است که برای این مسئله خاص، امکان این وجود ندارد که برای دو مرحله متوالی، سیستم در یک حالت باقی بماند. ولی همانطور که در مثالهای قبلی دیدیم، ممکن است زنجیره‌ای در دو مرحله متوالی در یک حالت باقی بماند. (فرض دیگر ما بر این است که این حالت جاذب نیست و زنجیره نیز ارگودیک است. زنجیره‌هایی که حالت جاذب و گذرا را به طور مختلط دارند در آینده اشاره کوتاهی به آن داریم).

ابتدا این موضوع را از جنبه تحلیلی بحث می‌کنیم و سپس راه حلی سر راست برای آن ارائه می‌دهیم. در ابتدا باید بدانیم که در صورتی که از هر حالتی شروع کنیم، به طور میانگین پس از چند مرحله وارد حالت j می‌شویم؟ میانگین تعداد مراحل برای اولین ورود به حالت جاذب را با m_{ij} نشان می‌دهیم که به معنی میانگین انتظاری تعداد مراحلی است که پس از i به j (حالت جاذب) خواهیم رسید. بدیهی است که $m_{jj}=0$.

فرض کنید می‌خواهیم میانگین زمان دسترسی از حالت i به j را به دست بیاوریم. خواهیم داشت:

$$m_{ij}=p_{ij}+\sum_{k\neq j}p_{ik}(m_{kj}+1) \qquad \text{معادله ۲-۲۵}$$

$P_{ij}+\sum P_{ik}m_{kj}+\sum P_{ik}$

بدیهی است که عدد یک در سمت راست معادله بالا برای تغییر حالت از i به k است. از آنجا که $\sum_k p_{ik} = 1$ است:

معادله ۲-۲۶

$$m_{ij} = 1 + \sum_{k \neq j} p_{ik} m_{kj}$$

و به طور کلی نیز تعریف می‌کنیم

معادله ۲-۲۷

$$r_i = \sum_k p_{ik}(m_{ki} + 1) = 1 + \sum_{k=j} p_{ik} m_{ki}$$

با توجه به سختی حل معادله و به دست آوردن دید بهتر به مسئله، ماتریس M را تشکیل می‌دهیم که درایه‌های آن m_{ij} هستند. طبیعی است که درایه‌های قطری این ماتریس برابر صفر هستند. معادله ۲-۲۷ را به صورت ماتریسی بازنویسی می‌کنیم.

$$M = PM + C - D$$

در عبارت بالا، D ماتریسی است که اعضای قطری آن r_i و بقیه صفر هستند. تمام درایه‌های ماتریس C برابر یک است. که به صورت زیر بازنویسی می‌شود

معادله ۲-۲۸

$$(I - P)M = C - D$$

حال اساسی ترین قضیه در این بخش را اثبات می‌کنیم.

تعریف ۲-۱۹

برای هر ماتریس زنجیره مارکوفی ارگودیک، میانگین زمان بازگشت برای حالت i برابر $\frac{1}{w_i}$ است که w_i بردار ثابت ماتریس گذار است (بردار ثابت در تعریف ۲-۱۵ معرفی شده است).
با ضریب ماتریس W در دو طرف معادله ۲-۲۸ داریم

$$W(I - P) = 0$$

که برابر است با

$$wC - wD = 0$$

با توجه به اینکه همه درایه‌های ماتریس C برابر یک و درایه‌های قطری D برابر r_i است داریم

$$(1,1,\ldots,1) = (w_1 r_1, w_2 r_2, \ldots, w_n r_n)$$

و در نتیجه $r_i = \frac{1}{w_i}$

مثال ۲-۳۸

مثال ۲-۳۶ را مجددا بررسی کنید. خواهیم داشت:

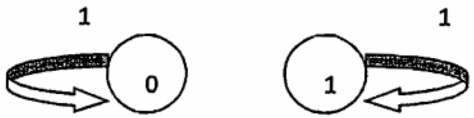
$$X = (12,8,12,8,6,8,12,8,12)$$

تعریف ۲-۲۰

میانگین زمان اقامت، T_i[1] : عبارت است از تعداد مراحل زمانی که DTMC زنجیره در حالت i ام (قبل از رفتن به حالت دیگری) باقی می‌ماند. $\{x_n \in S : n \in N\}$ این زمان، متغیر تصادفی توزیع هندسی با میانگین $1 - p_{ii}$ است. به عبارت دیگر T_i متغیر تصادفی است که نشان می‌دهد که زنجیره مارکوف پس از چند مرحله از حالت i خارج می‌شود. موفق شدن در تابع توزیع هندسی را معادل خارج شدن از i در نظر بگیرید. بنابراین متوسط زمان اقامت در حالت i برابر است با $T_i = 1/(1 - p_{ii})$

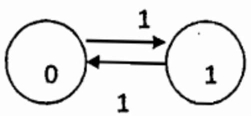
مثال ۲-۳۹

در ادامه مثال ۲-۱۱ فرض ۱: اگر $a = b = 0$ باشد، آنگاه میانگین زمان اقامت در هر حالت بی نهایت است.



$\frac{1}{0} = \infty$

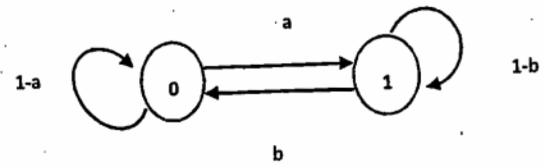
فرض۲: اگر $a = b = 1$ باشد، آنگاه میانگین زمان اقامت هر حالت برابر با ۱ است.



$\frac{1}{1} = 1$

[1] Sojourn Time in state *i*

فرض ۳: میانگین اقامت حالت $1 = \frac{1}{b}$ و حالت $0 = \frac{1}{a}$ است.



۲.۲ زنجیرهٔ مارکوف زمان پیوسته

همانطور که قبلا اشاره کردیم، زنجیره‌های مارکوف فرآیندهای تصادفی هستند که فضای حالت آنها گسسته باشد. حال اگر پارامتر زمان را هم به صورت پیوسته در نظر بگیریم، زنجیره به یک زنجیرهٔ مارکوف زمان-پیوسته تبدیل می‌شود. یعنی بر خلاف زنجیره‌های مارکوف زمان گسسته که فرض می‌شد تغییر حالت در یک لحظه خاصی از زمان انجام می‌شود، مجموعه T به صورت R^+ تعریف می‌شود.

تعریف ۲-۲۱

فرآیند تصادفی زمان پیوسته با فضای حالت گسسته $\{x(t); st \geq 0\}$ را زنجیرهٔ مارکوف پیوسته گویند اگر:

معادله ۲-۲۹

$$P\{X(t)=j|X(s)=i; X(u)=x(u); 0 \leq u \leq s\}$$
$$= P\{X(t)=j|X(s)=i\}; \text{for all i,j}\ ; s \geq 0; u \geq 0; t \geq s; x(t) \in S$$

معادله فوق بیانگر آن است که حالت آینده سیستم فقط و فقط به وضعیت فعلی آن بستگی دارد و از گذشته سیستم مستقل است. بنابراین احتمال انتقال حالت برابر است با :

معادله ۲-۳۰
$$p_{ij}(s,t) = P\{X(t)=j|X(s)=i\}; t \geq s,\ s \geq 0,\ i,j \in S$$

همانند حالت گسسته، احتمال انتقالات خروجی از یک حالت برابر یک است. بنابراین داریم:

$$\sum_j p_{ij}(t) = 1 \qquad \forall i$$
$$0 \leq p_{ij}(t) \leq 1 \qquad \forall ij$$

بدیهی است که این روابط به ازای کلیه مقادیر t برقرار است.

نکته ۲-۸

فرض کنید ماتریس احتمال انتقال P موجود باشد. در این صورت داریم:

$$P = \{p_{ij}(t)\}; \quad \forall i,j \in S$$

نکته ۲-۹

بدیهی است که $\lim_{t\to 0} P(0) = I$ زیرا در فاصله زمانی بسیار کوتاه، حالت سیستم تغییر پیدا نمی‌کند. بنابراین اعداد قطر برابر یک و باقی درایه‌های ماتریس برابر صفر است.

تعریف ۲-۲۲

همانند حالت گسسته می‌توان فرض همگن بودن را به تعریف اضافه کرد. در صورتی که در زنجیره مارکوف زمان-پیوسته، $p_{ij}(s,t)$ به ازای کلیه مقادیر s و t فقط به t-s بستگی داشته باشد، زنجیره مارکوف زمان-پیوسته همگن خواهیم داشت و رابطه زیر در آن برقرار است:

معادله ۲-۳۱
$$P_{ij}(s,t) = P_{ij}(t-s) = P\{X(u+t-s)=j|x(u)=j\}; \forall u \geq 0$$

تعریف ۲-۲۳

p بردار وضعیت سیستم در زمان t را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

معادله ۲-۳۲
$$p_j(t) = Pr\{x(t)=j\};\ p(t) = (p_1(t), p_2(t), \ldots)$$

بر اساس معادله بالا داریم:

معادله ۲-۳۳
$$p_j(t) = \sum_i Pr\{X(t+u)=j|X(u)=i\}.Pr\{X(u)=i\}$$
$$= \sum_i p_{ij}(t).Pr\{X(0)=i\}$$
$$= \sum_i p_{ij}(t).p_i(0)$$

نکته ۲-۱۰

با داشتن بردار احتمال وضعیت اولیه و همچنین تابع احتمالی گذار، وضعیت سیستم در زمان t را می‌توان به صورت بردار احتمالی پیش بینی کرد. فرم ماتریسی معادله ۲-۳۳ به صورت زیر خواهد بود:

معادله ۲-۳۴

$$p(t) = \pi(0)P(t)$$

نکته ۲-۱۱

زمان اقامت: فرض کنید که زنجیره‌ای وارد حالت i شود (فرض می‌کنیم که این زمان، زمان صفر است). زمانی که طول میکشد تا وضعیت سیستم از i به وضعیت دیگری انتقال پیدا کند را با متغیر تصادفی τ_i نمایش می‌دهند. به طور مثال فرض کنید که در لحظه ۱۰ در حالت i بوده است. احتمال اینکه در لحظه ۱۵ نیز در وضعیت i بماند برابر است با احتمال اینکه حداقل ۵ دقیقه آینده در این حالت باقی بماند. بنابر این داریم:

$$P(\tau_i > 15 \mid \tau_i > 10) = P(\tau_i > 5)$$

و به طور نمادین نشان می‌دهیم:

معادله ۲-۳۵

$$P(\tau_i > s+t \mid \tau_i > s) = P(\tau_i > t)$$

یکی از مهم‌ترین نتایجی که از معادله ۲-۳۵ می‌گیریم، بی‌حافظه بودن تابع توزیع زمان اقامت است. پس از این نتیجه‌گیری، معادله معادله ۲-۳۵ را به صورت زیر تعمیم می‌دهیم:

معادله ۲-۳۶

$$Pr\{\tau_i > s+t|X(0)=i\} = Pr\{\tau_i > s+t|X(0)=i, \tau_i > s\}Pr\{\tau_i > s|X(0)=i\}; t \geq 0.$$

بدیهی است که بر اساس معادله ۲-۳۵، رابطه زیر برقرار است:

$$Pr\{\tau_i > s+t|X(0)=i, \tau_i > s\} = Pr\{\tau_i > t|X(0)=i\}$$

حال با تعریف $\bar{F}_i(u) = \Pr\{\tau_i > u|X(0)=i\};\ u \geq 0$، معادله ۲-۳۶ را می‌توان به صورت زیر بازنویسی کرد:

معادله ۲-۳۷

$$\bar{F}_i(t+s) = \bar{F}_i(t)\bar{F}_i(s); t,s \geq 0$$

$\bar{F}_i(.)$ تابع پیوسته است. از آنجا که تابع توزیع نمایی تنها تابع توزیع پیوسته است که خاصیت بی حافظگی دارد، می‌توان نتیجه گرفت که تابع توزیع حالت زنجیره مارکوف

زمان-پیوسته با فرض همگن بودن دارای توزیع نمایی است. بنابراین τ_i زمان اقامت در حالت i در هر بار ملاقات یک متغیر تصادفی پیوسته نمایی است. ($\tau_i = Exp(a_i)$) اگر $0 < a_i < \infty$ باشد ، حالت را پایدار گویند. در صورت $a_i = \infty$ ، حالت لحظه‌ای داریم $p_{ij}(s,t) = \sum_k p_{i,k}(s,u)p_{k,j}(u,t)$ حالت جاذب و . بنابراین تنها پاسخ معادله ۲-۳۷ به صورت زیر است.

معادله ۲-۳۸

$$\bar{F}_i(u) = e^{-a_i u}; u \geq 0, a_i > 0$$

که همان رابطه مدت اقامت τ_i در وضعیت i با پارامتر a_i است. همچنین مدت زمان اقامت حالات مختلف τ_i و τ_j از هم مستقل اند. با توجه به این نکته می‌توان به معادله زیر رسید (به ازای $t, T \geq 0$):

معادله ۲-۳۹

$$p_{ij}(t+T) = \sum_k p_{ik}(T).p_{kj}(t); i < k < j; i,j,k \in S$$

که معادله ۲-۳۹ نمایشی از معادله چاپمن-کولموگرف است.

تعریف ۲-۲۴

شکل ماتریسی معادله ۲-۳۹ به شرح زیر است.

معادله ۲-۴۰

$$P(T+t) = P(T).P(t)$$

حال از سمت چپ معادله ۲-۴۰ با قرار دادن $t = 0$، مشتق می‌گیریم تا آهنگ تغییر حالت را بررسی کنیم. بنابراین با فرض t=0 داریم:

معادله ۲-۴۱

$$q_{ij} = \lim_{h\to 0}\frac{p_{ij}(h)-p_{ij}(0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{p_{ij}(h)}{h}; i \neq j \text{ and}$$

$$q_{ii} = \lim_{h\to 0}\frac{p_{ii}(h)-p_{ii}(0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{p_{ii}(h)-1}{h};$$

فرض کنید $q_i = -q_{ii}$. اثبات می‌شود که q_{ij} همیشه وجود داشته و نامتناهی است. به علاوه در صورتی که S مجموعه ای متناهی باشد، $q_i \geq 0$ به صورت متناهی وجود دارد در صورتی که S نامتناهی باشد ممکن است q_i وجود نداشته باشد و نامتناهی باشد. اگر معادله ۲-۴۱را به صورت ماتریسی بازنویسی کنیم خواهیم داشت:

معادله ۲-۴۲

$$Q = \lim_{h\to 0}\frac{P(h)-I}{h}$$

به علاوه برای hهای کوچک در معادله ۲-۴۱داریم:

معادله ۲-۴۳
$$p_{ij}(h) = hq_{ij} + o(h), i \neq j$$
$$p_{ii}(h) = hq_i + o(h),$$

$o(h)$ نشان دهنده تابعی از h است که با سرعت بیشتری نسبت به h به سمت صفر میل می‌کند. با توجه به رابطه زیر داریم:

معادله ۲-۴۴
$$\sum_j p_{ij}(h) = 1$$

اگر معادله بالا را باز کنیم خواهیم داشت:

معادله ۲-۴۵
$$\sum_{j \neq i} p_{ij}(h) + p_{ii}(h) - 1 = 0$$

با مشتق گیری از عبارت بالا داریم:

معادله ۲-۴۶
$$\sum_{j \neq i} q_{ij} + q_{ii} = 0 \rightarrow \sum_{j \neq i} q_{ij} = q_{ii}$$

ماتریس $Q=[q_{ij}]$ به ماتریس چگالی گذار یا آهنگ و یا به صورت ساده، ماتریس Q خوانده می‌شود. این ماتریس به گونه‌ای است که عناصر قطری آن اعدادی منفی و غیرقطری اعدادی مثبت دارد. جمع عنصر هر سطر نیز برابر صفر است. در صورتی که ماتریس Q یک ماتریس متناهی باشد و فضای حالت S شامل m+1 حالت باشد داریم:

$$Q = \begin{bmatrix} -q_0 & q_{01} \cdots & q_{0m} \\ \vdots & -q_1 \ddots & \vdots \\ q_{0m} & \cdots & -q_m \end{bmatrix}$$

نکته ۲-۱۲

با توجه به معادله قبل، جمع هر سطر ماتریس برابر صفر است. دقت کنید ماتریس Q، نمایشگر آهنگ و سرعت تغییر حالت است و نه احتمال انتقال حالت.

مثال ۲-۴۰

ماتریس آهنگ تغییر حالت زیر را برای یک زنجیرهٔ زمان-پیوسته سه حالتی در نظر بگیرید:

$$\begin{bmatrix} -3 & 1 & 2 \\ 3 & -5 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

بدیهی است که شتاب خروج این زنجیره از حالت اول برابر ۳، از حالت دوم برابر ۵ و از حالت سوم برابر ۲ است. این به این معنی است که اگر اکنون در وضعیت اول قرار داشته

باشیم، به طور متوسط پس از گذشت $\frac{1}{3}$ واحد زمان، از این حالت خارج می‌شویم. به همین ترتیب به طور متوسط $\frac{1}{5}$ واحد زمان در حالت دوم و $\frac{1}{2}$ واحد زمان در حالت سوم توقف خواهیم داشت.

از معادله ۲-۴۰ چاپمن کولموگرف داریم:

$$p_{ij}(h+t) = \sum_k p_{ik}(h).p_{kj}(t) = \sum_{k \neq i} p_{ik}(h).p_{kj}(t) + p_{ii}(h).p_{ij}(t)$$

و در نتیجه:

$$\lim_{h \to 0} \frac{p_{ij}(h+t) - p_{ij}(t)}{h}$$
$$= \lim_{h \to 0} \sum_{k \neq i} \frac{p_{ik}(h)}{h} p_{kj}(t) + \left(\frac{p_{ii}(h)-1}{h}\right) p_{ij}(t)$$

معادله ۲-۴۷
$$= \sum_{k \neq i} \left[\lim_{h \to 0} \frac{p_{ik}(h)}{h}\right] p_{kj}(t) + \left[\lim_{h \to 0} \left(\frac{p_{ii}(h)-1}{h}\right)\right] p_{ik}(t)$$

و به عبارت دیگر

معادله ۲-۴۸
$$p'_{ij}(t) = \sum_{k \neq i} q_{ik}(h).p_{kj}(t) + q_i(h).p_{ij}(t)$$

معادله اخیر معادله بازگشتی چاپمن-کولموگرف گفته می‌شود. در صورتی که بخواهیم این معادله را به صورت ماتریسی نمایش دهیم خواهیم داشت:

معادله ۲-۴۹
$$\boxed{P'(t) = QP(t)}$$

حال اگر دوباره معادله ۲-۴۰ را بررسی کنیم:

$$P_{ij}(t+h) = \sum_k p_{ik}(t).p_{kj}(h) = \sum_{k \neq i} p_{ik}(t).p_{kj}(h) + p_{ij}(t).p_{ij}(h)$$

در صورت مشتق گیری داریم:

معادله ۲-۵۰
$$p'_{ij}(t) = \sum_{k \neq i} p_{ik}(h).q_{kj} + q_i.p_{ij}(t)$$

که به معادله اخیر معادله پیشرو چاپمن-کولموگرف گفته می‌شود. صورت ماتریسی معادله ۲-۵۰ به شکل زیر است:

معادله ۲-۵۱

$$P'(t) = P(t)Q$$

بدیهی است که معادله ۲-۵۱ یک دستگاه معادلات دیفرانسیلی است که گاه حل آن بسیار مشکل است. شرایط اولیه برای حل این معادلات دیفرانسیل را با استفاده از $P(0) = I$ $\lim_{t\to 0}$ در نکته ۲-۹ به دست می‌آوریم.

مثال ۲-۴۱

فرآیند تولد خالص: زنجیره مارکوف زمان پیوسته‌ای را در نظر بگیرید. در صورتی که این زنجیره در حالت i وجود داشته باشد، با نرخ λ وارد حالت $i+1$ می‌شود. تعداد حالات این زنجیره نیز نامتناهی است. ماتریس آهنگ این زنجیره به صورت مقابل است.

$$Q = \begin{bmatrix} -\lambda & \lambda & & & \\ & -\lambda & \lambda & & \\ & & -\lambda & \lambda & \\ & & & -\lambda & \cdots \\ & & & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

در صورتی که معادله ۲-۴۹ یا معادله ۲-۵۱ را بسط دهیم داریم:

$$\begin{bmatrix} p'_{00} & p'_{01} & 0 & \cdots & \\ & p'_{11} & p'_{12} & & \\ & & p'_{22} & p'_{23} & \cdots \\ & & & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} p_{00} & p_{01} & 0 & \cdots & \\ & p_{11} & p_{12} & & \\ & & p_{22} & p_{23} & \cdots \\ & & & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\lambda & \lambda & & & \\ & -\lambda & \lambda & & \\ & & -\lambda & \lambda & \\ & & & -\lambda & \cdots \\ & & & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -\lambda p_{00} & \lambda p_{00} - \lambda p_{01} & \lambda p_{01} - \lambda p_{02} & \lambda p_{02} - \lambda p_{03} & \\ & -\lambda p_{11} & \lambda p_{11} - \lambda p_{12} & & \\ & & -\lambda p_{22} & \lambda p_{22} - \lambda p_{23} & \cdots \\ & & & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

ابتدا سطر اول معادلات ماتریس را حل می‌کنیم:

$$p'_{00} = -\lambda p_{00}$$

واضح است که پاسخ معادله دیفرانسیل فوق به صورت زیر است:

$$p_{00} = e^{-\lambda t}$$

سپس داریم:

$$p'_{01} = \lambda p_{00} - \lambda p_{01} = \lambda e^{-\lambda t} - \lambda p_{01}$$

که با حل آن داریم[1]:

$$p_{01} = \lambda t e^{-\lambda t}$$

و سپس داریم:

$$p'_{02} = \lambda p_{01} - \lambda p_{02} = \lambda^2 t e^{-\lambda t} - \lambda p_{02} \Rightarrow p_{02} = \frac{\lambda^2 t^2}{2} e^{-\lambda t}$$

$$p'_{03} = \lambda p_{02} - \lambda p_{03} = \frac{\lambda^3 t^2}{2} e^{-\lambda t} - \lambda p_{02} \Rightarrow p_{02} = \frac{\lambda^3 t^3}{6} e^{-\lambda t}$$

$$p'_{04} = \lambda p_{03} - \lambda p_{04} = \frac{\lambda^4 t^3}{6} e^{-\lambda t} - \lambda p_{02} \Rightarrow p_{02} = \frac{\lambda^4 t^4}{24} e^{-\lambda t}$$

---

[1] پاسخ معادلات دیفرانسیل خطی مرتبه اول به فرم $y'(x) + p(x)y(x) = r(x)$ به صورت $y = e^{-a(x)}\left(\int r(x)e^{a(x)}dx + k\right)$ که k ثابت انتگرال گیری و $a(x) = \int p(x)dx$ است.

و به صورت استقرایی داریم:

$$p_{0i} = \frac{\lambda^i t^i}{i!} e^{-\lambda t}$$

برای سایر سطور نیز تحقیق کنید و نتیجه بگیرید.

مثال ۲-۴۲

مجموعه‌ای با جمعیت m را در نظر بگیرید که در زمان صفر، $m-1$ جزء آن سالم و یک جزء آن خراب است. نه تنها امکان تعمیر هر جزئی که خراب می‌شود وجود ندارد، بلکه هر کدام از این اجزاء خراب سبب می‌شوند تا اجزاء سالم با نرخ α خراب شوند. بنابراین نرخ خرابی برابر است با:

$$\lambda_n = (m-n)n\alpha; n = 1, 2, \ldots, m-1.$$

(هر جزء خراب به طور مستقل می‌تواند بر روی $(m-n)$ جزء سالم با نرخ α تاثیر بگذارد. بنابراین نرخ تخریب برای هر جزء برابر $(m-n)\alpha$ است. m جزء خراب وجود دارد. در نتیجه نرخ خرابی کل برابر $\lambda_n = (m-n)n\alpha$ است.)

فرض کنید که T_i نشان دهنده زمانی باشد که تعداد اجزای خراب از i به $i+1$ افزایش می‌یابد و T کل این زمان باشد. داریم:

$$T = \sum_{i=1}^{m-1} T_i$$

این مثال حالت خاصی از مثال قبل (تولد خالص) است. بنابر این می‌دانیم که تابع توزیع گذار نمایی است. پارامتر آن به شکل زیر خواهد بود:

$$T_i \sim \exp((m-i)i\alpha)$$

$$E[T] = \sum_{i=1}^{m-1} E[T_i] = \sum_{i=1}^{m-1} \frac{1}{(m-i)i\alpha} = \frac{1}{\alpha}\sum_{i=1}^{m-1}\frac{1}{(m-i)i\alpha} = \frac{1}{m\alpha}\sum_{i=1}^{m-1}\left(\frac{1}{m-i} - \frac{1}{i}\right)$$

$$= \frac{2}{m\alpha}\sum_{i=1}^{m-1}\frac{1}{i} = \frac{2}{m\alpha}\sum_{i=1}^{m-1}\frac{1}{i}(i+1-i)$$

که به صورت تقریبی زیر محاسبه می‌شود:

$$\frac{2}{m\alpha}\int_1^{m-1}\frac{1}{t}dt = \frac{2}{m\alpha}\log t\Big|_1^{m-1} = \frac{2\log(m-1)}{m\alpha}$$

نکته ۲-۱۳

در صورتی که معادله ۲-۳۴را وارد محاسبات کنیم، با استفاده معادله ۲-۴۹ و معادله ۲-۵۱ داریم:

معادله ۲-۵۲
$$\frac{d}{dt}\{\pi(t)\} = Q\pi(t) = \pi(t)Q = 0$$

تعریف ۲-۲۵

حال با تعریف $\lim_{t\to\infty} p(t) = \pi = (p_1, p_2, p_3, \ldots)$، معادلات تعادل زنجیره‌های مارکوف زمان پیوسته را به صورت زیر خواهیم داشت:

معادله ۲-۵۳
$$\boxed{\pi Q = 0}$$

مثال ۲-۴۳

بردار توزیع احتمال مثال ۲-۴۱ را در حالت پایدار به دست بیاورید.

$$\pi Q = (p_1, p_2, p_3)\begin{bmatrix} -3 & 1 & 2 \\ 3 & -5 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix} = 0$$

با در نظر گرفتن $\sum \pi = 1$ داریم

$$(p_1, p_2, p_3) = \left(\frac{4}{9}, \frac{2}{9}, \frac{3}{9}\right)$$

مثال ۲-۴۴

صفحه ۱

فرض کنید که یک سایت کامپیوتری یک شرکت دارای دو کامپیوتر است. در صورتی که هر دو کامپیوتر از کار بیافتند، شرکت امکان پیگیری آنلاین خرید و فروش نمایندگی‌های خود را ندارد. هر کامپیوتر بر اساس تابع توزیع نمایی با نرخ μ خراب شده و توزیع نمایی با نرخ λ تعمیر می‌شود. فرض کنید که مقدار μ ثابت است ولی می‌توان λ را با استخدام کارمند متخصص مقدار آن را تغییر داد. میزان λ را طوری تعیین کنید که در دراز مدت حداکثر ۱٪ اوقات مجموعه سایت از کار بیافتد.

فرض کنید $X(t)$ تعداد کامپیوترهای درحال کار باشد ($X(t)\in\{0,1,2\}$). ماتریس آهنگ این زنجیره به شکل مقابل است.

$$Q=\begin{array}{c} 0\\ 1\\ 2\end{array}\begin{bmatrix}-\lambda & \lambda & 0\\ \mu & -(\lambda+\mu) & \lambda\\ & \mu & -\mu\end{bmatrix}$$

توزیع حالت پایدار این سیستم را به دست می‌آوریم:

$$\left.\begin{array}{l}\lambda p_0=\mu p_1\\ (\lambda+\mu)p_1=\mu p_1+\lambda p_2\\ \mu p_2=\lambda p_1\\ p_0+p_1+p_2=1\end{array}\right\}\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}p_0=\dfrac{1}{1+\lambda/\mu+\left(\lambda/\mu\right)^2}\\ p_1=\dfrac{\lambda/\mu}{1+\lambda/\mu+\left(\lambda/\mu\right)^2}\\ p_2=\dfrac{\left(\lambda/\mu\right)^2}{1+\lambda/\mu+\left(\lambda/\mu\right)^2}\end{array}\right.$$

حال عبارت زیر را در نظر بگیرید:

$$\lim_{t\to\infty}P(X(t)>0)=1-p_0=\frac{\lambda/\mu+\left(\lambda/\mu\right)^2}{1+\lambda/\mu+\left(\lambda/\mu\right)^2}$$

فرض کنید که $x=\lambda/\mu$ باشد. در این صورت داریم:

$$\frac{x+x^2}{1+x+x^2}=p$$

$$x+x^2=(1+x+x^2)p\Rightarrow(1-p)x^2+(1-p)x-p=0$$

$$\Rightarrow x=\frac{-(1-p)\pm\sqrt{(1-p)^2-4(1-p)(-p)}}{2(1-p)}$$

$$=\frac{-(1-p)\pm\sqrt{(1-p)(1+3p)}}{2(1-p)}=\frac{1}{2}\left(-1\pm\sqrt{\frac{1+3p}{1-p}}\right)$$

حال به در نظر گرفتن $p=0.01$، $x=-1.01$ و یا $x=0.010$ خواهد شد که با توجه به اینکه این ضریب باید مثبت باشد داریم $\lambda=0.01\mu$.

نکته ۲-۱۴

می‌توان نشان داد[1]:

معادله ۲-۵۴

$$\boxed{P(t)=e^{Qt}=I+\sum_{n=1}^{\infty}Q^n\frac{t^n}{n!}}$$

مثال ۲-۴۵

فرض کنید که ماتریس آهنگ یک نجیره مارکوف زمان-پیوسته به شکل مقابل باشد.

$$\begin{bmatrix}-4 & 2 & 2\\ 4 & -7 & 3\\ 5 & 5 & -10\end{bmatrix}$$

ماتریس گذار در $t=3$ به شرح زیر است:

[1] روش‌های دیگری نیز برای به دست آوردن روابط بین دو ماتریس Q و $P(t)$ وجود دارد که در حوصله این کتاب نیست.

$$P^{(3)} = e^{3Q} = \exp\{3\begin{bmatrix}-4 & 2 & 2\\ 4 & -7 & 3\\ 5 & 5 & -10\end{bmatrix}\} = \begin{bmatrix}0.523 & 0.285 & 0.1905\\ 0.523 & 0.285 & 0.1905\\ 0.523 & 0.285 & 0.1905\end{bmatrix}$$

مثال ۲-۴۶

فرض کنید که ماتریس آهنگ یک زنجیره مارکوف زمان پیوسته به شکل مقابل باشد.

$$Q = \begin{bmatrix}-a & a\\ b & -b\end{bmatrix}$$

برای به دست آوردن ماتریس گذار این زنجیره از طریق معادله ۲-۵۴ باید Q^n را به دست آورد. داریم:

$$Q^2 = \begin{bmatrix}a^2+ab & -(a^2+ab)\\ -(b^2+ab) & b^2+ab\end{bmatrix} = -(a+b)Q$$

و به طور استقرایی خواهیم داشت:

$$Q^n = [-(a+b)]^{n-1} Q$$

و در نتیجه:

$$P(t) = I + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{Q^n t^n}{n!}$$

$$= I + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{[-(a+b)]^n Q t^n}{n!}$$

$$= I - \frac{1}{(a+b)}\left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{[-(a+b)]^n t^n}{n!} - 1\right] Q$$

$$= I - \frac{1}{(a+b)}[\exp\{-(a+b)t - 1]Q$$

$$= I + \frac{1}{(a+b)}Q - \frac{1}{(a+b)}Qe^{-(a+b)t}$$

$$= \begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}\frac{-a}{a+b} & \frac{a}{a+b}\\ \frac{b}{a+b} & \frac{-b}{a+b}\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}\frac{a}{a+b}e^{-(a+b)t} & \frac{-a}{a+b}e^{-(a+b)t}\\ \frac{-b}{a+b}e^{-(a+b)t} & \frac{b}{a+b}e^{-(a+b)t}\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix}\frac{b}{a+b} + \frac{a}{a+b}e^{-(a+b)t} & \frac{a}{a+b} - \frac{a}{a+b}e^{-(a+b)t}\\ \frac{b}{a+b} - \frac{b}{a+b}e^{-(a+b)t} & \frac{a}{a+b} + \frac{b}{a+b}e^{-(a+b)t}\end{bmatrix}$$

روش دیگر حل مسئله استفاده از دستگاه معادلات دیفرانسیل معادله ۲-۴۹ یا معادله ۲-۵۱ است. خواهیم داشت(در اینجا از معادله ۲-۵۱ استفاده می‌کنیم):

$$\begin{bmatrix}P'_{00}(t) & P'_{01}(t)\\ P'_{10}(t) & P'_{11}(t)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}P_{00}(t) & P_{01}(t)\\ P_{10}(t) & P_{11}(t)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-a & a\\ b & -b\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix}-aP_{00}(t) + bP_{01}(t) & aP_{00}(t) - bP_{01}(t)\\ -aP_{10}(t) + bP_{11}(t) & aP_{10}(t) - bP_{11}(t)\end{bmatrix}$$

با توجه به اینکه جمع احتمالات هر سطر از ماتریس گذار برابر یک است (به طور مثال $P_{00}(t) + P_{01}(t) = 1$) و از حل دستگاه معادلات دیفرانسیل خواهیم داشت:

$$\begin{bmatrix}P'_{00}(t) & P'_{01}(t)\\ P'_{10}(t) & P'_{11}(t)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}b-(a+b)P_{00} & a-(a+b)P_{01}\\ b-(a+b)P_{10} & a+(a+b)P_{11}\end{bmatrix}$$

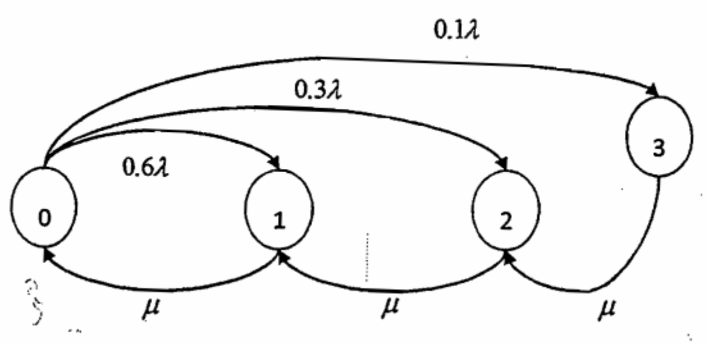
$$= \begin{bmatrix}\frac{b}{a+b} + \frac{a}{a+b}e^{-(a+b)t} & \frac{a}{a+b} - \frac{a}{a+b}e^{-(a+b)t}\\ \frac{b}{a+b} - \frac{b}{a+b}e^{-(a+b)t} & \frac{a}{a+b} + \frac{b}{a+b}e^{-(a+b)t}\end{bmatrix}$$

ملاحظه می‌شود که جواب یکسان است. بدیهی است که شرایط اولیه حل برای به دست آوردن ثابت انتگرال برابر است با $P(0)=I$ (به نکته ۲-۹ رجوع کنید).

مثال ۲-۴۷

قایقهای یدک کش دارای سه قلاب جهت نگهداری اتصالات مربوط به کشتیهایی است که باید یدک کشیده شوند. بر اثر حرکتهای ناموزون کشتیها، این قلابها در بعضی موارد شکسته شده ودیگر امکان کار با قایق وجود ندارد. این یدک کشها جهت تعمیر قلابهای خود به تعمیر گاهی مراجعه می کنند که مدیریت آن تا هنگامیکه مشغول کار روی یک یدک کش است قایق دیگری را جهت تعمیر قبول نمی کند. مدت زمان تعمیر هر قلاب متغیر تصادفی نمایی با متوسط $(1/\mu)$ و مدت زمان بین مراجعه دو یدک کش نیز متغیر تصادفی نمایی با متوسط $(1/\lambda)$ است اگر یدک کشهایی که به تعمیر گاه مراجعه می کنند با احتمال ۰/۱ دارای سه قلاب شکسته و با احتمال ۰/۳ دارای دو قلاب شکسته و با احتمال ۰/۶ دارای یک قلاب شکستهب اشند، چند درصد اوقای یدک کشهایی که به تعمیرگاه مراجعه می کنند مورد پذیرش قرار نمی گیرند؟

در اینجا اگر وضعیت سیستم را تعداد قایقهای یدک کش داخل تعمیرگاه در نظر بگیریم مدل حاصله یک زنجیره مارکوف نخواهد بود چرا که مدت زمان ماندن در هر وضعیت که در اینحالت مدت زمان تعمیر یدک کش است دیگر متغیر تصادفی نمائی نیست. (با احتمال ۶۰٪ نمائی و با احتمال ۴۰٪ گاما است .) اگر وضعیت سیستم را تعداد قلابهای تعمیر نشده موجود در تعمیر گاه در نظر بگیریم در نتیجه مدل فوق یک زنیجهر مارکوف خواهد بود که وضعیت آینده سیستم در آن فقط بستگی به وضعیت حال داشته و مدت زمان ماندن در یک وضعیت (در اینجا مدت زمان تعمیر یک قلاب) متغیر تصادفی نمائی خواهد بود. با این وصف سیستم دارای چهاغر وضعیت ۰، ۱، ۲ و ۳ می باشد و نمودار آهنگ انتقال سیستم به صورت شکل صفحه قبل است.



همانطوری که در نمودار فوق مشخص است امکان تغییر حالت سیستم از ۱ به ۲ و ۳ وجود ندارد چرا که هنگامی که یک قلاب تعمیر نشده در تعمیرگاه باشد اجازه ورود یدک کش جدید به تعمیرگاه داده نخواهد شد، معادلات تعادل سیستم عبارتند از :

$$\begin{cases}(0.1\lambda+0.3\lambda+0.6\lambda)\,p_0=\mu p_1\\ \mu p_1=0.6\lambda p_0+\mu p_2\\ \mu p_2=0.3\lambda p_0+\mu p_3\\ \mu p_3=0.1\lambda p_0\\ p_0+p_1+p_2+p_3=1\end{cases}$$

$$\Rightarrow p_0=\left(1+1.5\frac{\lambda}{\mu}\right)^{-1}$$

لذا چون طبق صورت سوال تعمیر گاه تا هنگامیکه مشغول کار روی یک یدک کش است قایق دیگری را جهت تعمیر قبول نمی کند، درصد اوقاتی که یدک کشهای مراجعه کننده پذیرش می شوند عبارتست از: $1-p_0=1-\left(1+1.5\dfrac{\lambda}{\mu}\right)^{-1}$

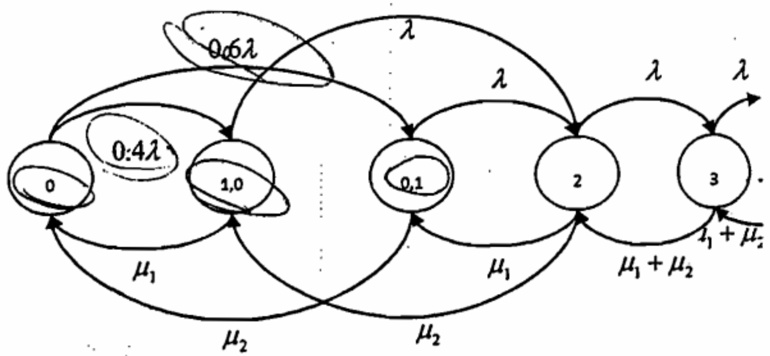
مثال ۲-۴۸

در یک سیستم صف، ورود مشتری ها بر طبق فرآیند پواسان با پارامتر انجام می شود. این سیستم دارای دو خدمت دهنده است، مدت زمان ارائه خدمت توسط هر خدمت دهنده متغیر تصادفی نمایی با پارامترهای به ترتیب μ_1 و μ_2 است. اگر سیستم خالی باشد، مشتری که وارد می شود با احتمال ۰/۴ به خدمت دهنده اول و با احتمال ۰/۶ به خدمت دهنده دوم مراجعه می کند، اما اگر حداقل یک خدمت دهنده مشغول به کار باشد مشترک حل انتخاب خدمت دهنده را ندارد، نمودار آهنگ انتقال سیستم را ترسیم نموده و معادلات تعادل آن را بنویسید.

در اینجا اگر وضعیت را تعداد مشتریان داخل سیستم فرض کنیم نخواهیم توانست وضعیتی را که یک مشتری نزد خدمت دهنده اول می باشد با وضعیتی که یک مشتری نزد خدمت دهنده دوم است هنگامیکه فقط یک مشتری داخل سیستم می باشد را تمیز دهیم. لذا وضعیت ها را به صورت زیر تعریف خواهیم نمود:

وضعیت	تشریح وضعیت
۰:	سیستم خالی است.
(۰ و ۱):	سیستم دارای یک مشتری است و این مشتری در حال خدمت گرفتن از خدمت دهنده اول است.
(۱ و ۰):	سیستم دارای یک مشتری است و این مشتری در حال خدمت گرفتن از خدمت دهنده دوم است.
$n \geq ۲$:	سیستم دارای n مشتری است

لذا نمودار آهنگ انتقال سیستم به صورت زیر خواهد بود.



و دستگاه معادلات تعادل سیستم به صورت زیر است :

$$\begin{cases} (0.4\lambda+0.6\lambda)\, p_0 = \mu_1 p_{10} + \mu_2 p_{01} \\ (\lambda+\mu_1)\, p_{10} = 0.4\lambda p_0 + \mu_2 p_2 \\ (\lambda+\mu_2)\, p_{01} = 0.6\lambda p_0 + \mu_1 p_2 \\ (\lambda+\mu_1+\mu_2)\, p_2 = \lambda p_{10} + \lambda p_{01} + (\mu_1+\mu_2)\, p_3 \\ \vdots \\ (\lambda+\mu_1+\mu_2)\pi_n = \lambda\pi_{n-1} + (\mu_1+\mu_2)\pi_{n+1} \\ \pi_0 + \pi_{01} + \pi_{10} + \sum_{n=2}^{\infty}\pi_n = 1 \end{cases}$$

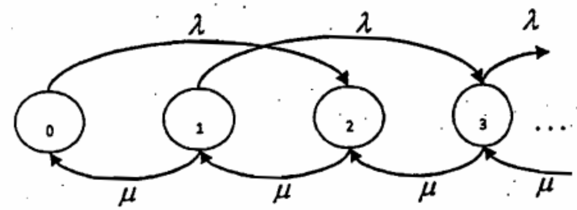
که با حل دستگاه معادلات می توان مقادیر احتمالات حدی را محاسبه نمود.

مثال ۲-۴۹

یک مغازه کفاشی را در نظر بگیرید که در آن یک کفاش کار می کند. مشتریان بر طبق فرآیند پواسان با متوسط یک نفر در ساعت به این کفاشی مراجعه می کنند (نرخ ورود یک جفت کفش در ساعت می باشد) مدت زمان لازم جهت تعمیر هر لنگه کفش متغیر تصادفی نمایی با متوسط ۲۰ دقیقه است، با تعریف مناسب وضعیت سیستم را در قالب

زنجیره مارکوف فرموله کرده و نموار آهنگ انتقال سیستم و همچنین معادلات تعادل سیستم را بنویسید.

اگر بخواهیم سیستم را در قالب زنجیره مارکوف فرموله کنیم می بایست وضعیت سیستم را برابر تعداد لنگه کفش های تعمیر نشده موجود در کفاشی فرض کنیم. با در نظر گرفتن اینکه نرخ ورود هر جفت کفش $\lambda = 1$ و نرخ تعمیر هر لنگه کفش $\mu = 3$ عدد در ساعت می باشد خواهیم داشت :



و معادلات تعادل سیستم به صورت زیر خواهد بود :

$$\lambda p_0 = \mu p_1$$
$$(\lambda + \mu) p_1 = \mu p_2$$
$$(\lambda + \mu) p_2 = \mu p_3 + \lambda p_0$$
$$\vdots$$
$$(\lambda + \mu) p_n = \mu p_{n+1} + \lambda p_{n-2}$$
$$\sum_{n=0}^{\infty} p_n = 1$$

مثال ۲-۵۰

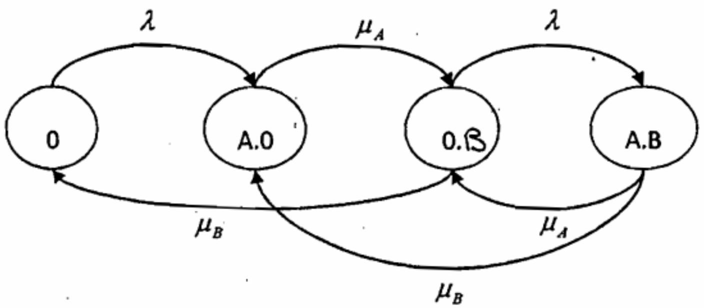
در یک سیستم صف خدمت از دو مرحله A,B که پشت سرهم می باشند تشکیل شده است. فرض می شود که مشتری جدید در صورتی می تواند وارد سیستم شود که مرحله A خالی باشد. پس از گذرانیدن مرحله A مشتری در صورتی مرحله B را می گذارند که آن

مرحله خالی باشد، در غیر این صورت سیستم را ترک می کند، اگر مراجعه مشتری ها بر طبق فرآیند پولسان با میانگین ۵ مشتری در ساعت و مدت زمان خدمت دهیم در هر مرحله A,B متغیر تصادفی نمایی با متوسط ۲۰ = $(\mu_A)^{-1}$ دقیقه ۱۵ = $(\mu_B)^{-1}$ فرض شود، با چه احتمالی یک مشتری نمی تواند وارد سیستم شود.

با تعریف وضعیت به صورت زیر خواهیم داشت :

وضعیت	تشریح وضعیت
(۰)	سیستم خالی است.
(A و ۰)	یک مشتری داخل سیستم است و در مرحله A مشغول دریافت خدمت است.
(۰ و B)	یک مشتری داخل سیستم است و مدر مرحله B مشغول دریافت خدمت است.
(A , B)	دو مشتری داخل سیستم هستند که یک مرحله A و دیگر در مرحلهB مشغول دریافت خدمت می باشند.

با در نظر گرفتن اینکه ۳ = μ_A (نفر در ساعت) و ۴ = μ_B (نفر در ساعت) می باشد خواهیم داشت :



لذا معادلات تعادل به صورت زیر خواهد بود :

$$5p_0 = 4p_{0B}$$
$$3p_{A0} = 5p_0 + 3p_{AB}$$
$$(5+4)\,p_{0B} = 3p_{A0} + 3p_{AB}$$
$$(3+4)\,p_{AB} = 5p_{0B}$$
$$p_0 + p_{A0} + p_{0B} + p_{AB} = 1$$

که با حل دستگاه معادلات تعادل خواهیم داشت.

$$p_0 = 0.167\ ,\ p_{A0} = 0.476\ ,\ p_{0B} = 0.208\ ,\ p_{AB} = 0.149$$

در نتیجه احتمال آنکه یک مشتری نتواند وارد سیستم شود برابر $p_{A0} + p_{AB}$ خواهد بود.

مثال ۲-۵۱

زنجیره مارکوف زمان پیوسته‌ای را در نظر بگیرید که ماتریس آهنگ آن به شکل مقابل است.

$$Q = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & & \\ & -\lambda & \lambda & & & \\ & & -2\lambda & 2\lambda & & \\ & & & -3\lambda & 3\lambda & \cdots \\ & & & & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

$\theta(t)$ را به شکل زیر تعریف می‌کنیم:

$$\theta(t) = E[X_t] = \sum_{i=0}^{\infty} iP[X_t = i] = p_{11}(t) + 2p_{12}(t) + 3p_{13}(t) + \dots$$

نشان دهید که رابطه زیر برقرار است:

$$\frac{d}{dt}\theta(t) = \lambda\theta(t)$$

برای پاسخ دهی داریم:

$$P' = PQ$$

$$p'_{10} = \frac{dp_{10}}{dt} = 0$$

$$p'_{11} = \frac{dp_{11}}{dt} = -\lambda p_{11}$$

$$p'_{12} = \frac{dp_{12}}{dt} = \lambda p_{11} - 2\lambda p_{12}$$

$$p'_{13} = \frac{dp_{13}}{dt} = 2\lambda p_{12} - 3\lambda p_{13}$$

$$\frac{d}{dt}\theta(t) = \frac{dp_{11}}{dt} + 2\frac{dp_{12}}{dt} + 3\frac{dp_{13}}{dt} + \cdots$$
$$= -\lambda p_{11} + 2(\lambda p_{11} - 2\lambda p_{12}) + 3(2\lambda p_{12} - 3\lambda p_{13}) + \cdots =$$

$$-\lambda p_{11} + 2\lambda p_{11} - 4\lambda p_{12} + 6\lambda p_{12} - 9\lambda p_{13} + \cdots$$
$$= \lambda p_{11} + 2\lambda p_{12} + 3\lambda p_{13} + \ \dots = \lambda\theta(t)$$

مثال ۲-۵۲

کلونی مورچگانی را در نظر بگیرید که جمعیت آن با نرخ μ کم می‌شود. جمعیت مورچگان تشکیل زنجیره مارکوفی به شکل زیر می‌دهد:

گذار	نرخ	
$i \rightarrow i+1$	0	$i = 0,1,2,\dots$
$i \rightarrow i-1$	$i\mu$	$i = 1,2,\dots$

فرض کنید که جمعیت اولیه این کلونی برابر N واحد است ($X(0) = N$). ماتریس آهنگ و ماتریس گذار آن را مشخص کنید. میانگین و واریانس جمعیت کلونی را محاسبه کنید. میزان احتمال $P[X(t) = 0 \mid X(0) = N]$ را محاسبه کنید.

معادله ۲-۴۹ یا معادله ۲-۵۱ را بسط می‌دهیم. برای محاسبه p'_{1N} داریم:

$$p'_{NN} = -N\mu p_{NN} \rightarrow p_{NN} = e^{-N\mu t}$$

حال برای محاسبه $p'_{1(N-1)}$ داریم:

$$p'_{1(N-1)} = -(N-1)\mu p_{1(N-1)} + N\mu e^{-N\mu t}$$

با حل پاسخ معادلات دیفرانسیل خطی مرتبه اول داریم:

$$p_{1(N-1)} = e^{-(N-1)\mu t}\int e^{(N-1)\mu t} N\mu + K$$
$$= e^{-(N-1)\mu t}\int N\mu e^{-\mu t} + K$$

که K ثابت انتگرال گیری است. با قرار دادن $t = 0$، این ثابت به صورت $K = N$ محاسبه می‌شود. پس داریم:

$$p_{1(N-1)} = -N e^{-N\mu t} + N e^{-(N-1)\mu t} = N e^{-(N-1)\mu t}(1 - e^{-\mu t})$$

برای محاسبه $p'_{1(N-1)}$ داریم:

$$p'_{1(N-2)} = -(N-2)\mu p_{1(N-2)} + (N-1)\mu p_{1(N-1)}$$

که با حل آن داریم:

$$p_{1(N-2)} = e^{-(N-2)\mu t}\left(N(N-1)\mu\left(\frac{-e^{-2\mu t}}{-2\mu} - \frac{-e^{-\mu t}}{-\mu}\right) + K\right)$$

ثابت انتگرال گیری به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$t = 0 \Rightarrow N(N-1)\left(\frac{1}{2} - 1\right) + K = 0 \Rightarrow K = \frac{N(N-1)}{2}$$

پس داریم:

$$p_{1(N-2)} = \frac{N(N-1)}{2}e^{-N\mu t} - N(N-1)e^{-(N-1)\mu t} + \frac{N(N-1)}{2}e^{-(N-2)\mu t}$$
$$= \frac{1}{2}N(N-1)e^{-(N-2)\mu t}(e^{-2\mu t} - 2e^{-\mu t} + 1)$$
$$= \frac{N(N-1)}{2}e^{-(N-2)\mu t}(1 - e^{-\mu t})^2$$

و در نهایت به صورت استقرایی جمله عمومی را به دست می‌آوریم:

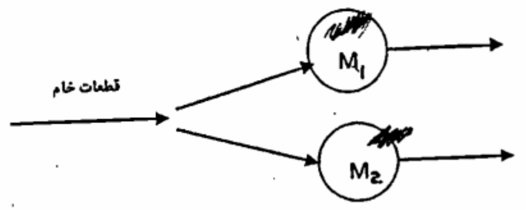
$$p_{1i} = \binom{N}{i} e^{-(N-i)\mu t}(1 - e^{-\mu t})^i$$

و این جمله عمومی تابع توزیع دوجمله‌ای را نشان می‌دهد. بطوری که:

$$p = e^{-\mu t}, q = (1 - e^{-\mu t})$$
$$E(x) = Np = Ne^{-\mu t}$$
$$var(x) = Npq = Ne^{-\mu t}(1 - e^{-\mu t})$$

مثال ۲-۵۳

دو ماشین M_1 و M_2 که در آن M_1 سریع‌تر از M_2 است در نظر بگیرید. قطعات خام به مقدار کافی همیشه در دسترس هستند.



امکان خرابی ماشین ها وجود دارد که در صورت وقوع بلافاصله شروع به تعمیر می شوند. μ_1 و μ_2 ($\mu_1 > \mu_2$) زمان عملیات روی ماشین های M_1 و M_2 نمایی بوده و زمان شکست توزیع نمایی با نرخ f و زمان تعمیر نیز نمایی با نرخ r است. حالات سیستم عبارتند از:

حالت صفر (۰،۰): M_1 و M_2 هر دو مشغول کارند. $\mu_1 + \mu_2$

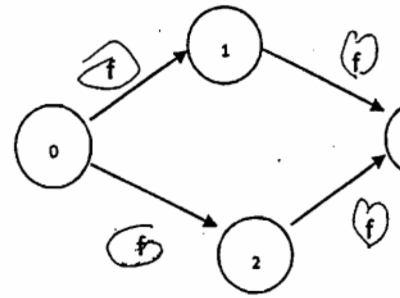
حالت ۱ (۰،۱): M_1 در حال کار و M_2 خراب است. μ_1

حالت ۲ (۱،۰): M_1 خراب و M_2 در حال کار است. μ_2

حالت ۳ (۱،۱): هر دو خراب هستند. ۰

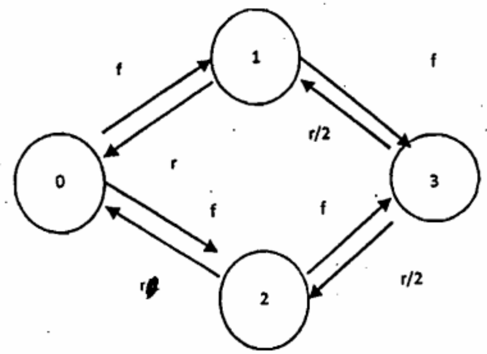
متوسط خروجی سیستم در حالت صفر $\mu_1 + \mu_2$، حالت ۱ μ_1 و حالت ۲ μ_2 است و در حالت ۳ خروجی نداریم.

اگر تعداد تعمیرکاران $n = 0$ باشد (حالت جاذب) $T_3 = \infty$ و $T_1 = Exp(f) = T_2$ و $T_0 = Exp(2f)$ و CTMC یک‌پارچه نخواهد بود.



اگر $n = 1$ باشد:

$$T_0 = Exp(2f), T_1 = T_2 = Exp(f+r), T_3 = Exp(r)$$



اگر $n = 2$، باشد، مانند $n = 1$، است ولیکن $T_3 = Exp(2r)$

اگر با $n = 1$ احتمالات را بدست آوریم، خواهیم داشت:

$$p_0 = \frac{r^2}{r^2 + 2fr + 2f^2}$$

$$p_1 = p_2 = \frac{fr}{r^2 + 2fr + 2f^2}$$

www.Prozheha.ir

$$p_3 = \frac{2f^2}{r^2 + 2fr + 2f^2}$$

و با $n = 2$ این احتمالات خواهند بود:

$$p_0' = \frac{r^2}{r^2 + 2fr + f^2}$$

$$p_1' = p_2' = \frac{fr}{r^2 + 2fr + f^2}$$

$$p_3' = \frac{f^2}{r^2 + 2fr + 2f^2}$$

$$\Rightarrow p_0' \rangle p_0, p_0' \rangle p_1, p_2' \rangle p_1, p_3' \langle p_3$$

متوسط نرخ خروجی سیستم

$$R = p_0(\mu_1 + \mu_2) + p_1\mu_1 + p_2\mu_2$$

$$R' = p_0'(\mu_1 + \mu_2) + p_1'\mu_1 + p_2'\mu_2$$

$$R' \rangle R$$

احتمال آن‌که حداقل یک ماشین در حال کار باشد برابر است با:

$$A = 1 - p_3$$

$$A = 1 - p_3'$$

$$A' \rangle A$$

Subject:

صبح - یکشنبه ۳۰ بهمن

$$P(E|F) = \frac{P(EF)}{P(F)}$$ به شرط استقلال : $$\frac{P(E)\cdot P(F)}{P(F)} = P(E)$$

تو اثبات ها از میانگین شرطی اصولا استفاده می کنیم. یعنی مهم هستند.

$$E(X|Y=y) = \sum_x x\,P(X=x|Y=y)$$

$$P(A) = \sum P(A|Y=y)\cdot P(Y=y)$$

$$E[X] = \sum E(X|Y=y)\cdot P(Y=y)$$

فصل سوم کتاب فرآیندهای احتمالی دکتر ...

$$P(A|B) = \frac{P(A,B)}{P(B)} = \frac{P(B|A)\cdot P(A)}{P(B)}$$

$$= \frac{P(B|A)\cdot P(A)}{P(B|A)\cdot P(A) + P(B|A')\,P(A')}$$

$\leftarrow$ هرچیز غیر از A

یعنی فضای احتمال ها به دو قسمت A و غیر از A (A') تقسیم می شوند.

← مثال کتاب دکتر مدرس

کارگاه اول درصد سالم ها ۹۵٪ تولید کالا از کارگاه اول = A

کارگاه دوم درصد سالم ها ۹۰٪ کالای با تولید استاندارد = B

میزان تولید کارگاه اول 3 برابر کارگاه دوم است.

الف) با چه احتمالی یک واحد کالای استاندارد در کارگاه اول تولید شده است.

Subject:

$$p(A|B) = \frac{p(B|A)\cdot p(A)}{p(B|A)\cdot p(A) + p(B|A')\cdot p(A')} = \frac{0.9\times 0.75}{0.9\times 0.75 + 0.4\times 0.25} = \frac{27}{81}$$

توابع مولد گشتاور

$$M_x(t) = E[e^{tx}]$$

$$M_{x+y}(t) = M_x(t)\cdot M_y(t)$$

$$\frac{dM_x(t)}{dt^n} = E[x^n] \qquad n=1,2,\dots \qquad \text{مشتق } n\text{ام}$$

$G(z) = \sum_{i=0}^{\infty} P_i z^i$ به شرط آن که z به گونه باشد که $P_i z^i$ یک سری همگرا باشد. $\rightarrow p(X=i) = P_i$

یعنی احتمال این که متغیر تصادفی مقدار i را بگیرد.

پس از این طریق می‌شه تابع توزیع رو برای سیستم‌های پیچیده به دست آورد.

مثال

$$G(z) = \frac{1}{1-z^i} = 1 + z^2 + z^4 + \dots$$

یک در میون P_i ها صفر شده‌اند.

حالا $G(z)$ باید همگرا هم باشد. یعنی شرط لازم و کافی برقرار باشه. شرط کافی این هست که ضرایب بین صفر و یک باشند در حالی که ...

پس عبارت بالا تشکیل تابع مولد احتمال نمی‌ده. چون

$P_1 + P_2 + \dots + P_n \geqslant 1$

$$\boxed{\text{شرط کافی}: \quad \sum P_i = 1, \quad 0 < P_i < 1}$$

$$G_z = \sum P_i z^i$$

Subject:

حالا ممکن تابع ما قابل رسم نباشد اما به مثلا با مشتق گیری درباره اش یک اطلاعاتی به دست بیاوریم.

مشتق اول $G^{(1)}(z) = E[XZ^{X-1}]$

مثلا → $G^{(1)}(1) = E[X]$ $(z=1)$

$G^{(0)}(1) = G(1) = 1$ $(z=1)$

مشتق مراتب بالاتر:

$G^{(i)}(1) = F_i$ گشتاور فاکتوریل i ام

$= E[X(X-1)\dots(X-i+1)]$

و همین طور داریم: (جمعش) $G_{X+Y}(z) = G_X(z).G_Y(z)$

حالا یک سری متغیر داریم، به اسم متغیرهای مرکب. یعنی اگر $x_1,\dots,x_n$ ها یا نرخ ورود مشتری باشند مستقل بشوند و جمع این ها مقدار مشتریان حاضر در سیستم میشه.

اما حالا این جا هر x_i دارای یک اندازه است و x_i ها توزیع های مستقل از هم و یکسان دارند. یعنی n یک متغیر تصادفی است که می تونه یک توزیعی داشته باشه.

$Y = X_1 + X_2 + \dots + X_n$

X_i iid

n یک متغیر تصادفی

تابع مولدهای احتمال را فرض می کنیم می دونیم. مهم نیست چه جوری به دست آمدند.

توزیع های آشنا قبلا رو که می دونیم. اگر ناشناخته باشند از $p_i z^i$ استفاده می کنیم.

$G_X(z)$ تابع مولد احتمال مشترک x_i ها

$G_N(z)$ تابع مولد متغیر تعداد n

Subject:

پس به جای این که مستقیما تابع توزیع Y رو در بیاریم، می‌ریم دنبال تابع مولدش.

$G_Y(z) = E[z^Y]$

$= E[E[z^Y | N]] = E[E[z^{X_1+X_2+\dots+X_N} | N]]$

باید N رو داشته باشیم

$= E[E[z^{X_1} \cdot z^{X_2} \cdots z^{X_N} | N]]$

$= E[[G_X(z)]^N]$

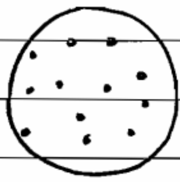
چون X_i ها شبیه هم اند. دیگه اندیس نمی‌ذاریم. یه جور z هست دیگه

حالا اگر تو تابع مولد N، به جای z، عبارت بالا رو بذاریم، داریم:

$G_Y(z) = G_N(G_X(z))$

↳ compound

حالا برای توضیح اثبات‌های بالا:



فرض کنیم N یک متغیر تصادفی نشان‌دهنده تعداد اعضای مجموعه

چون z بالا

اگر هر عضو از این مجموعه به طور مستقل با احتمال 1-z علامت بخورد

و با احتمال z علامت نخورد، در آن صورت $G_N(z)$ احتمال آن است که در کل مجموعه علامتی نداشته باشیم.

احتمال آن که هیچ زیرمجموعه‌ای علامت نخورد

مثلا تابع مولد Y یعنی این که اعضایش علامت نخورند که x ها هستند یعنی z.

$G_Y(z) = G_N(\underbrace{G_Y(z)}_{\text{احتمال این که یک زیرمجموعه علامت نخورد}})$

Subject:

صفر ۲۱ اسفند

CTMC

همچنان تو مقادیر گسسته هستیم

$$p\{X(t)=j \mid X(s)=i,\ X(u)=x(u) \text{ for } 0\le u<s\} = p\{X(t)=j \mid X(s)=i\}$$

$$P_{ij}(s,t) = p\{X(t)=j \mid X(s)=i\} \quad t\ge s,\ s\ge 0,\ i,j\in S$$

تعریف CTMC همگن — مقادیر به شروع s وابسته نیست. (استقلال از مبدا)

$$P_{ij}(s,t) = p(t-s) = p\{X(u+t-s)=j \mid X(u)=i\} \quad \forall u\ge 0$$

حالا استفاده‌ی این:

زمان اقامت t_i در حالت i ام یک متغیر تصادفی پیوسته نمایی است با پارامتر a_i یعنی

$T_i \sim Exp(a_i)$ اگر $0<a_i<\infty$ حالت را پایدار می‌گویند.

اگر $a_i=0$ باشد به حالت جاذب (مادام العمر سیستم توی این حالت می‌مونه)

اگر $a_i=\infty$ باشد به حالت گذار

معادلات C-K

$$P_{ij}(s,t) = \sum P_{ik}(s,u)\, P_{kj}(u,t) \quad 0\le s\le u\le t$$

نمایش به شکل ماتریسی ←

$$H(s,t) = H(s,u)\, H(u,t)$$

دو نوع معادلات C-K داریم، پیش‌رو و پس‌رو

برای حل معادلات، می‌شه دیفرانسیل گرفت، متغیر خودش رو زمان گرفت. چون هدف شناسایی پویایی سیستم هست، با استفاده از تغییرات زمانی رو به جلو و رو به عقب، پیش‌رو و پس‌رو رو حساب می‌کنیم.

Subject:

$$\frac{dH(s,t)}{dt} = H(s,t)\,Q(t)$$ پیش رو

$$\frac{dH(s,t)}{ds} = -Q(s)\,H(s,t)$$ پس رو

$$H(s,s) = I$$

ماتریس نرخ $$Q(t) = \lim_{h \to 0} \frac{H(t,t+h) - I}{h}$$

الان دنبال مطالعات مطالب تو حالت گسسته به پیوسته هستیم.

چون دیگه احتمال نداریم و حالت پیوسته است به جای اون از نرخ استفاده می‌کنیم. همون $Q(t)$

$$Q(t) = \begin{cases} q_{ii}(t) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{P_{ii}(t,t+h) - 1}{h} \\[2ex] q_{ii}(t) = \lim \dfrac{P_{ij}(t,t+h)}{h} \quad i \neq j \end{cases}$$

سریعتر از h به سمت صفر میل می‌کنند و قابل اغماض اند

$$\Rightarrow \begin{cases} 1 - P_{ii}(t,t+h) = -h\,q_{ii}(t) + O(h) \\[2ex] P_{ij}(t,t+h) = h\,q_{ij}(t) + O(h) \end{cases}$$

$$\sum_j q_{ij}(t) = 0 \quad \forall i$$ جمع کل نرخ ها برابر صفر هست

$-q_{ii}(t) =$ نرخی که با آن از حالت i ام در زمان t خارج می‌شویم.

Subject:

در آنالیز CTMC همگن به روابط q ساده‌تری میرسیم.

$$P_{ij}(t) = P_{ij}(x, x+t)$$

$$q_{ij} = q_{ij}(x) \quad \forall x$$

معادلات C-K :

$$\frac{dH(t)}{dt} = H(t).Q$$

$$\frac{dH(t)}{dt} = Q.H(t)$$

$$\Rightarrow \left\{ \frac{dP_{ij}(t)}{d(t)} = q_{jj} P(t) + \sum_{k \neq j} q_{kj} . P_{ik}(t) \right.$$ ← اثر مسادره صفر قرار میدهیم

$$P_j(t) = P\{X(t) = j\} \quad j = 1, 2, \dots$$

$$\pi(t) = [P_0(t), P_1(t), \dots] \quad t \geq 0$$

اینجا سیستم زمان پیوسته هستیم: ← $$\boxed{\frac{d\pi(t)}{dt} = \pi(t)\, Q}$$ ورودی: نرخ انتقال از هر حالت به حالت دیگر.

برای یک CTMC همگن، برگشت‌پذیر مثبت پایا داریم

↓

تعداد متوسط ملاقات یک حالت خاص لازم است.

$$\frac{d\pi(t)}{d(t)} = 0$$ ← حالت پایدار

و $$\pi_j = \lim_{t \to \infty} P_j(t)$$

Subject:

حالا احتمالات پایدار قابل محاسبه است

$\pi = (\pi_0, \pi_1, \dots)$

پس فقط یک ماتریس نرخ انتقال لازم داریم.

$$\boxed{\begin{array}{c} \pi Q = 0 \\ \sum \pi_j = 1 \\ \pi_j \geq 0 \end{array}}$$

ماتریس: $\forall i,\ \sum_j q_{ij} = 0$:

نرخ خروج از j

به صورت وقتی که در دستگاه تو حالت j هستیم

$$q_{jj}\pi_j + \sum q_{kj}\pi_k = 0$$

اگر تو حالت j باشیم با چه نرخی به حالت k می‌ریم.

$$* \quad \pi_j\Big(\sum_{k\neq j} q_{jk}\Big) = \sum_{k\neq j} q_{kj}\pi_k$$

در واقع شرایطی که می‌شه از j به k رفت.

و روی کل حالات k جمع زده می‌شه

پس این رابطه داره تعادل رو نشون می‌ده.

مثال ←

ایستگاه

قطعات خام $\rightarrow$ M_1 , M_2 قطعات تکمیل شده

M_1 سریع‌تر از M_2 است (M_1 , M_2) زمان‌های عملیات نمایی

امکان خرابی M_1 و M_2 وجود دارد که بلافاصله تعمیر می‌شوند.

زمان شکست نمایی با نرخ f و زمان تعمیر نیز نمایی با نرخ r است.

دنبال تشخیص و تعریف حالات سیستم هستیم:

(0,0) حالت صفر: (چون M_1 , M_2 نرخ تولید متفاوت دارند)

M_1 , M_2 هر دو مشغول به کارند.

(0,1) حالت یک: M_1 در حال کار و M_2 خراب است.