« بنام خدا »

« تئوری صف »

فصل اول : سیستم های صف

در این درس به مطالعه ی صف از دیدگاه ریاضی می پردازیم و عوامل تشکیل دهنده ی صف و راه های منطقی کاهش اثرات نامطلوب صف را بررسی می کنیم.

عوامل تشکیل دهنده ی یک سیستم صف :

سیستمی را در نظر بگیرید که خدمتی را ارائه می کند. متقاضیان جهت دریافت خدمت به این سیستم مراجعه می کنند که به آن ها مشتری گوئیم. خدمت ممکن است توسط ماشین، شخص یا امکانات دیگر ارائه شود که به آن ها خدمت دهنده گوئیم. به مشتریانی که ممکن است جهت دریافت خدمت به این سیستم مراجعه کنند نیز جمعیت مشتریان بالقوه گوئیم.

(لزوماً صف جنبه ی فیزیکی ندارد ممکن است قطعه یا مشتری سرجای خود ثابت باشد تا خدمت دهنده مشکل آن ها را حل کند.)

تعداد مشتریان زیاد باشد ← جمعیت مشتریان نامتناهی

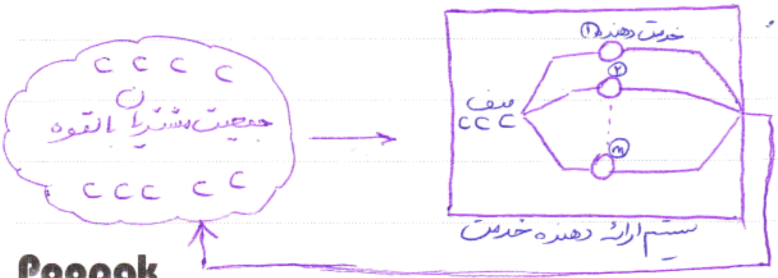
معیارهای ارزیابی یک سیستم صف :

۱- طول صف : که عبارتست از تعداد مشتریان حاضر در صف.

۲- زمان انتظار در صف که عبارتست از مدت زمانی که از زمان ورود مشتری به سیستم تا زمان شروع خدمت طول می کشد.

یا زمان انتظار در سیستم که عبارتست از مدت زمان انتظار مشتری در صف به علاوه ی زمان دریافت کالا (خدمت دهنده متناهی) خدمت به مشتری.

۳- درصد بیکاری سیستم :



به دنبال این هستیم تا معیارهای گفته شده به حداقل برسد.

با توجه به این که ورود مشتریان به سیستم و همچنین مدت زمان خدمت‌دهی ماهیت تصادفی دارد، [مدت زمان بین ورود متفاوت، مدت زمان خدمت به مشتری ماهیت تصادفی دارد. و از توزیع مشخصی برای بدست آوردن مدت زمان استفاده می‌کنیم یا محاسبه‌ی امید ریاضی یک متغیر تصادفی مشخص] برای بدست آوردن معیارهای گفته شده از امید ریاضی متغیر تصادفی مدنظر استفاده می‌کنیم.

ورودی‌های مورد نیاز برای بدست آوردن معیارهای ارزیابی یک سیستم صف:

۱- الگوی ورود مشتری به سیستم: هرچه تعداد مشتری بیشتری به سیستم مراجعه کنند انتظار داریم طول صف و زمان انتظار در صف افزایش یافته و از طرفی درصد بیکاری سیستم کاهش یابد. فرض کنید مشتری یک در زمان S_1، ...، مشتری n در زمان S_n و ... وارد سیستم شوند. در اینصورت مدت زمان بین ورود متوالی مشتری i و $i-1$ که با t_i نمایش داده می‌شود از رابطه‌ی $t_i = S_i - S_{i-1}$ بدست می‌آید.

با توجه به این که ورود مشتریان به سیستم ماهیت تصادفی دارد، مدت زمان بین دو ورود متوالی مشتریان نیز ماهیت تصادفی دارد. در نتیجه برای مدت زمان بین دو ورود متوالی باید تابع توزیع آن را داشته باشیم.

کمیت مفید دیگر برای بدست آوردن الگوی ورود مشتری، آهنگ ورود مشتری به سیستم است که با λ نمایش داده می‌شود. آهنگ ورود مشتری به سیستم عبارتست از میانگین تعداد مشتریانی که در واحد زمان به سیستم مراجعه می‌کنند.

اگر متغیر تصادفی X نشان دهنده‌ی مدت زمان ورود بین هر ورود متوالی مشتریان به سیستم باشد در اینصورت داریم:

$$\lambda = \frac{1}{E(X)} \qquad E(X) = \frac{1}{\lambda}$$

(۶ نفر در یک ساعت. بین هر دو ورود متوالی $\frac{1}{\lambda} = \frac{1}{6}$ طول می‌کشد).

۲- الگوی خدمت دهی: هرچه مدت زمان خدمت دهی به مشتریان کمتر باشد، با ثابت نگهداشتن سایر پارامترها انتظار داریم طول صف، زمان انتظار در صف و درصد اشتغال سیستم کمتر شود.
با توجه به این که خدمت دهی به مشتریان ماهیت تصادفی دارد برای مدت خدمت دهی از یک متغیر تصادفی مانند y استفاده می‌کنیم.
یک کمیت مفید دیگر برای بدست آوردن الگوی خدمت دهی، آهنگ خدمت دهی است که با μ نمایش داده می‌شود.
آهنگ خدمت دهی عبارتست از میانگین تعداد افرادی که در واحد زمان می‌توانند از یک خدمت دهنده، خدمت دریافت کنند.
بین y و μ رابطه‌ی متقابل برقرار است: $E(y)=\frac{1}{\mu}$

۳- تعداد خدمت دهنده: هرچه تعداد خدمت دهنده بیشتر باشد، انتظار داریم طول صف و زمان انتظار در صف و درصد اشتغال سیستم کاهش یابد
تعداد خدمت دهنده می‌تواند متناهی یا نامتناهی باشد (سریع تر انجام شد).

۴- ظرفیت صف: ممکن است در یک سیستم مورد نظر به علت محدودیت فضای فیزیکی، ظرفیت صف متناهی باشد. ظرفیت صف در سیستم می تواند متناهی یا نامتناهی باشد.
اگر ظرفیت صف متناهی باشد، طول صف و زمان انتظار در سیستم نسبت به حالت نامتناهی کاهش و درصد اشتغال کاهش می یابد.

۵- جمعیت مشتریان بالقوه: جمعیت مشتریان بالقوه ممکن است متناهی یا نامتناهی باشد.

۶- نظام سیستم: مفهوم نظام سیستم این است که زمانی که خدمت دهنده بیکار شده، طبق چه نظمی به مشتریان حاضر در صف خدمت را انجام دهد.
ممکن است نظم سیستم به صورت FIFO (First In First Out) باشد، یعنی مشتری که زودتر وارد صف (سیستم) شده، زودتر خدمت دریافت کند. ممکن است نظم سیستم به صورت LIFO (Last In First Out) باشد، یعنی مشتری که دیرتر وارد صف شده، زودتر خدمت را دریافت کند. و ممکن است نظم سیستم به صورت SIRO (Service In Random order) باشد، یعنی خدمت به مشتریان حاضر در صف به صورت تصادفی انجام شود.
ممکن است نظم سیستم بر اساس اولویت بندی باشد. یعنی ابتدا به کسی که دیرتر وارد سیستم شده ولی از اولویت بیشتری برخوردار است، خدمت رسانی شود تا کسی که زودتر وارد سیستم شده و از اولویت کمتری برخوردار است.

نحوه مشخص کردن ورودی های یک سیستم صف:

ورودی های یک سیستم صف را به صورت A/B/M/K/C/Z نمایش می دهند که A و B به ترتیب نشان دهنده ی نوع توزیع مدت بین دو ورود مشتریان و توزیع مدت خدمت دهی به مشتریان می باشند. M نمایش دهنده ی تعداد خدمت دهندگان در سیستم مورد نظر، K نشان دهنده ی ظرفیت صف، C نشان دهنده ی جمعیت مشتریان بالقوه ی صف و Z هم نشان دهنده ی نظام سیستم می باشد.

برای نمایش A و B معمولاً از حروف زیر استفاده می‌شود.

توزیع ثابت یا قطعی : D، توزیع ارلانگی مرتبه‌ی ۲ : E_2 ، توزیع نمایی : M

توزیع دلخواه : G

به جای Z نیز از FIFO ، LIFO و SIRO استفاده می‌شود.

اگر ظرفیت صف نامتناهی باشد، نیازی به نوشتن K نیست.

اگر جمعیت مشتریان بالقوه نامتناهی باشد، نیازی به نوشتن C نیست.

اگر نظام سیستم FIFO باشد، نیازی به نوشتن Z نیست.

مثال : فرض کنید یک سیستم صف به صورت $M|E_5|۲| \ | \ ۹LIFO$ نمایش داده شود. سیستم صف را تشریح کنید.

اگر از یک نقطه به بعد علائم بر اساس پیش فرض باشند، نیازی به نوشتن آن‌ها نیست. $E_۳|G|۵$

اما اگر درین، علامت‌ها بر اساس پیش فرض باشند، جای آن را خالی می‌گذاریم.

$E_۴|G|۵|$ ۱۹

$M/E_5/۲/ \ | \ /LIFO$

۲ : تعداد خدمت دهندگان — نمایی : توزیع مدت زمان بین دو ورود مشتریان

نامتناهی : ظرفیت صف — ارلانگی مرتبه ۵ : توزیع مدت زمان خدمت دهی به مشتریان

LIFO : نظام سیستم — نامتناهی : جمعیت مشتریان بالقوه‌ی صف

$E_۳/G/۵$

۵ : تعداد خدمت دهندگان — ارلانگی مرتبه ۳ : توزیع مدت زمان بین دو ورود مشتریان

Z : FIFO — K، C : ∞ — G : توزیع مدت زمان خدمت دهی به مشتریان

فصل دوم : مروری بر احتمالات

امید شرطی :

$$E(x|y=y) = \begin{cases} \sum_x x P(x|y=y) & \text{اگر X گسسته باشد} \\ \int_{-\infty}^{\infty} x f(x|y) dx & \text{اگر X پیوسته باشد} \end{cases}$$

محاسبه ی امید ریاضی بوسیله ی امید شرطی :

گاهی محاسبه ی امید ریاضی یک متغیر تصادفی مانند X به راحتی قابل محاسبه نیست. در این صورت ممکن است بتوان با مشروط (وابسته) کردن متغیر تصادفی X به یک متغیر تصادفی دیگر مانند Y ، امید ریاضی X را محاسبه نمود.

$$E(X) = E(E(x|y=y)) = \begin{cases} \sum_y E(x|y=y) P(y=y) & \text{Y گسسته} \\ \int_{-\infty}^{+\infty} E(x|y=y) g(y) dy & \text{Y پیوسته} \end{cases}$$

$$E(x|y=y) = \sum_x x f(x|y) = H(y) \qquad \text{تابعی برحسب y}$$

$$E(\underline{E(x|y=y)}) = E(\underline{H(y)}) = \sum_y H(y) P(y=y) = \sum_y E(x|y=y) g(y)$$

$$= \sum_y \left(\sum_x x P(x|y=y)\right) g(y) = \sum_y \left(\sum_x x \frac{P(X=x, Y=y)}{P(y=y)}\right) g(y)$$

$$= \sum_y \left(\sum_x x \frac{f(x,y)}{g(y)}\right) g(y) = \sum_y \sum_x x f(x,y) = \sum_x \sum_y x f(x,y)$$

$$= \sum_x x \left(\underline{\sum_y f(x,y)}\right) = \sum_x x \underline{f(x)} = E(X)$$

مثال: سکه‌ای را در نظر بگیرید که احتمال آمدن شیر در موقع پرتاب آن p فرض می‌شود. این سکه را آن قدر پرتاب می‌کنیم تا اولین شیر بدست آید. اگر N معرف تعداد پرتابهای سکه تا اولین شیر باشد، $E(N)$ را بدست آورید.

$$y=\begin{cases}1 & \text{نتیجه پرتاب سکه در دفعه اول شیر باشد.}\\ 0 & \text{o.w.}\end{cases}$$

$$E(N)=\sum_{y=0}^{1}E(N|y=y)\,P(Y=y)=\underbrace{E(N|y=0)}_{1+E(N)}P(y=0)+\underbrace{E(N|y=1)}_{1}P(y=1)=(1+E(N))(1-P)+1P$$

$$\rightsquigarrow E(N)=1-P+E(N)-PE(N)+P\Rightarrow PE(N)=1\Rightarrow E(N)=1/p$$

$E(N|y=0)=1+E(N)$ یعنی اولین پرتاب خط بوده، از این به بعد هم باید N پرتاب دیگر برای رسیدن به اولین شیر انجام دهیم

محاسبه ی احتمال یک پیشامد با وابسته کردن آن به یک متغیر تصادفی:

$$P(A)=\begin{cases}\sum_x P(A|X=x)\,f(x) & \text{گسسته } X\\ \int_{-\infty}^{\infty}P(A|X=x)\,f(x)\,dx & \text{پیوسته } X\end{cases}$$

مثال: تعداد مشتریانی که هر روز به یک سیستم مراجعه می‌کنند متغیر تصادفی با توزیع پواسون و میانگین آن ۱۰ مشتری در روز است. هر مشتری با احتمال ۰/۴ و مستقل از سایر مشتری‌ها از دریافت خدمت منصرف می‌شود. احتمال این که در یک روز مشخص n مشتری برای دریافت خدمت بمانند، چیست؟

X : تعداد مشتریانی که در روز جهت دریافت خدمت مراجعه می‌کنند $X|y=m\sim B(m,\overset{p}{0.4})$

Y : تعداد مشتریانی که در روز به سیستم مراجعه می‌کنند $Y\sim P(10)$

$$P(\underline{\overset{A}{X}=n})=\sum_{m=n}^{\infty}P(X=n|Y=m)\,g(m)=\sum_{m=n}^{\infty}\binom{m}{n}p^{n}(1-p)^{m-n}\,e^{-\lambda}\frac{\lambda^{m}}{m!}$$

n نفر در سیستم باقی مانده‌اند، m (تعداد مراجعین به سیستم) حداقل می‌تواند n باشد.

$$\xrightarrow[\lambda^m=\lambda^n.\lambda^{m-n}]{\binom{m}{n}=\frac{m!}{n!(m-n)}} = \frac{\lambda^n p^n}{n!} e^{-\lambda} \sum_{m=n}^{\infty} \frac{[\lambda(1-p)]^{m-n}}{(m-n)!} \xrightarrow{m'=m-n} = e^{-\lambda} \frac{(\lambda p)^n}{n!} \sum_{m'=0}^{\infty} \frac{[\lambda(1-p)]^{m'}}{m'!}$$

$$\xrightarrow{e^x=\sum\frac{x^n}{n!}} e^{-\lambda} \frac{(\lambda p)^n}{n!} \times e^{\lambda-\lambda p} = e^{-\lambda p} \frac{(\lambda p)^n}{n!} \longrightarrow X \sim P(\lambda p) \quad P=۲۴$$

تابع مولد گشتاور :

$$M_x(t) = E(e^{xt})$$

تابع مولد گشتاور ، تولید کننده ی گشتاورهای متغیر تصادفی x است .

$E(x^r)$: rامین گشتاور متغیر تصادفی x حول مبدأ

$$M_x(t) = E(e^{xt}) = E\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(xt)^n}{n!}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} E\left(\frac{x^n t^n}{n!}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} E(x^n)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \mu'_n \qquad \boxed{\left.\frac{d^n M_x(t)}{dt^n}\right|_{t=0} = \mu'_n}$$

اثبات :

$$f_m(t) = t^m \qquad \frac{d^n f_m(t)}{dt^n} = \begin{cases} 0 & n > m \\ m(m-1)(m-2)\dots(m-n+1)t^{m-n} & n \leqslant m \end{cases}$$

$$\frac{d^m f_m(t)}{dt^n} = \begin{cases} 0 & n > m \\ \frac{m!}{(m-n)!} t^{m-n} & n \leqslant m \end{cases}$$

$$M_x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mu'_n}{n!} f_n(t) \rightsquigarrow \frac{d^K M_x(t)}{dt^K} = \frac{d^K}{dt^K}\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mu'_n}{n!} f_n(t)\right)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d^K}{dt^K} \frac{\mu'_n f_n(t)}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mu'_n}{n!} \frac{d^K f_n(t)}{dt^K} = \sum_{n=K}^{\infty} \frac{\mu'_n}{n!} \frac{n!}{(n-K)!} t^{n-K} +$$

$$\underbrace{\sum_{n=0}^{K-1} \frac{\mu'_n}{n!} \frac{d^K f_n(t)}{dt^K}}_{0} = \sum_{n=K}^{\infty} \frac{\mu'_n}{(n-K)!} t^{n-K} \rightsquigarrow \left.\frac{d^K M_x(t)}{dt^K}\right|_{t=0} = \mu'_K$$

$$\frac{\mu'_K}{(K-K)!} t^{K-K} + \underbrace{\sum_{n=K+1}^{\infty} \frac{\mu'_n}{(n-K)!} t^{n-K}}_{0} \xrightarrow{t=0} \mu'_K$$

اگر X و Y متغیرهای تصادفی مستقل باشند، داریم : $M_{X+Y}(t)=M_X(t).M_Y(t)$

$$M_{X+Y}(t)=E(e^{(x+y)t})=E(e^{xt}\,e^{yt})=E(e^{xt})\,E(e^{yt})=M_X(t)\,M_Y(t)$$

مثال : متغیر تصادفی X فقط مقادیر عدد صحیح غیر منفی را اختیار می‌کند. نشان دهید

$$E(X)=\sum_{n=1}^{\infty}P(X\geqslant n)=\sum_{n=0}^{\infty}P(X>n).$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}P(X\geqslant n)=\overset{P(X\geqslant 1)}{\left(P(X=1)+P(X=2)+\dots+P(X=n)+\dots\right)}+\overset{P(X\geqslant 2)}{\left(P(X=2)+P(X=3)+\dots+P(X=n)+\dots\right)}$$

$$\dots+\overset{P(X\geqslant n)}{\left(P(X=n)+P(X=n+1)+\dots\right)}+\dots=1\times P(X=1)+2\times P(X=2)+3\times P(X=3)+\dots+n\times P(X=n)$$

$$+\dots=\sum_{i=1}^{\infty}i\times P(X=i)=E(X)$$

$$P(X=n)=P(1-P)^{n-1}\qquad n=1,\dots,\infty$$

$$P(X\geqslant n)=\sum_{i=n}^{\infty}P(1-P)^{i-1}=P(1-P)^{n-1}\sum_{i=0}^{\infty}(1-P)^{i}=P(1-P)^{n-1}\times\frac{1}{1-(1-P)}=(1-P)^{n-1}$$

$i-n+(n-1)$
i'

$$E(X)=\sum_{n=1}^{\infty}P(X\geqslant n)=\sum_{n=1}^{\infty}(1-P)^{n-1}=\frac{1}{P}$$

مثال: در ظرفی n توپ وجود دارد که با شماره‌های ۱,۲,...,n مشخص شده اند. یک توپ به تصادف انتخاب و پس از یادداشت شماره ی آن به ظرف برمی‌گردانیم. این کار را ادامه می‌دهیم تا توپی برای دومین بار برداشته شود. چنانچه X را تعداد دفعات آزمایش تعریف کنیم، توزیع احتمال متغیر تصادفی X را بدست آورید؟

n انتخاب داریم که توپ‌ها تکراری نباشند، اما انتخاب n+1ام حتما توپ تکراری است.

Subject : K-1 انتخاب قبلی تکراری نیستند   Kامین انتخاب تکراری

Year .   Month .   Date .

$$P(X=K)=\frac{\binom{n}{K-1}(K-1)!\binom{K-1}{1}}{n^K} \qquad K=۲,۳,\dots,n+1$$

مثال: شخصی در آزمونی شرکت و یکی از نمرات (الف، ب، ج، د، ه) را دریافت می‌کند. چنانچه نمره الف بگیرد برنده اعلام شده و دیگر شرکت نمی‌کند. چنانچه نمره‌ی ه آورده باشد، حق شرکت مجدد را ندارد. در غیر این دو حالت آن قدر در آزمون شرکت می‌کند تا یکی از دو نمره‌ی فوق را دریافت می‌کند.

فرض کنید نتیجه‌ی آزمون‌ها مستقل از هم و احتمال گرفتن نمره‌های الف، ب، ج، د و ه به ترتیب P_1، $P_۲$، $P_۳$، $P_۴$ و $P_۵$ باشد. فضای نمونه‌ی این مسئله را بنویسید و احتمال توقف شرکت در آزمون به علت گرفتن نمره‌ی الف را بیابید.

$$S=\{(1),(۵),(\underset{i=۲,۳,۴}{i},1),(i,۵),(\underset{i_1,i_2=۲,۳,۴}{i_1,i_2,1}),(\underset{i_1,i_2=۲,۳,۴}{i_1,i_2,۵}),\dots,(\underset{\substack{j=1,۲,\dots,K-1\\ i_j=۲,۳,۴}}{i_1,i_2,\dots,i_{K-1}},1)\dots\}$$

A: پیشامد توقف در آزمون به علت گرفتن نمره الف

X=K: پیشامد این که در مرحله‌ی Kام متوقف شده باشد

$$P(A)=P(A\cap[(X=1)\cup(X=۲)\cup(X=۳)\cup\dots\cup(X=K)\cup\dots])=\sum_{i=1}^{\infty}P(A\cap(X=i))$$

$P(A\cap(X=i))=$ در $(i-1)$ آزمون قبلی فرد نمره‌ای غیر از الف و ه کسب کرده و در آزمون iام به علت گرفتن نمره‌ی الف متوقف شده.

$P($گرفتن نمره‌ای غیر از الف و ه$)=1-P_1-P_۵=P_۲+P_۳+P_۴$

$$P(A\cap(X=i))=(1-P_1-P_۵)^{i-1}P_1$$

$$P(A)=\sum_{i=1}^{\infty}P_1(1-P_1-P_۵)^{i-1}=\frac{P_1}{1-(1-P_1-P_۵)}=\frac{P_1}{P_1+P_۵}$$

سوال ۸ فصل قبل

مثال : از ۱۵ توپ موجود ، ۹ عدد آن نو است ، در بازی اول سه توپ به تصادف انتخاب می‌کنیم پس از بازی آن را برگشت می‌دهیم . در بازی دوم سه توپ دیگر به تصادف انتخاب می‌کنیم ، احتمال اینکه هر سه توپ نو باشد ، چقدر است ؟ فرض می‌شود توپ‌های مصرف شده در بازی اول ، دیگر نو محسوب نمی‌شوند .

بازی اول [۹ نو ، ۶ ک]

بازی دوم [۹-i نو ، ۶+i ک]

$X=i$ پیشامد اینکه در بازی اول i توپ نو باشد

$Y=j$ پیشامد اینکه در بازی دوم j توپ نو باشد

$$P(Y=۳) = \sum_{i=۰}^{۳} P(Y=۳|X=i)\; P(X=i) = \sum_{i=۰}^{۳} \frac{\binom{۹-i}{۳}\binom{۶+i}{۰}}{\binom{۱۵}{۳}} \times \frac{\binom{۹}{i}\binom{۶}{۳-i}}{\binom{۱۵}{۳}}$$

مثال : متغیرهای تصادفی مستقل $X_1, X_2, \dots, X_n$ را در نظر بگیرید که دارای تابع توزیع یکنواخت در فاصله‌ی (۰,۱) هستند. متغیر تصادفی جدید M را به شرح زیر تعریف می‌کنیم :

تابع توزیع تجمعی و احتمال M را بدست آورید .

$$M = \max\{X_1, X_2, \dots, X_n\} \qquad X_i \sim U(۰,۱) \qquad P(X_i \leq c) = \frac{c-a}{b-a}$$

$$F_M(m) = P(M \leq m) = P(\max\{X_1, \dots, X_n\} \leq m) = P(X_1 \leq m, X_2 \leq m, \dots, X_n \leq m)$$

$$\overset{۰<m<۱}{=} \prod_{i=1}^{n} P(X_i \leq m) = \prod_{i=1}^{n} \frac{m-۰}{۱-۰} = m^n \rightsquigarrow f_M(m) = \begin{cases} n\, m^{n-1} & ۰<m<۱ \\ ۰ & o.w \end{cases}$$

ت ۱۷

$$P(X>Y) = \int_{-\infty}^{\infty} P(X>Y|Y=y)\; g(y)\, dy = \int_{-\infty}^{۰} \underbrace{P(X>y)}_{!} g(y) + \int_{۰}^{\infty} \underbrace{P(X>y)}_{*} g(y) :$$

$$\underbrace{\int_{-\infty}^{۰} g(y)\, dy}_{G(۰)} + \underbrace{\int_{۰}^{\infty} e^{-\lambda y}\, g(y)\, dy}_{M_Y(-\lambda) = E(e^{-\lambda y})}$$

اگر Y فقط مقادیر مثبت را اختیار کند : $G(۰) = ۰$

$$* \; P(X>y) = 1 - F_X(y) = 1 - (1 - e^{-\lambda y}) = e^{-\lambda y}$$

ت ۱۸

دوجمله‌ای منفی

$$f_X(x) = P(X=x) = \frac{۱}{۶} \times \left(\frac{۵}{۶}\right)^{x-۱} \qquad X \sim Nb(۱, ۱/۶)$$

$$E(X) = \frac{1}{p} = \frac{1}{۱/۶} = ۶$$

Subject :

Year . Month . Date .

$$\bullet\ f_{X|Y}(x|1) = P(X=x|Y=1) = \begin{cases} 0 & x=1 \\ \frac{1}{6}\times\left(\frac{5}{6}\right)^{x-2} & x\geq 2 \end{cases} = \begin{cases} 0 \\ \frac{1}{6}\times\left(\frac{5}{6}\right)^{x'-1} & x'=1,\ldots \end{cases}$$

$$\bullet\ E(X|Y=1) = E((X-1)+1) = E((X-1)) + 1 = E(X')+1 = 6+1=7$$

یا

$$E(X|Y=1) = \sum x f_{X|Y}(x|1) = \sum_{x=2}^{\infty} x \times \left(\frac{1}{6}\right)\left(\frac{5}{6}\right)^{x-2} = \underbrace{\sum_{x=2}^{\infty}(x-1)\times\frac{1}{6}\times\left(\frac{5}{6}\right)^{x-2}}_{\sum_{x'=1}^{\infty} x' \frac{1}{6}\left(\frac{5}{6}\right)^{x'-1}}$$

$$+ \underbrace{\sum_{x=2}^{\infty}\frac{1}{6}\left(\frac{5}{6}\right)^{x-2}}_{①} = 6+1=7$$

آمدن غیر ۱و۶ — آمدن ۶

$$\bullet\ f_{X|Y}(x|3) = P(X=x|Y=3) = \begin{cases} \left(\frac{4}{5}\right)^{x-1}\times\frac{1}{5} & x=1,2 \\ 0 & x=3 \\ \left(\frac{4}{5}\right)^{2}\times 1\times\left(\frac{5}{6}\right)^{x-4}\times\frac{1}{6} & x>3 \end{cases}$$

$\left(\frac{4}{5}\right)^{2}$ ← در پرتاب اول و دوم: آمدن غیر ۶ و ۱

1 ← سومین پرتاب: آمدن ۱ قطعی است

$\left(\frac{5}{6}\right)^{x-4}$ ← از مرحله ۴ تا $x-1$ ام می‌توانند هر عددی غیر ۶ باشد

$\frac{1}{6}$ ← آمدن ۶

$$\bullet\ E(X|Y=3) = \sum x f_{X|Y}(x|3) = 1\times\frac{1}{5} + 2\times\frac{4}{5}\times\frac{1}{5} + 0 + \underbrace{\sum_{x=4}^{\infty} x\left(\frac{4}{5}\right)^{2}\times\frac{1}{6}\times\left(\frac{5}{6}\right)^{\overset{x'}{x-1-3}}}$$

$$x'=x-3 \quad \left(\frac{4}{5}\right)^{2}\underbrace{\sum_{x'=1}^{\infty} x'\left(\frac{1}{6}\right)\left(\frac{5}{6}\right)^{x-1}}_{E(X')=\frac{1}{\frac{1}{6}}=6} + 3\left(\frac{4}{5}\right)^{2}\sum_{x'=1}^{\infty}\left(\frac{1}{6}\right)\left(\frac{5}{6}\right)^{x'-1}$$

$$= \frac{1}{5} + 2\times\frac{4}{5}\times\frac{1}{5} + \left(\frac{4}{5}\right)^{2}\times 6 + 3\times\left(\frac{4}{5}\right)^{2}\times 1 = \frac{157}{25}$$

ت ۲۰:

$$\mathrm{var}\left(\sum_{i=1}^{N} X_i\right) = E\left(\left(\sum_{i=1}^{N} X_i\right)^{2}\right) - E^{2}\left(\sum_{i=1}^{N} X_i\right)$$

$$= E\left(\left(\sum_{i=1}^{N} X_i\right)^{2}\right) - E^{2}(X)\,E^{2}(N)$$

$$E\Big(\underbrace{\left(\sum_{i=1}^{N} X_i\right)^{2}}_{Y}\Big) = E(E(Y|N=n)) = E\left[E\left(\left(\sum_{i=1}^{N} X_i\right)^{2}\Big|N=n\right)\right] = E\left[E\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)^{2}\right] = \text{ص}$$

$$E\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)^{2} = E\left[\sum_{i=1}^{n} X_i^{2} + 2\sum_{i<j}\sum X_i X_j\right] = E\left(\sum_{i=1}^{n} X_i^{2}\right) + 2E\left(\sum_{i<j}\sum X_i X_j\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} E(X_i^{2}) + 2\sum\sum \underset{\substack{E(X_i)E(X_j) \\ E^{2}(X)}}{E(X_i X_j)} = nE(X^{2}) + 2\binom{n}{2}E^{2}(X) = nE(X^{2}) + n(n-1)E^{2}(X)$$

$$= E\left(nE(X^2)\right) + E\left(n(n-1)E^2(X)\right) = E(X^2)E(N) + E^2(X)\left[E(n^2) - E(n)\right] \rightsquigarrow$$

$$var\left(\sum_{i=1}^{N} X_i\right) = \underline{\underline{E(X^2)\,E(N)}} + \underline{E^2(X)\,E(N^2)} - \underline{\underline{E^2(X)\,E(N)}} - \underline{E^2(X)\,E^2(N)}$$

$$= E(N)\left[E(X^2) - E^2(X)\right] + E^2(X)\left[E(N^2) - E^2(N)\right]$$

$$= E(N)\,var(X) + var(N)\,E^2(X)$$

فصل سوم: توزیع نمایی و فرآیند پواسون

تعریف: اگر متغیر تصادفی X، از چگالی احتمال $f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x} & x\geq 0\\ 0 & x<0\end{cases}$ برخوردار باشد. در اینصورت گوئیم متغیر تصادفی X از توزیع نمایی با پارامتر λ برخوردار است. $X\sim EXP(\lambda)$

- اگر $X\sim EXP(\lambda)$ برخوردار باشد، تابع توزیع تجمعی آن به صورت زیر خواهد بود:

$$F(x)=\begin{cases}1-e^{-\lambda x} & x\geq 0\\ 0 & x\leq 0\end{cases} \qquad P(X>x)=e^{-\lambda x}$$

$$F(x)=P(X\leq x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = \begin{cases}\int_{-\infty}^{x}\lambda e^{-\lambda t}\,dt = -e^{-\lambda t}\Big|_{-\infty}^{x} = 1-e^{-\lambda x} & x>0\\ 0 & x<0\end{cases}$$

امید ریاضی، واریانس و تابع مولد گشتاور برای توزیع نمایی:

$$M_X(t)=E(e^{Xt}) = E\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(Xt)^n}{n!}\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{n!}E(X^n)$$

توزیع نمایی: $M_X(t)=E(e^{Xt})=\int_{-\infty}^{\infty} e^{xt} f(x)\,dx = \int_0^{\infty}\lambda e^{xt}e^{-\lambda x}\,dx = \lambda\int_0^{\infty} e^{-x(\lambda-t)}\,dx$

$$= \frac{-\lambda}{\lambda-t}e^{-(\lambda-t)x}\Big|_0^{\infty} = -\frac{\lambda}{\lambda-t}(0-1) = \frac{\lambda}{\lambda-t} = \frac{1}{1-\frac{t}{\lambda}} = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{t}{\lambda}\right)^n \quad t<\lambda\ \left(\frac{t}{\lambda}<1\right)$$

$$\boxed{\frac{1}{1-x} \overset{|x|<1}{=} \sum_{n=0}^{\infty} x^n}$$

ضریب t^n : $\frac{1}{\lambda^n} = \frac{E(x^n)}{n!} \rightsquigarrow E(x^n) = \frac{n!}{\lambda^n} \rightsquigarrow E(X) = \frac{1}{\lambda}\ ,\ E(X^2) = \frac{2}{\lambda^2}\ ,\ Var(X) = \frac{1}{\lambda^2}$

خواص توزیع نمایی :

۱- توزیع نمایی فاقد حافظه است.

$$\overset{Y=X-1}{E(X \mid X>1)} = E(Y+1 \mid X>1) = 1 + E(Y \mid X>1)$$

فرض کنید متغیر تصادفی X از توزیع نمایی با پارامتر λ برخوردار باشد. می دانیم s واحد زمانی گذشته و هنوز اتفاقی نیفتاده است، احتمال این که تا t واحد زمانی دیگر نیز اتفاقی نیفتد برابر این است که بگوییم در بازه‌ی $[0,t)$ هیچ اتفاقی نیفتد.

$$P(X>t+s \mid X>s) = P(X>t) \quad s,t>0$$

$$P(X>t+s \mid X>s) = \frac{P(X>t+s \cap X>s)}{P(X>s)} = \frac{P(X>t+s)}{P(X>s)} = \frac{e^{-\lambda(t+s)}}{e^{-\lambda s}} = e^{-\lambda t} = P(X>t)$$

نکته: توزیع نمایی تنها توزیعی است که دارای خاصیت فقدان حافظه است. فرض کنید متغیر تصادفی پیوسته دلخواه X دارای خاصیت فقدان حافظه باشد. در اینصورت داریم :

$$P(X>t+s \mid X>s) = P(X>t) \rightsquigarrow \frac{P(X>t+s)}{P(X>s)} = P(X>t)$$

$$P(X>t+s) = P(X>t) \cdot P(X>s)$$

از دو طرف معادله نسبت به s مشتق می‌گیریم :

$$\rightarrow \frac{dP(X>t+s)}{ds} = P(X>t) \cdot (-f(s)) \rightsquigarrow \frac{dP(X>t+s)}{P(X>t)} = -f(s)\,ds$$

با توجه به این که رابطه‌ی فوق برای تمامی مقادیر s برقرار است، فرض می‌کنیم s=0 باشد، در نتیجه:

$$\frac{dP(X>t)}{P(X>t)} = -f(0)\,ds \rightarrow \int \frac{dP(X>t)}{P(X>t)} = -\int_0^t f(0)\,ds \rightsquigarrow Ln(P(X>t)) = -f(0)\,s \Big|_0^t$$

$$\rightarrow P(X>t) = e^{-f(0)t} \rightsquigarrow F(t) = 1 - e^{f(0)t}$$

" تابع توزیع تجمعی در توزیع نمایی "

$$-f(s) = [\overset{P(X>S)}{1-F(S)}]'$$

مثال: فرض کنید مدت زمانی که یک مشتری در داخل سیستم می‌گذراند متغیر تصادفی با توزیع نمایی و میانگین ۴۰' باشد. احتمال این که یک مشتری حداقل یک ساعت در سیستم باشد، چقدر است؟ احتمال این که یک مشتری حداقل یک ساعت در سیستم باشد در حالی که می‌دانیم تا این لحظه حداقل ۳۰' را در سیستم گذرانده، چقدر است؟

$X \sim EXP(۱/۴۰) \qquad E(X)=۴۰$

$P(X>۶۰) = e^{-۶۰\times ۱/۴۰} = e^{-۳/۲}$

$P(X>۶۰ \mid X>۳۰) = P(X>۳۰) = e^{-۳۰\times ۱/۴۰} = e^{-۳/۴}$

مثال: عمر یک قطعه‌ی حساس ماشینی طبق توزیع نمایی با پارامتر λ است. این قطعه را به دو دلیل عوض می‌کنند یا خراب شود و یا عمرش به T برسد. میانگین مدت زمانی که طول می‌کشد تا این قطعه را عوض کنند، چقدر است؟ (حجم نگهداری)

X: مدت زمان عمر قطعه $\quad 0 - \infty \quad X \sim EXP(\lambda)$

Y: مدت زمان لازم برای تعویض قطعه $\quad 0 - T$

تا قبل از زمان T توزیع X و Y یکی است. $(0 \leqslant y < T)$ در صورتی که عمر قطعه بیش از T باشد تعویض می‌شود $(y=T)$

$P(Y=T) = P(X \geqslant T) = e^{-\lambda T}$

$$f(y) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda y} & 0 \leqslant y < T \quad \text{پیوسته} \\ e^{-\lambda T} & y = T \quad \text{گسسته} \\ 0 & \text{س.ن} \end{cases}$$

Y گسسته و پیوسته است :

$$E(Y) = \int_0^T y \lambda e^{\overset{u}{(-\lambda y)}} dy + T e^{-\lambda T} = \frac{1}{\lambda} \int_0^{\lambda T} u e^{-u} du + T e^{-\lambda T}$$

$$= -\frac{1}{\lambda} \left[u e^{-u} + e^{-u} \right] \Big|_0^{\lambda T} + T e^{-\lambda T} = -\frac{1}{\lambda} \left[\lambda T e^{-\lambda T} + e^{-\lambda T} - 1 \right] + T e^{-\lambda T} = -T e^{-\lambda T} - \frac{e^{-\lambda T}}{\lambda} + \frac{1}{\lambda} + T e^{-\lambda T}$$

$$\frac{-e^{-\lambda T} + 1}{\lambda}$$

۲- اگر متغیرهای تصادفی $X_1, \ldots, X_n$ از توزیع نمایی با پارامترهای به ترتیب $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ برخوردار باشند، در اینصورت مینیمم متغیرهای تصادفی از توزیع نمایی با پارامتر $\lambda_1 + \ldots + \lambda_n$ برخوردار خواهد بود.

X_iها نسبت به هم مستقل‌اند.

اثبات :

$X_i \sim EXP(\lambda_i) \qquad i=1,\dots,n$

$Y=\min\{X_1,\dots,X_n\} \qquad Y \sim EXP(\underbrace{\lambda_1+\dots+\lambda_n}_{\lambda'})$

$$\overset{t>0}{P(Y>t)} = P(\min\{X_1,\dots,X_n\}>t) = P(X_1>t,\dots,X_n>t) = \prod_{i=1}^{n} P(X_i>t) = \prod_{i=1}^{n} e^{-\lambda_i t}$$

$$= e^{-(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i)t} = e^{-\lambda' t}$$

مثال : ماشینی که دارای ۵ موتور مشابه مستقل است. در صورتی کار می‌کند که حداقل ۳ موتور آن سالم باشد. اگر فرض کنیم که احتمال خراب شدن هر موتور دارای توزیع نمایی است، تابع چگالی کارکرد این ماشین را بدست آورید.

X_i : مدت زمان کارکرد موتور i ام $\qquad X_i \sim EXP(\lambda)$

Y : مدت زمان کارکرد ماشین $\qquad P(X_i>t)=e^{-\lambda t}$

تابع چگالی کارکرد ماشین، وابسته به تعداد دستگاه‌هایی است که تا زمان t کار کنند. باید حداکثر ۲ موتور خراب شود

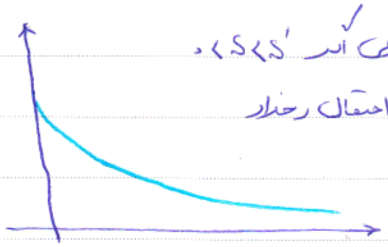
$P(Y>t) = P((Y>t)\cap$ تا زمان t همه موتورها سالم‌اند$) + P((Y>t)\cap$ تا زمان t، یک موتور خراب شده$)$

$+P((Y>t)\cap$ تا زمان t، دو موتور خراب شده باشند$) = e^{-5\lambda t} + \binom{5}{1}(1-e^{-\lambda t})e^{-4\lambda t} +$

$\binom{5}{2}(1-e^{-\lambda t})^2 e^{-3\lambda t}$

$F(y) = 1-P(Y>t) \rightsquigarrow f(y)=\frac{dF(y)}{dy}$

۲. تابع چگالی احتمال توزیع نمایی یک تابع نزولی است. $f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x} & x\geq 0\\ 0 & x<0\end{cases}$



این خاصیت را به وضوح از روی شکل می‌توان تشخیص داد. از طرفی اگر $0<s<s'$ باشد، احتمال رخداد پیشامد در بازه‌ی $(s,s+t)$ بیشتر از احتمال رخداد پیشامد در بازه‌ی $(s',s'+t)$ خواهد بود.

$P(s<x<s+t) > P(s'<x<s'+t)$

۴. در یک توزیع نمایی با پارامتر λ ، احتمال رخداد پیشامد در فاصله‌ی زمانی کوتاه Δt ، تقریباً برابر $\lambda\Delta t$ خواهد بود.

$X \sim Exp(\lambda)$ $\quad \lim_{\Delta t \to 0} P(X \leq t+\Delta t \mid X > t) = \lambda$

$$P(X \leq t+\Delta t \mid X>t) = P(X \leq \Delta t) = 1-e^{-\lambda\Delta t} \overset{*}{=} 1-\left(1-\lambda\Delta t+\frac{\lambda^2(\Delta t)^2}{2!}-\frac{\lambda^3(\Delta t)^3}{3!}+\cdots\right)$$
$$=\lambda\Delta t-\frac{\lambda^2(\Delta t)^2}{2!}+\frac{\lambda^3(\Delta t)^3}{3!}\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\lambda^n(\Delta t)^n}{n!}$$

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{P(X\leq t+\Delta t\mid X>t)}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\lambda^n(\Delta t)^n}{n!}}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\lambda^n(\Delta t)^{n-1}}{n!}=\lambda$$

$*$ بسط مک لورن $\quad \boxed{e^{-\lambda\Delta t}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(\lambda\Delta t)^n}{n!}}$

$$\lim_{\Delta t\to 0}P(X\leq t+\Delta t\mid X>t)=\lambda\Delta t$$

فرآیند شمارشی :

فرآیندی است که معرف تعداد پیشامدها در یک فاصله (بازه) زمانی مشخص می باشد.

فرآیند $\{N(t) \mid t\geq 0\}$ یک فرآیند شمارشی است هرگاه $N(t)$ نشان دهنده تعداد پیشامدهای رخداده در بازه‌ی $[0,t]$ (تعداد پیشامدهای رخداده تا زمان t) باشد.

مثال: تعداد تصادفاتی که در یک خیابان مشخص و تا یک زمان معین رخ می دهد.

تعداد مشتریانی که تا زمانی مشخص به یک رستوران مراجعه می کنند.

خواص فرآیند شمارشی :

۱. اگر $\{N(t) \mid t\geq 0\}$ یک فرآیند شمارشی باشد، در این صورت $N(t)$ تابعی غیر نزولی است.

$$t_1<t_2 \Rightarrow N(t_1)\leq N(t_2)$$

تعداد پیشامدهای رخداده در بازه‌ی $[0,t_2]$ دربرگیرنده‌ی تعداد پیشامدهای رخداده در بازه‌ی $[0,t_1]$ هم است.

۲. $N(t)$ تنها مقادیر صحیح غیرمنفی را اختیار می کند.

۳- خاصیت رشد مستقل: یک فرآیند شمارشی ممکن است از خاصیت رشد مستقل برخوردار باشد.

تعداد پیشامدهای رخداده در بازه‌ی زمانی $(0,t)$: $N(t)$

$N(S+t) - N(S) =$ تعداد پیشامدهای رخداده در بازه‌ی زمانی $(S,S+t]$

این خاصیت می‌گوید توزیع تعداد پیشامدهایی که در دو بازه‌ی زمانی مجزا رخ دهد، مستقل از یکدیگر است.

اگر توزیع تعداد پیشامدهای رخداده در هر دو بازه‌ی (S,S') و (t,t') مستقل از هم باشد، فرآیند شمارشی از خاصیت رشد مستقل برخوردار است. $((S,S') \cap (t,t') = \phi)$

۴- خاصیت رشد ثابت: خاصیت بعدی که ممکن است در یک فرآیند شمارشی برقرار باشد، خاصیت رشد ثابت است.

در صورتی که توزیع تعداد پیشامدهای رخداده در هر بازه‌ی زمانی به زمان وابسته نباشد بلکه به طول آن فاصله‌ی زمانی وابسته باشد، در این صورت خاصیت رشد ثابت برای این فرآیند شمارشی برقرار است. (اشتراک بازه‌ها مهم نیست)

(برای هر دو بازه به طول یکسان، توزیع تعداد پیشامدهای رخداده در دو بازه یکسان باشد)

فرآیند پواسون :

فرآیند شمارشی $\{N(t)|t \geq 0\}$ از فرآیند پواسون پیروی می‌کند هرگاه برای هر بازه‌ی زمانی بطول t توزیع تعداد پیشامدهای رخداده بصورت زیر باشد:

$$\forall S \qquad P(\underline{N(S+t)-N(S)=n}) = e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^n}{n!} \qquad n=0,1,2,\dots$$

تعداد پیشامدهای رخداده در $(S,S+t)$

یا در بازه‌ای بطول t

• در یک فرآیند پواسون، خاصیت رشد ثابت برقرار است؛ زیرا توزیع تعداد پیشامدهای رخداده به شروع و پایان زمان وابسته نیست و فقط به طول بازه (t) وابسته است.

• فرآیند پواسون از خاصیت رشد مستقل نیز برخوردار است.

نکته: با توجه به اینکه خاصیت رشد ثابت در فرآیند پواسون برقرار است، نتیجه می‌گیریم که

$N(t) \sim N(t+s) - N(s)$ (~ : هم توزیع بودن)

قضیه: میانگین و واریانس یک فرآیند پواسون با پارامتر λ برابر:

$$E(N(t)) = \sum_{n=0}^{\infty} n P(N(t)=n) = \sum_{n=0}^{\infty} n e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!} = \lambda t$$

$$E(N^2(t)) = \sum n^2 P(N(t)=n) = \sum_{n=0}^{\infty} n^2 e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!} = \lambda t + (\lambda t)^2$$

$$var(N(t) = \lambda t$$

• خواص فرآیند پواسون:

۱- ارتباط بین فرآیند پواسون و توزیع نمایی:

فرض کنید $N(t)$ یک فرآیند پواسون با پارامتر λ باشد که معرف تعداد پیشامدها تا زمان t است. از طرفی فرض کنید S_1 زمان رخداد پیشامد اول، S_2 زمان رخداد پیشامد دوم و ... S_n زمان رخداد پیشامد n ام ... باشد. اگر T_1 معرف مدت لازم تا رخداد پیشامد اول، T_2 مدت زمان لازم بین دو پیشامد اول و دوم، ..... T_n معرف مدت زمان بین دو پیشامد (n-1) ام و n ام باشد، در این صورت داریم $T_1 = S_1$ ، $T_2 = S_2 - S_1$ ، ..... $T_n = S_n - S_{n-1}$.

می‌توان نشان داد T_i ها از توزیع نمایی با پارامتر λ برخوردارند.

Subject :

Year . Month . Date .

اثبات : $P(T_1 > x) = P(N(x) = 0) = e^{-\lambda x}\frac{(\lambda x)^0}{0!} = e^{-\lambda x}$

$P(T_1 \leqslant x) = 1 - e^{-\lambda x}$ ← تابع توزیع تجمعی، توزیع نمایی

$P(T_n > x) = P(S_n - S_{n-1} > x) = P(S_n > S_{n-1} + x) = P(N(S_{n-1} + x) - N(S_{n-1}) = 0)$

$= P(N(x) = 0) = e^{-\lambda x}$

$S_n > S_{n-1} + x$: از زمان S_{n-1} تا زمان $S_{n-1} + x$ هیچ اتفاقی نیفتد.

$\rightsquigarrow T_i \sim Exp(\lambda)$

۲- اگر $N_1(t)$ معرف فرآیند پواسون با پارامتر λ_1 و $N_2(t)$ معرف فرآیند پواسون با پارامتر λ_2 باشد و از طرفی $N_1(t)$ و $N_2(t)$ نسبت به هم مستقل باشد. دراینصورت $N(t) = N_1(t) + N_2(t)$ از فرآیند پواسون با پارامتر $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2$ برخوردار خواهد بود.

تابع مولد گشتاور برای توزیع پواسون $\quad M_{N(t)}(S) = e^{-\lambda t(e^S - 1)}$

• $M_{N_1(t)+N_2(t)}(S) = M_{N_1(t)}(S) \cdot M_{N_2(t)}(S) = e^{-(\lambda_1+\lambda_2)t(e^S-1)} \Rightarrow N_1(t) + N_2(t) \sim P(\lambda_1 + \lambda_2)$

•• $P(N(t) = n) = P(N_1(t) + N_2(t) = n) = \sum_{i=0}^{n} P(N_1(t) + N_2(t) = n \mid N_1(t) = i)\, P(N_1(t) = i)$

$= \sum_{i=0}^{n} P(N_2(t) = n-i)\, P(N_1(t) = i) = \sum_{i=0}^{n} e^{-\lambda_1 t}\frac{(\lambda_1 t)^i}{i!}\, e^{-\lambda_2 t}\frac{(\lambda_2 t)^{n-i}}{(n-i)!}$

$= \frac{e^{-(\lambda_1+\lambda_2)t}}{n!} \times \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}(\lambda_1 t)^i(\lambda_2 t)^{n-i} = \frac{e^{-(\lambda_1+\lambda_2)t}}{n!}\left[(\lambda_1+\lambda_2)t\right]^n$

$\underline{\underline{\lambda_1+\lambda_2=\lambda}} \quad e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^n}{n!} \longrightarrow N_1(t) + N_2(t) \sim P(\lambda_1 + \lambda_2)$

۳- فرض کنید $N(t)$ از فرآیند پواسون با پارامتر λ برخوردار باشد. از طرفی فرض کنید هر پیشامد در این فرآیند با احتمال p از نوع ① و با احتمال $(1-p)$ از نوع ② باشد. در این صورت اگر $N_1(t)$ و $N_2(t)$ به ترتیب نشان دهنده‌ی تعداد پیشامدهای نوع ① و نوع ② رخداده تا زمان t باشند، آن گاه $N_1(t)$ از فرآیند پواسون با پارامتر λp و $N_2(t)$ از فرآیند پواسون با پارامتر $\lambda(1-p)$ برخوردار خواهد بود.

$$\bullet\ P(N_1(t)=n)=\sum_{m=n}^{\infty}P(N_1(t)=n\mid N(t)=m)\,P(N(t)=m)$$

$$=\sum_{m=n}^{\infty}\binom{m}{n}p^n(1-p)^{m-n}\times e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^{\overset{m-n+n}{m}}}{m!}=\frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^n p^n}{n!}\sum_{m=n}^{\infty}\frac{[(1-p)\lambda t]^{m-n}}{(m-n)!}$$

$$\underline{\underline{m-n=m'}}\ e^{-\lambda t}\frac{[(\lambda p)t]^n}{n!}\sum_{m'=0}^{\infty}\frac{[(1-p)\lambda t]^{m'}}{m'!}=e^{-\lambda t}\frac{[(\lambda p)t]^n}{n!}e^{\lambda t-p\lambda t}$$

$$=e^{-\lambda t}e^{\lambda t}e^{-p\lambda t}\frac{[(\lambda p)t]^n}{n!}=e^{-(\lambda p)t}\frac{[(\lambda p)t]^n}{n!}\longrightarrow N_1(t)\sim P(\lambda p)$$

$P(N_1(t)=n\mid N(t)=m)$: احتمال این‌که از m پیشامد رخداده، n تای آن از نوع ① باشد،

= توزیع دوجمله‌ای با پارامترهای m و p

۴- فرض کنید $N(t)$ از فرآیند پواسون با پارامتر λ برخوردار باشد. از طرفی فرض کنید بدانیم در بازه‌ی $(0,t)$ (تا زمان t) دقیقاً یک پیشامد رخداده باشد. در این صورت اگر T را زمان رخداد این پیشامد تعریف کنیم، آن گاه T از توزیع یکنواخت پیوسته در بازه‌ی $(0,t)$ برخوردار خواهد بود.

$$\bullet\ P(T\leq x\mid N(t)=1)=\frac{P(T\leq x,N(t)=1)}{P(N(t)=1)}=\frac{P(\overbrace{N(x)=1}^{(0,x]},\overbrace{N(t)-N(x)=0}^{(x,t]})}{e^{-\lambda t}\,\lambda t}$$

$$\overset{*}{=}\frac{P(N(x)=1)\cdot P(N(t)-N(x)=0)}{e^{-\lambda t}\,\lambda t}=\frac{e^{-\lambda x}\times(\lambda x)\times e^{-\lambda(t-x)}}{e^{-\lambda t}\,\lambda t}=\frac{x}{t}$$

$$P(T\leqslant x)=\begin{cases}0 & x\leqslant 0\\ \frac{x}{t} & 0<x\leqslant t\\ 1 & x>t\end{cases}$$

* $(0,x]\cap(x,t]=\phi$ بنابه خاصیت رشد مستقل، توزیع تعداد پیشامدهای رخداده در این دو بازه مستقل از هم است. پس :

$$P(N(x)=1,\ N(t)-N(x)=0)=P(N(x)=1)\times P(N(t)-N(x)=0)$$

نکته: فرض کنید تعداد پیشامدها از فرآیند پواسون با پارامتر λ برخوردار باشد و بدانیم در بازه‌ی $(0,t)$ دقیقاً n نفر وارد سیستم شده‌اند. در این صورت زمان ورود هر فرد در این بازه از توزیع یکنواخت برخوردار است و از طرفی زمان ورود افراد مستقل از یکدیگر خواهند بود.

$0<t'<t$

اثبات : P(m نفر در بازه‌ی $(0,t')$ وارد شوند | n نفر در بازه‌ی $(0,t)$ وارد شدند)

$$=\frac{P(\underbrace{N(t')=m}_{(0,t']},\ \underbrace{N(t)-N(t')=n-m}_{(t',t]})}{P(N(t)=n)}=\frac{P(N(t')=m)\cdot P(N(t)-N(t')=n-m)}{P(N(t)=n)}$$

$$=\frac{e^{-\lambda t'}\frac{(\lambda t')^m}{m!}\times e^{-\lambda(t-t')}\frac{(\lambda(t-t'))^{n-m}}{(n-m)!}}{e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^n}{n!}}=\binom{n}{m}\left(\frac{t'}{t}\right)^m\left(1-\frac{t'}{t}\right)^{n-m}\sim b\left(n,\frac{t'}{t}\right)$$

احتمال این که هر فرد در بازه‌ی $(0,t')$ وارد شود برابر $\frac{t'}{t}$ است.

$$P(T_i\leqslant t')=\frac{t'}{t}\ \rightsquigarrow\ T_i\sim U(0,t)$$

در توزیع دوجمله‌ای آزمایشات مستقل از هم هستند. پس در این جا نیز ورود افراد مستقل از هم است. (اثبات مهم نیست)

مثال: تعداد مشتریانی که به یک سیستم مراجعه می‌کنند از توزیع پواسون با میانگین ۱۰ مشتری در هر ساعت برخوردار است. اگر در ۳ ساعت اول ۲ مشتری مراجعه کرده باشند، احتمال این که هر دو مشتری در ساعت اول آمده باشند، چقدر است؟

X: تعداد مشتریانی که در یک ساعت اول مراجعه کرده‌اند

Y: تعداد مشتریانی که در طول سه ساعت مراجعه کرده‌اند

$X|Y=n \sim b(n,\frac{1}{۳})$

$P(X=۲|Y=۲)=\binom{۲}{۲}(\frac{1}{۳})^{۲}(\frac{۲}{۳})^{۰}=\frac{1}{۹}$

نکته: اگر n نفر در بازه‌ی $(0,t)$ وارد سیستم شوند، (تعداد وقوع پیشامدها از فرآیند پواسون با پارامتر λ برخوردار است.) توزیع تعداد افرادی که در بازه‌ی $(0,t')$ $(t'<t)$ وارد سیستم می‌شوند، توزیع دوجمله‌ای با پارامترهای n و $\frac{t'}{t}$ است.

$X \mid Y=n \sim b(n,\frac{t'}{t})$

مثال. اگر $N(t)$ معرف فرآیند پواسون باشد، $E(N(t)\times N(t+S))$ را بیابید.

تمرین ۲۱

$(0,t)\subseteq(0,t+s)$

$(0,t]\cap(0,t+s)\neq\emptyset$

$$E(N(t)\times N(t+s)) = E[N(t)\times(N(t)+N(t+S)-N(t))] \qquad (0,t]\cap(t,t+S]=\emptyset$$

$$= E(N^{۲}(t)+N(t)\times(N(t+S)-N(t))) = E(N^{۲}(t))+E[N(t)\times(N(t+S)-N(t))]$$

$$= \lambda t+(\lambda t)^{۲}+E(N(t))\times E[\underbrace{N(t+S)-N(t)}_{N(S)}] = \lambda t+(\lambda t)^{۲}+(\lambda t)(\lambda S)=$$

$$\lambda t\times[1+(\lambda t)+(\lambda s)]$$

ت ۱۵:

X_i: مدت زمان تعمیر موتور iام (برحسب دقیقه) $\qquad X_i\sim EXP(\frac{1}{10}) \qquad E(X_i)=۱۰,\ var(X_i)=۱۰۰$

Y_i: مدت زمان تعمیر موتور iام برحسب ساعت $\qquad Y_i=\frac{X_i}{۶۰} \qquad$ تعداد موتورهای معیوب ماشین: N

Y = مدت زمان تعمیر ماشین = مدت زمان تعمیر موتورهای معیوب ماشین = $\sum_{i=1}^{N}X_i$

$E(\sum_{i=1}^{N}X_i)=E(X_i)\times E(N)=$

$P(N=n)=\frac{1}{۲} \quad n=۱,۲ \qquad E(N)=۳/۲ \qquad var(N)=\frac{۳}{۱۲}=\frac{1}{۴}$

مدت زمان دو ورود متوالی ~ Exp(λ)

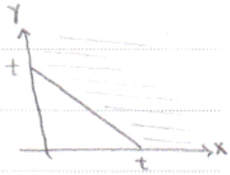
مثال : یک مدل M|M|1 که در آن آهنگ ورود مشتریان λ و آهنگ خدمت دهی μ است را در نظر بگیرید. در یک لحظه‌ی مشخص سیستم خالی است، مدت زمانی که از این لحظه به بعد طول می‌کشد تا اولین مشتری از سیستم خارج شود را E تعریف می‌کنیم. نشان دهید که :

$$P(E>t) = \frac{\mu e^{-\lambda t} - \lambda e^{-\mu t}}{\mu - \lambda}$$

X و Y مستقل از هم هستند

X : مدت زمان لازم از زمان فعلی تا زمان ورود مشتری اول $X \sim EXP(\lambda)$

Y : مدت زمان لازم برای خدمت دهی به مشتری



$$E = X+Y \qquad P(X+Y>t) = 1 - \iint_{X+Y\leq t} f(x,y)\,dA$$

$$P(X+Y>t) = 1 - \int_0^t \int_0^{t-y} \lambda e^{-\lambda x} \mu e^{-\mu y}\,dx\,dy$$

$$= 1 - \left[1 - \frac{\lambda}{\lambda-\mu} e^{-\mu t} + \frac{\mu}{\lambda-\mu} e^{-\lambda t}\right] = \frac{\lambda}{\lambda-\mu} e^{-\mu t} - \frac{\mu}{\lambda-\mu} e^{-\lambda t} = \frac{\mu e^{-\lambda t} - \lambda e^{-\mu t}}{\mu - \lambda}$$

$$\int_0^t \int_0^{t-y} \lambda e^{-\lambda x} \mu e^{-\mu y}\,dx\,dy = \int_0^t \mu e^{-\mu y} dy \int_0^{t-y} \lambda e^{-\lambda x}\,dx = \int_0^t \mu e^{-\mu y} dy \left[-e^{-\lambda x} \Big|_0^{t-y} = 1 - e^{-\lambda(t-y)} \right]$$

$$= \int_0^t \mu e^{-\mu y} \left[1 - e^{-\lambda t} e^{\lambda y}\right] dy = \int_0^t \mu e^{-\mu y} - \int_0^t e^{-\lambda t} \mu e^{-\mu y} e^{\lambda y}\,dy = -e^{-\mu y}\Big|_0^t$$

$$-\mu e^{-\lambda t} \int_0^t e^{(\lambda-\mu)y}\,dy = 1 - e^{-\mu t} - \mu e^{-\lambda t} \times \frac{1}{\lambda-\mu} e^{(\lambda-\mu)y}\Big|_0^t = 1 - e^{-\mu t} - \frac{\mu e^{-\lambda t}}{\lambda-\mu}\left[e^{(\lambda-\mu)t} - 1\right]$$

$$= 1 - e^{-\mu t} - \frac{\mu e^{-\lambda t}}{\lambda-\mu}\left[e^{\lambda t} e^{-\mu t} - 1\right] = 1 - e^{-\mu t} - \frac{\mu}{\lambda-\mu} e^{-\mu t} + \frac{\mu}{\lambda-\mu} e^{-\lambda t}$$

$$= 1 - e^{-\mu t}\left[1 + \frac{\mu}{\lambda-\mu}\right] + \frac{\mu}{\lambda-\mu} e^{-\lambda t} = 1 - \frac{\lambda}{\lambda-\mu} e^{-\mu t} + \frac{\mu}{\lambda-\mu} e^{-\lambda t}$$

توزیع ارلانگی :

متغیر تصادفی X از توزیع ارلانگی با پارامترهای r و λ برخوردار باشد ، هرگاه ، چگالی احتمال آن بصورت مقابل باشد . r عددی صحیح و مثبت و λ عددی حقیقی و مثبت می باشد .

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} \dfrac{(\lambda x)^{r-1}}{(r-1)!} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

نکته : در توزیع گاما با پارامترهای α و β اگر α عددی صحیح باشد ، توزیع مورد نظر همان توزیع ارلانگی با پارامترهای $r=\alpha$ و $\lambda=\beta$ خواهد بود .

نکته : در صورتیکه متغیر تصادفی X از توزیع ارلانگی با پارامترهای r و λ برخوردار باشد ، آن گاه داریم :

$$E(X) = \frac{r}{\lambda} \qquad var(X) = \frac{r}{\lambda^2} \qquad M_X(t) = \left(\frac{\lambda}{\lambda - t}\right)^r$$

تمرین

$$M_X(t) = \int_0^\infty e^{xt} \lambda e^{-\lambda x} \frac{(\lambda x)^{r-1}}{(r-1)!} dx = \frac{\lambda^{r-1}}{(r-1)!} \int_0^\infty \lambda e^{-(\lambda - t)x} x^{r-1} dx \xrightarrow[x = \frac{u}{\lambda - t}]{(\lambda - t)x = u}$$

قضیه : اگر X_1 ، X_2 ، .... ، X_n متغیرهای تصادفی مستقل و از توزیع نمایی با پارامتر λ برخوردار باشند ، در این صورت متغیر تصادفی $Y = X_1 + X_2 + \dots + X_n$ از توزیع ارلانگی با پارامترهای n و λ برخوردار خواهد بود .

$$M_Y(t) = M_{X_1 + \dots + X_n}(t) = \prod_{i=1}^{n} M_{X_i}(t) = \prod_{i=1}^{n} \frac{\lambda}{\lambda - t} = \left(\frac{\lambda}{\lambda - t}\right)^n \longrightarrow Y \sim E_r$$

نکته : فرض کنید تعداد پیشامدها از فرآیند پواسون با پارامتر λ برخوردار باشد ، در این صورت اگر زمان رخداد n امین پیشامد را S_n بنامیم ، آن گاه S_n از توزیع ارلانگی با پارامترهای n و λ برخوردار خواهد بود .

Subject :

Year .　　Month .　　Date .

T_i : فاصله‌ی زمانی بین دو پیشامد متوالی i و $i-1$　　$S_n = T_1 + T_2 + \cdots + T_n = \sum_{i=1}^{n} T_i$

$T_i \sim EXP(\lambda)$ در نتیجه با توجه به قضیه‌ی قبل S_n از توزیع ارلانگی با پارامترهای n و λ برخوردار است.

نکته: اگر X از توزیع ارلانگی با پارامترهای r و λ برخوردار باشد، تابع توزیع تجمعی آن از رابطه‌ی زیر بدست می‌آید:

$$F(x) = 1 - \sum_{i=0}^{r-1} e^{-\lambda x} \frac{(\lambda x)^i}{i!}$$

فرض کنید تعداد پیشامدها از توزیع پواسون با پارامتر λ برخوردار باشد، در این صورت اگر زمان رخ داد r امین پیشامد را با X نمایش دهیم، آن گاه X از توزیع ارلانگی با پارامترهای r و λ برخوردار خواهد بود.

$$F(x) = P(X \leq x) = P(\text{زمان رخداد } r \text{ امین پیشامد} \leq x) = 1 - P(X > x)$$

$$= 1 - P(N(x) \leq r-1) = 1 - \sum_{i=0}^{r-1} P(N(x) = i) = 1 - \sum_{i=0}^{r-1} e^{-\lambda x} \frac{(\lambda x)^i}{i!}$$

مثال) یک سیستم صف با یک خدمت دهنده را در نظر بگیرید. مدت زمان خدمت نمایی با میانگین ۲۰ دقیقه است. یک مشتری در صف منتظر و خدمت دهنده مشغول ارائه‌ی خدمت به مشتری دیگری است.

احتمال این که مشتری مورد نظر در صف بیش از یک ساعت دیگر در سیستم بماند چقدر است؟

X_i: مدت زمان خروج مشتری i توسط خدمت دهنده (ساعت)　　$X_i \sim EXP(3)$　　$E(X_1) = \frac{1}{3} = \frac{1}{\lambda}$

$Y = X_1 + X_2 \rightarrow$ Y دارای توزیع ارلانگی با پارامترهای ۲، ۳ است

Subject :

Year . Month . Date .

$$P(y>۱) = P(N(۱) \leq ۱) = \sum_{i=0}^{۲-۱} e^{-۳} \frac{(۳)^i}{i!} = e^{-۳}(۱+۳) = ۴e^{-۳}$$

ت ۲۵ :

$X_i \sim$ زمان بین دو ورود مشتری i-۱ و i از نوع ① $\quad X_i \sim EXP(۵)$

$Y_i \sim$ ② از نوع ~ ~ ~ ~ ~ ~ ~ ~ $\quad Y_i \sim EXP(۱۰)$

$Z_i = \sum_{j=1}^{i} X_j$ زمان ورود مشتری i ام نوع ①

$W_i = \sum_{j=1}^{i} Y_j$ نوع ② ~ ~ ~ ~

الف) $P(Z_۱ < W_۱) = P(X_۱ < Y_۱) = \int_0^\infty \int_{x_۱}^\infty \lambda_۱ e^{-\lambda_۱ x_۱} \lambda_۲ e^{-\lambda_۲ y_۲} dy_۱ dx_۱$

$$= \int_0^\infty \lambda_۱ e^{-\lambda_۱ x_۱} e^{-\lambda_۲ x_۱} dx_۱ = \frac{\lambda_۱}{\lambda_۱ + \lambda_۲} = \frac{۵}{۱۵} = \frac{۱}{۳}$$

روش دوم $N_۱(t) =$ تعداد مشتریان نوع ① وارد شده تا زمان t

$N_۲(t) =$ تعداد مشتریان نوع ② وارد شده تا زمان t $\quad N(t) = N_۱(t) + N_۲(t)$

ب) $P(Z_۵ < W_۲) = P(Z_۵ < W_۱) + P(W_۱ < Z_۵ < W_۲) = (\frac{۱}{۳})^۵ + ۵(\frac{۱}{۳})^۵ \times \frac{۲}{۳}$

$P(Z_۵ < W_۱) = P(X_۱ < W_۱, X_۱+X_۲ < W_۱, X_۱+X_۲+X_۳ < W_۱, X_۱+X_۲+X_۳+X_۴ < W_۱,$

$X_۱+X_۲+X_۳+X_۴+X_۵ < W_۱) = P(X_۱ < W_۱) \times P(X_۱+X_۲ < W_۱ | X_۱ < W_۱) \times$

$P(X_۱+X_۲+X_۳ < W_۱ | X_۱+X_۲ < W_۱) \times P(X_۱+X_۲+X_۳+X_۴ < W_۱ | X_۱+X_۲+X_۳ < W_۱)$

$\times P(X_۱+X_۲+X_۳+X_۴+X_۵ < W_۱ | X_۱+X_۲+X_۳+X_۴ < W_۱)$

$= \frac{۱}{۳} \times \frac{۱}{۳} \times \frac{۱}{۳} \times \frac{۱}{۳} \times \frac{۱}{۳} = (\frac{۱}{۳})^۵$

- $P(X_۱+X_۲ < W_۱ | X_۱ < W_۱) = P(X_۲ < \overset{W_۱'}{W_۱ - X_۱}) = P(X_۲ < W_۱') = \frac{۱}{۳}$

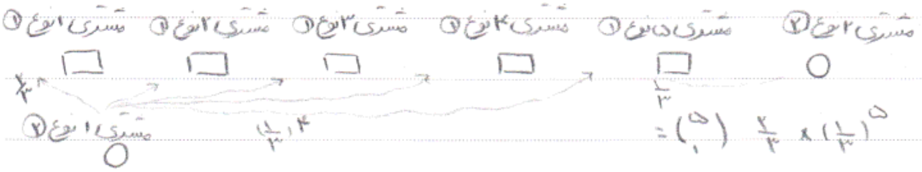
زمان ورود مشتری اول نوع ① را $(X_۱)$ به عنوان مبدا زمان درنظر می‌گیریم. از این نقطه تا $W_۱$، مشتری دوم نوع ① وارد می‌شود $X_۲ < W_۱ - X_۱$

Subject :

Year . Month . Date .

- $P(X_{۱}+X_{۳}+X_{۲}<w_{۱} \mid X_{۱}+X_{۲}<w_{۱}) = P(X_{۳}<\overset{w_{۱}''}{\underbrace{w_{۱}-(X_{۱}+X_{۲})}}) = P(X_{۳}<w_{۱}'') = \frac{۱}{۳}$

$P(w_{۱}<Z_{۵}<w_{۲}) = ۵\times(\frac{۱}{۳})^{۵}\times\frac{۲}{۳}$



$=\binom{۵}{۱}\ \frac{۲}{۳}\times(\frac{۱}{۳})^{۵}$

روش دوم : $P(Z_{۳}<w_{۱}<Z_{۴}<Z_{۵}<w_{۲}) = P(Z_{۱}<w_{۱}, Z_{۲}<w_{۱}, Z_{۳}<w_{۱}, w_{۱}<Z_{۴},$
$Z_{۴}<Z_{۵}, Z_{۵}<w_{۲}) = P(Z_{۱}<w_{۱})\times P(Z_{۲}<w_{۱} \mid Z_{۱}<w_{۱})\times P(Z_{۳}<w_{۱} \mid Z_{۲}<w_{۱})$
$\times P(w_{۱}<Z_{۴} \mid Z_{۳}<w_{۱})\times P(Z_{۴}<Z_{۵} \mid w_{۱}<Z_{۴})\times P(Z_{۵}<w_{۲} \mid Z_{۴}<Z_{۵})$
$=\frac{۱}{۳}\times\frac{۱}{۳}\times\frac{۱}{۳}\times\frac{۲}{۳}\times\frac{۱}{۳}\times\frac{۱}{۳}$

- $P(Z_{۲}<w_{۱} \mid Z_{۱}<w_{۱}) = P(X_{۱}+X_{۲}<w_{۱} \mid Z_{۱}<w_{۱}) = P(X_{۲}<w_{۱}-X_{۱})\ \frac{۱}{۳}$

فصل چهارم : زنجیره‌های مارکوف

تعریف : فرآیندی را در نظر بگیرید که در آن سیستم را به سه دوره‌ی گذشته، حال و آینده تقسیم کنیم. در این صورت اگر وضعیت فرآیند در آینده به مسیری که سیستم در گذشته طی کرده بستگی نداشته باشد و تنها به وضعیت فعلی آن (زمانی که آخرین اطلاعات از آن موجود است) وابسته باشد، گوییم فرآیند از خاصیت مارکوف برخوردار است. یا این فرآیند یک فرآیند مارکوف است.

یا به عبارتی ریاضی مجموعه متغیرهای تصادفی $\{X(t) ; t \geq 0\}$ را در نظر بگیرید، اگر به ازای هر $x_1, x_2, \dots, x_n$ و $t_1, t_2, \dots, t_n$ رابطه‌ی زیر برقرار باشد گوییم این مجموعه دارای خاصیت مارکوف است:

$$P(X(t_{n+1}) \leq x \mid X(t_n) = x_n, X(t_{n-1}) = x_{n-1}, \dots, X(t_1) = x_1) = P(\underbrace{X(t_{n+1})}_{\text{آینده}} \leq x \mid \underbrace{X(t_n) = x_n}_{\text{زمان فعلی}})$$

انواع تقسیم بندی فرآیندهای مارکوف :

۱. در یک فرآیند مارکوف پارامتر t می‌تواند گسسته یا پیوسته باشد.

در صورتیکه بخواهیم تنها در زمان‌های مشخصی سیستم را بررسی کنیم، آن گاه پارامتر t از نوع گسسته خواهد بود. اگر پارامتر t از نوع گسسته باشد به جای $\{X(t) ; t \geq 0\}$ از $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ استفاده می‌کنیم.

۲. مقداری که متغیر تصادفی $X(t)$ در زمان t می‌گیرد را حالت سیستم در زمان t گوییم. حالت سیستم می‌تواند پیوسته یا گسسته باشد.

زنجیره‌های مارکوف :

فرآیندی مارکوفی که در آن هم پارامتر t و هم حالت سیستم گسسته باشد را زنجیره‌ی مارکوف گوییم. پس متغیرهای تصادفی $X_1, X_2, \dots, X_n$ از خاصیت زنجیره‌ی مارکوف برخوردارند، هرگاه:

$$P(X_{n+1} = j \mid X_n = i, X_{n-1} = i_{n-1}, X_{n-2} = i_{n-2}, \dots, X_1 = i_1, X_0 = i_0)$$
$$= P(X_{n+1} = j \mid X_n = i)$$

در تعریف فوق n نشان دهنده‌ی مرحله‌ی n ام است. در زنجیره‌ی مارکوف اگر تغیر سیستم از حالت i به حالت j به مرحله‌ی (n) وابسته نباشد، زنجیره‌ی مارکوف از نوع همگن است. یا به صورت ریاضی داریم:

$$P(X_{n+1}=j \mid X_n=i) = P(X_1=j \mid X_0=i) \quad \forall n$$

مثال: نقطه‌ای فیزیکی را در نظر بگیرید که روی خطی مستقیم سیر می‌کند. در هر حرکت این نقطه به احتمال P، 1mm به جلو و با احتمال (1-P) به همین اندازه به عقب می رود. آیا فرآیند از خاصیت مارکوف برخوردار است؟

X_n : وضعیت نقطه در گام n ام

$$P(\underset{\text{موقعیت نقطه در گام n ام}}{X_{n+1}}=j \mid X_n=i) = \begin{cases} p & j=i+1 \\ 1-p & j=i-1 \\ 0 & o.w \end{cases}$$

احتمال تغییر وضعیت سیستم در یک زنجیره‌ی مارکوف همگن، از حالت i به حالت j را با P_{ij} نشان می‌دهیم.

ماتریس گذار:

فرض کنید تعداد کل حالات یک زنجیره‌ی مارکوف M باشد. ماتریس مربعی $P_{M\times M}$ (M×M) را ماتریس گذار گوییم، هرگاه عنصر سطر i ام و ستون j ام این ماتریس برابر P_{ij} باشد.

$$P_{M\times M} = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} & \cdots & P_{1M} \\ P_{21} & P_{22} & \cdots & P_{2M} \\ \vdots & & & \\ P_{M1} & P_{M2} & \cdots & P_{MM} \end{bmatrix}$$

فصل چهارم : زنجیره‌های مارکوف

تعریف : فرآیندی را در نظر بگیرید که در آن سیستم را به سه دوره‌ی گذشته، حال و آینده تقسیم کنیم. در این صورت اگر وضعیت فرآیند در آینده به مسیری که سیستم در گذشته طی کرده بستگی نداشته باشد و تنها به وضعیت فعلی آن (زمانی که آخرین اطلاعات از آن موجود است) وابسته باشد، گوییم فرآیند از خاصیت مارکوف برخوردار است. یا این فرآیند یک فرآیند مارکوف است.

یا به عبارت ریاضی مجموعه متغیرهای تصادفی $\{X(t) ; t \geqslant 0\}$ را در نظر بگیرید، اگر به ازای هر $x_1, x_2, \ldots, x_n$ و $t_1, t_2, \ldots, t_n$ رابطه‌ی زیر برقرار باشد گوییم این مجموعه دارای خاصیت مارکوف است:

$$P(X(t_{n+1}) \leqslant x \mid X(t_n)=x_n, X(t_{n-1})=x_{n-1}, \ldots, X(t_1)=x_1) = P(\underbrace{X(t_{n+1})}_{\text{آینده}} \leqslant x \mid \underbrace{X(t_n)=x_n}_{\text{زمان فعلی}})$$

انواع تقسیم بندی فرآیندهای مارکوف :

۱. در یک فرآیند مارکوف پارامتر t می‌تواند گسسته یا پیوسته باشد.

در صورتی که بخواهیم تنها در زمان‌های مشخصی سیستم را بررسی کنیم، آن گاه پارامتر t از نوع گسسته خواهد بود. اگر پارامتر t از نوع گسسته باشد به جای $\{X(t) ; t \geqslant 0\}$ از $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ استفاده می‌کنیم.

۲. مقداری که متغیر تصادفی $X(t)$ در زمان t می‌گیرد را حالت سیستم در زمان t گوییم. حالت سیستم می‌تواند پیوسته یا گسسته باشد.

زنجیره‌های مارکوف :

فرآیندی مارکوفی که در آن هم پارامتر t و هم حالت سیستم گسسته باشد را زنجیره‌ی مارکوف گوییم. پس متغیرهای تصادفی $X_1, X_2, \ldots, X_n$ از خاصیت زنجیره‌ی مارکوف برخوردارند هرگاه:

$$P(X_{n+1}=j \mid X_n=i, X_{n-1}=i_{n-1}, X_{n-2}=i_{n-2}, \ldots, X_1=i_1, X_0=i_0)$$
$$=P(X_{n+1}=j \mid X_n=i)$$

در تعریف فوق n نشان دهنده‌ی مرحله‌ی n ام است. در زنجیره‌ی مارکوف اگر گذر سیستم از حالت i به حالت j به مرحله‌ی (n) وابسته نباشد، زنجیره‌ی مارکوف از نوع همگن است.

یا به صورت ریاضی داریم:

$$P(X_{n+1}=j \mid X_n=i) = P(X_1=j \mid X_0=i) \quad \forall n$$

مثال: نقطه‌ای فیزیکی را در نظر بگیرید که روی خطی مستقیم سیر می‌کند. در هر حرکت این نقطه به احتمال P، 1mm به جلو و با احتمال (1-P) به همین اندازه به عقب می رود. آیا فرآیند از خاصیت مارکوف برخوردار است؟

X_n : وضعیت نقطه در گام n ام

$$\underset{\text{موقعیت نقطه در گام n+1 ام}}{P(X_{n+1}=j \mid X_n=i)} = \begin{cases} P & j=i+1 \\ 1-P & j=i-1 \\ 0 & \text{o.w} \end{cases}$$

احتمال تغییر وضعیت سیستم در یک زنجیره‌ی مارکوف همگن، از حالت i به حالت j را با P_{ij} نشان می‌دهیم.

ماتریس گذار:

فرض کنید تعداد کل حالات یک زنجیره‌ی مارکوف M باشد. ماتریس مربعی $P_{M\times M}$ (M×M) را ماتریس گذار گوییم، هرگاه عنصر سطر i ام و ستون j ام این ماتریس برابر P_{ij} باشد.

$$P_{M\times M} = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} & \cdots & P_{1M} \\ P_{21} & P_{22} & \cdots & P_{2M} \\ \vdots & & & \\ P_{M1} & P_{M2} & \cdots & P_{MM} \end{bmatrix}$$

Subject :

Year .　　Month .　　Date .

خصوصیات ماتریس گذار :

۱. همه ی عناصر ماتریس نامنفی اند .

۲. مجموع مقادیر هر سطر برابر با یک است .

مثال : ماتریس گذار زنجیره ی مارکوف مثال قبل را بیابید .

$$P = \begin{array}{c|cccccccccccc} & -\infty & \cdots & -3 & -2 & -1 & 0 & 1 & 2 & 3 & \cdots & \infty \\ \hline -\infty & 0 & 1-p & & & & & & & & & \\ \vdots & & & & & & & & & & & \\ -2 & 0 & \cdots & 1-p & 0 & p & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & \cdots & 0 & 1-p & 0 & p & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1-p & 0 & p & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 1-p & 0 & p & 0 & \cdots & 0 \\ 2 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 1-p & 0 & p & 0 \cdots & 0 \\ \vdots & & & & & & & & & 0 & & \\ & & & & & & & & & & & 0 \end{array}$$

قطر اصلی

۲-۴

مثال : فرض کنید که درآمد شخصی در روز Y باشد. Y متغیری تصادفی است که فقط اعداد صحیح نامنفی را اختیار می کند و $P(Y=i)=a_i$. بدیهی است که $\sum_{i=1}^{\infty} a_i = 1$, $\forall i \; a_i \geq 0$
حال چه X_n نشان دهنده ی مجموع درآمد آن شخص در n روز اول باشد واضح است که X_n یک زنجیره ی مارکوف از نوع همگن است .

درآمد شخص روزی یکبار بررسی می شود ← پارامتر سیستم t (زمان) گسسته است . (I)

X_n : حالت سیستم گسسته است (II)

$$\begin{cases} b_{n+1} = \sum_{j=1}^{n+1} c_j \\ Y_{n+1} = X_{n+1} - X_n = \underset{\text{میزان درآمد در روز } n+1}{C} \end{cases}$$

$$P(X_{n+1}=b_{n+1} \mid X_n=b_n , X_{n-1}=b_{n-1} , \cdots , X_1=b_1)$$
$$= P(X_{n+1}=b_{n+1} \mid X_n=b_n) = P(X_2=b_{n+1} \mid X_1=b_n)$$

(III)

حالت سیستم در آینده به وضعیت سیستم در گذشته بستگی ندارد و فقط به آخرین روز بستگی دارد .

I، II و III ⇐ X_n یک زنجیره‌ی مارکوف همگن است.

$$\begin{array}{c|cccccccc} \text{مقادیر } X_n \downarrow & 0 & 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n & \cdots \infty \to X_{n+1} \text{ مقادیر} \\ \hline 0 & a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_{n-1} & a_n & \cdots \\ 1 & 0 & a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-2} & a_{n-1} & \cdots \\ 2 & 0 & 0 & a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-3} & a_{n-2} & \cdots \\ \vdots & \vdots & & & & & & & \\ n-1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & a_0 & a_1 & \cdots \\ n & 0 & 0 & 0 & 0 & & 0 & a_0 & \cdots \\ \vdots & & & & & & & & \\ \infty & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \end{array} = P$$

قطر اصلی : a_0

مثال سطر ۲ ، $\sum P(X_{n+1}=k \mid X_n=1) = \sum_{k=0}^{\infty} P(Y_{n+1}=k-1) = \sum_{K=0}^{\infty} P(Y=k-1) = \sum_{K=0}^{\infty} a_{K-1} =$

ماتریس گذار m مرحله‌ای :

تعریف : الف) $P_{ij}^{(m)}$ بیان کننده‌ی احتمال گذر سیستم از حالت i به حالت j طی m مرحله می‌باشد.

$$P_{ij}^{(m)} = P(X_{n+m}=j \mid X_n=i) = P(X_m=j \mid X_0=i)$$

ب) ماتریس $P^{(m)}$ را ماتریس گذار m مرحله‌ای گوئیم ، هرگاه عنصر سطر i و ستون j این ماتریس $P_{ij}^{(m)}$ باشد.

قضیه : الف) به ازای هر حالت i به j و به ازای هر یک از اعداد صحیح مثبت K و K' داریم :
(فرض کنید حالت سیستم بتواند مقادیر ۱ تا M را بپذیرد)

$$P_{ij}^{(K+K')} = \sum_{S=1}^{M} P_{iS}^{(K)} P_{Sj}^{(K')}$$

ب) $P^{(m)} = P^m$ ماتریس گذار m مرحله‌ای = $[\text{ماتریس گذار سیستم}]^m$

اثبات الف) $P_{ij}^{(k+k')} = P(X_{k+k'}=j \mid X_0=i) = \sum_{s=1}^{M} P(X_{k+k'}=j , X_k=s \mid X_0=i)$

(قضیه‌ی چاپمن کولوموگروف)

$$\overset{*}{=} \sum_{s=1}^{M} P(X_{k+k'}=j \mid X_k=s, X_0=i)\, P(X_k=s \mid X_0=i)$$

$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1)\, P(A_2 \mid A_1)\, P(A_3 \mid A_2 \cap A_1)$

نتیجه قانون ضرب احتمال : $P(A_2 \cap A_3 \mid A_1) = P(A_2 \mid A_1)\, P(A_3 \mid A_2 \cap A_1)$ *

$$= \sum_{s=1}^{M} P(X_{k+k'}=j \mid X_k=s)\, P(X_k=s \mid X_0=i) = \sum_{s=1}^{M} P(X_{k'}=j \mid X_0=s)\, P(X_k=s \mid X_0=i)$$

$\sum_{s=1}^{M} P_{sj}^{(k')} P_{is}^{(k)} =$ سطر iام ماتریس $P^{(k)}$ × ستون jام ماتریس $P^{(k')}$

$$\Rightarrow P^{(k+k')} = P^{(k)} \times P^{(k')}$$

اثبات ب) $P^{(m)} = P^{(1+m-1)} = P^{(1)} P^{(m-1)} = P \times P \times P^{(m-2)} = P^2 \times P \times P^{(m-3)} = \dots = P^m$

مثال) زنجیره‌ی مارکوف را در نظر بگیرید که ماتریس گذار آن به شکل زیر باشد. حالت سیستم را ۱، ۲، ۳ در نظر بگیرید.

$$P = \begin{array}{c|ccc} & 1 & 2 & 3 \\ \hline 1 & \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & 0 \\ 2 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 3 & 0 & \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \end{array}$$

$P_{13}^{3} = ?$

$$P_{13}^{3} = P(X_3=3 \mid X_0=1) = \sum_{j=1}^{s} P(X_3=3 , X_1=j \mid X_0=1)$$

$$= \sum_{j=1}^{3} P_{1j}\, P_{j3}^{(2)} = \frac{3}{4} \times \frac{1}{16} + \frac{1}{4} \times \frac{3}{16} + 0 \times \frac{4}{16} = \frac{3}{32}$$

$$P_{j3}^{(2)} = \begin{bmatrix} P_{13}^{(2)} \\ P_{23}^{(2)} \\ P_{33}^{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{16} \\ \frac{3}{16} \\ \frac{4}{16} \end{bmatrix}$$

$P_{13}^{3} = P_{13}^{(1+2)} =$ سطر اول ماتریس P × ستون سوم ماتریس P^2

محاسبه‌ی توزیع احتمال حالت سیستم در هر مرحله :

در این قسمت هدف محاسبه‌ی $P(X_n=j)$ که با $\pi_j^{(n)}$ نمایش داده می‌شود، برای حالات مختلف j و مراحل n است.

فرض کنید توزیع احتمال حالت سیستم در مرحله‌ی شروع (مرحله صفر) که همان $P(X_0=i)$ است، داده شده باشد. در این صورت داریم :

$$\underset{1\times M}{\pi^{(0)}} = (\overset{P(X_0=1)}{\pi_1^{(0)}}, \overset{P(X_0=2)}{\pi_2^{(0)}}, \ldots, \overset{P(X_0=M)}{\pi_M^{(0)}}) \qquad (\text{بردار } 1\times M)$$

$$\pi_j^{(n)} = P(X_n=j) = \sum_{i=1}^{M} P(X_n=j, X_0=i) = \sum_{i=1}^{M} P(X_n=j \mid X_0=i) P(X_0=i)$$

$$= \sum_{i=1}^{M} \pi_i^{(0)} P_{ij}^{(n)} = (\pi_1^{(0)} \ \pi_2^{(0)} \ \ldots \ \pi_M^{(0)}) \begin{pmatrix} P_{1j}^{(n)} \\ P_{2j}^{(n)} \\ \vdots \\ P_{Mj}^{(n)} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \underset{1\times M}{\pi^{(n)}} = (\pi_1^{(n)} \ \pi_2^{(n)} \ \ldots \ P_M^{(n)}) = \underset{1\times M}{\pi^{(0)}} \times \underset{M\times M}{P^{(n)}}$$

محاسبه‌ی توزیع احتمال حالت سیستم در چند مرحله‌ی مختلف :

$$P(X_{n_k}=i_k, X_{n_{k-1}}=i_{k-1}, \ldots, X_{n_1}=i_1 \mid X_0=i)$$

$$= P(X_{n_1}=i_1 \mid X_0=i) \times P(X_{n_2}=i_2 \mid X_{n_1}=i_1) \times P(X_{n_3}=i_3 \mid X_{n_2}=i_2) \times \cdots \times P(X_{n_k}=i_k \mid X_{n_{k-1}}=i_{k-1})$$

$$= P_{i,i_1}^{(n_1)} \times P_{i_1,i_2}^{(n_2-n_1)} \times P_{i_2,i_3}^{(n_3-n_2)} \times \cdots \times P_{i_{k-1},i_k}^{(n_k-n_{k-1})}$$

طبقه‌بندی حالات سیستم در زنجیره‌های مارکوف :

تعریف : الف) حالت i را به حالت j دسترس پذیر گوییم (یا به عبارتی $i \to j$) هرگاه احتمالاً سیستم بتواند از i به j منتقل شود . یا به صورت ریاضی :

$$\exists n \in N \ \text{s.t} \ P_{ij}^{(n)} > 0$$

ب) حالات i و j را مرتبط به هم گوییم و با $i \leftrightarrow j$ نمایش می‌دهیم ، هرگاه هر دو حالت به هم دسترس پذیر باشند . ($i \to j$, $j \to i$)

*مثال) زنجیره‌ی مارکوف با ماتریس گذاری به شرح زیر را در نظر بگیرید . حالات سیستم را ۱، ۲، ۳ بنامیم . دسترس پذیری و مرتبط بودن حالات را در این ماتریس بررسی کنید .

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0.5 & 0 & 0.5 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad P = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0.3 & 0.7 & 0 & 0 \\ 0.2 & 0.2 & 0.3 & 0.3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

دسترس پذیری : +

$$\begin{array}{c|ccc} & 1 & 2 & 3 \\ \hline 1 & + & + & + \\ 2 & + & + & + \\ 3 & + & + & + \end{array} \qquad \begin{bmatrix} + & + & - & - \\ + & + & - & - \\ + & + & + & + \\ - & - & - & + \end{bmatrix}$$

تعریف : الف) مجموعه‌ای از حالات که با هم مرتبط باشند ، تشکیل یک کلاس می‌دهند .

الف) $C_1 = C_2 = C_3 = \{1, 2, 3\}$ $\qquad$ C_i : کلاس حالت iام

ب) $C_1 = C_2 = \{1, 2\}$ $\qquad$ $C_3 = \{3\}$ $\qquad$ $C_4 = \{4\}$

ب) اگر در یک زنجیره‌ی مارکوف همه‌ی حالات با هم مرتبط باشند (یا به عبارتی در این زنجیره یک کلاس بیشتر وجود نداشته باشد) در این صورت زنجیره‌ی موردنظر از نوع زنجیره‌ی مارکوف یکپارچه است .

ج) مجموعه‌ای از حالات را بسته گوییم ، هرگاه امکان دسترسی از هیچ یک از حالات داخل این مجموعه به هیچ یک از حالات خارج از این مجموعه وجود نداشته باشد
یا به عبارتی برای هر i داخل این مجموعه و برای هر j خارج از این مجموعه $P_{ij}=0$ باشد.

مثال قبل (حالت ب)

$C_1=C_2=\{1,2\}$ بسته

$C_3=\{3\}$ زیرا از حالت ۳ به همه‌ی حالات می‌توان رفت ؛ بسته نیست

$C_4=\{4\}$ بسته .

د) اگر یک مجموعه (کلاس) بسته تنها شامل یک عضو (یک حالت) باشد ، در این صورت این حالت ، یک حالت جاذب است . (اگر وارد این حالت شویم ، دیگر نمی‌توان از آن خارج شد و جذب آن می‌شویم) حالت ۴ در مثال قبل قسمت (ب)

اگر حالت i یک حالت جاذب باشد ، داریم : $P_{ii}=1$

قضیه : اگر $i \leftrightarrow j$ و $j \leftrightarrow k$ ، در این صورت $i \leftrightarrow k$

اثبات : با توجه به این که $j \leftrightarrow i$ پس وجود دارد n و n' به قسمی که $P_{ij}^{(n)}>0$ و $P_{ji}^{(n')}>0$ و
چون $j \leftrightarrow k$ پس وجود دارد m و m' به قسمی که $P_{jk}^{(m)}>0$ و $P_{kj}^{(m')}>0$

برای حالات i و k داریم :

$$P_{ik}^{(n+m)} = \sum_{s=1}^{M} P_{is}^{(n)} P_{sk}^{(m)} = P_{ij}^{(n)} P_{jk}^{(m)} + \underbrace{\sum_{\substack{s=1\\ s\neq j}}^{M} P_{is}^{(n)} P_{sk}^{(m)}}_{\geqslant 0} \geqslant P_{ij}^{(n)} P_{jk}^{(m)} > 0$$

$$\rightarrow P_{ik}^{(n+m)} > 0 \rightarrow i \rightarrow k$$

به همین شکل می‌توان نشان داد $P_{ki}^{(m'+n')} > 0$ و $k \rightarrow i$ و لذا $i \leftrightarrow k$.

تعریف: فرض کنیم در یکی از مراحل در حالت i قرار داریم. احتمال این که در مراحل بعد مجدداً به این حالت برگردیم را با f_i نمایش می‌دهیم. در صورتیکه $f_i = 1$ باشد، این حالت را برگشت‌پذیر و اگر $f_i < 1$ باشد این حالت را گذرا گوئیم.

در مثال قبل، قسمت ب: احتمال رفتن از حالت ۱ و برگشتن به این حالت بعد از n مرحله برابر است با $\lim_{n\to\infty} (0.5)(0.7)^{n-1} = 0$. پس احتمال رفتن از حالت ۱ و برگشتن مجدد به این حالت برابر با ۱=۰-۱ خواهد بود. پس حالت ۱، برگشت‌پذیر است.

۰٫۵ : احتمال رفتن از حالت ۱ به ۲
۰٫۷ : احتمال ماندن در حالت ۲

احتمال برگشت به ۱ $= 0.5 + \sum_{n=2}^{\infty} 0.5\,(0.7)^{n-2} \times 0.3 = 0.5 + 0.15 \sum_{n=0}^{\infty} (0.7)^n = 0.5 + 0.15 \frac{1}{1-0.7} = 1$

میانگین تعداد دفعات بازگشت به یک حالت:

فرض کنیم در یکی از مراحل سیستم در وضعیت (حالت) i قرار داشته باشد، اگر حالت i، حالتی بازگشت‌پذیر باشد، در این صورت حتماً در یکی از مراحل دیگر به حالت i برمی‌گردیم. دوباره با شروع از این حالت، در حالات بعد حتماً به حالت i برخواهیم گشت و همین روند ادامه می‌یابد.

درنتیجه با شروع از حالت برگشت‌پذیر i در بی‌نهایت مرحله، بی‌نهایت بار به این حالت برخواهیم گشت.

اگر حالت i ، حالت گذرا باشد. در این صورت با شروع از حالت i ، احتمال این که دیگر به این حالت برنگردیم برابر $1-f_i$ خواهد بود. با شروع از این حالت احتمال این که تنها یکبار به این حالت برگردیم و دیگر به این حالت برنگردیم برابر $f_i(1-f_i)$ است.

با شروع از i احتمال این که n بار به این حالت برگردیم و بعد از آن دیگر به این حالت برنگردیم، برابر $f_i^n(1-f_i)$. لذا توزیع احتمال تعداد دفعات بازگشت به حالت گذرای i ، از توزیع هندسی تعداد شکست‌ها پیروی می‌کند. در نتیجه میانگین تعداد دفعات بازگشت به حالت گذرای i برابر $\frac{1}{1-f_i}-1$ $\left(\frac{f_i}{1-f_i}\right)$ خواهد بود.

مثال قبل قسمت ب) $f_3 = ۰٫۳$ میانگین تعداد دفعات بازگشت $= \frac{۰٫۳}{۱-۰٫۳} = \frac{۳}{۷}$

قضیه: در یک زنجیره‌ی مارکوف، اگر برای حالت i $\sum_{n=1}^{\infty} P_{ii}^{(n)}$ برابر ∞ باشد، حالت i برگشت‌پذیر است و اگر مقدار این سری کوچکتر از بی نهایت (متناهی) باشد، این حالت گذرا خواهد بود.

اثبات:

$$Y_n = \begin{cases} 1 & \text{در صورتیکه با شروع از حالت } i \text{، در } n \text{ مرحله بعد به حالت } i \text{ برگردیم} \\ 0 & \text{در غیر اینصورت} \end{cases}$$

$Y = \sum_{j=1}^{n} Y_j$ = (تعداد دفعات بازگشت به حالت i با شروع از این حالت بعد از n مرحله)

$P(Y_n=1) = P(X_n=i \mid X_0=i) = P_{ii}^{(n)}$ (Y_n دارای توزیع برنولی)

$E(Y_n) = P_{ii}^{(n)}$ $\lim_{n\to\infty} E\left(\sum_{j=1}^{n} Y_j\right) = \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} E(Y_j) = \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} P_{ii}^{(j)}$

$= \sum_{n=1}^{\infty} P_{ii}^{(j)}$ میانگین تعداد دفعات بازگشت به حالت i (با شروع از این حالت) طی بی نهایت مرحله.

قضیه: در یک زنجیره‌ی مارکوف با تعداد متناهی حالت، تمام حالات نمی‌توانند گذرا باشند.

برهان: فرض کنید در یک زنجیره‌ی مارکوف با تعداد متناهی حالت (M حالت) همه حالات گذرا باشند. فرض کنیم وضعیت سیستم در مرحله‌ی شروع، حالت یک باشد. با توجه به این که همه‌ی حالات گذرا هستند، سیستم پس از گذشت تعدادی مرحله مثلا t_1، دیگر به حالت ۱ بر نخواهد گشت و به همین شکل بعد از تعداد متناهی مرحله (مثلا t_2) دیگر به حالت ۲ بر نخواهد گشت و ... و به همین قسم بعد از گذشت تعداد متناهی مرحله (مثلا t_M مرحله) دیگر به حالت M بر نخواهد گشت. پس سیستم پس از گذشت تعداد $(t_1+t_2+\dots+t_M)$ مرحله، به هیچ حالتی بر نخواهد گشت.

پس در یک زنجیره‌ی مارکوف با تعداد متناهی حالت، حداقل یکی از حالات سیستم باید برگشت پذیر باشد.

قضیه: اگر حالت j و i با هم مرتبط باشند ($j \leftrightarrow i$) و حالت i حالتی برگشت پذیر باشد. در این صورت حالت j نیز برگشت پذیر خواهد بود.

برهان: با توجه به این که $j \leftrightarrow i$، در نتیجه وجود دارد m و m' به طوری که $P_{ji}^{(m)} > 0, P_{ij}^{(m')} > 0$.

$$n = m + (n-m-m') + m'$$

$$n \in N \qquad n \geq m+m' \qquad P_{jj}^{(n)} = \sum_k \sum_s \underbrace{P_{js}^{(m)} P_{sk}^{(n-m-m')} P_{kj}^{(m')}}$$

یکی از حالات $s=k=i$

$$P_{jj}^{(n)} = \underbrace{\sum_k \sum_s P_{js}^{(m)} P_{sk}^{(n-m-m')} P_{kj}^{(m')}}_{-(k=s=i) \quad \geq 0} + P_{ji}^{(m)} P_{ii}^{(n-m-m')} P_{ij}^{(m')} \geq P_{ji}^{(m)} P_{ii}^{(n-m-m')} P_{ij}^{(m')}$$

$$\Rightarrow \sum_{n=m+m'}^{\infty} P_{jj}^{(n)} \geq \sum_{n=m+m'}^{\infty} P_{ji}^{(m)} P_{ii}^{(n-m-m')} P_{ij}^{(m')} = P_{ji}^{(m)} P_{ij}^{(m')} \underbrace{\sum_{n=m+m'}^{\infty} P_{ii}^{(n-m-m')}}_{=\infty}$$

i برگشت پذیر پس

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} P_{jj}^{(n)} \geq \sum_{n=m+m'}^{\infty} P_{jj}^{(n)} \geq \infty$$

$\Rightarrow$ حالت j حالتی برگشت پذیر است.

نتیجه: اگر حالات i و j با هم مرتبط باشند ($j \leftrightarrow i$) و حالت i حالتی گذرا باشد در این صورت حالت j هم گذرا خواهد بود.
(اگر j برگشت پذیر باشد در اینصورت طبق قضیه‌ی قبل i هم باید برگشت پذیر باشد که خلاف فرض است)

نتیجه: در یک زنجیره‌ی مارکوف یکپارچه با تعداد متناهی حالت، تمام حالات برگشت پذیر خواهند بود.

تعریف: فرض کنید حالت سیستم در مرحله‌ی شروع i باشد. در اینصورت میانگین تعداد مراحل لازم برای بازگشت به این حالت را با μ_i نمایش می‌دهیم که به μ_i میانگین زمان بازگشت به حالت i نیز می‌گوییم.
حالت برگشت پذیر i را در نظر بگیرید. اگر $\mu_i < \infty$ باشد در این صورت حالت i را برگشت پذیر مثبت و اگر $\mu_i = \infty$ باشد، حالت i را برگشت پذیر تهی گوییم.

قضیه: اگر حالات i و j با هم مرتبط باشند و حالت i، حالتی برگشت پذیر مثبت باشد، حالت j هم حالتی برگشت پذیر مثبت خواهد بود.

تعریف: حالت i را یک حالت دوره‌ای با دوره‌ی d گوییم، هرگاه با شروع از حالت i تنها در مراحل $n = d, 2d, 3d, \dots$ بتوان به حالت i برگشت. یا به عبارتی به ازای هر $n \neq kd$، $k \in N$
$P_{ii}^{(n)} = 0$ باشد (احتمال بازگشت به حالت i با $n \neq kd$ مرحله وجود نداشته باشد.

در صورتیکه حالت i، دوره‌ی منظم بازگشت نداشته باشد یا دوره‌ای نباشد $d=1$ است.

احتمالات حدی در زنجیره‌های مارکوف :

یکی از خواص زنجیره‌های مارکوف این است که احتمال بازگشت به هر حالت در دراز مدت مقداری ثابتی است و بستگی به وضعیت شروع ندارد.

در حالت کلی $P_{ik}^{(n)}$ و $P_{jk}^{(n)}$ دو احتمال متفاوت است که مقدار آن بستگی به وضعیت شروع دارد اما با افزایش n ($n \to \infty$) مقدار $P_{ik}^{(n)}$ و $P_{jk}^{(n)}$ به یک مقدار ثابت میل می‌کند که مستقل از وضعیت سیستم در لحظه آغازین می‌باشد و آن را با π_k نمایش می‌دهند.

$$\forall\, i, j \qquad \lim_{n\to\infty} P_{ik}^{(n)} = \lim_{n\to\infty} P_{jk}^{(n)} = \pi^{k} = \lim_{n\to\infty} P(X_n = k) = \lim_{n\to\infty} \pi_k^{(n)}$$

مثال) یک زنجیره‌ی مارکوف را در نظر بگیرید که در آن ماتریس گذار سیستم به صورت $P=\begin{bmatrix} ۰/۲ & ۰/۸ \\ ۰/۶ & ۰/۴ \end{bmatrix}$ باشد.
ماتریس گذار مراحل ۲، ۴ و ۸ به صورت زیر خواهد بود:

$$P^{(2)} = P.P = \begin{bmatrix} ۰/۵۲ & ۰/۴۸ \\ ۰/۳۶ & ۰/۶۴ \end{bmatrix}$$

$$P^{(4)} = P^{(2)}.P^{(2)} = \begin{bmatrix} \overset{P_{11}^{(4)}}{۰/۴۴۳۲} & ۰/۵۵۶۸ \\ \overset{P_{21}^{(4)}}{۰/۴۱۷۶} & ۰/۵۸۲۴ \end{bmatrix}$$

احتمالات به هم نزدیک می‌شوند

$$P^{(8)} = \begin{bmatrix} ۰/۴۲۸۹ & ۰/۵۷۱۱ \\ ۰/۴۲۸۲ & ۰/۵۷۱۷ \end{bmatrix}$$

قضیه : یک زنجیره‌ی مارکوف یکپارچه‌ی ناوره‌ای را در نظر بگیرید.

الف) در این زنجیره‌ی مارکوف احتمالات حدی برای همه‌ی حالات وجود دارد. برای هر حالت سیستم مانند حالت j، احتمال اینکه وضعیت سیستم در دراز مدت حالت j باشد ثابت و مستقل از وضعیت اولیه آن است. (π_j)

ب) برای همه‌ی حالات گذرا از سیستم و برگشت پذیر لحظی مقدار π_j برابر صفر خواهد بود.

ج) برای همه‌ی حالات برگشت پذیر مثبت مقدار π_j، مثبت خواهد بود.

نکته : در یک زنجیره‌ی مارکوف یکپارچه‌ی ناوره‌ای که در آن حالات سیستم، برگشت پذیر مثبت‌اند.

مقدار احتمالات حدی از معادلات زیر بدست می‌آید:

$$\pi_{1\times M} = (\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_M) \qquad \pi_{1\times M} = \pi_{1\times M} \times \underline{P_{M\times M}} \rightarrow$$ ماتریس گذار

$$\underbrace{\pi_j = \sum_{i=1}^{M} \pi_i P_{ij}} \qquad \underbrace{\sum_{j=1}^{M} \pi_j = 1}$$ (M معادله ، M مجهول)

M معادله که یکی از آن‌ها زائد است و برحسب مابقی بدست می‌آید : M-۱ معادله

یک معادله

مثال قبل :

$$P = \begin{bmatrix} 0.2 & 0.8 \\ 0.9 & 0.4 \end{bmatrix} \qquad (\pi_1 \quad \pi_2) = (\pi_1 \quad \pi_2)\begin{pmatrix} 0.2 & 0.8 \\ 0.6 & 0.4 \end{pmatrix}$$

$$\pi_1 = 0.2\pi_1 + 0.6\pi_2 \qquad 0.8\pi_1 = 0.6\pi_2 \rightsquigarrow \boxed{\pi_1 = \frac{3}{4}\pi_2}$$

$$\pi_2 = 0.8\pi_1 + 0.4\pi_2 \Rightarrow 0.6\pi_2 = 0.8\pi_1$$ (معادله زائد)

$$\boxed{\pi_1 + \pi_2 = 1} \Rightarrow \frac{7}{4}\pi_2 = 1 \Rightarrow \pi_2 = \frac{4}{7} \ , \ \pi_1 = \frac{3}{7}$$

احتمالات حدی در زنجیره‌ی مارکوف یکپارچه با دوره‌ی d $(d>1)$:

قضیه : یک زنجیره‌ی مارکوف یکپارچه با دوره‌ی d را در نظر بگیرید که در آن حالات سیستم از نوع برگشت پذیر مثبت اند . در این صورت احتمالات حدی در این زنجیره‌ی مارکوف از روابط زیر بدست می‌آیند :

$$\pi_{1\times M} = \pi_{1\times M} \times P_{M\times M} \qquad \sum_{j=1}^{M} \pi_j = d$$

مثال) زنجیره‌ی مارکوف را در نظر بگیرید که ماتریس گذار آن بصورت زیر است.

همه‌ی حالات دارای دوره‌ی $d=3$ هستند و زنجیره‌ی مارکوف یکپارچه است.

$$P = \begin{array}{c|cccc} & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline 1 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array} \qquad P^{(2)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$P^{(3)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{bmatrix} \qquad P^{(4)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = P \qquad P^{(5)} = P^{(4)} \times P^{(1)} = P^{(2)}$$

$$P^{(6)} = P^{(4)} \times P^{(2)} = P^{(3)} \qquad P^{(3m)} = P^{(3)} , P^{(3m+1)} = P^{(1)} , P^{(3m+2)} = P^{(2)}$$

$$(\pi_1 \ \ \pi_2 \ \ \pi_3 \ \ \pi_4) = (\pi_1 \ \ \pi_2 \ \ \pi_3 \ \ \pi_4) \, P$$

$$\begin{cases} \pi_1 = \pi_2 \\ \pi_2 = \pi_3 + \pi_4 \\ \pi_3 = \frac{1}{4}\pi_1 \\ \pi_4 = \frac{3}{4}\pi_1 \ (\text{معادله زائد}) \end{cases} \qquad \begin{array}{l} \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 + \pi_4 = 3 \\ \pi_1 + \pi_1 + \frac{1}{4}\pi_1 + \frac{3}{4}\pi_1 = 3\pi_1 = 3 \Rightarrow \pi_1 = 1 \\ \pi_2 = 1 , \ \pi_3 = \frac{1}{4} , \ \pi_4 = \frac{3}{4} \end{array}$$

قضیه: در یک زنجیره‌ی مارکوف یکپارچه، رابطه‌ی مقابل همواره برقرار است: $\pi_j = \frac{d}{M_j}$

T_j: نشان دهنده‌ی تعداد مراحلی که با شروع از j، دوباره به j برگردیم، $M_j = \sum_{n=1}^{\infty} n P(T_j = n)$

مثال: در مثال قبل مقدار M_1، M_2، M_3 و M_4 را با استفاده از دو فرمول محاسبه و باهم مقایسه کنید.

$M_1 = \frac{3}{1} = 3$, $M_2 = 3$, $M_3 = \frac{3}{1/4} = 12$, $M_4 = \frac{3}{3/4} = 4$

$P_{11}^{(3K)}$ $\quad P_{11}^{(3K+1)}$ $\quad P_{11}^{(3K+2)}$

$P(T_1 = 3) = 1$, $P(T_1 = 1) = P(T_1 = 2) = 0 \Rightarrow M_1 = 3$ $\quad T_1 = 1, 2, 3$ بعد از سه گام دقیقاً به حالت اول برمی‌گردیم

$P(T_2 = 1) = 0$ $\quad P(T_2 = 2) = 0$ $\quad P(T_2 = 3) = 1 \Rightarrow M_2 = 3$ با شروع از ۲ بعد از سه گام دقیقاً به ۲ برمی‌گردیم

$P(T_3 = 1) = 0$, $P(T_3 = 2) = 0$ $\quad P(T_3 = 3) = \frac{1}{4}$

$P(T_3 = 6) = \frac{3}{4} \times \frac{1}{4}$ $\quad P(T_3 = 3m) = (\frac{3}{4})^{m-1} \times \frac{1}{4}$ با شروع از ۳ فقط گام‌های 3m به ۳ برمی‌گردیم:

$P(T_3 = 3m+1) = P(T_3 = 3m+2) = 0 \Rightarrow M_3 = 12$

$P(T_3 = 3m)$: m دوره‌ی ۳ گامی داریم. در m-1 مرحله به حالت ۳ برنمی‌گردیم و در مرحله‌ی m به حالت ۳ برمی‌گردیم $= (\frac{3}{4})^{m-1} \frac{1}{4}$

$P(T_3=2)$ دو مرحله‌ی ۳ گام داریم که در مرحله‌ی اول به حالت ۳ وارد شده‌ایم و در مرحله‌ی دوم به حالت ۳ وارد شده‌ایم $= \frac{3}{4} \times \frac{1}{4}$

تفسیر: اگر زنجیره‌ی مارکوف از نوع یکپارچه نباشد، هر کلاس را به عنوان یک زنجیره‌ی مارکوف یکپارچه درنظر می‌گیریم و احتمالات حدی را برای هر کلاس بصورت جداگانه حساب می‌کنیم.

مثال: $C_1 = C_2 = \{1,2\}$ یک زنجیره‌ی مارکوف یکپارچه، برگشت‌پذیر مثبت

$$P=\begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0.3 & 0.7 & 0 & 0 \\ 0.2 & 0.2 & 0.3 & 0.3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$C_3 = \{3\} \rightarrow$ حالت ۳ گذراست

$C_4 = \{4\} \rightarrow$ برگشت‌پذیر مثبت

$C_1 = C_2 = \{1,2\}$ $\quad P_{C_1} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 \\ 0.3 & 0.7 \end{bmatrix}$ $\quad \pi_1 = 0.5\pi_1 + 0.3\pi_2 \rightarrow \pi_1 = \frac{3}{5}\pi_2$

$\pi_1 + \pi_2 = 1 \Rightarrow \pi_2 = \frac{5}{8}, \pi_1 = \frac{3}{8}$

$C_3 = \{3\} \quad \pi_3 = 0$

$C_4 = \{4\} \quad \pi_4 = 1$

زنجیره‌های مارکوف زمان پیوسته:

فرآیند مارکوف $\{X(t) \mid t \geq 0\}$ را در نظر بگیرید. در صورتیکه وضعیت (حالت) سیستم از نوع گسسته و پارامتر t از نوع پیوسته باشد. در این صورت فرآیند مارکوف را زنجیره‌ی مارکوف زمان پیوسته یا زنجیره‌ی مارکوف پیوسته گوئیم.

از لحاظ ریاضی فرآیند $\{X(t) \mid t \geq 0\}$ را زنجیره‌ی مارکوف پیوسته گوئیم، هرگاه به ازای هر مقدار t و s و هر حالت i و j داشته باشیم:

$$P(X(t+s)=j \mid X(s)=i \text{ و } X(u)=x(u)\ u<s) = P(X(t+s)=j \mid X(s)=i)$$

زنجیره‌ی مارکوف پیوسته را همگن گوئیم ، هرگاه رابطه‌ی فوق مستقل از S باشد یا به عبارتی داشته باشیم :

$$P_{ij}(t) = P(X(t+s)=j \mid X(s)=i ,\ X(u)=x(u) \ .\ u<s)$$

$$= P(X(t+s)=j \mid X(s)=i) = P(X(t)=j \mid X(0)=i)$$

$P_{ij}(t)$: احتمال تغییر وضعیت سیستم از حالت i به حالت j ، طی t واحد زمانی

مثال) فرآیند پواسون از نوع زنجیره‌ی مارکوف پیوسته‌ی همگن می‌باشد:

$$P(N(t+s)=j \mid N(s)=i) = P(N(t+s)-N(s)=j-i) \underset{j\geq i}{=} e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^{j-i}}{(j-i)!}$$

توزیع احتمال مدت زمان توقف در یک حالت :

فرض کنید در یک لحظه از زمان ، مانند زمان صفر ، سیستم وارد حالت i شود . سپس مدت زمانی را سیستم در این حالت توقف می‌کند و سپس از این حالت خارج می‌شود. اگر مدت زمان توقف سیستم در حالت i را با t_i نمایش دهیم . در این صورت T_i از توزیع نمایی با پارامتر (۰) $\frac{1}{T_i}$ برخوردار خواهد بود.

اگر ثابت کنیم $P(T_i>t+s \mid T_i>s)=P(T_i>t)$ ، معلوم می‌شود که T_i دارای توزیع نمایی است. زیرا تنها توزیع پیوسته‌ای که از خاصیت فقدان حافظه برخوردار می‌باشد ، توزیع نمایی است.

می‌دانیم سیستم تا زمان S در حالت i متوقف بوده ، احتمال این که t واحد زمانی دیگر هم در این حالت متوقف شود برابر است با :

$$P(T_i>t+s \mid T_i>s) = P(X(t+s)=i ,\ X(v)=i \quad s<v<t+s \mid X(s)=i ,\ X(u)=i , 0<u<s)$$

$$\overset{\text{فرآیند مارکوف}}{=} P(X(t+s)=i \ ,\ X(v)=i \quad s<v<s+t \mid X(s)=i) \underset{\text{بودن}}{\overset{\text{همگن}}{=}} P(X(t)=i \ .\ X(v)=i \quad 0<v<t$$

$$\mid X(0)=i) = P(T_i>t)$$

پس T_i از خاصیت فقدان حافظه بودن برخوردار است و T_i از توزیع نمایی برخوردار است.

ماتریس گذار و ماتریس آهنگ گذار در زنجیره‌های مارکوف پیوسته :

ماتریس $P(t)_{M\times M}$ (M تعداد حالات سیستم) را ماتریس گذار سیستم طی t واحد زمانی تعریف می‌کنیم هرگاه برای هر سطر i و ستون j از این ماتریس $P_{ij}(t)$ برابر $P_{ij}(t)=P(X(t)=j\mid X(0)=0)$ باشد. (احتمال این که وضعیت سیستم در زمان t ، j باشد به شرط آن که می‌دانیم حالت سیستم در زمان شروع i بوده) در ماتریس $P(t)$ ، مجموع درایه‌های هر سطر باید برابر یک باشد.

در حالت خاص اگر $t=0$ باشد $\begin{cases} P_{ii}(0)=1 \\ P_{ij}(0)=0 & j\neq i \end{cases}$ پس $P(0)_{M\times M} = I_{M\times M}$

ماتریس Q را ماتریس آهنگ گذار یک زنجیره‌ی مارکوف پیوسته گوئیم ، هرگاه عناصر این ماتریس به صورت زیر تعریف شده باشد :

$$q_{ij} = \lim_{t\to 0}\frac{P_{ij}(t)}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{P_{ij}(t)-P_{ij}(0)}{t-0} = \frac{dP_{ij}(t)}{dt}\Big|_{t=0} \qquad j\neq i \qquad q_{ij}\geqslant 0$$

آهنگ ماندن در حالت i $\quad q_{ii} = -\underbrace{\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{M} q_{ij}}_{\text{آهنگ خارج شدن از حالت i}} \qquad q_{ii}\leqslant 0 \rightarrow \sum_{j=1}^{M} q_{ij}=0$

مجموع عناصر هر سطر آهنگ گذار برابر صفر است.

$$q_{ii}(t) = \lim_{t\to 0}\frac{P_{ii}(t)-P_{ii}(0)}{t-0} = \lim_{t\to 0}\frac{P_{ii}(t)-1}{t} = -\lim_{t\to 0}\frac{\sum_{j=1}^{M}{}^{j\neq i} P_{ij}(t)}{t} = -\sum \lim_{t\to 0}\frac{P_{ij}(t)}{t}$$

$$= -\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{M} q_{ij}$$

q_{ij} آهنگ تغییر حالت از i به j

مثال) یک فرآیند پواسون با پارامتر λ را در نظر بگیرید . ماتریس گذار و ماتریس آهنگ گذار را برای آن بیابید .

$$P(t)=\left[\begin{array}{c|cccccc} & 0 & 1 & 2 & \cdots & n-1 & n\ \cdots \\ \hline 0 & e^{-\lambda t} & e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)}{1!} & e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^{2}}{2!} & \cdots & e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!} & \\ 1 & 0 & e^{-\lambda t} & e^{-\lambda t}\frac{\lambda t}{1!} & \cdots & & e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!}\ \cdots \\ 2 & 0 & 0 & e^{-\lambda t} & \cdots & & e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^{n-2}}{(n-2)!}\ \cdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & & \vdots \\ n & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & e^{-\lambda t}\ \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \end{array}\right]$$

$P_{0,0}(t)=P(X(t)=0 \mid X(0)=0)=$ صفر باشد $=e^{-\lambda t}$

$P_{0,1}(t)=P(X(t)=1 \mid X(0)=0)=$ احتمال وقوع یک پیشامد در بازه‌ی $(0,t)$ $=e^{-\lambda t}$

$P_{1,0}(t)=P(X(t)=0 \mid X(0)=1)=$ احتمال وقوع (-1) پیشامد در بازه‌ی $(0,t)$ $=0$

ماتریس آهنگ گذار:

$j\neq i,\ j>i$ $\quad Q_{ij}=\lim\limits_{t\to 0}\frac{P_{ij}(t)}{t}=\lim\limits_{t\to 0}\frac{e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^{j-i}}{(j-i)!}}{t}=\lim\limits_{t\to 0}\frac{\lambda^{(j-i)}\times t^{j-i-1}}{t}$

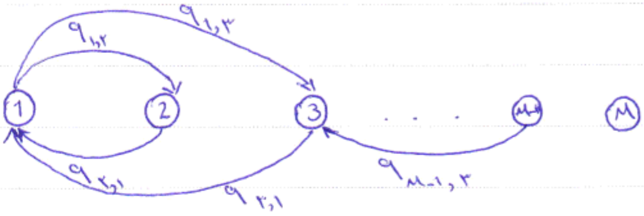
$$Q_{ij}=\begin{cases} 0 & j<i \quad (P_{ij}=0 \quad j<i) \\ \lambda & j-i=1 \Rightarrow j=i+1 \\ 0 & j-i-1>0 \Rightarrow j>i+1 \end{cases} \qquad Q_{ii}=-\sum_{j\neq i} Q_{ij}=-\lambda$$

بالای قطر اصلی : λ
قطر اصلی : $-\lambda$
ما بقی : 0

نمودار آهنگ :

برای نمایش ارتباط بین حالات سیستم در یک زنجیره‌ی مارکوف پیوسته از نمودار آهنگ استفاده می‌کنیم در این نمودار گره‌ها بیانگر حالات سیستم و شاخه‌های بین گره‌ها بیانگر آهنگ گذار بین دو حالت (دو گره) مورد نظر خواهد بود.

زنجیره‌ی مارکوف پیوسته با حالات ۱، ۲، ...، M را در نظر بگیرید. نمودار آهنگ آن به صورت زیر است:



مثال) نمودار آهنگ را برای فرآیند پواسون با پارامتر λ بدست آورید:

احتمالات حدی در زنجیره‌های مارکوف پیوسته :

به صورت مشابه زنجیره‌های مارکوف، می خواهیم توزیع احتمال هر حالت در دراز مدت $(t\to\infty)$ را به دست آوریم.

قضیه : اگر زنجیره‌ی مارکوف پیوسته از نوع یکپارچه باشد، در این صورت احتمالات حدی برای هر حالت که با π_j نمایش داده می‌شود وجود خواهد داشت و از رابطه‌ی مقابل بدست می‌آید :

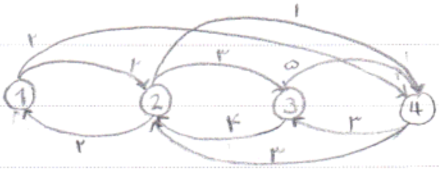
$$\pi_j = \lim_{t\to\infty} P_{ij}(t) \quad \forall i$$

در تعریف فوق اگر حالات از نوع بازگشت پذیر مثبت باشند، در این صورت سیستم را ارگودیک (Ergodic) گوئیم و احتمالات حدی از دستگاه معادلات زیر بدست می‌آید :

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{M} \pi_j q_{ji} = 0 \quad i=1,2,\dots,M \\ \sum_{j=1}^{M} \pi_j = 1 \end{cases} \rightarrow (\pi_1 \ \pi_2 \ \cdots \ \pi_M)Q = (0 \ 0 \ \cdots \ 0)_{1\times M}$$

مثال) یک زنجیره‌ی مارکوف پیوسته که از حالات ۱، ۲، ۳ و ۴ تشکیل شده و ماتریس آهنگ آن بصورت زیر است را در نظر بگیرید، نمودار آهنگ را برای این زنجیره‌ی مارکوف رسم کرده و احتمالات حدی آن را بیابید.

$$Q = \begin{array}{c|cccc} & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline 1 & -4 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & -6 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & 4 & -9 & 5 \\ 4 & 0 & 3 & 3 & -6 \end{array}$$



$\pi_2 = 2\pi_1$

$-4\pi_1 + 2\pi_2 = 0$

$2\pi_1 - 6\pi_2 + 4\pi_3 + 3\pi_4 = 0$

$3\pi_2 - 9\pi_3 + 2\pi_4 = 0$

$\pi_1 + \pi_2 + \pi_3 + \pi_4 = 1$

Subject :

Year .　　Month .　　Date .

استفاده از نمودار آهنگ برای محاسبه‌ی احتمالات حدی :

همان طور که تقسیم اندازنجیره‌ی مارکوف پیوسته از نوع یکپارچه باشد و حالات آن برگشت‌پذیر مثبت باشند ، داریم :

$$\sum_{j=1}^{M} \pi_j q_{ji} = 0 \qquad \pi_i q_{ii} + \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{M} \pi_j q_{ji} = 0$$

$$\pi_i q_{ii} = -\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{M} \pi_j q_{ji} \xrightarrow[q_{ii}=-\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}} q_{ij}]{M} -\pi_i \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{M} q_{ij} = -\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{M} \pi_j q_{ji}$$

$$\rightsquigarrow \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{M} \pi_i q_{ij} = \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{M} \pi_j q_{ji}$$ ← آهنگ خروج از حالت i در دراز مدت = آهنگ ورود به حالت i در دراز مدت

در مثال قبل : برای حالت ۱ : $۲\pi_{۱}+۲\pi_{۱}=۲\pi_{۲} \rightsquigarrow ۴\pi_{۱}=۲\pi_{۲}$

در مثال قبل : برای حالت ۲ : $۲\pi_{۲}+۳\pi_{۲}+\pi_{۲}=۲\pi_{۱}+۴\pi_{۳}+۳\pi_{۴}$

فصل پنجم : چارچوب کلی سیستم های صف :

• بیان ترسیمی یک سیستم صف بر اساس زمان :

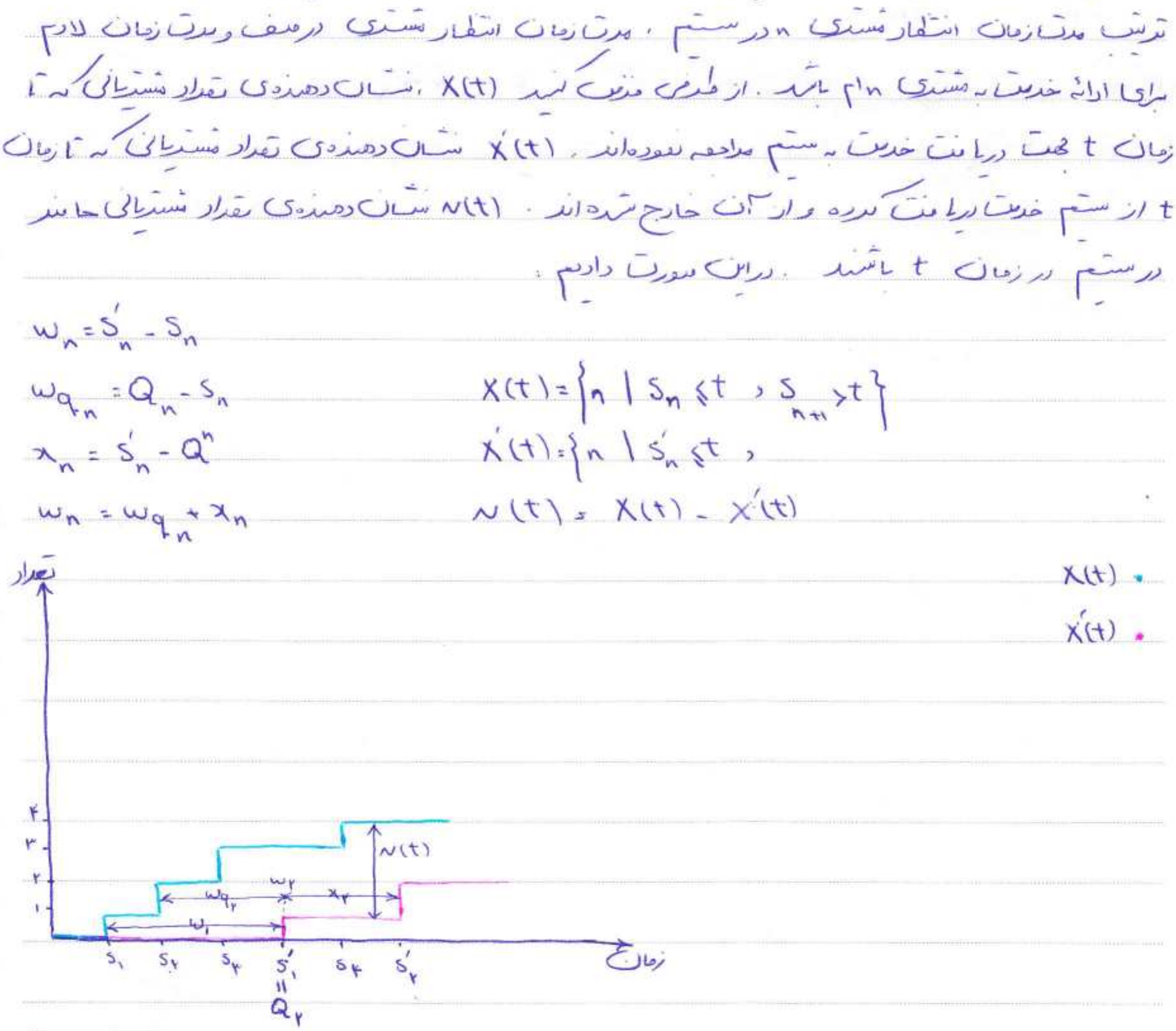
یک سیستم صف را در نظر بگیرید. فرض کنید در این سیستم مشتری ۱ در زمان S_1، مشتری ۲ در زمان S_2، ...، مشتری n در زمان S_n و ... وارد شوند در این سیستم T_i را برابر مدت زمان بین دو ورود مشتری (i-1) و iام در نظر بگیرید. در این سیستم یک مشتری، فرضاً مشتری nام، در زمان S_n وارد سیستم می‌شود. این مشتری پس از مدتی انتظار در صف، در زمان Q_n وارد مرحله‌ی دریافت خدمت می‌شود و سپس در زمان S'_n پس از دریافت خدمت از سیستم خارج می‌شود. فرض کنید در این سیستم w_n، wq_n و x_n به ترتیب مدت زمان انتظار مشتری n در سیستم، مدت زمان انتظار مشتری در صف و مدت زمان لازم برای ارائه خدمت به مشتری nام باشد. از طرفی فرض کنید $X(t)$ نشان دهنده‌ی تعداد مشتریانی که تا زمان t جهت دریافت خدمت به سیستم مراجعه نموده‌اند. $X'(t)$ نشان دهنده‌ی تعداد مشتریانی که تا زمان t از سیستم خدمت دریافت کرده و از آن خارج شده‌اند. $N(t)$ نشان دهنده‌ی تعداد مشتریانی حاضر در سیستم در زمان t باشند. در این صورت داریم:

$w_n = S'_n - S_n$

$wq_n = Q_n - S_n$ $\qquad X(t) = \{n \mid S_n \leq t , S_{n+1} > t\}$

$x_n = S'_n - Q^n$ $\qquad X'(t) = \{n \mid S'_n \leq t ,$

$w_n = wq_n + x_n$ $\qquad N(t) = X(t) - X'(t)$



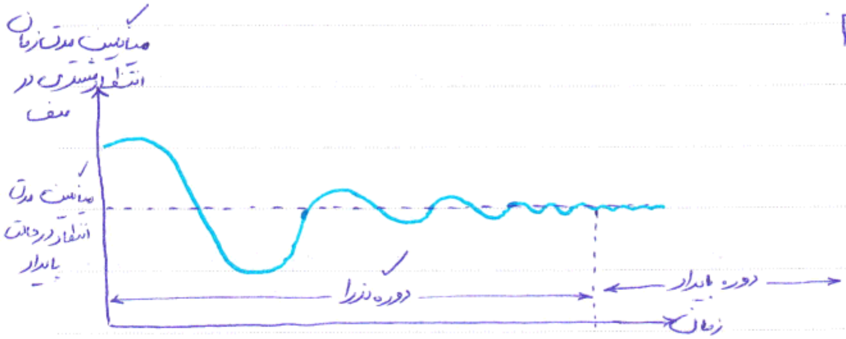
دوره‌ی گذرا و دوره‌ی پایدار در یک سیستم صف :

در یک سیستم صف، معیارهای ارزیابی آن (تعداد افراد حاضر در سیستم در هر لحظه، مدت زمان انتظار هر مشتری در سیستم، درصد بیکاری سیستم تا زمان t) ماهیت تصادفی دارند. به همین علت برای ارزیابی عملکرد سیستم از میانگین (امید ریاضی) این معیارها استفاده می‌شود.

از طرفی در بیشتر سیستم‌های صف، معیارهای ارزیابی سیستم در دراز مدت ثابت است. (از زمانی به بعد معیارهای ارزیابی به مقدار ثابتی میل می‌کنند) در نتیجه در یک سیستم صف، شامل دو دوره‌ی گذرا و پایدار خواهد بود.

دوره‌ی گذرا : بازه‌ای است که در آن وضعیت سیستم (معیارهای ارزیابی و عوامل مربوط به آن) تغییر می‌کند. دوره‌ی گذرا شامل زمان شروع سیستم است و در این دوره وضعیت سیستم وابسته به وضعیت شروع یا آغازین سیستم خواهد داشت.

دوره‌ی پایدار: دوره‌ای است که در آن وضعیت سیستم مستقل از زمان و شرایط آغازین سیستم است و معیارهای ارزیابی سیستم به یک مقدار واحد میل می‌کنند. برای ارزیابی یک سیستم صف به بررسی معیارهای ارزیابی در دوره‌ی پایدار می‌پردازیم.



ارتباط بین معیارهای ارزیابی سیستم صف :

یک سیستم صف که در آن λ آهنگ ورود مشتری به سیستم و μ آهنگ خدمت دهی هر خدمت دهنده به مشتریان است را در نظر بگیرید. در این سیستم فرض کنید L، L_Q، W، W_Q و π_n به صورت مقابل تعریف شده باشد :

L : میانگین تعداد افراد حاضر در سیستم در هر لحظه از زمان در دراز مدت

L_Q : ~ ~ ~ صف ~ ~ ~ ~

W : میانگین مدت زمان انتظار هر مشتری در سیستم در دراز مدت

W_Q : ~ ~ در صف ~ ~ ~ ~

احتمال اینکه در یک لحظه از زمان در درازمدت n نفر در سیستم حضور داشته باشند: π_n

با توجه به استدلال لیتل روابط زیر بین معیارهای ارزیابی سیستم وجود خواهد داشت :

$$L = \lambda w \qquad L_Q = \lambda w_Q \qquad w = w_Q + \frac{1}{\mu} \xrightarrow{\times \lambda} L = L_Q + \frac{\lambda}{\mu}$$

فرض کنید میانگین مدت زمان انتظار هر مشتری در سیستم تا زمان t برابر w_t باشد. در این صورت کل مدت زمانی که مشتریان تا لحظه‌ی t در سیستم سپری کرده اند برابر است با $w_t \times X(t)$.

از طرفی فرض کنید $E(N(t))$ نشان دهنده‌ی میانگین تعداد مشتریان حاضر در سیستم در زمان t باشد. طبق این منطق کل مدت زمانی که مشتریان تا لحظه‌ی t در سیستم سپری کرده اند تقریباً برابر است با $E(N(t)) \times t$

در نتیجه داریم :

$$w_t \times X(t) = E(N(t)) \times t \qquad E(N(t)) = \frac{X(t)}{t} \times w_t$$

$$\lim_{t \to \infty} E(N(t)) = \lim_{t \to \infty} \frac{X(t)}{t} \times w_t \Rightarrow \boxed{L = \lambda w}$$

$\lim_{t \to \infty} E(N(t))$ میانگین تعداد افراد حاضر در سیستم در هر لحظه از زمان در درازمدت.

$$L = \sum_{n=0}^{\infty} n \pi_n$$

فرض کنید یک سیستم صف شامل m خدمت دهنده باشد، در این صورت خواهیم داشت : $L_Q = \sum_{n=m}^{\infty} (n-m) \pi_n$

$n < m \Rightarrow$ تعداد افراد حاضر در صف $= 0$

$n \geq m \Rightarrow$ تعداد افراد حاضر در صف $= n-m$

فصل ششم: مدل‌های نمائی در سیستم‌های صف

مدل‌های نمائی در سیستم‌های صف، مدل‌هایی هستند که در آن‌ها دو شاخص زیر از توزیع نمائی پیروی کنند:

۱- توزیع مدت بین دو ورود متوالی مشتریان

۲- توزیع مدت خدمت دهی

همان طور که در فصل ۱ ذکر شده، هر مدل صف را به صورت A/B/m/K/C/Z نمایش می‌دهیم
پس مدل‌های نمائی در صف با نماد M/M/m/K/C/Z نمایش داده خواهند شد
به مدل‌های نمائی صف، فرآیند تولد و مرگ نیز گفته می‌شود.

فرآیند تولد و مرگ:

یک سیستم جمعیتی را در نظر بگیرید که در هر لحظه امکان افزایش (تولد) و امکان کاهش (مرگ) در آن وجود داشته باشد. برای مثال تعداد مشتریان در یک سیستم صف را می‌توان مشابه جمعیت فوق ذکر کرد.
در این سیستم با ورود هر مشتری جدید، یک تولد و با خروج یک مشتری (اتمام خدمت به یک مشتری) یک مرگ صورت می‌گیرد. حال اگر در این سیستم دو فرض زیر برقرار باشد این سیستم یک فرآیند تولد و مرگ گوئیم:

فرض (I): فرض کنیم در یک لحظه از زمان n مشتری در سیستم حضور داشته باشد. در این صورت مدت زمان لازم تا ورود مشتری بعدی از توزیع نمائی با پارامتر λ_n برخوردار باشد. یعنی احتمال ورود یک مشتری در مدت زمان کوتاه (Δt) برابر $\lambda_n(\Delta t)+O(\Delta t)$ و احتمال ورود بیش از یک مشتری برابر $O(\Delta t)$ است.

λ معمولاً مثبت است.

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{O(\Delta t)}{\Delta t}=0$$

λ_n ممکن است به جمعیت مشتریان حاضر در سیستم بستگی داشته باشد. اما مستقل از زمان باشد.

فرض (II): فرض کنیم در یک لحظه از زمان n مشتری در سیستم باشد. در این صورت مدت زمان لازم تا خروج اولین مشتری از توزیع نمائی با پارامتر μ_n برخوردار باشد. μ_n نیز ممکن است به جمعیت حاضر در سیستم وابسته باشد اما به زمان وابسته نیست.

$\mu_0=0$

تعداد مرگ‌ها از فرآیند پواسون پیروی می‌کند.

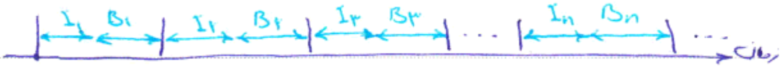
در فرض I تعداد تولدها از فرآیند پواسون پیروی می‌کند

چرخه‌ی اشتغال :

هر سیستم صف، مدتی بیکار می‌ماند، که این دوره از خروج آخرین مشتری تا ورود اولین مشتری بعدی ادامه می‌یابد؛ به این دوره، دوره‌ی بیکاری گوئیم. بلافاصله دوره‌ی اشتغال سیستم شروع می‌شود و تا خروج آخرین مشتری ادامه می‌یابد و این روند همین طور ادامه می‌یابد. اگر اولین دوره‌ی بیکاری با I_1 دومین دوره‌ی بیکاری با I_2، ... و n امین دوره‌ی بیکاری با I_n و اولین دوره‌ی اشتغال با B_1، دومین دوره‌ی اشتغال با B_2، ...، n امین دوره‌ی اشتغال با B_n نمایش داده شود، به مجموع دوره‌ی بیکاری و دوره‌ی اشتغال اول، چرخه اشتغال یک (I_1+B_1)، ... و به مجموع دوره‌ی بیکاری و اشتغال n، چرخه‌ی اشتغال n گوئیم.

همان طور که قبلا گفتیم یکی از معیارهای ارزیابی سیستم، درصد اشتغال سیستم است. اگر احتمال اشتغال سیستم با P_b نمایش داده شود، داریم :

$$\frac{B_1+B_2+\dots+B_n}{(I_1+I_2+\dots+I_n)+(B_1+B_2+\dots+B_n)}$$



$$P_0 = \lim_{n\to\infty} \frac{I_1+I_2+\dots+I_n}{(I_1+I_2+\dots+I_n)+(B_1+B_2+\dots+B_n)}$$

احتمال بیکاری سیستم $P_0 = 1-P_b$

ضریب بهره وری :

ضریب بهره وری که با ρ نمایش داده می‌شود از رابطه‌ی زیر بدست می‌آید :

ضریب بهره‌وری همان درصد اشتغال سیستم خواهد بود.

$$\text{ضریب بهره وری} = \frac{\text{میانگین کل تقاضا در واحد زمان}}{\text{میزان کل تقاضاهایی که سیستم می‌تواند در واحد زمان پاسخ دهد}}$$

قضیه : یک سیستم صف با m خدمت دهنده را در نظر بگیرید که در آن آهنگ ورود و آهنگ خدمت دهی به ترتیب برابر λ و μ باشد. در این سیستم ضریب بهره وری از رابطه‌ی زیر بدست می‌آید :

$$\rho = \frac{\lambda}{m\mu}$$

اگر $\rho < 1$ باشد، سیستم را پایدار گوئیم. اگر $\rho \geq 1$ باشد، سیستم ناپایدار است.

ماتریس آهنگ گذار در مدل‌های تعالی صف :

اگر تعداد مشتریان حاضر در سیستم در هر لحظه از زمان را برابر حالت سیستم تعریف کنیم، در این صورت با توجه به فرض I و II تعداد مشتریان حاضر در سیستم در زمان‌های بعد به تعداد مشتریان حاضر در زمان حال وابسته است و مستقل از تعداد مشتریان در زمان گذشته خواهد بود.

در نتیجه در این سیستم‌ها، خواص فرآیند مارکوف برقرار است. لذا مدل تعالی صف یک زنجیره‌ی مارکوف پیوسته خواهد بود. در نتیجه ماتریس آهنگ گذار برای این سیستم از رابطه‌ی زیر بدست می‌آید.

$$q_{ij} = \text{آهنگ گذار از حالت } i \text{ به } j = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{P_{ij}(\Delta t)}{\Delta t}$$ (۱۶۰)

$j<i$
$i-j$ مرگ رخ دهد

$$\begin{cases} i-j>1 & q_{ij} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{P_{ij}(\Delta t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{O(\Delta t)}{\Delta t} = 0 \\ j=i-1 & q_{i,i-1} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{P_{i,i-1}(\Delta t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\mu_i(\Delta t)+O(\Delta t)}{\Delta t} = \mu_i \end{cases}$$

(مثال: اگر تعداد مشتریان از ۱۰ به ۷ برسد ⇐ ۳ مرگ رخ داده)

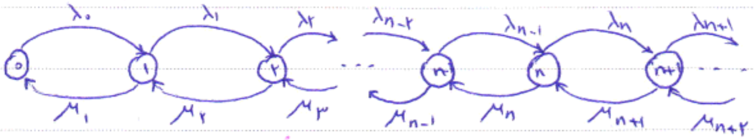
$j>i$
$j-i$ تولد رخ دهد

$$\begin{cases} j-i>1 & q_{ij} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{P_{ij}(\Delta t)}{\Delta t} = 0 \\ j=i+1 & q_{ij} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{P_{i,i+1}(\Delta t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\lambda_i(\Delta t)+O(\Delta t)}{\Delta t} = \lambda_i \end{cases}$$

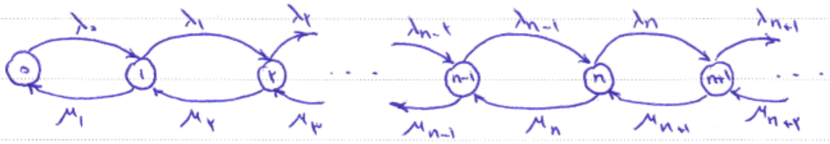
$$Q = \begin{array}{c|ccccccc} & 0 & 1 & 2 & \cdots & n-1 & n & n+1 & \cdots \\ \hline 0 & -\lambda_0 & \lambda_0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 1 & \mu_1 & -(\mu_1+\lambda_1) & \lambda_1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 2 & 0 & \mu_2 & -(\mu_2+\lambda_2) & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & & & & & \\ n & 0 & 0 & 0 & \cdots & \mu_n & -(\mu_n+\lambda_n) & \lambda_n & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \end{array}$$

$$q_{02} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{P_{02}(\Delta t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{e^{-(\lambda_0 \Delta t)} \frac{(\lambda_0 \Delta t)^2}{2!}}{\Delta t} = 0$$

نمودار آهنگ برای مدل های تولد مرگ بصورت زیر خواهد بود.



محاسبه احتمالات حدی در مدل های تولد مرگ با استفاده از نمودار آهنگ :



معادله پایداری گره ۰ : $\lambda_0 \pi_0 = \mu_1 \pi_1 \to \pi_1 = \frac{\lambda_0}{\mu_1}$

معادله پایداری گره ۱ : $(\lambda_1+\mu_1)\pi_1 = \lambda_0\pi_0 + \mu_2\pi_2$

$$(\lambda_1+\mu_1)\frac{\lambda_0}{\mu_1}\pi_0 = \lambda_0\pi_0+\mu_2\pi_2 \to \frac{\lambda_1\lambda_0}{\mu_1}\pi_0 + \lambda_0\pi_0 = \lambda_0\pi_0 + \mu_2\pi_2$$

$$\to \pi_2 = \frac{\lambda_0\lambda_1}{\mu_1\mu_2}\pi_0$$

معادله پایداری گره n : $(\lambda_n+\mu_n)\pi_n = \lambda_{n-1}\pi_{n-1}+\mu_{n+1}\pi_{n+1} \xrightarrow{n\geq 1}$

با استفاده از استقرا می توان نشان داد. $\pi_n = \frac{\lambda_0\lambda_1\cdots\lambda_{n-1}}{\mu_1\mu_2\cdots\mu_n}\pi_0 \to C_n = \frac{\lambda_0\lambda_1\cdots\lambda_{n-1}}{\mu_1\mu_2\cdots\mu_n} \to \pi_n = C_n\pi_0 \quad \forall n\geq 1$

$C_0 = 1$;

$$1 = \sum_{n=0}^{\infty}\pi_n = \sum_{n=0}^{\infty}C_n\pi_0 = \pi_0\sum_{n=0}^{\infty}C_n \to \pi_0 = \frac{1}{\sum_{n=0}^{\infty}C_n} \to \pi_n = \frac{C_n}{\sum_{m=0}^{\infty}C_m}$$

شرط پایداری یک مدل تولد مرگ :

برای پایداری این مدل ها باید π_0 مثبت (مخالف صفر) باشد. برای این که π_0 مثبت باشد، $\sum_{n=0}^{\infty}C_n$ نباید واگرا باشد (همگرا باشد).

مدل $M/M/1$:

در این مدل ها که به مدل کلاسیک نیز معروفند، آهنگ ورود و خروج افراد مستقل از افراد داخل سیستم است.

$\lambda_n = \lambda \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$

$\mu_n = \mu \qquad n = 1, 2, \ldots \qquad (\mu_0 = 0)$

$$C_n = \frac{\lambda_0 \lambda_1 \cdots \lambda_{n-1}}{\mu_1 \mu_2 \cdots \mu_n} = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n$$

ضریب بهره وری $\rho = \frac{\lambda}{\mu} \rightarrow C_n = \rho^n$

$\forall n \geq 1 \quad \pi_n = \rho^n \pi_0$

$$\pi_0 = \frac{1}{\sum_{n=0}^{\infty} \rho^n} = \frac{1}{\frac{1}{1-\rho}} = 1-\rho \longrightarrow \forall n \quad \pi_n = \rho^n (1-\rho)$$

محاسبه ی معیارهای ارزیابی یک سیستم $M/M/1$:

- $L = \sum_{n=0}^{\infty} n \pi_n = \sum_{n=0}^{\infty} n \rho^n (1-\rho) = \frac{\rho}{1-\rho} = \frac{\lambda}{\mu-\lambda}$

- استنتاج لیتل : $W = \frac{L}{\lambda} = \frac{1}{\mu-\lambda}$

- $W_q = W - \frac{1}{\mu} = \frac{1}{\mu-\lambda} - \frac{1}{\mu} = \frac{\lambda}{\mu(\mu-\lambda)}$

- $L_q = \lambda W_q = \frac{\lambda^2}{\mu(\mu-\lambda)}$

محاسبه ی توزیع مدت زمان انتظار مشتری در صف و در سیستم در مدل های $M/M/1$:

اگر T_q و T_s را به ترتیب مدت زمان انتظار مشتری در صف و در سیستم در نظر بگیریم. در این صورت داریم :

$P(T_q = 0) = P($ هیچ کس در سیستم نباشد $) = \pi_0 = 1-\rho$

$P(T_q > x) = ?$

$P(T_s > x) = ?$

$$P(T_q > x \mid N = n) = \int_x^{\infty} \mu e^{-\mu t} \frac{(\mu t)^{n-1}}{(n-1)!} \, dt$$

X_i : مدت زمان خدمت به مشتری iام $\sim Exp(\mu)$

$T_q = \sum_{i=1}^{n} X_i \sim$ ارلانگ با پارامترهای n, μ

$N = n$: تعداد مشتریان حاضر در سیستم در زمان مراجعه مشتری برابر n باشد

$$P(T_q > x) = \sum_{n=1}^{\infty} P(T_q > x \mid N=n)\, \underline{\overset{\pi_n}{P(N=n)}} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_x^{\infty} \mu e^{-\mu t} \frac{(\mu t)^{n-1}}{(n-1)!} dt \right) \rho^n (1-\rho)$$

$$= \rho(1-\rho) \int_x^{\infty} \mu e^{-\mu t} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\mu t \rho)^{n-1}}{(n-1)!} \right) dt = \rho(1-\rho) \int_x^{\infty} \mu e^{-\mu t} e^{\rho \mu t} dt$$

$$= \mu \rho (1-\rho) \int_x^{\infty} e^{-(\mu-\lambda)t} dt = \frac{\mu \overset{\mu-\lambda}{\overbrace{\rho(1-\rho)}}}{\mu-\lambda} e^{-(\mu-\lambda)x} = \boxed{\rho e^{-\mu(1-\rho)x}}$$

$$P(T_s > x) = \sum_{n=0}^{\infty} P(T_s > x \mid N=n)\, P(N=n)$$

$P(T_s > x \mid N=n) = P\left(\sum_{i=1}^{n+1} x_i > x\right)$ T_s ارلانگی با پارامترهای $n+1$ و μ

$$P(T_s > x) = \sum_{n=0}^{\infty} \int_x^{\infty} \mu e^{-\mu t} \frac{(\mu t)^n}{n!} dt\, \rho^n (1-\rho) = \mu(1-\rho) \int_x^{\infty} e^{-\mu t} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\mu t)^n}{n!} \right) dt$$

$$= \mu(1-\rho) \int_x^{\infty} e^{-\mu(1-\rho)t} dt = \boxed{e^{-\mu(1-\rho)x}}$$

$P($ تعداد حاضر در صف $= n) = P($ تعداد افراد حاضر در سیستم $= n+1) = \pi_{n+1}$

$P($ تعداد افراد حاضر در صف $> n) = \sum_{m=n+1}^{\infty} P($ تعداد افراد حاضر در صف $= m) = \sum_{m=n+1}^{\infty} \pi_{m+1} = \sum_{m=n+1}^{\infty} \rho^{m+1}(1-\rho)$

$$= \frac{\rho^{n+2}(1-\rho)}{1-\rho} = \rho^{n+2}$$

مثال) کتابخانه‌ای عمومی که فقط یک کتابدار دارد را در نظر بگیرید. اعضای کتابخانه طبق فرآیند پواسون با میانگین ۱۰ نفر در ساعت وارد می‌شوند. مدت زمانی که طول می‌کشد تا این کتابدار به تقاضای یک عضو رسیدگی کند، متغیری نمایی با میانگین ۵ دقیقه است. در چند درصد وقت این کتابدار بیکار است؟ π_0

احتمال این که سه نفر منتظر باشند تا کتابدار به تقاضای آن‌ها رسیدگی کند چقدر است؟ π_4

به طور متوسط مشتری چه مدت منتظر می‌ماند تا کتابدار به تقاضای او رسیدگی کند؟ مدت زمان انتظار در صف

به طور متوسط چند نفر منتظرند تا انباردار به تقاضای آن‌ها رسیدگی کند. L_q

از لحظه‌ی ورود یک مشتری تا لحظه‌ای که کار او تمام می‌شود، به طور متوسط چه مدت طول می‌کشد W

احتمال این که مشتری اصلا منتظر نماند؟ π_0

احتمال این که حداقل یک ساعت منتظر بماند؟ $(T_q \geq 1)$

احتمال این که تعداد اعضای کتابخانه که منتظرند تا نوبت آن‌ها برسد بیش از ۵ نفر باشد، چقدر است؟

$\lambda =$ ۱۰ $\quad \mu =$ ۱۲

مدل M/M/1/K :

در این مدل‌ها، ظرفیت سیستم برابر K و متناهی است. در صورتی که K نفر داخل سیستم باشد و فردی به سیستم مراجعه کند، در این صورت از ورود وی به سیستم خودداری می‌شود. در این سیستم داریم:

$$\lambda_n = \begin{cases} \lambda & n<K \\ 0 & n \geq K \end{cases} \qquad \mu_n = \mu \quad n = 1, 2, \ldots, K$$

$n>K$ بی مفهوم است. چون ظرفیت سیستم K نفر است و تعداد مشتریان حاضر در سیستم نمی‌تواند از K بیشتر باشد.

$$C_n = \frac{\lambda_0 \lambda_1 \cdots \lambda_{n-1}}{\mu_1 \mu_2 \cdots \mu_n} = \begin{cases} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n & n \leq K \\ 0 & n > K \end{cases}$$

نکته: در مدل M/M/1/K آهنگ مراجعه به سیستم برابر λ است. اما آهنگ ورود به سیستم برابر λ نیست و آن را با $\bar{\lambda}$ نشان می‌دهیم. با توجه به این که در $100\pi_K$ درصد اوقات ظرفیت سیستم کامل است پس افرادی که در این بازه‌ی زمانی به سیستم مراجعه کنند، از ورود آن‌ها به سیستم خودداری خواهد شد. لذا از λ نفری که در واحد زمان به طور متوسط وارد سیستم می‌شوند، $\lambda\pi_K$ نفر آن‌ها نمی‌توانند وارد سیستم شوند. لذا $\bar{\lambda} = \lambda(1-\pi_K)$ خواهد بود (تعداد افرادی که می‌توانند وارد شوند $\lambda(1-\pi_K)$)

در نتیجه ضریب بهره‌وری در این مدل برابر $\frac{\lambda(1-\pi_K)}{\mu} = \frac{\bar{\lambda}}{\mu} = \rho$ خواهد بود.

در این مدل تعریف می‌کنیم: $\frac{\lambda}{\mu} = r$

$$\Pi_0 = \frac{1}{\sum_{n=0}^{\infty} C_n} = \frac{1}{\sum_{n=0}^{K} C_n} \overset{C_0=1}{=} \frac{1}{1+\sum_{n=1}^{K} C_n} = \frac{1}{\sum_{n=0}^{\infty} r^n} = \frac{1}{\frac{1-r^{K+1}}{1-r}} = \frac{1-r}{1-r^{K+1}}$$

$$\Pi_n = \frac{r^n(1-r)}{1-r^{K+1}} \qquad n=0,1,2,\dots,K$$

محاسبه ی معیارهای ارزیابی سیستم در مدل M/M/1/K :

$$L = \sum_{n=0}^{K} n\Pi_n = \sum_{n=0}^{K} n\, r^n \frac{(1-r)}{1-r^{K+1}} = \frac{r(r-1)}{1-r^{K+1}} \sum_{n=0}^{K} n r^{n-1} = \frac{r(r-1)}{1-r^{K+1}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d}{dr}(r^n)$$

$$= \frac{r(1-r)}{1-r^{K+1}} \frac{d}{dr} \sum_{n=0}^{K} r^n = \frac{r(1-r)}{1-r^{K+1}} \frac{d}{dr}\left(\frac{1-r^{K+1}}{1-r}\right) = \frac{r}{1-r} - \frac{(K+1)r^{K+1}}{1-r^{K+1}}$$

$$W = \frac{L}{\bar{\lambda}} \qquad W_q = W - \frac{1}{\mu} = \frac{L}{\bar{\lambda}} - \frac{1}{\mu}$$

$$L_q = \bar{\lambda} W_q = L - \frac{\bar{\lambda}}{\mu} = L - \rho$$

در مدل های M/M/1 و M/M/1/K :

$$L_q = \sum_{n=1} (n-1)\Pi_n = \sum_{n=1} n\Pi_n - \sum_{n=1} \Pi_n = L - (1-\Pi_0)$$

مدل M/M/m :

در این مدل تعداد خدمت دهنده برابر m است. از طرفی توزیع مدت خدمت دهی هر خدمت دهنده از توزیع نمایی با پارامتر μ و توزیع بین دو ورود متوالی نیز از توزیع نمایی با پارامتر λ برخوردار است:

در این مدل ضریب بهره وری از رابطه ی $\rho = \frac{\lambda}{m\mu}$ به دست می آید. در این صورت داریم:

$$\lambda_n = \lambda \qquad n=0,1,2,\dots$$

$$\mu_n = \begin{cases} n\mu & n<m \rightarrow \text{n خدمت دهنده در حال خدمت اند} \\ m\mu & n\geq m \rightarrow \text{m خدمت دهنده در حال خدمت .} \end{cases}$$

$$C_n = \frac{\lambda_0 \lambda_1 \cdots \lambda_{n-1}}{\mu_1 \mu_2 \cdots \mu_n} = \begin{cases} \dfrac{(\frac{\lambda}{\mu})^n}{n!} & n < m \\ \dfrac{(\frac{\lambda}{\mu})^n}{m! \; m^{n-m}} & n \geq m \end{cases}$$

$$\pi_0 = \frac{1}{\sum\limits_{n=0}^{m-1} \frac{(\frac{\lambda}{\mu})^n}{n!} + \sum\limits_{n=m}^{\infty} \frac{(\frac{\lambda}{\mu})^n}{m! \; m^{n-m}}} = \frac{1}{\sum\limits_{n=0}^{m-1} \frac{(\frac{\lambda}{\mu})^n}{n!} + \frac{(\frac{\lambda}{\mu})^m}{m!(1-\rho)}} \qquad \pi_n = C_n \pi_0$$

$$\sum_{n=m}^{\infty} \frac{(\frac{\lambda}{\mu})^{n-m+m}}{m! \; m^{n-m}} = \frac{(\frac{\lambda}{\mu})^m}{m!} \sum_{n=m}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{m\mu}\right)^{n-m} = \frac{(\frac{\lambda}{\mu})^m}{m!} \frac{1}{1-\rho}$$

محاسبه‌ی معیارهای ارزیابی سیستم در مدل M|M|m :

$$L_q = \sum_{n=1}^{\infty} n P\left(\text{تعداد افراد حاضر در صف} \atop n = \text{صف}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} n \pi_{n+m} = \sum_{n=0}^{\infty} n \pi_{n+m} = \sum_{n=0}^{\infty} n \frac{(\frac{\lambda}{\mu})^{n+m}}{m! \; m^n} \pi_0$$

$$= \frac{(\frac{\lambda}{\mu})^m \pi_0}{m!} \sum_{n=0}^{\infty} n \left(\frac{\lambda}{m\mu}\right)^n = \frac{(\frac{\lambda}{\mu})^m \pi_0}{m!(1-\rho)} \sum_{n=0}^{\infty} n \rho^n (1-\rho) = \frac{(\frac{\lambda}{\mu})^m \rho \pi_0}{m!(1-\rho)^2}$$

$$W_q = \frac{L_q}{\lambda} \qquad W = W_q + \frac{1}{\mu}$$

توزیع مدت زمان انتظار در صف در مدل M|M|m :

$$P(T_q = 0) = P(\text{حداقل یک خدمت‌دهنده بیکار}) = P(\text{حداکثر m-1 مشتری در سیستم}) = \sum_{n=0}^{m-1} \pi_n = 1 - \sum_{n=m}^{\infty} \pi_n$$

$$1 - \sum_{n=m}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \frac{\pi_0}{m! \; m^{n-m}} = 1 - \frac{(\frac{\lambda}{\mu})^m}{m!} \pi_0 \sum_{n=m}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{m\mu}\right)^{n-m} = 1 - \frac{(\frac{\lambda}{\mu})^m \pi_0}{m!(1-\rho)}$$

$$P(T_q > t) = \sum_{n=m}^{\infty} P(T_q > t \mid N = n) P(N = n) = \sum_{n=m} \pi_n \times P(X_1 + X_2 + \cdots + X_{n-m+1} > t)$$

$X_i \sim EXP(m\mu)$

$T_q = X_1 + X_2 + \cdots + X_{n-m+1}$ توزیع ارلانگی با پارامترهای (n-m+1) و (mμ)

$$\cdot P(T_q > t) = \left[1 - P(T_q = 0)\right] e^{-(m\mu-\lambda)t}$$

مدل $M/M/m/K$ $(K \geq m)$:

در این مدل تعداد خدمت دهنده برابر m و ظرفیت سیستم برابر K می باشد که $K \geq m$ است.

در این مدل داریم :

$$\lambda_n = \begin{cases} \lambda & 0 \leq n < K \\ 0 & n = K \end{cases} \qquad \mu_n = \begin{cases} n\mu & 0 < n < m \\ m\mu & m \leq n < K \end{cases}$$

$$C_n = \begin{cases} \dfrac{(\frac{\lambda}{\mu})^n}{n!} & 0 \leq n < m \\ \dfrac{(\frac{\lambda}{\mu})^n}{m!\ m^{n-m}} & m \leq m \leq K \end{cases}$$

$$\cdot \pi_0 = \frac{1}{\sum_{n=0}^{m-1} \frac{(\frac{\lambda}{\mu})^n}{n!} + \frac{(\frac{\lambda}{\mu})^m}{m!} \sum_{n=m}^{K} (\frac{\lambda}{m\mu})^{n-m}} = \frac{1}{\sum_{n=0}^{m-1} \frac{(\frac{\lambda}{\mu})^n}{n!} + \frac{(\frac{\lambda}{\mu})^m}{m!} \sum_{n=m}^{K} r^{n-m}}$$

$$\cdot \pi_n = C_n \pi_0 \begin{cases} & 0 \leq n < m \\ & m \leq n \leq K \end{cases}$$

$$\cdot L_q = \sum_{n=m}^{K} (n-m)\pi_n = \sum_{n=m}^{K} (n-m) \times \frac{(\frac{\lambda}{\mu})^n \times \pi_0}{m!\ m^{n-m}} = \frac{(\frac{\lambda}{\mu})^m \pi_0}{m!} \sum_{n=m}^{\infty} (n-m)\, r^{n-m}$$

$$= \frac{(\frac{\lambda}{\mu})^m \pi_0\, r}{m!} \sum_{n=0}^{K-m} n\, r^{n-1}$$

$$\cdot W_q = \frac{L_q}{\bar{\lambda}} = \frac{L_q}{\lambda(1-\pi_K)} \qquad \cdot W = W_q + \frac{1}{\mu}$$

$$\cdot L = \bar{\lambda} W = \lambda(1-\pi_K)\, W$$

مدل $M/M/m/m$ (مدل ارلانگ) :

$$\lambda_n = \begin{cases} \lambda & 0 \leq n < m \\ 0 & n = m \end{cases} \qquad \mu_n = n\mu \quad n = 1, 2, \dots, m$$

$C_n = \frac{(\frac{\lambda}{\mu})^n}{n!} \qquad n = 1, 2, \dots, m$

$\pi_0 = \frac{1}{\sum_{n=0}^{m} \frac{(\frac{\lambda}{\mu})^n}{n!}} \qquad \pi_n = \frac{\frac{(\frac{\lambda}{\mu})^n}{n!}}{\sum_{i=0}^{m} \frac{(\frac{\lambda}{\mu})^i}{i!}} \qquad n = 0, 1, 2, \dots, m$

$\bar{\lambda} = \lambda(1 - \pi_m) \qquad w_q = 0 , L_q = 0 \qquad w = \frac{1}{\mu} \qquad L = \bar{\lambda} w = \frac{\lambda}{\mu}(1 - \pi_m)$

توزیع مدت زمان انتظار در سیستم : توزیع مدت زمان خدمت به آن مشتری : نمایی با پارامتر μ

مدل M/M/∞ :

در این مدل هر مشتری که به وارد سیستم می‌شود بلافاصله توسط یک خدمت دهنده به وی خدمت ارائه خواهد شد.

در این صورت داریم :

$\lambda_n = \lambda \quad n = 0, 1, \dots \qquad \mu_n = n\mu \quad n = 1, 2, \dots$

$C_n = \frac{(\frac{\lambda}{\mu})^n}{n!} \quad n = 1, 2, \dots \qquad C_0 = 1$

$\pi_0 = \frac{1}{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\frac{\lambda}{\mu})^n}{n!}} = \frac{1}{e^{\frac{\lambda}{\mu}}} = e^{-\frac{\lambda}{\mu}} \qquad \pi_n = e^{-\frac{\lambda}{\mu}} \frac{(\frac{\lambda}{\mu})^n}{n!} \sim P(\frac{\lambda}{\mu}) \quad n = 0, 1, \dots$

$w_q = L_q = 0 \qquad w = \frac{1}{\mu} \qquad L = \frac{\lambda}{\mu}$

دوره مشغول بودن و دوره‌ی بیکاری در مدل M/M/1 :

در مدل M/M/1 دوره‌ی بیکاری سیستم عبارتست از زمان خارج شدن آخرین مشتری تا ورود اولین مشتری بعدی . باتوجه به این که مدت زمان بین دو ورود متوالی مشتریان از نمایی با پارامتر λ برخوردار است و از طرفی توزیع نمایی فاقد حافظه است . در نتیجه توزیع مدت زمان بیکاری توزیع نمایی با پارامتر λ است .

در نتیجه داریم :

$I_1 , I_2 , \dots , I_n$: هم توزیع و مستقل

$B_1 , B_2 , \dots , B_n$: هم توزیع و مستقل

I : دوره‌ی بیکاری $\qquad E(I) = \frac{1}{\lambda}$

$$\pi_0 = \frac{nE(I)}{nE(I) + nE(B)} = \frac{E(I)}{E(I) + E(B)}$$

$$= \frac{\frac{1}{\lambda}}{\frac{1}{\lambda} + E(B)} \rightarrow E(B) = \frac{1-\pi_0}{\pi_0} \times \frac{1}{\lambda}$$

$N(B)$: تعداد مشتریانی که در دوره‌ی اشتغال خدمت دریافت کرده‌اند.

متوسط تعداد مشتریانی که در هر واحد زمانی در دوره‌ی اشتغال خدمت دریافت کرده‌اند : μ

متوسط مدت زمان هر دوره‌ی اشتغال : $E(B)$

$$E(N(B)) = \mu \times E(B) = \frac{1-\pi_0}{\pi_0} \frac{\mu}{\lambda} = \frac{1}{\pi_0} = \frac{1}{1-\frac{\lambda}{\mu}} = \frac{\mu}{\mu-\lambda}$$