Subject: ساختمان گسسته، دکتر یوسفی — جلسه‌ی اول
Year: ۹۳ Month: ۴ Date: ۲۰

۱- منطق - گزاره‌ها
۲- شمارش - اصل شمول - چند جمله‌ای ذخیره - لانه کبوتر *
۳- بازگشتی - تابع مولد *
۴- رابطه - تابع
۵- پاسَت - لاتیس - جبر بول
۶- گراف و درخت *
۷- سیستم جبری تقریباً سؤال نمی‌آید.
۸- نظریه‌ی اعداد

آی‌تی ۶، کامپیوتر ۵ سؤال

(کتاب جبر ۱۷ پوران پژوهش - دکتر یوسفی)
مرجع اصلی Rosen
مرجع دوم گریمالدی
کتاب نارنجی ترجمه‌های رزن و گریمالدی

فصل اول منطق

گزاره statement-proposition جمله‌ای خبری که یا حتماً true هست یا حتماً False
(T/1) — (F/0)

سعدی شاعر است. گزاره است. T
1000 عدد بزرگی است. گزاره نیست.
1>2 گزاره است. و F
در کرات دیگر موجودات زنده هستند. گزاره است. چون یا True است حتماً یا حتماً False است.
خداوند می‌تواند سنگی خلق کند که خودش نتواند آن را بلند کند. نمی‌شه گفت True است یا False. parado x (پارادوکس / دلیل) جمله متناقض
x>2 - گزاره نما - متغیر گزاره‌ای. $P(x)$ "$x>2$" $P(4)\equiv T$ $P(1)\equiv F$

گزاره نما (محمول predicate) در روش متغیر به کار رفته که به ازای یک سری مقادیر True و یک سری مقادیر False است.

رابطه‌ها - عملگرها - connectives

- نقیض - نفی - not علامت‌ها: ~ ¬ ¬ - ‘
- ترکیب عطفی conjunction - AND علامت‌ها: ∧ •
- ترکیب فصلی disjunction - OR علامت‌ها: ∨ + ∪
- ترکیب شرطی implication $P\to q$ (P آنگاه q) یا

"P شرط کافی است برای q" یا "q شرط لازم است برای p"

$P\to q$
فرض (مقدم) — تالی (حکم)

** $P\to q$ — q اگر p — p تنها/فقط اگر q

$P\leftrightarrow q \equiv (P\to q)\wedge(q\to P)$

$P\leftrightarrow q$ ⟸ p اگر و تنها اگر q
q اگر p — p تنها اگر q
q اگر و تنها اگر p ⟹ q تنها اگر p — p اگر q

جبر مجموعه‌ها	جبر بول	جبر گزاره‌ها
∪	+	∨
∩	•	∧
∅	0	F
مرجع M	1	T

p	q	$P\to q$	
F	F	T	اگر فرض غلط بود ~~حکم~~ q مهم نیست.
F	T	T	
T	F	F	→ False ⟸ مقدم T و تالی F
T	T	T	اگر فرض درست بود q باید درست باشد تا نتیجه درست شود.

$P\to q \equiv \sim q\to\sim p$ (هم ارز ⟺)

$P\to q \equiv \sim p\vee q$

- ترکیب دوشرطی $p \leftrightarrow q$ اگر p آنگاه q و برعکس. p اگر و فقط q. p شرط لازم و کافی است برای q **
هم‌ارزش باشند ← True می‌دهد. [xnor در جبر بول که مساوی را ۱ می‌دهد و مخالف را ۰ معادل $p \leftrightarrow q$ است.]

$p \leftrightarrow q \equiv (p \to q) \wedge (q \to p)$ هم‌ارزی‌های ترکیب دوشرطی

$\equiv (\bar{p} + q) \cdot (\bar{q} + p)$

$\equiv \bar{p}\bar{q} + p \cdot q$ نتیجه می‌دهد.

□ آیا $p \leftrightarrow q \overset{?}{\equiv} \bar{p} \leftrightarrow \bar{q}$ بله چون فقط p و q True باشند، $\bar{p}$ و $\bar{q}$ False است.

$p \leftrightarrow q$ درست ، $\bar{p} \leftrightarrow \bar{q}$ درست

- xnor – exclusive or   xnor ⊕   علامت‌ها: $\bar{\vee}$ $\underline{\vee}$ or انحصاری: انحصاراً یکی True باشد که True برمی‌دهد

p و q مخالف باشند true می‌دهد.
not ترکیب دوشرطی است.

p	q	$p \oplus q$
F	F	F
F	T	T
T	F	T
T	T	F

$p \oplus q \equiv \sim(p \leftrightarrow q)$

$p \oplus q \equiv p \cdot \bar{q} + q \cdot \bar{p}$

$\equiv (p + q) \cdot (\bar{p} + \bar{q})$

- Nand ↑ (rosen 1)

$p \uparrow q \equiv (\overline{p \wedge q})$

p	q	$p \uparrow q$
F	F	T
F	T	T
T	F	T
T	T	F

- NOR ↓

$p \downarrow q \equiv (\overline{p \vee q})$

p	q	$p \downarrow q$
F	F	T
F	T	F
T	F	F
T	T	F

اولویت: ۱- نقیض
۲- $\wedge$
۳- $\vee$
۴- $\to$

$p \to q \vee r$

$\equiv p \to (q \vee r)$ اولویت

تعریف دوگان dual

** اگر در یک تابع، همه‌ی and ها به or – or ها به and – False به True – True به False تبدیل شوند، دوگان آن تابع به دست می‌آید. (گزاره‌ها را نقیض نمی‌دهیم.)

$A = p \vee q$

$A^* = A^d = p \wedge q$ دوگان A

$B = (p \wedge \bar{q}) \vee (p \wedge T)$

$B^* = (p \vee \bar{q}) \wedge (p \vee F)$

** هر تابعی را خواستیم دوگان کنیم، حتماً به and و or تبدیل می‌کنیم

$A = p \to q \equiv \sim p \vee q$ $A^* = \sim p \wedge q$

Subject:
Year ۹۴ Month ۴ Date ۲۰ (۳)

جلسه‌ی اول

تابع self_dual

تابعی که با dual اش هم ارز است. مثلاً خود P . dual اش می‌شود P.

مثلاً: $A = P + P.q$ قانون جذب

$A^* = P.(P+q)$

تمرین: بررسی کنید توابع زیر self dual هستند.

$f_1 = p.q + p.r + q.r \qquad f_1^* = (p+q).(p+r).(q+r) \equiv$

$f_2 = p \oplus q \oplus r$

$f_3 = p \leftrightarrow q \leftrightarrow r$

تمرین: بررسی کنید دوگان $p \oplus q$ برابر است با $p \leftrightarrow q$

قانون دمورگان

قانونی برای not کردن یک تابع. اول dual اش کن بعد که dual اش کردی، همه‌ی متغیرها رو not کن.
(دوگان)

$$\overline{f(p_1, p_2, p_3, \dots, p_n)} = f^*(\bar{p}_1, \bar{p}_2, \dots, \bar{p}_n)$$

مثال: $A = (p \wedge q) \vee (\bar{p} \wedge r)$

$\bar{A} = (\bar{p} \vee \bar{q}) \wedge (\underbrace{\bar{\bar{p}}}_{p} \vee \bar{r})$

اصل duality / دوگانی / همزادی

$A \equiv B \iff A^* \equiv B^*$

$P.0 \equiv 0 \xrightarrow{\text{dual}} P+1 \equiv 1$

هر خاصیت یک dual ای هم دارد.

خواص گزاره‌ها

اسامی مهم!

دسته ۱	دسته ۲	
$P \wedge T \equiv P$	$P \vee F \equiv P$	عضو خنثی (همانی) identity
$P \wedge F \equiv F$	$P \vee T \equiv T$	عضو صفر (غلبه)
$P \wedge P \equiv P$	$P \vee P \equiv P$	خودتوانی idempotency
$P \wedge \bar{P} \equiv F$	$P \vee \bar{P} \equiv T$	مکمل پذیری
$P \wedge q \equiv q \wedge P$	$P \vee q \equiv q \vee P$	جابجایی (تعویض‌پذیری) commutative
$P \wedge (q \wedge r) \equiv (P \wedge q) \wedge r \equiv P \wedge q \wedge r$	$P \vee (q \vee r) \equiv (P \vee q) \vee r \equiv P \vee q \vee r$	شرکت‌پذیری (اشتراکی) associative
$P \wedge (q \vee r) \equiv (P \wedge q) \vee (P \wedge r)$	$P \vee (q \wedge r) \equiv (P \vee q) \wedge (P \vee r)$	پخشی - توزیع‌پذیری distributive
$P \wedge (\bar{P} \vee q) \equiv P \wedge q$	$P \vee (\bar{P} \wedge q) \equiv P \vee q$	شبه جذب *
$P \wedge (P \vee q) \equiv P$	$P \vee (P \wedge q) \equiv P$	جذب *

$\underbrace{p}_{\text{کوچک}} \wedge \underbrace{(p \vee q)}_{\text{بزرگ}} \equiv p$

کوچیکه بزرگه رو می‌خوره

از لحاظ قیاس‌ها و علامت بین آن‌ها و بین اجزای جمله‌ها متفاوت

اثبات جذب:

$$p \wedge (p \vee q) \equiv (p \vee F) \wedge (p \vee q) \equiv p \vee (\underbrace{F \wedge q}_{F}) \equiv p \vee F \equiv p$$

Subject:
Year: ۹۴ Month: ۴ Date: ۱۰ (۴)

جلسه‌ی اول

$* (p\wedge\bar{q})\vee(p\wedge\bar{q}\wedge s) \equiv p\wedge\bar{q}$ طبق جذب

شبیه شبه جذب

$p\wedge(\bar{p}\vee q) \equiv (p\wedge\bar{p})\vee(p\wedge q) \equiv F\vee(p\wedge q) \equiv p\wedge q$

سوال: آیا ترکیب شرطی خاصیت شرکت پذیری دارد؟ خیر

خیر، ترکیب شرطی خاصیت شرکت پذیری ندارد.

$\overbrace{p\to(q\to r)}^{T} \equiv \overbrace{(p\to q)\to r}^{F}\ ?\quad T\neq F$

مثال نقض: $p: F$

q: هرچی

$r: F$

سوال: آیا Nand شرکت پذیر است؟

$\overbrace{(p\uparrow q)\uparrow r}^{T} \equiv p\uparrow\underbrace{(q\uparrow r)}_{F}$

مثال نقض: $p: T$

$q: T \qquad r: F$

* نکته: ترکیب دو شرطی و xor شرکت پذیر هستند.

سوال: آیا ترکیب شرطی از سمت چپ روی and توزیع پذیر است؟

$p\to(q\wedge r) \equiv (p\to q)\wedge(p\to r)$

$\sim p\vee(q\wedge r) \equiv (\sim p\vee q)\wedge(\sim p\vee r) \equiv (p\to q)\wedge(p\to r)$ ✓

از راست: $(q\wedge r)\to p \equiv (p\to q)\wedge(r\to p)$ × خیر

$\sim(q\wedge r)\vee p \equiv (\sim q\vee\sim r)\vee p \equiv (p\vee\sim r)\vee(p\vee\sim q) \equiv (r\to p)\vee(q\to p)$ ×

ترکیب شرطی از سمت راست روی and توزیع پذیر نیست در دوجهت

سوال: آیا and، حذف پذیر است؟ خیر، and حذف پذیر نمی‌باشد.

$p\wedge q = p\wedge r \overset{?}{\not\Rightarrow} q=r$

$p\equiv F \to$ p and اش با هر چیزی False می‌شود

سوال: آیا or، حذف پذیر است؟ خیر، اگر $p\equiv T$، دو طرف مستقل از r و q می‌شود T.

$p\vee q = p\vee r$

$* \quad p\wedge q = p\wedge r$

و $p\vee q = p\vee r \quad \Big] \Rightarrow q=r$

---

* نکته: xor، حذف پذیر است.

$p\oplus q \equiv p\oplus r \Rightarrow q=r$ *

* طرفین را با p، xor کردیم.

$* \quad \underbrace{\underbrace{(p\oplus p)}_{0}\oplus q}_{q} \equiv \underbrace{\underbrace{(p\oplus p)}_{0}\oplus r}_{r} \Rightarrow q=r$

استلزام منطقی

گزاره ی شرطی همیشه درست ← تاتولوژی همیشه راستگو

پس اگر $A\to B$ تاتولوژی باشد گوییم A (مقدم) مستلزم تالی (B) است و می‌نویسیم $A\vdash B$ یا $A\Rightarrow B$

A مستلزم B است را.

Subject:
Year. ۹۴ Month. ۴ Date. ۲۰ (۵)

جلسه‌ی اول

استلزام معتبر: $p\wedge q \Rightarrow p$ $\quad \sim(p\wedge q)\vee p \equiv (\sim p\vee\sim q)\vee p \equiv (\underbrace{\sim p\vee p}_{T})\vee(\sim q\vee p) \equiv T\vee(p\vee\sim q)\equiv T$ ✓

آیا $p\wedge q\to p$، استلزام منطقی است یا خیر؟ با ... می‌توان جدول درستی هم کشید. همیشه درست است.

$p\vee q\Rightarrow p$ $\quad \sim(p\vee q)\vee p\equiv(\sim p\wedge\sim q)\vee p\equiv(\sim p\vee p)\wedge(p\vee\sim q)\equiv T\wedge(p\vee\sim q)\equiv(p\vee\sim q)$ ✗

آیا $p\vee q\Rightarrow p$، استلزام منطقی است یا خیر؟ ممکن است گاهی False شود، پس همیشه درست نمی‌باشد.

روش‌های بررسی استلزام

روش ۱: نشان دهیم $A\to B$ تاتولوژی است.

روش ۲: فرض کنیم $A:T$ بررسی می‌کنیم B، True است یا خیر.

روش ۳: فرض کن $B:F$، ثابت کن $A:F$ (برهان خلف)

مثال: بررسی کنید استلزام زیر معتبر هست یا خیر؟

$$\overbrace{\overbrace{(p\to q)}^{T}\wedge\overbrace{(r\to s)}^{T}\wedge\overbrace{(p\vee r)}^{T}}^{T} \Rightarrow q\vee s \quad ✓$$

روش ۲: $p\to q : T \quad q\equiv T$

$r\to s : T \quad s\equiv T \quad \Rightarrow q\vee s\equiv True$

روش ۳: فرض می‌کنیم $q\vee s$، False است پس یعنی هم s و هم q، False است. روی r و p بررسی می‌کنیم.
هر دو False باشند آن‌گاه عبارت $p\vee r$، False است و در نتیجه کل

$$(p\to q)\wedge(r\to s)\wedge(\bar q\vee\bar s)\Rightarrow\bar p\vee\bar r \quad ✓$$

روش ۲: $\bar p\vee\bar r\equiv T \Rightarrow (p\to q)\equiv T$ و $(r\to s)\equiv T$ و $(\bar q\vee\bar s)\equiv T$

$\hookrightarrow (\bar q\vee\bar s)$

روش ۳: $\bar p\vee\bar r\equiv F$

$(p\to q)\wedge(r\to s)\wedge(q\vee s)\to p\vee r$ $\quad$ مثال نقض: $p:F \quad q:T \quad r:F \quad s:$ هرچی

روش ۲: $(p\to q)\wedge(r\to s)\wedge(q\vee s)$

برای آن که نشان دهیم که استلزام $A\Rightarrow B$ معتبر نیست، باید حالتی پیدا کنیم که A را True کند، B را False.

استنتاج inference

می‌خواهیم از فرضیات p_1 و p_2، ...، p_n حکم q را نتیجه بگیریم. (استنتاج همان استلزام است اما یک فرض ندارد و چند فرض دارد احتمالاً)

$$\begin{array}{l} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ \underline{p_2} \\ \therefore q \end{array} \qquad p_1, p_2, \dots, p_n \vdash q$$

Subject:
Year: ۹۴ Month: ۴ Date: ۲۰ (۹)

جلسه‌ی اول

قوانین استنتاج

$\dfrac{p\wedge q}{\therefore p, q}$ $p\wedge q \to p$ ساده‌سازی عطفی

$\dfrac{p}{\therefore p\vee q}$ $p \to p\vee q$ addition

$\dfrac{p}{x: p\wedge q}$ ✗

$\dfrac{\begin{array}{c} p\to q \\ p \end{array}}{\therefore q}$ modus ponens انتزاع $(p\to q)\wedge p \Rightarrow q$

$p\to q \equiv \bar{q}\to\bar{p}$

$\dfrac{\bar{q}}{\therefore \sim p}$ نقیض انتزاع

$p\vee q \equiv \bar{p}\to q$

$\dfrac{\sim p}{\therefore q}$

می‌توان از روش ۱ یا ۲ استلزام استفاده کرد.

مسئله: درستی استنتاج‌های زیر را بررسی کنید.

$p\to q$

$q\to(r\wedge s)$] $p\to(r\wedge s)$, $r\wedge s$

$\bar{r}\vee\bar{w}\vee u$ $F\vee F\vee u \equiv u$

$\dfrac{p\wedge w}{\therefore u}$ p, w, r, s

$p\wedge w \vdash p, w$

$p, p\to q \vdash q$

$p, q\to(r\wedge s) \vdash r\wedge s$

$r\wedge s \vdash r$

$r, \bar{r}\vee\bar{w}\vee u \vdash \bar{w}\vee u$

$w, \bar{w}\vee u \vdash u$ ✓

[فصل اول کامل مطالعه شود.]

تمرین:

$p\to q$

$(\bar{p}\vee\bar{q})\to(r\wedge s)$

$r\to w$

$\dfrac{\bar{w}}{\therefore p}$

روش ۲ استلزام

$p\to q\equiv T$

و $\bar{w}\equiv T$

و $r\to w\equiv T$

و $(\bar{p}\vee\bar{q})\to(r\wedge s)\equiv T$

$\bar{w}\equiv T \to [w\equiv F$ و $r\to w\equiv T] \Rightarrow r\equiv F$

$r\equiv F \Rightarrow r\wedge s\equiv F \Rightarrow$

چون $(\bar{p}\vee\bar{q})\to(r\wedge s)\equiv T$

پس $(\bar{p}\vee\bar{q})\equiv F \Rightarrow \bar{p}\equiv F, \to \boxed{p\equiv T}$

$\bar{q}\equiv F \to q\equiv T$ ✓

درست است.

تمرین:

p

$p\vee q$

$q\to(r\to s)$

$\dfrac{w\to r}{\therefore \bar{s}\to\bar{w}}$

روش ۳ استلزام $A\Rightarrow B$ (فرض می‌کنیم $B\equiv F$ نتیجه بگیریم که $A\equiv F$)