استلزام گزاره ی شرطی همیشه درست.

ترکیب شرطی ای که False نمی‌شه استلزام هست. $A \Rightarrow B$

$p \wedge q \Rightarrow p$ استلزام است.

$1>2 \rightarrow 3=4$
F   F
انتفاع مقدم
(فرض غلط است)

اثبات استلزام بودن : روش ۲: فرض کن $A:T$. ثابت کن $B:T$

روش ۳: فرض کن $B:F$. ثابت کن $A:F$

سوال آیا رابطه ی روبه رو درست است؟

$(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r) \Rightarrow (p \rightarrow r)$

روش ۳: فرض می کنیم $p \rightarrow r$ غلط است. چون ترکیب شرطی است و فقط در یک حالت غلط است که $p:T$ و $r:F$.

روی q بحث می کنیم. q اگر

$p \vee q \Rightarrow p$ این استلزام ، معتبر نیست. (می توان این ترکیب شرطی را False کرد.)

اگر بتوانیم فرض را T کنیم اما حکم F باشد ، استلزام معتبر نیست.

اگر می خوای نشون بدی که استون $\underline{\text{نیست}}$ $A \Rightarrow B$ معتبر نیست ، حالتی پیدا کن که $A:T$ و $B:F$

استنتاج inference

می خواهیم از فرضیات $p_1, p_2, \dots, p_{n-1}, p_n$ ، حکم q را نتیجه بگیریم.

فرق استلزام و استنتاج این است که تعداد فرضیات در استنتاج بیش تر است که and کنیم می شود یک فرض و می شود همان استلزام. پس استلزام و استنتاج یکی هستند.

استلزام
$A \Rightarrow B$

استنتاج
p_1
p_2
$\vdots$
p_n
———
$\therefore q$

قانون استنتاج

$p \wedge q$
———
$\therefore p, q$

ساده سازی عطفی: عطف (and) رو میشه ساده کرد.

استنتاج معنی معادل بودن نمی‌ده .

قانون addition

چیزی که درسته، با هر چیزی OR بشه باز هم درسته

p
———
$\therefore p \vee q$

$p \rightarrow q$
p
———
$\therefore q$

قانون modus ponens (انتزاع)!

به شکل استلزام: $(p \rightarrow q) \wedge p \rightarrow q$

$p \rightarrow q$
$\bar{q}$
———
$\therefore \bar{p}$

قانون modus tollense (نقض انتزاع)

$p \vee q$
$\bar{p}$
———
$\therefore q$

$p \vee q$ (p یا q) درسته و p درست نیست ($\bar{p}$)

پس q درسته!

قیاس فصلی

$p \rightarrow q$
$q \rightarrow r$
———
$\therefore p \rightarrow r$

قانون قیاس صوری (تعدی)

مثال: این استنتاج ها درست است؟

$p \to r$

p

$p \to (q \vee \bar{r})$

$\bar{s} \vee \bar{q}$

$\therefore s$

روش دوم

1	$p \to r$	فرض 1
2	p	فرض 2
3	r	استنتاج 1 و 2
4	$p \to (q \vee \bar{r})$	فرض 3
5	$q \vee \bar{r}$	استنتاج 4 و 2
6	$r \to q$	معادل 5
7	q	استنتاج 6 و 3
8	$\bar{s} \vee \bar{q}$	فرض 4
9	$q \to \sim s$	معادل 8
10	$\sim s$	استنتاج 7 و 9

این استنتاج درست نیست، $\bar{s}$ را نتیجه می دهد.

از هر فرض هر چقدر باری می شود استفاده کرد

$p \to r, p \Rightarrow r$

$p, p \to (q \vee \bar{r}) \Rightarrow q \vee \bar{r}$

$q \vee \bar{r}, r \Rightarrow q$

$q, \bar{s} \vee \bar{q} \Rightarrow \bar{s}$

روش ۲: فرض کنیم فرضیات درست اند که آیا نتیجه می شود حکم درست است.

روش ۳: فرض می کنیم فرضیات تناقض داشته باشند.

روش ۲: $p \vee q \to r \wedge s$ درست، آیا $\bar{q}$ درست است؟ و $\bar{r}$ درست

$$\overset{F}{\boxed{p \vee q}} \to \underset{F}{\overset{F}{(r \wedge s)}} = T$$

$\sim r = T$

$p \vee q \to r \wedge s$

$\bar{r}$

$\therefore \bar{q}$

روش دوم

$p \vee q \to r \wedge s$

$\sim(r \wedge s) \to \sim(p \vee q)$

$\sim r \vee \sim s \to \sim p \wedge \sim q$ *

$\sim r$ T

چون عبارت * درست است پس باید $T \to T$ باشد چون که $\sim r \vee \sim s$ درست است.

روش ۲: $p \vee q \to r$ درست است، $s \to p \wedge t$ درست است، $q \vee s$ درست است آیا $\bar{r}$ درست است؟

روش ۳: فرض $\bar{r}$: F آیا فرضیات غلط اند.

r درست است، $p \vee q$ هر چیزی می تواند باشد.

فرضیات همه می توانند صحیح باشند. پس نتیجه نمی گیریم False اند.

مثل واضحه که همه ی فرضیات رو میشه True کرد

یه حالتی پیدا کنیم فرض غلط است که دلیل نقیضه

$p \vee q \to r$

$s \to p \wedge t$

$q \vee s$

$\therefore \bar{r}$

$p \vee q \to r$

$\sim r \to \sim(p \vee q)$

$s \to p \wedge t$

$q \vee s$

$\sim q \to s$

$\sim q \to p \wedge t \equiv q \vee (p \wedge t)$

$A \to B \vee C$ $\Rightarrow$ A و این $\to$ $[B \vee C, \bar{B}] \to \boxed{C}$ فرضیات غلط باشه، هر چیزی میشه نتیجه گرفت.

$\bar{B} \wedge A$ $\to A, \bar{B}$ ساده‌سازی عطفی — تناقض — اگر $B = T$ $A \Rightarrow B$

$A \to \bar{C}$ — A و این $\to \boxed{\bar{C}}$

$\therefore D$

بین فرضیات تناقض وجود داره پس هر چیزی میشه نتیجه گرفت.

D نتیجه می‌شود.

در واقع اشتراک بین فرضیات $(C \wedge \bar{C})$ غلط است.

روش ۲ = فرض می‌کنیم که تالی غلط است.

$$\frac{A \to B}{\therefore (C \to A) \to (C \to B)}$$

$$\underbrace{(\overset{T}{C} \to \overset{T}{A})}_{T\ 3} \to \underbrace{(\overset{T}{C} \to \overset{F}{B})}_{F\ 2}$$

F ۱

$A = T$ و $B = F$

$A \to B = F$

پس از فرض کردن غلط تالی، به غلط بودن فرض

$\sim(\sim C \vee A) \vee (\sim C \vee B) \equiv$

$(C \wedge \sim A) \vee (\sim C \vee B) \equiv$

$\underbrace{C \vee (\sim C \vee B)}_{T} \wedge [\sim A \vee (\sim C \vee B)] \equiv$

$\sim A \vee (\sim C \vee B) \equiv (\sim A \vee B) \vee \sim C$

شبیه هم

$$\frac{\begin{array}{c} P_1 \\ P_2 \\ \vdots \\ P_n \end{array}}{q \to r} \equiv \frac{\begin{array}{c} P_1 \\ P_2 \\ \vdots \\ P_n \\ q \end{array}}{r}$$

علت:
$P \to (q \to r) \equiv (P \wedge q) \to r$

$\bar{P} \vee (\bar{q} \vee r) \equiv (\bar{P} \vee \bar{q}) \vee r \equiv \sim(P \wedge q) \vee r \equiv$
$(P \wedge q) \to r$

می‌خواهیم از P نتیجه بگیریم $q \to r$

این معادل است با این که از $P \wedge q$ نتیجه بگیریم r

سورها quantifier
(کمیت‌ساز)

$\exists! x : x^2 = 4$

درست یا غلطی‌اش به عالم سخن بستگی دارد

اگه عالم سخن N (اعداد طبیعی) باشه: $N = \{0, 1, 2, \dots\}$

غلط نیست و درست است چون فقط یکی است 2.

اگر عالم سخن Z باشه: غلط است چون یکی نیست و دو تاست 2 و -2

سور عمومی $\forall$ (برای همه‌ی مقادیر)

سور وجودی $\exists$ (وجود دارد)

سور صفر $\nexists$ (وجود ندارد)

سور یکتا $\exists!$ (فقط یکی وجود دارد)

سور دوتا $\exists^2$ (فقط ۲ تا وجود دارد.)

$\overset{\infty}{\forall}$ از یک نقطه به بعد (از $\forall$ قوی‌تر)

فرض کن عالم سخن Z است و $y = x^2 + x$: $P(x, y)$ کدام عبارات T هستند؟

a) $\forall y\ \exists x\ P(x, y)$ [هر y، یعنی x های $P(x, y)$] — هر ($\forall$) عدد صحیح (Z) که به جای y قرار دهیم، حداقل یک

b) $\forall x\ \exists y\ P(x, y)$ — هیچ مقداری باعث نمی‌شود که این اتفاق بیفتد $y = x^2 + x$. مقدار زوجی ۱۲ است پس

c) $\exists y\ \forall x\ P(x, y)$ — جواب صحیحی هم ندارد، اما اگر عالم اعداد مختلط بود، لزوماً جواب داشت.

b) هر چیزی جای x بذاریم، یک عدد صحیح جای y پیدا میشه که $P(x,y)$ پس درسته.

c) حداقل یک عدد صحیح جای y وجود دارد که به ازای آن بتوان تمام اعداد صحیح را به جای x قرار داد که $x^2 = y$. False

d) $\exists x\ \forall y\ P(x,y)$ = False

e) حداقل — $\exists x\ \exists y\ P(x,y)$ = True

$$\forall x\ \forall y\ P(x,y) \equiv \forall y\ \forall x\ P(x,y)$$

عالم سخن را $\mathbb{N} = \{0,1,2,\dots\}$ فرض کنید و $P(x,y): x \geq y$. ۵تا سؤال بالا را بررسی کنید.

a) هر چیزی جای x بذاریم، مثلاً مساوی اش رو بذاره مساوی نداشت. T

b) T

c) به جای y می‌شود 0 انتخاب کرد. T

d) به جای x یک عددی هست که بشه کل اعداد رو جای y گذاشت. F

e) T

سؤال: فرض کن $S(x)$: x دانشجوی این کلاس است ، $P(x)$: x قبول می‌شود.

جمله‌ی «همه‌ی دانشجویان این کلاس قبول می‌شوند.» را با دو فرض زیر با سور بیان کنید.

الف) عالم سخن = دانشجویان این کلاس — $\forall x\ P(x)$ ؟ ✓

ب) عالم سخن = همه‌ی انسان‌ها — $\forall x: S(x) \to P(x)$ هر انسانی به شرطی که دانشجوی این کلاس است قبول می‌شود

پیشنهاد: $\forall x: S(x) \wedge P(x)$ ✗ $\forall x: S(x) \to P(x)$ ✓

قانون: سور عمومی را با ترکیب شرطی استفاده می‌کنیم. سور وجودی را با ترکیب عطفی استفاده می‌کنیم.

«بعضی دانشجویان این کلاس قبول می‌شوند.»

عالم: انسان‌ها. پیشنهاد: $\exists x: S(x) \wedge P(x)$ ✓ $\exists x: S(x) \to P(x)$ ✗

چرا جمله‌ی $\exists x: S(x) \to P(x)$ بد است؟ چون این جمله به ازای هر x ای که انسان است و عضو این کلاس نیست T می‌شود، چون $S(x)$ اش False می‌شود.

نقیض سورها

$$\sim(\forall x\ P(x)) \equiv \exists x\ \overline{P(x)}$$

$$\overline{(\exists x\ P(x))} \equiv \forall x\ \overline{P(x)} \equiv \nexists x\ P(x)$$

$$\forall x\ P(x) \equiv \nexists x\ \overline{P(x)}$$ به ازای هر x، $P(x)$ درست.

$$\overline{(\nexists x\ P(x))} \equiv \overline{(\forall x\ \overline{P(x)})} \equiv \exists x\ P(x)$$

$\sim(\forall x\, \exists y\ (x+y>2 \to x>5))$
$\equiv \exists x\, \forall y : x+y>2 \wedge x\leq 5$

$p \to q \equiv \bar p \vee q$
$\overline{(p\to q)} = p \wedge \bar q$

رابط های منطقی کامل

$\{\vee, \wedge, \sim\}$ کامل است یعنی تمام توابع را با این ها ساخت. بر هر رابطه که بشود با این کامل است و هر عملگری که بشود این سه تا را با هاش ساخت را کامل است.

ثابت کنید Nand کامل است. $\uparrow$ باید به کمک Nand ، آن سه تا را بسازیم.

$(a\uparrow b) = (a'\cdot b')' = a+b$

$((a\cdot 1)'\cdot(b\cdot 1)')'$ ((۵۲))

از صفر و یک نیز نتیجه - کامل منطقی

not: $(a\cdot a)' = a\uparrow a \equiv a'$

AND: $(p\uparrow q)\uparrow(p\uparrow q) \equiv p\wedge q$

OR: $(p\uparrow p)\uparrow(q\uparrow q) \equiv \bar p \uparrow \bar q \equiv \overline{(\bar p \wedge \bar q)} \equiv p\vee q$

تمرین: نشان دهید کامل اند: $\{\downarrow\}$ nor و $\{\sim, \vee\}$ و $\{\sim, \wedge\}$ و $\{\sim, \to\}$

از هر دو کدام می استفاده کنیم تا $\{\vee$ و $\wedge$ و $\sim\}$ بسازیم.

مثلاً با کمک $\vee$ و $\sim$ ، $\wedge$ را بسازیم.

سازگاری

گزاره های $p_1, p_2, p_3, \dots, p_n$ را سازگار گویند هرگاه $p_1\wedge p_2\wedge \dots \wedge p_n \neq F$. یعنی حالتی وجود داشته باشد $p_1, p_2, \dots, p_n$ همگی T شوند.

$\bar p$ و p ناسازگارند.

p و $\bar p \wedge q$ ناسازگارند.

$\bar p \vee q$ و p سازگارند. چون می شود هر دو را True کرد.

سوال: آیا سازگارند گزاره های زیر؟ $\{p\to q,\ q\to r,\ \bar r\vee u,\ \bar u\wedge s,\ s\to \bar p\}$

برای گزاره های فوق حالتی وجود دارد که همگی True بشوند.

باید سعی کنیم حالتی پیدا کنیم که همه را True کند.

راه سخت: AND کنیم گزاره ها را، بعد ساده کنیم و اگر آخرش F شد، سازگار نیست اما هر چیزی (عبارتی)

در این کتاب از استنتاج استفاده می کنیم استنتاج که هم ارزی نیست.

۱) $\bar u \wedge s : T \Leftarrow u : F$ و $s : T$

۲) $\bar r \vee u : T \Leftarrow$ چون $u : F$ پس $r : F$

۳) $q\to r : T \Leftarrow$ چون $r : F \leftarrow T : F$

فرم‌های نرمال

DNF : disjunctive normal form فرم نرمال فصلی ≡ SOP: sum of products جمع ضرب‌ها

مثلاً شکل $p.q + \bar{p}.r$ ، DNF است.

CNF: conjunctive normal form فرم نرمال عطفی ≡ POS: product of sums ضرب جمع‌ها

مثلاً شکل $(p+\bar{q}).(p+r)$ ، CNF است. چون به صورت ضرب جمع‌ها هست.

$p.q + p.(r+s)$: جمع ضرب‌ها نیست.
نه DNF نه CNF [ضرب جمع‌ها هم نیست.

DNF تبدیل به $\equiv \underbrace{p.q + p.r + p.s}_{DNF}$ CNF تبدیل به $\equiv \underset{(p+0)}{p}.\underbrace{(q+r+s)}_{CNF}$

$p+q$ ، p ، $\bar{q}$ ، $p.q$ ، $p.q.\bar{r}$ هم DNF هم CNF اند. (دلیل)

$p+q = p.1 + q.1 \rightarrow$ جمع ضرب‌ها

$(p+q).(1+0) \rightarrow$ ضرب جمع‌ها

یک عبارت را می‌خواهیم از DNF به CNF و بالعکس تبدیل کنیم، یعنی آییم دوگان کنیم (دوگانِ دوگانش، دوگانش است خودش)

عملیات انجام می‌دهیم برای تبدیل. $A = (p+\bar{q}).(\bar{p}+r) \equiv p.r + \bar{q}.\bar{p} + \bar{q}.r$

PDNF principle

PDNF ، DNF ای هست که درون جملاتش تمامی متغیرها موجود باشند.

هر DNF ای که هر جمله‌اش مینترم است.

← جمله‌ی ضربی که در آن همه‌ی لیترال‌ها هستند.

متغیر یا not اش.

PCNF

PCNF ، CNF ای است که هر جمله‌اش ماکسترم است.

← هر جمله‌ای که در آن، همه‌ی لیترال‌ها هستند.

چطور یک فرمول رو به ما می‌دهند تبدیل کنیم به PCNF و...

ماکسترم: جمله‌ی جمعی که در آن، همه هستند.

M_i شماره

p	q	r	مینترم = m_i	ماکسترم = M_i
0	0	0	$m_0 = p'q'r'$	$p+q+r = M_0$
0	0	1	$m_1 = p'q'r$	$p+q+r' = M_1$
0	1	0	$m_2 = p'qr'$	$p+q'+r = M_2$
0	1	1	$m_3 = p'qr$	$p+q'+r' = M_3$
1	0	0	$m_4 = pq'r'$	
1	0	1	$m_5 = pq'r$	
1	1	0	$m_6 = pqr'$	
1	1	1	$m_7 = pqr$	

نکته: P متغیر با ارزش

Year. Month. Date. ۱۳

n تا متغیر، 2^n تا حالت دارند که به ازای هر حالت، یک مینترم و یک ماکسترم می‌توان تخصیص داد، پس 2^n تا مینترم و 2^n تا ماکسترم وجود دارد.

مثال: تابع زیر رو به فرم PCNF و ...

$A(p,q,r) = (p \to q) \wedge (p \leftrightarrow r)$

$$(p \to q) \wedge (p \leftrightarrow r) \equiv (\sim p \vee q) \wedge (p \to r) \wedge (r \to p) \equiv$$
$$(\sim p \vee q) \wedge (\sim p \vee r) \wedge (\sim r \vee p) \equiv$$
$$(\bar{p} + q) \cdot (\bar{p} + r) \cdot (p + \bar{r}) \equiv$$
$$(\bar{p} + q + r)(\bar{p} + q + \bar{r})$$

روش ۱: جبری.

$$(p \to q) \wedge (p \leftrightarrow r) \equiv (\bar{p} + q) \cdot (p \to r) \cdot (r \to p)$$
$$\equiv (\bar{p} + q) \cdot (\bar{p} + r) \cdot (p + \bar{r})$$

سوال:

$$\cancel{\bar{p} + q + r\bar{r} \equiv (\bar{p} + q + r) \wedge (\bar{p} + q + \bar{r})} = \underbrace{(\bar{p} + q + r)}_{M_4}\underbrace{(\bar{p} + q + \bar{r})}_{M_5} \cdot \underbrace{(\bar{p} + \bar{q} + r)}_{M_4}\underbrace{(\bar{p} + \bar{q} + r)}_{M_6} \cdot$$
$$\underbrace{(p + q + \bar{r})}_{M_1}\underbrace{(p + \bar{q} + \bar{r})}_{M_3} \quad PCNF$$

(همراه ترتیب P, q, R) وگرنه غلط می‌شود.

$$= \prod M(1,3,5,4,6) \quad \text{ضرب ماکسترم‌ها}$$
$$= \sum m(0,2,7) = m_0 + m_2 + m_7 \quad PDNF$$

یادت: جدول بکشی، صفرها رو ضرب کن می‌شه ضرب ماکسترم‌ها. اما ۱ها رو جمع کن می‌شه جمع مینترم‌ها.

نکته: $(a + c)(a + b) = a + b \cdot c$

pqr	$p \leftrightarrow q$	$p \leftrightarrow r$	A	
000			1	$\to m_0$
			0	
			1	$\to m_2$
				$\dots$

فصل اول پیوست و فصل ۲ مطالعه