تست ۲۰ صفحه ۱۹ $(\sim P_1 \vee P_2) \to P_3$ PCNF →   روش ۱: جدول و ضرب ماکسترم‌ها

روش ۲: $(\overline{\overline{P_1} \vee P_2}) + P_3 = P_1 \cdot \overline{P_2} + P_3 = \underbrace{(P_1 + P_3)(\overline{P_2} + P_3)}_{CNF} = (P_1 + P_2 + P_3)(P_1 + \overline{P_2} + P_3)(P_1 + \overline{P_2} + P_3)(\overline{P_1} + \overline{P_2} + P_3)$

تست ۴۱ صفحه ۱۹۵ $\exists x\, P(x)$

$$\frac{\forall x \forall y\, (P(x) \to Q(y))}{\forall y\, Q(y)} \equiv \overline{P(x)} \vee Q(x) \xrightarrow{not} \exists x\, P(x)$$

$$\frac{p \vee q \quad \sim p}{q} \to \frac{\forall x\, \overline{P(x)} \vee \forall y\, Q(y)}{\forall y\, Q(y)}$$

صرفاً فقط روی $Q(y)$ اثر دارد

همون طور که داریم: $p \vee q$ ، $\sim p$ ، $\therefore q$ ، این جا هم $\exists x\, P(x)$ حکم P رو داره، $\forall x\, \overline{P(x)}$ حکم $\overline{P}$ رو داره و $\forall y\, Q(y)$ حکم q رو داره.

تست ۳۰ صفحه $\bar{x}_1 \wedge (x_1 \vee \bar{x}_2) \wedge \dots \wedge (x_{n-1} \vee \bar{x}_n) \equiv True$

$\equiv \bar{x}_1 \cdot (x_1 + \bar{x}_2) \cdot (x_2 + \bar{x}_3) \cdot \dots \cdot (x_{n-1} + \bar{x}_n) \equiv True$

$\equiv \bar{x}_1 \cdot \bar{x}_2 \cdot (x_2 + \bar{x}_3) \cdot \dots (x_{n-1} + \bar{x}_n) \equiv True$

$\equiv \bar{x}_1 \cdot \bar{x}_2 \cdot \bar{x}_3 (x_3 + \bar{x}_4) \cdot \dots \cdot (x_{n-1} + \bar{x}_n) \equiv True$

$\vdots$

$\bar{x}_1 \cdot \bar{x}_2 \cdot \bar{x}_3 \cdot \dots \cdot \bar{x}_n \equiv True$

مثال ۱۵. «هر کسی دقیقاً یک بهترین دوست دارد.»

$B(x,y)$: y بهترین دوست x است.   عالم سخن: انسان‌ها

فرم Rosen $\forall x\ \exists! y : B(x,y)$

یا این مدل سؤال $\equiv$

$\forall x\, \exists y\, [B(x,y) \wedge \forall z\, ((z \neq y \to \sim B(x,z))]$

واسه هر x ای یه y وجود داره که y بهترین دوست x باشه و هر z ای که دوست x باشه، بهترین دوست x نباشه، یعنی قطعاً فقط همون y بهترین دوست x هست.

دامنه‌ی ? همه‌ی پاورقی‌ها ۱۵ - ۱۶

تست ۲۸ $((A \to B) \vee C) \to D = ?$ $A = 1 \quad B = \frac{1}{2} \quad C = 0 \quad D = \frac{1}{2}$

$((\sim A \wedge B) \to C) \vee \sim D = ?$ (منطق فازی) $\frac{1}{2}$ هم باید بود

$not(\frac{1}{2}) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ $\{0, \frac{1}{2}, 1\}$ ← قبلاً $\{0, 1\}$ بود

$And(a,b) = min$ همون and: 0 and $0 = 0$ 0 and $1 = 0$ 1 and $1 = 1$ ، min گرفته.

$OR(a,b)$ max گرفتن   همون or = 1 OR $0 = 1$ 0 OR $0 = 0$ 1 OR $1 = 1$: max گرفته

تابع ارزش (Value) V

تابع ریاضی که ورودی‌اش گزاره و خروجی‌اش 0 و 1 است.

$V:$ گزاره $\to \{0, 1\}$

$V(F) = 0$

$V(T) = 1$

$V(P \wedge q) = V(P) \times V(q)$

$V(P \vee q) = V(P) + V(q) - V(P) \times V(q)$ * → چرا این منها رو داره؟ چون اگه $V(P)$ و هم $V(q)$ یک باشه،

اونوقت اگه این منها نباشه، $V(P \vee q) = 2$ که امکان نداره ارزش یک گزاره غیر از 0 یا 1.

$V(\bar{P}) = 1 - V(P)$

تست ۲۲ $P \to q$ P اگر $q \equiv q$ فقط اگر $P \equiv$. q فقط علت P است. ← $P \to q$ ، اگر $q = 1$ ، P چه ۱ باشه چه 0 ...

علت $P \mapsto q$ یک رابطه‌ی دلخواه هست که $P \mapsto q \equiv q \to P$ P فقط علت q است. $P \mapsto q$

$V((P \wedge q) \mapsto q)$ علت

$= q$

(۱)

p	q	
0	0	1
0	1	0
1	0	1
1	1	1

از این‌ها با توجه به تعریف (P فقط علت q است.) می‌فهمیم همان $q \to P$ است. خواسته بپیچونه.

$v((p\wedge q)\to q) = v(q \to (p\wedge q))$

$= v(\bar q \vee (p\wedge q))$

$= v(\bar q \vee p)$

$= v(\bar q) + v(p) - v(\bar q).v(p)$

$= 1 - v(q) + v(p)\underbrace{(1 - v(\bar q))}_{v(q)}$

$= 1 - v(q)(1 - v(p)) = 1 - v(q)\,v(\bar p)$

۲۰۰ تا تست نارنجی دو جلد آبی را بزنیم ← عالی

فصل ۲ - شمارش **

اصل جمع: اگر عملی m حالت داشته باشد، عمل دیگری مستقل از عمل اول n حالت داشته باشد و یکی از دو عمل را بخواهیم انجام دهیم، m+n حالت داریم.

اصل ضرب: اگر عملی m حالت داشته باشد، عمل دیگری به ازای هر بار تکرار عمل اول، n حالت دارد، آنگاه این دو عمل با هم m×n حالت دارد.

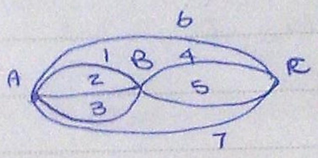
A→C ۳×۲=۶

A→C→A ۶×۶=۳۶

A→C→A رفت و برگشت دقیقاً مثل هم نباشد ۶×۵=۳۰

A→C→A رفت و برگشت از یک راه نباشد ۶×۲=۱۲

بدون در نظر گرفتن مسیر ۶ و ۷



۶+۲=۸

۸×۸=۶۴

۸×۷=۵۶

۶×۴ + ۲×۷

با وجود مسیر ۶ و ۷

آنالیز ترکیبی

- جایگشت (تبدیل): permutation: جابه‌جایی اشیا، حالت جدید است. مثلاً با ۱ تا ۵ عدد ۳ رقمی بنویسید ... ۱۲۳ ۱۳۲ ۲۱۳
- ترکیب: combination: جابه‌جایی اشیا یا عناصر، حالت جدید نمی‌دهد. مثلاً زیرمجموعه‌های سه عضوی {۱، ۲، ...، ۵}

مثلاً با ارقام ۱ تا ۵ عدد سه رقمی با ارقام صعودی بنویسید. ۱۲۳ فقط که {1, 2, 3} ← حالت جدید نیست. ↓ {1,2,3}

جایگشت‌ها که در روش تکرار ارقام هستند اینجا.

۶ حالت]

ترکیبی " " "

- جایگشت بدون تکرار: n تا شیء متفاوت وجود دارد و ما می‌خواهیم k تا شیء متفاوت انتخاب کنیم و با هم جابه‌جا کنیم.

$$\frac{\text{مکان ۱}}{n} \times \frac{\text{مکان ۲}}{(n-1)} \times \frac{\text{مکان ۳}}{(n-2)} \times \cdots \times \frac{\text{مکان } k}{n-(k-1)}$$

$$n\times(n-1)(n-2)\cdots\times(n-(k+1)) =$$
$$n\times(n-1)(n-2)\times\cdots\times(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$$
$$= P(n,k) = P_n^k = (n)_k$$

- جایگشت با تکرار: n نوع شیء متفاوت وجود دارد می‌خواهیم k شیء (تکرار مجاز) انتخاب کنیم و با هم جابه‌جا کنیم.

(فرض می‌کنیم از هر شیء به مقدار زیاد داریم که بتوان تکرار کرد.)

$$\frac{\text{مکان ۱}}{n} \times \frac{\text{مکان ۲}}{n} \times \cdots \times \frac{\text{مکان } k}{n} = n^k$$

- ترکیب بدون تکرار: n تا شیء متفاوت وجود دارد، می‌خواهیم k شیء متفاوت انتخاب کنیم و به یک حالت مثلاً صعودی بچینیم.

k تا شیء به تعداد k! جابه‌جایی دارد. در فرمول $\frac{n!}{(n-k)!}$ جابه‌جایی هم شمارش شده ← حذف جابه‌جایی تقسیم $\frac{n!}{(n-k)!}$ بر k!

$\frac{n!}{(n-k)!} = C(n,k) = C_n^k = \binom{n}{k}$

ترکیب با تکرار: n نوع شیء وجود دارد می‌خواهیم k شیء (تکرار مجاز) انتخاب کنیم و به ترتیب اصلاً اهمیتی نمی‌دهیم.

$$\binom{n+k-1}{k} = C_{n+k-1}^{k}$$

سوال: یک گل فروشی ۳ نوع گل دارد و از هر نوع به تعداد کافی هم، مشتری سفارش ۴ شاخه گل دارد. به چند حالت می‌توان یک دسته گل شامل ۴ شاخه گل خرید؟ تکرار هم، ترکیب است. (دسته گل را جابجا بکنیم عوض نمی‌شود) جابجایی ترتیب همه را هم تشخیص نمی‌دهد ترکیب است.

۴ تا مثل هم ۳ حالت

۳ تا مثل هم ۶ حالت

۲ تا مثل هم ۳ حالت

۱ تا مثل هم ۳ حالت

$$\binom{3+4-1}{4} = \binom{6}{4} = 15$$

سوال: چند دسته‌ی سه‌تایی (a, b, c) وجود دارد که $1 \le a < b < c \le 6$ ترکیب بدون تکرار (چون جابجایی مجاز نیست - تکرار هم ندارد)

$\binom{6}{3} = 20$

حالا اگه بتونیم سوال رو به صورت نامساوی بنویسیم میشه با فرمول ترکیب بدون تکرار حل کرد، البته فقط برای سوالای مربوط به ترکیب! فکر کنم

سوال: چند دسته‌ی سه‌تایی (a, b, c) وجود دارد که $1 \le a \le b \le c \le 6$

داریم: $a \le b \iff a < b+1$

$1 \le a \le b \le c \le 6$

$1 \le \underbrace{a}_{} < \underbrace{\overset{B}{b+1}}_{} < \underbrace{c+2}_{} \le 8$ $\binom{8}{3}$ ترکیب 3 از 8

سه تا شیء متفاوت

n تا شیء داریم از ۱ تا n، k تا شیء می‌خواهیم از بین بر داریم

$1 \le x_1 < x_2 < \dots < x_k \le n$ $\binom{n}{k}$

$1 \le x_1 \le x_2 \le x_3 \le \dots \le x_k \le n \longrightarrow 1 \le x_1 < x_2+1 < x_3+2 < \dots < x_k+k-1 \le n+k-1$

تبدیل به بدون تکرار

علامت مساوی داشتن بین مثلاً $x_2 \le x_3$ این معادل $x_2 < x_3+1$ هست.

سوال: به چند حالت می‌توان ۴ عدد از دنباله‌ی ۵، ۴، ۳، ۲، ۱، ۱-، ۲-، ۳- انتخاب کرد طوری که حاصلضربشان مثبت باشد؟

الف) تکرار مجاز نباشد.

ب) تکرار مجاز باشد.

حالت‌ها طوری که حاصلضربشان مثبت شود:

- ۴ تا مثبت
- ۲ تا مثبت، ۲ تا منفی
- ۴ تا منفی

۲ تا مثبت و ۲ تا منفی + ۴ تاش منفی + ۴ تاش مثبت

الف) $\binom{5}{4} + 0 + \binom{5}{2}\binom{3}{2}$

ب) $\binom{5+4-1}{4} + \binom{3+4-1}{4} + \binom{5+2-1}{2}\binom{3+2-1}{2}$

سوال: چه دسته جواب (a,b,c,d,e) وجود دارد که $-3 \le a < b \le c < d \le e < 15$

سمت چپ ها را جوری ... تا به صورت بدون تکرار برسیم $-3 \le a < b < c+1 < d+1 < e+2 \le 12$

$\binom{15}{5}$ ← از -3 تا 11 میشه ۱۵ تا $12-(-3)=15$

ده نفر دور یک میز در کنار هم نشسته اند، به چند حالت می‌توان سه نفر انتخاب کرد به شرطی که:

الف) هیچ دو نفری کنار هم نباشند. $\binom{10}{3}$ عددهای a,b,c $1 \le a < b < c \le 10$ هر دو عدد حداقل ۲ واحد اختلاف دارند

ب) افراد کنار هم انتخاب نشوند. دو به دو حداقل ۲ تا اختلاف دارند ← تبدیل می‌کنیم به حداقل ۱ اختلاف یعنی ...

$1 \le a < \underbrace{b-1}_{B} < \underbrace{c-2}_{C} \le 8$ $\binom{8}{3}$

ترکیب

سوال ... می‌شود به یک مسئله‌ای تبدیل کرد که حداقل یک اختلاف دارند (کاورها)، می‌توان ترکیب نوشت (بسیار مهم)

سوال: مجموعه ۱ تا ۲۰، $\{1,\dots,20\}$ چند زیرمجموعه‌ی ۴ عضوی دارد طوری که اختلاف عضوها حداقل ۳ باشد.

a,b,c,d $1 \le a < b < c < d \le 20$ هر دو عضو حداقل ۳ است.

$1 \le a < b-2 < c-4 < d-6 \le 14$ $\binom{14}{4}$

چون عضو ها هی ۲ تا عقب‌تر میرن

یعنی اختلاف بشود یک واحد حداقل.

سوال: a,a,b,b چند تا جایگشت دارند؟ $\frac{4!}{2!2!}=6$ aabb, abab, baab, abba, bbaa, baba, abba

۲۴ تا ... ۱۸ جایگشت. متفاوت نیستند تقسیم بر ۲!

ترکیبات

تعداد جایگشت n تا شیء که

n_1 تا شیء مثل هم

n_2 تا شیء مثل هم

n_3 تا شیء مثل هم

$\vdots$

n_k تا شیء مثل هم

$$\frac{n!}{n_1!\,n_2!\cdots n_k!} = \binom{n}{n_1,n_2,\dots,n_k}$$

سوال: با حروف TALLAHASEE (۱۰ حرف)

الف) چند کلمه‌ی ۱۰ حرفی می‌شود نوشت؟ (معنی‌دار هم نباشد) $\frac{10!}{2!2!3!2!}$

ب) در چند تاش A ها کنار هم هستند؟ (کل A ها کنار هم را یک شیء فرض می‌کنیم) $\frac{8!}{2!2!}$ AAA TL

ج) در چند تاش (از الف) دو A کنار A نیست؟

T L M S E E ... $\frac{7!}{3!2!2!}$ حالت داریم. از ۷ A هاینکه کنار هم باشند ... (۸ جای خالی)

A ها نمی‌توانند کنار هم باشند.

$$\frac{7!}{3!2!} \times \binom{8}{3}$$

A ها کنار هم نیستند چون جای خالی تا هم ندارند

سؤال: ۵ پسر و سه دختر به چند حالت در یک ردیف می‌نشینند اگر قرار باشد دخترها کنار هم ننشینند؟

$$5! \times \binom{6}{3} \times 3!$$

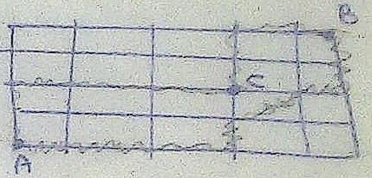
جابجایی (دخترها)

سؤال: ۵ تا گلابی و سه هلو به چند حالت در یک ردیف می‌توان چید که هلوها کنار هم نباشند؟

$$5! \times \binom{6}{3}$$

هلوها یکسان اند و جابجایی ندارند

سؤال: به چند حالت می‌توان از A به B رفت؟ به شرطی که از (↑ →) حرکت ها مجاز باشند فقط.



* برای رسیدن از A به B، حتماً ۵ حرکت به راست و ۴ تا به بالا داریم:

مثلاً UURRRUURR

$$\frac{9!}{5!\,4!}$$

۵ تا R داریم، ۴ تا U داریم

۴ به ۴ تا حرکت $\frac{\;}{4!\,5!}$ → R ۵ تا

UUR

هر دنباله یک شامل ۵ حرف R و ۴ تا حرف U است. جواب است و بالعکس.

تعداد این دنباله‌ها را می‌شماریم.

شرط هم ممکن است بگذارند. (C)

سه نوع حرکت مجاز باشد قطری ↗ حالت‌ها چندتا هستند؟

$$0D + 1D + 2D + 3D + 4D$$

(۰ تا قطری، قطری)

$$\frac{9!}{5!\,4!} + \frac{8!}{4!\,3!\,1!} + \frac{7!}{3!\,2!\,2!} + \frac{6!}{2!\,1!\,3!} + \frac{5!}{1!\,0!\,4!}$$

هر D که میرویم یک R و یک U کم می‌شود.

همه‌ی حالت‌ها را می‌نویسیم، جمع می‌زنیم.

مستطیل $m \times n$ → ↑

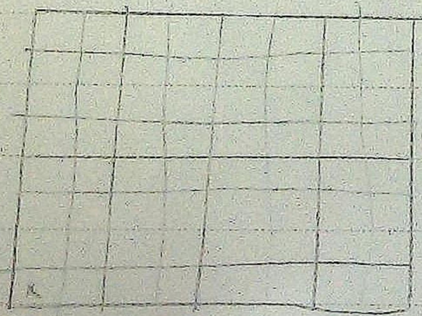
$$\frac{(m+n)!}{m!\,n!}$$

مستطیل $m \times n$ → ↑ ↗

$$\sum_{k=0}^{\min(m,n)} \frac{(m+n-k)!}{(m-k)!\,(n-k)!\,k!}$$

سؤال: مهره‌ی شاه در صفحه‌ی شطرنج ۸ در ۸ به چند حالت می‌تواند از خانه‌ی سمت چپ پایین به خانه‌ی سمت راست بالا برود؟ (ترجیحاً)

به شرطی که برگشت مجاز نباشد. حرکت مهره‌ها را بشناسیم در شطرنج ...



مثل این است که جدول ۷ در ۷ است

چون خانه‌ها ... از خود خانه هست.

$$\sum_{k=0}^{7} \frac{(14-k)!}{(7-k)!\,(7-k)!\,k!}$$

شاه ... باید ... ۸ در ۸ می‌باشد.

۵	۰	۰
۵	-	-
-	۵	-
۳	۲	-

مثلا

سوال: ۵ تا سیب (مسئله یکسان) به چند حالت می‌توان بین سه نفر توزیع کرد؟
دو تا خط عمودی بین سیب‌ها و به سه قسمت تقسیم می‌کند. به چند حالت ۷ تا
شی داریم که دو تا شی مثل هم هستند (خط) و ۵ تا شی مثل هم

$\frac{7!}{2!\,5!}$ ← حالت ۷ تا شی داریم که ۲ تا شی مثل هم و ۵ تا شی مثل هم هستند

سوال: تعداد حالات توزیع n شیء یکسان بین k جعبه‌ی متفاوت.

$$\binom{n+k-1}{k-1}=\binom{n+k-1}{n}=\frac{(n+k-1)!}{n!\,(k-1)!}$$

$x_1+x_2+\cdots+x_k=n$

چند تا جواب صحیح نامنفی x_i ... n شیء یکسان

$\frac{(n+k-1)!}{n!\,(k-1)!}$ نیز داریم.

تعداد جملات $(x_1+x_2+\cdots+x_k)^n$ چند تاست؟
(فکر کن جامع همش)

۸ تا سیب را به چند حالت می‌توان بین سه نفر توزیع کرد به شرطی که به هر نفر حداقل یک سیب برسد؟
۸ تا سیب داریم، ۳ تا به سه نفر بده (با توجه به این که به هر نفر حداقل ۱ تا برسد)
۵ تا می‌ماند

$\binom{5+3-1}{3-1}$

معادله‌ی $x_1+x_2+x_3=13$ با شرایط مذکور چند جواب صحیح دارد؟

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3=13 \\ x_i \geq i \quad , \quad i=1,2,3 \end{cases}$$

نفر اول حداقل یکی

از ۱۳ تا ۶ تا کم کن به همه چون ... ۷ تا می‌ماند

با توجه به $x_1\geq 1$ و $x_2\geq 2$ و $x_3\geq 3$

6

$$\frac{(7+3-1)!}{7!\,(3-1)!}$$

سوال ۱۱: نامعادله‌ی زیر چند جواب صحیح نامنفی دارد؟ $x_1+x_2+x_3\leq 15$ درست مثل این است که:

$x_1+x_2+x_3+x_4=10$

چون اگر $x_4=0$ ← حالت تساوی

اگر x_4 مقدار دیگری باشه حالت $x_1+x_2+x_3<15$ می‌شود.

$$\binom{10+4-1}{4-1}$$

جلسه‌ی بعد: فصل ۲ کامل می‌شود. فصل ۲ خیلی مطالعه شود، هنوز تستش را نزنیم