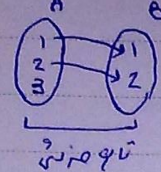
جلسه‌ی چهارم

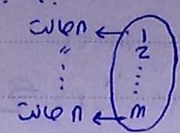
سوال: با n تا متغیر ساده چند تابع گزاره‌ای ناهم‌ارز می‌توان ساخت؟ بی‌شمار

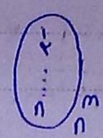
سوال: چند تا تابع از مجموعه‌ی $A=\{1,2,\dots,m\}$ به مجموعه‌ی $B=\{1,2,\dots,n\}$ می‌توان ساخت؟

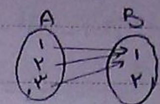
تابع از A به B رابطه‌ای است که به هر عضو A دقیقاً یک عضو از B را نسبت دهد، یعنی از هر عضو A دقیقاً یک فلش خارج شود. اگر عضوی وجود داشته باشد که از آن فلش خارج نشود "تابع جزئی" است.

$\{(1,1),(2,2)\}$

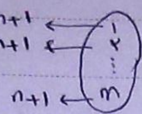








سوال: تعداد توابع جزئی از A به B چند تا است؟



$(n+1)^m - n^m - 1$ → هیچ

$(n+1)^m$: همه‌ی حالات را دارد، پس توابع و هیچ را از آن کم می‌کنیم.

n^m: توابع

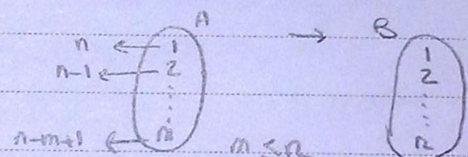
تعداد حالات توزیع n شیء یکسان در k جعبه‌ی متفاوت به شرطی که در هر جعبه حداقل یک شیء قرار گیرد: $\binom{n-1}{k-1}$

$n \geq k$ باید ابتدا به هر جعبه یک شیء بدهیم سپس n−k تا شیء می‌ماند که در رابطه‌ی $\binom{n+k-1}{k-1}$ به جای n، n−k می‌گذاریم و می‌شود $\binom{n-1}{k-1}$

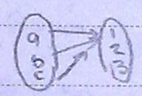
سوال: تعداد توابع یک به یک از A به B؟

تابع یک به یک از A به B یعنی به هر عضو B حداکثر یک فلش بیاید.

$$n(n-1)\cdots(n-m+1) = \frac{n!}{(n-m)!} = P(n,m) = (n)_m$$



1	2
abc	—
—	abc
a	bc
bc	a
b	ac
ac	b
c	ab
ab	c



تعداد حالات توزیع n شیء متفاوت در k جعبه‌ی متفاوت؟ k=2 جعبه متفاوت = 1, 2 ؛ n=3 شیء متفاوت = a, b, c

* شیء متفاوت و جعبه متفاوت = تابع (یعنی تعداد توابع از n عضو به k عضو)
* تعداد حالات توزیع n شیء متفاوت در k جعبه متفاوت به شرطی که در هر جعبه حداکثر یک شیء باشد معادل است با تعداد تابع یک به یک از n عضو به k عضو حداقل $\frac{k!}{(k-n)!}$ ، $n \leq k$
* تعداد حالات = تعداد تابع پوشا از n عضو به k عضو

سوال: به چند حالت می‌توان ۶ تا شیء یکسان را در دو جعبه‌ی یکسان توزیع کرد؟ ۴ حالت

۶	۰
۵	۱
۴	۲
۳	۳

چون جعبه‌ها یکسان است، برعکس نمی‌شود.

تعداد حالات توزیع n شیء یکسان در k جعبه‌ی متفاوت به شرطی که در هر جعبه حداقل یک شیء قرار گیرد. $n \geq k$ باید ابتدا به هر جعبه یک شیء بدهیم، سپس n−k شیء می‌ماند که $\binom{n-1}{k-1}$. (در رابطه‌ی $\binom{n+k-1}{k-1}$ به جای n، n−k می‌گذاریم می‌شود $\binom{n-1}{k-1}$)

سوال: به چند حالت می‌توان ۶ شیء متفاوت را در دو جعبه‌ی یکسان توزیع کرد؟

(جعبه‌ی ۱	= جعبه‌ی ۲)
۶ → ۱ حالت	۰
۵ → ۶ حالت	۱
۴ → $\binom{6}{4}$ حالت	۲
۳ → $\frac{1}{2}\binom{6}{3}$	۳

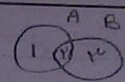
۳ → (هر دو حالت یکسان است، جعبه‌ها یکسان: abc def)

جعبه۱	جعبه۲
abc	def
def	abc

(یکسان)

Subject:
Year. Month. Date. (۲)

کاربرد مجموعه‌ها در شمارش:

۱) $|A\cup B| = |A| + |B| - |A.B|$ 

۲)

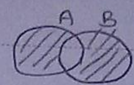
۳)

عدم شمول ۴)

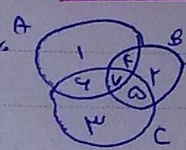
۵) $|\bar{A}.\bar{B}.\bar{C}| = |S| - |A| - |B| - |C| + |A.B| + |BC| - |ABC|$

۶) $|\bar{A}_1.\bar{A}_2 \dots \bar{A}_n| = |S| - \underbrace{\sum |A_i|}_{n \text{ جمله}} + \underbrace{\sum |A_iA_j|}_{\binom{n}{2} \text{ جمله}} - \underbrace{\sum |A_iA_jA_k|}_{\binom{n}{3} \text{ جمله}} + \dots$

۷) $|A-B| = |A| - |A.B|$

۸) $|A\Delta B| = |A| + |B| - 2|A.B|$  $= |A-B| \cup |B-A| = |A\cup B| - |A\cap B|$

$\underbrace{A\Delta B}_{1,2,5,6}\Delta C^{3,5,6,7} = 1,2,3,7$

سوال: در شکل $A\Delta B\Delta C$ ؟ 

$a\oplus b\oplus c = abc + \bar{a}\bar{b}c + \bar{a}b\bar{c} + a\bar{b}\bar{c}$

$a \le x \le b \to b-a+1$ $\qquad a<x<b \to b-a-1$

$a \le x < b \,,\; a < x \le b \to b-a$

$99 < 3x \le 999 \quad 33 < x \le 333 \to |A| = 300$

$100 \le 15x \le 999 \to 6.6 \le x \le 66.6 \to 7 \le x \le 66 \quad 60 \leftarrow$

$|A\cup B| = 300 + 180 - 60$

$100 \le 5x < 1000 \to 20 \le x < 200 \to |B| = 180$

$|A\Delta B| = 300 + 180 - (2\times 60)$

$|A-B|$

$|\bar{A}.\bar{B}| = |S| - |A| - |B| + |A.B|$

سوال: چند عدد سه رقمی وجود دارد که:

الف) مضرب ۳ باشد؟

ب) مضرب ۳ یا ۵ باشد.

ج) مضرب ۳ یا ۵ یا هر دو باشد.

د) مضرب ۵ باشد.

هـ) مضرب ۳ یا ۵ ولی نه هر دو.

و) مضرب ۳ باشد و مضرب ۵ نباشد.

ز) مضرب ۳ نباشد و مضرب ۵ نباشد.

سوال: چند عدد در مجموعه‌ی $\{1,2,\dots,1000\}$ وجود دارد که مضرب ۲ یا مضرب ۳ یا مضرب ۵ نباشد؟

$\overline{|A\cup B\cup C|} = |\bar{A}.\bar{B}.\bar{C}| = 1000 - \lfloor \frac{1000}{2} \rfloor - \lfloor \frac{1000}{3} \rfloor - \lfloor \frac{1000}{5} \rfloor + \lfloor \frac{1000}{6} \rfloor + \lfloor \frac{1000}{10} \rfloor + \lfloor \frac{1000}{15} \rfloor - \lfloor \frac{1000}{30} \rfloor$

مضرب ۲ باشد: $|A| = \lfloor \frac{1000}{2} \rfloor$

مضرب ۳ باشد: $|B| = \lfloor \frac{1000}{3} \rfloor$

مضرب ۵ باشد: $|C| = \lfloor \frac{1000}{5} \rfloor$

* در مجموعه از ۱ شروع شده یعنی $\{1,2,\dots,n\}$ آن‌گاه: $\lfloor \frac{n}{a} \rfloor$: چند تا مضرب a

مثال: با ۱ تا ۴ چند عدد ۵ رقمی می‌توان نوشت که حتماً شامل ۱ و ۲ باشند. شمارش مستقیم سخت چون حالت‌ها تعدادشان زیاد است.

عدم شمول (not این ساده‌تر) دو مجموعه تعریف می‌کنیم:

A: اعدادی که شامل ۱ نیستند.

B: اعدادی که شامل ۲ نیستند.

جواب: $|\bar{A}\cdot\bar{B}| = |S|-|A|-|B|+|AB| = ۴^۵-۳^۵-۳^۵+۲^۵$

و ۱ ← شامل عدد ۱ هستند. ← شامل عدد ۲ هستند.

شامل ۱ و ۲ نباشند (۱ و ۲ رو بذار کنار)

مثال: معادله‌ی زیر چند تا جواب صحیح دارد؟

$x_1+x_2+x_3=10$

$0 \leq x_1 \leq 3$

$0 \leq x_2 \leq 4$

$0 \leq x_3 \leq 5$

یادآوری: توضیع n شیء در k جعبه‌ی متفاوت (چند تا جواب صحیح نامنفی)

$x_1+x_2+\dots+x_k=n \quad \binom{n+k-1}{k-1}$

سه تا مشکل داریم ← سه تا مجموعه تعریف می‌کنیم.

A: جواب‌هایی که $x_1 \leq 3$ نیست. $(x_1 \geq ۴)$

B: " $x_2 \leq 4$ نیست " $(x_2 \geq 3)$

C: " $x_3 \leq 5$ نیست " $(x_3 \geq 6)$

جواب $= |\bar{A}\cdot\bar{B}\cdot\bar{C}| = \binom{۱۰+۳-۱}{۳-۱} - \binom{4+۳-۱}{۳-۱} - \binom{۵+۳-۱}{۳-۱} - \binom{۴+۳-۱}{۳-۱} + \binom{۱+۳-۱}{۳-۱} + \binom{۰+۳-۱}{۳-۱}$
$+\binom{۰+۳-۱}{۳-۱}+۰+۰$

$x_1+x_2+x_3=۱۰$

$x_1 \geq 1$

$x_2 \geq 2$

$x_3 \geq 3$

یکی به x_1، 2 تا به x_2، 3 تا به x_3 بدهیم.

آن چه می‌ماند: ۴ تا $\binom{۴+۳-۱}{۳-۱}$

← مثال بالا عدم شمول است.

$|\bar{A}\cdot\bar{B}\cdot\bar{C}| = |S|-|A|-|B|-|C|+|AB|+|AC|+|BC|-|ABC|$

$x_1+x_2+x_3=۱۸$

$۲ \leq x_1 \leq ۵$

$3 \leq x_2 \leq ۷$

$۳ \leq x_3 \leq ۸$

حداقل‌ها رو صفر کن، معادله‌ی زیر بیرون می‌شود مثل سؤال بالا.

به x_1، 2 تا، به x_2، 3 تا، به x_3، 3 تا بده.

از ۱۸ تا ۱۰ تا می‌ماند. بازه هم عوض می‌شه.

نامرتب‌سازی - پریش - عدم تطابق - مسئله‌ی تیج (خانم شیر نعل دری) derangement - کلاه تماشاچیان

به چند حالت می‌توان اعداد ۱ تا n را در مکان‌های ۱ تا n قرار داد طوری که هیچ عددی در مکان هم‌شماره‌اش نباشد.
(حالتی که هیچ کس سر جای خودش نیست رو می‌خواهیم بشماریم.)

$n=1$ ×

$n=۲ \quad \frac{۱}{۲} \quad \frac{۲}{۱}$ یک جواب

عدم شمول. یک عدد در جای خودش باشه بده ولی سر جای خودش نباشه خوب است.

$n=۳ \quad \frac{۱}{۲} \quad \frac{۲}{۳} \quad \frac{۳}{۱}$ دو جواب

$n=۴ \quad \underline{۱} \quad \underline{۲} \quad \underline{۳} \quad \underline{۴}$

⋮

چند جواب؟

جواب: $|\bar{A}_1\cdot\bar{A}_2\cdot\bar{A}_3\cdots\bar{A}_n|$

A_1: حالتی که عدد ۱ در جای خودش است.

A_2:

A_3

$\binom{n}{۲}$ جمله $\quad \binom{n}{۳}$ جمله

$|\bar{A}_1\cdot\bar{A}_2\cdots\bar{A}_n| = |S| - \sum|A_i| + \sum|A_iA_j| - \sum|A_iA_jA_k|$

$|\bar{A}_1\bar{A}_2\cdots\bar{A}_n| = n! - n\times(n-1)! + \binom{n}{۲}\times(n-۲)! - \binom{n}{۳}\times(n-۳)! + \dots (-1)^n\binom{n}{n}(n-n)!$

$D(n) = n!\,(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \dots + \frac{(-1)^n}{n!}) \simeq n! \times e^{-1}$

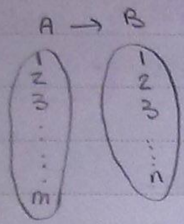
یادآوری: سری تیلور $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!}$

سؤال: چند تابع پوشا از $A = \{1,2,\dots,m\}$ به $B = \{1,2,3,\dots,n\}$ می‌توان نوشت؟

تابع پوشا، مجموعه‌ی اول از دوم بزرگتر و حتماً به همه‌ی اعضای B فلش زده باشند.

$|\bar{A}_1 \cdot \bar{A}_2 \cdot \bar{A}_3 \cdots \bar{A}_n| = |S| - \sum|A_i| + \sum|A_iA_j| - \sum|A_iA_jA_k| \dots$

کل توابع — به یک فلش نیاید (n تا) — به دو عضو فلش نیاید — در این سؤال =



A_1: توابعی که به 1 فلش نیاید.

A_2: توابعی که به 2 فلش نیاید.

A_n: توابعی که به n فلش نیاید.

جواب $= |\bar{A}_1\bar{A}_2\dots\bar{A}_n| = n^m - \binom{n}{1}(n-1)^m + \binom{n}{2}\times(n-2)^m - \binom{n}{3}(n-3)^m + \dots + (-1)^n\binom{n}{n}(n-n)^m = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}(n-k)^m$

عدم شمول پیچیده در کلاس نشد.

خواص ترکیب

$\binom{n}{0}=\binom{n}{n}=1 \quad \binom{n}{1}=\binom{n}{n-1}=n \quad \binom{n}{2}=\binom{n}{n-2}=\frac{n(n-1)}{2} \quad \binom{n}{3}=\binom{n}{n-3}=\frac{n(n-1)(n-2)}{6}$

الگوها $\binom{n}{k}=\binom{n}{n-k}$

انتخاب k نفر از n نفر

1* $\binom{n-1}{k-1}+\binom{n-1}{k}=\binom{n}{k}$ پاسکال

$\binom{n}{k}=\binom{n-2}{k}+2\binom{n-2}{k-1}+\binom{n-2}{k-2}$

2* $\binom{n}{0}\binom{m}{k}+\binom{n}{1}\binom{m}{k-1}+\binom{n}{2}\binom{m}{k-2}+\dots+\binom{n}{k}\binom{m}{0}=\binom{n+m}{k}$

انتخاب k نفر از جمعیت که m مرد و n زن هستند. یا همگی زن هستند یا هیچ مرد و ...

3* $\binom{n}{0}^2+\binom{n}{1}^2+\binom{n}{2}^2+\dots+\binom{n}{n}^2=\binom{2n}{n}$

همان ۲ است با مقدار برابر. به جای m و k گذاشتیم n

اثبات سفارشی: می‌خواهیم از بین n تا آدم، k تا آدم انتخاب کنیم، $\binom{n}{k}$ تا حالت دارد، این حالات دو جور هستند، یا شخص A، انتخاب می‌شود، یا A انتخاب نمی‌شود. اگر A انتخاب بشود مثل این است که می‌خواهیم از بین n-1 نفر، k-1 نفر انتخاب کنیم. $\binom{n-1}{k-1}$ حالت دارد، اگر A انتخاب نشود، مثل این است که می‌خواهیم، از بین n-1 نفر، k نفر انتخاب کنیم. که $\binom{n-1}{k}$ حالت دارد، جمعش می‌شود کل.

4* $\underbrace{\binom{n}{n}+\binom{n+1}{n}}_{\binom{n+2}{n+1}}+\binom{n+2}{n}+\dots+\binom{n+k}{n}=\binom{n+k+1}{n+1}$

$\binom{n+3}{n+1}$

روش ۱: $\binom{n}{n}=\binom{n+1}{n+1} \qquad \binom{n+1}{n+1}+\binom{n+1}{n}=\binom{n+2}{n+1}$

ست فصل ۲ را بزنیم.

نامساوی‌ها
[illegible]
اصل لانه کبوتری
[illegible]
فصل ۳ [illegible]