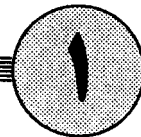


# خلاصه مباحث و نکات تحقیق در عملیات ۱

تهیه و تنظیم  
شیم

اسین نامجو

# مفاهیم تحقیق در عملیات و مدل سازی



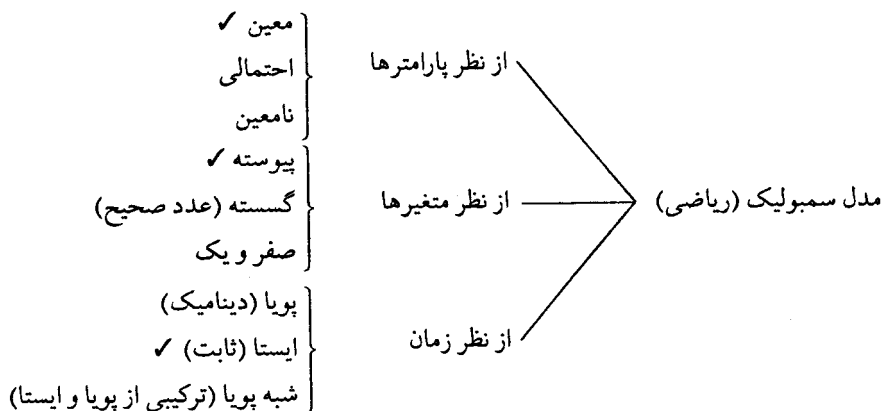
## ۱-۱- مقدمه

بروز انقلاب صنعتی موجب رشد و تعالی حیرت‌انگیز سازمان‌ها گردید. با افزایش تخصص و گسترش پیچیدگی سازمانها و شرکتها امر تصمیم‌گیری و همچنین تخصیص منابع موجود بین فعالیتهای بخشهای مختلف آن به منظور دستیابی به حداکثر کارایی، مشکل شده و نیاز به سیستماتیک نمودن تصمیمات داشت. از این‌رو به مرور زمان بحث تحقیق در عملیات پایه‌گذاری گردید. در حین جنگ جهانی دوم متخصصان و دانشمندان انگلیسی و آمریکائی بصورت سازمان یافته استفاده از مباحث علمی تحقیق در عملیات را در ماموریت‌های هوایی مورد استفاده قرار دادند.

## ۲-۱- مدل‌سازی مسائل

مدل، نمایش خاصی از یک واقعیت می‌باشد و انواع مختلفی دارد.

- ۱- مدل شماتیک      ۲- مدل آنالوگ      ۳- مدل سمبولیک (ریاضی)  
 ۴- مدل سینماتیک      ۵- مدل ژنتیک



مدلهای ریاضی مورد استفاده در این درس از نظر پارامتری معین بوده و شامل متغیرهای پیوسته می‌باشد و همچنین از نظر زمانی حالت ایستا دارند.

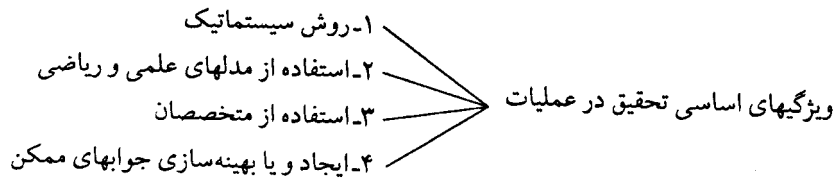
## ۳-۱- تعاریف

## ۱-۳-۱- برنامه‌ریزی خطی (LP) Linear Programming

تخصیص منابع محدود به فعالیتهای تعریف شده جهت افزایش بازدهی و یافتن بهترین راه‌حل بهینه را برنامه‌ریزی خطی می‌گویند. در واقع برنامه‌ریزی خطی نوع ساده‌ای از مدل برنامه‌ریزی ریاضی می‌باشد که بهترین گزینه را از میان روشهای ممکن انتخاب می‌کند. در برنامه‌ریزی خطی تابع هدف و محدودیتها همگی بصورت خطی نمایش داده می‌شود.

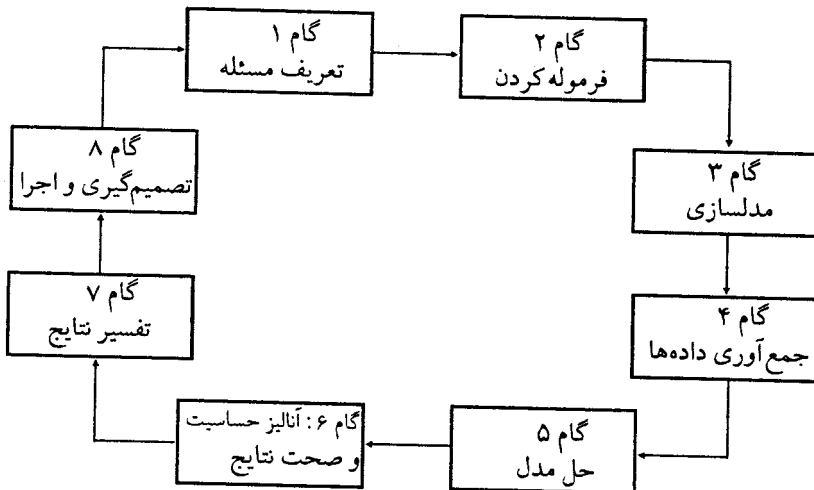
## ۲-۳-۱- تحقیق در عملیات (OR) Operations Research

مجموعه‌ای از مدلها و تکنیکهای کمی که از طریق روشهای علمی، مدیران را در امر تصمیم‌گیری در شرایط منابع محدود یاری می‌دهد.



۴-۱- فرآیند تصمیم‌گیری و حل مسائل تحقیق در عملیات

مطابق تقسیم‌بندی گرین فرایند حل مسائل OR در ۸ گام زیر قابل اجرا می‌باشد که گام‌های ۱ و ۲ به فعالیتهای قبل از مدل‌سازی، گام‌های ۳ تا ۶ به فعالیتهای حین مدل‌سازی و گام‌های ۷ و ۸ به فعالیتهای بعد از مرحله مدل‌سازی طبقه‌بندی شده است.



مدل گرین جهت حل مسائل تحقیق در عملیات

۵-۱- بخش‌های اصلی مدل برنامه‌ریزی خطی

۱- تابع هدف (Objective Function)

بیانگر حداکثر کردن ( $Max$ ) یا حداقل نمودن ( $Min$ ) عملکرد مدل می‌باشد.

۲- محدودیتهای کارکردی (قيود) (Functional Constraints)

بیانگر محدودیتهای منابع جهت رسیدن به اهداف مدل می‌باشد که به صورت بزرگتر مساوی ( $\geq$ ) کوچکتر مساوی ( $\leq$ ) و یا مساوی ( $=$ ) نمایش داده می‌شود.

## ۳- محدودیتهای غیر کارکردی یا متغیرهای تصمیم (Decision Variables)

شان دهنده مقدار عملکرد یا سطح یک فعالیت بوده و با  $(X_j)$  نمایش داده می شود. این متغیرها می توانند به صورت مثبت، به ندرت منفی و یا آزاد در علامت مورد استفاده قرار گیرند.

👉 **نکته:** متغیر آزاد در علامت، متغیری می باشد که می تواند مقادیر منفی، مثبت و یا صفر را شامل گردد.

👉 **نکته:** به محدودیتهای به شکل  $(X_j \geq 0)$  محدودیتهای غیر منفی *Non Negative Constraints* گفته می شود.

👉 **نکته:** هرچه تعداد محدودیتهای کمتر باشد حجم محاسبات جهت حل مسئله کمتر خواهد بود (در مقایسه با تعداد متغیرها)

## ۱-۶ مدل کلی یک برنامه ریزی خطی

تابع هدف:  $Max (Min) Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n$

$$\text{محدودیتهای کارکردی: } \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n (\leq, =, \geq) b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n (\leq, =, \geq) b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n (\leq, =, \geq) b_m \end{cases}$$

(آزاد در علامت یا  $\geq 0$  یا  $\leq 0$ ): متغیرهای تصمیم  $x_1, x_2, \dots, x_n$

و یا به شکل خلاصه

$$\text{تابع هدف: } Max (Min) Z = \sum_{j=1}^n c_j x_j$$

$$s.t. \begin{cases} \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j (\leq, =, \geq) b_i & i = 1, 2, \dots, m \\ x_j (\geq 0 \text{ یا } \leq 0 \text{ آزاد در علامت یا } \geq 0) & j = 1, 2, \dots, n \end{cases}$$

و یا در حالت نماد ماتریسی:

$$\text{تابع هدف: } Max (Min) Z = cx$$

$$s.t: Ax (\leq, =, \geq) b$$

آزاد در علامت  $x$  یا  $x \leq 0$  یا  $x \geq 0$

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad c = [c_1, c_2, \dots, c_n] \quad \text{که در آن}$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{mn} \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

نمایش داده می شود.

### ۷-۱- تعریف پارامترها و متغیرها

$Z$ : نمایشگر ارزش تابع هدف (تابع معیار) می باشد که بصورت معادله خطی نوشته می شود و پس از حل معادله مقدار آن مشخص می شود.  
 $x$ : متغیر تصمیم: نمایشگر مقدار عملکرد یا سطح یک فعالیت (محصول یا خدمات) می باشد که مقادیر آن پس از حل معادله مشخص می شود.  
 $c$ : (ضرایب بهره‌وری): ارزش هر واحد فعالیت (محصول یا خدمات) در تابع هدف می باشد. این ضریب عددی در معادله معلوم می باشد.  
 $a_{ij}$ : (ضرایب فنی یا تکنولوژیکی): مقداری از منبع  $i$  که برای انجام یک واحد فعالیت  $j$  بکار رفته و عددی معلوم در معادله می باشد.  
 $b_j$ : مقادیر معلوم سمت راست محدودیتها که موجودی منابع یا سقف تقاضا را بیان می دارد.

### ۸-۱- فرضیات برنامه‌ریزی خطی

در یک مدل برنامه‌ریزی از نوع خطی ۴ شرط زیر باید صادق باشد.  
 ۱- تناسب: یعنی هر فعالیت به تنهایی و مستقل از سایر فعالیتها عمل نموده و میزان افزایش و یا کاهش متغیرهای تابع هدف و متغیرهای محدودیتها متناسب با تغییرات آن متغیر می باشد.  
 نکته: نتایج حاصل از فرض تناسب به شرح زیر می باشد.  
 ۱- تابع هدف و محدودیتها خطی می باشند.  
 ۲- همه متغیرها توان اول می باشند.

۳- مقدار مشتق تابع هدف نسبت به هریک از متغیرها همواره مقدار ثابتی بوده و برابر ضریب بهره‌وری آن متغیر خواهد بود.

۴- هر فعالیت از فعالیتهای دیگر مستقل است بدین معنا که کالاها مکمل یا جانشین یکدیگر نبوده و تغییر قیمت یک فعالیت بر فعالیتهای دیگر بی‌اثر است.

۲- جمع‌پذیری: تابع هدف از مجموع تک تک متغیرها حاصل می‌شود. همچنین محدودیتها نیز از مجموع تک تک مقادیر مصرف شده از منابع حاصل می‌شود.

**نکته:** نتایج حاصل از فرض جمع‌پذیری:

۱- همه متغیرها هم واحد هستند و یا آنها را هم واحد می‌نمایم.

۲- عدم وجود روابط متقابل بین متغیرها (مانند  $x_1 x_2$ )

۳- راندمان کلی از جمع تک تک راندمانها حاصل می‌شود.

۴- مصرف کلی هریک از منابع برابر حجم تک تک مصارف متغیرها می‌باشد.

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n = b_i$$

**نکته:** فرض تناسب و جمع‌پذیری به همراه یکدیگر باعث استقلال متغیرها می‌شوند و هیچ‌کدام به تنهایی قادر به این عمل نمی‌باشند.

۳- فرض بخش‌پذیری (قابلیت تقسیم):

هر فعالیت به هر عدد دلخواهی قابل تقسیم بوده، فلذا متغیرهای تصمیم‌گیری، هر مقدار غیر صحیح را نیز می‌توانند شامل گردند.

**نکته:** نتایج حاصل از فرض بخش‌پذیری:

۱- متغیرهای تصمیم، متغیرهای پیوسته می‌باشند.

۲- فرض بخش‌پذیری وجه تمایز برنامه‌ریزی پیوسته و عدد صحیح می‌باشد.

**نکته:** هر سه فرض تناسب، جمع‌پذیری و بخش‌پذیری به همراه یکدیگر باعث محدودیت فضای جواب و خطی بودن مسئله می‌شود.

۴- فرض معین بودن (قطعیت):

همه پارامترهای مسئله  $(c_j, a_{ij}, b_i)$  مقادیری ثابت و معلوم می‌باشند.

**نکته:** نتایج حاصل از فرض معین بودن:

۱- مقادیر احتمال یا تصادفی در برنامه‌ریزی خطی نقشی ندارند.

۲- فرض معین بودن وجه تمایز برنامه‌ریزی خطی و برنامه‌ریزی پارامتریک می‌باشد. زیرا در

برنامه‌ریزی پارامتریک خود پارامترهای نیز متغیر می‌باشند.

### ۹-۱- تبدیلات مدل برنامه‌ریزی خطی

یک برنامه‌ریزی خطی با تبدیلات و تغییرات مناسب می‌تواند به اشکال متفاوت و معادل تبدیل شود. در حالت کلی دو فرم برای برنامه‌ریزی خطی وجود دارد.

۱- فرم متعارفی      ۲- فرم استاندارد

در حالت متعارفی مسئله بیشینه‌سازی، متغیرها غیرمنفی و همه محدودیتها از نوع  $\leq$  (ک.م) و در حالت کمینه‌سازی، متغیرها غیرمنفی و همه محدودیتها باید به صورت  $\geq$  (ب.م) باشند. همچنین در حالت استاندارد همه محدودیتها به صورت مساوی و متغیرها نیز غیرمنفی می‌باشند. جدول زیر فرمهای متعارفی و استاندارد را نمایش می‌دهد.

مسئله کمینه‌سازی	مسئله بیشینه‌سازی	
$Min Z = Cx$ $Ax \geq b$ $x \geq 0$	$Max Z = Cx$ $Ax \leq b$ $x \geq 0$	فرم متعارفی
$Min Z = Cx$ $Ax = b$ $x \geq 0$	$Max Z = Cx$ $Ax = b$ $x \geq 0$	فرم استاندارد

**نکته:** فرمهای استاندارد در روشهای حل به کمک سیمپلکس و فرمهای متعارفی در روشهای حل به کمک دوگان استفاده می‌شود. بنابراین می‌توان به کمک تبدیلاتی مسائل برنامه‌ریزی خطی را به مدل‌های استاندارد یا متعارفی معادل نمود.

#### ۹-۱-۱- تبدیل Max به Min و برعکس

با ضرب ضرایب تابع هدف در عدد (-۱) بدست می‌آید.

$$Max \sum_{j=1}^n C_j x_j = -Min \sum_{j=1}^n -C_j x_j$$

و یا

$$Min \sum_{j=1}^n C_j x_j = -Max \sum_{j=1}^n -C_j x_j$$

به عبارت دیگر

$$Max Z = C_1 x_1 + C_2 x_2 + \dots + C_n x_n$$



که معادل است با:

$$\text{Min}(-Z) = -C_1x_1 - C_2x_2 - \dots - C_nx_n$$

### ۹-۲- تغییر جهت در محدودیتها

هر نامعادله را می توان با ضرب نمودن طرفین در عدد (-۱) تغییر جهت داد.

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \geq b_i \xleftrightarrow{\text{ضرب طرفین در } (-1)} \sum_{j=1}^n -a_{ij}x_j \leq -b_i$$

### ۹-۳- بکار بردن دو نامعادله به جای یک معادله و برعکس

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j = b_i \iff \begin{cases} \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \leq b_i \\ \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \geq b_i \end{cases}$$

### ۹-۴- تبدیلات کانونیک

هر نامعادله می تواند به یک معادله تبدیل شود. اگر چنانچه نامعادله به شکل ( $\geq$ ) باشد با کمک متغیر غیرمنفی مازاد (*surplus*) و اگر نامعادله به شکل ( $\leq$ ) باشد با کمک متغیر غیرمنفی کمبود (*slack*) تبدیلات انجام می شود.

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \geq b_i \quad \approx \quad \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j - S_i = b_i \quad S_i \geq 0 \quad \text{متغیر غیرمنفی مازاد}$$

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \leq b_i \quad \approx \quad \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j + S_i = b_i \quad S_i \geq 0 \quad \text{متغیر غیرمنفی کمبود}$$

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j = b_i \quad \approx \quad \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j + R_i = b_i \quad R_i \geq 0 \quad \text{متغیر مصنوعی}$$

**نکته:**  $R_i$  متغیری می باشد که هیچ گونه ارزش عددی یا اقتصادی نداشته و جهت انجام محاسبات بکار می رود و فضای جواب را به نحوی گسترش می دهد که مبدأ مختصات جزو فضای جواب گردد چون سیمپلکس از  $(0, 0)$  شروع به حل می شود.

۵-۹-۱- تبدیل قدر مطلق محدودیتها

محدودیتی که سمت چپ آن قدر مطلق باشد می توان به دو نامعادله تبدیل نمود.

$$\left| \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \right| \leq b_i \iff \begin{cases} \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i \\ \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \geq -b_i \end{cases}$$

$$\left| \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \right| \geq b_i \iff \begin{cases} \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \geq b_i \\ \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq -b_i \end{cases}$$

۶-۹-۱- تبدیل متغیرهای آزاد

از آنجائی که در روش حل مسائل برنامه ریزی خطی از طریق سیمپلکس متغیرها همیشه غیرمنفی می باشند لذا ضروری می باشد تا متغیرهای فاقد علامت را به متغیرهای غیرمنفی تبدیل نمود یعنی:

$$x_j = x'_j - x''_j \quad \text{که در آن } x'_j \geq 0, \quad x''_j \geq 0$$

📌 **نکته:** حداکثر یکی از متغیرهای  $x'_j$  یا  $x''_j$  دارای مقداری مثبت است (هر دو با هم می توانند صفر باشند)

📌 **نکته:** حاصلضرب  $x'_j$  در  $x''_j$  همیشه صفر است (یکی از این دو همیشه صفراند)

📌 **نکته:** هر دو با هم نمی توانند مقداری مثبت داشته باشند.

📌 **نکته:** همواره به دلیل وابستگی خطی بین  $x'_j$  و  $x''_j$  (دو ستون موازی ضرایب) هیچگاه این دو متغیر نمی توانند با هم در یک پایه باشند.

اگر  $x_1, x_2, \dots, x_n$  متغیرهای آزاد در علامت باشند می توان با معرفی یک متغیر اضافی  $x''$ ، متغیرهای غیرمنفی ایجاد نمود.

$$x_j = x'_j - x'' \quad j = 1, 2, \dots, n$$

$$x'_j \geq 0, \quad x'' \geq 0$$

که در آن ( $-x$ ) نقش منفی ترین متغیر را دارد در حالی که سایر متغیرهای  $x$  به اندازه  $x_j'$  بیش از آن هستند.

📌 **نکته:** اگر مسئله ای دارای  $n$  متغیر آزاد در علامت باشد این مسئله حداقل با  $n+1$  متغیر غیر منفی قابل حل می باشد.

$$\text{اگر: } \begin{cases} x_j \leq 0 \Rightarrow -x_j = x_j' & , x_j' \geq 0 \\ x_j \leq u_j \Rightarrow u_j - x_j = x_j' & , x_j' \geq 0 \\ x_j \geq l_j \Rightarrow x_j - l_j = x_j' & , x_j' \geq 0 \end{cases}$$

### ۷-۹-۱- تبدیل تابع هدف مرکب

با تغییر متغیر می توان تابع هدف مرکب را تبدیل به تابع هدف ساده نمود.

$$\text{Max } \left\{ \text{Min } [g_1(x), g_2(x), g_3(x)] \right\}$$

$$\text{تغییر متغیر } Z = \text{Min } [g_1(x), g_2(x), g_3(x)] \Rightarrow \text{Max } Z$$

$$s.t : \begin{cases} g_1(x) \geq Z \\ g_2(x) \geq Z \\ g_3(x) \geq Z \end{cases}$$

در صورتی که تابع هدف  $\text{Min (Max)}$  باشد جهت محدودیتها برعکس خواهد شد. (مثلاً  $g_1(x) \leq Z$ )

### ۸-۹-۱- تبدیل قدر مطلق تابع هدف

در این شرایط با تغییر متغیر، عبارت قدر مطلق از تابع هدف حذف می گردد.

$$\text{Max } |g(x)|$$

$$Z = |g(x)| \Rightarrow \text{Max } Z$$

$$s.t : |g(x)| = Z$$

## روش‌های حل مسائل برنامه‌ریزی خطی

۲

مسائل برنامه‌ریزی را می‌توان با ۱- روش ترسیمی (هندسی)، ۲- آنالیز روش ترسیمی، ۳- روش سیمپلکس، ۴- آنالیز روش سیمپلکس، ۵- روش جبری (ماتریسی) حل نمود که به تدریج مطرح خواهد شد ولی قبل از آن نیاز است تا مفاهیم موردنظر تعریف گردد.

### ۲-۱- تعاریف

- ۱- جواب (*solution*): به هر مقدار اختصاص داده شده، به متغیرهای تصمیم، جواب نامیده می‌شود. (مثل هر دو نقطه در داخل صفحه محور دویعدی مختصات  $x_1$  و  $x_2$ )
- ۲- جواب موجه (شدنی) (*feasible solution*): جوابی که در تمامی محدودیت‌ها صدق کند.
- ۳- جواب غیرموجه (نشدنی) (*infeasible solution*): جوابی که حداقل در یک محدودیت صدق نکند.
- ۴- منطقه جواب: به مجموعه جواب‌ها، منطقه جواب می‌گویند (مثل ربع اول صفحه مختصات دویعدی  $x_1$  و  $x_2$ )
- ۵- منطقه موجه (ناحیه شدنی) (*feasible Region*): مجموعه جواب‌های موجه (شدنی)، منطقه موجه را بوجود می‌آورد.
- ۶- معادله حدی (*Boundry equation*): به ازاء هر محدودیت با جایگزینی علامت  $(\geq)$  یا  $(\leq)$  معادله حدی حاصل می‌شود.
- ۷- جواب گوشه (پایه - اساسی) (*Corner Point Solution*): مقادیر تخصیص داده شده به متغیرهای

تصمیم ناشی از تقاطع معادلات حدی جواب گوشه حاصل می‌گردد.

۸- جواب گوشه موجه: جواب گوشه‌ای که در محدوده منطبقه موجه بوده و در تمام محدودیت‌ها صدق کند.

۹- جواب بهینه: جوابی موجه که به ازاء آن تابع هدف به بهترین وضعیت درآید.

۱۰- معادله معرف (*Indicating equation*): معادلات حدی تشکیل دهنده هر جواب گوشه یا پایه را گویند.

۱۱- دو گوشه مجاور: دو گوشه‌ای که یک معادله معرف مشترک داشته باشند.

👉 **نکته:** اگر مدلی  $n$  متغیر تصمیم و  $m$  محدودیت کارکردی داشته باشد در این صورت تعداد معادلات حدی  $m+n$  می‌باشد.

👉 **نکته:** هر گوشه  $n$  معادله معرف دارد.

👉 **نکته:** هر دو گوشه مجاور  $(n-1)$  معادله معرف مشترک دارد.

👉 **نکته:** تعداد کل گوشه‌ها = تعداد جواب‌های پایه (اساسی) = تعداد مراحل سیمپلکس =  $\binom{n+s}{m}$

که در آن:

$n$  = تعداد متغیرهای اصلی

$s$  = تعداد متغیرهای کمکی

$m$  = تعداد محدودیت‌ها

👉 **نکته:** اگر  $A$  یک ناحیه امکان‌پذیر مربوط به مسئله برنامه‌ریزی ریاضی باشد و  $Max f(x)$  و  $Max$

$g(x)$  در ناحیه  $A$  تعریف شده باشد در این صورت با تعریف  $Max (f+g)(x)$  در ناحیه  $A$  داریم:

$$Max (f+g)(x) \leq Max f(x) + Max g(x)$$

👉 **نکته:** مجموعه نقاط رأسی (نقطه گوشه‌ای)، متناظر با مجموعه جواب‌های شدنی اساسی می‌باشند.

قضیه: اگر یک جواب بهینه وجود داشته باشد آن وقت یک نقطه رأسی بهینه (جواب شدنی پایه بهینه) وجود دارد.

قضیه: به ازاء هر نقطه رأسی (جواب شدنی پایه)، یک پایه (نه لزوماً منحصر به فرد) وجود دارد و برعکس به ازای هر پایه، یک نقطه رأسی یا جواب شدنی پایه (منحصر به فرد) وجود دارد.

👉 **نکته:** اگر یک نقطه رأسی، بیش از یک پایه داشته باشد آن نقطه تباهیده (تبهکن) است ولی عکس آن درست نیست.

## ۲-۲- روش ترسیمی (هندسی)

روش ترسیمی جهت حل مسائل برنامه‌ریزی فقط در حالتی که تعداد متغیرها دو یا حداکثر ۳ باشد کاربرد دارد و برای تعداد متغیرهای بیش از آن، روش سیمپلکس مناسب‌تر می‌باشد.



نکته: در صورتی که متغیرهای تصمیم غیر منفی باشند منطقه موجه در ربع اول قرار دارد.

نکته: جواب بهینه حداقل بر روی یک نقطه گوشه موجه قرار دارد.

نکته: هرگاه یک نقطه گوشه موجه از نقاط گوشه موجه مجاورش بهتر باشد آن نقطه، نقطه بهینه است.

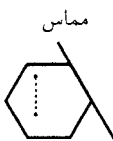
نکته: تعداد جوابهای پایه قابل قبول بهینه (گوشه‌ها) در هر مسئله برنامه‌ریزی خطی همواره محدود است.

### ۱-۲-۲-۲. تحدب فضای جواب و خواص آن

تعریف اول: هرگاه خطی از فضای جواب عبور کند آن را حداکثر در دو نقطه ورود و خروج قطع می‌نماید.

تعریف دوم: همه خط واصل بین دو نقطه متمایز داخل فضا می‌باشد.

تعریف سوم: هر خطی که بر فضا مماس شود همه فضا در یک طرف آن قرار می‌گیرد.



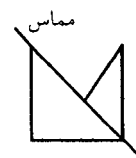
محدب (۱)



محدب (۲)



مقعر (۳)



مقعر (۴)

### ۲-۲-۲-۲. خاصیت فضای جواب محدب

در مسائل برنامه‌ریزی خطی در صورت وجود جواب، فضای مسئله حتماً محدب می‌باشد و این امر باعث می‌شود که نقطه فقط روی مرزها (بویژه گوشه‌ها) قرار داشته باشد و نیازی به بررسی سایر نقاط فضای جواب برای بدست آوردن جواب بهینه نداشته باشیم.

### ۳-۲-۲-۲. طبقه‌بندی محدودیت‌های برنامه‌ریزی خطی

- |  |   |                     |
|--|---|---------------------|
| <p>محدودیت فعال (الزام آور = ارضاء شده) <i>Binding Constraint</i></p>              | } | ۱- از نظر فعال بودن |
| <p>محدودیت غیرفعال (غیرالزام آور = غیر ارضاء شده) <i>Nonbinding Constraint</i></p> |   |                     |
| <p>محدودیت مستقل (مؤثر)</p>  |   |                     |
| <p>محدودیت وابسته (زاید) <i>Redundant Constraint</i></p>                           |   | ۲- از نظر استقلال   |
| <p>محدودیت کارکردی</p>   |   |                     |
| <p>محدودیت غیرکارکردی</p>  |   | ۳- از نظر کارکردی   |

در محدودیت فعال (الزام آور)، نقطه بهینه بر روی معادله حدی آن قرار دارد در غیر این صورت

محدودیت غیرفعال است. همچنین محدودیت مؤثر (مستقل)، محدودیت‌هایی می‌باشد که برای تشکیل منطقه موجه جواب ضروری می‌باشد ولی حذف آنها ممکن است جواب بهینه را تغییر ندهد ولی منطقه موجه را حتماً تغییر می‌دهد. محدودیت زاید (وابسته) تأثیری در ایجاد منطقه موجه ندارد و به وسیله سایر محدودیت‌ها برآورده می‌شود. محدودیت کارکردی از شرایط مساله ایجاد شده و محدودیت‌های غیرکارکردی، متغیرهای غیرمنفی را شامل می‌شود.

👉 **نکته:** اضافه کردن هر محدودیت مؤثر جدید موجب کاهش منطقه موجه می‌شود و برعکس.

👉 **نکته:** محدودیت مؤثر محدودیتی است که آن را نمی‌توان به صورت ترکیبی خطی (جمع‌ی موزون) از سایر محدودیت‌ها نوشت.

👉 **نکته:** هر محدودیت فعالی، مؤثر (مستقل) است ولی هر محدودیت مؤثری معلوم نیست فعال باشد.

#### ۴-۲-۲. حالات خاص روش ترسیمی

به‌طور کلی هر مسئله برنامه‌ریزی خطی می‌تواند دارای یکی از حالات زیر بوده و یا این که ترکیبی از آنها باشد.

- ۱- جواب یگانه (منحصر بفرد)، ۲- تعدد جواب (جواب متعدد، جواب دگرین، جواب چندگانه)،
- ۳- جواب تهیگن (منحط، انحطاط، دژنره)، ۴- جواب بیکران (جواب بی‌نهایت، جواب نامحدود)، ۵- بدون جواب بودن (تهی بودن فضای جواب)

تذکر: در هر مسئله برنامه‌ریزی خطی به احتمال قوی می‌توان حالات ۲ و ۳ و ۴ و ۵ را به کمک صورت مسئله تشخیص داد در صورتی که هیچ کدام از حالات چهارگانه رخ ندهد حالت اول رخ داده است.

#### ۵-۲-۲. مطالب کلیدی حل ترسیمی

شیب محدودیت الزام آور  $II$   $\leq$  شیب تابع هدف  $\leq$  شیب محدودیت الزام آور  $I$

👉 **نکته مهم:**

قسمت اول: تعدد جواب (جواب چندگانه): هرگاه حداقل یکی از محدودیت‌های فعال مسئله موازی تابع هدف باشد مسئله می‌تواند دارای جواب چندگانه باشد. به عبارت بهتر حداقل یکی از محدودیت‌های

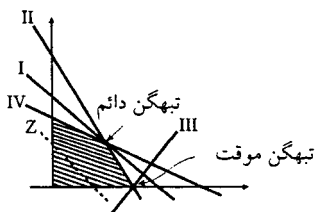
$$\text{فعال مسئله با تابع هدف دارای رابطه } c_1 = a_{i1} = \dots = \frac{c_n}{a_{in}} = cte \text{ باشد.}$$



$$\text{مثال: } \left. \begin{aligned} \text{Max } z &= 5x_1 + x_2 \\ 10x_1 + 2x_2 &\leq 11 \end{aligned} \right\} \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$$

👉 **نکته:** در صورت موازی بودن یک محدودیت غیرفعال یا زائد با تابع هدف، ممکن است جواب چندگانه نباشد.

قسمت دوم: جواب تبهگن (منحط): هرگاه در مسائل  $n$  بعدی از یکی از گوشه‌های جواب بیشتر از  $n$  خط (محدودیت) عبور کند مسئله در آن نقطه تبهگن است. حال اگر این نقطه، نقطه بینه باشد تبهگن دائم و اگر نقطه غیربینه باشد تبهگن موقت است.



👉 **نکته اساسی:** هرگاه بردار ستونی حداقل یکی از متغیرهایی که دارای شرط ورود به پایه می‌باشد موازی بردار ستونی مقادیر ثابت سمت راست باشد در این صورت، مسئله می‌تواند دارای جواب تبهگن باشد یعنی رابطه  $\frac{b_i}{a_{ij}} = cte$  صادق باشد.

$$\left. \begin{aligned} \text{Max } z &= 2x_1 + 5x_2 \\ x_1 + 10x_2 &\leq 20 \\ 2x_1 + 6x_2 &\leq 12 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{20}{10} = \frac{12}{6} = cte = 2$$

👉 **نکته:** اگر تابع هدف  $Min$  باشد هر تغییری که دارای ضریب منفی است می‌تواند وارد پایه شود.

👉 **نکته:** اگر تابع هدف  $Max$  باشد هر تغییری که دارای ضریب مثبت است می‌تواند وارد پایه شود.

👉 **نکته:** هرگاه بردار ستونی حداقل یکی از متغیرها که دارای شرط ورود به پایه می‌باشد به‌طور

موضعی موازی بردار سمت راست باشد  $\left[ \frac{b_1}{a_{1j}} = \frac{b_2}{a_{2j}} \neq \frac{b_3}{a_{3j}} \right]$  مسئله می‌تواند تبهگن موقت باشد.

$$\text{Max } z = 6x_1 + x_2$$

$$\frac{14}{5} \neq \frac{12}{6} = \frac{2}{1} \text{ تبهگن}$$

$$5x_1 + 2x_2 \leq 14$$

$$6x_1 + x_2 \leq 12$$

$$4x_1 - x_2 \leq 8$$

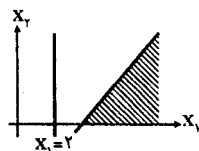
قسمت سوم: جواب بیکران (نامحدود): هرگاه بردار ستونی یکی از متغیرها دارای ضرایب تماماً صفر یا منفی باشد در این صورت فضای جواب مسئله حداقل در جهت آن متغیر بیکران (نامحدود) می باشد. بنابراین جواب بیکران به وضعیتی گفته می شود که منطقه جواب بسته نباشد و مدل دارای بی نهایت جواب باشد.

$$\text{Max } z = 2x_1 + 2x_2$$

$$x_1 \geq 2$$

$$x_1 - x_2 \geq 3$$

$$x_i \geq 0$$



**نکته:** هرگاه متغیر مربوطه که باعث بیکران شدن فضای جواب شده است دارای شرایط ورود به پایه باشد، در این صورت مسئله می تواند دارای جواب بیکران باشد و در صورتی که دارای شرایط ورود به پایه نباشد مسئله دارای جواب محدود خواهد بود.

قسمت چهارم: مسئله بدون جواب: هرگاه در مسائل برنامه ریزی خطی در بین فضای جواب محدودیت ها، فضای مشترکی وجود نداشته باشد، در این صورت مسئله بدون جواب بوده و محدودیت ها با هم در تناقض خواهند بود.

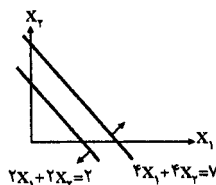
**نکته:** هرگاه دو محدودیت موازی و مختلف الجهت وجود داشته باشد به گونه ای که مقدار سمت راست محدودیت با علامت بزرگ تر مساوی ( $\geq$ )، بیشتر از مقدار سمت راست محدودیت با علامت کوچک تر مساوی ( $\leq$ ) باشد در این صورت مسئله می تواند بدون جواب باشد.

$$\text{Max } z = 5x_1 - 3x_2$$

$$2x_1 + 2x_2 \leq 2$$

$$4x_1 + 4x_2 \geq 7$$

$$x_i \geq 0$$



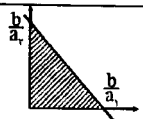
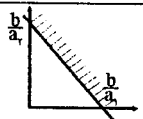
## ۳-۲- آنالیز روشن ترسیمی

اصل ۱- اگر فضای جواب قابل قبول کاهش یابد جواب بهینه نمی‌تواند بهتر شود (می‌تواند بدتر شود).  
 اصل ۲- اگر فضای جواب قابل قبول افزایش یابد جواب بهینه نمی‌تواند بدتر شود (می‌تواند بهتر شود).  
 اصل ۳- دو اصل فوق در هر مسئله برنامه‌ریزی خطی با هر شرایطی صادق است و اصلاً به نوع تابع هدف، علامت و محدودیت‌ها و متغیرها بستگی ندارد.

## تغییرات ممکن در روش ترسیمی

اثرات	نوع تغییرات		
	احتمال کاهش فضای جواب - جواب بهینه نمی‌تواند بهتر شود (می‌تواند بدتر شود)	افزایش تعداد محدودیت	تغییر تعداد محدودیت‌ها
افزایش فضای جواب - جواب بهینه می‌تواند بهتر شود (نمی‌تواند بدتر شود)	حذف محدودیت مؤثر		
افزایش یک بعد به فضای جواب - افزایش فضای جواب - جواب بهینه می‌تواند بهتر شود (نمی‌تواند بدتر شود)	افزایش تعداد متغیرها	تغییر تعداد متغیرها ( $x_j$ )	
کاهش یک بعد از فضای جواب - جواب بهینه نمی‌تواند بهتر شود (می‌تواند بدتر شود)	حذف متغیرها		
جواب بهینه می‌تواند بهتر شود (نمی‌تواند بدتر شود)	افزایش ضریب تابع هدف	تابع هدف Max	تغییر در ضرایب تابع هدف ( $C_j$ )
جواب بهینه نمی‌تواند بهتر شود (می‌تواند بدتر شود)	کاهش ضریب تابع هدف		
جواب بهینه نمی‌تواند بهتر شود (می‌تواند بدتر شود)	افزایش ضریب تابع هدف	تابع هدف Min	
جواب بهینه می‌تواند بهتر شود (نمی‌تواند بدتر شود)	کاهش ضریب تابع هدف		

ادامه جدول تغییرات ممکن در روش ترسیمی

اثرات		نوع تغییرات			
 $a_1x_1 + a_2x_2 \leq b$	احتمال کاهش فضای جواب - جواب بهینه نمی تواند بهتر شود (می تواند بدتر شود)	افزایش حداقل یکی از ضرایب تکنولوژیکی	محدودیت به شکل VI	تغییر ضرایب تکنولوژیکی (rij)	
	احتمال افزایش فضای جواب - جواب بهینه می تواند بهتر شود (نمی تواند بدتر شود)	کاهش حداقل یکی از ضرایب تکنولوژیکی			
 $a_1x_1 + a_2x_2 \geq b$	احتمال افزایش فضای جواب - جواب بهینه می تواند بهتر شود (نمی تواند بدتر شود)	افزایش حداقل یکی از ضرایب تکنولوژیکی	محدودیت به شکل VII		
	احتمال کاهش فضای جواب - جواب بهینه نمی تواند بهتر شود (می تواند بدتر شود)	کاهش حداقل یکی از ضرایب تکنولوژیکی			
نمی توان قضاوت خاصی داشت.		کاهش حداقل یکی از ضرایب تکنولوژیکی	محدودیت به شکل II		
نمی توان قضاوت خاصی داشت.		افزایش حداقل یکی از ضرایب تکنولوژیکی			
احتمال افزایش فضای جواب - جواب بهینه می تواند بهتر شود (نمی تواند بدتر شود)		افزایش $b_j$	محدودیت به شکل VI		تغییر مقادیر سمت راست (bj) یا RHS
احتمال کاهش فضای جواب - جواب بهینه نمی تواند بهتر شود (می تواند بدتر شود)		کاهش $b_j$			
احتمال کاهش فضای جواب - جواب بهینه نمی تواند بهتر شود (می تواند بدتر شود)		افزایش $b_j$	محدودیت به شکل VII		
احتمال افزایش فضای جواب - جواب بهینه می تواند بهتر شود (نمی تواند بدتر شود)		کاهش $b_j$			
نمی توان قضاوت خاصی داشت.		افزایش یا کاهش $b_j$	محدودیت به شکل =		
احتمال کاهش فضای جواب - جواب بهینه نمی تواند بهتر شود (می تواند بدتر شود)		اگر محدودیت $\leq$ یا $\geq$ تبدیل به حالت = شود	تغییر علامت محدودیت ها		
احتمال افزایش فضای جواب - جواب بهینه می تواند بهتر شود (نمی تواند بدتر شود)		اگر محدودیت = به حالت $\leq$ یا $\geq$ تبدیل شود			
نمی توان قضاوت خاصی نمود.		سایر حالات			

## ۲-۴- روش سیمپلکس

روش سیمپلکس فرآیندی الگوریتمیک برای حل مسائل برنامه‌ریزی خطی با  $n$  متغیر می‌باشد که عمدتاً عملیات خود را از یک گوشه موجه ابتدایی (مبدأ مختصات) شروع و به یک گوشه موجه مجاور که مقدار تابع هدف را بهبود می‌بخشد حرکت می‌نماید. این تکرار تا رسیدن به نقطه‌ای موجه که از نقاط موجه اطرافش بهتر باشد ادامه می‌یابد. این نقطه، نقطه بهینه می‌باشد.

## ۲-۴-۱. تعاریف و مفاهیم سیمپلکس

**نکته:** در یک فرم استاندارد سیمپلکس  $n$  متغیر تصمیم و  $m$  محدودیت وجود دارد. متغیرهای اساسی (پایه یا گوشه) *Basic Variables*: متغیرهایی که دارای مقدار غیر صفر باشد و در هر مسئله تعداد آن برابر  $m$  (تعداد محدودیت‌ها) خواهد بود.

**نکته:** متغیرهای اساسی در جدول سیمپلکس دارای بردار ماتریسی واحد (یکه) می‌باشد.

**نکته:** متغیرهای اساسی مستقل خطی می‌باشند.

**نکته:** متغیرهای  $x_k^+$  و  $x_k^-$  ناشی از متغیر آزاد در علامت  $x_k$  وابسته خطی بوده و فقط یکی از آن‌ها در هر تکرار سیمپلکس متغیر پایه‌ای خواهد بود.

متغیرهای غیر اساسی (*Non-Basic Variables*: متغیرهایی که دارای مقادیر صفر باشند و تعداد آن  $(n-m)$  می‌باشد.

جواب اساسی: هر جواب بدست آمده در حل معادله که دارای  $n$  متغیر باشد را جواب اساسی می‌گویند. جواب اساسی موجه: اگر تمام متغیرهای اساسی یک معادله غیر منفی باشد جواب اساسی موجه می‌باشد.

**نکته:** هر جواب قابل قبولی که در محدودیت‌ها صدق کند (جواب شدنی)، پایه یا گوشه یا اساس یا متناظر یک رأس مجموعه جواب نمی‌باشد.

**نکته:** هر جواب اساسی شدنی متناظر یک رأس یا گوشه می‌باشد ولی لزوماً جواب بهینه نخواهد بود.

**تذکره:** هر نقطه گوشه موجه که از نقاط گوشه موجه مجاورش بهتر باشد، نقطه بهینه است.

روش سیمپلکس } معمولی ساده: برای حالتی که همه محدودیت‌ها به صورت  $\leq$  باشند.  
 دو مرحله‌ای (دوفازی) } برای حالتی که حداقل یکی از محدودیت‌ها  $\geq$  یا = باشد.  
 $m$  بزرگ (جریمه)

جدول سیمپلکس

متغیرهای اساسی (پایه)	شماره سطر	اسامی کلیه متغیرها (چه متغیری ورودی است) $Z \quad x_1 \quad x_2 \quad \dots \quad x_n \quad s_1 \quad s_2 \quad \dots \quad s_m$	اعداد سمت راست $RHS$	حداکثرها
$Z$	۰	ضرایب متغیرها در تابع هدف $C_j$	مقدار سمت راست تابع هدف	-
$M$ متغیر اساسی	۱ ۲ ⋮ $m$	ضرایب متغیرها در محدودیت‌ها $a_{ij}$	جواب مسئله $b_i$	چه متغیری خروجی است

## ۲-۴-۲- گام‌های حل مسائل به فرم استاندارد به روش سیمپلکس معمولی

گام ۱: متغیرهای تابع هدف را به سمت چپ تساوی منتقل نموده تا طرف دوم تابع هدف صفر گردد. در صورت  $Min$  بودن تابع هدف با ضرب طرفین در عدد  $(-1)$  تبدیل به  $Max$  می‌شود.

گام ۲: محدودیت‌ها را با اضافه کردن متغیر کمکی از نوع کمبود ( $Slack$ ) به سمت چپ به تساوی تبدیل می‌شود.

گام ۳: جدول سیمپلکس ترسیم شده و متغیرها و ضرایب وارد جدول می‌شود. متغیرهای اساسی در شروع جدول معمولاً متغیرهای کمکی  $s_j$  می‌باشد.

گام ۴: با انتخاب منفی‌ترین مقدار در سطر  $Z$  (سطر صفر)، متغیر ورودی به پایه (متغیر اساسی شونده) را انتخاب کرده و ستون مربوطه ستون لولا نامیده می‌شود.

**نکته:** اگر منفی‌ترین مقدار در  $Z$  پیدا نشد به جواب بهینه رسیده‌ایم.

گام ۵: متغیر اساسی که باید غیراساسی شود را تعیین می‌کنیم. جهت این کار  $\theta$  را محاسبه می‌کنیم.

$$\theta = \min \left\{ \frac{b_i}{a_{ij}}; a_{ij} > 0 \right\}$$

(حداکثر مقداری که متغیر غیراساسی برای عناصر مثبت ستون لولا  $(a_{ij})$  وارد شدن به پایه به خود می‌گیرد.)

متغیری که کمترین مقدار در ستون حداکثر نسبت‌ها ( $\theta$ ) را دارد به عنوان متغیر خروجی انتخاب نموده

و سطر مربوطه آن به آن را سطر لولا نامیده و محل برخورد سطر و ستون لولا را عدد لولا معرفی می‌کنیم.

گام ۶: جدول بعدی را رسم نموده متغیرهای اساسی آن را نوشته و متغیر اساسی جدید وارد نموده و به کمک سطر لولا ستون لولا را در محل عدد لولا یک‌ه (واحد) می‌نامیم و مجدداً به گام چهارم برمی‌گردیم.

**نکته:** متغیرهای اساسی در معادله خود ضریب  $+1$  و در بقیه معادلات ضریب صفر خواهند داشت (بردار یک‌ه)

گام ۷: گام‌های فوق‌الذکر ادامه پیدا می‌کند تا تمام مقادیر سطر صفر مقادیر غیرمنفی داشته باشند. در این صورت جواب اساسی موجه بدست آمده بهینه می‌باشد.

نکات مربوط به گام‌های هفتگانه فوق:

**نکته:** کم و یا اضافه نمودن متغیرهای کمکی یا مازاد تأثیری در فضای شدنی مسئله و نقاط گوشه‌های آن ندارد.

**نکته:** به چه دلیل در انتخاب  $\theta$  از  $Min$  استفاده می‌شود؟

۱- مقدار انتخابی در همه محدودیت‌ها صدق می‌کند و به عبارت بهتر از ناحیه جواب خارج نمی‌شویم.  
۲- در مراحل بعدی مقادیر سمت راست منفی نشود به عبارت بهتر، شدنی بودن مسئله تضمین می‌شود.

۳- خود آن متغیر زودتر از سایر متغیرها به صفر می‌رسد. (رسیدن به نقطه گوشه)

**نکته:** چرا فقط بر نسبت‌ها تقسیم می‌کنیم؟

۱- بر ضرایب صفر تقسیم نمی‌کنیم زیرا حاصل بی‌نهایت است و به عنوان حداقل انتخاب نخواهد شد.  
۲- بر ضرایب منفی تقسیم نمی‌کنیم زیرا در این صورت تا بی‌نهایت قابل افزایش خواهد بود و باز به عنوان حداقل انتخاب نخواهد شد.

۳- بر ضرایب منفی تقسیم نمی‌کنیم زیرا در مرحله بعد سمت راست منفی خواهد شد.

**نکته:** شرط انتخاب متغیر ورودی، تضمین‌کننده بهینه بودن جواب است. یعنی اگر در سطر  $Z$  جدول، منفی‌ترین مقدار پیدا نشد به جواب بهینه رسیده‌ایم.

**نکته:** شرط انتخاب متغیر خروجی، تضمین‌کننده شرط امکان‌پذیر بودن ادامه حل مسئله می‌باشد. یعنی اگر متغیر خروجی اشتباه انتخاب شود مقادیر متغیرهای پایه در جدول بعدی ( $RHS$ ) منفی خواهند شد.

**نکته:** مقدار تابع هدف در جداول پی در پی سیمپلکس هیچ‌گاه بدتر نمی‌شود. یا ثابت مانده و یا بهبود می‌یابد.

$$\begin{aligned} \text{Max } z &= 5x_1 + 2x_2 & \text{Max } z - 5x_1 - 2x_2 &= 0 & \textcircled{0} \\ x_1 + x_2 &\leq 1 & x_1 + x_2 + s_1 &= 0 & \textcircled{1} \\ x_1 &\leq 5 & x_1 + s_2 &= 5 & \textcircled{2} \\ x_1, x_2 &\geq 0 & x_1, x_2, s_1, s_2 &\geq 0 & \end{aligned}$$

متغیر اساسی	شماره سطر	Z	$x_1$	$x_2$	$s_1$	$s_2$	R.H.S	حداکثرها
Z	0	1	-5	-2	0	0	0	
$s_1$	1	0	1	1	1	0	10	10
$s_2$	2	0	1	0	0	1	5	5 ← Min
Z	0	1	0	-3	0	5	25	
$s_1$	1	0	0	1	1	-1	5	5
$x_1$	2	0	1	0	0	1	5	$\infty$
Z	0	1	0	0	2	3	25	
$x_2$	1	0	0	1	1	-1	5	
$x_1$	2	0	1	0	0	1	5	

## ۵-۲-۵ حالت‌های غیراستاندارد سیمپلکس

۱- تابع هدف به صورت Min

به طرفین تابع هدف عدد (-1) ضرب نموده و مانند سیمپلکس معمولی حل می‌شود.

$$\text{Min } z = x_1 - 2x_2 \rightarrow \text{Max } (-z) = -x_1 + 2x_2$$

۲- متغیرهای آزاد در علامت

در این حالت متغیر آزاد در علامت را تبدیل به تفاضل دو متغیر مثبت می‌کنیم و در تابع هدف و همه محدودیت‌ها تغییرات ایجاد شده و مانند سیمپلکس معمولی حل می‌شود.

$$\begin{aligned} & \text{متغیر آزاد در علامت: } x_j \\ x_j = x'_j - x''_j & \Rightarrow \begin{cases} \text{اگر } x_j > 0 \Rightarrow x'_j > 0, x''_j = 0 \\ \text{اگر } x_j = 0 \Rightarrow x'_j = x''_j = 0 \\ \text{اگر } x_j < 0 \Rightarrow x'_j = 0, x''_j > 0 \end{cases} \end{aligned}$$

**نکته:** در جدول سیمپلکس حداقل یکی از  $x'_j$  و  $x''_j$  صفر خواهد بود. یعنی اگر یکی از آن‌ها متغیر اساسی باشد دیگری حتماً متغیر غیر اساسی (مقدار صفر) خواهد بود.



مثال:

$$\text{Max } z = x_1 + 2x_2$$

$$\text{Max } z = x_1 + 2x_2' - 2x_2''$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \leq 10 \\ x_1 + 2x_2 \leq 15 \\ x_1 \geq 0, x_2 \text{ علامت آزاد} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} x_2 &= x_2' - x_2'' \\ x_2', x_2'' &\geq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2' - x_2'' \leq 10 \\ x_1 + 2x_2' - 2x_2'' \leq 15 \\ x_1, x_2', x_2'' \geq 0 \end{cases}$$

۳- متغیرهای منفی ( $x_j \leq 0$ )

در این حالت متغیر منفی را با منفی یک متغیر مثبت عوض نموده و پس از تغییر در تابع هدف و محدودیت‌ها مثل سیمپلکس معمولی حل می‌کنیم.

مثال:

$$\text{Max } z = x_1 - 2x_2$$

$$\text{Max } z = x_1 + 2x_2'$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \leq 10 \\ x_1 \geq 0, x_2 \leq 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} x_2 &= -x_2' \\ x_2' &\geq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{cases} x_1 - x_2' \leq 10 \\ x_1, x_2' \geq 0 \end{cases}$$

۴- اگر حداقل یکی از محدودیت‌ها به صورت بزرگ‌تر مساوی ( $\geq$ ) باشد.

در این حالت ابتدا یک متغیر مازاد  $S_i$  از محدودیت‌های ( $\geq$ ) کم کرده و سپس یک متغیر مصنوعی  $R_i$  به محدودیت‌ها ( $\geq$ ) اضافه می‌کنیم تا نامساوی تبدیل به مساوی شود. سپس با یکی از روش‌های دو مرحله‌ای یا  $m$  بزرگ، سیمپلکس حل می‌شود.

۵- اگر حداقل یکی از محدودیت‌ها به صورت مساوی باشد.

در این حالت یک متغیر مصنوعی  $R_i$  به محدودیت‌های مساوی اضافه کرده و با یکی از روش‌های دو مرحله‌ای یا  $M$  بزرگ، سیمپلکس حل می‌شود.

۶- ضرایب سمت راست ( $RHS$ ) منفی

در این حالت ضرایب‌های طرفین در عدد  $(-1)$  ضرب شده و جهت علامت‌ها عوض می‌شود.

۷- حالتی که  $x_j$  دارای حد پایین منفی بوده و متغیر دارای تعریف غیرمنفی نباشد. (مثل  $X_1 \geq -10$ )

این حالت دو وضعیت دارد:

۱- متغیر مورد نظر را آزاد در علامت فرض نموده و مانند روش ۲ عمل می‌کنیم.

۲- تغییر متغیر جدیدی بر روی محدودیت مورد نظر اعمال می‌کنیم تا بتوانیم متغیر غیرمنفی لازم را برای مدل استاندارد بدست آوریم.

$$\text{Max } z = 2x_1 + x_2$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \leq 5 \\ x_1 \geq -8 \\ x_2 \geq 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \underbrace{x_1 + 8 \geq 0}_{x'_1}$$

$$x'_1 \geq 0 \quad x'_1 \geq 0$$

$$\text{Max } z = 2x'_1 + x_2 - 16$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x'_1 + x_2 \leq 13 \\ x_2, x'_1 \geq 0 \end{cases}$$

۸- حالتی که  $x_2$  دارای حد پایین منفی بوده و متغیر دارای تعریف غیرمنفی باشد.

اگر در مدل محدودیت غیرمنفی ذکر شده باشد در این حالت طرفین در عدد (-۱) ضرب شده و نامعادله تغییر جهت می‌دهد.

$$\text{Max } z = 2x_1 + x_2$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \leq 5 \\ x_1 \geq -8 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

$$\text{Max } z = 2x_1 + x_2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 \leq 5 \\ -x_1 \leq 8 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

**نکته:** اگر در مسئله‌ای متغیر آزاد وجود داشته باشد و آنرا تبدیل به دو متغیر نمایم این مسئله حتماً دارای جواب متعدد است.

**نکته:** روش سیمپلکس فقط جواب‌های پایه قابل قبول را مشخص می‌کند و به هیچ عنوان جواب غیربازه‌ای را مشخص نمی‌کند.

## ۲-۶ سیمپلکس دو مرحله‌ای (دوفازی)

مرحله اول

گام ۱- مسئله به شکل استاندارد تبدیل می‌شود و متغیرهای مصنوعی ( $R_i$ ) به محدودیت‌های  $=$  یا  $\geq$  اضافه می‌شود. و متغیرهای مازاد ( $S_i$ ) از محدودیت‌های  $(\geq)$  کم و متغیر کمبود ( $S_i$ ) به محدودیت  $(\leq)$  اضافه می‌شود.

گام ۲- تابع هدف جدید را به کمک متغیرهای مصنوعی ( $R_i$ ) تعریف می‌کنیم.

$$\text{Min } R = \sum R_i \Rightarrow \text{Max } (-R) + \sum R_i = 0$$

گام ۳- جدول سیمپلکس را تشکیل داده و تابع هدف فوق و محدودیت‌های مسئله را وارد جدول می‌نمایم.

**نکته:** در شروع مسئله، متغیرهای اساسی  $R_i$  ناشی از محدودیت  $(\geq)$  و  $(=)$  و  $S_i$  ناشی از محدودیت  $(\leq)$  می‌باشد.

گام ۴- تمام متغیرهای اساسی جدول ابتدایی باید یکه باشند به همین خاطر در سطر تابع هدف (سطر

صفر) ضرایب متغیرهای مصنوعی را با مضاربی از سطرهای دیگر صفر می‌کنیم و حل جدول ادامه می‌یابد.

گام ۵- هرگاه مقدار همه متغیرهای مصنوعی صفر شود به جواب قابل قبول رسیده‌ایم. در این حالت مقدار  $R$  صفر گردیده و مرحله اول به پایان می‌رسد.

📌 **نکته:** اگر مقدار  $R$  در انتهای مرحله اول مخالف صفر باشد در این صورت منطقه جواب قابل قبول وجود ندارد.

### مرحله دوم

گام ۶- تابع هدف  $Z$  را جایگزین تابع  $R$  در آخرین جدول سیمپلکس می‌نماییم.

گام ۷- در این جدول ستون‌های مربوط به متغیرهای مصنوعی حذف می‌گردد.

گام ۸- تمام متغیرهای اساسی را تبدیل به بردار واحد نموده و سطر تابع هدف جدید (سطر صفر) را به‌نگام می‌نماییم و حل جدول را ادامه می‌دهیم.

📌 **نکته:** در جدول سیمپلکس مرحله دوم هیچ اثری از متغیرهای مصنوعی نباید وجود داشته باشد.

### ۲-۶-۱- موارد استفاده از سیمپلکس دو مرحله‌ای

۱- هیچ جواب اولیه قابل قبولی در دسترس نمی‌باشد.

۲- حداقل یکی از محدودیت‌ها به شکل  $=$  یا  $\geq$  باشد.

۳- مبدأ مختصات جزو فضای جواب نباشد.

📌 **نکته:** پس از دستیابی به جواب قابل قبول، در مرحله دوم، مسئله یا جواب بهینه محدود دارد و یا این‌که جواب بهینه نامحدود دارد و حالت بدون جواب بودن به هیچ عنوان رخ نخواهد داد. زیرا حداقل یک نقطه قابل قبول وجود داشته که در مرحله اول آن را پیدا نموده‌ایم.

📌 **نکته:** هر مسئله برنامه‌ریزی خطی در پایان مرحله اول حتماً جواب محدود دارد بنابراین مسئله و جواب آن هیچ‌گاه نامحدود نخواهد شد.

## ۲-۶-۲- تجزیه و تحلیل جواب روش دومرحله‌ای (دوفازی)

مرحله اول	مرحله دوم
۱- در جدول بهینه $R \neq 0$	۱- در این حالت مسئله اصلی جواب قابل قبول ندارد $\Rightarrow$ ختم مسئله
۲- در جدول بهینه $R = 0$ و تمامی متغیرهای مصنوعی ( $R_i$ ) غیرپایه‌اند.	۲- در این صورت یک جواب پایه قابل قبول برای مسئله اصلی بدست آمده و مسئله با تابع هدف جدید ادامه می‌یابد (جواب محدود یا نامحدود)
۳- در جدول بهینه $R = 0$ ولی حداقل یکی از متغیرهای مصنوعی با مقدار صفر جزو پایه می‌باشد و در سطری که متغیر مصنوعی برابر صفر می‌باشد تمامی مقادیر $a_{ij}$ بغیر از ستون‌های مصنوعی برابر صفر می‌باشد.	۳- در این صورت محدودیت مربوطه زائد بوده و در شروع مرحله دوم متغیر مصنوعی از جدول سیمپلکس حذف می‌شود. نکته: در این حالت جواب غیرتبهگن بود و تنها حالتی می‌باشد که تعداد جواب‌های پایه مثبت غیرتبهگن از تعداد محدودیت‌ها کمتر است.
۴- در جدول بهینه $R = 0$ ولی حداقل یکی از متغیرهای مصنوعی با مقدار صفر جزو پایه می‌باشد و در سطری که متغیر مصنوعی برابر صفر می‌باشد تمامی مقادیر $a_{ij}$ بغیر از ستون‌های مصنوعی برابر صفر نمی‌باشد.	۴- در این حالت یکی از متغیرهای غیرپایه را که در سطر مذکور صفر نیستند با کمک پاشنه‌گردی (عدد لولا) وارد پایه نموده و حل مسئله را ادامه می‌دهیم. نکته: در این حالت جواب تبهگن بوده و محدودیت زائدی وجود ندارد. و تنها حالتی می‌باشد که سیمپلکس اولیه روی عدد منفی پاشنه‌گردی می‌کند.

۲-۷- روش  $M$  بزرگ

در روش  $M$  بزرگ پس از معرفی متغیرهای کمبود، مازاد و مصنوعی در محدودیت‌های موردنظر، کلیه متغیرهای مصنوعی موجود در مدل را با ضریب  $M$  (عدد بسیار بزرگ) و با علامت مناسب به تابع هدف اضافه می‌نماییم. یعنی اگر تابع هدف  $Max$  باشد متغیر مصنوعی با ضریب  $-M$  و اگر تابع هدف  $Min$  باشد با ضریب  $+M$  به تابع هدف اصلی اضافه می‌شود. سپس مسئله را استاندارد نموده و بعد از یک‌نمودن (بردار واحد) متغیرهای مصنوعی، مانند سیمپلکس معمولی جدول را حل می‌کنیم.

۲-۷-۱- تجزیه و تحلیل روش  $M$  بزرگ

روش  $M$  بزرگ ممکن است به یکی از موارد زیر ختم شود.

۱- جواب بهینه بدست آمده و در جدول بهینه هیچ متغیر مصنوعی در بردار پایه نمی‌باشد در این حالت مسئله به جواب بهینه رسیده است.

نکته: شرط بهینگی: ۱- همه ضرایب سطر صفر (سطر  $Z$ ) در حالت  $Max$  غیرمنفی و در حالت  $Min$  (غیرمثبت) باشد، ۲- ستون‌های سمت راست مثبت باشد.

۲- جواب بهینه بدست آمده و در جدول بهینه حداقل یک بردار مصنوعی، بردار پایه می‌باشد ولی مقدار متغیر مصنوعی همگی صفر می‌باشد. در این حالت نیز جواب بهینه مسئله اصلی بدست می‌آید.

		R.H.S
Maxz	+ + . +	C
$x_1$		$b_1$
$R_1$		⊙

( $x_1, R_1$ ) جواب بهینه

۳- جواب بهینه حاصل شده و حداقل یک بردار مصنوعی در پایه با مقدار مثبت (حداقل برای یکی از آن‌ها) قرار دارد. در این حالت منطقه موجه نداشته و جواب قابل قبول وجود ندارد.

		b
Maxz	+ + . +	C
$x_1$		$b_1$
$R_1$		.
$R_2$		⊙

۴- جدول بهینه بدست آمده ولی علامت نامحدود بودن دیده می‌شود. (یعنی ورودی داریم و خروجی نداریم) در این حالت:

	$y_1$	$y_2$	
Maxz	+	+	.
$R_2$	-		۲
$R_3$	.		۳
$x_1$	-		۲

۱-۴) علامت نامحدود بودن در مسئله دیده می‌شود ولی هیچ بردار مصنوعی در پایه وجود ندارد در این صورت مسئله اصلی نامحدود می‌باشد.

۲-۴) علامت نامحدود بودن در مسئله دیده می‌شود و حداقل یک بردار مصنوعی در پایه وجود دارد ولی مقادیر متغیرهای مصنوعی همگی صفر است در این صورت نیز مسئله اصلی نامحدود می‌باشد.

۳-۴) علامت نامحدود بودن در مسئله دیده می‌شود و حداقل یک بردار مصنوعی با مقدار مثبت در پایه وجود دارد در این صورت برای مسئله اصلی جواب قابل قبول وجود نداشته و منطقه موجه نداریم.

📌 نکته: وقتی متغیری مصنوعی با مقدار مثبت در پایه وجود داشته باشد به آن جواب بهین‌نما می‌گویند.

- نکته:** تعداد مراحل یک مسئله در روش دومرحله‌ای و  $M$  بزرگ دقیقاً با هم برابر می‌باشد.
- نکته:** متغیرهای مصنوعی در مسائلی قابل استفاده است که گوشه شروع اولیه مثل  $(0, 0)$  وجود نداشته باشد در این صورت متغیرهای مصنوعی باعث افزایش منطقه موجه جواب می‌شوند.
- نکته:** وقتی که متغیر مصنوعی  $R_i$  صفر شود در این حالت وارد منطقه موجه واقعی محدودیت  $i$  می‌شویم، و وقتی تمام متغیرهای مصنوعی مسئله برابر صفر شود در این حالت وارد منطقه موجه واقعی مسئله می‌شویم.
- نکته:** اگر بیشتر از یک متغیر داوطلب ورودی به پایه وجود داشته باشد که یکی از آن‌ها غیر مصنوعی باشد متغیر غیر مصنوعی را وارد پایه می‌کنیم و اگر بیشتر از یک متغیر داوطلب خروجی از پایه وجود داشته باشد که یکی از آن‌ها متغیر مصنوعی باشد متغیر مصنوعی را از پایه خارج می‌کنیم.

## ۸-۲- بررسی حالات خاص روش سیمپلکس

### ۱-۸-۲- جواب بهینه چندگانه (متعدد)

هرگاه در جدول نهایی سیمپلکس ضریب یکی از متغیرهای غیرپایه در سطر تابع هدف (سطر  $Z$ ) صفر باشد مسئله می‌تواند جواب بهینه چندگانه داشته باشد (شرط لازم). به عبارت دیگر هرگاه تعداد صف‌های موجود سطر تابع هدف از تعداد محدودیت‌ها بیشتر باشد مسئله می‌تواند دارای جواب چندگانه باشد.

	$x_j$ (غیرپایه)
$Z$	۰

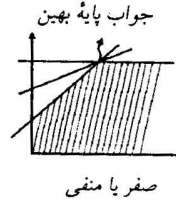
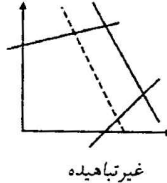
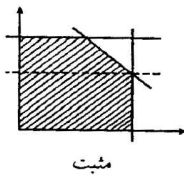
**نکته:** اگر چنانچه یکی از محدودیت‌های فعال موازی تابع هدف باشد مسئله می‌تواند جواب بهینه چندگانه داشته باشد.

**نکته:** اگر مسئله‌ای علاوه بر شرایط فوق پایه بهین غیرتباهیده (غیرتبهگن) داشته باشد و یا این که عنصر نظیر سطر تباهیده و ستون متعدد، عدد صفر یا منفی باشد جواب حتماً متعدد است.

	$x_j$ (غیرپایه)	$RHS$
$Z$	۰	
	$\vdots$	
	... مثبت	۰
	جواب یگانه	

	$x_j$ (غیرپایه)	$RHS$
$Z$	۰	
	$\vdots$	
	... صفر یا منفی	۰
	جواب چندگانه	

$$\theta = \text{Min} \left\{ \frac{b_i}{a_{ij}} \mid a_{ij} > 0 \right\}$$



👉 **نکته:** به‌طور عادی مقدار تابع هدف سیمپلکس در هر مرحله از جدول تغییر می‌کند مگر در حالت جواب چندگانه و تبهگن.

👉 **نکته:** هرگاه مسئله‌ای دارای جواب بهینه چندگانه باشد حداقل یک جواب قابل قبول اساسی دارد و مابقی جوابهای قابل قبول بهینه غیرپایه می‌باشند.

👉 **نکته:** هرگاه متغیری از متغیرهای مسئله آزاد در علامت باشد (نه همه متغیرها) و آن را به کمک تغییر متغیر  $\{x_j = x'_j - x''_j \mid (x'_j, x''_j) = 0\}$  مقید نماییم در این صورت جواب بهینه حتماً متعدد است.

## ۲-۸۲- حالت تبهگن (انحطاط، تباهیدگی، منحنی، دژنره Degeneracy)

حالت تبهگن معمولاً در سه حالت زیر نمایان می‌شود.

۱- در سمت راست یکی از مراحل سیمپلکس حداقل یک عدد صفر ظاهر گردد.  
 ۲- در انتخاب متغیر خروجی حالت یکسان برای دو یا چند متغیر وجود داشته باشد که در مرحله بعد جواب حتماً تبهگن خواهد بود.

۳- متغیر واجد شرایط ورود دارای بردار ستونی موازی سمت راست باشد در این صورت در مرحله بعد جواب حتماً منحنی می‌باشد. (یعنی  $\left[ \frac{b_i}{a_{ij}} = cte \right]$  در صورتی که ضرایب ستون متغیر واجد شرایط ورود به پایه باشد.) اگر حالت انحطاط در یکی از مراحل میانی ایجاد شود و سپس رفع گردد مسئله تبهگن موقت می‌باشد و مقدار تابع هدف بهبود می‌یابد و اگر چنانچه در جدول بهینه نهایی در سمت راست صفر وجود داشته باشد و یا در تکرارهای بعدی رفع نگردد مسئله تبهگن دائم دارد.

👉 **نکته:** به‌طور کلی در روش سیمپلکس در هر مرحله، از یک گوشه قابل قبول به گوشه‌ای دیگر حرکت می‌نماییم (غیر از حالت تبهگن)

**نکته:** به طور عادی هر گوشه از فضای جواب معادل یک حل اساسی و هر حل اساسی معادل یک نقطه گوشه فضای جواب است مگر در حالت انحطاط (تبهگن) که هر گوشه می تواند معادل دو یا چند حل اساسی باشد.

**نکته:** به طور عادی روش سیمپلکس برای همه مسائل، غیر از حالت تبهگن همگرا می باشد. یعنی این که همیشه سیمپلکس به سمت جواب بهینه حرکت می نماید، بجز حالت تبهگن که ممکن است در حلقه تکرار قرار گیرد.

**نکته:** یک جواب پایه ای را هنگامی تباهیده گویند که اولاً قابل قبول باشد و ثانیاً تعداد عناصر مثبت آن کمتر از تعداد محدودیت های مستقل باشد.

**نکته:** اگر در یک مسئله  $n$  بعدی  $n+1$  محدودیت از یک گوشه عبور نماید مسئله تبهگن خواهد بود.

### ۳-۸-۲- منطقه موجه بیکران (نامحدود)

هرگاه متغیری که شرایط ورود به پایه را دارد دارای ضرایب ستونی تماماً صفر یا منفی در محدودیت ها باشد و متغیر خروجی نداشته باشیم، مسئله دارای منطقه موجه نامحدود در راستای آن متغیر بوده و جواب بهینه نیز نامحدود (بیکران) می باشد. یعنی متغیر ورودی داریم ولی نمی توان خروجی را تعیین کرد. همچنین هرگاه تمام ضرایب یک متغیر غیر اساسی در جدول بهینه همگی صفر یا منفی باشد مسئله در راستای آن متغیر منطقه موجه نامحدود دارد ولی جواب بهینه ممکن است محدود باشد.

**نکته:** در شرایط بیکران (نامحدود) بودن، محدودیت ها قادر به کنترل تابع هدف نمی باشند و تابع هدف به طور نامحدود افزایش می یابد.

تذکر: برای تشخیص حالت بیکران مسئله، حتماً باید سطرها و ستونها بهنگام شده باشد و مسئله نیز متغیر آزاد نداشته باشد، به عبارت دیگر مسئله در شکل استاندارد باشد.

**نکته:** اگر مسئله ای نامتناهی باشد با تغییرات مقدار سمت راست نمی توان آن را متناهی کرد و اگر مسئله متناهی باشد با تغییرات مقدار سمت راست  $(b)$  نمی توان آن را نامتناهی کرد.

**نکته:** هرگاه فضای جواب مسئله ای بیکران باشد مسئله همگن متناظر با آن جواب غیر صفر دارد و بالعکس.

**نکته:** هرگاه مسئله ای دارای جواب بیکران باشد برای خود مسئله و مسئله همگن آن می توان جواب موجه غیر پایه ای با  $(m+1)$  متغیر مثبت بوجود آورد.



**۴-۸-۲- بودن جواب بودن مسئله**

هرگاه متغیر مصنوعی با مقدار مثبت در پایه نهایی باشد و با تابع هدف مرحله اول متغیرهای مصنوعی ( $R$ ) مخالف صفر باشد، آن مسئله دارای جواب قابل قبول نخواهد بود. دلایل تھی بودن فضای جواب عبارتند از:

- ۱- محدودیت‌ها با هم در تناقض هستند.
  - ۲- ناحیه جواب در غیر ناحیه اول می‌باشد.
  - ۳- نیاز ما از منابع موجود بیشتر است.
- تذکر: اگر مسئله‌ای نقطه فرین نداشته باشد معادل این است که بگوییم فضای جواب تھی است.

## جبر ماتریسی و سیمپلکس اصلاح شده

۳

### ۱-۳ بردار و فضای برداری

فضای برداری: اگر مجموعه‌ای از بردارها را داشته باشیم به طوری که حاصل جمع هر دو بردار دلخواه و هر ضربی دلخواه از هر بردار، در آن مجموعه باشد آن مجموعه را فضای برداری می‌گویند.

$$\left. \begin{array}{l} a + b = c \\ d = \lambda a \end{array} \right\} \Rightarrow c, d \in \text{فضای برداری}$$

تذکر: هر فضای برداری حتماً شامل بردار صفر خواهد بود وگرنه فضای برداری حاصل نخواهد شد.

### ۲-۳ استقلال بردارها

در یک فضای  $n$  بعدی، بردارهای  $(a_1, \dots, a_k)$  مستقل خطی هستند اگر:

الف) دترمینان ضرایب آنها مخالف صفر باشد.  $|A| \neq 0$

ب) در رابطه  $\sum_{i=1}^k \lambda_i a_i = 0$  همه  $\lambda_i$  ها صفر باشد.

ج) آنها را بتوان بصورت ترکیب خطی از بردار صفر نوشت.

## ۳-۳- وابستگی بردارها

در یک فضای  $n$  بعدی، بردارهای  $(a_1, \dots, a_k)$  دارای وابستگی خطی هستند اگر:

$$|A| = 0 \text{ (الف) دترمینان ضرایب آنها مساوی صفر باشد.}$$

(ب) در رابطه  $\sum_{i=1}^k \lambda_i a_i = 0$  همه  $\lambda_i$  ها مساوی صفر نباشد (حداقل یکی از  $\lambda_i$  ها مخالف صفر باشد)

(ج) آنها را بتوان بصورت ترکیب خطی از بردار صفر نوشت.

**نکته:** هرگاه بردار  $b$  داخل فضای برداری بردارهای ستونی ماتریس ضرایب قرار گیرد در اینصورت مسئله جواب دارد و در غیر اینصورت مسئله جواب نخواهد داشت.

## ۳-۴- ماتریس‌ها

یک ماتریس  $m \times n$  بصورت زیر نمایش داده می‌شود که در آن:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

$$A = \left| \begin{array}{c|c} & a_{ij} \\ \hline & \end{array} \right| \begin{array}{l} m \times n \\ \text{تعداد ستون‌ها} \\ \text{تعداد سطرها} \end{array}$$

**نکته:** هر بردار یک ماتریس است ولی هر ماتریس یک بردار نیست.

مجموع دو ماتریس: دو ماتریس وقتی جمع می‌شوند که تعداد سطرها و ستونهای مساوی با هم داشته باشند در اینصورت درایه‌های نظیر یکدیگر با هم جمع می‌شوند.

$$A+B=C \Rightarrow a_{ij}+b_{ij}=c_{ij}$$

$$i=j=1, 2, \dots, n$$

۳-۴-۱- ضرب عدد اسکالر  $\lambda$  در ماتریس

عدد  $\lambda$  در کلیه درایه‌های ماتریس ضرب می‌شود.

## ۳-۴-۲- ضرب ماتریس

دو ماتریس در صورتی با یکدیگر ضرب می‌شوند که تعداد ستونهای ماتریس اول با تعداد سطرهای ماتریس دوم برابر باشد. اگر  $A$  ماتریس  $m \times n$  و  $B$  ماتریس  $n \times p$  باشد آن وقت داریم:

$$A_{m \times n} \times B_{n \times p} = C_{m \times p}$$

که در آن  $C$  یک ماتریس  $m \times p$  می باشد و تعریف می شود:

$$C_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj} \quad \text{اگر } \begin{matrix} i = 1, \dots, m \\ j = 1, \dots, p \end{matrix}$$

### ۳-۵- ماتریس های خاص

ماتریس مربع: ماتریسی که تعداد سطر و ستونهای مساوی باشد  $m=n$

ماتریس سطری: ماتریسی که فقط یک سطر دارد.

ماتریس ستونی: ماتریسی که فقط یک ستون دارد.

ماتریس واحد: ماتریس مربعی که تمام قطرهایش یک و بقیه عناصر آن صفر باشد و با  $I$  نمایش می دهند.

ماتریس قطری: ماتریس مربعی که عناصر غیر قطری آن صفر باشد.

ماتریس اسکالر: ماتریس قطری که عناصر قطر اصلی آن یکسان باشد.

ماتریس ترانسپوز (ترانواده): ماتریسی که جای سطر و ستونهای آن عوض شده باشد. اگر ماتریس  $A_{m \times n}$  با  $a_{ij}$  عنصر مفروض باشد ترانسپوز ماتریس  $A$  بصورت یک ماتریس  $A^T_{n \times m}$  با عناصر  $a_{ji}$  تعریف می شود.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow A^T = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

ماتریس متعامد: ماتریسی که اگر در ترانسپوز ضرب شود برابر ماتریس واحد شود.

$$A \cdot A^T = A^T A = I_n$$

ماتریس متقارن: ماتریسی که مساوی با ترانسپوزش گردد.

$$A = A^T$$

ماتریس مثلثی: یک ماتریس مربع  $m \times n$  یک ماتریس بالا مثلثی است اگر تمام عناصر بالای قطر اصلی

آن به همراه خود قطر اصلی مخالف صفر باشد، و پائین مثلثی است اگر تمام عناصر زیر قطر اصلی آن به همراه خود قطر اصلی مخالف صفر باشد.

### ۳-۶- اعمال سطر و ستونی ماتریس

ماتریس  $A_{m \times n}$  را در نظر می گیریم. می توان بعضی از اعمال سطری یا ستونی مقدماتی را روی ماتریس

$A$  انجام داد که در حل معادلات خطی مفید باشد.

یک عمل سطری مقدماتی ماتریس  $A$  به سه حالت زیر انجام می پذیرد:



- ۴- دترمینان یک ماتریس که دارای دو سطر یا ستون مساوی باشد، صفر است.
- ۵- حاصل ضرب هر یک از عناصر یک سطر یا یک ستون از ماتریس مربع  $A$  در عدد اسکالر  $\lambda$ ، دترمینان  $A$  را در  $\lambda$  ضرب خواهد کرد.
- ۶- دترمینان حاصلضرب دو ماتریس مربع هم مرتبه برابر حاصلضرب دترمینانهای آنها است:
- $$|AB| = |A| \cdot |B|$$

ماتریس منفرد: ماتریسی که دترمینان آن برابر صفر باشد.

ماتریس غیر منفرد: ماتریسی که دترمینان آن مخالف صفر باشد.

### ۳-۸- رتبه ماتریس (Rank)

اگر  $A$  یک ماتریس  $m \times n$  باشد در اینصورت همیشه  $Rank A \leq \min(m, n)$  که اگر  $Rank A = \min(m, n)$  باشد  $A$  را رتبه کامل گویند. بنابراین رتبه ماتریس عبارتست از مرتبه یا بعد بزرگترین زیر ماتریس که دترمینان آن صفر نباشد.

نکته: سیستم معادلات  $Ax=b$  و ماتریس افزوده  $(A|b)$  با  $m$  سطر و  $n+1$  ستون در نظر بگیرید. حالتی ممکن برای جوابهای سیستم عبارتست از:

(۱) اگر  $Rank(A|b) > Rank(A)$  در اینصورت سیستم  $Ax=b$  جواب ندارد چون  $b$  را نمی توان به صورت ترکیب خطی از  $A$  نوشت.

(۲)  $Rank(A|b) = Rank(A) = n$  آنگاه،  $Ax=b$  جواب منحصر به فرد دارد.

(۳)  $Rank(A|b) = Rank(A) < n$ ،  $n < m$  آنگاه،  $Ax=b$  بی نهایت جواب دارد.

(۴) اگر  $m < n$ ،  $Rank(A|b) = Rank(A)$  آنگاه سیستم بی نهایت جواب دارد.

(۵) اگر  $|A| = 0$ ،  $Rank(A|b) = Rank(A)$  آنگاه سیستم بی نهایت جواب دارد.

(۶) اگر  $|A| \neq 0$ ،  $Rank(A|b) = Rank(A)$  آنگاه سیستم بی نهایت جواب منحصر به فرد دارد.

### ۳-۹- ماتریس وارون (معکوس)

هرگاه ماتریس مربع  $A$  در رابطه  $AB=BA=I$  صدق کند، در اینصورت  $B$  را ماتریس معکوس  $A$  می گویند و به صورت  $B=A^{-1}$  نمایش می دهند.

### ۳-۱۰- خواص ماتریس معکوس

۱- شرط لازم و کافی برای اینکه ماتریس معکوس داشته باشد این است که دترمینان آن مخالف صفر باشد به عبارت بهتر تمام سطرها و ستونهای آن برداری مستقل از هم باشند.

- ۲- اگر ماتریس  $A$  دارای معکوس باشد این معکوس منحصر به فرد است.  
 ۳- اگر  $A$  و  $B$  دو ماتریس غیرمتفرد هم‌رتبه باشد، معکوس حاصلضرب، برابر معکوس دومی و معکوس اولی می‌باشد.

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

- ۴- اگر  $A$  یک ماتریس غیرمتفرد باشد معکوس ترانسپوز آن برابر ترانسپوز معکوس آن است.

$$(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$$

- ۵- اگر  $A$  یک ماتریس غیرمتفرد باشد در اینصورت:

$$(A^{-1})^{-1} = A$$

### ۹-۲- قضیه ماتریس معکوس

اگر ماتریس  $A$  یک ماتریس مربعی غیرمتفرد باشد ( $|A| \neq 0$ ) و ماتریس  $[A|I]$  توسط عملیات ابتدائی سطری به ماتریس  $[I|A^{-1}]$  تبدیل شود در اینصورت  $A$  و  $A^{-1}$  معکوس یکدیگر می‌باشند.

مثال: معکوس ماتریس  $A = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}$  چه ماتریسی می‌باشد؟

$$\left[ \begin{array}{cc|cc} 4 & -2 & 1 & 0 \\ 3 & -4 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{\frac{1}{4}R_1 \rightarrow R_1} \left[ \begin{array}{cc|cc} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 \\ 3 & -4 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{-3R_1 + R_2 \rightarrow R_2}$$

$$\left[ \begin{array}{cc|cc} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & -\frac{5}{2} & -\frac{3}{4} & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{-\frac{2}{5}R_2 \rightarrow R_2} \left[ \begin{array}{cc|cc} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{3}{10} & -\frac{2}{5} \end{array} \right] \xrightarrow{\frac{1}{2}R_2 + R_1 \rightarrow R_1}$$

$$\left[ \begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \\ 0 & 1 & \frac{3}{10} & -\frac{2}{5} \end{array} \right] \Rightarrow A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \\ \frac{3}{10} & -\frac{2}{5} \end{bmatrix}$$

### ۳-۱۰- سیمپلکس اصلاح شده (ماتریسی)

مسئله برنامه‌ریزی خطی زیر را در نظر بگیرید.

$$L.P : \text{Max } Z = Cx$$

$$S.t \quad Ax=b$$

$$x \geq 0$$

$A$  یک ماتریس  $m \times n$  می باشد؛

در این صورت  $X_B$  را متغیرهای اساسی (پایه) جدول سیمپلکس و  $X_N$  را متغیرهای غیراساسی (غیرپایه) در جدول در نظر گرفته و تعریف می کنیم:

$$X_B = (x_1, x_2, \dots, x_n) = B^{-1} \cdot b - B^{-1} \cdot N \cdot X_N \quad (X_B: \text{متغیرهای اساسی (پایه)})$$

📌 **نکته:** جهت حل مسئله در حالت  $Max$  اگر  $X_B$  نامعلوم باشد، متغیرهایی را اساسی در نظر می گیریم که بیشترین ضریب را در تابع هدف داشته باشد.

$$\frac{\partial x_B}{\partial x_j} = -B^{-1} \cdot a_j \quad (X_B: \text{میزان تغییر متغیرهای پایه نسبت متغیر غیر پایه ای } X_j \text{ به صورت } a_j \text{ به صورت})$$

تعریف می شود یعنی اگر  $x_j$  به اندازه یک واحد افزایش یابد آنوقت  $i$  امین متغیر پایه  $X_{B_i}$  به اندازه  $B^{-1} \cdot a_{ij}$  کاهش می یابد.

$$X_N = (x_1, \dots, x_p, s_1, s_m, R_1, \dots, R_k) \quad (X_N: \text{متغیرهای غیر اساسی (غیرپایه)})$$

📌 **نکته:** جهت حل مسئله در حالت  $max$  اگر  $X_N$  نامعلوم باشد متغیرهایی را غیراساسی در نظر می گیریم که کمترین ضریب را در تابع هدف داشته باشد.

$B$ : عبارتست از ماتریس ضرایب متغیرهای پایه جدول دلخواه در محدودیتهای صورت مسئله.

$N$ : عبارتست از ماتریس ضرایب متغیرهای غیرپایه جدول دلخواه در محدودیتهای صورت مسئله.

$B^{-1}$ : ماتریس معکوس که همیشه در زیر متغیرهای پایه اولیه در جدول دلخواه قرار می گیرد.

$\bar{N}$ : عبارتست از ماتریس ضرایب متغیرهای غیرپایه در جدول دلخواه

$$\bar{N} = B^{-1} \cdot N$$

$C_B$ : عبارتست از ضرایب متغیرهای پایه جدول دلخواه در تابع هدف صورت مسئله

$\bar{C}_B$ : عبارتست از ضرایب متغیرهای پایه جدول دلخواه در سطر تابع هدف، که حتماً صفر است.

$C_N$ : عبارتست از ضرایب متغیرهای غیرپایه تابع هدف صورت مسئله

$\bar{C}_N$ : عبارتست از ضرایب متغیرهای غیرپایه در سطر هدف جدول دلخواه

$$\bar{C}_N = C_N \cdot B^{-1} \cdot N - C_N$$



$b$ : عبارتست از بردار ستونی مقادیر سمت راست در صورت مسئله

$\bar{b}$ : عبارتست از بردار ستونی مقادیر سمت راست در جدول دلخواه

$$\bar{b} = B^{-1} \cdot b$$

$a_j$ : عبارتست از بردار ستونی متغیر  $z$ ام در محدودیتهای صورت مسئله

$\bar{a}_j$ : عبارتست از بردار ستونی متغیر  $z$ ام در محدودیتهای جدول دلخواه

$$\bar{a}_j = B^{-1} \cdot a_j$$

$c_j$ : عبارتست از ضریب متغیر  $z$ ام در سطر هدف صورت مسئله

$\bar{c}_j$ : عبارتست از ضریب متغیر  $z$ ام در سطر هدف جدول دلخواه

$$\bar{c}_j = c_B \cdot B^{-1} \cdot a_j - c_j = z_j - c_j$$

$$Z: \text{تابع هدف: } Z = \underbrace{C_B \cdot B^{-1} \cdot b}_{Z_B} - \underbrace{(C_B \cdot B^{-1} \cdot N - C_N)}_{\bar{C}_N} X_N = Z_B - (Z_N - C_N) X_N$$

☞ **نتیجه:** اگر تابع هدف  $Max$  باشد و تمام مقادیر  $(Z_N - C_N)$  ها مثبت باشد، در اینصورت جواب بهینه می باشد و اگر تابع هدف  $Min$  باشد و تمام مقادیر  $(Z_N - C_N)$  ها منفی باشد، در اینصورت جواب بهینه می باشد.

☞ **نتیجه:** عبارت  $\frac{\partial Z}{\partial x_j} = -(z_j - c_j)$  میزان تغییرات (افزایش یا کاهش) تابع هدف  $Z$  نسبت به

تغییرات (افزایش یا کاهش) متغیر غیر پایه ای  $x_j$  را نمایش می دهد که به هزینه تقلیل یافته متغیر غیر پایه ای  $x_j$  تعبیر می شود.

☞ **نتیجه:** میزان تغییرات تابع هدف و مقدار متغیرهای پایه در اثر تغییر موجودی منابع از رابطه

$$\frac{\partial Z}{\partial b} = C_B B^{-1} \text{ حاصل می شود.}$$

ماتریسها و بردارهای فوق بصورت زیر در جدول سیمپلکس جایگیری می نمایند. در این جدول،  $I$  ماتریس واحد ناشی از متغیرهای پایه می باشد.

متغیرهای پایه	$z$	$x_B$	$x_N$	$RHS$
$z$ سطر هدف	۱	۰	$C_B \cdot B^{-1} \cdot N - C_N$	$C_B \cdot B^{-1} \cdot b$
$x_B$	۰	$I$	$B^{-1} \cdot N$	$B^{-1} \cdot b$

بنابراین مسئله  $LP$  بصورت زیر تعریف می شود.

$$\text{Max } Z = C_B \cdot X_B + C_N \cdot X_N = (C_N, C_B) \begin{bmatrix} X_N \\ X_B \end{bmatrix}$$

$$S.t \quad B X_B + N X_N = b$$

$$X_B, X_N \geq 0$$

👉 **نکته:** بردار  $X_B$  وقتی بردار اساسی (پایه) می باشد که ماتریس ضرایب تشکیل دهنده پایه، معکوس پذیر بوده و دترمینان این ماتریس مخالف صفر گردد.

👉 **نکته:** اگر در یکی از تکرارهای جدول سیمپلکس،  $z_j$  متغیر وارده به پایه باشد در اینصورت مقدار تابع هدف بصورت زیر تغییر می کند.

$$Z_{جدید} = C_B \cdot B^{-1} \cdot b - (Z_j - C_j)x_j = Z_{قدیم} - [(Z_j - C_j) \times (\theta)]$$

که در آن  $z_j$  از حداقل نسبتها  $(\theta)$  بدست می آید و  $(Z_j - C_j)$  نیز ضریب متغیر وارده به پایه در سطر  $z$  می باشد.

👉 **نکته:** اگر ماتریس  $2 \times 2$  باشد معکوس ماتریس  $B$  را داریم:

$$B = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \rightarrow B^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

مثال: مسئله برنامه ریزی خطی زیر را در نظر بگیرید در صورتی که پایه بهینه شامل متغیرهای  $x_1$  و  $x_2$  باشد جدول بهینه را کامل کنید.

$$\text{Max } Z = 2x_1 + 3x_2 + x_3 \quad X_B^* = (x_1, x_2)$$

$$\frac{1}{3}x_1 + \frac{1}{3}x_2 + \frac{1}{3}x_3 \leq 1$$

$$\frac{1}{3}x_1 + \frac{4}{3}x_2 + \frac{5}{3}x_3 = 3$$

$$(x_1, x_2, x_3) \geq 0$$

$$X_B = (x_1, x_2)$$

$$X_N = (x_3, S_1, R_2)$$

$$B = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{4}{3} \end{bmatrix} \quad N = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 1 & 0 \\ \frac{5}{3} & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

ماتریس معکوس  $B$  را بدست می آوریم:

$$B = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \rightarrow B^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

$$B^{-1} = \frac{1}{\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{4}{3}\right) - \left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{3}\right)} \begin{bmatrix} \frac{4}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} = 3 \begin{bmatrix} \frac{4}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \Rightarrow B^{-1} = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\bar{b} = B^{-1}b = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$a_3 = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{5}{3} \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix} \Rightarrow \bar{a}_3 = B^{-1}a_3 = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{5}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\bar{N} = B^{-1} \cdot N = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 1 & 0 \\ \frac{5}{3} & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 4 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

ضریب متغیرهای پایه در سطر صفر جدول دلخواه حتماً صفر است.

$$C_B = [2, 3] \rightarrow \bar{C}_B = [0, 0]$$

$$C_N = [1, 0, \overset{R}{\ominus}M] \begin{cases} \text{Max} \rightarrow -M \\ \text{Min} \rightarrow M \\ \circ \rightarrow \text{روشن در مرحله} \end{cases}$$

$$\bar{C}_N = C_B \cdot B^{-1} \cdot N - C_N = [2, 3] \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 1 & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & 1 \end{bmatrix} - [1, 0, -M] = [3, 5, 1+M]$$

$$\bar{C}_j = C_B \cdot B^{-1} \cdot N - C_j \rightarrow \bar{C}_r = [2, 3] \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix} - 1 = 3$$

$$Z = C_B \cdot B^{-1} \cdot b - (\bar{C}_N) X_N$$

چون جواب بهینه بوده پس جوابهای غیرپایه صفر خواهند بود.  $X_N = 0$

$$Z = C_B \cdot B^{-1} \cdot b = [2, 3] \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} = 8$$

پس جدول بهینه مسئله فوق بصورت زیر حاصل می شود.

Max	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$S_1$	$R_2$	RHS
z	0	0	3	5	$1+M$	8
$x_1$	1	0	-1	4	-1	1
$x_2$	0	1	2	-1	1	2

## دوگان (ثانویه) مسایل برنامه ریزی خطی

۴

### ۱-۴- تعاریف و مفاهیم

در ارتباط با هر مسئله برنامه ریزی خطی اولیه (*primal*) معادل آن به نام مسئله مزدوج (دوگان - همتا - همزاد، *Dual* یا ثانویه) وجود دارد به طوری که این مسئله از ترانهاده کردن کل ماتریس ضرایب با تغییرات جزئی دیگر حاصل می شود.

### ۱-۱-۴- خواص مسئله ثانویه

- ۱- اعداد سمت راست می توانند منفی باشند.
- ۲- جواب اولیه و ثانویه بطور همزمان در جدول نهایی وجود دارد.
- ۳- در این روش بجای استفاده از متغیر مصنوعی می توان از محدودیت مصنوعی استفاده نمود.

### ۲-۱-۴- دلایل استفاده از مسئله ثانویه

- ۱- کمتر شدن مقدار محاسبات (تعداد مراحل عملیات بستگی به تعداد محدودیتها دارد نه تعداد متغیرها)
- ۲- جلوگیری از به کار بردن متغیرهای مصنوعی
- ۳- تعبیر اقتصادی مسئله ثانویه در مسئله اولیه  $b_i$  نشان دهنده مقدار منابع در دسترس، و متغیرهای

مزدوج ( $i$ ها) نشان دهنده ارزش متبع  $i$ ام و سهم قابل وصول فعالیتها از منابع  $i$ ام می‌باشد.

۴- تجزیه و تحلیل حساسیت

۵- نقطه مبدأ مختصات، جزء ناحیه جواب نباشد.

#### ۴-۲- روابط متقابل مسئله اولیه و ثانویه

یک مسئله ثانویه را به راحتی می‌توان با اطلاعات مسئله اولیه نمایش داد.

مسئله ثانویه (اولیه)		مسئله اولیه (ثانویه)	
تابع هدف	$Min$	$Max$	تابع هدف
سمت راست	مقادیر سمت راست	مقادیر ضرایب تابع هدف	ضریب تابع
ضریب تابع هدف	مقادیر ضرایب تابع هدف	مقادیر سمت راست	سمت راست
متغیر	تعداد متغیر ( $n$ ) $\geq$ $\leq$ آزاد در علامت	تعداد محدودیت ( $m$ ) $\leq$ $\geq$ =	محدودیت
محدودیت	تعداد محدودیتها ( $m$ ) $\geq$ $\leq$ =	تعداد متغیرها ( $n$ ) $\geq$ $\leq$ آزاد در علامت	متغیر
ضرایب محدودیتها	ماتریس ضرایب	ترانسپوز ماتریس ضرایب	ضرایب محدودیتها
متغیرهای پایه	$m$ متغیر اساسی $n$ متغیر غیراساسی	$n$ متغیر اساسی $m$ متغیر غیراساسی	متغیرهای پایه

بنابراین مسائل اولیه و ثانویه به صورت مدل‌های زیر نمایش داده می‌شوند:

مسئله اولیه	مسئله ثانویه
$\text{Max } Z = \sum_{j=1}^n C_j x_j$ $\text{st : } \begin{cases} \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i \\ x_j \geq 0 \quad i = 1, \dots, m \end{cases}$	$\text{min } Y = \sum_{i=1}^m b_i y_i$ $\text{st : } \begin{cases} \sum_{i=1}^m a_{ji} y_i \geq C_j \\ y_i \geq 0 \quad j = 1, \dots, n \end{cases}$

**تذکر:** علامت متغیرها از روی محدودیتها و علامت محدودیتها از روی متغیرها تعیین می شود.

**نکته:** مزدوج مزدوج هر برنامه ریزی خطی خود آن مسئله می باشد.

**تذکر:** تعداد محدودیتهای مسئله اولیه برابر تعداد متغیرهای مسئله ثانویه و برعکس می باشد.

**نکته:** مقادیر متغیرهای پایه در هر مرحله از جدول مسئله اولیه در تمام محدودیتها صدق می کند، ولی در مسئله ثانویه این چنین نبوده و فقط در جدول نهایی به این حالت می رسیم. در سایر موارد متغیرها در محدودیتها صدق نمی کند. به عبارت دیگر ثانویه اولین جواب قابل قبولی که حاصل می شود جواب بهینه است.

**نکته:** در طی مراحل سیمپلکس مسئله اولیه مقدار تابع هدف با تابع هدف هم جهت است ولی در مسئله ثانویه در خلاف جهت تابع هدف حرکت می کنیم. (در واقع در حالت  $Max$  تابع هدف از مقدار کم شروع نموده و به بهینه می رسد ولی در حالت  $Min$  تابع هدف از مقدار زیاد شروع و به حالت بهینه می رسد.)

**نکته:** در سیمپلکس مسئله اولیه عنصر لولا همواره مثبت می باشد ولی در سیمپلکس مسئله ثانویه عنصر لولا منفی است.

**نکته:** در سیمپلکس مسئله اولیه ابتدا متغیر ورودی و سپس خروجی تعیین می شود، در صورتی که در سیمپلکس ثانویه دقیقاً برعکس این عمل اتفاق می افتد.

**نکته:** در مسئله اولیه زمانی که مسئله، جواب اولیه قابل قبول ندارد از متغیر مصنوعی استفاده می شود، در صورتی که در مسئله ثانویه زمانی که مسئله جواب ثانویه قابل قبول ندارد از محدودیت مصنوعی استفاده می شود تا به جواب قابل قبول مطلوب دست یابیم.

**نکته:** بکارگیری متغیرهای مصنوعی در مسئله اولیه معادل بکارگیری محدودیت مصنوعی در

مسئله ثانویه است.

**نکته:** تعداد گوشه‌های هر دو مسئله با هم برابر است (زیرا  $m$  و  $n$  فقط جایشان عوض شده است)

$$\frac{(m+n)!}{m!n!}$$

یعنی

**نکته:** هر جواب اساسی (گوشه) بهینه در مسئله اولیه متناظر با یک جواب اساسی (گوشه) بهینه در مسئله ثانویه است و مشخصه آن داشتن مقادیر تابع هدف برابر است.

**نکته:** هر دو گوشه متناظر نمی‌توانند در دو مسئله اولیه و ثانویه موجه باشند مگر اینکه آن جواب اساسی یا گوشه بهینه باشد.

**نکته:** مقدار تابع هدف بهینه در هر دو مسئله اولیه و ثانویه برابر می‌باشد.

**نکته:** باتوجه به جداول سیمپلکس اولیه، برای مسئله ثانویه مقدار متغیرهای اصلی، در سطر صفر در زیر متغیرهای کمکی جدول سیمپلکس اولیه، و مقدار متغیرهای کمکی، در سطر صفر در زیر متغیرهای اصلی جدول سیمپلکس اولیه قرار دارد.

### ۳-۴- قضایای مسئله دوگان

قضیه ۱: ثانویه مسئله ثانویه، مسئله اولیه می‌باشد.

قضیه ۲ (قضیه ضعیف دوگان): اگر  $x^*$  جواب قابل قبول برای مسئله اولیه با تابع هدف  $Max$  و  $y^*$  جواب قابل قبول برای مسئله ثانویه با تابع هدف  $Min$  باشد، رابطه زیر همواره برقرار است:

$$\left\{ \begin{array}{l} Cx^* \leq by^* \\ x^* \leq y^* \end{array} \right\} \Rightarrow \text{مقدار تابع هدف ثانویه (Min)} \leq \text{مقدار تابع هدف اولیه (Max)}$$

حال اگر مسئله اولیه  $Min$  و مسئله ثانویه  $Max$  باشد علامتها عوض خواهد شد.

### نتایج قضیه ضعیف دوگان

۱- مقدار تابع هدف مسئله  $Min$  به ازای هر جواب قابل قبول این مسئله، حد بالایی برای بیشترین مقدار تابع هدف مسئله بیشینه سازی می‌باشد.

۲- مقدار تابع هدف مسئله  $Max$  به ازای هر جواب قابل قبول این مسئله، حد پایینی برای کمترین مقدار تابع هدف مسئله کمینه سازی می‌باشد.



- ۳- اگر مسئله اولیه ( $Max$ ) جواب قابل قبول داشته باشد و به ازای این جواب مقدار تابع هدف نامحدود باشد ( $Z \rightarrow \infty$ ) در این صورت مسئله ثانویه نمی‌تواند جواب قابل قبولی داشته باشد.
- ۴- اگر مسئله ثانویه ( $Min$ ) دارای جواب قابل قبول باشد و به ازای این جواب، مقدار تابع هدف نامحدود باشد ( $Y \rightarrow \infty$ ) در این صورت مسئله اولیه نمی‌تواند جواب قابل قبول داشته باشد.
- ۵- اگر یکی از مسائل اولیه یا ثانویه جواب بهینه نامحدود داشته باشد در این صورت مسئله دیگر جواب قابل قبول نخواهد داشت.
- ۶- اگر مسئله اولیه یا ثانویه جواب قابل قبول نداشته باشد، مسئله دیگر ممکن است جواب قابل نداشته باشد و یا اینکه مقدار تابع هدف نامحدود داشته باشد.
- ۷- اگر مسئله اولیه جواب قابل قبول داشته باشد ولی ثانویه جواب قابل قبول نداشته باشد آنگاه مسئله اولیه نامحدود می‌باشد.
- ۸- اگر مسئله ثانویه جواب قابل قبول داشته باشد ولی اولیه جواب قابل قبول نداشته باشد آنگاه مسئله ثانویه نامحدود می‌باشد.
- قضیه ۳ (قضیه معیار بهینگی): اگر  $x^*$  و  $y^*$  جوابهای قابل قبول مسئله اولیه و ثانویه باشند به گونه‌ای که مقادیر تابع هدف این دو مسئله به ازای این جوابها با یکدیگر مساوی باشند ( $cx^* = by^*$ ) در این صورت  $x^*$ ,  $y^*$  جوابهای بهینه این دو مسئله می‌باشند.
- نتیجه قضیه معیار بهینگی: شرط لازم و کافی جهت بهینه بودن جواب مسئله اولیه و ثانویه اینست که این جوابها قابل قبول بوده و به ازای آنها مقادیر تابع هدف هر دو مسئله برابر گردد.
- قضیه ۴ (قضیه قوی دوگان): هرگاه  $x^*$ ,  $y^*$  جوابهای قابل قبول دو مسئله اولیه و ثانویه باشند آنگاه هر دو مسئله دارای جواب بهینه بوده و رابطه  $cx^* = by^*$  برقرار است.
- نتیجه قضیه قوی دوگان: هرگاه هر یک از مسائل اولیه یا ثانویه جواب بهینه داشته باشد، دیگری نیز جواب بهینه خواهد داشت.
- قضیه ۵ (قضیه اساسی دوگان): در مسائل برنامه‌ریزی خطی اولیه و ثانویه، یکی از سه حالت زیر بطور کلی رخ می‌دهد:
- ۱- هر دو مسئله جواب بهینه محدود دارند، به طوری که  $cx^* = by^*$  برقرار است و در آن  $x^*$ ,  $y^*$

به ترتیب جوابهای بهینه مسائل اولیه و ثانویه می‌باشند.

۲- هرگاه مقدار تابع هدف یکی از مسائل نامحدود باشد، در اینصورت مسئله دیگر جواب قابل قبول نخواهد داشت ولی عکس این قضیه همواره برقرار نمی‌باشد.

۳- هر دو مسئله جواب قابل قبول ندارند.

قضیه ۶ (قضیه تعدد و انحطاط): اگر هرکدام از مسائل اولیه یا ثانویه برنامه‌ریزی خطی جواب بهینه چندگانه داشته باشد، در اینصورت مسائل دیگر دارای جواب بهینه تباهیده (منحط) خواهد بود و برعکس.

قضیه ۷ (قضیه مکمل زاید):

مسئله اولیه و ثانویه را بصورت زیر در نظر بگیرید:

مسئله اولیه	مسئله ثانویه
$Max Z = cx$	$Min Y = yb$
$S.t : Ax \leq b$	$S.t : yA \geq c$
$x \geq 0$	$y \geq 0$

فرض کنید  $x^*, y^*$  به ترتیب جوابهای قابل قبول برای مسئله اولیه و ثانویه باشند، آنگاه  $x^*, y^*$  جواب بهینه می‌باشند اگر و فقط اگر:

$$(y^*A - c)x^* + y^*(b - Ax^*) = 0$$

و در حالت بسط یافته داریم:

$$(y^*a_j - c_j)x_j^* + y_i^*(b_i - a^i x^*) = 0 \quad (I) \quad \begin{matrix} i = 1, \dots, m \\ j = 1, \dots, n \end{matrix}$$

این قضیه نشان می‌دهد که حداقل یکی از دو جمله در هر بسط باید صفر باشد بنابراین:

$$\text{اگر} \begin{cases} x_j^* > 0 \Rightarrow y^*a_j = c_j \\ y^*a_j < c_j \Rightarrow x_j^* = 0 \\ y_i^* > 0 \Rightarrow a^i x^* = b_i \end{cases}$$

**نکته:** از قضیه فوق نتیجه می‌شود که اگر متغیری در یک مسئله مثبت باشد آن وقت  $a^i x^* > b_i$  و ادیت

متناظر آن در مسئله دیگر فعال است و اگر یک محدودیت در یک مسئله فعال نباشد آن وقت متغیر متناظر آن در مسئله دیگر باید صفر باشد. حال اگر  $s_i = a^i x^* - b_i \geq 0$  و  $s_j' = c_j - y^* a_j \geq 0$  به ترتیب متغیرهای کمکی مسئله اولیه و ثانویه باشد از معادله (I) داریم:

$$s_j' \times x_j^* = 0 \quad j = 1, \dots, n$$

$$y_i^* \times s_i^* = 0 \quad i = 1, \dots, m$$

نتایج حاصل از قضیه مکمل زاید

۱- در جواب بهینه مقدار  $x^* = y^*$  می باشد.

۲- در صورتی که متغیر مسئله اولیه  $(x_j)$  مثبت باشد  $(x_j$  در پایه باشد) آنگاه محدودیت متناظر در مسئله ثانویه بصورت مساوی (محدودیت فعال) برآورده می شود.

۳- در صورتی که محدودیت مسئله اولیه بصورت نامساوی مطلق برآورده شود  $(s_j > 0)$  در پایه باشد) آنگاه متغیر متناظر در مسئله ثانویه صفر است  $(y_i = 0)$

	$s_i$	
$z$	$y_i$	
$s_i$	۱	

۴- در صورتی که متغیر مسئله ثانویه  $(y_i)$  مثبت باشد  $(y_i$  در پایه باشد) آنگاه محدودیت متناظر در مسئله اولیه بصورت مساوی  $(s_i = 0)$  برآورده می شود.

۵- در صورتی که محدودیت مسئله ثانویه بصورت نامساوی مطلق برآورده شود  $(s_j' > 0)$  در پایه) آنگاه متغیر متناظر در مسئله اولیه صفر است  $(x_j = 0)$ .

۶- هر متغیر تصمیم در اولیه با یک متغیر کمکی در ثانویه ارتباط دارد و برعکس هر متغیر کمکی در اولیه با یک متغیر تصمیم در ثانویه در ارتباط می باشد.  $s_i \cdot y_i = 0$  ,  $x_j \cdot s_j' = 0$  که در آن  $z$ ،  $x_j$ ،  $y_i$  متغیرهای تصمیم اولیه و ثانویه  $s_i$ ،  $s_j'$  متغیرهای کمکی به ترتیب اولیه و ثانویه می باشد.

۷- هر متغیر اساسی در اولیه با یک متغیر غیراساسی در ثانویه و برعکس هر متغیر غیراساسی در اولیه با یک متغیر اساسی در ثانویه در ارتباط است.

مثال: اگر حل بهینه مسئله‌ای بصورت زیر باشد جواب بهینه مسئله مزدوج آنرا بدون استفاده از جدول سیمپلکس بدست آورید.

$$\text{Max } Z = 0.75x_1 - 20x_2 + 0.5x_3 - 6x_4$$

$$0.25x_1 + 8x_2 + x_3 - 9x_4 \geq 0$$

$$-0.5x_1 + 12x_2 + 0.5x_3 - 3x_4 = 0$$

$$x_2 \leq 1$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

$$x_1^* = x_2^* = 1$$

$$x_3^* = x_4^* = 0$$

ابتدا مزدوج مسئله فوق را بدست می‌آوریم:

$$\text{Min } Y = y_2$$

$$0.25y_1 - 0.5y_2 \geq 0.75$$

$$8y_1 + 12y_2 \geq -20$$

$$y_1 + 0.5y_2 + y_3 \geq 0.5$$

$$-9y_1 - 3y_2 \geq -6$$

$$y_1 \leq 0, y_2 \text{ آزاد در علامت}, y_3 \geq 0$$

$$\text{Max } Z = 0.75(1) - 20(0) + 0.5(1) - 6(0) = 1/25$$

در حالت بهینه داریم:

$$\text{Max } Z = \text{Min } Y = y_2 = 1/25 \Rightarrow y_2 = 1/25$$

حال محدودیت اول را برآورد می‌کنیم.

$$0.25x_1 + 8x_2 + x_3 - 9x_4 - s_1 = 0 \quad X = (1, 0, 1, 0)$$

$$0.25 + 1 - s_1 = 0 \Rightarrow s_1 = 1/25$$

بنابراین محدودیت اول بصورت نامساوی مطلق می‌باشد که در آن  $s_1 = 1/25 > 0$  در پایه قرار دارد.

پس متغیر متناظر با آن در مسئله ثانویه صفر می‌باشد ( $y_1 = 0$ ) یعنی:

$$(s_1 = 1/25) \Rightarrow y_1 = 0$$

$(S_7 = 0) \Rightarrow y_7 \neq 0$  محدودیت دوم بصورت مساوی

$(S_7 = 0) \Rightarrow y_7 \neq 0$  محدودیت سوم بصورت مساوی

از طرفی چون متغیرهای  $x_2$  و  $x_1$  در مسئله اولیه مخالف صفر می‌باشند پس محدودیت‌های متناظر در مسئله ثانویه محدودیت اول و سوم بصورت مساوی نوشته می‌شود. و داریم:

$$\left. \begin{array}{l} x_1 \neq 0 \Rightarrow 0/25y_1 - 0/5y_2 = 0/75 \\ x_2 \neq 0 \Rightarrow y_1 + 0/5y_2 + y_3 = 0/5 \end{array} \right\} \Rightarrow y_1 = 0, y_2 = -1/5, y_3 = 1/25$$

#### ۴-۴- روابط متقابل جوابهای مسئله اولیه و ثانویه

در مسئله اولیه و ثانویه بطور خلاصه روابط زیر برقرار می‌باشد.

مسئله ثانویه	مسئله اولیه
جواب بهینه محدود	جواب بهینه محدود
جواب بهینه منحنی	جواب بهینه چندگانه
جواب بهینه چندگانه	جواب بهینه منحنی
بدون جواب موجه	مقدار تابع هدف نامحدود ( $Z = \infty$ )
بدون جواب موجه	بدون جواب موجه
تابع هدف نامحدود ( $Z = \infty$ )	

#### ۴-۵- روابط متقابل جداول مسئله اولیه و ثانویه

جداول نهایی و بهینه سیمپلکس یک مسئله اولیه و ثانویه دارای ارتباط متقابل مفهومی با یکدیگر می‌باشند.

۱- هر متغیر اصلی در اولیه  $Z$  به ترتیب، متناسب با یک متغیر کمکی در ثانویه  $S$  است. و برعکس هر  $Z$  متناسب با یک  $S$  می‌باشد.

۲- اعداد سمت راست مسئله اولیه، مقدار ضرایب متغیرهای غیراساسی در سطر  $Z$  جدول سیمپلکس مسئله ثانویه است و برعکس.

۳- اعداد غیرصفر سطر  $Z$  در مسئله اولیه، مقدار متغیرهای اساسی در جدول ثانویه است و برعکس.

۴- مقدار متغیرهای تصمیم مسئله ثانویه در زیر سطر  $Y$  برابر قرینه و ترانسپوز (ترانهاده) مقدار متغیرهای غیراساسی در زیر سطر  $Z$  در مسئله اولیه است.

جدول نهایی مسئله ثانویه ( $Min$ )	جدول نهایی مسئله اولیه ( $Max$ )
$A_N$ ثانویه ←	اولیه $-A_N^T$ →
$C_N$ ثانویه ←	اولیه $b_i$ →
$b_i$ ثانویه ←	مقدار $C_N$ →
مقدار $Y$ ←	مقدار $Z$ →

جدول نهایی مسئله اولیه

متغیرهای تصمیم	ثانویه	$s'_1$	$s'_2$	$y_1$	$y_2$	$RHS$
$z$	۱	۰	۳۰	۰	۴۰	۲۰۰
$s_1$	۰	۰	-۴	۱	-۲	۲
$x_1$	۰	۱	$\frac{۳}{۲}$	۰	$\frac{۱}{۲}$	$\frac{۵}{۲}$

جدول نهایی مسئله ثانویه

متغیرهای اساسی	اولیه	$s_1$	$s_2$	$x_1$	$x_2$	$RHS$
$Y$	۱	۲	۰	$\frac{۵}{۲}$	۰	+۲۰۰
$s'_2$	۰	۴	۰	$-\frac{۳}{۲}$	۱	۳۰
$y_2$	۰	۲	۱	$-\frac{۱}{۲}$	۰	۴۰

یک مسئله به ۴ روش قابل حل می باشد:

- ۱- مسئله اولیه به روش سیمپلکس اولیه
- ۲- مسئله اولیه به روش سیمپلکس ثانویه
- ۳- مسئله ثانویه به روش سیمپلکس اولیه
- ۴- مسئله ثانویه به روش سیمپلکس ثانویه

حال نکات زیر در رابطه با روشهای فوق قابل ذکر می باشد.

**نکته:** تعداد مراحل حل یک مسئله اولیه برنامه ریزی خطی به روش سیمپلکس اولیه دقیقاً برابر تعداد مراحل حل ثانویه آن مسئله (دوگان) به روش سیمپلکس ثانویه می باشد. یعنی:

ثانویه به روش ثانویه  $\longleftrightarrow$  اولیه به روش اولیه

**نکته:** تعداد مراحل حل یک مسئله اولیه به روش سیمپلکس ثانویه دقیقاً برابر تعداد مراحل حل ثانویه آن مسئله (دوگان) به روش سیمپلکس اولیه می باشد. یعنی:

اولیه به روش ثانویه  $\longleftrightarrow$  ثانویه به روش اولیه

#### ۴-۶ روابط متقابل ماتریس مسئله اولیه و ثانویه

اگر مسئله برنامه ریزی اولیه بصورت زیر بیان شود.

$$\text{Max } Z = Cx \quad (\text{مسئله اولیه})$$

$$Ax \leq b$$

$$x \geq 0$$

در اینصورت مسئله ثانویه چنین بیان خواهد شد.

$$\text{Min } Y = b^T \cdot y \quad (\text{مسئله اولیه})$$

$$A^T y \geq C^T$$

$$y \geq 0$$

که در آن  $C^T$ ،  $A^T$ ،  $b^T$ ،  $C$  ترانسپوز یا ترانواده  $b$ ،  $A$  و  $C$  می باشند بنابراین روابط زیر برقرار می باشد.

$$(1) X_B = \bar{b} = B^{-1} \cdot b$$

$$(۲) y = C_B \cdot B^{-1}$$

$$(۳) \begin{cases} \bar{a}_j = B^{-1} \cdot a_j \\ \bar{N} = B^{-1} \cdot N \end{cases}$$

$$(۴) \begin{cases} \bar{C}_j = C_B \cdot B^{-1} \cdot a_j - C_j = y \cdot a_j - C_j = C_B \cdot \bar{a}_j - C_j \\ \bar{C}_N = C_B \cdot B^{-1} \cdot N - C_N = y \cdot N - C_N = C_B \cdot \bar{N} - C_N \end{cases}$$

$$(۵) Z = C_B \cdot B^{-1} \cdot b = yb = C_B \cdot \bar{b}$$

**نکته:**  $\frac{\partial X_{Bi}}{\partial x_j} = -y_{ij}$  که در آن  $x_j$  متغیر غیرپایه‌ای و  $x_{Bi}$  متغیر پایه‌ای خواهد بود.

#### ۷-۴- تفسیر اقتصادی جداول سیمپلکس

یکی از مهم‌ترین ویژگی‌های مساله ثانویه، استفاده از مفاهیم اقتصادی حاصل از آن می‌باشد. از آنجائی‌که اعداد هر ستون مفاهیم مرتبط در مورد یک متغیر تصمیم را بیان می‌کند معمولاً تفسیر اقتصادی بصورت ستونی انجام می‌پذیرد.

در جداول سیمپلکس در صورتی‌که اعداد مثبت در سطری قرار گیرند که متغیر اساسی مربوط به آن سطر، متغیر کمکی باشد، به مفهوم میزان استفاده از آن منبع برای تولید یک واحد از محصولی (با افزایش یک واحد متغیر ورودی) است که در بالای ستون این عدد قرار گرفته است. در صورتی‌که متغیر اساسی مربوط به آن سطر متغیر تصمیم باشد به معنی کاهش آن متغیر اساسی است که در ازاء افزایش یک واحد از متغیر ورودی صورت می‌پذیرد و برعکس، اعداد منفی، افزایش منبع (در مورد متغیرهای کمکی) و یا افزایش تولید (در مورد متغیرهای تصمیم) است.

#### ۷-۴-۱- تعریف شبه قیمت (قیمت سایه، قیمت مجازی، Dual Price)

شبه قیمت عبارتست از میزان تغییرات تابع هدف به ازای یک واحد افزایش در یکی از مقادیر سمت راست که برابر مقدار متغیر ثانویه متناظر آن محدودیت است ( $y_i$ ). قیمت‌های سایه یا قیمت‌های ثانویه بیانگر ارزش اقتصادی هر واحد سمت راست می‌باشد. اگر اعداد سمت راست نشان دهنده میزان منابع موجود باشد، قیمت سایه منعکس‌کننده ارزش اقتصادی هر واحد از منبع می‌باشد.

**نکته:** در جدول سیمپلکس جوابهای اساسی در اولیه مقدار قیمت سایه برای ثانویه است و برعکس.



**نکته:** جدول سیمپلکس وقتی بهینه است که: هزینه نهایی = درآمد نهایی

**نکته:** از حاصلضرب قیمت‌های سایه ( $y_i$ ) در مقدار منابع، مقدار  $Z^*$  حاصل می‌شود. و

$$\frac{\partial Z^*}{\partial b_i} = y_i^*$$

#### ۲-۷-۴. هزینه تقلیل یافته

عبارتست از میزان تغییرات تابع هدف به ازای یک واحد تولید از یکی از متغیرهای غیرپایه بهینه که برابر ضریب آن متغیر در سطر هدف جدول بهینه می‌باشد. یعنی به ازاء هر واحد باید ۳ واحد ضرر بدهیم.

	$x_i$	RHS
Z	۳	
	۱	
	۵	
	۷	

**نکته:** متغیرهای کمکی در حالت  $Min$  (ثانویه) به معنی میزان هزینه فرصت از دست رفته می‌باشد. در این شرایط بهترین حالت تساوی می‌باشد.

**نکته:** متغیرهای کمکی در حالت  $Max$  (اولیه) به معنی میزان منابع باقی مانده است.

**نکته:**  $y_i^*$ ها در جدول نهایی سیمپلکس اولیه در سطر Z و در زیر متغیرهای کمکی (متغیرهای اساسی جدول ابتدایی) قرار دارد.

**نکته:** اگر بخواهیم از منابعی افزایش تولید داشته باشیم، آنهایی را افزایش می‌دهیم که دارای قیمت سایه‌ای ( $y_i$ های متناظر) بیشتر باشد.

**نکته:** در مسائلی که با روش  $M$  بزرگ حل شده‌اند برای بدست آوردن قیمت‌های سایه‌ای ( $y_i$ )، در عناصر سطر صفر زیر متغیرهای شروع مسئله مقدار  $M$  را صفر قرار داده که در نتیجه قیمت سایه‌ای حاصل می‌شود.

#### ۸-۴. روش حل سیمپلکس ثانویه

روش سیمپلکس ثانویه عموماً موقعی بکار می‌رود که همه ضرایب متغیرها در سطر تابع هدف

غیرمنفی باشد (شرط بهین) ولی اعداد سمت راست مقادیر منفی داشته باشد (غیر موجه). جهت این کار گامهای زیر پیموده می‌شود:

- ۱- تابع هدف را بصورت  $Max$  تبدیل می‌کنیم (در صورت نیاز، ضرب عدد ۱- در طرفین)
- ۲- محدودیتها را به شکل  $\leq$  (ک.م) تبدیل می‌کنیم (در صورت نیاز با ضرب عدد ۱- در طرفین)
- ۳- با اضافه نمودن متغیرهای کمکی  $k_i$  به محدودیتها آنها را به شکل مساوی تبدیل می‌کنیم.
- ۴- مسئله را وارد جدول سیمپلکس می‌نمائیم.
- ۵- منفی‌ترین عدد سمت راست ( $b_i$ ) را بعنوان متغیر خروجی انتخاب می‌کنیم. سطر مذکور سطر لولا نامیده می‌شود.

👉 **نتیجه:** اگر تمام اعداد سمت راست دارای مقادیر غیرمنفی باشد جواب اساسی فعلی موجه و بهینه می‌باشد.

👉 **نتیجه:** اگر اعداد سمت راست ( $b_i$ )، جهت ورود مساوی باشند به دلخواه یکی را انتخاب می‌کنیم. ۶- متغیر ورودی با تقسیم اعداد سطر صفر بر اعداد منفی سطر لولا و انتخاب کوچکترین قدر مطلق عدد حاصله بدست می‌آید. ستون حاصله را ستون لولا می‌نامیم. بطور خلاصه داریم:

$$\theta = \text{Min} \left\{ \left| \frac{C_j}{a_{ij}} \right| ; a_{ij} < 0 \right\} \text{ (متغیر ورودی)}$$

که در آن  $C_j$  اعداد سطر صفر و  $a_{ij}$  عناصر سطر لولا می‌باشد.

👉 **نتیجه:** اگر تمام عناصر سطر لولا غیرمنفی باشد، در اینصورت مسئله فاقد منطقه موجه بوده و جواب ندارد. در اینصورت مسئله اولیه دارای جواب نامحدود می‌باشد.

👉 **نتیجه:** اگر شرایط مساوی جهت انتخاب متغیر ورودی داشته باشیم مسئله دارای جواب چندگانه می‌باشد. در این حالت مسئله اولیه دارای جواب منحط می‌باشد.

👉 **نتیجه:** در سیمپلکس ثانویه هدف از آزمون نسبت، حفظ شرط بهینگی در جدول بعدی می‌باشد.

## ۹-۴- مقایسه روش سیمپلکس معمولی و سیمپلکس ثانویه

سیمپلکس ثانویه	سیمپلکس معمولی
تابع هدف بصورت $Max$	تابع هدف بصورت $Max$
محدودیتها بصورت $\leq$	محدودیتها بصورت $\leq$
$C_j > 0$	$RHS > 0$
ابتدا متغیر خروجی (سطر لولا)	ابتدا متغیر ورودی (ستون لولا)
منفی ترین ضریب در $RHS$	منفی ترین ضریب سطر صفر
خارج قسمت ضرایب سطر صفر به سطر منفی لولا	خارج قسمت $RHS$ به ستون مثبت لولا
حداقل قدر مطلق نسبت	حداقل نسبت
عدد لولا همیشه کوچکتر از صفر	عدد لولا همیشه بزرگتر از صفر
اگر همه عناصر سطر لولا غیر منفی باشد مسئله غیر قابل قبول است.	اگر تمام عناصر ستون لولا غیر مثبت باشد مسئله نامحدود می باشد

## ۴-۱۰- نوع خاص سیمپلکس ثانویه (محدودیت مصنوعی)

اگر چنانچه در جدول سیمپلکس ثانویه شرط بهینگی نقض شده باشد (یعنی در سطر صفر جدول پس از استاندارد نمودن مسئله و تبدیل به  $Max$  مقدار منفی وجود داشته باشد)، در این حالت از محدودیت مصنوعی استفاده می کنیم.

## ۴-۱۰-۱- تعریف محدودیت مصنوعی

برای حل هر مسئله از طریق روش سیمپلکس ثانویه که شرایط بهینگی را ندارد (وجود مقدار منفی در سطر تابع هدف) از محدودیت  $x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n \leq M$  که در آن  $x_i$  ها متغیرهای غیر پایه ای می باشند استفاده می شود. به محدودیت فوق محدودیت مصنوعی گفته می شود و داریم:

$$x_n + x_1 + x_2 + \dots + x_n = M$$

که در آن  $x_n$  متغیر کمکی می باشد.

## ۴-۱۰-۲- الگوریتم حل

۱- مسئله را به حالت استاندارد تبدیل می کنیم (تابع هدف  $Max$  و محدودیتها  $\leq$  (ک.م.))

۲- در صورتی که مسئله شرایط بهینگی را نداشته باشد محدودیت مصنوعی مناسب را به مسئله و جدول اضافه می‌کنیم.

۳- متغیر واجد شرایط ورود به پایه را انتخاب نموده و سپس متغیر  $x$  را بدون هیچ‌گونه شرطی از پایه خارج می‌کنیم که در این حالت شرایط بهینگی حاصل می‌شود.

۴- بقیه مراحل مثل روشهای قبل حل می‌شود.

#### ۴-۱۱- قضیه فارکاس

دو مسئله روبرو را در نظر بگیرید. اگر  $A$  یک ماتریس  $m \times n$  و  $b$  یک ماتریس  $m \times 1$  باشد آنگاه ثابت کنید که:

الف- اگر مدل (I) جواب شدنی داشته باشد مدل (II) جواب ندارد.

ب- اگر مدل (I) جواب نداشته باشد مدل (II) حتماً جواب دارد.

$$\begin{array}{ll} (I) & (II) \\ Ax = b & Ay \geq 0 \\ x \geq 0 & by < 0 \end{array}$$

در شکل تغییر یافته قضیه فارکاس نیز فقط و فقط یکی از دو سیستم زیر جواب خواهد داشت.

$$\begin{array}{ll} (I) & (II) \\ Ax \leq b & Ay \leq 0 \\ x \geq 0 & y \leq 0, by > 0 \end{array}$$

#### ۴-۱۲- مسائل معادل در برنامه ریزی خطی

مسئله برنامه ریزی خطی زیر را در نظر بگیرید:

$$\{Max Z = Cx \mid Ax = b, x \geq 0\}$$

محدودیت‌های این مسئله همگی بصورت تساوی بوده و یا اینکه بصورت تساوی درآمده‌اند. در اینصورت همواره روابط زیر برقرار خواهد بود.

۱- اگر محدودیتی در عدد  $0$  بجز ضرب شود در اینصورت جوابهای مسئله اولیه تغییر نمی‌کند و متغیر متناظر آن محدودیت در مسئله ثانویه در  $\frac{1}{\lambda}$  ضرب می‌شود و در هر دو مسئله مقدار تابع هدف تغییر نمی‌کند.

۲- اگر بردار ستونی یکی از متغیرها در عدد  $0$  بجز ضرب شود، آنگاه متغیر مربوطه در  $\frac{1}{\lambda}$  ضرب

می شود ولی جوابهای مسئله ثانویه تغییری نمی کند و تابع هدف در هر دو مسئله بدون تغییر باقی خواهد ماند.

۳- اگر  $k$  برابر یک سطر به سطر دیگر اضافه شود، جوابهای بهینه مسئله اولیه و ثانویه هیچ تغییری نخواهد کرد.

۴- اگر  $k$  برابر یک ستون به ستون دیگر اضافه شود، جوابهای بهینه مسئله اولیه و ثانویه هیچ تغییری نخواهد کرد.

۵- اگر  $k$  برابر یک سطر به تابع هدف افزوده شود، جوابهای مسئله اولیه تغییری نخواهد کرد ولی جوابهای مسئله ثانویه بعلاوه  $k$  برابر خواهد شد و مقدار تابع هدف هر دو مسئله به اندازه  $ky_i$  تغییر می نماید.

۶- اگر  $k$  برابر یک ستون به سمت راست اضافه شوند جوابهای بهینه مسئله اولیه بعلاوه  $k$  برابر شده ولی جوابهای ثانویه تغییری نخواهد کرد و مقدار تابع هدف هر دو مسئله به اندازه  $ky_i$  تغییر می نماید.

۷- هرگاه مقادیر سمت راست در  $\leq$  ضرب شود، مقادیر متغیرهای مسئله اولیه  $\leq$  برابر شده و متغیرهای مسئله ثانویه تغییری نمی کند و مقدار تابع هدف در هر دو مسئله  $\leq$  برابر می شود.

۸- هرگاه سطر هدف مسئله ای در عدد  $\leq$  ضرب شود، جوابهای مسئله اولیه تغییری نکرده ولی جوابهای ثانویه در  $\leq$  ضرب می شود و مقدار هر دو تابع هدف  $\leq$  برابر می شود.

۹- اگر مقادیر سطر هدف در عدد  $\alpha$  و سمت راست در عدد  $\beta$  ضرب شوند، مقادیر متغیرهای مسئله اولیه در  $\beta$  و مقادیر متغیرهای مسئله ثانویه در  $\alpha$  ضرب می شوند و مقدار تابع هدف در هر دو مسئله در  $\alpha\beta$  ضرب می شود.

سمت راست  $(\alpha, \beta) > 0$  تابع هدف

۱۰- هر یک از حالات فوق در صورتی که با هم ترکیب شوند، نتایج حاصله نیز با هم ترکیب خواهند شد.

۱۱- هرگاه همه مقادیر سمت راست مسئله ای بعلاوه  $k$  شود در اینصورت جواب مسئله تغییر یافته ثانویه، نسبت به مسئله اولیه دارای حالت زیر می باشد:

$$Z_{\text{جدید}} = Z_{\text{قدیم}} + \sum_{i=1}^k k_i y_i$$

$$Z = (b_i + k_i) y_i \quad \text{هر دو بهینه هستند}$$

حال اگر مقدار تابع هدف مسئله اولیه، بهینه بوده و تغییر یافته بهینه نباشد، رابطه به شکل زیر است:

$$Z_{\text{جدید}} \leq Z_{\text{قدیم}} + \sum_{i=1}^k k_i y_i$$

و اگر تابع هدف مسئله اولیه بهینه نبوده و تغییر یافته آن، بهینه باشد رابطه بصورت  $\geq$  ظاهر می‌شود و در صورتی که هر دو بهینه باشد رابطه به شکل تساوی در می‌آید و بطور کلی مقدار تغییرات تابع هدف برابر رابطه زیر است:

$$\Delta Z = \sum_{i=1}^k k_i y_i \quad \text{یا} \quad \Delta Z = y_i^* \cdot \Delta b_i$$

**نکته:** اگر بخواهیم از چندین منبع موجود یک منبع انتخاب کنیم تا مقدار آن را افزایش دهیم، محدودیتی (منبعی) انتخاب می‌شود که باعث بهینه نمودن مقدار تابع هدف گردد و در حالت  $Max$  داریم:

$$\Delta Z = Max [y_i^* \cdot \Delta b_i] \quad , \quad i = 1, 2, \dots, n$$

## تحلیل حساسیت و برنامه‌ریزی پارامتریک

### ۵

#### ۵-۱- تحلیل حساسیت

در مسائل برنامه‌ریزی خطی، پس از رسیدن به جواب بهینه نیاز می‌باشد تا تأثیر تغییرات احتمالی ضرایب و متغیر بر مقدار تابع هدف و جواب بهینه بررسی شود. تحلیل حساسیت شیوه‌ای جهت ارزیابی میزان حساسیت جواب بهینه و تابع هدف در مقابل تغییرات معین در مسئله می‌باشد. این تغییرات معمولاً به سه شکل زیر ظاهر می‌شوند.

۱- متغیرهای اساسی و جوابشان تغییر نکرده در نتیجه جواب بهینه مسئله و تابع هدف بدون تغییر باقی می‌ماند.

۲- متغیرهای اساسی و جوابشان تغییر کرده و در نتیجه جواب بهینه مسئله و تابع هدف تغییر پیدا می‌کند.

۳- متغیرهای اساسی عوض نمی‌شوند ولی مقادیرشان تغییر پیدا می‌نماید.

## ۲-۵- حالات مختلف آنالیز حساسیت

۱- تغییرات ضرایب متغیرهای غیر پایه‌ای تابع هدف	} الف) تاثیر تغییرات ضرایب در جواب بهینه
۲- تغییرات ضرایب متغیرهای پایه‌ای تابع هدف	
۳- تغییرات اعداد سمت راست	
۴- تغییرات ضرایب تکنولوژیکی (فنی) جهت متغیرهای غیر پایه‌ای	
۵- تغییرات ضرایب تکنولوژیکی (فنی) جهت متغیرهای پایه‌ای	
۱- تعیین حدود ضرایب متغیرهای غیر پایه‌ای در تابع هدف	} ب) تعیین حدود ضرایب به گونه‌ای که جواب بهینه تغییر نکند
۲- تعیین حدود ضرایب متغیرهای پایه‌ای در تابع هدف	
۳- تعیین حدود اعداد سمت راست	
۴- تعیین حدود ضرایب تکنولوژیکی (فنی) جهت متغیرهای غیر پایه‌ای	
۵- تعیین حدود ضرایب تکنولوژیکی (فنی) جهت متغیرهای پایه‌ای	
۱- اضافه نمودن یک متغیر جدید	} ج) تاثیر تغییرات ساختاری مسائل برنامه‌ریزی بر جواب بهینه
۲- حذف یک متغیر غیر اساسی (غیر پایه‌ای)	
۳- حذف یک متغیر اساسی (پایه‌ای)	
۴- اضافه کردن یک محدودیت جدید	
۵- حذف یک محدودیت	

## ۳-۵- تاثیر تغییرات ضرایب در جواب بهینه

۱-۳-۵- تغییرات ضرایب متغیرهای غیر پایه‌ای تابع هدف

روش اول: با کمک فرمول

$$\bar{C}_N = C_B \cdot B^{-1} \cdot N - C_N$$

$$\bar{C}_j = C_B \cdot B^{-1} \cdot a_j - C_j = z_j - C_j$$

مسئله حل می‌شود در حالت *Max* و یا اگر  $z_j - C_j \geq 0$  باشد اعداد سطر تابع هدف در جدول سیمپلکس مثبت بوده و تأثیری در جواب ندارد و اگر  $z_j - C_j < 0$  باشد در اینصورت آن متغیر شرایط ورود به پایه را داشته و پس از استاندارد نمودن، جدول سیمپلکس را حل می‌کنیم.

روش دوم: در این روش محدودیت مزدوج متناظر با این متغیر را نوشته و مقادیر جواب مسئله ثانویه را



از سطر صفر جدول بهینه اولیه بدست آورده و در محدودیت مورد نظر قرار می دهیم اگر صدق کرد جواب بهینه فعلی تغییر نکرده در غیراینصورت بهینگی عوض می شود.

مثال ۱: مسئله زیر و جدول نهایی آن را در نظر بگیرید:

$$\text{Max } z = -5x_1 + 5x_2 + 13x_3$$

$$-x_1 + x_2 + 3x_3 \leq 3$$

$$13x_1 + 4x_2 + 10x_3 \leq 90$$

$$x_i \geq 0$$

Max	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$s_1$	$s_2$	RHS
$z$	۰	۰	۲	۵	۰	۱۰۰
$x_2$	-۱	۱	۳	۱	۰	۲۰
$s_2$	۱۶	۰	-۲	-۴	۱	۱۰

در مثال ۱ اگر  $C_3 = 8$  شود چه تاثیری در جواب بهینه دارد.

$$\bar{C}_3 = C_B \cdot B^{-1} \cdot a_3 - C_3 = (5 \ 0) \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix} - 8 = 15 - 8 = 7$$

$$\bar{a}_3 = B^{-1} a_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix}$$

چون  $\bar{C}_3 = 7 \geq 0$  پس جواب تغییر نمی کند.

$$\text{راه حل دوم: } 3y_1 + 10y_2 \geq 8 \Rightarrow 3(5) + 90(0) = 15 > 8$$

در مسئله صدق می کند.

۲-۳-۵- تغییرات ضرایب متغیرهای پایه تابع هدف

در مثال ۱ اگر  $C_2$  به عدد ۴ تبدیل شود در جواب بهینه چه تاثیری دارد.

$$C_2 = 5 \rightarrow C_2 = 4$$

$$\bar{C}_N = C_B \cdot B^{-1} \cdot N - C_N = [4 \ 0] \begin{bmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 16 & -2 & -4 \end{bmatrix} - [-5 \ 13 \ 0] = [1 \ -1 \ 4]$$

بدلیل منفی شدن مقادیر  $\bar{C}_N$  جدول دیگر بهینه نمی‌باشد بنابراین حل جدول سیمپلکس پس از پاشنه گردی ادامه یافته و نتایج زیر حاصل می‌شود.

$$\begin{cases} s_2 = \frac{70}{3} \\ x_3 = \frac{20}{3} \end{cases}, z = \frac{260}{3}$$

$z'$	۱	۰	-۱	۴	۰	۸۰
------	---	---	----	---	---	----

بنابراین در این حالت  $C_B$  تغییر کرده و باعث تغییر در  $Z_j - C_j$  می‌شود در اینصورت هر متغیری که منفی‌ترین ضریب را داشت وارد پایه شده در غیر اینصورت جواب تغییر نکرده ولی مقدار  $Z$  ممکن است تغییر کند.

نتایج حاصله:

👉 **نکته:** هرگونه تغییر در ضرایب تابع هدف می‌تواند بر بهینگی مسئله تأثیر داشته باشد.

👉 **نکته:** هرگونه تغییر در ضرایب تابع هدف بر موجه بودن فضای جواب تأثیری ندارد.

👉 **نکته:** هرگونه تغییر در ضرایب تابع هدف اگر مقدار تابع هدف و جواب را تغییر دهد در جهت تابع هدف خواهد بود.

👉 **نکته:** هرگونه تغییرات در جواب با استفاده از سیمپلکس اولیه به جواب نهایی خواهد رسید.

۳-۳-۵- تغییرات اعداد سمت راست

$$\bar{b} = B^{-1} \cdot b$$

$$Z = C_B \cdot B^{-1} \cdot b$$

با توجه به روابط فوق تغییرات لازم داده می‌شود اگر جواب  $\bar{b}$  مثبت بود جدول مسئله موجه بوده و مقدار تابع هدف  $(Z = C_B \cdot B^{-1} \cdot b)$  تغییر پیدا می‌کند اگر  $\bar{b}$  منفی بود با کمک سیمپلکس ثانویه به جواب بهینه می‌رسیم.

نتایج حاصله:

👉 **نکته:** هرگونه تغییرات در مقادیر سمت راست  $(b_i)$  می‌تواند بر موجه بودن مسئله تأثیر داشته باشد.

👉 **نکته:** هرگونه تغییرات در مقادیر سمت راست  $(b_i)$  بر بهینگی مسئله تأثیری نخواهد داشت.

**نکته:** هرگونه تغییرات در مقادیر سمت راست ( $b_i$ ) می‌تواند بر مقدار تابع هدف تأثیر داشته باشد.

**نکته:** هرگونه تغییرات در مقادیر سمت راست ( $b_i$ ) در صورت منفی بودن با سیمپلکس ثانویه به جواب نهایی می‌رسد در اینصورت تغییرات تابع هدف در جهت عکس تابع هدف خواهد بود.

#### ۴-۳-۵. تغییرات ضرایب تکنولوژی یک متغیر غیر پایه‌ای (غیراساسی)

الف) هرگونه تغییر در بردار ضرایب یک متغیر غیرپایه‌ای ( $\bar{a}_j = B^{-1} \cdot a_j$ ) مقدار  $\bar{C}_j \geq 0$  را تغییر می‌دهد فلذا اگر در حالت  $Max$  مقدار  $\bar{C}_j \geq 0$  باشد جواب بهینه تغییر نمی‌کند (در حالت  $Min$  بودن تابع هدف باید،  $\bar{C}_j \leq 0$  در غیراینصورت بهینگی بهم خورده و بردار  $Z^0$  وارد پایه می‌شود که در اینصورت ممکن است مقدار  $Z$  نیز تغییر کند.

ب) در روش بعدی محدودیت مزدوج متناظر با متغیر موردنظر را می‌نویسیم. جوابهای ثانویه را از سطر صفر جدول بهینه اولیه بدست آورده و در محدودیت موردنظر امتحان می‌کنیم اگر این جوابها صدق کرد جواب بهینه تغییر نمی‌کند در غیر اینصورت بهینگی مسئله از بین خواهد رفت.

نتایج حاصله:

**نکته:** هرگونه تغییر در ضرایب تکنولوژی یک متغیر غیرپایه‌ای تأثیری بر موجه بودن مسئله ندارد.

$$\bar{b} = B^{-1} \cdot b$$

**نکته:** هرگونه تغییر در ضرایب تکنولوژی یک متغیر غیرپایه‌ای ممکن است مقدار تابع هدف را تغییر دهد.

**نکته:** هرگونه تغییر در ضرایب تکنولوژی یک متغیر غیرپایه‌ای ممکن است بر بهینگی مسئله تأثیر بگذارد. ( $Z_j - C_j$ )

#### ۵-۳-۵. تغییرات ضرایب تکنولوژی یک متغیر پایه‌ای

هرگونه تغییر در ضرایب تکنولوژیکی یک متغیر پایه‌ای باعث بهم خوردن ماتریس پایه  $B$  و در نتیجه معکوس آن  $B^{-1}$  می‌گردد در این حالت تمام پارامترهای  $\bar{b}$  و  $Z$  و ... تحت تأثیر قرار گرفته و بهتر است که مسئله از ابتدا حل شود. در این شرایط از محدودیت مزدوج نیز نمی‌توان استفاده نمود و بهترین راه حل، استفاده از سیمپلکس اولیه - ثانویه (سیمپلکس ضربدری) می‌باشد.

نتایج حاصله:

📌 **نکته:** هرگونه تغییر در ضرایب تکنولوژی یک متغیر پایه‌ای بر موجه بودن مسئله تأثیر می‌گذارد.

$$(\bar{b} = B^{-1} \cdot b)$$

📌 **نکته:** هرگونه تغییر در ضرایب تکنولوژی یک متغیر پایه‌ای بر مقدار تابع هدف می‌تواند تأثیر بگذارد.

$$(Z = C_B \cdot B^{-1} \cdot b)$$

📌 **نکته:** هرگونه تغییر در ضرایب تکنولوژی یک متغیر پایه‌ای بر بهینگی مسئله تأثیر می‌گذارد.

$$(Z_j - C_j) = C_B \cdot B^{-1} \cdot a_j - C_j$$

نکات مهم:

- ۱- اگر مسئله از حالت بهینگی خارج گردد از سیمپلکس اولیه جهت حل استفاده می‌شود.
- ۲- اگر مسئله از حالت موجه خارج گردد از سیمپلکس ثانویه جهت حل استفاده می‌شود.
- ۳- اگر مسئله از حالت بهینگی و موجه خارج گردد از سیمپلکس اولیه - ثانویه (ضربدری) جهت حل استفاده می‌شود.

#### ۴-۵- تعیین حدود ضرایب به گونه‌ای که جواب بهینه تغییر نکند.

قبل از بیان حالت‌های مختلف این بخش لازم است یادآوری گردد که می‌توان با کمک حدود ضرایب نیز تأثیر تغییرات ضرایب مطرح شده در بخش الف را بر جواب بهینه بررسی کرد. به این ترتیب اگر مقدار جدید در محدوده مجاز ضریب مورد نظر قرار داشت موجه بودن یا بهینگی تغییر نمی‌کند در غیر اینصورت تغییرات مؤثر خواهد بود.

#### ۴-۵-۱- تعیین حدود ضرایب متغیرهای غیرپایه‌ای در تابع هدف

از آنجائی که هرگونه تغییر در متغیرهای غیرپایه‌ای تابع هدف باعث تغییر  $C_j$  و در نتیجه  $Z_j - C_j = C_B \cdot B^{-1} \cdot a_j - C_j$  می‌شود. بنابراین باید حدود را به گونه‌ای تعریف کرد که در حالت  $Max$  مقدار  $Z_j - C_j \geq 0$  باقی بماند.

📌 **نکته:** اگر بخواهیم حدود تغییرات ضرایب متغیرهای غیرپایه را محاسبه کنیم این تغییرات فقط بر روی ضرایب ستونی خود آن متغیر ( $a_j$ ) مؤثر بوده و بر بقیه ستونها تأثیری ندارد. همچنین این تغییرات تأثیر بر  $C_B$  نخواهد داشت.

شبه قیمت (قیمت سایه یا قیمت ثانویه): مشتق تابع هدف نسبت به مقادیر سمت راست برابر شبه قیمت می باشد در جدول بهینه مسئله اولیه در حالت  $Max$  مقدار شبه قیمت، اعداد موجود در زیر متغیرهای کمکی در سطر صفر تابع هدف می باشد ( $\bar{C}_j$  مربوط به متغیرهای کمکی) و در جدول بهینه مسئله ثانویه در حالت  $Min$  اعداد سمت راست مربوط به  $y_i$  ها می باشد پس در حالت بهینگی جداول اولیه ( $Max$ ) و ثانویه ( $Min$ ) شبه قیمت بصورت زیر است:

$$y_i \text{ یا } \bar{b}_j \text{ مسئله ثانویه } (Min) = \bar{C}_j \text{ متغیرهای کمکی مسئله اولیه } (Max)$$

و یا:

$$Z = b_1 y_1 + b_2 y_2 + \dots \quad \frac{\partial Z}{\partial b_j} = y_j \text{ (قیمت سایه)}$$

👉 **نکته:** در حالت بهینه اگر تابع هدف بصورت  $-z$  باشد آنگاه شبه قیمت ها در منفی ضرب می شود.

👉 **نکته:** در جداول غیر از جداول بهینه، به اعداد زیر متغیرهای کمکی در سطر صفر، سهم مشارکت در سود آن منبع می گویند.

👉 **نکته:** هرگاه میزان موجودی یک منبع به صفر نرسیده باشد، قیمت سایه آن صفر و برعکس، هنگامی که موجودی یک منبع به صفر رسیده باشد قیمت سایه آن غیر صفر خواهد شد.

👉 **نکته:** اگر قیمت سایه یک منبع از قیمت بازار آن بیشتر باشد آنگاه تا جایی که این رابطه برقرار نباشد باید میزان استفاده از آن منبع را افزایش دهیم.

👉 **نکته:** منبعی که قیمت سایه ای بیشتری دارد بهتر است افزایش یابد و برعکس.

👉 **نکته:** در هر مسئله در مراحل مختلف، مشتق تابع هدف نسبت به متغیر  $z$  برابر هزینه تقلیل یافته آن متغیر می باشد ( $\frac{\partial Z}{\partial x_j} = \bar{C}_j$ ) هزینه تقلیل یافته برای متغیرهای غیر پایه ای تعریف شده و ضریب آن متغیر در سطر صفر جدول نهایی می باشد.

نکات اساسی:

۱- اگر تابع هدف بصورت  $Max$  باشد حدود ضرایب متغیرهای غیر پایه  $x_j$  ( $C_j'$ ) چنین تعریف

می شود:

هزینه تقلیل یافته متغیر  $x_j$  ( $\bar{C}_j$ ) + ضریب متغیر  $x_j$  در تابع هدف اولیه ( $C_j$ )  $\leq C_j'$

$$\bar{C}_j = C_B \cdot B^{-1} \cdot a_j - C_j \quad , \quad \theta \leq \bar{C}_j \text{ میزان تغییر}$$

۲- اگر تابع هدف بصورت  $Min$  باشد حدود ضرایب متغیرهای غیرپایه  $x_j$  ( $C_j'$ ) چنین تعریف می‌شود.

هزینه تقلیل یافته متغیر  $x_j$  ( $\bar{C}_j$ ) + ضریب متغیر  $x_j$  در تابع هدف اولیه ( $C_j$ )  $C_j' \geq (C_j)$   
 ۳- مقدار ضریب متغیر  $x_j$  در تابع هدف اولیه ( $C_j$ ) باید در حدودی که برای این متغیر بدست می‌آوریم، صدق نماید.

۴-۲- تعیین حدود ضرایب متغیرهای پایه‌ای در تابع هدف

در این شرایط، پارامتر  $C_B$  تغییر کرده و باعث تغییر در ضرایب تمام متغیرهای غیرپایه در تابع هدف ( $\bar{C}_j = Z_j - C_j$ ) می‌شود بنابراین جهت تعیین حدود تغییرات ضرایب متغیرهای پایه‌ای تابع هدف مقادیر تابع  $\bar{C}_j = Z_j - C_j = C_B \cdot B^{-1} \cdot N - C_j$  را با دخالت دادن مقدار پارامتر  $\theta$  جهت کلیه متغیرهای غیرپایه‌ای محاسبه نموده و اشتراک نواحی حاصله، جواب نهایی خواهد شد.

نکات اساسی

۱- اگر تابع هدف بصورت  $Max$  باشد حدود ضرایب متغیرهای پایه را با کمک ضرایب متغیرهای غیرپایه‌ای حساب می‌کنیم. در این حالت باید  $\bar{C}_N \geq 0$  باشد یعنی:

$$\bar{C}_N = C_B \cdot B^{-1} \cdot N - C_N = C_B \cdot \bar{N} - C_N \geq 0 \quad \text{یا} \quad \bar{C}_N = (C_{B_j} + \theta_j) B^{-1} \cdot N - C_N \geq 0$$

۲- اگر تابع هدف بصورت  $Min$  باشد علامت به صورت  $\bar{C}_N \leq 0$  خواهد بود.

۳- مقدار ضرایب متغیر  $x_{B_j}$  در تابع هدف اولیه باید در حدود حاصل شده صدق نماید.

۴-۳- تعیین حدود اعداد سمت راست

برای بدست آوردن حدود تغییرات  $b$  باید رابطه  $b \geq 0$  برقرار باشد این وضعیت چه در حالت  $Max$  و چه در حالت  $Min$  باید صادق باشد سپس با استفاده از اشتراک مقادیر حاصله از رابطه فوق حدود ضرایب بدست می‌آید. در این وضعیت نیز باید مقدار  $b$  در جدول اولیه در حدود تعریف شده جدید صدق نماید.

۴-۴- تعیین حدود ضرایب تکنولوژیکی (فنی) جهت متغیرهای غیرپایه‌ای

هرگونه تغییر در ضرایب تکنولوژیکی باعث تغییر  $a_j$  و در نتیجه تغییر در

بنابراین حدود به گونه‌ای تعریف می‌شود که بهینگی مسئله حفظ شود.

نکات اساسی:

- ۱- اگر تابع هدف بصورت  $Max Z$  باشد آنگاه  $\bar{C}_j \geq 0$  و اگر  $Max(-Z)$  باشد آنگاه  $\bar{C}_j \leq 0$
- ۲- اگر تابع هدف بصورت  $Min Z$  باشد آنگاه  $\bar{C}_j \leq 0$  و اگر  $Min(-Z)$  باشد آنگاه  $\bar{C}_j \geq 0$
- ۳- حدود تغییرات  $a_{ij}$  می‌تواند از  $-\infty$  تا  $+\infty$  باشد با این وجود باید مقدار  $a_{ij}$  مسئله اولیه در حدود تعریف شده جدید صدق نماید.

#### ۵-۴-۵- تعیین حدود ضرایب تکنولوژیکی (فنی) جهت متغیرهای پایه‌ای

هرگاه بخواهیم حدود تغییرات ضرایب تکنولوژیکی متغیرهای پایه را بررسی نمائیم باتوجه به اینکه در این حالت ماتریس  $B$  و  $B^{-1}$  تغییر می‌کند بهتر است که مسئله را از ابتدا حل نمود ضمن اینکه می‌توان با تشکیل  $B$  و  $B^{-1}$  با وجود پارامتر مجهول صحت روابط  $\bar{C}_N \geq 0$  و  $\bar{b} \geq 0$  را بررسی نموده و حدود مشترک را به گونه‌ای بدست آورد که پایه بهینه فعلی عوض نشود.

بعنوان مثال اگر داشته باشیم  $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$  و بخواهیم حدود  $a_{21} = \theta$  را بدست آوریم داریم:

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & \theta \end{bmatrix} \Rightarrow B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{\theta} \\ 0 & \frac{1}{\theta} \end{bmatrix}$$

$$\bar{b} = B^{-1} \cdot b \quad \bar{C}_N = C_B \cdot B^{-1} \cdot N - C_N$$

#### ۵-۵- تأثیر تغییرات ساختاری مسائل برنامه‌ریزی بر جواب بهینه

##### ۵-۵-۱- اضافه کردن یک متغیر جدید

الف) اگر متغیر جدیدی به مسئله اضافه شود در اینصورت بر  $\bar{C}_j = Z_j - C_j = C_B \cdot B^{-1} \cdot a_j - C_j = y \cdot a_j - C_j$  اثر می‌گذارد فلذا متغیر جدید  $x_j$  را به ستونهای جدول نهایی اضافه نموده و  $\bar{C}_j$  آنرا محاسبه می‌کنیم اگر در حالت  $Max$  مقدار  $\bar{C}_j \geq 0$  باشد اضافه نمودن متغیر جدید تأثیری در بهینگی مسئله نداشته و اگر  $\bar{C}_j \leq 0$  باشد در اینصورت بهینگی

مسئله بهم می‌خورد و متغیر  $Z_j$  وارد پایه شده و با تست حداقل نسبت، متغیر خروجی را یافته و با کمک سیمپلکس معمولی تا رسیدن به جواب بهینه، حل مسئله را ادامه می‌دهیم. در حالتی که تابع هدف بصورت  $Min$  باشد اگر  $\bar{C}_j \leq 0$  باشد بهینگی مسئله حفظ و در حالت  $\bar{C}_j \geq 0$  مسئله دیگر بهینه نخواهد بود.

(ب) در روش بعدی محدودیت مزدوج مربوط به متغیر جدید نوشته شده و جوابهای دوگان را از سطر صفر تابع هدف بدست آورده و در داخل محدودیت امتحان می‌کنیم اگر جوابهای دوگان ( $y$ ) در محدودیت صدق نمود مسئله بهینه باقی‌مانده در غیر اینصورت از بهینگی خارج می‌شود.

نتایج حاصله:

**نتیجه:** اضافه نمودن یک متغیر جدید تأثیری بر موجه بودن مسئله ندارد.

**نتیجه:** اضافه نمودن یک متغیر جدید ممکن است مقدار تابع هدف را تغییر دهد (در صورت ورود به پایه)

**نتیجه:** اضافه نمودن یک متغیر جدید ممکن است بر بهینگی مسئله تأثیر بگذارد  
 $(\bar{C}_j = Z_j - C_j)$

**نتیجه:** اضافه نمودن یک متغیر جدید می‌تواند باعث بهتر شدن جواب بهینه گردد (نمی‌تواند بدتر کند)

**نتیجه:** در صورت ورود متغیر جدید به پایه با کمک سیمپلکس اولیه مسئله به جواب بهینه خواهد رسید.

#### ۲-۵-۵ حذف یک متغیر غیر اساسی (غیر پایه‌ای)

هرگاه متغیری در پایه (بهینه) نباشد برای حذف آن کفایت فقط ستون آن متغیر را از مسئله و جدول سیمپلکس حذف کنیم این حذف هیچ تأثیری بر مقدار تابع هدف، موجه بودن مسئله و یا بهینگی مسئله نخواهد داشت.

#### ۳-۵-۵ حذف یک متغیر اساسی (پایه‌ای)

هرگاه متغیری در پایه باشد ابتدا باید متغیر را از پایه خارج نمود جهت این کار به کمک سیمپلکس ثانویه متغیر مورد نظر را بعنوان متغیر خروجی در نظر گرفته و با کمک تست حداقل نسبتها متغیر ورودی را مشخص کرده و وارد پایه می‌نمائیم و جدول را تا رسیدن به حل بهینه ادامه می‌دهیم. سپس



ستون آن متغیر را از جدول سیمپلکس حذف می‌نمائیم. در طی مراحل حل جهت رسیدن به جواب بهینه نباید متغیر مورد نظر وارد پایه گردد.

نتایج حاصله:

👉 **نتیجه:** حذف یک متغیر اساسی ممکن است مقدار تابع هدف را تغییر دهد (جواب بهینه می‌تواند بدتر شود).

👉 **نتیجه:** حذف یک متغیر اساسی ممکن است بر موجه بودن جوابهای اساسی تأثیر داشته باشد.

👉 **نتیجه:** حذف یک متغیر اساسی ممکن است بر بهینگی مسئله تأثیر بگذارد ( $\bar{C}_j = Z_j - C_j$ )

#### ۴-۵۵- اضافه کردن یک محدودیت جدید

در صورت اضافه نمودن یک محدودیت جدید به مسئله، جوابهای بهینه فعلی را در محدودیت جدید قرار می‌دهیم اگر صدق نمود و رابطه برقرار بوده محدودیت جدید تأثیری در مسئله و جواب بهینه نخواهد داشت. در صورتی که جواب بهینه فعلی در محدودیت جدید صدق ننماید آنگاه محدودیت جدید را به شکل کوچکتر مساوی ( $\leq$ ) تبدیل نموده و با کمک متغیر کمکی محدودیت را به تساوی تبدیل می‌نمائیم. حال متغیر کمکی متناظر با محدودیت جدید را به آخر سطر مربوط به متغیرهای اساسی و ستون مربوط به متغیرهای کمکی اضافه کرده، ضرایب محدودیت جدید را وارد جدول نموده و با کمک روش سیمپلکس ثانویه تا رسیدن به جواب بهینه مسئله را ادامه می‌دهیم:

مثال: مسئله زیر و جدول بهینه آن را در نظر بگیرید:

$$\text{Max } Z = -5x_1 + 5x_2 + 13x_3$$

$$-x_1 + x_2 + 3x_3 \leq 3$$

$$13x_1 + 4x_2 + 10x_3 \leq 90$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

Max	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$s_1$	$s_2$	RHS
z	0	0	2	5	0	100
$x_2$	-1	1	3	1	0	20
$s_2$	16	0	-2	-4	1	10

اگر محدودیتی به صورت  $2x_1 + 3x_2 + 5x_3 \leq 50$  به مسئله اضافه شود چه تأثیری در جواب بهینه خواهد داشت؟

$$2(0) + 3(20) + 5(0) = 60 \not\leq 50 \Rightarrow 2x_1 + 3x_2 + s_3 = 50$$

(I) اضافه نمودن محدودیت جدید

Max	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$s_1$	$s_2$	$s_3$	RHS
$z$	0	0	2	5	0	0	100
$x_2$	-1	1	3	1	0	0	20
$s_2$	16	0	-2	-4	1	0	10
$s_3$	2	3	5	0	0	1	50
$z$	0	0	2	5	0	0	100
$x_2$	-1	1	3	1	0	0	20
$s_2$	16	0	-2	-4	1	0	10
$s_3$	5	0	-4	-3	0	1	-10

(II) یک‌ه نمودن ستون  $x_2$  و ادامه دادن حل جدول با روش سیمپلکس ثانویه که در آن  $s_3$  از پایه خارج می‌شود.

$$z = 95, \quad x_2 = \frac{5}{2}, \quad x_3 = \frac{25}{2}$$

جواب بهینه:

نتایج حاصله:

➤ **نتیجه:** اضافه نمودن یک محدودیت جدید تأثیری بر شرط بهینگی مسئله ندارد.

➤ **نتیجه:** اضافه نمودن یک محدودیت جدید می‌تواند بر موجه بودن مسئله تأثیر داشته باشد.

➤ **نتیجه:** اضافه نمودن یک محدودیت جدید ممکن است مقدار تابع هدف را تغییر دهد (جواب

بهینه می‌تواند بدتر شود)

➤ **نتیجه:** اضافه نمودن یک محدودیت جدید می‌تواند جواب پایه اساسی را تغییر دهد.

اگر محدودیت بصورت مساوی (=) باشد ممکن است جواب داشته یا نداشته باشیم.

۵.۵.۵ حذف یک محدودیت

در این شرایط دو حالت اتفاق خواهد افتاد:

۱- در حالت اول متغیر کمکی متناظر با آن محدودیت در پایه قرار ندارد و در نتیجه مقدار آن صفر است. در این صورت آن محدودیت فعال می‌باشد. بنابراین متغیر کمکی متناظر را با روش سیمپلکس معمولی وارد پایه نموده و با کمک تست حداقل نسبتها متغیر دارای شرایط خروج را از پایه خارج می‌کنیم سپس سطر و ستون متغیر کمکی متناظر آن محدودیت را از جدول حذف نموده و جدول را تا رسیدن به حل بهینه ادامه می‌دهیم.

۲- در حالت دوم متغیر کمکی متناظر با آن محدودیت در پایه قرار دارد و در نتیجه مقدار آن صفر نمی‌باشد در این صورت آن محدودیت فعال نبوده و به راحتی می‌توان سطر و ستون متغیر کمکی متناظر آن محدودیت را بدون تغییر در جواب بهینه از جدول سیمپلکس حذف نمود.

نتایج حاصله:

👉 **نتیجه:** حذف یک محدودیت بر موجه بودن مسئله تأثیری نخواهد داشت.

👉 **نتیجه:** حذف یک محدودیت ممکن است مقدار تابع هدف را تغییر دهد (جواب بهینه می‌تواند بهتر شود)

👉 **نتیجه:** حذف یک محدودیت ممکن است جواب پایه اساسی را تغییر دهد.

#### ۵-۶- قانون صد در صد

چنانچه بخواهیم تأثیر تغییرات همزمان چند پارامتر را در مسئله بدانیم می‌توان از قانون ۱۰۰٪ و فرمولهای زیر استفاده نمود.

$$\text{تغییرات همزمان ضرایب تابع هدف} = \sum_{C_i} \left( \frac{\text{مقدار تغییرات حاصله}}{\text{حداکثر تغییرات مجاز}} \right)$$

$$\text{تغییرات همزمان مقادیر سمت راست} = \sum_{b_i} \left( \frac{\text{مقدار تغییرات حاصله}}{\text{حداکثر تغییرات مجاز}} \right)$$

اگر مقدار عبارات فوق کمتر از یک (یا ۱۰۰٪) باشد آنگاه تغییرات همزمان فوق تأثیری بر جواب بهینه نداشته و در غیر اینصورت با کمک سیمپلکس مسئله را تا رسیدن به حل بهینه ادامه می‌دهیم.

#### ۵-۷- برنامه‌ریزی پارامتریک

در برنامه‌ریزی پارامتری، مدل علاوه بر اینکه تحت تأثیر پارامترها و متغیرهایی است که در

برنامه‌ریزی خطی تعریف می‌شود، تحت تاثیر پارامتر دیگر که معمولاً با  $\theta$  نمایش داده می‌شود نیز واقع می‌شود. برنامه‌ریزی پارامتری از نظر عملیاتی و محاسباتی بسیار شبیه آنالیز حساسیت می‌باشد با این تفاوت که در تحلیل حساسیت تغییرات پارامترها را بطور مستقل از یکدیگر مورد بررسی قرار می‌دهیم ولی در برنامه‌ریزی پارامتری تغییر پارامترها بطور همزمان محاسبه شده و تغییرات پیوسته پارامترها در فواصل مشخصی بررسی می‌شود در برنامه‌ریزی خطی پارامتری ۴ حالت زیر مورد بررسی قرار می‌گیرد.

- ۱- برنامه‌ریزی پارامتری ضرایب تابع هدف ( $C_j$ )
  - ۲- برنامه‌ریزی پارامتری اعداد سمت راست ( $b_i$ )
  - ۳- برنامه‌ریزی پارامتری ضرایب فنی ( $a_{ij}$ )
  - ۴- برنامه‌ریزی پارامتری همزمان ضرایب تابع هدف، اعداد سمت راست و ضرایب فنی
  - ۵- ۱-۷- برنامه‌ریزی پارامتری ضرایب تابع هدف ( $C_j$ )
- مدل کلی برنامه‌ریزی پارامتری ضرایب تابع هدف بصورت زیر تعریف می‌گردد.

$$\text{Max یا (Min) } Z(\theta) = \sum_{j=1}^n (c_j + \alpha_j \theta) x_j$$

$$\text{S.t. : } \begin{cases} \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq (\geq \text{ یا } =) b_i & i = 1, 2, \dots, m \\ x_j \geq 0 & , \quad \theta > 0 \end{cases}$$

که در آن:

$\theta$ : متغیری است مثبت که برای نشان دادن اثر تغییرات ناشی از عوامل تولید روی میزان سود فعالیتها بکار می‌رود.

$\alpha_j$ : مقدار ثابتی است که معرف آهنگ نسبی تغییرات تابع هدف می‌باشد و در واقع میزان افزایش یا کاهش فعالیتها را نمایش می‌دهد.

**نکته:** در برنامه‌ریزی پارامتری  $\alpha_j$  تغییرات را نمایش می‌دهد و  $\theta$  اثر این تغییرات را بر موجه بودن یا بهینه بودن جواب نشان می‌دهد.

الگوریتم حل تغییرات پارامتری  $C_j$ 

گام اول: مسئله را با روش سیمپلکس به ازاء  $\theta = 0$  حل کرده تا به جواب بهینه برسیم.  
گام دوم: با استفاده از روش تحلیل حساسیت، تغییر ضرایب تابع هدف  $\Delta C_j = \alpha_j \theta$  را در سطر صفر وارد می‌کنیم.

گام سوم: مقدار  $\theta$  را آنقدر افزایش می‌دهیم تا ضریب یکی از متغیرهای غیراساسی در سطر صفر منفی شود (و یا  $\theta$  تا حداکثر مقدار مجاز تعیین شده افزایش یابد) اگر چنین متغیری وجود نداشته باشد به جواب بهینه رسیده‌ایم.

گام چهارم: متغیری که ضریب آن منفی شده بعنوان متغیر ورودی انتخاب و جواب جدید را محاسبه نموده و به گام سوم برمی‌گردیم.

**نکته:** هر نمودار ترسیمی  $\theta$  و  $Z(\theta)$  به ازای  $\theta$  های محاسبه شده در برنامه‌ریزی پارامتری ضرایب تابع هدف در صورتی که تابع هدف  $Max$  باشد بصورت یک خط شکسته محدب ( $\vee$ ) بوده و در حالت  $Min$  بصورت یک خط شکسته مقعر ( $\wedge$ ) می‌باشد.

**نکته:** تغییرات پارامتری ( $C_j$ ) می‌تواند بر بهینگی مسئله تأثیر بگذارد ولی بر موجه بودن مسئله تأثیری نخواهد داشت.

۲-۷-۵- برنامه‌ریزی پارامتری اعداد سمت راست ( $b_i$ )

فرم عمومی این مدل بصورت زیر است:

$$\begin{aligned} \text{Max یا (Min)} \quad Z(\theta) &= \sum_{j=1}^n C_j x_j \\ \text{S.t.} : \quad &\begin{cases} \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq (\geq =) b_i + \alpha_i \theta & i = 1, 2, \dots, m \\ x_j \geq 0, \quad \theta > 0 \end{cases} \end{aligned}$$

الگوریتم حل تغییرات پارامتری  $b_i$ :

گام اول: مسئله را با روش سیمپلکس به ازاء  $\theta = 0$  حل نموده و جواب بهینه را بدست می‌آوریم.  
گام دوم: با استفاده از تحلیل حساسیت اثر تغییرات در مقادیر سمت راست محدودیتها ( $\Delta b_i = \alpha_i \theta$ ) را در ستون سمت راست جدول محاسبه می‌کنیم.  
گام سوم: مقدار  $\theta$  را آنقدر افزایش می‌دهیم (یا به اندازه حداکثر مقدار مجاز تعیین شده) تا مقدار یکی از متغیرهای اساسی در ستون سمت راست منفی شود. اگر چنین متغیری یافت نشد به جواب بهینه

رسیده‌ایم.

گام چهارم: متغیر منفی را بعنوان متغیر خروجی انتخاب و با روش سیمپلکس ثانویه جواب جدید را بدست آورده و به گام سوم باز می‌گردیم.

Ⓢ **۳-۷-۴**: نمودار ترسیمی  $\theta$  و  $Z(\theta)$  به ازاء  $\theta$  های محاسبه شده در برنامه‌ریزی پارامتری اعداد سمت راست وقتی که تابع هدف بصورت  $Max$  باشد یک خط شکسته مقعر ( $\vee$ ) بوده و در حالت  $Min$  بصورت یک خط شکسته محدب ( $\wedge$ ) می‌باشد.

Ⓢ **۳-۷-۵**: اعمال تغییرات پارامتری  $b_i$  می‌تواند بر موجه بودن مسئله تأثیر بگذارد ولی تأثیری بر بهینگی نخواهد داشت.

### ۳-۷-۵. برنامه‌ریزی پارامتری ضرایب فنی ( $a_{ij}$ )

فرم عمومی این مدل چنین است.

$$Max \text{ یا } (Min) Z(\theta) = \sum_{j=1}^n C_j x_j$$

$$S.t : \begin{cases} \sum_{j=1}^n (a_{ij} + \alpha_i \theta) \leq (\geq) b_i & i = 1, 2, \dots, m \\ x_j \geq 0, \quad \theta > 0 \end{cases}$$

در این حالت ابتدا مسئله با  $\theta=0$  حل نموده تا جواب بهینه بدست آید سپس با استفاده از روش تحلیل حساسیت  $a_{ij}$  های جدید و  $S'_j$  های جدید را بدست می‌آوریم. برای متغیرهای غیراساسی مسئله وقتی بهینه می‌باشد که  $S'_j$  های مثبت باشد. برای متغیرهای اساسی بعد از بدست آوردن  $a_{ij}$  و  $S'_j$  های جدید ابتدا بردارهای مربوط به متغیرهای اساسی را یک‌کده کرده و سپس بهینگی یا موجه بودن مسئله را بررسی نموده و با کمک سیمپلکس ثانویه (غیرموجه بودن مقادیر سمت راست) یا سیمپلکس اولیه (غیربهینه بودن سطر صفر) مسئله را حل می‌کنیم.

Ⓢ **۳-۷-۵**: اعمال تغییرات پارامتری ضرایب فنی ( $a_{ij}$ ) می‌تواند بر موجه بودن یا بهینگی مسئله تأثیرگذار باشد.

### ۳-۷-۵. برنامه‌ریزی پارامتری همزمان ضرایب تابع هدف، اعداد سمت راست و ضرایب فنی

فرم عمومی این مدل بصورت زیر تعریف می‌شود.

$$(Min) Z(\theta) = \sum_{j=1}^n (C_j + \alpha_j \theta) x_j$$

$$S.t : \begin{cases} \sum_{j=1}^n (a_j + \alpha_j \theta) x_j \leq (b_j \geq b_j =) b_j + \alpha_j \theta \\ x_j \geq 0 \quad , \quad \theta > 0 \end{cases}$$

الگوریتم حل بصورت زیر می‌باشد:

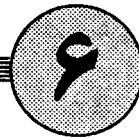
گام اول: مسئله را با روش سیمپلکس به ازاء  $\theta = 0$  حل نموده تا جواب بهینه حاصل شود. با استفاده از تحلیل حساسیت اثر تغییرات  $\Delta b_j$ ،  $\Delta c_j$ ،  $\Delta a_{ij}$  را محاسبه نموده و در جدول نهایی اعمال می‌کنیم.

مقدار  $\theta$  را آنقدر افزایش می‌دهیم (یا به اندازه حداکثر مقدار مجاز تعیین شده) تا مقدار یکی از متغیرهای اساسی در ستون سمت راست و یا ضریب یک متغیر غیراساسی در سطر صفر منفی گردد. اگر چنین تغییری پیدا نشد به جواب بهینه رسیده‌ایم.

از این متغیر بعنوان متغیر اساسی خروجی (در صورتی که یکی از اعداد سمت راست منفی گردد) یا متغیر اساسی ورودی (در صورتی که مقدار یکی از متغیرهای غیراساسی در سطر صفر منفی گردد) استفاده نموده و به ترتیب با روش سیمپلکس ثانویه یا اولیه جواب جدید را بدست آورده و به گام سوم باز می‌گردیم.

📌 **نکته:** اعمال تغییرات پارامتری همزمان  $C_j$  و  $b_j$  و  $a_{ij}$  می‌تواند بر موجه بودن یا بهینگی مسئله تاثیرگذار باشد

## مدلهای حمل و نقل و تخصیص



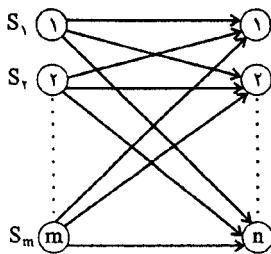
### ۶-۱- برنامه‌ریزی حمل و نقل

مسائل برنامه‌ریزی خطی می‌تواند به کمک سیمپلکس حل شود، وقتی که مسئله حمل و نقل به فرم یک مسئله برنامه‌ریزی خطی نوشته می‌شود، قابل حل با روش سیمپلکس خواهد بود. ولی با توجه به اینکه مسئله حمل و نقل دارای ساختار خاصی می‌باشد آن را می‌توان به کمک تکنیک‌های کاراتری مثل برنامه‌ریزی حمل و نقل حل نمود.

#### ۶-۱-۱- دلایل استفاده از مسئله حمل و نقل

- ۱- بسیاری از مسائل واقعی که در طبیعت وجود دارد بدین روش فرموله می‌شود.
  - ۲- بدلیل ساختار خاص مسائل حمل و نقل با الگوریتم‌های کاراتر از روش سیمپلکس قابل حل می‌باشد.
  - ۳- این الگوریتم‌ها در صورتی که اطلاعات اولیه عدد صحیح باشد جواب صحیح را حاصل می‌سازد.
- مدل حمل و نقل به شکل شبکه‌ای در نظر گرفته می‌شود که گره‌های آن نمایانگر مقاصد و مبادی می‌باشد.
- حال هرگاه در مدل برنامه‌ریزی حمل و نقل گره‌های واسطه وجود نداشته باشد و حمل و نقل از مبدأها به مقاصد بطور مستقیم انجام پذیرد، مدل حمل و نقل ساده حاصل شده است در غیراینصورت





۲-۱-۶ مدل مسئله حمل و نقل

$$\text{Min } Z = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n C_{ij} x_{ij}$$

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = s_i \quad (i = 1, 2, \dots, m \text{ محدودیتهای عرضه از مبدأ } i)$$

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} = d_j \quad (j = 1, 2, \dots, n \text{ محدودیتهای تقاضا در مقصد } j)$$

$$x_{ij} \geq 0$$

$Z$ : تابع هدف مدل که عبارت است از تعیین مقدار کالایی که باید از مبدأ  $i$  به مقصد  $j$  حمل شود تا کل هزینه حمل و نقل حداقل گردد.

مقصد مبدأ	۱	۲	.....	n	عرضه $S_i$
۱	$C_{11}$ $x_{11}$	$C_{12}$ $x_{12}$		$C_{1n}$ $x_{1n}$	$S_1$
۲	$C_{21}$ $x_{21}$	$C_{22}$ $x_{22}$		$C_{2n}$ $x_{2n}$	$S_2$
⋮					⋮
⋮					⋮
⋮					⋮
m	$C_{m1}$ $x_{m1}$	$C_{m2}$ $x_{m2}$		$C_{mn}$ $x_{mn}$	$S_m$
تقاضا $d_j$	$d_1$	$d_2$	.....	$d_n$	

$x_{ij}$ : مقدار کالایی که از مبدأ  $i$  به مقصد  $j$  حمل می‌شود.

$C_{ij}$ : هزینه حمل هر واحد کالا از مبدأ  $i$  به مقصد  $j$

$S_i$ : مقدار عرضه مبدأ  $i$  ام

$d_j$ : مقدار تقاضای مقصد  $j$  ام

$m$ : تعداد مبدأها (عرضه)

$n$ : تعداد مقصدها (تقاضا)

۳-۱-۶ فرضیات مدل حمل و نقل

- ۱- هزینه حمل هر واحد کالا معین است.
- ۲- تقاضای مقاصد از طریق عرضه مستقیم کالا از مبدأها تامین می‌شود.
- ۳- امکان ارسال کالا بین دو مبدأ یا بین دو مقصد وجود ندارد.

مبداهایی و از چه مسیری انجام شود.

☞ **نتیجه:** هرگاه در مسئله حمل و نقل، بهره‌وری حمل کالا مورد بررسی قرار گیرد، تابع هدف از نوع حداکثر کردن (*Max*) می‌شود ولی غالباً مسائل در حالت حداقل نمودن (*Min*) مطرح خواهد شد.

#### ۴-۱-۶- خواص مدل حمل و نقل

- ۱- تمام ضرایب فنی در تمام محدودیتها برای متغیرهای تعریف شده (مسیرهایی که در شبکه موجودند) برابر ۱ می‌باشد و برای سایر متغیرها برابر صفر است.
- ۲- در هر ستون از ماتریس ضرایب دقیقاً دو عدد ۱ و مابقی صفر می‌باشند یعنی هر متغیر تصمیم‌گیری فقط در ۲ محدودیت تکرار شده است. (یکبار در محدودیتهای عرضه و یکبار در محدودیتهای تقاضا)
- ۳- معمولاً مقادیر عرضه و تقاضا (سمت راست) عدد صحیح می‌باشند.

☞ **نتیجه:** هر مسئله حمل و نقل همواره دارای جواب موجه و عدد صحیح خواهد بود و هیچ‌گاه حالات بدون جواب بودن یا نامحدود بودن رخ نمی‌دهد.

دلایل اینکه جواب مسئله حمل و نقل همواره عدد صحیح است:

- ۱- عدد صحیح بودن مقادیر سمت راست.
- ۲- در روش حمل و نقل از عملیات جمع و تفریق استفاده شده و اصلاً حالت ضرب و تقسیم وجود ندارد. زیرا تمامی ضرایب تکنولوژی صفر یا یک می‌باشند.
- ۳- مقدار عنصر پاشنه‌گردی در مقایسه با روش سیمپلکس همواره عدد ۱ می‌باشد. بعبارت بهتر دترمینان ماتریس ضرایب همواره صفر یا  $\pm 1$  می‌باشد.

#### ۴-۱-۷- نکات اساسی مدل حمل و نقل

- ۱- در هر مسئله حمل و نقل (که در آن  $m$  تعداد محدودیتهای عرضه و  $n$  تعداد محدودیتهای تقاضا باشد) در مجموع دارای  $m+n$  محدودیت می‌باشد.
- ۲- تعداد متغیرهای تصمیم مدل حمل و نقل برابر  $m \cdot n$  متغیر می‌باشد.
- ۳- تعداد ضرایب تکنولوژی مساوی با عدد یک  $2mn$  می‌باشد.
- ۴- تعداد ضرایب تکنولوژی مساوی با عدد صفر،  $2mn - mn(m+n)$  می‌باشد.
- ۵- اگر جمع کل عرضه و تقاضا برابر باشد  $(\sum_{i=1}^m s_i = \sum_{j=1}^n d_j)$ ، آنگاه مسئله متوازن می‌باشد.
- ۶- اگر کل عرضه از کل تقاضا کمتر باشد  $(\sum_{i=1}^m s_i < \sum_{j=1}^n d_j)$  مسئله نامتوازن است که در این حالت با

معرفی عرضه مجازی جدید، به اندازه  $(\sum^n d_j - \sum^m s_i)$  به سطر جدول اضافه می‌کنیم. در اینصورت هزینه‌های حمل و نقل آن سطر  $(C_{ij} = 0)$  مساوی صفر خواهد شد.

۷- اگر کل عرضه از کل تقاضا بیشتر باشد  $(\sum^m s_i > \sum^n d_j)$  مسئله نامتوازن بوده که در اینصورت با معرفی یک تقاضای مجازی جدید به اندازه  $(\sum^m s_i - \sum^n d_j)$  به ستون جدول اضافه می‌شود که در این حالت هزینه حمل و نقل تقاضای مجازی  $(C_{ij} = 0)$  خواهد بود.

۸- در حالت حمل و نقل نامتوازن تعداد کل محدودیت‌ها  $(m+n+1)$  و تعداد متغیرها  $(m \times (n+1))$  یا  $(m+1) \times n$  خواهد بود.

۹- هرگاه مسئله حمل و نقل متوازی دارای  $m$  مبدأ عرضه و  $n$  مقصد تقاضا حل شود، حداکثر دارای  $(m+n-1)$  متغیر پایه می‌باشد. عبارت بهتر مرتبه ماتریس ضرایب برابر  $(m+n-1)$  خواهد بود و تعداد بردارهای مستقل نیز حداکثر  $m+n-1$  خواهد بود. اگر مسئله نامتوازن باشد  $(m+n-1)$  به  $m+n$  تبدیل می‌شود.

۱۰- هرگاه مسئله حمل و نقل به روش سیمپلکس حل شود، تعداد پایه‌ها برابر تعداد محدودیت‌های مسئله  $(m+n)$  می‌باشد که یکی از آنها برابر صفر خواهد بود. بنابراین هرگاه مسئله حمل و نقل به روش سیمپلکس حل شود حتماً جواب منحنی خواهد داشت.

#### ۱۶-۶- شروط لازم و کافی در مسئله حمل و نقل

الف) برای وجود جواب: هر مسئله حمل و نقل در صورتی که متوازن یا نامتوازن باشد جواب دارد و نیازی به هیچگونه شرطی نخواهد داشت.

ب) برای جواب عدد صحیح: باید مقادیر عرضه و تقاضا عدد صحیح باشد. در صورتی که مسئله به گونه‌ای مطرح شود که ضرایب تکنولوژی صفر یا یک نباشد، باید با روابط ریاضی ضرایب را صفر و یک نمود.

ج) برای وجود جواب بهینه: به ازای جواب قابل قبول مسئله اولیه، حل مزدوج متناظری وجود داشته باشد که جواب آن نیز قابل قبول بوده و دارای مقادیر تابع هدف یکسانی باشند.

## ع-۲- الگوریتم حل مدل حمل و نقل

- |  |   |  |
|--|---|--|
| <p>۱- روش گوشه شمال غربی (سمت چپ بالا)</p> <p>۲- روش کمترین هزینه سطری یا ستونی</p> <p>۳- روش کمترین هزینه ماتریسی</p> <p>۴- روش تقریبی و گل</p> | } | <p>قدم اول) تعیین جواب اساسی موجه اولیه با یکی از روشهای مقابل</p> |
|--|---|--|

**نکته:** براساس تجربه غالباً جوابهای حاصل از روشهای فوق به ترتیب از پائین به بالا به جواب بهینه نزدیکتر می باشند.

- |  |   |   |
|--|---|---|
| <p>۱- روش مستقیم (اولیه یا پله سنگ)</p> <p>۲- روش مضارب (مزدوج، توزیع تعدیل شده، MODI)</p> | } | <p>قدم دوم) تعیین جواب بهینه از جواب اساسی بهینه اولیه با یکی از روشهای مقابل</p> |
|--|---|---|
- نکته:** اگر چنانچه به جواب بهینه نرسیدیم، با انتخاب متغیر ورودی و خروجی و تعیین جواب اساسی موجه جدید قدم دوم را تا رسیدن به حل نهایی ادامه می دهیم.

## ع-۳- روش گوشه شمال غربی

- ۱- بجای گوشه شمال غربی از هرکدام از گوشه‌های دیگر می توان استفاده نمود.
- ۲- تعداد متغیرهای اساسی حاصله از این روش حداکثر  $(m + n - 1)$  می شود و در صورتی که کمتر از این تعداد باشد، مسئله دارای حالت منحنی است.
- ۳- در محاسبه تعداد مبداهای و مقصدها توجه کنید که سطر یا ستون مجازی محاسبه شود.
- ۴- هرگاه مقادیر عرضه و تقاضا غیر از مرحله آخر سطر بطور همزمان صفر شود (بصورت قطری حرکت نموده) در نهایت حل مسئله منحنی خواهد بود.
- ۵- بدلیل استقلال متغیرهای پایه از یکدیگر به کمک خطوط عمودی و افقی نمی توان حلقه بسته تشکیل داد زیرا در اینصورت باید متغیرهای پایه وابسته باشند.
- ۶- این روش تنها روشی است که به هزینه‌های حمل و نقل ارتباطی ندارد و بدون توجه به هزینه‌های حمل و نقل قابل حل است. به همین دلیل این روش یک جواب پایه موجه جواب ارائه نمی دهد.

## ع-۴- روش کمترین هزینه ماتریسی

- ۱- در شرایط تساوی، حداقل هزینه یکی از سلولها به اختیار انتخاب می شود ولی بهتر است آن سلولی انتخاب شود که می تواند تخصیص بیشتری به خود اختصاص دهد.
- ۲- برای محاسبه حداقل هزینه توجه کنید که حتی الامکان از سطر یا ستون مجازی تا زمانی که

مجبور نشده‌اید استفاده نکنید.

۳- اگر سطر و ستون مقادیر عرضه و تقاضا غیر از مرحله آخر یکبارہ صفر شود، جواب حاصل منحنط بوده و تعداد متغیرهای پایه کمتر از  $(m + n - 1)$  خواهد بود.

### ۵- روش تقریبی و گل

۱- در شرایط تساوی، هزینه یکی به دلخواه انتخاب می‌شود ولی بهتر است آن سلولی انتخاب شود که می‌تواند تخصیص بیشتری به خود اختصاص دهد.

۲- برای محاسبهٔ اختلاف دو حداقل هزینه سطری یا ستونی حتی الامکان از سطر یا ستون مجازی استفاده نکنید.

۳- زمانی که فقط یک سطر یا فقط یک ستون باقی مانده است الگو را خاتمه داده و تخصیص‌های باقی مانده را بطور همزمان انجام دهید.

در بهبود جوابها به روش‌های پله سنگ و مضارب قابل ذکر است که روش اول با استفاده از مفهوم مسئله اولیه، نسبت به تعیین جواب بهینه اقدام می‌کند، در حالی که در روش مضارب حل بهینه با استفاده از مفهوم مسئله ثانویه انجام می‌شود.

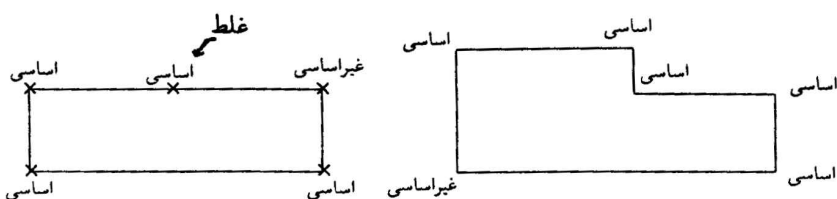
### ۶- روش پله سنگ

این روش روندی را دنبال می‌نماید تا با یک سری عملیات متوالی از یک جواب موجه ابتدایی به جواب بهینه برسد. گام‌های زیر جهت بهبود جواب بکار گرفته می‌شود.

گام ۱- یک خانهٔ خالی (یک متغیر غیراساسی) را جهت ارزیابی انتخاب کنید.

گام ۲- برای خانه خالی انتخاب شده یک مسیر پله سنگ رسم کنید. یکی از گوشه‌های این مسیر در خانه خالی انتخابی (خانه‌ای که متغیر غیراساسی دارد) قرار گرفته و سایر گوشه‌ها باید در خانه‌های پر (خانه‌هایی که متغیرهای آن اساسی است) واقع شده و سپس به گوشه موردنظر که در خانه خالی قرار گرفته علامت  $(+)$  اختصاص داده و به سایر گوشه‌ها، یکی در میان علامت منفی  $(-)$  و سپس  $(+)$  تخصیص دهید.

**تذکره:** مسیر پله سنگ، مسیری است بسته و منحصر به فرد که دارای اضلاع عمود بر هم می‌باشد. در روش پله سنگ هر حرکت فقط به یک متغیر اساسی منتهی می‌شود و نقطه شروع و پایان آن، متغیر غیراساسی مورد بررسی می‌باشد.



گام ۳ - هزینه حمل هر واحد کالا برای خانه‌هایی که دارای علامت مثبت هستند را با هم جمع و از مجموع هزینه حمل هر واحد کالا برای خانه‌هایی که دارای علامت (-) هستند، کم کنید عدد حاصل ارزش خانه خالی انتخابی را نشان می‌دهد ( $\bar{C}_{ij} = C_{ij} - Z_{ij}$ )

گام ۴ - ارزش تمامی خانه‌های خالی را مطابق گام‌های فوق بدست آورده، اگر ارزش تمامی خانه‌های خالی عددی غیر منفی بود به جواب بهینه رسیده‌اید، در غیر اینصورت این جدول بهینه نبوده و گام‌های بعدی را اجرا کنید.

گام ۵ - انتخاب متغیر ورودی: آن خانه خالی را که دارای منفی‌ترین ارزش محاسبه شده ( $\bar{C}_{ij} = C_{ij} - Z_{ij}$ ) باشد را انتخاب کنید و متغیر مربوط به این خانه را متغیر ورودی بنامید.

گام ۶ - انتخاب متغیر خروجی: از میان تمام خانه‌هایی که رأس مسیر پله سنگ در آن قرار گرفته و دارای علامت منفی هستند، خانه‌ای را که دارای کمترین مقدار متغیر اساسی ( $x_{ij}$ ) است را انتخاب کنید. متغیر مربوط به این خانه را متغیر خروجی بنامید.

گام ۷ - بدست آوردن جدول جدید: یک جدول جدید رسم کرده و مقدار خانه انتخابی در گام ۶ (مقدار  $x_{ij}$  متغیر خروجی) را به مقدار  $x_{ij}$  خانه‌هایی که دارای علامت (+) هستند، اضافه کرده و از مقدار  $(x_{ij})$  خانه‌هایی که دارای علامت منفی (-) هستند کم کنید و مقدار سایر خانه‌هایی که رأس‌های مسیر پله سنگ در آنها قرار نگرفته به همان صورت به جدول جدید منتقل کرده و به گام اول برگردید.

**نکته:** مقدار هزینه کاهش یافته تابع هدف از رابطه زیر حاصل می‌شود.

$$|C_{ij} - Z_{ij}| \text{ (مقدار متغیر خروجی)} = \text{هزینه کاهش یافته}$$

### ۶-۷- روش مضارب (توزیع تعدیل شده)

همانگونه که مطرح شد در روش مضارب حل بهینه با استفاده از مفهوم مسئله ثانویه انجام می‌شود. متغیرهای ثانویه مربوط به محدودیت عرضه با  $u_i$  و متغیرهای ثانویه مربوط به محدودیت‌های تقاضا با  $v_j$  تعریف می‌شود.

## ۱-۷-۶- ثانویه (دوگان) مسئله حمل و نقل

اگر یک مسئله حمل و نقل بصورت زیر باشد:

$$\text{Min } Z = \sum_i^m \sum_j^n C_{ij} x_{ij}$$

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = S_i \quad (i = 1, \dots, m \text{ محدودیتهای عرضه از مبدأ})$$

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} = d_j \quad (j = 1, \dots, n \text{ محدودیتهای تقاضا در مقصد})$$

$$x_{ij} \geq 0$$

آنگاه ثانویه (دوگان) آن بصورت زیر نگاشته می شود.

$$\text{Max } Y = \sum_{i=1}^m s_i u_i + \sum_{j=1}^n d_j v_j$$

$$u_i + v_j \leq C_{ij}$$

آزاد در علامت  $u_i, v_j$

مطابق قضایای دوگان، متغیر  $x_{ij}$  وقتی اساسی می شود که محدودیت ثانویه متناظر با آن فعال بوده و بصورت تساوی برقرار باشد. یعنی برای متغیرهای اساسی (خانه‌های جدول با مقادیر مثبت) رابطه  $u_i + v_j = C_{ij}$  برقرار است. حال با استفاده از رابطه فوق کلیه مقادیر  $u_i$  (به تعداد سطرهای جدول حمل و نقل) و  $v_j$  (به تعداد ستونهای جدول حمل و نقل) را بدست می آوریم که تعداد این مجهولها  $(m+n)$  بوده و تعداد معادلات  $u_i + v_j = C_{ij}$  (به تعداد متغیرهای اساسی یعنی  $(m+n-1)$ ) خواهد بود. لذا به یکی از مجهولات (معمولاً  $u_1$ ) مقدار دلخواه صفر را تخصیص داده و سایر مجهولات  $u_i$  و  $v_j$  را با استفاده از رابطه  $u_i + v_j = C_{ij}$  جهت متغیرهای اساسی بدست می آوریم و برای خانه‌های تخصیص نیافته (متغیرهای غیر اساسی) مقادیر  $(u_i + v_j) - C_{ij}$  محاسبه نموده و گام‌های زیر را انجام می دهیم.

## ۲-۷-۶- گام‌های حل روش مضارب

در این روش نیز از یک جواب موجه ابتدایی گام‌های زیر جهت بهبود جواب برداشته می شود.  
گام ۱- از رابطه  $u_i + v_j = C_{ij}$  استفاده کرده و براساس خانه‌های پر برای هر سطر، یک  $u_i$  و برای هر ستون، یک  $v_j$  محاسبه کنید.

گام ۲ - با استفاده از اطلاعات گام اول، ارزش خانه‌های خالی را با استفاده از رابطه  $C_{ij} - Z_{ij} = C_{ij} - (u_i + v_j)$  محاسبه نمائید اگر کلیه این مقادیر غیر منفی بود به جواب بهینه رسیده‌اید در غیر اینصورت به گام بعد بروید.

گام ۳ - خانه خالی را که دارای منفی ترین مقدار  $C_{ij} - Z_{ij} = C_{ij} - (u_i + v_j)$  می باشد مشخص نموده و متغیر مربوط به آن را متغیر ورودی بنامید.

گام ۴ - برای خانه خالی انتخاب شده در گام چهارم، یک مسیر پله سنگ رسم نموده و از میان خانه‌هایی که دارای علامت منفی می باشند، خانه‌ای را که دارای کمترین مقدار  $x_{ij}$  است انتخاب و متغیر مربوط به آن را متغیر خروجی بنامید.

گام ۵ - مقدار خانه انتخاب شده در گام ۴  $(x_{ij})$  را به مقدار خانه‌هایی که دارای علامت مثبت هستند اضافه و از مقدار خانه‌هایی که دارای علامت منفی هستند، کم کنید تا جدول جدید بدست آید، سپس به گام اول برگردید.

### ۶-۱ حالات خاص در روش حمل و نقل

۱- مسئله حمل و نقل هیچ وقت دارای حالت خاص بدون جواب بهینه یا منطقه موجه نامحدود نیست و همواره جوابی موجه و عدد صحیح خواهد داشت.

۲- در مرحله یافتن جواب موجه ابتدایی: هرگاه در تخصیص مقادیر به یک خانه خالی، همزمان میزان عرضه سطر و تقاضای ستون با هم به صفر برسد. در این شرایط یا سطر یا ستون حذف می شود و به یکی از خانه‌های خالی سطر یا ستون دیگر مقدار صفر تعلق می گیرد. در این حالت مقدار صفر به یک متغیر اساسی تعلق گرفته و حالت خاص جواب تبهگن است.

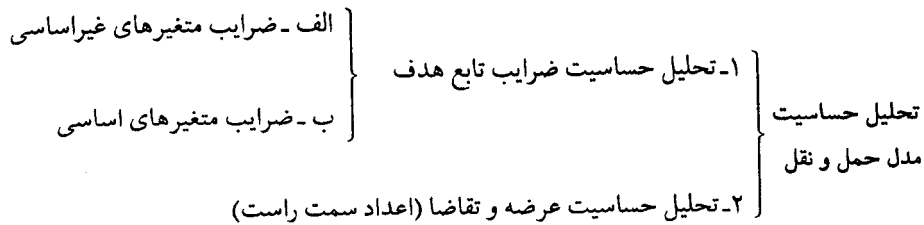
۳- در مرحله بهبود جواب: هرگاه هنگام تعیین متغیر خروجی، در گوشه‌های منفی دو مقدار حداقل، یکسان داشته باشیم در جدول بعد یکی از متغیرها از پایه خارج می شود و متغیر دیگر با مقدار صفر در پایه باقی می ماند که در این حالت جواب اساسی تبهگن خواهیم داشت.

۴- در جدول حمل و نقل اگر کمتر از  $m + n - 1$  متغیر اساسی داشته باشیم، در این حالت به تعداد کمبود، متغیر اساسی تبهگن وجود خواهد داشت.

۵- هرگاه مقدار یک یا چند خانه خالی (متغیر غیر اساسی)، با رابطه  $Z_{ij} - C_{ij} = u_i + v_j - C_{ij}$  معادل صفر گردد مسئله دارای حالت خاص جواب بهینه چندگانه خواهد شد.



### ۹-۶- تحلیل حساسیت مسئله حمل و نقل



#### ۹-۶-۱- تحلیل حساسیت ضرایب تابع هدف برای متغیرهای غیراساسی

در مسائل *Min* وقتی، جواب بهینه است که رابطه  $0 \leq C_{ij} - (u_i + v_j)$  برای تمامی متغیرهای غیراساسی برقرار باشد. حال ضرایب  $C_{ij}$  جهت متغیرهای غیراساسی باید به گونه‌ای تغییر نمایند که جواب فعلی بهینه باقی بماند بنابراین برای متغیرهای غیراساسی  $x_{ij}$  باید رابطه زیر برقرار باشد.

$$C_{ij} + \Delta_{ij} - (u_i + v_j) \geq 0$$

که در آن  $\Delta_{ij}$  میزان تغییرات ضریب تابع هدف متغیر غیراساسی  $x_{ij}$  خواهد بود.

#### ۹-۶-۲- تحلیل حساسیت ضرایب تابع هدف برای متغیرهای اساسی

در جدول بهینه اگر  $x_{ij}$  متغیر اساسی باشد رابطه  $C_{ij} = u_i + v_j$  همواره برقرار است. حال جهت تعیین دامنه تغییرات مجاز  $C_{ij}$ ، بجای عبارت  $C_{ij}$  عبارت  $C_{ij} + \Delta_{ij}$  را در جدول بهینه قرار داده و مجدداً  $u_i$  و  $v_j$  های جدید را محاسبه نموده و سپس مقادیر  $(u_i + v_j) - C_{ij}$  را برای کلیه مقادیر غیراساسی مربوطه محاسبه نموده و جهت حفظ شرط بهینگی، بزرگتر مساوی صفر قرار می‌دهیم ( $0 \leq (u_i + v_j) - C_{ij}$ ) و حدود تغییرات  $C_{ij}$  مورد نظر ( $\Delta_{ij}$ ) را بدست می‌آوریم.

#### ۹-۶-۳- تحلیل حساسیت عرضه و تقاضا (اعداد سمت راست)

تابع هدف مسئله ثانویه در مدل حمل و نقل بصورت زیر بیان می‌گردد:

$$\text{Max } Y = \sum_i^m S_i u_i + \sum_j^n d_j v_j$$

که در آن  $u_i$  و  $v_j$  ها متغیر ثانویه و بیانگر قیمت‌های سایه در جدول بهینه می‌باشند و هرگونه تغییر در میزان عرضه مبادی یا تقاضای مقاصد موجب تغییر در مقدار بعضی از متغیرهای اساسی خواهد شد. باتوجه به این مطالب تحلیل حساسیت عرضه و تقاضا بدین صورت طبقه‌بندی می‌شود:

حالت (۱) تغییرات تابع هدف در اثر افزایش یک واحد در عرضه مبدأ  $i$  و کاهش همزمان یک واحد در

تقاضای مقصد  $j$  عبارتست از:

$$\Delta Z = u_i - v_j$$

حالت ۲) تغییرات تابع هدف در اثر افزایش یک واحد در عرضه مبدأ  $i$  و افزایش همزمان یک واحد در تقاضای مقصد  $j$  عبارتست از:

$$\Delta Z = u_i + v_j$$

حالت ۳) تغییرات تابع هدف در اثر افزایش یک واحد در تقاضای مقصد  $j$  و کاهش همزمان یک واحد در تقاضای مقصد  $k$  عبارتست از:

$$\Delta Z = v_j - v_k$$

حالت ۴) تغییرات تابع هدف در اثر کاهش یک واحد در عرضه مبدأ  $i$  و کاهش همزمان یک واحد در تقاضای مقصد  $j$  عبارتست از:

$$\Delta Z = -u_i - v_j$$

حالت ۵) تغییرات تابع هدف در اثر افزایش یک واحد در عرضه مبدأ  $k$  عبارتست از:

$$\Delta Z = u_k - \text{Max } u_i$$

که در آن از عرضه مبدأ متناظر با  $\text{Max } u_i$  یک واحد کاسته می شود.

حالت ۶) تغییرات تابع هدف در اثر افزایش یک واحد در تقاضای مقصد  $l$  عبارتست از:

$$\Delta Z = v_l - \text{Max } v_j$$

که در آن از تقاضای مقصد متناظر با  $\text{Max } v_j$  یک واحد کاسته می شود.

حالت ۷) تغییرات تابع هدف در اثر کاهش یک واحد در عرضه مبدأ  $k$  عبارتست از:

$$\Delta Z = -u_k - \text{Max } u_i$$

که در آن به عرضه مبدأ متناظر با  $\text{Max } u_i$  یک واحد اضافه می شود.

حالت ۸) تغییرات تابع هدف در اثر کاهش یک واحد در تقاضای مقصد  $l$  عبارتست از:

$$\Delta Z = -v_l - \text{Max } v_j$$

که در آن به تقاضای مقصد متناظر با  $\text{Max } v_j$  یک واحد اضافه می شود.

### ۶-۱ مسئله تخصیص (واگذاری)

مدل تخصیص (*Assignment*) مدلی خاص از مسئله حمل و نقل می باشد که برای تخصیص یک کار یا فعالیت یا شغل یا وظیفه به یک ماشین، کارگر، یا شخص استفاده می شود به گونه ای که هزینه تخصیص حداقل گشته و یا بهره وری و سود ناشی از تخصیص حداکثر گردد.

📌 **نکته:** در مدل تخصیص تعداد عرضه  $m$  و تقاضا  $n$  با هم برابر بوده ( $m=n$ ) و همچنین مقدار مقادیر عرضه و تقاضا مساوی یک می باشد.

$$s_i = d_j = 1$$

ماتریس هزینه یک مسئله تخصیص به صورت زیر ترسیم می شود.

شغل فرد	۱	۲	.....	$j$	...	$n$
۱	$C_{11}$	$C_{12}$	.....	$C_{1j}$	...	$C_{1n}$
۲	$C_{21}$	$C_{22}$	.....	$C_{2j}$	...	$C_{2n}$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
$i$	$C_{i1}$	$C_{i2}$	.....	$C_{ij}$	...	$C_{in}$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
$n$	$C_{n1}$	$C_{n2}$	.....	$C_{nj}$	...	$C_{nn}$

### ۱۱-۶- روش های حل مدل تخصیص

#### ۱۱-۶-۱- روش شمارش کامل

می خواهیم  $n$  شغل را به  $n$  فرد تخصیص دهیم به گونه ای که حداکثر بهره وری حاصل شود. در این روش کلیه حالات ممکن تخصیص شغل ها به افراد در نظر گرفته شده و برای هر کدام مقدار تابع هدف را محاسبه می کنیم. بهترین حالت وقتی است که تابع هدف کمترین مقدار را داشته باشد. این روش کاربرد چندانی ندارد.

**نکته:** تعداد کل حالات تخصیص  $n$  شغل به  $n$  فرد  $n!$  می باشد.

#### ۱۱-۶-۲- روش برنامه ریزی عدد صحیح

در برنامه ریزی عدد صحیح مسئله تخصیص پارامترها به شکل زیر تعریف می شود.

$x_{ij}$ : متغیرهای تصمیم برای تخصیص  $n$  فرد به  $n$  شغل

$C_{ij}$ : هزینه تخصیص فرد  $i$  ام به شغل  $j$  ام

حال مدل برنامه ریزی عدد صحیح مسئله تخصیص به شکل زیر تعریف می شود.

$$\text{Min } Z = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n C_{ij} x_{ij}$$

$$\text{s.t.} : \sum_{j=1}^n x_{ij} = 1 \quad i = 1, 2, \dots, n$$

$$\sum_{i=1}^n x_{ij} = 1 \quad j = 1, 2, \dots, n$$

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{اگر فرد } i \text{ کار زام را انجام دهد} \\ 0 & \text{در غیر اینصورت} \end{cases}$$

محدودیت اول نشان می‌دهد که باید به همه افراد شغل تخصیص داده شود و محدودیت دوم نشان می‌دهد که باید به هر شغلی یک فرد تخصیص داده شود.

#### ۳-۱۱-۶- روش برنامه‌ریزی خطی

با جایگزینی  $x_{ij} \geq 0$  به جای  $x_{ij} = \begin{cases} 1 \\ 0 \end{cases}$  در مدل برنامه‌ریزی عدد صحیح فوق، مسئله به یک مدل برنامه‌ریزی خطی تبدیل می‌شود.

#### ۴-۱۱-۶- روش حمل و نقل

مدل تخصیص در واقع نوع خاصی از مدل حمل و نقل می‌باشد که در آن مشاغل (عرضه) به افراد (تقاضا) تخصیص داده می‌شود و به این ترتیب  $(n \times n = n^2)$  متغیر تصمیم  $(x_{ij})$  وجود خواهد داشت که از این متغیرها تعداد  $(1 - 2n + n = n - 1)$  متغیر اساسی، خواهد بود. ولی چون هر متغیر اساسی با مقدار یک، همزمان نیازمندی یک سطر و ستون را برآورده می‌کند، پس در هر سطر یا ستون یک متغیر اساسی با مقدار صفر داریم. به عبارت دیگر از  $2n - 1$  متغیر اساسی  $n$  متغیر اساسی با مقدار یک و  $n - 1$  متغیر اساسی با مقدار صفر (جوابهای تبهگن) وجود دارد.

#### ۵-۱۱-۶- روش مجارستانی (بسط ماتریسی)

روش مجارستانی بهترین روش برای حل مدل تخصیص بوده و مبتنی بر خاصیت ماتریسها در روابط بین مسئله اولیه و ثانویه می‌باشد. این روش بر مبنای قضیه زیر بنیان نهاده شده است.  
«اگر تمامی اعداد هر سطر یا ستون یک مسئله تخصیص، به یک میزان افزایش یا کاهش یابند، جواب بهینه مسئله تخصیص جدید، معادل همان مسئله اول خواهد بود.»

گام اول - در هر سطر ماتریس هزینه، کوچکترین عدد را انتخاب و از بقیه اعداد موجود در آن سطر کم کرده و ماتریس هزینه جدید تشکیل دهید. سپس در هر ستون ماتریس حاصله نیز، کوچکترین عدد موجود در ستون را از بقیه اعداد همان ستون کم کنید. ماتریس حاصل «ماتریس هزینه‌های کاهش یافته یا جدول هزینه فرصت» نامگذاری می‌شود.

گام دوم - با استفاده از حداقل تعداد خطوط، تمامی صفرهای موجود در سطر یا ستون ماتریس هزینه‌های کاهش یافته را بپوشانید. (این خطوط، خطوط پوششی نامیده می‌شود و باید حتماً افقی یا عمودی باشند) اگر تعداد خطوط پوشش برابر افراد یا مشاغل  $(n)$  باشد به جدول بهینه رسیده‌اید در غیر اینصورت به گام سوم بروید.

**نکته ۱۱۱:** خطوط پوششی به گونه‌ای ترسیم می‌گردد که هر خط تا آنجا که ممکن است تعداد بیشتری از صفرها را بیوشاند.

گام سوم - کوچکترین عددی را که در ماتریس اخیر روی آن خط کشیده نشده است انتخاب کرده و این عدد را از تمامی اعدادی که روی آنها خطی کشیده نشده است کم کرده و به اعدادی که در محل تقاطع خطوط پوشش قرار دارند اضافه کرده و به گام دوم برگردید.

گام چهارم - پس از رسیدن به جدول بهینه جهت تعیین جواب بهینه، بایستی هرکار به یک فرد واگذار شود. جهت این کار سطر یا ستونی را که فقط یک صفر دارد پیدا کرده و دور آن خط بکشید و بر این مبنا کار و فردی که باید آن را انجام دهد، مشخص می‌شود. حال از سطر و ستونی که صفر آن تعیین شده صرفنظر کرده و در مابقی جدول به دنبال سطر یا ستونی بگردید که یک صفر را داشته باشد و عملیات بدین ترتیب ادامه می‌یابد تا جواب بهینه حاصل شود.

**نکته ۱۱۲:** جواب وقتی بهینه است که در هر سطر یا ستون فقط به دور یک صفر خط کشیده شده باشد.

**نکته ۱۱۳:** پس از بدست آوردن جواب بهینه برای یک مسئله تخصیص ممکن است مقدار و موقعیت صفرها در جدول نهایی به گونه‌ای باشد که بتوان بیش از یک جواب بهینه یافت. هرگاه در جدول نهایی تعداد صفرها برای هر سطر یا ستونی بیش از یک باشد امکان وجود جواب بهینه چندگانه وجود دارد. در جواب بهینه چندگانه مقادیر  $Z$  به ازای تمام جوابهای بهینه یکسان می‌باشد.

**نکته ۱۱۴:** در مسئله تخصیص اگر بخواهیم کاری به فردی تخصیص نیابد هزینه آن را بسیار زیاد ( $M$ ) در نظر می‌گیریم.

**نکته ۱۱۵:** اگر چنانچه در مسائل تخصیص تعداد سطرها و ستونها مساوی نباشد (عدم توازن) در آن صورت از سطر یا ستون مجازی با هزینه‌های صفر استفاده می‌کنیم تا توازن حاصل شود.