بسم الله الرحمن الرحیم

جزوه مدار ۲ – قسمت اول

دانشگاه صنعتی امیر کبیر

تهیه کننده : سعید دانشگر

ویرایش و تنظیم برای سایت : حامد مظاهری

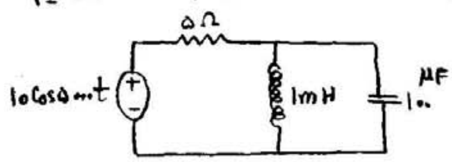
بسم الله الرحمن الرحیم

سعید دانشگر

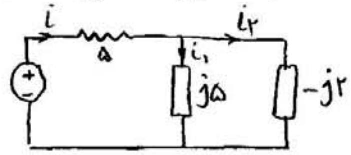
مدارهای الکتریکی II

مدارهای سه فاز

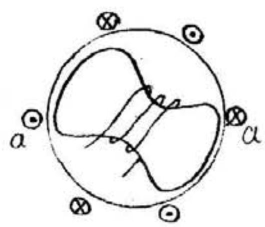
قبلاً مسائلی را بررسی کردیم که با منابع سینوسی تک فاز تحریک می شدند و فقط دنبال جواب خصوصی بودیم.

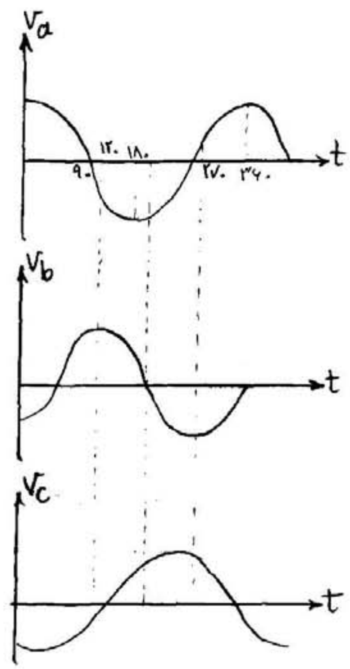


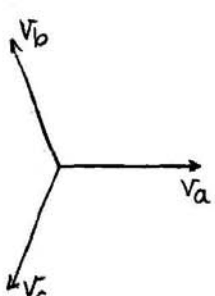
$\longrightarrow$



$$\longrightarrow I = \frac{10\angle 0}{5+\frac{10}{j3}}$$







اگر

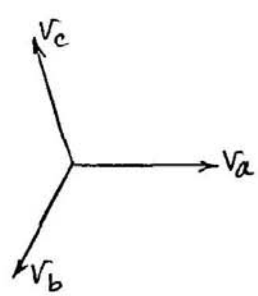
$V_a = V_m \cos \omega t$

$V_b = V_m \cos(\omega t + 120)$

$V_c = V_m \cos(\omega t - 120)$

آنگاه:

ترتیب با توالی acb ، منفی ، معکوس



ترتیب با توالی abc ، مثبت ، مستقیم

چند نکته

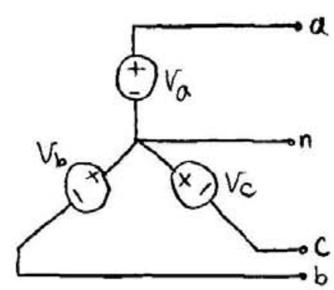
همواره { در حوزهٔ برداری $V_a + V_b + V_c = 0$ ؛ در حوزهٔ زمان $v_a + v_b + v_c = 0$ }

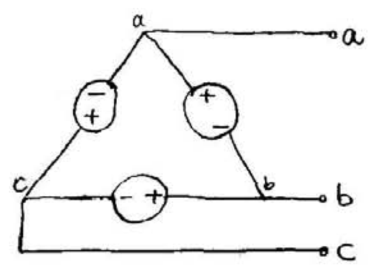
در مدارهای سه فاز وقتی یکی از ولتاژها و ترتیب معلوم باشد دو ولتاژ دیگر معلوم است.

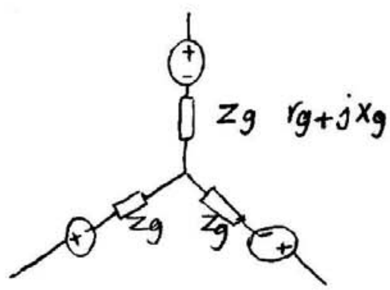
مثال در یک ژنراتور سه فاز $V_a = 220\cos(\omega t + 50)$ و ترتیب مثبت است مطلوبست V_b ، V_c

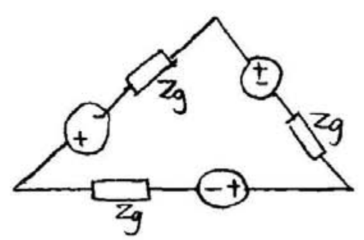
$$\longrightarrow V_b = 220\cos(\omega t - 70) \quad , \quad V_c = 220\cos(\omega t + 170)$$

این ۶ سر به دو فرم ستاره یا مثلث بسته می‌شوند:

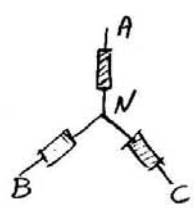


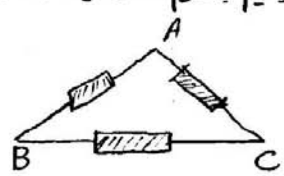






بار (مصرف کننده) را نیز می‌توانیم به فرم ستاره یا مثلث در نظر بگیریم:

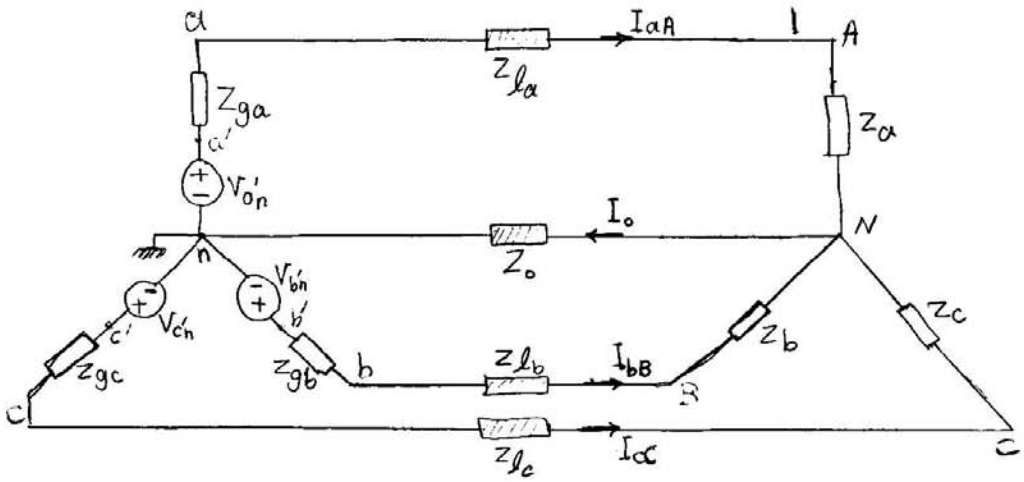




نتیجه: ۴ نوع مدار سه فاز داریم .

۱- ستاره - ستاره ۲- ستاره - مثلث
۳- مثلث - ستاره ۴- مثلث - مثلث

۱- تحلیل مدارهای ستاره - ستاره:



نکته مهم: تحلیل مدارهای سه فاز کاملاً از همان روشهای گفته شده در مدار ۱ انجام می شود با این تفاوت که در این مدارها سه منبع داریم .

$$Z_{\varphi_a} \triangleq Z_{ga} + Z_{l_a} + Z_a$$

$$Z_{\varphi_b} \triangleq Z_{gb} + Z_{l_b} + Z_b$$

$$Z_{\varphi_c} \triangleq Z_{gc} + Z_{l_c} + Z_c$$

$$\longrightarrow \frac{V_N}{Z_o} = \frac{V_{a'n} - V_N}{Z_{\varphi_a}} + \frac{V_{b'n} - V_N}{Z_{\varphi_b}} + \frac{V_{c'n} - V_N}{Z_{\varphi_c}}$$

$$\longrightarrow V_N = \frac{V_{a'n} \cdot Y_{\varphi_a} + V_{b'n} \cdot Y_{\varphi_b} + V_{c'n} \cdot Y_{\varphi_c}}{Y_{\varphi_a} + Y_{\varphi_b} + Y_{\varphi_c} + Y_o}$$

$$\longrightarrow I_{aA} = \frac{V_{a'n} - V_N}{Z_{\varphi_a}} \quad , \quad I_{bB} = \frac{V_{b'n} - V_N}{Z_{\varphi_b}} \quad , \quad I_{cC} = \frac{V_{c'n} - V_N}{Z_{\varphi_c}}$$

مدار سه فاز متعادل : وقتی می‌گوئیم مدار سه فاز متعادل است که :

$$\begin{cases} Z_{g_a}=Z_{g_b}=Z_{g_c} \\ Z_{l_a}=Z_{l_b}=Z_{l_c} \\ Z_a=Z_b=Z_c \end{cases} \longrightarrow \quad Z_{\varphi_a}=Z_{\varphi_b}=Z_{\varphi_c} \quad , \quad Y_{\varphi_a}=Y_{\varphi_b}=Y_{\varphi_c}$$

با فرض متعادل بودن مدار سه فاز :

$$V_N=\frac{Y_\varphi\,[\overbrace{V_{a'n}+V_{b'n}+V_{c'n}}^{0}]}{3Y_\varphi+Y_0}=0$$

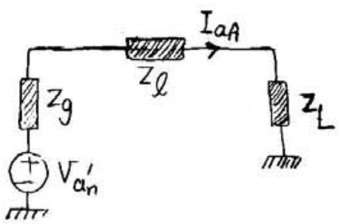
در این حالت :

$$\begin{cases} I_{aA}=Y_\varphi \cdot V_{a'n} \\ I_{bB}=Y_\varphi \cdot V_{b'n} \\ I_{cC}=Y_\varphi \cdot V_{c'n} \end{cases}$$

چون $V_{a'n}$ ، $V_{b'n}$ ، $V_{c'n}$ از نظر قدر مطلق برابر هستند وفقط اختلاف فاز ۱۲۰° دارند، پس I_{aA} ، I_{bB} ، I_{cC} نیز از نظر قدر مطلق برابر خواهند بود وفقط ۱۲۰° اختلاف فاز خواهند داشت.

درنتیجه کافی است I_{aA} را محاسبه کنیم.

مدار معادل تک فاز :



قبل از پرداختن به مثال عددی با چند اصطلاح آشنا می‌شویم :

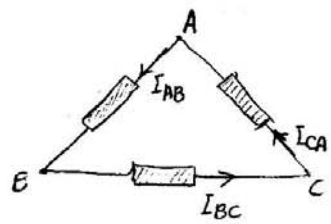
۱- V_{an} ، V_{bn} و V_{cn} را اصطلاحاً ولتاژهای خط به خنثی (فاز) در سر مولد نامند.

۲- V_{AN} ، V_{BN} و V_{CN} را اصطلاحاً ولتاژهای خط به خنثی (فاز) در سر بار نامند.

۳- V_{ab} ، V_{bc} و V_{ca} را اصطلاحاً ولتاژهای خط به خط (خط) در سر مولد نامند.

۴- V_{AB} ، V_{BC} ، V_{CA} را اصطلاحاً ولتاژهای خط به خط (خط) در سر بار نامند.

۵- I_{aA} ، I_{bB} ، I_{cC} را اصطلاحاً جریانهای خط نامند.



۶- I_{AB} ، I_{BC} ، I_{CA} را « جریانهای فاز در بار نامند.

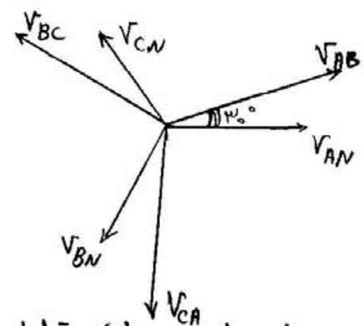
۷- I_{ab} ، I_{bc} ، I_{ca} را « جریانهای فاز در مولد نامند.

در مدارهای سه فاز متعادل:

$$\begin{cases} V_{ab} = \sqrt{3}\angle 30^\circ \cdot V_{an} \\ V_{AB} = \sqrt{3}\angle 30^\circ \cdot V_{AN} \end{cases}$$

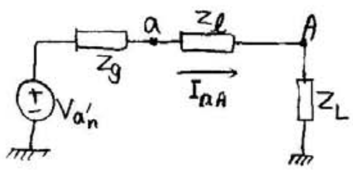
اثبات برداری:

$$V_{AB} = V_{AN} - V_{BN}$$



اثبات ریاضی به عهده شما

الگوریتم مدارهای سه فاز ستاره ستارهٔ متعادل:



۱- مدار تک فاز معادل را رسم می کنیم.

۲- از روی آن I_{aA} را محاسبه می کنیم. $I_{aA} = I_\ell \angle\theta$

۳- I_{bB} ، I_{cC} را محاسبه می کنیم: $I_{bB} = I_\ell \angle\theta - 120^\circ$. $I_{cC} = I_\ell \angle\theta + 120^\circ$

۴- V_{an} ، V_{AN} را محاسبه می کنیم:

$$V_{AN} = Z_L \cdot I_{aA}$$

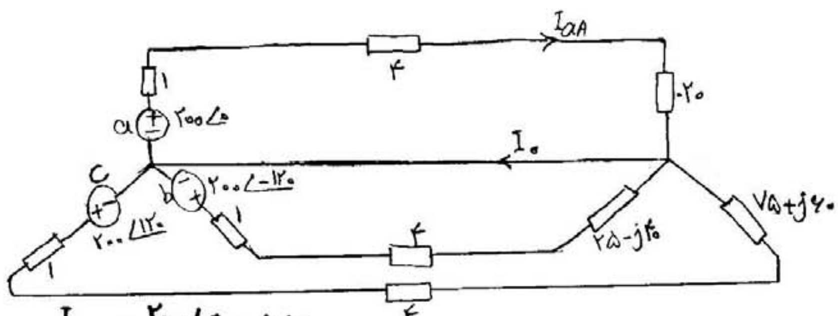
$$V_{an} = (Z_L + Z_\ell) \cdot I_{aA} = V_{a'n} - Z_g \cdot I_{aA}$$

۵- V_{bn} ، V_{BN} ، V_{cn} ، V_{CN} را محاسبه می کنیم

۶- V_{ab} ، V_{AB} را محاسبه می‌کنیم: $V_{AB}=\sqrt{3}\angle 30^\circ \times V_{AN}$ ، $V_{ab}=\sqrt{3}\angle 30^\circ \times V_{an}$

۷- V_{BC} ، V_{CA} ، V_{bc} ، V_{ca} را نیز محاسبه می‌کنیم.

مثال از حالت بار نامتعادل:



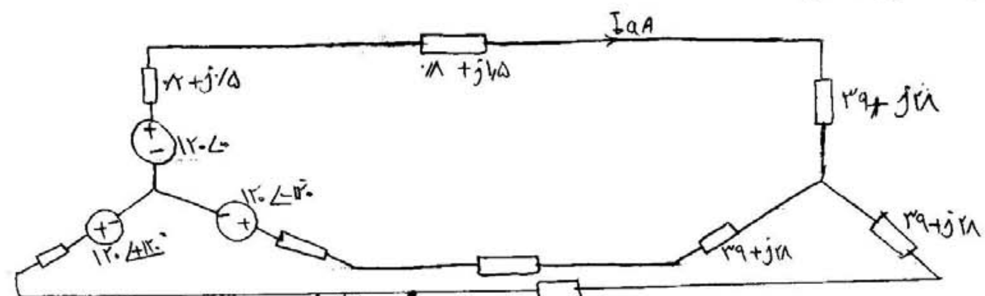
$$I_{aA}=\frac{200\angle 0}{25}=8\angle 0$$

$$I_{bB}=\frac{200\angle -120}{30-j40}=4\angle -173.13^\circ \longrightarrow \quad I_0=I_{bB}+I_{cC}+I_{aA}=9.94\angle -9.79^\circ$$

$$I_{cC}=\frac{200\angle 120}{80+j60}=2\angle 83.13^\circ$$

$V_{AN}=20\times 8\angle 0=160\angle 0$ ، ولتاژ فاز در بار $V_{BN}=(25-j40)(4\angle -173.13^\circ)=$

مثال از حالت بار متعادل:



$$I_{aA}=\frac{120\angle 0}{40+j30}=2.4\angle -36.87^\circ$$

$$I_{bB}=2.4\angle -156.87^\circ$$

$$I_{cC}=2.4\angle 83.13^\circ$$

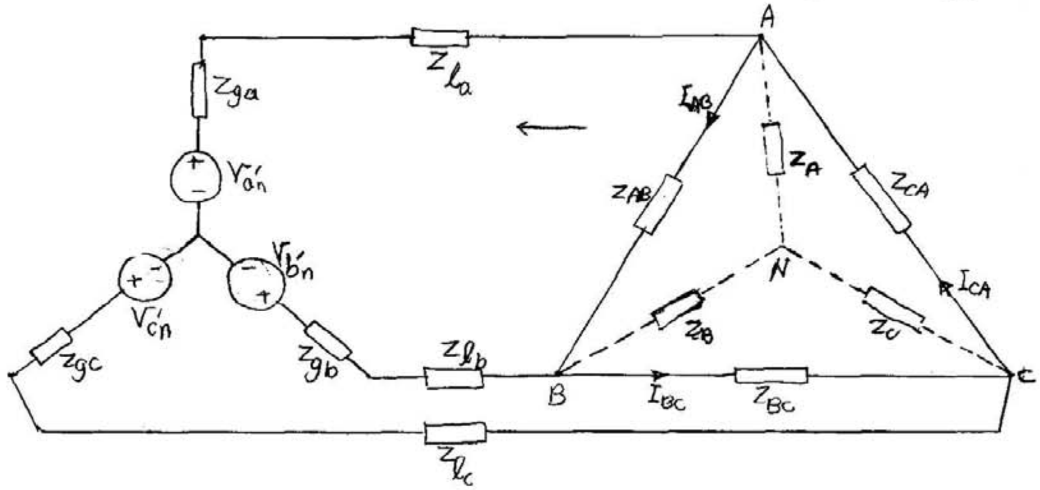
$V_{AN}=(39+j28)\times 2.4\angle -36.87^\circ=115.22\angle -1.19^\circ$ ،

$V_{BN}=115.22\angle -121.19^\circ$ ، $V_{CN}=115.22\angle 118.81^\circ$

$$\rightarrow \quad V_{AB} = \sqrt{3}\angle 30^\circ (115/22 \angle -1/19^\circ) = 199/58 \angle 28/81^\circ$$

$$\rightarrow \quad V_{BC} = 199/58 \angle -91/19^\circ \quad , \quad V_{CA} = 199/58 \angle 148/81^\circ$$

تحلیل مدار سه فاز ستاره - مثلث :



$$Z_A = \frac{Z_{AC} \cdot Z_{AB}}{Z_{AC}+Z_{AB}+Z_{BC}} \quad , \quad Z_B = \frac{Z_{BC} \cdot Z_{BA}}{Z_{AC}+Z_{AB}+Z_{BC}} \quad , \quad Z_C = \frac{Z_{AC} \cdot Z_{BC}}{Z_{AC}+Z_{AB}+Z_{BC}}$$

با این تبدیل در واقع مدار به یک مدار ستاره ستاره تبدیل می شود و از همان طریق حل می شود.

نکته : در این حالت علاوه بر محاسبهٔ ولتاژهای خط در بار، ولتاژهای فاز در بار، ولتاژهای خط در مولد ، ولتاژهای فاز در مولد و جریانهای خط باید جریان های فاز در بار I_{AB}، I_{BC} ، I_{CA} را نیز محاسبه کنیم.

نحوهٔ محاسبهٔ جریانهای فاز در بار در اتصال ستاره مثلث :

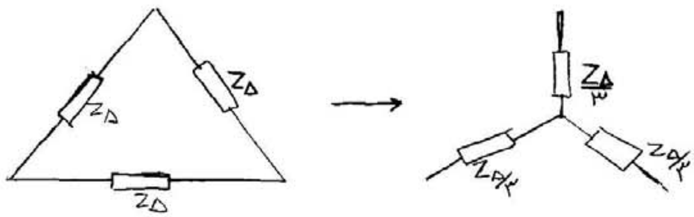
الف - بار نامتعادل :

$$I_{AB} = \frac{V_{AB}}{Z_{AB}} \quad , \quad I_{BC} = \frac{V_{BC}}{Z_{BC}} \quad , \quad I_{CA} = \frac{V_{CA}}{Z_{CA}}$$

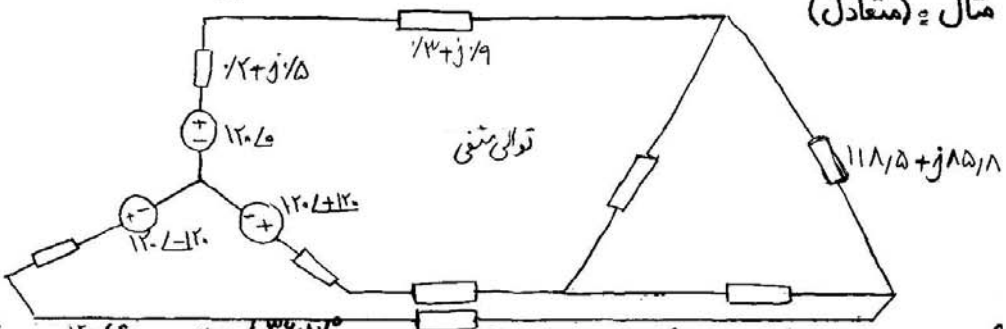
ب ـ بار متعادل : $I_{AB}=\frac{1}{\sqrt{3}}\angle 30^\circ\, I_{aA}$

به عنوان تمرین ثابت کنید اگر $I_{AB}=I_p\angle\theta$ آن گاه : $I_{BC}=I_p\angle\theta-120^\circ$, $I_{CA}=I_p\angle\theta+120^\circ$

نکته : در بار متعادل



مثال : (متعادل)



$I_{aA}=\frac{120\angle 0}{40+j30}=2.4\angle -36.87^\circ$, $I_{bB}=2.4\angle 83.13^\circ$, $I_{cC}=2.4\angle -156.87^\circ$

$V_{AN}=(39.5+j28.6)(2.4\angle -36.87^\circ)=117\angle -0.94^\circ \longrightarrow V_{BN}=117\angle 119.06^\circ$

$V_{CN}=117\angle -120.94^\circ$

$V_{an}=118.9\angle -0.33^\circ \rightarrow V_{bn}=118.9\angle 119.68^\circ$

$V_{cn}=118.9\angle -120.32^\circ$

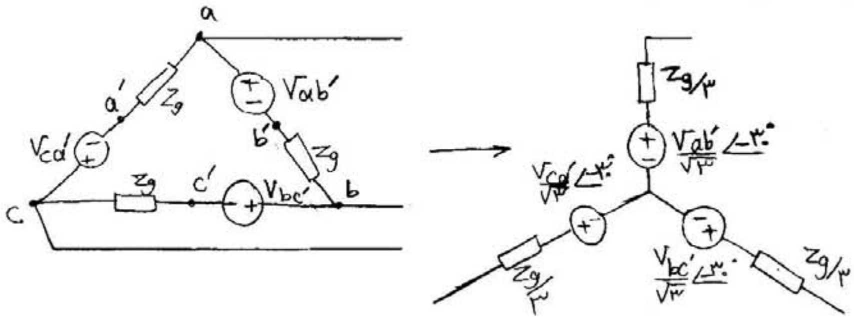
$V_{AB}=\sqrt{3}\angle -30^\circ\, V_{AN}=202.72\angle -30.94^\circ$, به همین ترتیب : $V_{BC}=202.72\angle 89.06^\circ$

$V_{CA}=202.72\angle -150.94^\circ$

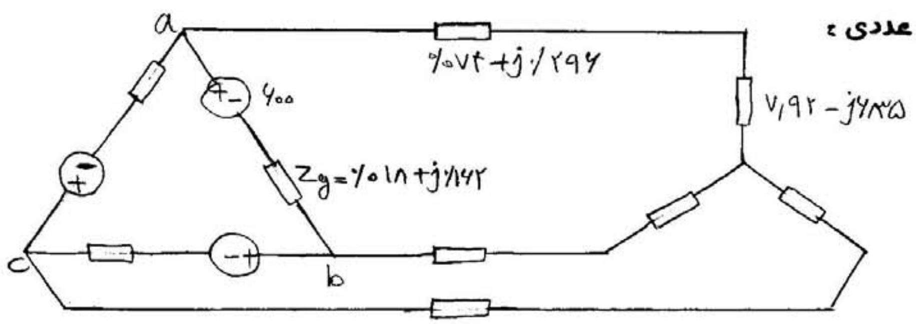
برای محاسبهٔ I_{AB} از یکی از دو روش زیر استفاده می کنیم :

$$I_{AB}=\begin{cases}\frac{V_{AB}}{Z_{AB}} & \text{یا}\\ \frac{1}{\sqrt{3}}\angle -30^\circ \cdot I_{aA}\end{cases}$$

تحلیل مدارهای سه فاز مثلث ستاره و مثلث مثلث:



مثال عددی:



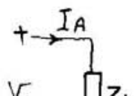
$$I_{aA} = \frac{۳۴۶,۴۱ \angle +۳۰^\circ}{۸ - j۶} = ۳۴,۶ \angle ۶۶,۸۷^\circ$$

جریانهای I_{ba} ، I_{ac} ، I_{cb} را اصطلاحاً جریانهای فاز در مولد نامند.

توالی منفی

$$I_{ba} = \frac{1}{\sqrt{3}} \angle -۳۰^\circ \; I_{aA}$$

توان در مدارهای سه فاز:



۱- در مدار تک فاز   در حوزه فازبردار V_A, I_A و مقدار موثر

$$\longrightarrow \quad S = P + jQ = V_A I_A^* \quad , \quad P = |V_A||I_A| \cos(\theta_v - \theta_i)$$

$$Q = |V_A||I_A| \sin(\theta_v - \theta_i)$$

۲- در مدارهای سه فاز متعادل

الف- با معلوم بودن ولتاژ و جریان فاز a و ترتیب، می توان ولتاژ و جریان فازهای b و c را محاسبه کرد.

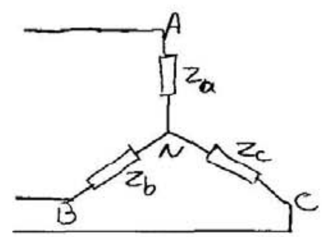
ب- اندازهٔ ولتاژ خط $\sqrt{3}$ برابر اندازهٔ ولتاژ فاز است و زاویهٔ آن $30° \pm$ متفاوت است.

ج- در حالت بار مثلث اندازهٔ جریان خط $\sqrt{3}$ برابر جریان فاز است و زاویهٔ آن $\pm 30°$ متفاوت است.

بحث توان در مدار سه فاز به دو قسمت تقسیم می شود: ۱- محاسبهٔ توان ۲- اندازه گیری توان

محاسبهٔ توان دو حالت متعادل و نامتعادل دارد که هر کدام ستاره یا مثلث می توانند باشند.

محاسبه توان در مدار سه فاز ستاره نامتعادل:

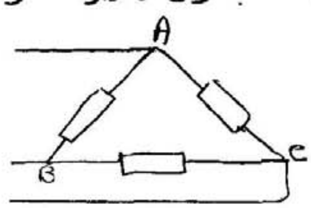


$$S_{\text{کل}} = V_{an} \cdot I_{aA}^{*} + V_{bn} \cdot I_{bB}^{*} + V_{cn} \cdot I_{cC}^{*}$$

$$\begin{aligned} P = &|V_{AN}||I_{aA}|\cos(\theta_{v_A} - \theta_{i_A}) \\ &+ |V_{BN}||I_{bB}|\cos(\theta_{v_B} - \theta_{i_B}) \\ &+ |V_{CN}||I_{cC}|\cos(\theta_{v_C} - \theta_{i_C}) \end{aligned}$$

$$Q = |V_{AN}||I_{aA}|\sin(\theta_{v_A} - \theta_{i_A}) + |V_{BN}||I_{bB}|\sin(\theta_{v_B} - \theta_{i_B}) + |V_{CN}||I_{cN}|\sin(\theta_{v_C} - \theta_{i_C})$$

محاسبهٔ توان در مدار سه فاز مثلث نامتعادل:



$$S_{\text{کل}} = V_{AB} \cdot I_{AB}^{*} + V_{BC} \cdot I_{BC}^{*} + V_{CA} \cdot I_{CA}^{*}$$

$$\begin{aligned} P_{\text{کل}} = &|V_{AB}||I_{AB}|\cos(\quad_{AB} - \theta_{i_{AB}}) \\ &+ |V_{BC}||I_{BC}|\cos(\theta_{v_{BC}} - \theta_{i_{BC}}) \\ &+ |V_{CA}||I_{CA}|\cos(\theta_{v_{CA}} - \theta_{i_{CA}}) \end{aligned}$$

$$Q_{\text{کل}}=|V_{AB}||I_{AB}|\sin(\theta_{v_{AB}}-\theta_{i_{AB}})+|V_{BC}||I_{BC}|\sin(\theta_{v_{BC}}-\theta_{i_{BC}})+|V_{CA}||I_{CA}|\sin(\theta_{v_{CA}}-\theta_{i_{CA}})$$

محاسبه توان در بار ستارهٔ متعادل:

$$\longrightarrow \quad |V_{AN}|=|V_{BN}|=|V_{CN}|=V_\varphi$$
$$|I_{aA}|=|I_{bB}|=|I_{cC}|=I_\varphi$$
$$\theta_{v_A}-\theta_{i_A}=\theta_{v_B}-\theta_{i_B}=\theta_{v_C}-\theta_{i_C}=\theta_\varphi$$

$$\longrightarrow \begin{cases} P_T=3V_\varphi . i_\varphi \cos\theta_\varphi \\ Q_T=3V_\varphi . i_\varphi \sin\theta_\varphi \\ S_T=3V_\varphi . I_\varphi^* \end{cases}$$

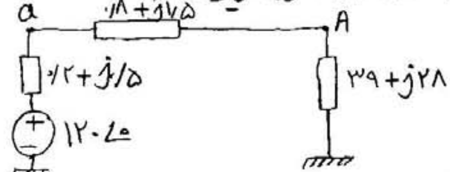
در بار ستاره:

$$i_\varphi=i_l \quad , \quad V_l=\sqrt{3}\,V_\varphi$$

$$\begin{cases} P_T=\sqrt{3}.V_l . i_l \cos\theta_\varphi \\ Q_T=\sqrt{3}.V_l . i_l \sin\theta_\varphi \\ S_T=\sqrt{3}\,V_l . I_l \underline{/\theta_\varphi} \end{cases}$$

تمرین: ثابت کنید در حالت مثلث متعادل نیز همین روابط برقرار است.

مثال: مدار سه فازی داریم که مدار تک فاز معادل آن به صورت زیر است.



مطلوبست محاسبه توان مصرفی بار، خط، مولد و همچنین تحقیق اصل بقای انرژی

$$I_{aA}=۲/۴\underline{/-۳۶/۸۷^\circ}$$

$$,\ V_{AN}=۱۱۵/۲۲\underline{/-۱/۱۹^\circ} \quad , \quad V_{AB}=۱۹۹/۵۸\underline{/\quad}$$

www.PowerEn.ir

$P_{\text{بار}} = ۳\times(۱۱۵,۲۲)(۲,۴)\cos[۳۵,۶۸^\circ]$

$= \sqrt{۳}\,(۱۹۹,۵۸)(۲,۴)\cos[۳۵,۶۸^\circ] = ۲۲۴,۶۴$

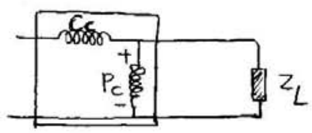
$P_{\text{خط}} = ۳(۰/۸)(۲,۴)^۲ = ۱۳,۸۲۴$, $P_{\text{ژنراتور}} = ۳(۰/۲)(۲,۴)^۲ = ۳,۴۵۶$

$\longrightarrow P_{\text{مصرفی کل}} = ۶۹۱,۲$ و به همین ترتیب : $Q_{\text{کل}} = ۵۱۸,۴$

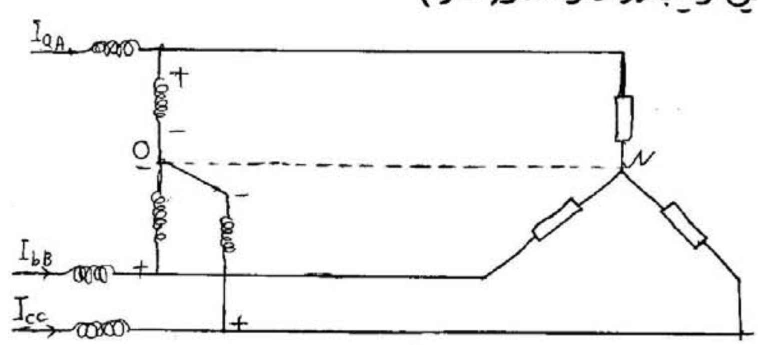
$S_{\text{مولد}} = -۱۲۰\angle ۰ \times ۲,۴\angle ۳۶,۸۷^\circ = -۶۹۱,۲ - j۵۱۸,۴$

اندازه گیری توان در مدار سه فاز با واتمتر :

در مدار تک فاز



همین ترکیب در مدار سه فاز (ستاره)



$S = V_{AN}\cdot I_{aA}^{*} + V_{BN}\cdot I_{bB}^{*} + V_{CN}\cdot I_{cC}^{*}$

چند نکته جالب :

۱- نقطه O به هر نقطه ای وصل شود تفاوتی در قرائت واتمترها نخواهد داشت (در مدار سه سیم)

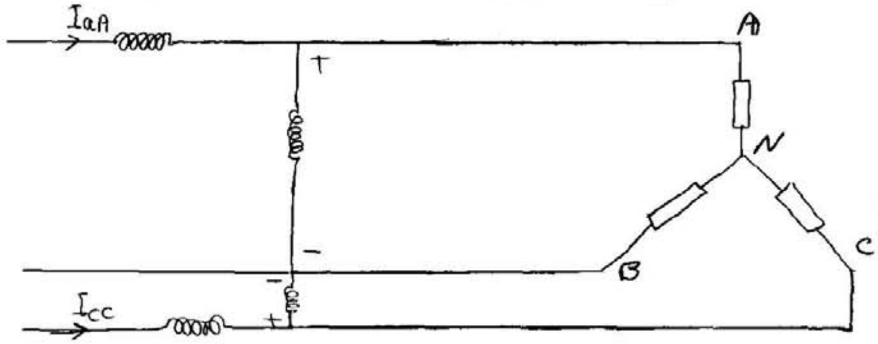
$S' = (V_{AN} - V_0) I_{aA}^{*} + (V_{BN} - V_0) I_{bB}^{*} + (V_{CN} - V_0) I_{cC}^{*}$

$$, \; S' = S - V_0 \left[I_{aA}^* + I_{bB}^* + I_{cC}^* \right]$$

چون : $I_{aA} + I_{bB} + I_{cC} = 0$

$$\longrightarrow \; S' = S$$

۲- درمدار سه فاز (سه سیم) می‌توان با دو واتمتر توان کل را قرائت کرد.



$$V_0 = V_{BN} \;\longrightarrow\; S' = S = (V_{AN} - V_{BN}) \cdot I_{aA}^* + (V_{CN} - V_{BN}) \cdot I_{cC}^*$$

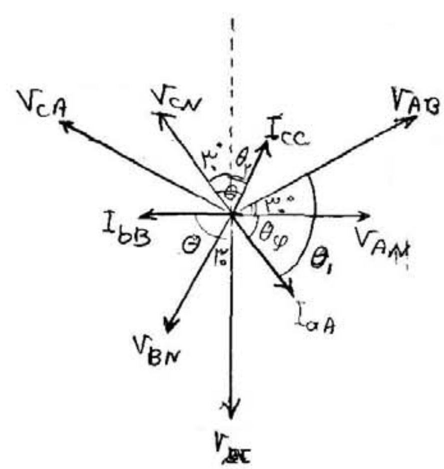
$$\longrightarrow \; S = V_{AB} \cdot I_{aA}^* + V_{CB} \cdot I_{bB}^*$$

قرائت توان درمدار سه فاز متعادل با دو واتمتر :

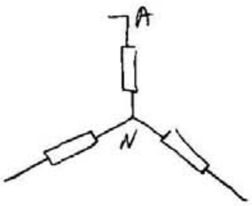
$$W_1 = V_l \cdot i_l \cos(\theta\varphi + 30^\circ)$$

$$W_2 = V_l \cdot i_l \cos(\theta\varphi - 30^\circ)$$

با دقت درشکل پی به نحوهٔ اثبات می‌برید.



$V_{AN} = 120\angle 0$



مثال: قرائت واتمترهای W_1 و W_2 را در حالتهای زیر محاسبه کنید:

۱- $Z_L = 8 + j6$ ۲- $Z_L = 8 - j6$

۳- $Z_L = 5 + j5\sqrt{3}$ ۴- $Z_L = 10\angle -76^\circ$

حل ۱:

$\theta_\varphi = 36.87^\circ$

$v_\varphi = 120^\circ$

$V_l = 120\sqrt{3}$

$$\longrightarrow I = \frac{120\angle 0}{10\angle 36.87^\circ} = \underbrace{12}_{i_\varphi = i_l}\angle -36.87^\circ$$

① $W_1 = 120\sqrt{3} \times 12\cos[36.87^\circ + 30^\circ] = 976$

$W_2 = 120\sqrt{3} \times 12\cos[36.87^\circ - 30^\circ] = 2476$

به همین ترتیب:

② $W_1 =$ ③ $W_1 =$ ④ $W_1 =$

$W_2 =$ $W_2 =$ $W_2 =$

نکته: در قرائت واتمترها در مدار سه فاز متعادل

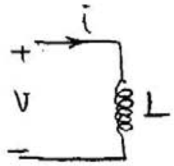
۱- اگر زاویه بار از 60° کوچکتر باشد ($\cos\theta_\varphi > 0/5$) باشد هر دو واتمتر وات مثبت قرائت می‌کند.

۲- اگر زاویه بار برابر 60° باشد یکی از دو واتمتر صفر قرائت می‌کند.

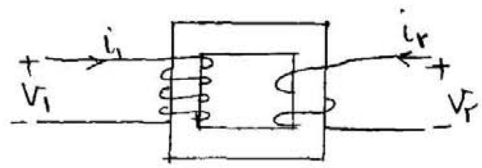
۳- اگر زاویه بار از 60° بزرگتر باشد یکی از دو واتمتر منفی قرائت می‌کند.

ترانسفورماتور ایده‌آل:

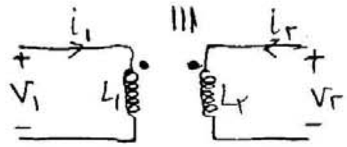
یادآوری تزویج مغناطیسی



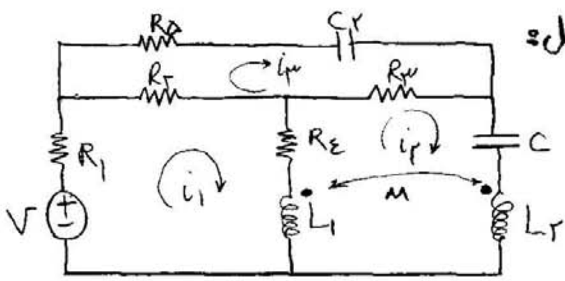
$$V = L\frac{di}{dt}$$



$$V_1 = L_1\frac{di_1}{dt} + M\frac{di_2}{dt}$$
$$V_2 = L_2\frac{di_2}{dt} + M\frac{di_1}{dt}$$



مثال از نوشتن معادلات انتگرال دیفرانسیل:

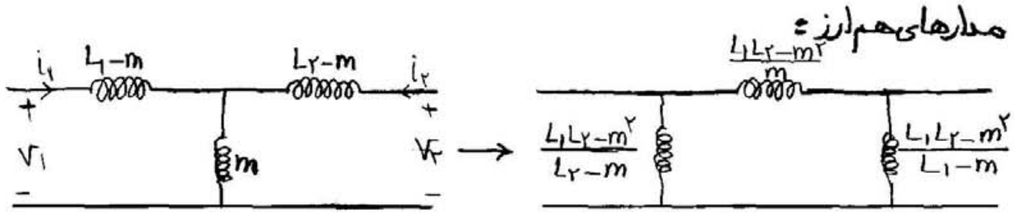


$$V = R_1 i_1 + R_2(i_1 - i_3) + R_4(i_1 - i_2) + L_1\frac{d}{dt}(i_1 - i_2) + M\frac{di_2}{dt}$$

$$0 = L_1\frac{d}{dt}(i_2 - i_1) + R_4(i_2 - i_1) + R_3(i_2 - i_3) + \frac{1}{C_1}\int i_2\,dt$$
$$+ L_2\frac{di_2}{dt} - M\frac{di_2}{dt} - M\frac{d}{dt}(i_2 - i_1)$$

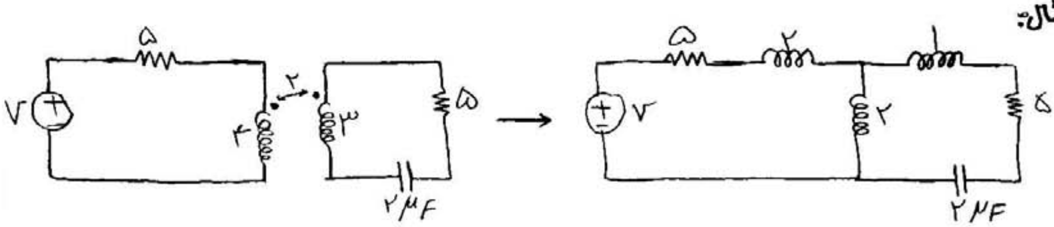
$$0 = R_5 i_3 + \frac{1}{C_2}\int i_3\,dt + R_3(i_3 - i_2) + R_2(i_3 - i_1)$$

مدارهای هم‌ارز:



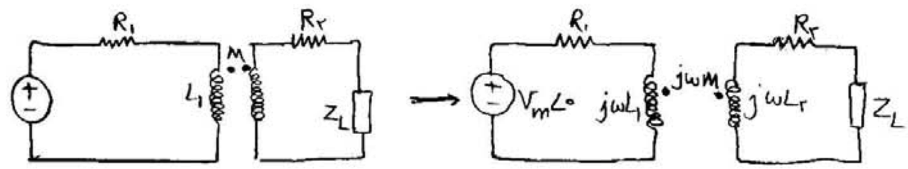
$$V_1 = (L_1 - m)\frac{di_1}{dt} + m\frac{d(i_1 + i_2)}{dt} = L_1\frac{di_1}{dt} + m\frac{di_2}{dt}$$

مثال:



ترانسفورماتور:

شامل الف- غیرایده آل . ب- ایده آل

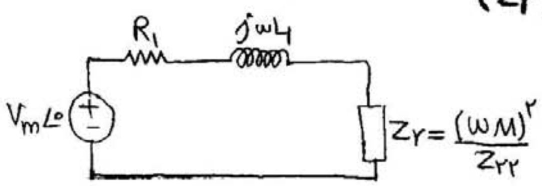


در تحلیل مدارهای شامل ترانسفورماتور به چند فرم می توان عمل کرد:

۱- روش کلی:

$$\begin{cases} V_m\angle 0 = R_1 I_1 + j\omega L_1 I_1 - j\omega M I_2 \\ 0 = j\omega L I_2 + R_2 I_2 + Z_L \cdot I_2 - j\omega M I_1 \end{cases}$$

۲- استفاده از فرمول امپدانس بازگشتی (Z_r)

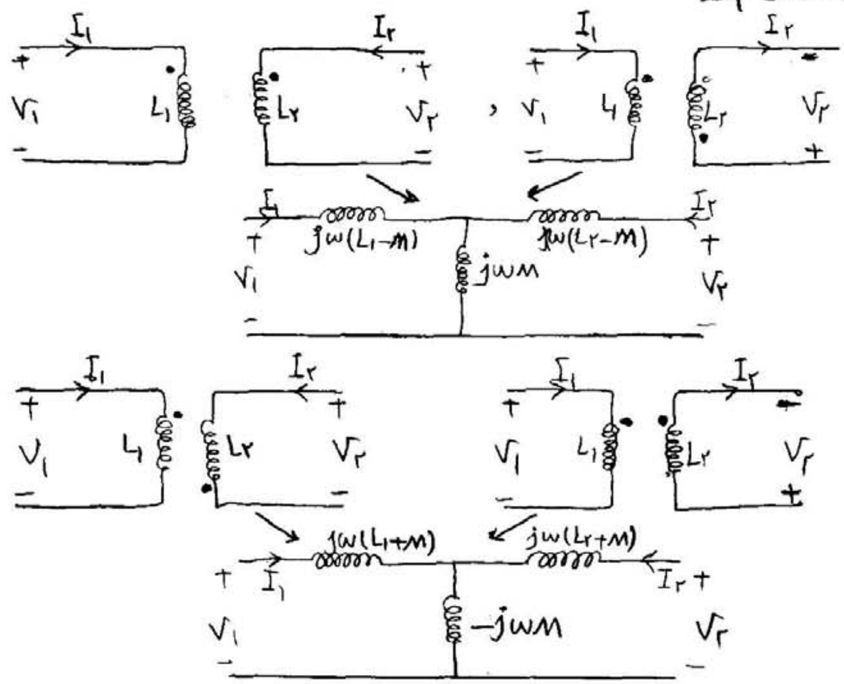


$$Z_r = \frac{(\omega M)^2}{Z_{22}} \quad , \quad Z_{22} = R_2 + j\omega L_2 + Z_L$$

۳- استفاده از مدارهای هم ارز

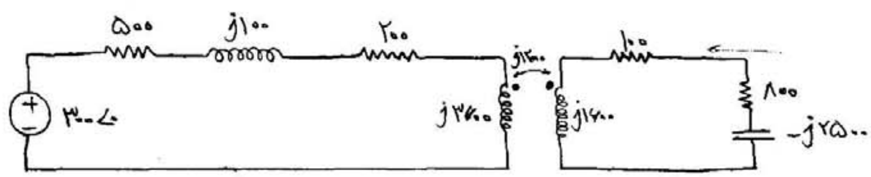
الف- استفاده از منابع وابسته

ب - استفاده از هم‌ارز T :

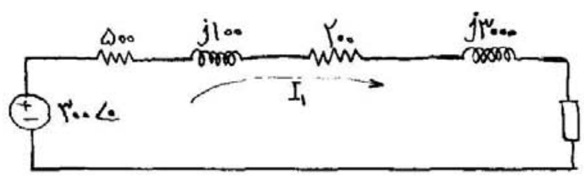


ج- هم‌ارز π : از روی تبدیل ستاره - مثلث از قسمت بالا بوجود می‌آید.

مثال عددی:

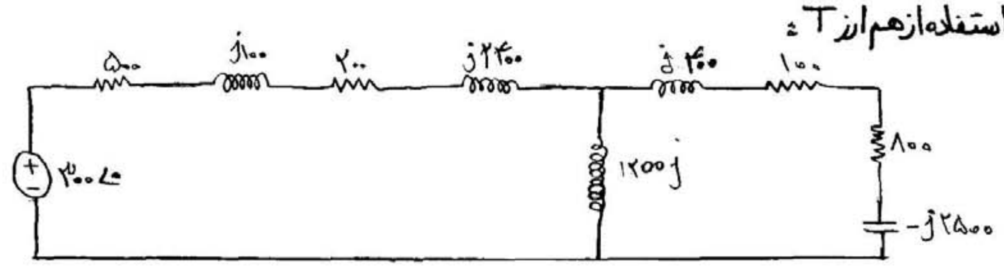


استفاده از فرمول Z_r :



$$Z_r = \frac{(1200)^2}{900 - j900} = 800 + j800$$

استفاده از هم‌ارز T :



ترانسفورماتور ایده آل:

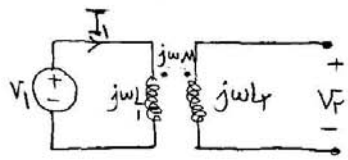
فرضیات: ۱- ترانسفورماتور تلفات ندارد ($R_1=R_2=0$)

۲- $L_1=L_2=\infty$

۳- ضریب تزویج برابر ۱ است. $K=\frac{M}{\sqrt{L_1L_2}}=1 \longrightarrow M=\sqrt{L_1L_2}$

ثابت می‌شود با شرایط فوق (در ترانس ایده آل): $\frac{V_1}{V_2}=\frac{N_1}{N_2}=\frac{I_2}{I_1}$

$$\begin{cases} V_2=j\omega M I_1 \\ V_1=j\omega L_1 I_1 \end{cases} \longrightarrow \frac{V_2}{V_1}=\frac{M}{L_1}=\frac{\sqrt{L_1L_2}}{L_1}$$

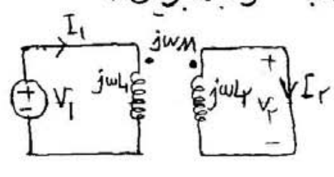


$$\longrightarrow \frac{V_2}{V_1}=\sqrt{\frac{L_2}{L_1}}$$

$$\begin{cases} L_1=P N_1^2 \\ L_2=P N_2^2 \end{cases} \longrightarrow \frac{V_2}{V_1}=\frac{N_2}{N_1}$$

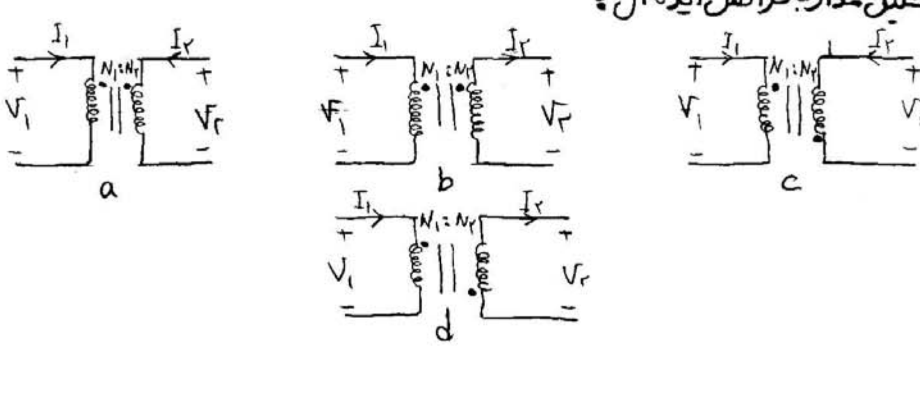
برای اثبات رابطهٔ جریان:

$$V_2=j\omega M I_1 - j\omega L_2 I_2=0$$



$$\frac{I_1}{I_2}=\frac{L_2}{M}=\frac{L_2}{\sqrt{L_1L_2}}=\sqrt{\frac{L_2}{L_1}}=\frac{N_2}{N_1}$$

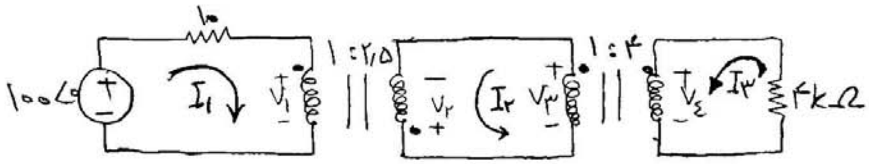
تحلیل مدار با ترانس ایده آل:



a) $\frac{V_1}{V_2} = \frac{N_1}{N_2}$, $\frac{I_1}{I_2} = -\frac{N_2}{N_1}$ b) $\frac{V_1}{V_2} = \frac{N_1}{N_2}$, $\frac{I_1}{I_2} = \frac{N_2}{N_1}$

c) $\frac{V_1}{V_2} = -\frac{N_1}{N_2}$, $\frac{I_1}{I_2} = +\frac{N_2}{N_1}$ d) $\frac{V_1}{I_2} = -\frac{N_1}{N_2}$, $\frac{I_1}{I_2} = -\frac{N_2}{N_1}$

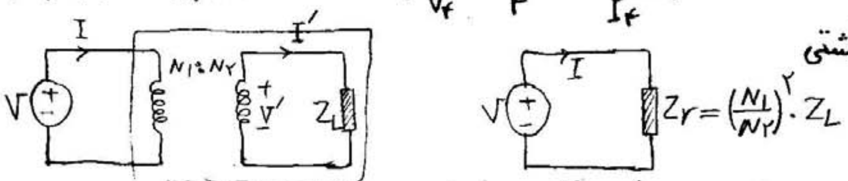
مثال:



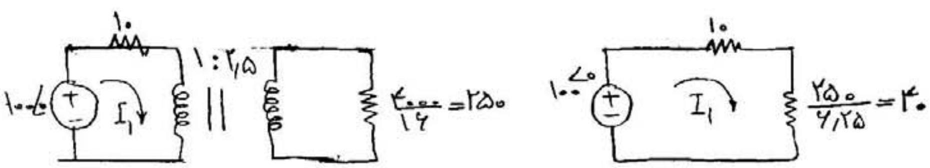
الف: راه کلی

$$\begin{cases} 100\angle 0 = 10 I_1 + V_1 \\ V_2 + V_3 = 0 \\ V_4 + 4000\, I_3 = 0 \end{cases} , \quad \begin{cases} \frac{V_1}{V_2} = \frac{1}{2.5} , & \frac{I_1}{I_2} = 2.5 \\ \frac{V_3}{V_4} = \frac{1}{4} , & \frac{I_3}{I_4} = 4 \end{cases}$$

ب- امپدانس برگشتی

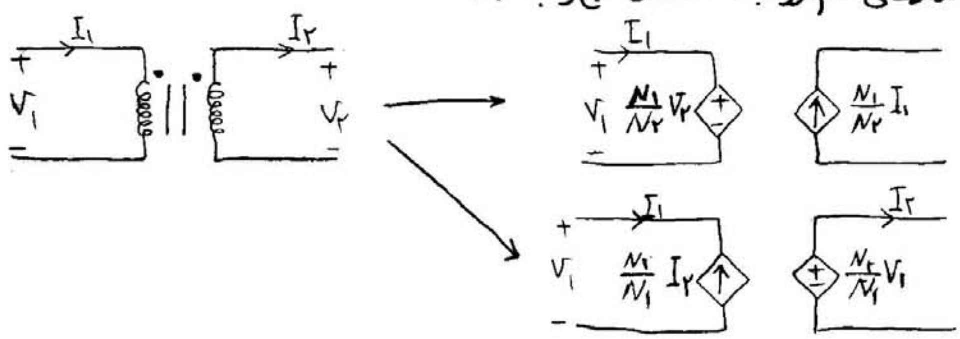


$$Z_r = \frac{V}{I} = \frac{\frac{N_1}{N_2} \cdot V'}{\frac{N_2}{N_1} \cdot I'} = \left(\frac{N_1}{N_2}\right)^2 \cdot Z_L$$

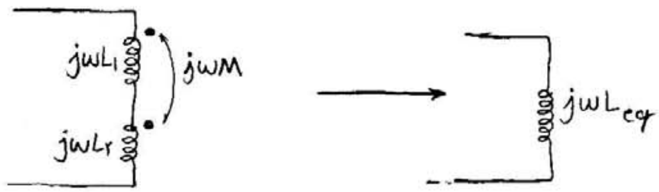


$$\rightarrow \quad I_1 = 2\angle 0 \quad , \quad V_1 = 80\angle 0$$

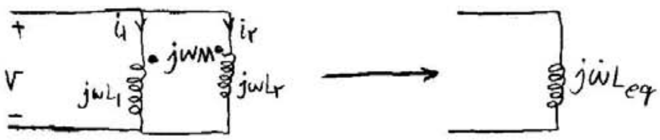
ج- مدارهای همارز با استفاده از منابع وابسته:



امپدانس معادل برای سلفهای سری و موازی تزویج شده :

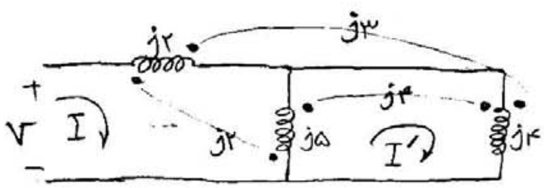


$$L_{eq}=L_1+L_2\pm 2M$$



$$\frac{1}{L_{eq}}=\frac{1}{L_1}+\frac{1}{L_2}\mp\frac{2}{M}$$

حالت سری - موازی :



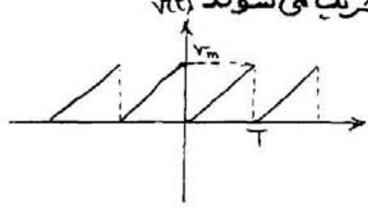
$$\begin{cases} V = j2\times I + j5(I-I') \mp j3I' - j2(I-I') - j2I + j4I' \\ 0 = j5(I'-I) + j4I' + j2I - j4I' - j3I - j5(I'-I) \end{cases}$$

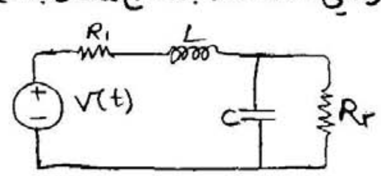
در دو معادله بالا I' را حذف کرده و Z_{eq} را از رابطه زیر بدست می‌آوریم :

$$Z_{eq}=\frac{V}{I}$$

سری فوریه و کاربرد آن در تحلیل مدارهای الکتریکی :

مدارهایی هستند که با منابع متناوب غیرسینوسی تحریک می‌شوند $v(t)$





سری فوریه : اگر تابع $f(t)$ { در مدار منظور $V(t)$ یا $i(t)$ } دارای شرایط زیر باشد

۱- متناوب باشد با دورهٔ تناوب T : $f(t)=f(t+T)$

۲- تک مقدار باشد   ۳- دارای تعداد محدود حداکثر و حداقل در یک دورهٔ تناوب باشد.

۴- دارای تعداد محدود ناپیوستگی در یک دورهٔ تناوب باشد.

۵- $\int_T |f(t)|\,dt < \infty$

در آن صورت می‌توان آن را به صورت یک سری مثلثاتی (سری فوریه) نمایش داد.

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T} \quad , \quad f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\omega_0 t + b_n \sin n\omega_0 t$$

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_T f(t)\,dt \quad , \quad a_n = \frac{2}{T}\int_T f(t)\cos n\omega_0 t\,dt \quad , \quad b_n = \frac{2}{T}\int_T f(t)\sin n\omega_0 t\,dt$$

حالت‌های خاص:

۱- اگر $f(t)$ زوج باشد :

$$a_0 = \frac{2}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} f(t)\,dt \quad , \quad a_n = \frac{4}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} f(t)\cos n\omega_0 t\,dt \quad , \quad b_n = 0$$

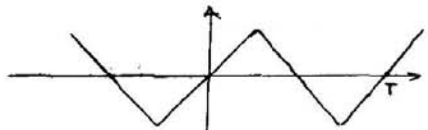
۲- اگر تابع فرد باشد :

$$a_0 = a_n = 0 \quad , \quad b_n = \frac{4}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} f(t)\sin n\omega_0 t\,dt$$

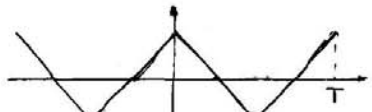
۳- اگر تابع دارای تقارن نیم موجی باشد یعنی : $f(t) = -f(t-\frac{T}{2})$

در آن صورت a_n و b_n به ازای n های زوج صفر هستند.

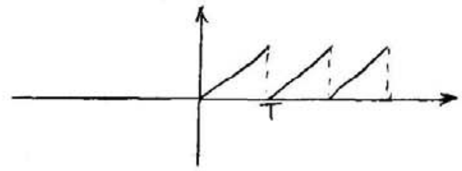
مثال:



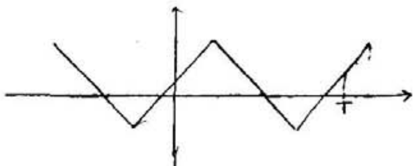
فرد و دارای تقارن نیم موجی



زوج و دارای تقارن نیم موجی

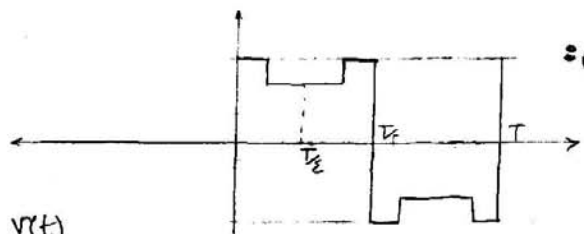


دارای تقارن نیم موجی نیست.

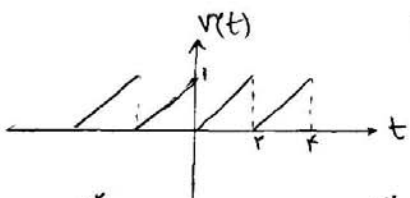


نه زوج و نه فرد و دارای تقارن نیم موجی

تقارن ربع موجی:



مثال: موج دندان اره‌ای



$$\omega_0 = \frac{2\pi}{2} = \pi$$

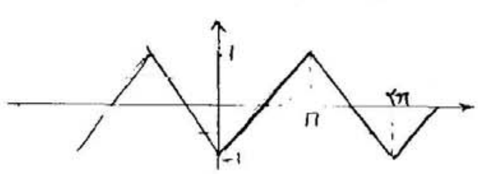
$$a_0 = \frac{1}{T}\int_0^2 \frac{1}{2} t \, dt = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}t^2\Big|_0^2 = \frac{1}{2}$$

$$a_n = \frac{2}{2}\int_0^2 \frac{1}{2} t \cos n\pi t \, dt = \frac{1}{2}\left[\frac{t}{n\pi}\sin n\pi t + \frac{1}{n^2\pi^2}\cos n\pi t\right]_0^2 = 0$$

$$b_n = \frac{2}{2}\int_0^2 \frac{1}{2} t \sin n\pi t \, dt = \frac{1}{2}\left[\frac{-t}{n\pi}\cos n\pi t + \frac{1}{n^2\pi^2}\sin n\pi t\right]_0^2 = -\frac{1}{n\pi}$$

$$\longrightarrow \quad v(t) = \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin n\pi t$$

مثال:



$$\omega_0 = \frac{2\pi}{2\pi} = 1$$

$$a_0 = 0 \quad , \quad b_n = 0$$

$$a_n = \frac{4}{2\pi}\int_0^{\pi}\frac{2}{\pi}\left(t-\frac{\pi}{2}\right)\cos nt \, dt = \frac{4}{n^2\pi^2}\left[-1+\cos n\pi\right]$$

$$\longrightarrow \quad i(t) = \frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1+\cos n\pi)}{n^2}\cos nt = -\frac{8}{\pi^2}\sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty}\frac{1}{n^2}\cos nt$$

فرم مختلط سری فوریه:

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n e^{jn\omega_0 t}$$

$$C_n = \frac{1}{T}\int_T f(t)e^{-jn\omega_0 t}dt \quad , \quad \begin{cases} C_n = \frac{a_n}{2} + j\frac{-b_n}{2} = |C_n|e^{-j\theta_n} \\ |C_n| = \frac{1}{2}\sqrt{a_n^2+b_n^2} \ , \ \theta_n = \operatorname{arctg}\frac{b_n}{a_n} \end{cases}$$

فرم دیگر سری مختلط فوریه:

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |C_n| \cdot e^{j(n\omega_0 t-\theta_n)}$$

می دانیم که

$$|C_1|e^{j(\omega_0 t-\theta_1)} + |C_1|e^{-j(\omega_0 t-\theta_1)} = 2|C_1|\cos(\omega_0 t-\theta_1)$$

$$\xrightarrow{\text{فرم کسینوسی}} f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n\cos(n\omega_0 t-\theta_n) \quad , \quad \begin{cases} A_n = 2|C_n| = \sqrt{a_n^2+b_n^2} \\ \theta_n = \operatorname{arctg}\frac{b_n}{a_n} \end{cases}$$

در مثال موج دندان اره ای:

$$f(t) = \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin n\pi t$$

$$a_n = 0 \ , \ b_n = \frac{-1}{n\pi} \longrightarrow A_n = \sqrt{a_n^2+b_n^2} = \frac{1}{n\pi} \ , \ |C_n| = \frac{1}{2n\pi}$$

$$, \ \theta_n = \operatorname{Arctg}\left(\frac{-1/n\pi}{0}\right) = -\frac{\pi}{2}$$

$$f(t) = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\pi}\cos(n\pi t + 90^\circ)$$

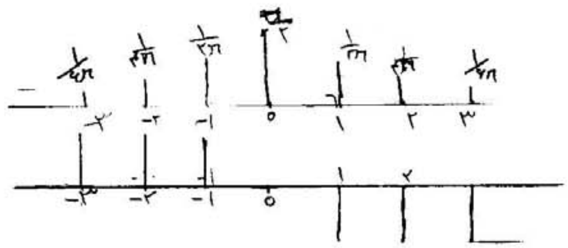
یا

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{1}{2n\pi}e^{j(n\pi t+90^\circ)} \quad , \ n\neq 0$$

$$f(t) = \frac{1}{2} + \sum_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{j}{2n\pi}e^{jn\pi} \quad , \ n\neq 0$$

چند بحث جانبی در مورد سری فوریه:

۱- طیف دامنه فاز   ۲- قضیه سری محدود فوریه   ۳- خواص سری فوریه.



طیف دامنه : $|C_n|$

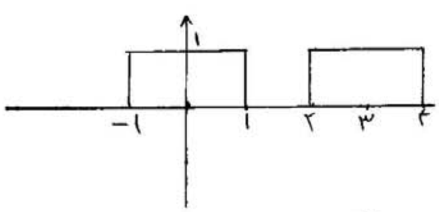
طیف فاز : θ_n

کاربردهای طیف دامنه :

۱- مقایسهٔ پاسخ فرکانسی مدار با طیف دامنهٔ ورودی ایده مناسبی از خروجی مدار می‌دهد.

۲- در استفاده از سری محدود فوریه کمک زیادی می‌کند.

سری محدود فوریه : $$f_N(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{N} A_n \cos(n\omega_0 t - \theta_n)$$



مثال : فرم مختلط سری فوریهٔ تابع مقابل را محاسبه کنید. و فرم های حقیقی و کسینوسی آن را بنویسید و طیف دامنه و فاز آن را رسم کنید.

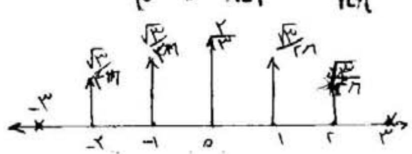
$$C_n = \frac{1}{3}\int_{-1}^{1} e^{-jn\frac{2\pi}{3}t}\,dt = \begin{cases} \frac{2}{3} & n=0 \\ \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{-jn\frac{2\pi}{3}} e^{-jn\frac{2\pi}{3}t}\Big|_{-1}^{1} & n\neq 0 \end{cases}$$

$$\longrightarrow C_n\,(n\neq 0) = \frac{1}{2jn\pi}\left[e^{-jn\frac{2\pi}{3}} - e^{+jn\frac{2\pi}{3}}\right] = \frac{\sin\frac{2n\pi}{3}}{n\pi}$$

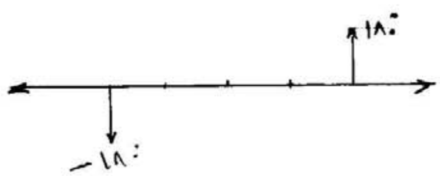
فرم حقیقی که همان فرم کسینوسی است

$$f(t) = \frac{2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} 2\,\frac{\sin\frac{2n\pi}{3}}{n\pi}\cos\frac{2n\pi}{3}t$$

طیف دامنه و فاز:



$$|C_n| = \left|\frac{\sin\frac{2n\pi}{3}}{n\pi}\right|$$



θ_n

سوال : آیا ضرایب سری فوریه برای سری محدود فوریه بهترین هستند یا خیر؟

$$f_N(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{N} (a_n \cos n\omega_0 t + b_n \sin n\omega_0 t)$$

تابع خطا :
$$e(t) = f(t) - f_N(t) \quad , \quad J = \int e^2(t)\,dt$$

ضرایبی بهترین هستند که به ازای آن ضرایب J حداقل شود .

$$J = \int_T \left[f(t) - \left[a_0 + \sum_{n=1}^{N} a_n \cos n\omega_0 t + b_n \sin n\omega_0 t\right]\right]^2 dt$$

$$\frac{\partial J}{\partial a_0} = 0 \longrightarrow a_0 = \frac{1}{T}\int_T f(t)\,dt$$

$$\frac{\partial J}{\partial a_n} = 0 \longrightarrow a_n = \frac{2}{T}\int_T f(t)\cos n\omega_0 t\,dt$$

$$\frac{\partial J}{\partial b_n} = 0 \longrightarrow b_n = \frac{2}{T}\int_T f(t)\sin n\omega_0 t\,dt$$

خواص سری فوریه :

۱ـ خاصیت خطی بودن :

$$f_1(t) \longleftrightarrow C_n$$
$$f_2(t) \longleftrightarrow C'_n$$
$$\Rightarrow a f_1(t) + b f_2(t) \longleftrightarrow a C_n + b C'_n$$

۲ـ خاصیت تقارن :
$$C_n^* = C_{-n}$$

به عبارت دیگر اگر به جای n ، n- بگذاریم و یا به جای j ، j- بگذاریم جواب یکی است .

تمرین : ثابت کنید طیف دامنه همیشه زوج و طیف فاز همیشه فرد است .

۳ـ خاصیت انتقال :

$$f(t) \longleftrightarrow C_n \quad \longrightarrow \quad f(t-t_0) \longleftrightarrow e^{-jn\omega_0 t_0} \cdot C_n$$

مثال :

$$\frac{\sin\frac{2n\pi}{3}}{n\pi} = \cdot$$

$$f(t) = f'(t-1) \longrightarrow e^{-jn\frac{2\pi}{3}} \cdot \frac{\sin\frac{2n\pi}{3}}{n\pi}$$

۴- قضیهٔ پارسوال .

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\omega_0 t + b_n \sin n\omega_0 t$$

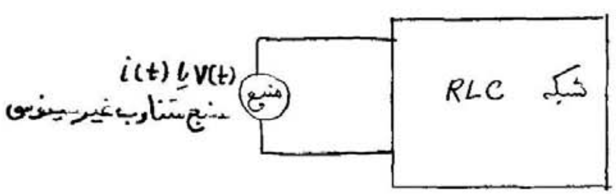
$$\frac{1}{T}\int_T f^2(t)\,dt = a_0^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2)$$

یادآوری :

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos n\omega_0 t + b_n \sin n\omega_0 t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n\omega_0 t - \theta_n)$$

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n e^{jn\omega_0 t} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |C_n| e^{j(n\omega_0 t - \theta_n)}$$

$$, \quad A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \quad , \quad \theta_n = \mathrm{Arctg}\frac{b_n}{a_n} \quad , \quad |C_n| = \frac{1}{2}A_n$$



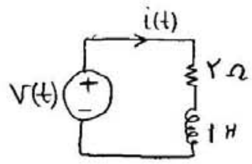
فعلاً غرض ما براین است که دنبال محاسبهٔ جواب خصوصی هستیم . به عبارت دیگر مدار از مدـ

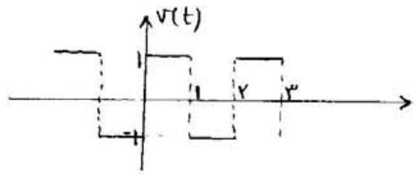
ـت‌ها در همین حالت بوده است.

نکته : اگر کلیدزنی در مدار داشته باشیم تفاوت در این است که یک جواب همگن نیز اضافه می شود که

بحث مفصل این قسمت در بخش تبدیل لاپلاس خواهیم کرد.

مثال: $i(t)=?$





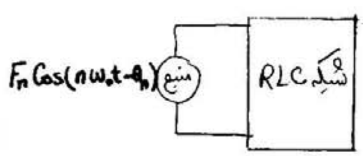
الگوریتم کار

۱- سری فوریه منبع را حساب می کنیم: $f(t)=F_{dc}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos n\omega_0 t+b_n\sin n\omega_0 t)$

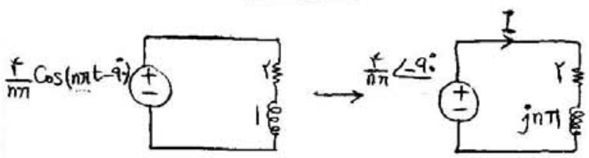
$$f(t)=F_{dc}+\sum_{n=1}^{\infty}F_n\cos(n\omega_0 t-\theta_n)$$

$$\longrightarrow\quad v(t)=\frac{4}{\pi}\sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty}\frac{1}{n}\sin n\pi t=\frac{4}{\pi}\sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty}\frac{1}{n}\cos(n\pi t-90^\circ)$$

۲- منبع را با $V_n(t)$ به فرم زیر جایگزین می کنیم:



۳- مدار را به حوزه فاز بوداری ببریم:



۴- متغیر دلخواه را محاسبه می کنیم: $Y=B_n\angle-\theta'_n$

$$\longrightarrow\quad I=\frac{\frac{4}{n\pi}\angle-90^\circ}{2+jn\pi}=\frac{-j4}{n\pi(2+jn\pi)}=\frac{-j4(2-jn\pi)}{n\pi(4+n^2\pi^2)}=\frac{-4(n\pi+j2)}{n\pi(4+n^2\pi^2)}$$

$$=\frac{-4\sqrt{n^2\pi^2+4}}{n\pi(4+n^2\pi^2)}\angle tg^{-1}\frac{2}{n\pi}$$

$$\longrightarrow\quad i(t)=\sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty}\frac{-4\sqrt{n^2\pi^2+4}}{n\pi(4+n^2\pi^2)}\cos\left(n\pi t+tg^{-1}\frac{2}{n\pi}\right)$$

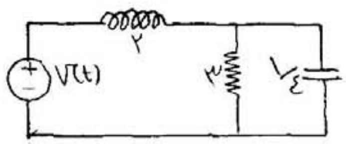
اشکال استفاده از سری فوریه در تحلیل مدارهای الکتریکی این است که پاسخ را به فرم بسته (درحالت کلی) نمی‌توان بدست آورد. به همین دلیل گاهی ترجیح می‌دهیم از سری محدود فوریه استفاده کنیم.

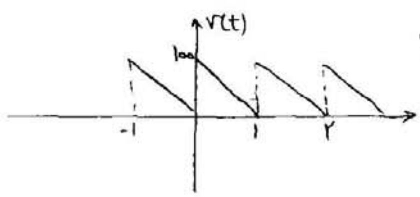
۵ــ جواب مدار به فرم زیر است:

$$y(t)=y_0+\sum_{n=1}^{\infty}B_n\cos(n\omega_0 t-\theta'_n)$$

پاسخ مدار به ازای F_{dc} است.

مثال ۲:

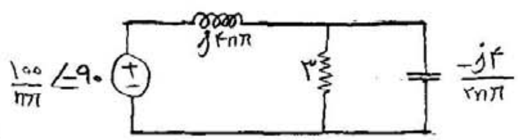




$$\longrightarrow\ V(t)=50+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{100}{n\pi}\sin 2n\pi t=50+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{100}{n\pi}\cos(2n\pi t-90)$$

$$i(t)=\underline{\underline{I_{dc}}}+\sum_{n=1}^{\infty}\underline{\underline{I_n}}\cos(n\pi t-\underline{\underline{\theta_n}})$$

$$I_{dc}=\frac{50}{3}$$



$$I=I_n\angle-\theta'_n=\frac{-j\frac{100}{n\pi}}{j4n\pi+\frac{3\times -j4/2n\pi}{3-\frac{j4}{2\pi}}}=\frac{3n\pi-j2}{j12n^2\pi^2+8n\pi-j6}$$

$$=\frac{\sqrt{9n^2\pi^2+4}}{\sqrt{(12n^2\pi^2-6)^2+(8n\pi)^2}}\angle-\theta'_n$$

$$,\ \theta'_n=tg^{-1}\frac{12n^2\pi^2-6}{8n\pi}-tg^{-1}\frac{2}{3n\pi}$$

مثال ۳: