بسم الله الرحمن الرحیم

جزوه مدار ۲ – قسمت دوم

دانشگاه صنعتی امیر کبیر

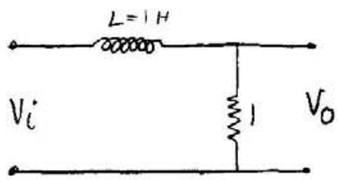
تهیه کننده : سعید دانشگر

ویرایش و تنظیم برای سایت : حامد مظاهری

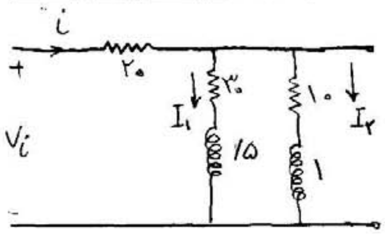
تابع تبدیل :

تعریف : نسبت دو متغیر در یک سیستم (مدار) در حوزهٔ لاپلاس (با فرض اینکه شرایط اولیه صفر است)

مثال :



$$\frac{V_o(S)}{V_I(S)} = \frac{1}{1+S}$$



$$\frac{I}{V_I} = \frac{1}{20 + \frac{(30+0/5S)(0/5+S)}{40+1/5S}} = \frac{30S+800}{S^2+130S+2200}$$

$$\frac{I_1}{I} = \frac{10+S}{40+1/5S}$$

$$\frac{I_1}{V_I} = \frac{I_1}{I} \times \frac{I}{V_I} = \frac{(10+S)(30S+800)}{(40+1/5S)(S^2+130S+2200)}$$

چند تعریف :

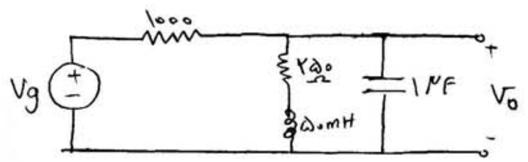
۱- امپدانس : تابع تبدیل ولتاژ به جریان.

۲- ادمیتانس : تابع تبدیل جریان به ولتاژ.

امپدانس یا ادمیتانس ← انتقال Transfer

امپدانس یا ادمیتانس ← نقطهٔ تحریک Driving point

مثال: $\frac{V_o}{V_g}=?$



$$\frac{V_o}{V_g}=\frac{Z_{eq}}{1000+Z_{eq}}\,,\qquad Z_{eq}=\frac{\frac{10^6}{S}(250+0.05S)}{\frac{10^6}{S}+250+0.05S}$$

$$\longrightarrow\ \frac{V_o}{V_g}=\frac{1000(S+5000)}{S^2+6000+25\times10^6}$$

چند تعریف:

۱- صفر: مقداری از s است که تابع تبدیل را صفر می‌کند.

۲- قطب: مقداری از s است که تابع تبدیل را ∞ می‌کند

به عبارت دیگر:

$$X(S)\xrightarrow{\text{ورودی}}\boxed{H(S)}\xrightarrow{\text{خروجی}}Y(S)$$

$$H(S)=\frac{Y(S)}{X(S)}=\frac{N(s)}{D(s)}$$

صورت تابع تبدیل

مخرج تابع تبدیل

صفرهای تابع تبدیل همان ریشه‌های معادلهٔ $N(S)=0$ است و قطبهای تابع تبدیل ریشه‌های

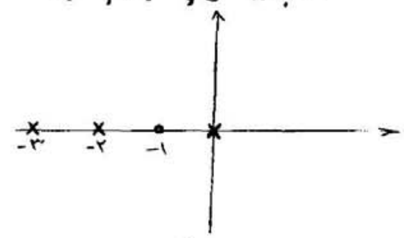
معادلهٔ $D(s)=0$ است.

نکته: عموماً صفر را با (o) و قطب را با (x) در صفحهٔ S نمایش می‌دهند.

مثال: صفر و قطبهای تابع تبدیل زیر را محاسبه نموده و آن را در صفحهٔ S نمایش دهید.

$$H(S)=\frac{S+1}{S(S+2)(S+3)}$$

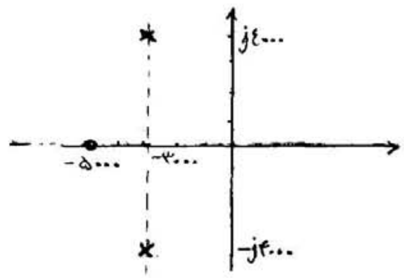
صفر: -1 قطب: $0\,,\,-2\,,\,-4$



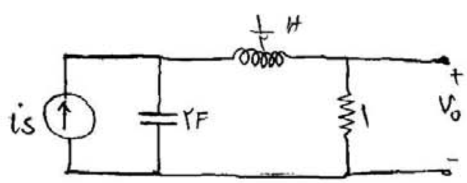
مثال:

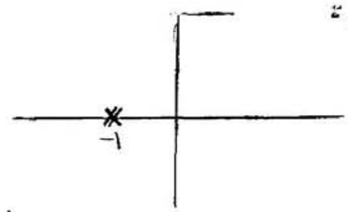
$$H(s)=\frac{1000(s+5000)}{s^2+6000s+25\times10^6}$$

صفر: -5000 قطب: $-3000\pm j4000$



مثال:

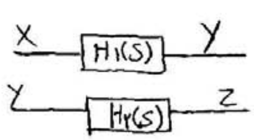




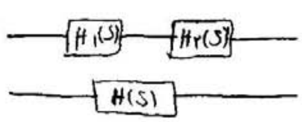
$$\frac{V_o}{I_s}=\frac{\frac{1}{2s}}{\frac{1}{2s}+\frac{1}{2}s+1}=\frac{1}{s^2+2s+1}=\frac{1}{(s+1)^2}$$

اشاره‌ای به ساده‌سازی بلوک دیاگرام‌ها:

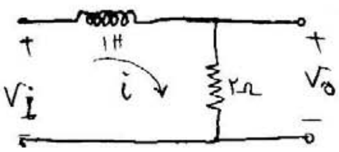
قانون اول:



$$\frac{Z}{X}=?$$



$$H(s)=H_1(s)\,.\,H_2(s)$$



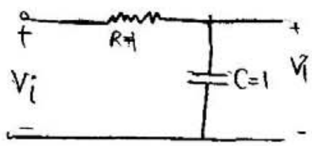
$$\frac{I}{V_I} = \frac{1}{s+2}$$

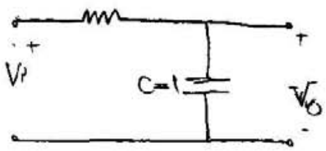
$$\frac{V_o}{I} = 2$$

$$\longrightarrow \frac{V_o}{V_I} = \frac{2}{s+2}$$

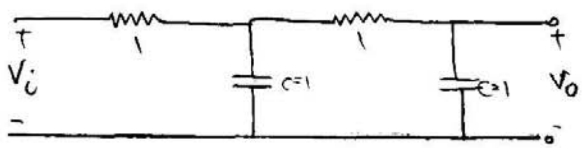
نکته مهم : اگر توابع تبدیل‌ها را قبل از اتصال الکتریکی دو قسمت محاسبه کرده باشیم باید مواظب اثر بارگذاری باشیم.

مثال :



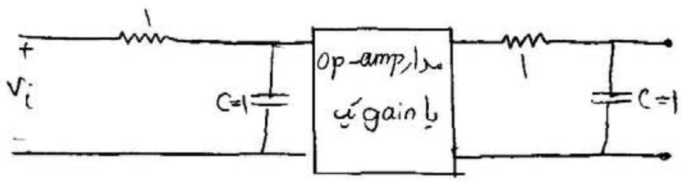


$$\frac{V}{V} = \frac{1}{1+s} \qquad \frac{V_o}{V_2} = \frac{1}{s+1}$$



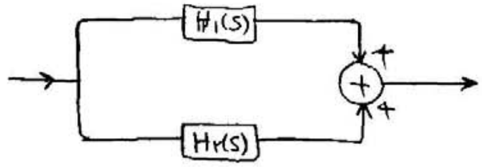
$$\frac{V_o}{V_I} = \frac{1}{s^2+3s+1}$$

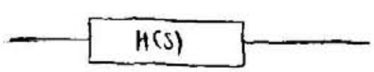
راه حل :



$$\frac{V_o}{V_I} = \frac{1}{s+1} \cdot \frac{1}{s+1} = \frac{1}{(s+1)^2}$$

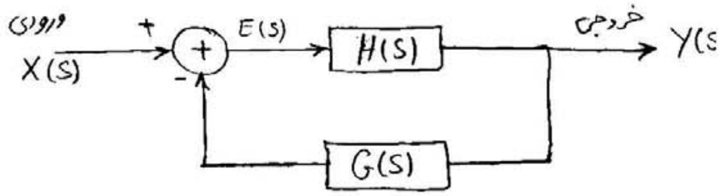
قانون دوم :

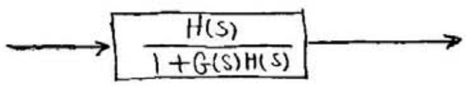




$$H(S) = H_1(S) + H_2(S)$$

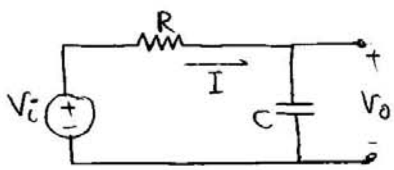
قانون سوم (قانون فیدبک) :



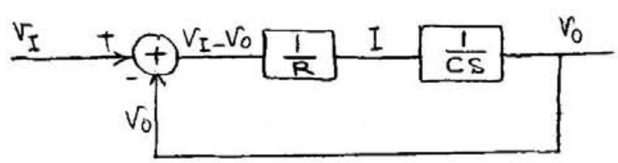


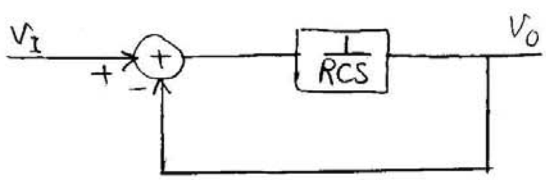
$$\begin{cases} Y(S) = H(S) \cdot E(S) \\ E(S) = X(S) - G(S)Y(S) \end{cases} \longrightarrow \frac{Y(S)}{X(S)} = \frac{H(S)}{1+G(S)H(S)}$$

مثال :



$$I = \frac{V_I - V_0}{R} \quad , \quad V_0 = \frac{1}{CS} I$$

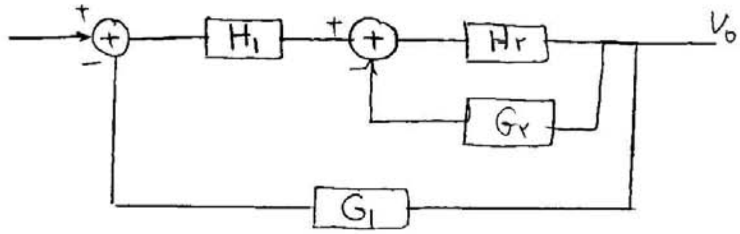


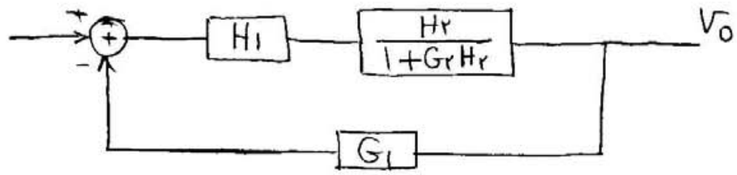


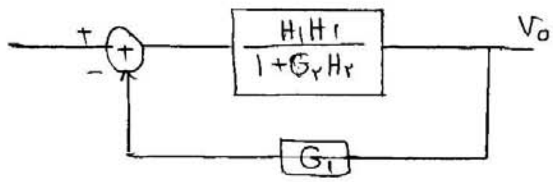
$$\frac{V_0}{V_I} = \frac{\frac{1}{RCS}}{1 + \frac{1}{RCS}} = \frac{1}{1+RCS}$$

نکته : در درس کنترل خطی بحث ساده سازی بلوک دیاگرام به طور مفصل بحث می شود. در این درس ما با مسائلی سروکار داریم که با همین سه قانون ساده می شوند.

مثال:

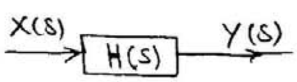






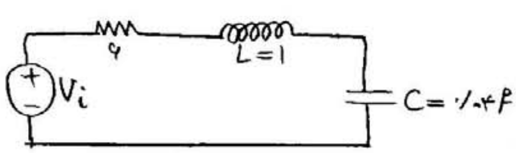
$$H(s)=\frac{\frac{H_1H_2}{1+G_2H_2}}{1+\frac{H_1H_2G_1}{1+G_2H_2}} \rightarrow H(s)=\frac{H_1H_2}{1+G_2H_2+G_1H_1H_2}$$

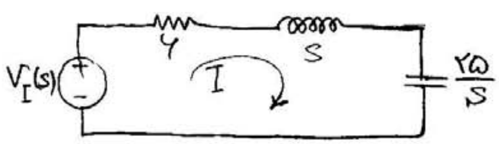
ارتباط بین قطبهای $H(s)$, $X(s)$ با پاسخ سیستم (مدار):



$$H(s)=\frac{Y(s)}{X(s)} \quad , \quad Y(s)=H(s).X(s)$$

یادآوری یک مثال:





$$\frac{I}{V_I(s)}=\frac{1}{6+S+\frac{25}{S}}=\frac{S}{S^2+6S+25}=\frac{S}{(S+3)^2+4^2}$$

اگر $V_i(t)=12\sin 5t$ آنگاه: $i(t)=?$

$$V_I(s)=\frac{60}{s^2+25} \quad , \quad I(s)=\frac{s}{s^2+6s+25}\times\frac{60}{s^2+25}$$

$$\longrightarrow I(s)=\frac{-10}{(s+3)^2+4^2}+\frac{10}{s^2+25}$$

$$\longrightarrow i(t)=\underbrace{-2.5e^{-3t}\sin 4t}_{\text{گذرا}}+\underbrace{2\sin 5t}_{\text{ماندگار}}$$

اگر $V_i=e^{-3t}.u(t)$ آنگاه: $I=\frac{s}{(s+3)^2+4^2}\times\frac{1}{s+3}$

اگر $V_i=t.u(t)$ آنگاه: $I=\frac{s}{(s+3)^2+4^2}\times\frac{1}{s^2}$

نکته: در رابطه $Y(s)=H(s).X(s)$ قطبهای $H(s)$ پاسخ گذرا و قطبهای $X(s)$ پاسخ ماندگار سیستم را تعیین می‌کند.

پاسخ ضربه و کانولوشن:

$$X(s)\longrightarrow\boxed{H(s)}\longrightarrow Y(s)$$

$$H(s)=\frac{Y(s)}{X(s)} \quad , \quad Y(s)=H(s).X(s)$$

پاسخ ضربه سیستم: خروجی سیستم وقتی ورودی تابع ضربه است.

$$x(t)=\delta(t) \longrightarrow X(s)=1$$

$$\longrightarrow Y(s)=H(s)$$

$$\longrightarrow \text{پاسخ ضربه سیستم}=\mathcal{L}^{-1}[H(s)]$$

عکس تبدیل لاپلاس تابع تبدیل = پاسخ ضربهٔ سیستم.

در بحث کانولوشن:

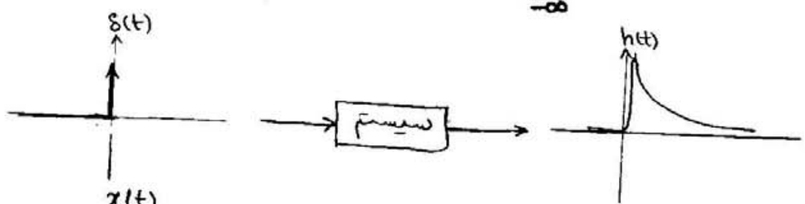
پاسخ ضربه سیستمی را داریم [$h(t)$] و می‌خواهیم خروجی $y(t)$ را به ازاء یک ورودی خاص $x(t)$ محاسبه کنیم.

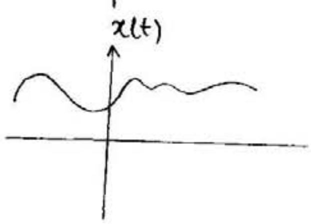
$\delta(t)$	$h(t)$
$x(t)$	$y(t)=?$

ثابت می‌شود: $y(t)=x(t)*h(t)$

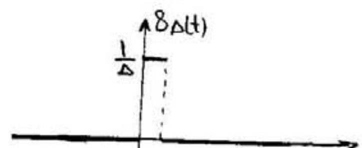
$$\longrightarrow y(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}h(\tau)x(t-\tau)d\tau=\int_{-\infty}^{+\infty}x(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

مروری بر اثبات:

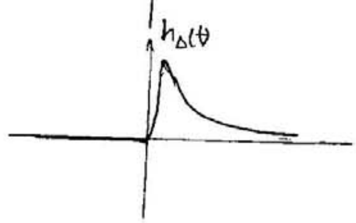




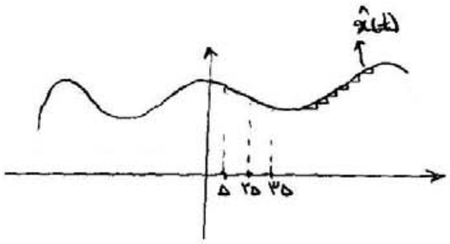
$y(t)=?$

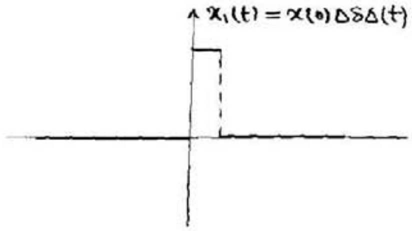


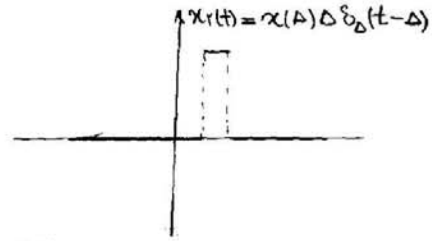
$$\delta(t)=\lim_{\Delta\to 0}\delta_\Delta(t)$$



$\hat{x}(t)$ را به‌صورت جمعی از توابع زیر می‌توان نوشت:







$x_3 = x(2\Delta)\cdot\Delta\cdot\delta_\Delta(t-2\Delta)$

$$\hat{x}(t) = \cdots + x_1(t) + x_2(t) + x_3(t) + \cdots$$

$$= \cdots + x(0)\Delta\delta_\Delta(t) + x(\Delta)\Delta\delta_\Delta(t-\Delta) + x(2\Delta)\cdot\Delta\cdot\delta_\Delta(t-2\Delta) + \cdots$$

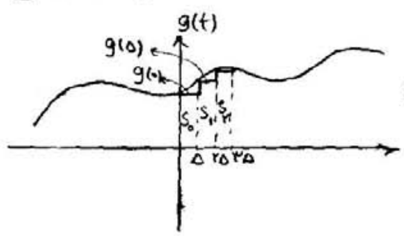
$$\hat{x}(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k\Delta)\cdot\Delta\cdot\delta_\Delta(t-k\Delta)$$

$$\hat{y}(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k\Delta)\cdot\Delta\cdot h_\Delta(t-k\Delta)$$

$$x(t) = \lim_{\Delta\to 0}\hat{x}(t) \quad , \quad y(t) = \lim_{\Delta\to 0}\hat{y}(t)$$

$$\longrightarrow \hat{y}(t) = \lim_{\Delta\to 0}\sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k\Delta)\cdot h_\Delta(t-k\Delta)\cdot\Delta$$

یادآوری:



$$S = \int_{-\infty}^{+\infty} g(\tau)d\tau$$

$$= \lim_{\Delta\to 0}\sum_{k=-\infty}^{+\infty} S_k$$

$$= \lim_{\Delta\to 0}\sum_{k=-\infty}^{+\infty} g(k\Delta)\cdot\Delta$$

$$\longrightarrow \quad y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

این رابطه از روشهای دیگری نیز قابل اثبات است (استفاده از تبدیل لاپلاس).

$$\mathcal{L}\left[h(t) * x(t)\right] = H(S) . X(S)$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left[H(S) . X(S)\right] = h(t) * x(t)$$

خواص کانولوشن:

۱- $h(t) * x(t) = x(t) * h(t)$

۲- $x(t) * h_1(t) + x(t) * h_2(t) = x(t) * \left[h_1(t) + h_2(t)\right]$

۳- $x(t) * \left[h_1(t) * h_2(t)\right] = \left[x(t) * h_1(t)\right] * h_2(t)$

استفاده از کانولوشن در تحلیل مدارهای الکتریکی:

۱- تابع تبدیل سیستم را محاسبه می‌کنیم.

۲- عکس تبدیل لاپلاس می‌گیریم تا پاسخ ضربه بدست آید.

۳- ورودی را با پاسخ ضربه کانولوشن می‌کنیم.

در استفاده از تبدیل لاپلاس در تحلیل مدارهای الکتریکی:

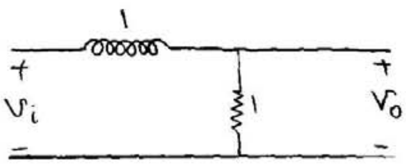
۱- تابع تبدیل سیستم را محاسبه می‌کنیم: $H(S)$

۲- تبدیل لاپلاس ورودی را محاسبه می‌کنیم: $X(S)$

V_o

۳ـ $Y(S) = H(S) \cdot X(S)$ ۴ـ $y(t) = \mathcal{L}^{-1}[Y(s)]$

مثال:



$V_i = u(t)$

$V_o = ?$

روش لاپلاس:

$$H(S) = \frac{1}{1+S} \quad , \quad X(S) = \frac{1}{S}$$

$$Y(S) = H(S) \cdot X(S) = \frac{1}{S(S+1)} = \frac{1}{S} - \frac{1}{S+1} \longrightarrow y(t) = \left[1 - e^{-t}\right] u(t)$$

روش کانولوشن:

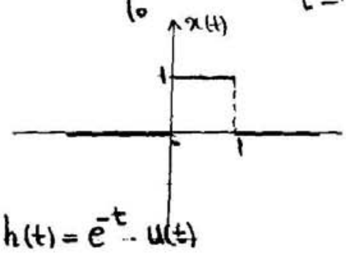
$$H(S) = \frac{1}{S+1} \longrightarrow h(t) = e^{-t} u(t)$$

$$x(t) = u(t)$$

$$y(t) = h(t) * x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\tau} \cdot u(\tau) \cdot u(t-\tau)\, d\tau = \int e^{-\tau} u(t-\tau)\, d\tau$$

$$= \int_0^t e^{-\tau} d\tau = \begin{cases} 1 - e^{-t} & t > 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

$$u(t) = \begin{cases} 1 & t-\tau > 0 \\ 0 & t-\tau < 0 \end{cases} \quad , \quad u(t-\tau) = \begin{cases} 1 & \tau < t \\ 0 & \tau > t \end{cases}$$



مثال ۲:

$$h(t) = e^{-t} \cdot u(t)$$

$$y(t) = h(t) * x(t)$$

حل از روش محاسباتی:

$$h(t) = e^{-t} \cdot u(t)$$

$$x(\tau) = u(t) - u(t-1)$$

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\tau} u(\tau) \left[u(t-\tau) - u(t-\tau-1)\right] d\tau =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\tau} u(\tau).u(t-\tau)d\tau - \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\tau} u(\tau)\, u(t-\tau-1)\,d\tau$$

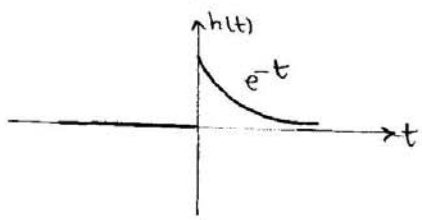
$$\longrightarrow \quad y(t) = \underbrace{\int_{0}^{\infty} e^{-\tau} u(t-\tau)\,d\tau}_{y_1(t)} - \underbrace{\int_{0}^{\infty} e^{-\tau} u(t-\tau-1)\,d\tau}_{y_2(t)}$$

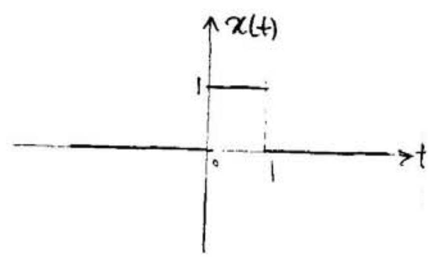
$y_1(t) =$

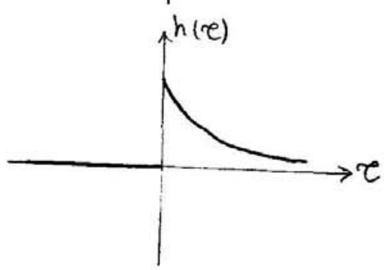
$$\longrightarrow \quad y(t) = \begin{cases} 0 & t<0 \\ 1-e^{-t} & 0<t<1 \\ e^{-(t-1)}-e^{-t} & 1<t \end{cases}$$

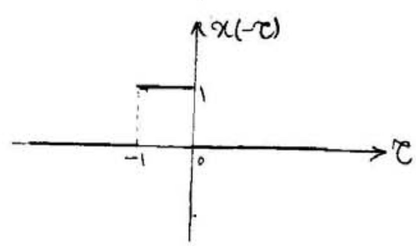
$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)\, x(t-\tau)\, d\tau$$

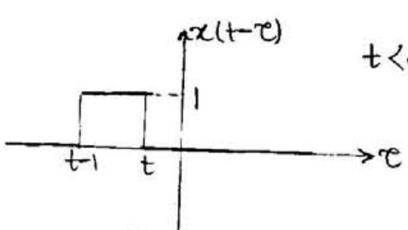
حل مثال از روش ترسیمی:





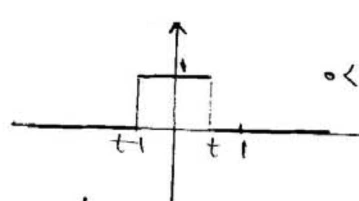






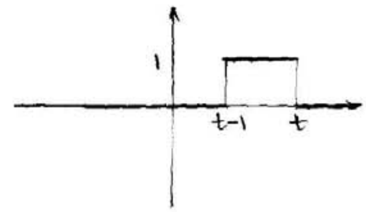
$t<0$

$$y(t) = \int_{0}^{t} e^{-\tau} d\tau = 1-e^{-t}$$

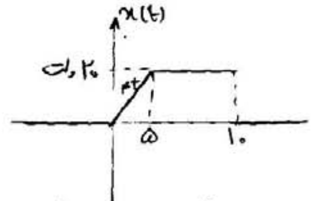


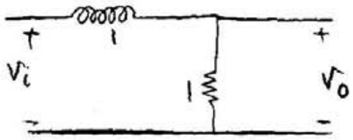
$0<t<1$

$$y(t) = \int_{t-1}^{t} e^{-\tau} d\tau = e^{-(t-1)} - e^{-t}$$



مثال :





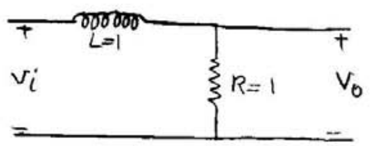
$$h(t) = e^{-t} \cdot u(t)$$

$$x(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 4t & 0 < t < 5 \\ 20 & 5 < t < 10 \\ 0 & 10 < t \end{cases}$$

$$x(t) = 4t\,u(t) - 4(t-5)\,u(t-5) - 20\,u(t-10)$$

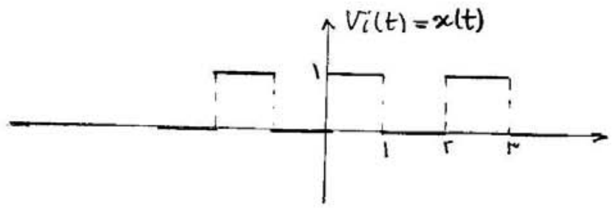
پاسخ مدارهای الکتریکی به سیگنال های متناوب :

مثال :



$$H(S) = \frac{1}{S+1} \qquad\qquad h(t) = e^{-t}u(t)$$

فرض کنید که :



$$V_o(t) = y(t) = ?$$

روش اول : سری فوریه .

$$x(t) = V_i(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n e^{j\omega_0 n t}$$

$$y(t) = V_o(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C'_n e^{jn\omega_0 t}$$

قضیه : اگر تابع تبدیل سیستم $H(s)$ باشد (و ناحیهٔ همگرایی شامل محور $j\omega$ باشد)

$$C'_n = C_n \cdot H(jn\omega_0)$$

در مثال :
$$T = 2 \longrightarrow \omega_0 = \pi$$

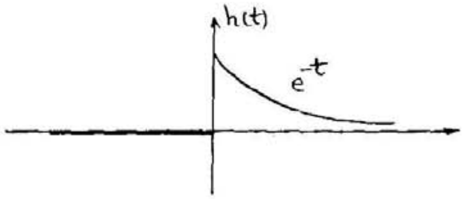
$$C_n = \frac{1}{2}\int_0^1 (1)\, e^{-jn\pi t}\, dt = \frac{1}{-j2n\pi} e^{-jn\pi t}\Big|_0^1 = \frac{j}{2n\pi}(\cos n\pi - 1)$$

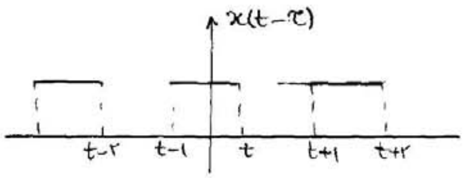
$$H(jn\omega_0) = \frac{1}{1+jn\pi}$$

$$\longrightarrow \quad y(t)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{j}{2n\pi}(\cos n\pi-1)\cdot\frac{1}{1+jn\pi}e^{jn\pi t}$$

اشکال این روش این است که پاسخ بصورت یک $\sum$ است.

روش دوم : استفاده از کانولوشن





نکته : اگر ورودی سیستم (LTI) متناوب باشد خروجی نیز متناوب است با همان دورهٔ تناوب.

$$x(t)=x(t+\tau) \longrightarrow y(t)=y(t+\tau)$$

اثبات :

$$y(t)=\int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)x(t-\tau)d\tau$$

$$y(t+T)=\int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)\underbrace{x(t+T-\tau)}_{x(t-\tau)}d\tau = y(t)$$

پس کافی است خروجی را در یک دورهٔ تناوب پیدا کنیم.

در مثال قبل : $\quad 0<t<2$

الف : $\quad 0<t<1 \longrightarrow y(t)=\int_{0}^{t}e^{-\tau}d\tau+\int_{t+1}^{t+2}e^{-\tau}d\tau+\int_{t+3}^{t+4}e^{-\tau}d\tau+\cdots$

ب : $\quad 1<t<2 \longrightarrow y(t)=\int_{t-1}^{t}e^{-\tau}d\tau+\int_{t+1}^{t+2}e^{-\tau}d\tau+\int_{t+3}^{t+4}e^{-\tau}d\tau+\cdots$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\int_{t-1+2k}^{t+2k}e^{-\tau}d\tau$$

$$\rightarrow y(t)=\sum_{k=0}^{\infty} -e^{-\tau}\Big|_{t-1+2k}^{t+2k}=\sum_{k=0}^{\infty}\left[e^{-(t-1+2k)}-e^{-(t+2k)}\right]$$

$$=e^{-t}\cdot\sum_{k=0}^{\infty} e^{-2k}(e-1)=(e-1)e^{-t}\cdot\sum_{k=0}^{\infty} e^{-2k}=(e-1)e^{-t}\cdot\frac{1}{1-e^{-2}}$$

$$=\frac{e-1}{1-e^{-2}}e^{-t}$$

در فاصله $0<t<1$:

$$y(t)=\int_0^t e^{-\tau}d\tau+\sum_{k=1}^{\infty}\int_{t-1+2k}^{t+2k} e^{-\tau}d\tau$$

$$=\int_0^t e^{-\tau}d\tau+\sum_{k=0}^{\infty}\int_{t-1+2k}^{t+2k} e^{-\tau}d\tau-\int_{t-1}^{t} e^{-\tau}d\tau=\int_0^{t-1} e^{-\tau}d\tau+\frac{e-1}{1-e^{-2}}e^{-t}$$

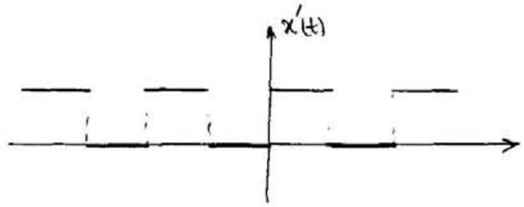
$$\rightarrow y(t)=1-e^{-(t-1)}+\frac{e-1}{1-e^{-2}}e^{-t}=1-e\cdot e^{-t}+\frac{e-1}{1-e^{-2}}e^{-t}$$

$$=1-\left[e-\frac{e-1}{1-e^{-2}}\right]e^{-t}$$

با توجه به اینکه پاسخهای ضربه عموماً به فرم زیر است : $h(t)=A_1e^{-\alpha_1 t}+A_2e^{-\alpha_2 t}+\dots$

روش سوم : روش لاپلاس

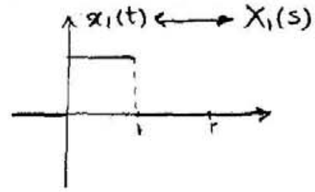
تبدیل لاپلاس دارد.



تبدیل لاپلاس ندارد

تبدیل لاپلاس $x(t)$:

ابتدا لاپلاس $x_1(t)$ را می‌گیریم. $x_1(t)$ با $x(t)$ در یک تناوب برابر است و در خارج از آن فاصله صفر است.



$$X_1(s)=\int_0^T x(t)e^{-st}dt =$$

$$X(s)=X_1(s)+e^{-Ts}X_1(s)+e^{-2Ts}X_1(s)+\cdots$$

$$=X_1(s)\left[1+e^{-Ts}+e^{-2Ts}+e^{-3Ts}+\cdots\right]=X_1(s).\sum_{k=0}^{\infty}(e^{-Ts})^k$$

$$\longrightarrow \quad X(s)=\frac{X_1(s)}{1-e^{-Ts}}$$

اگر همین کار را روی $x'(t)$ پیاده کنیم:

$$X(s)=X_1(s)\sum_{k=-\infty}^{+\infty}e^{-Ts}=X_1(s).\left[\sum_{k=-\infty}^{0}(e^{-Ts})^k+\sum_{k=0}^{+\infty}(e^{-Ts})^k-1\right]$$

$$=X_1(s).\left[\sum_{k=0}^{\infty}(e^{Ts})^k+\sum_{k=0}^{\infty}(e^{-Ts})^k-1\right]=\infty$$

راه حل: از $x'(t)$ به جای $x(t)$ استفاده کنیم و در نهایت از پاسخ گذرا صرف نظر کنیم.

در مثال قبل:

$$H(s)=\frac{1}{1+s}\quad,\quad X(s)=\frac{X_1(s)}{1-e^{-2s}}$$

$$X_1(s)=\int_0^1 e^{-st}dt=\frac{-1}{s}e^{-s}\Big|_0^1=\frac{1-e^{-s}}{s}$$

$$Y(s)=H(s).X(s)=\frac{(1-e^{-s})}{s(s+1)(1-e^{-2s})}=\frac{A}{s+1}+\frac{Y_1(s)}{1-e^{-2s}}$$

$$A=(s+1)Y(s)\Big|_{s=-1}=\frac{e-1}{1-e^{2}}$$

$$\longrightarrow \frac{(1-e^{-s})/s}{(s+1)(1-e^{-2s})} = \frac{A\left[1-e^{-2s}\right] + (s+1)Y_1(s)}{(s+1)(1-e^{-2s})}$$

$$\longrightarrow A(1-e^{-2s}) + (s+1)Y_1(s) = \frac{1-e^{-s}}{s}$$

$$\longrightarrow Y_1(s) = \frac{\frac{1-e^{-s}}{s} - A\left[1-e^{-2s}\right]}{s+1} = \frac{1-e^{-s}-As+Ase^{-2s}}{s(s+1)}$$

$$= \frac{1-As}{s(s+1)} - e^{-s}\cdot\frac{1}{s(s+1)} + Ae^{-2s}\cdot\frac{s}{s(s+1)}$$

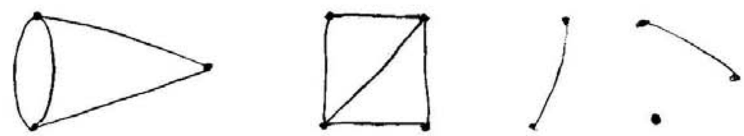
$$\frac{1}{s(s+1)} \longleftrightarrow (1-e^{-t})u(t)$$

$$e^{-s}\cdot\frac{1}{s(s+1)} \longleftrightarrow \left[1-e^{-(t-1)}\right]u(t-1)$$

تئوری گراف:

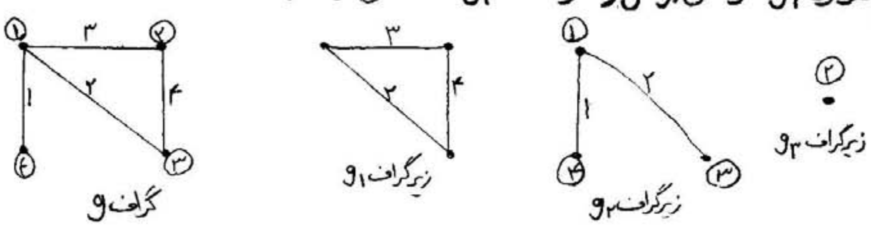
چند تعریف:

۱- گراف: مجموعه‌ای از شاخه‌ها و گره‌ها است به شرط اینکه هر شاخه در دو سرش به گره ختم شود.



۲- زیرگراف: اگر گراف g تعریف شده باشد g_1 را یک زیرگراف g نامند چنانچه

هر گره g_1 گره‌ای از g و هر شاخه g_1 شاخه‌ای از g باشد.

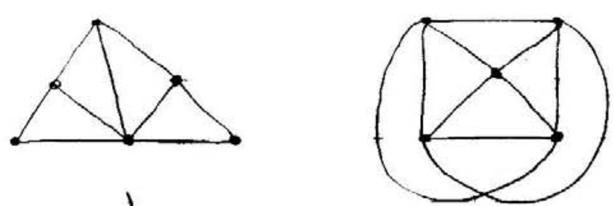


۳- گراف جهت دار: گرافی است که هر شاخه‌ی آن یک جهت مشخص دارد.

۴- گراف ← متصل: گرافی است که بین هر دو گره‌ی آن حداقل یک مسیر (شاخه) وجود داشته باشد.
↙ منفصل

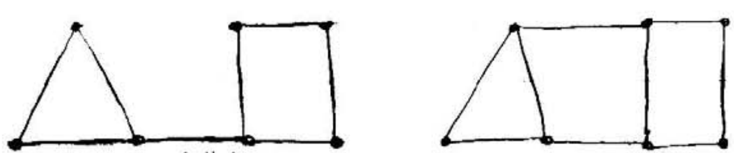
۵- گراف ← سوده: فقط شامل یک گره است.
↙ ناسوده

۶- گراف ← مسطح: گرافی است که شاخه‌ها فقط در گره‌ها با هم تلاقی دارند.
↙ نامسطح



مسطح　　　　　نامسطح

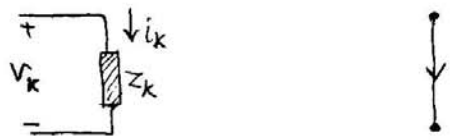
۷- گراف ← لولادار: گرافی است که بتوان با حذف یک شاخه‌ی آن، آن را تبدیل به دو گراف مستقل نمود.
↙ بدون لولا.



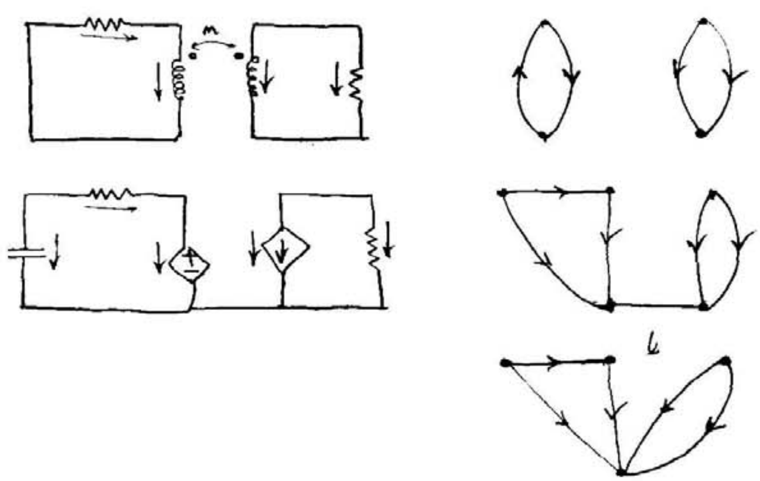
لولادار　　　　　بدون لولا

نمایش مدارهای الکتریکی با گراف جهت دار

نکته: در تعریف جهت ولتاژ و جریان استاندارد زیر را رعایت می‌کنیم:



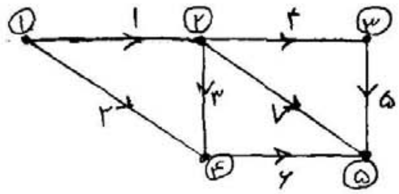
مثال:



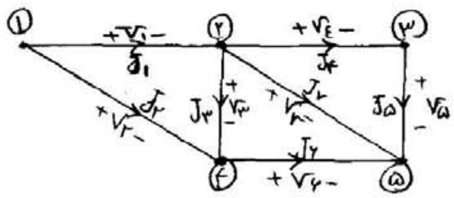
۸ـ ماتریس تلاقی incidence matrix:

اگر گرافی با n_t گره و b شاخه داشته باشیم ماتریس تلاقی A_a یک ماتریس $n_t \times b$ است به طوری که

$$a_{ik} = \begin{cases} 1 & \text{اگر شاخه k ام از گره i ام خارج شود.} \\ -1 & \text{〃 〃 〃 وارد شود.} \\ 0 & \text{اگر شاخه k ام و گره i ام هیچ تلاقی نداشته باشند.} \end{cases}$$



$$
A_a = \begin{array}{c} \\ ① \\ ② \\ ③ \\ ④ \\ ⑤ \end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccccc} ۱ & ۲ & ۳ & ۴ & ۵ & ۶ & ۷ \end{array} \\
\begin{bmatrix}
1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\
0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1
\end{bmatrix}
\end{array}
$$



اگر:

$$
\underline{J} = \begin{bmatrix} J_1 \\ J_2 \\ J_3 \\ J_4 \\ J_5 \\ \vdots \\ J_b \end{bmatrix}
\qquad
\underline{V} = \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \\ V_5 \\ \vdots \\ V_b \end{bmatrix}
\qquad
\underline{e} = \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_4 \\ e_5 \\ \vdots \\ e_{nt} \end{bmatrix}
$$

می‌توان ثابت کرد که:

$$A_a \cdot \underline{J} = 0$$

$$A_a^T \cdot \underline{e} = \underline{V}$$

۹- ماتریس تلاقی مختصرشده (A ، A_a) :

همان ماتریس تلاقی است وقتی که یکی از سطرها حذف شده باشد .

$$\begin{cases} A \cdot J = 0 \\ A^T \cdot \underline{e} = \underline{V} \end{cases}$$

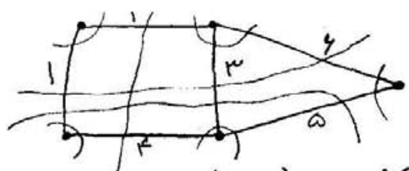
۱۰- کات ست cut set (مجموعهٔ قطع) :

مجموعه‌ای از چند شاخه را یک مجموعهٔ قطع (کات ست) نامند چنانچه :

۱- حذف تمام شاخه های آن مجموعهٔ گراف متصل G را به دو زیرگراف متصل تبدیل نماید.

۲- حذف تمام شاخه ها به جز یکی گراف را متصل نگه دارد.

مثال :



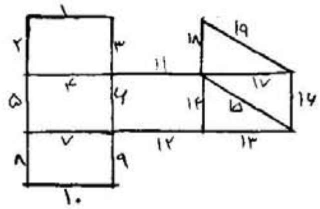
سوال : کدامیک از مجموعه های زیر یک کات ست است ؟

هست
$A = \{۲, ۴\}$

هست
$B = \{۱, ۳, ۶\}$

نیست
$C = \{۱, ۳\}$

مثال :



هست
$A = \{۵, ۶, ۱۴, ۱۵, ۱۶, ۱۹\}$
نیست
دارای شرط اول و نقض شرط دوم

قانون KCL برای کات ست : در "هر" مدار و در "هر" زمان و برای "هر" کات ست جمع

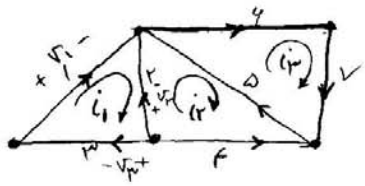
جبری جریانها صفر است.

۱۱- حلقه (loop): زیرگراف l را یک حلقه نامند چنانچه:

۱- به هر گره ای تنها دو شاخه متصل باشد.

۲- گراف متصل باشد.

مثال:



۱۲- مش mesh: حلقه‌ای است که درون آن شاخه‌ای نباشد.

۱۳- حلقهٔ بیرونی: حلقه ای است که بیرون آن شاخه ای نباشد.

در تحلیل مدار برای هر مش یک جریان حلقه تعریف می‌شود.

۱۴- ماتریس مش: اگر گرافی دارای b شاخه و l مش باشد در آن صورت ماتریس مش یک ماتریس $b \times l$ است به طوری که:

$$m_{ik} = \begin{cases} 1 & \text{شاخه } k \text{ ام در حلقهٔ } i \text{ ام باشد و جهت منطبق باشد} \\ -1 & \text{〃 〃 〃 〃 نباشد} \\ 0 & \text{〃 〃 نباشد.} \end{cases}$$

مثال: در مثال قبل ماتریس مش را بنویسید.

$$M = \begin{array}{c} \\ l_1 \\ l_2 \\ l_3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

اگر ماتریس $\underline{I}$ به صورت مقابل تعریف شود :

$$\underline{I}=\begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ \vdots \\ i_l \end{bmatrix}$$

دو رابطه زیر را خواهیم داشت :

$$M.V=0$$

$$M^T.I=J$$

در مثال قبل :

$$MV=\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ \vdots \\ V_7 \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} V_1-V_2+V_3 \\ V_2-V_4-V_5 \\ V_5+V_6+V_7 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}=0$$

$$M^T.I=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} i_1 \\ -i_1+i_2 \\ i_1 \\ -i_2 \\ -i_2+i_3 \\ i_3 \\ i_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} J_1 \\ J_2 \\ J_3 \\ J_4 \\ J_5 \\ J_6 \\ J_7 \end{bmatrix}=$$

قضیه تلگان : در یک گراف جهت دار

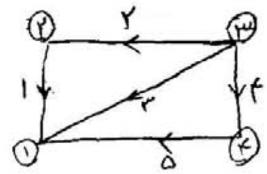
$$\sum_{K=1}^{\overset{\text{تعداد شاخه ها}}{b}} V_K \cdot j_K=0$$

یادآوری : تعریف توان لحظه ای

$$P(t)=V(t).\,i(t)$$

نکته : تنها شرطی که قضیه تلگان دارد این است که تمام V_K ها و j_K ها در قوانین KCL , KVL صدق کند.

مثال:



$$\begin{cases} V_1 = 2 \\ j_1 = 1 \end{cases} , \quad \begin{cases} V_2 = -1 \\ j_2 = 1 \end{cases} , \quad \begin{cases} V_3 = 1 \\ j = -3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} V_4 = 4 \\ j_4 = 2 \end{cases} , \quad \begin{cases} V_5 = -3 \\ j_5 = 2 \end{cases}$$

نکته۲: اگر دو دسته ولتاژ V_k و $\hat{V}_k$ و دو دسته جریان j_k و $\hat{j}_k$ طوری تعریف شوند که

قوانین KVL و KCL را ارضاء نمایند در آن صورت:

$$\sum V_k j_k = 0 \qquad \sum \hat{V}_k j_k = 0$$

$$\sum \hat{V}_k \hat{j}_k = 0 \qquad \sum V_k \hat{j}_k = 0$$

چند نتیجه از قضیه تلگان:

۱- جمع جبری توان لحظه‌ای در یک مدار «در هر لحظه» صفر است.

می‌دانیم که:
- مقاومت توان تلف می‌کند $\quad Ri^2$
- سلف } توان ذخیره می‌کنند یا پس می‌دهند $\quad \frac{1}{2}Li^2$
- خازن } توان ذخیره می‌کنند یا پس می‌دهند $\quad \frac{1}{2}CV^2$
- منابع هم می‌توانند توان تحویل دهند و یا توان ذخیره کنند.

۲- توان مختلط: اگر منبع تحریک کننده مدار سینوسی باشد:

$P = $ توان حقیقی $= \frac{1}{2}|V_m|\cdot|I_m|\cos\theta$

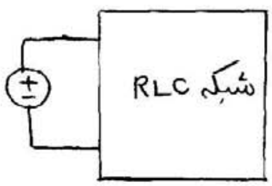
$Q = $ توان واکنشی $= \frac{1}{2}|V_m|\cdot|I_m|\sin\theta$

$S = V\cdot J^*$ $\qquad \sum S_k = \sum_{k=1}^{b} V_k J_k^* = 0$

بعبارت دیگر جمع توان های حقیقی مصرفی برابر جمع توانهای حقیقی تولیدی است.

و " " واکنشی " " " واکنشی " ".

۳- امپدانس نقطهٔ تحریک.



الف - اگر شبکه‌ای فقط شامل مقاومت (مثبت) باشد حتماً امپدانس نقطهٔ تحریک یک عدد حقیقی مثبت است. (امپدانس معادل از دید منبع یک مقاومت است)

ب- اگر شبکه‌ای شامل مقاومت و خازن باشد حتماً امپدانس نقطهٔ تحریک یک عدد مختلط شامل قسمت حقیقی مثبت و قسمت موهومی منفی است. (امپدانس معادل از دید منبع یک مقاومت و یک خازن است). زاویهٔ امپدانس در این حالت بین ۰ و ۹۰- است.

ج- اگر شبکه‌ای شامل مقاومت و سلف است حتماً امپدانس نقطهٔ تحریک یک عدد مختلط شامل قسمت حقیقی و موهومی مثبت است. (امپدانس معادل از دید منبع شامل یک مقاومت و

تک سلف است). زاویهٔ امپدانس در این حالت بین ۰ و ۹۰+ است.

د- اگر شبکه ای شامل مقاومت، سلف و خازن باشد امپدانس نقطهٔ تحریک یک عدد مختلط

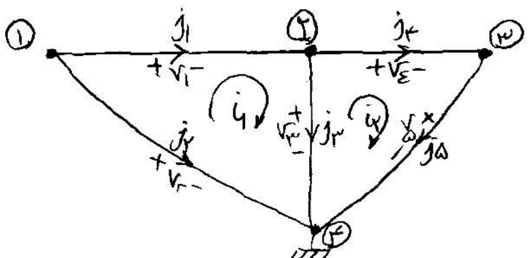
با قسمت حقیقی مثبت است. زاویهٔ امپدانس در این حالت بین °۹۰- و °۹۰+ است.

هـ- اگر شبکه ای شامل سلف و خازن باشد امپدانس نقطهٔ تحریک یک عدد موهومی است.

زاویهٔ امپدانس یا ۹۰+ یا ۹۰- است.

تجزیه و تحلیل گره و مش :

یادآوری :



گراف در حالت کلی b شاخه، n_t گره و l مش دارد. در مثال بالا ۵ شاخه، ۴ گره و ۲ مش داریم.

$$\underline{J} = \begin{bmatrix} j_1 \\ j_2 \\ \vdots \\ j_b \end{bmatrix} \qquad \underline{e} = \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_n \end{bmatrix} \qquad \underline{V} = \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ \vdots \\ V_b \end{bmatrix} \qquad \underline{I} = \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ \vdots \\ i_l \end{bmatrix}$$

$$n \triangleq n_t - 1$$

$$A = \begin{array}{c} \\ ① \\ \vdots \\ ⓝ \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 1 & 2 & \cdots & b \end{array} \\ \begin{bmatrix} & & & \\ & & a_{ik} & \\ & & & \end{bmatrix} \end{array}$$

$a_{ik} = \begin{cases} 1 & \text{اگر شاخه kام از گره iام خارج شود} \\ -1 & \text{〃 〃 〃 وارد شود} \\ 0 & \text{〃 〃 با 〃 〃 تلاقی نداشته باشد} \end{cases}$

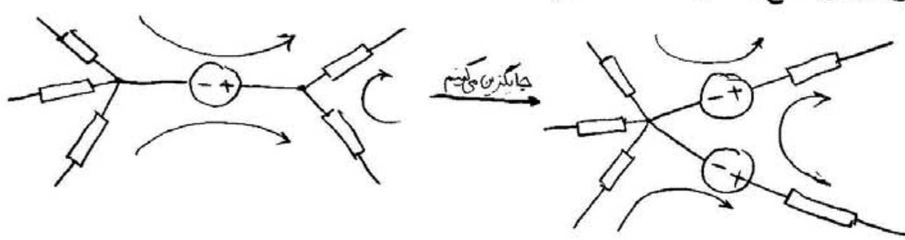
$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{cccc} 1 & 2 & \cdots & b \end{array} \\ M = \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ l \end{array} & \begin{bmatrix} & & & \\ & m_{ik} & & \\ & & & \end{bmatrix} \end{array} \qquad m_{ik} = \begin{cases} 1 & \text{اگر شاخه‌ی k ام در مش i ام باشد و هم جهت} \\ -1 & \text{" " " و غیرهم جهت} \\ 0 & \text{" " " نباشد.} \end{cases}$$

روابط اصلی:
$$\begin{cases} AJ = 0 \\ A^T \underline{e} = V \end{cases} \quad , \quad \begin{cases} MV = 0 \\ M^T I = J \end{cases}$$

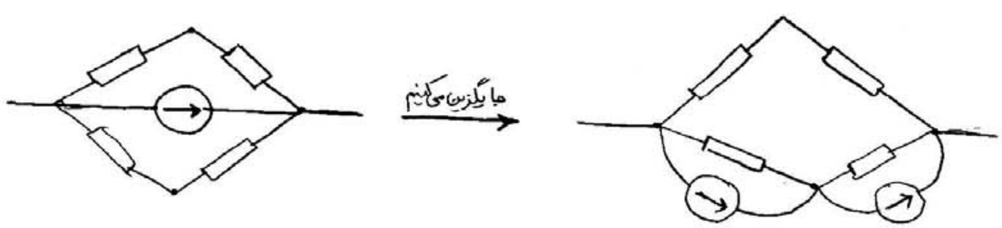
نکته۱: در روش تجزیه و تحلیل گره با استفاده از گراف باید شاخه‌ها حتماً شامل امپدانس باشند.

راه‌حل:

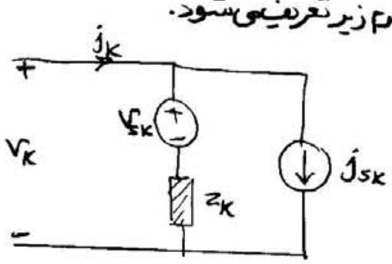
الف: بین دو گره منبع ولتاژ داشته باشیم.



ب: بین دو گره منبع جریان داشته باشیم.



نکته۲: یک شاخه در حالت کلی به فرم زیر تعریف می‌شود.

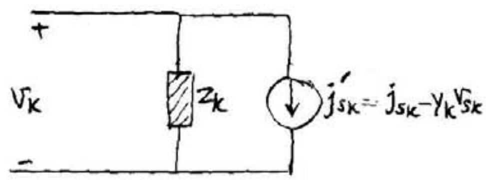


روابط حاکم در شاخه: $V_k = V_{sk} + Z_k\left[j_k - j_{sk}\right]$

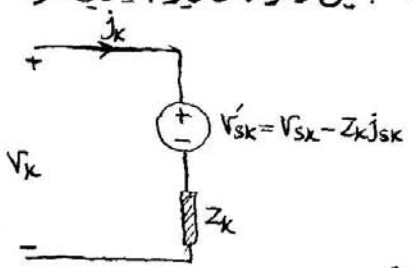
$$\begin{cases} V_k = V_{sk} + Z_k j_k - Z_k j_{sk} & (2) \\ j_k = Y_k V_k - Y_k V_{sk} + j_{sk} & (1) \end{cases} \quad , \quad Y_k \triangleq \frac{1}{Z_k}$$

رابطهٔ (1) مبنای کار در روش تحلیل گره است و رابطهٔ (2) مبنای کار در روش تحلیل مش است.

نکته ۳: شاخهٔ در نظر گرفته شده برای حالت کلی می‌تواند با یکی از فرمهای زیر جایگزین شود.



این مدار معادل برای تحلیل گره مناسب است.



این مدار معادل برای تحلیل مش مناسب است.

روش تجزیه و تحلیل گره: $j_k = Y_k V_k - Y_k V_{sk} + j_{sk}$

$$\longrightarrow \quad \begin{aligned} j_1 &= Y_1 V_1 - Y_1 V_{s1} + j_{s1} \\ j_2 &= Y_2 V_2 - Y_2 V_{s2} + j_{s2} \\ &\vdots \\ j_b &= Y_b V_b - Y_b V_{sb} + j_{sb} \end{aligned}$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} j_1 \\ j_2 \\ \vdots \\ j_b \end{bmatrix}}_{J} = \underbrace{\begin{bmatrix} Y_1 & & \\ & Y_2 \ddots & \\ & & Y_b \end{bmatrix}}_{Y_b} \underbrace{\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ \vdots \\ V_b \end{bmatrix}}_{V} - \underbrace{\begin{bmatrix} Y_1 & & \\ & Y_2 & \\ & & Y_b \end{bmatrix}}_{Y_b} \underbrace{\begin{bmatrix} V_{s1} \\ V_{s2} \\ \vdots \\ V_{sb} \end{bmatrix}}_{V_s} + \underbrace{\begin{bmatrix} j_{s1} \\ j_{s2} \\ \vdots \\ j_{sb} \end{bmatrix}}_{J_s}$$

$$J = Y_b . V - Y_b . V_s + J_s \quad , \quad \begin{cases} A.J = 0 \\ A^T.\underline{e} = \underline{V} \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\times A} AJ = AY_b.A^T\underline{e} - AY_b.V_s + AJ_s = 0$$

$$\longrightarrow \underbrace{AY_bA^T}_{Y_{n\times n}} \underbrace{\underline{e}}_{\text{مجهول}} = \underbrace{AY_bV_s - AJ_s}_{I_s}$$

$$\longrightarrow Y.\underline{e} = I_s \qquad \longrightarrow \qquad \underline{e} = Y^{-1}.I_s$$

نکته: اگر منابع ولتاژ را به منبع جریان تبدیل کرده باشیم: $I_s = -AJ'_s$

الگوریتم روش تحلیل گره:

۱- منابع ولتاژ را به منابع جریان تبدیل می‌کنیم.

۲- جهت جریان در شاخه‌ها و گرهٔ مبنا را تعیین می‌کنیم.

۳- ماتریس A را می‌نویسیم. ۴- ماتریس Y_b و بردار J'_s را می‌نویسیم.

۵- ماتریس Y و I_s را محاسبه می‌کنیم: $Y = AY_bA^T$ $\quad I_s = -AJ'_s$

۶- بردار e را محاسبه می‌کنیم: $\underline{e} = Y^{-1}.I_s$

۷- $\underline{V} = A^T.\underline{e} \quad , \quad J = Y_b.V_k + J'_s$

مثال: