بسم الله الرحمن الرحیم

جزوه مدار ۲ – قسمت سوم

دانشگاه صنعتی امیر کبیر

تهیه کننده : سعید دانشگر

ویرایش و تنظیم برای سایت : حامد مظاهری

نداشته باشد.

نکته: اگر در حالت خاص نباشیم این کار حتماً امکان پذیر است.

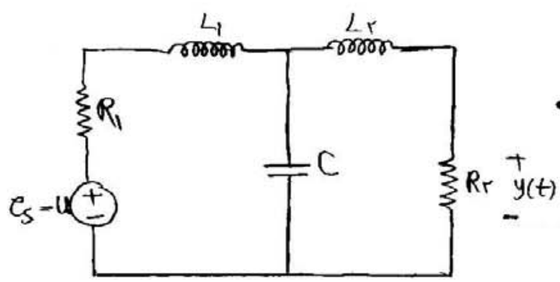
۲- ولتاژ خازنها و جریان سلفها را به عنوان متغیر حالت تعریف می‌کنیم.

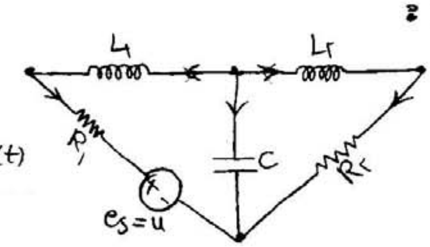
۳- برای هر شاخهٔ درخت که از خازن تشکیل شده است یک معادلهٔ کات ست اساسی می‌نویسیم و برای هر لینک که از سلف تشکیل شده است یک معادلهٔ حلقهٔ اساسی می‌نویسیم.

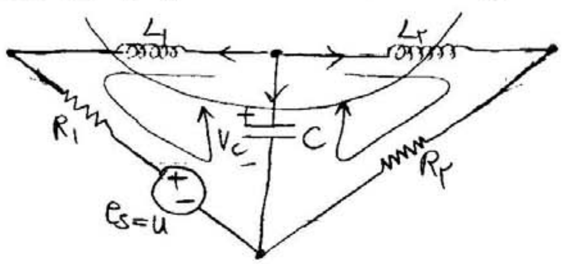
۴- خروجی را بر حسب متغیرهای حالت و ورودی می‌نویسیم.

۵- معادلات بند ۳ و ۴ را به شکل معادلات حالت مرتب می‌نویسیم.

مثال:







$$\underline{x} = \begin{bmatrix} V_C \\ i_{L_1} \\ i_{L_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{x}_1 \\ \underline{x}_2 \\ \underline{x}_3 \end{bmatrix}$$

$$C\overset{\dot{x}_1}{\frac{dv_C}{dt}} + \overset{x_2}{i_{L_1}} + \overset{x_3}{i_{L_2}} = 0 \longrightarrow \dot{x}_1 = -\frac{1}{C}x_2 - \frac{1}{C}x_3$$

$$L_1\overset{\dot{x}_2}{\frac{di_1}{dt}} + R_1\overset{x_2}{i_{L_1}} + u - \overset{x_1}{V_C} = 0 \longrightarrow \dot{x}_2 = \frac{-R_1}{L_1}x_2 + \frac{1}{L_1}x_1 - \frac{1}{L_1}u$$

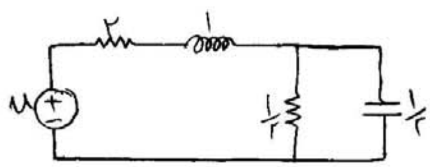
$$L_2\frac{di_2}{dt} + R_2 i_2 - V_C = 0 \longrightarrow \dot{x}_3 = \frac{-R_2}{L_2}x_3 + \frac{1}{L_2}x_1$$

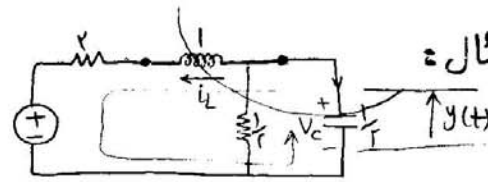
$$y = R_2 i_{L_2} = R_2 x_3$$

$$\longrightarrow \begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\\ \dot{x}_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & \frac{-1}{C} & \frac{-1}{C}\\ \frac{1}{L_1} & \frac{-R_1}{L_1} & 0\\ \frac{1}{L_2} & 0 & -\frac{R_2}{L_2}\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\ \frac{-1}{L_1}\\ 0\end{bmatrix}u$$

$$y = \begin{bmatrix}0 & 0 & R_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}$$

مثال :





$$i_L = x_1$$
$$V_C = x_2 \longrightarrow \frac{1}{2}\frac{dv_C}{dt} + \overset{\text{جریان عبوری از مقاومت ۱/۲}}{2V_C} + i_L = 0$$

$$\longrightarrow \dot{x}_2 = -4x_2 - 2x_1$$

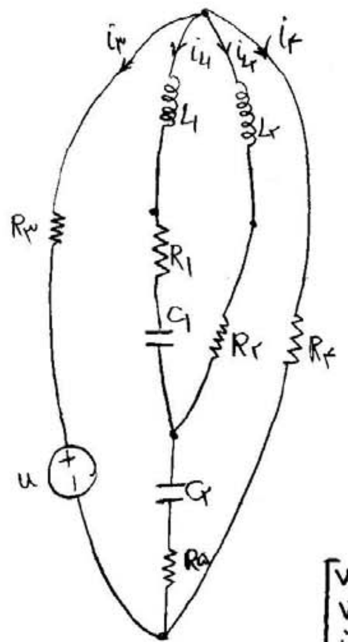
$$\frac{di_L}{dt} + 2i_L + u - V_C = 0 \longrightarrow \dot{x}_1 = -2x_1 + x_2 - u$$

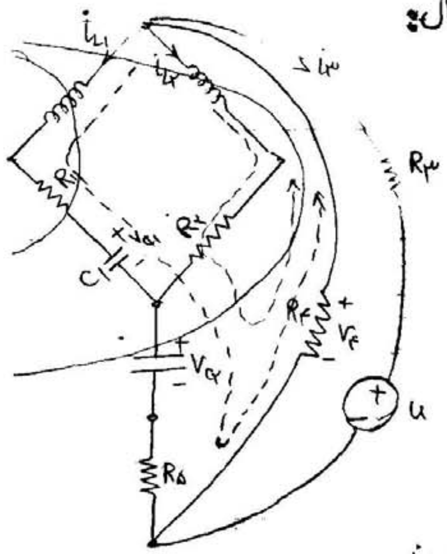
$$y = x_2 \qquad \begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-2 & 1\\ -2 & -4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}-1\\ 0\end{bmatrix}u$$

$$\longrightarrow$$

$$y = \begin{bmatrix}0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}$$

مثال:





$$-V_4 = R_4\left[i_{L_1}+i_{L_2}+\overbrace{\frac{V_4-u}{R_3}}^{i_3}\right]$$

$$\begin{bmatrix} V_{C_1}\\ V_{C_2}\\ i_{L_1}\\ i_{L_2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\end{bmatrix}$$

$$C_1\frac{dV_{C_1}}{dt}-i_{L_1}=0 \longrightarrow \dot{x}_1=\frac{1}{C_1}x_2$$

$$C_2\frac{dV_{C_2}}{dt}=i_{L_1}+i_{L_2} \longrightarrow \dot{x}_2=\frac{1}{C_2}x_3+\frac{1}{C_2}x_4$$

$$L_1\frac{di_{L_1}}{dt}+R_1 i_{L_1}+V_{C_1}+V_{C_2}+R_5(i_{L_1}+i_{L_2})-V_4=0$$

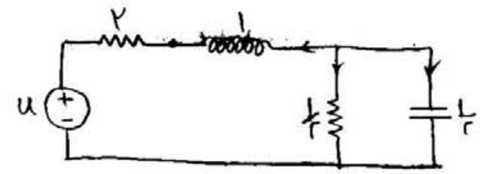
$$L_2\frac{di_2}{dt}+R_2 i_{L_2}+V_{C_2}+R_5(i_{L_1}+i_{L_2})-V_4=0 \quad , \quad y=V_4$$

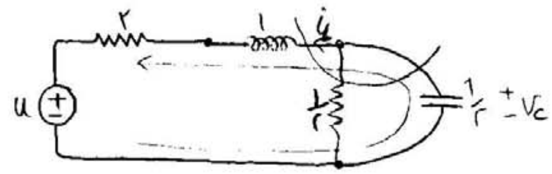
$$\longrightarrow \begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\\ \dot{x}_3\\ \dot{x}_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{C_1} & 0\\ 0 & 0 & \frac{1}{C_2} & \frac{1}{C_2}\\ \frac{-1}{L_1} & \frac{-1}{L_1} & -\frac{R_1+R}{L_1} & -\frac{R}{L_1}\\ 0 & \frac{-1}{L_2} & \frac{-R}{L_2} & -\frac{R_2+R}{L_2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ 0\\ \frac{1}{L_1}\\ \frac{1}{L_2}\end{bmatrix}u$$

$$y=\begin{bmatrix}0 & 0 & -\frac{R_3R_4}{R_3+R_4} & -\frac{R_3R_4}{R_3+R_4}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\end{bmatrix}+\frac{R_4}{R_3+R_4}u$$

$$R=R_5+\frac{R_3R_4}{R_3+R_4}$$

یادآوری مثال جلسهٔ قبل :





$$\begin{cases} \frac{1}{2}\frac{dv_c}{dt} + 2V_c + i_L = 0 \\ 1\,\frac{di_L}{dt} + 2i_L + u - V_c = 0 \end{cases} \quad , \quad x_1 = v_c \quad , \quad x_2 = i_L$$

$$\begin{cases} \frac{1}{2}\dot{x}_1 + 2x_1 + x_2 = 0 \\ 1\,\dot{x}_2 + 2x_2 + u - x_1 = 0 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} \dot{x}_1 = -4x_1 - 2x_2 \\ \dot{x}_2 = x_1 - 2x_2 - u \end{cases}$$

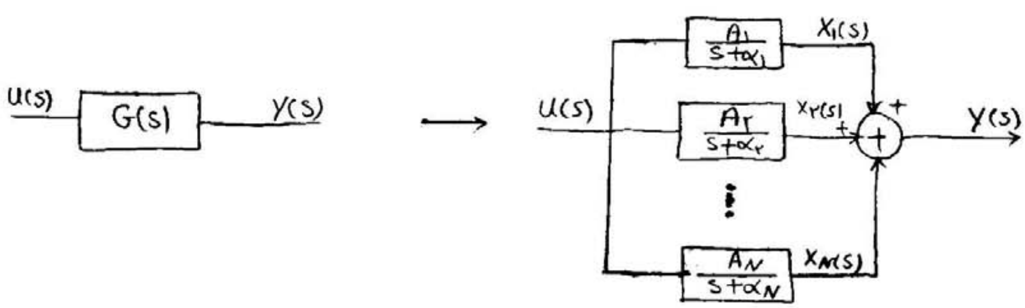
$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & -2 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} u \quad , \quad y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

روش استفاده از تبدیل لاپلاس :

می‌دانیم که :

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_0 + b_1 s + b_2 s^2 + \cdots + b_m s^m}{a_0 + a_1 s + a_2 s^2 + \cdots + a_N s^N}$$

$$= \frac{A_1}{s+\alpha_1} + \frac{A_2}{s+\alpha_2} + \cdots + \frac{A_N}{s+\alpha_N}$$



$$X_1(s) = \frac{A_1}{s+\alpha_1} U(s) \longrightarrow sX_1(s) + \alpha_1 X_1(s) = A_1 U(s)$$

$$\longrightarrow \dot{x}_1 + \alpha_1 x_1 = A_1 u \qquad \longrightarrow \dot{x}_1 = -\alpha_1 x_1 + A_1 u$$

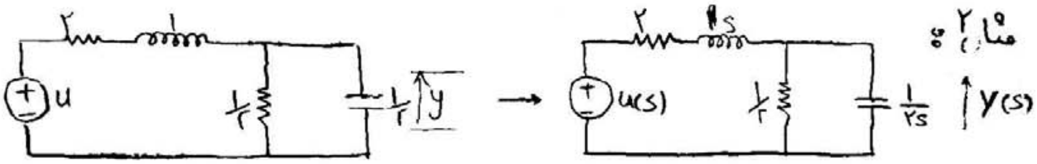
$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\alpha_1 & 0 & \cdots & & 0 \\ 0 & -\alpha_2 & \cdots & & 0 \\ 0 & \cdots & -\alpha_3 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & -\alpha_N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_N \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_N \end{bmatrix} u$$

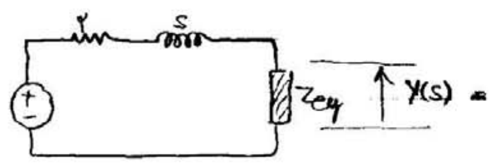
$$y = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_N \end{bmatrix}$$

مثال :
$$G(s) = \frac{2}{s^2+3s+2} = \frac{2}{(s+1)(s+2)} = \frac{2}{s+1} - \frac{2}{s+2}$$

$$\longrightarrow \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \end{bmatrix} u \quad , \quad y = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

مثال ۲ :





$$Z_{eq} = \frac{\frac{1}{2} \times \frac{2}{s}}{\frac{1}{2} + \frac{2}{s}} = \frac{2}{s+4}$$

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{\frac{2}{s+4}}{s+2+\frac{1}{s+4}} = \frac{2}{s^2+6s+10} = \frac{2}{(s+3+j)(s+3-j)} = \frac{j}{s+3+j} - \frac{j}{s+3-j}$$

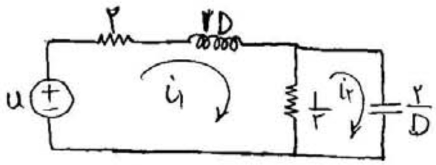
$$\longrightarrow \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -(3+j) & 0 \\ 0 & -(3-j) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} j \\ -j \end{bmatrix} u \quad , y = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

نکته : اگر ریشه های مخرج تابع تبدیل مجزا باشد ماتریس A منما قطری است.

تمرین : اگر ریشه های تکراری داشته باشیم چه تفاوتی در نوشتن معادلات حالت خواهیم داشت.

روش استفاده از معادلهٔ دیفرانسیل بین ورودی و خروجی:

در مثال قبل:



$$\begin{cases} u = 2i_1 + D i_1 + \frac{1}{2}(i_1 - i_2) \\ 0 = \frac{1}{2}(i_2 - i_1) + \frac{2}{D} i_2 \end{cases} \longrightarrow \begin{bmatrix} \frac{5}{2} + D & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} + \frac{2}{D} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$y = \frac{2}{D} i_2 = \frac{2}{D} \cdot \frac{\begin{vmatrix} \frac{5}{2} + D & u \\ -\frac{1}{2} & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \frac{5}{2} + D & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} + \frac{2}{D} \end{vmatrix}} = \longrightarrow (D^2 + 6D + 10) y = 4u$$

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + 6 \frac{dy}{dt} + 10 y = 2u$$

به طور کلی اگر رابطهٔ ورودی و خروجی را به فرم معادلهٔ دیفرانسیل زیر داشته باشیم:

$$a_0 y + a_1 \frac{dy}{dt} + a_2 \frac{d^2 y}{dt^2} + \cdots + a_N \cdot \frac{d^N y}{dt^N} = b_0 u + b_1 \frac{du}{dt} + \cdots + b_m \frac{d^m u}{dt^m}$$

(با فرض $a_N \equiv 1$)، تعریف متغیرهای حالت:

$$x_1 \triangleq y \quad , \quad x_2 \triangleq \frac{dy}{dt}$$

$$\vdots$$

$$x_N \triangleq \frac{d^{(N-1)} y}{dt^{(N-1)}}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & \\ \vdots & & & \ddots & \\ 0 & & & & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \cdots & & -a_{N-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_N \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} b_0 & b_1 & \cdots & b_m & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_N \end{bmatrix}$$

نکته : معادلات بالا برای $M < N$ نوشته شده است.

تمرین: اگر $M = N$ باشد چه تفاوتی در معادلات پیش می آید.

مثال : رابطهٔ ورودی و خروجی در یک مدار الکتریکی به فرم معادلهٔ دیفرانسیل زیر بدست آمده است.

آن را به شکل معادلات نمایش دهید. — $\frac{d^3y}{dt^3}+2\frac{d^2y}{dt^2}+y=3u+4\frac{d^2u}{dt^2}$

$$\longrightarrow \begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\\ \dot{x}_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ -1 & 0 & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 1\end{bmatrix}u \quad , \quad y=\begin{bmatrix}3 & 0 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}$$

مثال : در مدار الکتریکی مثال قبل

$$\frac{d^2y}{dt^2}+6\frac{dy}{dt}+10y=2u$$

$$\longrightarrow \begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -10 & -6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}u \quad , \quad y=\begin{bmatrix}2 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}$$

نکته ۱ : دیدیم که برای یک مدار خاص از هر روش یک معادلهٔ حالت متفاوت بدست آوردیم. ولی

می توان اثبات کرد که این تفاوت ظاهری است. به عبارت دیگر رابطهٔ ورودی و خروجی در تمام آنها یکی است.

$$G(s)=C(sI-A)^{-1}B+D$$

$$\begin{cases}\dot{x}=Ax+Bu\\ y=Cx+Du\end{cases} \longrightarrow \begin{cases}sX(s)=AX(s)+BU(s)\\ Y(s)=CX(s)+DU(s)\end{cases}$$

$$\longrightarrow (sI-A)X(s)=BU(s)$$

$$\longrightarrow Y(s)=\underbrace{\left[C(sI-A)^{-1}B+D\right]}_{G(s)}U(s)$$

نکته ۱: هر چند ماتریسهای A، B، C، D از نظر ظاهر متفاوت هستند ولی وقتی در رابطهٔ $G(s)$ گذاشته شوند همگی نتیجهٔ یکسانی را می‌دهند.

نکته ۲: اگر هر ماتریس دلخواه T ($\det T \neq 0$) تعریف شود می‌توان یک معادلهٔ حالت دیگر نیز برای همان مدار تعریف کرد.

$$\begin{cases} \dot{\underline{x}} = A\underline{x} + Bu \\ y = C\underline{x} + Du \end{cases} , \quad \underline{q} = T\cdot\underline{x}$$

$$\longrightarrow \begin{cases} \dot{\underline{x}} = A'\underline{q} + B'u \\ \underline{y} = C'\underline{q} + D'u \end{cases} \longrightarrow \dot{\underline{q}} = T\dot{\underline{x}} = T(A\underline{x} + Bu) = (TAT^{-1})\underline{q} + (TB)u$$

$$\longrightarrow A' = TAT^{-1} \quad , \quad B' = TB$$

و به همین ترتیب می‌توان ثابت کرد که:

$$C' = CT^{-1} \qquad D' = D$$

حل معادلات حالت:

$$\begin{cases} \dot{\underline{x}} = A\underline{x} + Bu \\ y = C\underline{x} + Du \end{cases}$$

نکته ۱: محاسبهٔ خروجی (y) با داشتن و بعدی از روی تابع تبدیل و معادلهٔ دیفرانسیل به صورت دستی ساده‌تر است.

نکته ۲: حل یک یک مدار الکتریکی به صورت معادلات حالت برای کامپیوتر بسیار مناسب‌تر است.

$$y = \underset{(1\times n)}{C}\,\underset{n\times n}{e^{At}}\,\underset{n\times 1}{\underline{x}_0} + \int_0^t \underset{1\times n}{C}\,\underset{n\times n}{e^{A(t-\tau)}}\cdot \underset{n\times 1}{B}\cdot u(\tau)\,d\tau + D\,u(t)$$

y با معلوم بودن A, B, C, D و x_0 و $u(t)$ (برای $t \geq 0$) قابل محاسبه است.

اثبات (برای A اسکالر):

$$\begin{cases} \dot{x} = ax + bu \\ y = cx + du \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} sX(s) - x_0 = aX(s) + bU(s) \\ \end{cases}$$

$$\longrightarrow (s-a)X(s) = x_0 + bU(s)$$

$$\longrightarrow X(s) = \frac{1}{s-a} x_0 + \frac{1}{s-a} bU(s)$$

$$\longrightarrow x(t) = e^{at} x_0 + \int_0^t e^{a(t-\tau)} \cdot b\, u(\tau)\, d\tau$$

$$\longrightarrow y(t) = ce^{at} x_0 + \int_0^t ce^{a(t-\tau)} b\, u(\tau)\, d\tau + d\, u(t)$$

$$e^{At} \longleftrightarrow (SI-A)^{-1}$$

قسمت اصلی محاسبهٔ y، محاسبهٔ e^{At} است:

چند روش:

۱ـ استفاده از تبدیل لاپلاس $(SI-A)^{-1}$

۲ـ استفاده از مقادیر و بردارهای ویژه

۳ـ قطری کردن ماتریس A

۴ـ روش کیلی - هامیلتون.

محاسبهٔ e^{At} با استفاده از تبدیل لاپلاس (در قالب مثال):

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \longrightarrow SI - A = \begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s & -1 \\ 2 & s+3 \end{bmatrix}$$

$$\longrightarrow (sI-A)^{-1}=\frac{1}{s^2+3s+2}\begin{bmatrix} s+3 & 1 \\ -2 & s \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{s+3}{(s+1)(s+2)} & \frac{1}{(s+1)(s+2)} \\ \frac{-2}{(s+1)(s+2)} & \frac{s}{(s+1)(s+2)} \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} \frac{2}{s+1}-\frac{1}{s+2} & \frac{1}{s+1}-\frac{1}{s+2} \\ \frac{2}{s+2}-\frac{2}{s+1} & \frac{2}{s+2}-\frac{1}{s+1} \end{bmatrix}$$

$$\longrightarrow e^{At}=\begin{bmatrix} 2e^{-t}-e^{-2t} & e^{-t}-e^{-2t} \\ 2e^{-2t}-2e^{-t} & 2e^{-2t}-e^{-t} \end{bmatrix}$$

نکته: اگر ماتریس A قطری باشد کار بسیار ساده تر است.

$$A=\begin{bmatrix} -\alpha_1 & & & \\ & -\alpha_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & -\alpha_N \end{bmatrix} \longrightarrow e^{At}=\begin{bmatrix} e^{-\alpha_1 t} & & & \\ & e^{-\alpha_2 t} & & \\ & & \ddots & \\ & & & e^{-\alpha_N t} \end{bmatrix}$$

یادآوری: برای هر ماتریس $n\times n$ (A) با مرتبهٔ n ، n مقدار ویژه و n بردار ویژه قابل تعریف

است که در رابطهٔ زیر صدق می‌کند.

$$A.V_i=\underset{\text{مقدار ویژه}}{\lambda_i}\ \underset{\text{بردار ویژه}}{V_i}$$

مثال: $A=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$, $\underline{z}\triangleq\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$.

$$A\underline{z}=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -1 \\ -5 \end{bmatrix}$$

حال اگر $\underline{q}=\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$:

$$A\underline{q}=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}$$

نحوهٔ محاسبهٔ مقدار و بردار ویژه:

مقادیر ویژه ریشه‌های معادلهٔ مشخصه $|\lambda I - A| = 0$ می‌باشند.

$$\begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda & -1 \\ 2 & \lambda-3 \end{bmatrix} \quad , \quad |\lambda I - A| = 0$$

$$\longrightarrow \lambda(\lambda-3)+2=0 \longrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 1 \\ \lambda_2 = 2 \end{cases}$$

محاسبهٔ بردارهای ویژه:

$$A \cdot \underline{V}_1 = \lambda_1 V_1$$

$$\longrightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{11} \\ V_{12} \end{bmatrix} = 1 \begin{bmatrix} V_{11} \\ V_{12} \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{cases} V_{12} = V_{11} \\ -2V_{11} + 3V_{12} = V_{12} \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} V_{11} = 1 \\ V_{12} = 1 \end{cases}$$

$$\longrightarrow \underline{V}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad , \quad \underline{V}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

قضیه:

$$e^{At} = PQP^{-1} \quad , \quad P = [\underline{V}_1, \underline{V}_2, \dots, \underline{V}_n]$$

$$P = \begin{bmatrix} V_{11} & V_{21} & \cdots & V_{n1} \\ V_{12} & V_{22} & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \\ V_{1n} & V_{2n} & & V_{nn} \end{bmatrix} \quad , \quad Q = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & & & 0 \\ & e^{\lambda_2 t} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & e^{\lambda_n t} \end{bmatrix}$$

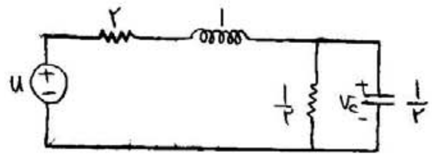
$$\underline{V}_1 \qquad \underline{V}_2 \qquad \underline{V}_n$$

در مثال قبل:

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad , \quad Q = \begin{bmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{2t} \end{bmatrix}$$

$$e^{At} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{2t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2e^t & -e^t \\ -e^{2t} & e^{2t} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2e^t - e^{2t} & -e^t + e^{2t} \\ 2e^t - 2e^{2t} & -e^t + 2e^{2t} \end{bmatrix}$$



مثال : ابتدا مدار زیر را به فرم معادلات حالت بنویسید

به ازای ورودی پله و $\underline{x}_0=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$ خروجی را محاسبه کنید.

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-4 & -2\\ 1 & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}u$$

$$y=\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}$$

$$(SI-A)^{-1}\longleftrightarrow e^{At}$$

$$SI-A=\begin{bmatrix}S & 0\\ 0 & S\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}-4 & -2\\ 1 & -2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}S+4 & 2\\ -1 & S+2\end{bmatrix}$$

$$(SI-A)^{-1}=\begin{bmatrix}\dfrac{\overset{S+3-1}{S+2}}{S^2+6S+10} & \dfrac{-2}{S^2+6S+10}\\[2ex] \dfrac{1}{S^2+6S+10} & \dfrac{\overset{S+3+1}{S+4}}{S^2+6S+10}\end{bmatrix}$$

$$S^2+6S+10=(S+3)^2+1^2$$

$$\frac{S+3}{(S+3)^2+1}\longleftrightarrow e^{-3t}\cos t$$

$$\frac{1}{(S+3)^2+1}\longleftrightarrow e^{-3t}\sin t$$

$$e^{At}=e^{-3t}\begin{bmatrix}\cos t-\sin t & -2\sin t\\ \sin t & \cos t+\sin t\end{bmatrix}$$

$$,\quad y(t)=\underbrace{Ce^{At}\underline{x}_0}_{\text{اسکالر } y_1}+\underbrace{\int_0^t \underbrace{Ce^{A(t-\tau)}B}_{\text{اسکالر}}\,u(\tau)\,d\tau}_{y_2}$$

$$y_1 = e^{-3t}\left[\cos t - 3\sin t\right]$$

$$y_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_{11}(t) + a_{12}(t) \\ a_{21}(t) + a_{22}(t) \end{bmatrix} = a_{11}(t) + a_{12}(t)$$

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_{11}(t-\tau) & a_{12}(t-\tau) \\ a_{21}(t-\tau) & a_{22}(t-\tau) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} = -a_{12}(t-\tau) = 2e^{-3(t-\tau)}\sin(t-\tau)$$

$$y_2 = 2\int_0^t e^{-3(t-\tau)}\sin(t-\tau)\,d\tau \quad , \quad t-\tau = \theta$$

$$y_2(t) = 2\int_0^t e^{-3\theta}\sin\theta\,d\theta = \frac{2e^{-3\theta}(-3\sin\theta - \cos\theta)}{10}\Bigg|_0^t$$

$$= \frac{1}{5}\left(-e^{-3t}\cos t - 3e^{-3t}\sin t + 1\right)$$

$$y(t) = y_1(t) + y_2(t)$$

فرکانسهای طبیعی : Natural Frequencies

فرکانس طبیعی برای مدارهای خطی تغییرناپذیر بازمان LTI تعریف می شود.

فرکانس طبیعی برای مدارهایی تعریف می‌شود که شامل منابع مستقل باشد.

فرکانس طبیعی برای ۱- یک متغیر شبکه (مدار) ۲- خود شبکه (مدار) قابل تعریف است.

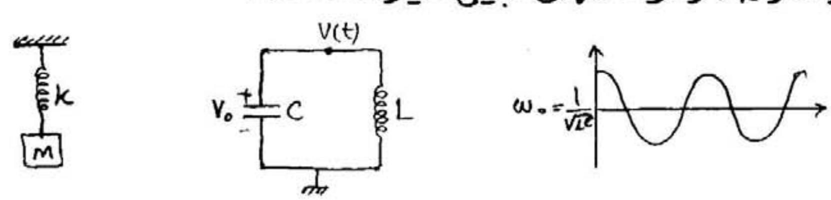
- متغیر شبکه
  - ولتاژ
    - یک شاخه
    - یک گره
  - جریان
    - یک شاخه
    - یک حلقه

در یک مدار LTI که با شرایط اولیه کار می کند، اگر $x(t)$ یک متغیر شبکه باشد در آن صورت :

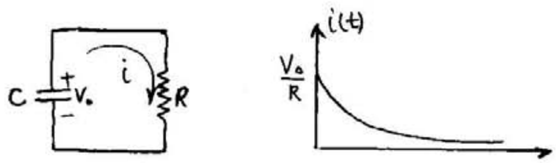
$$x(t) = K_1 e^{s_1 t} + K_2 e^{s_2 t} + \cdots + K_n e^{s_n t}$$

که S_1 و S_2 و ... و S_K را فرکانسهای طبیعی متغیر $x(t)$ نامند.

مثال ۱ :



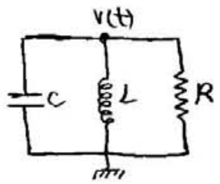
مثال ۲ :



$$i(t) = \underbrace{\frac{V_0}{R}}_{K_1} e^{\overbrace{\left(\frac{-1}{RC}\right)}^{S_1} t}$$

$\longrightarrow \quad S_1 = \frac{-1}{RC}$ فرکانس طبیعی

مثال ۳:



$V(t)=k_1e^{s_1t}+k_2e^{s_2t}$

, $S_{1,2}=\frac{-1}{2RC}\pm\sqrt{\left(\frac{1}{2RC}\right)^2-\frac{1}{LC}}$

الف: $R=\frac{1}{6}$, $C=1$, $L=\frac{1}{25}$ $\longrightarrow$ $S_1=-3+j$, $S_2=-3-j$

ب: $R=\frac{1}{6}$, $C=1$, $L=\frac{1}{5}$ $\longrightarrow$ $S_1=-5$, $S_2=-1$

ج: $R=\frac{1}{6}$, $C=1$, $L=\frac{1}{9}$ $\longrightarrow$ $S_1=-3$, $S_2=-3$

$V(t)=k_1e^{-3t}+k_2te^{-3t}$

در این صورت می گوییم متغیر شبکه دارای فرکانس طبیعی ۳- از مرتبهٔ ۲ می باشد.

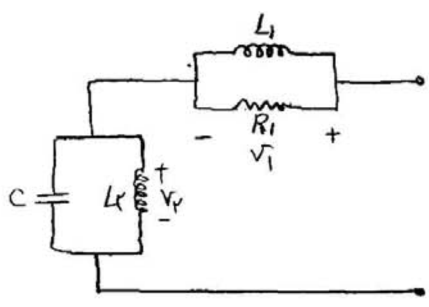
تعریف فرکانس طبیعی یک شبکه (مدار):

s_k را فرکانس طبیعی یک شبکه نامند چنانچه s_k فرکانس طبیعی یکی از متغیرهای شبکه باشد.

نکته ۱: در اکثر مدارها فرکانس طبیعی کلیه متغیرها و خود شبکه یکسان است.

نکته ۲: در بعضی موارد فرکانسهای طبیعی مدار با متغیرهای شبکه یکسان نیست.

مثال:



فرکانس طبیعی V_1: $S_1=\frac{-R_1}{L_1}$

فرکانس طبیعی V_2: $\frac{-j}{\sqrt{L_2C}}, +\frac{j}{\sqrt{L_2C}}$

فرکانس طبیعی شبکه: $\frac{-R_1}{L_1}, \frac{j}{\sqrt{L_2C}}, \frac{-j}{\sqrt{L_2C}}$

نحوهٔ محاسبهٔ فرکانسهای طبیعی یک متغیر شبکه (غیر از محاسبهٔ مستقیم):

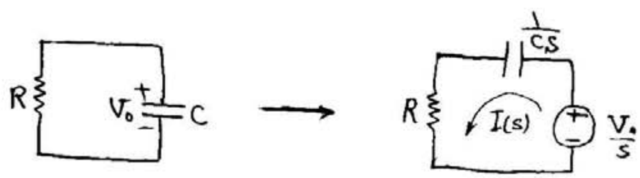
۱ـ استفاده از تبدیل لاپلاس $x(t)$ ، $[X(s)]$

اگر $X(s)$ به صورت زیر باشد:

$$X(s)=\frac{b_0+b_1s+\cdots+b_ms^m}{a_0+a_1s+\cdots+a_Ns^N}$$

ریشه‌های مخرج (قطبها) همان فرکانسهای طبیعی $x(t)$ هستند.

مثال:



$$I(s)=\frac{\frac{V_0}{s}}{R+\frac{1}{CS}}=\frac{CV_0}{1+RCS}\longrightarrow 1+RCS=0\longrightarrow S=\frac{-1}{RC}$$

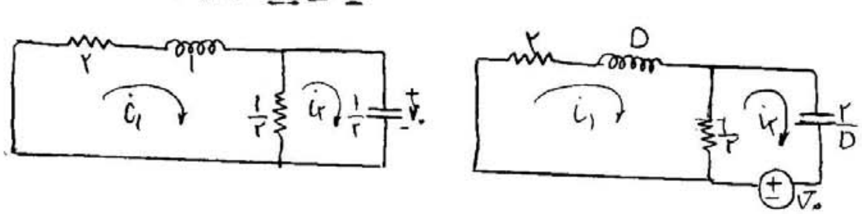
۲ـ استفاده از معادلات انتگرو دیفرانسیلی:

اگر معادلات انتگرو دیفرانسیلی یک مدار را بنویسیم به شکل زیر در می‌آید:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} P_{11}(D) & P_{12}(D) & \cdots & P_{1n}(D) \\ P_{21}(D) & P_{22}(D) & \cdots & P_{2n}(D) \\ \vdots & & & \\ P_{n1}(D) & & & P_{nn}(D) \end{bmatrix}}_{P(D)}\underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}}_{\underline{X}}=\underbrace{\begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_n \end{bmatrix}}_{\underline{f}}$$

$$\longrightarrow \quad P(D)\cdot\underline{X}=\underline{f}$$

مثال:



$$\begin{bmatrix} \frac{5}{2}+D & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2}+\frac{2}{D} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -V_0 \end{bmatrix}$$

نکته: اگر معادلهٔ دیفرانسیل $x(t)$ را به شکل زیر داشته باشیم :

$$\left(D^n + a_{n-1} D^{n-1} + \cdots + a_1 D + a_0\right) x(t) = f'(t)$$

در آن صورت ریشه‌های معادلهٔ $D^n + a_{n-1} D^{n-1} + \cdots + a_1 D + a_0 = 0$

همان فرکانسهای طبیعی هستند.

نکته: در معادلهٔ بالا، باید معادلهٔ دیفرانسیل دارای حداقل درجهٔ ممکن باشد. (معادلهٔ دیفرانسیل مینیمال)

الگوریتم کار:

۱- معادلات انتگرو دیفرانسیلی را طوری جابجا می‌کنیم که x_n (متغیر آخری)، متغیری باشد که قرار است فرکانسهای طبیعی آن را محاسبه کنیم.

۲- ماتریس $P(D)$ را به صورت یک ماتریس بالامثلثی درمی‌آوریم :

$$\begin{bmatrix} \hat{P}_{11}(D) & P_{12}(D) & \cdots & \hat{P}_{n1}(D) \\ 0 & \hat{P}_{22}(D) & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & 0 & & \hat{P}_{nn}(D) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{f}_1 \\ \hat{f}_2 \\ \vdots \\ \hat{f}_N \end{bmatrix}$$

۳- درآن صورت ریشه‌های معادلهٔ $\hat{P}_{nn}(D)=0$ همان فرکانسهای طبیعی $x_n(t)$ هستند .

یادآوری یک مثال ساده عددی : حل یک دستگاه دو معادلهٔ دومجهولی

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_1 &: \ 2x_1+x_2=11 \\ \mathcal{E}_2 &: \ 3x_1+5x_2=34 \end{aligned} \longrightarrow \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 11 \\ 34 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_1' &: \mathcal{E}_1 : \ 2x_1+x_2=11 \\ \mathcal{E}_2' &: \mathcal{E}_2-\tfrac{3}{2}\mathcal{E}_1 : \ 3{,}5x_2=17{,}5 \end{aligned} \longrightarrow \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3{,}5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 11 \\ 17{,}5 \end{bmatrix}$$

$$\longrightarrow 3{,}5x_2=17{,}5 \longrightarrow x_2=5$$
$$\longrightarrow 2x_1+5=11 \longrightarrow x_1=3$$

درمدار مثال قبل :

$$\mathcal{E}_1 : \ \left(\tfrac{5}{2}+D\right)i_1-\tfrac{1}{2}i_2=0$$

$$\mathcal{E}_2 : \ -\tfrac{1}{2}i_1+\left(\tfrac{D+4}{2D}\right)i_2=-V_0$$

$$\longrightarrow \quad \mathcal{E}_1'=\mathcal{E}_1+(5+2D)\mathcal{E}_2 : \quad \left[\frac{(D+4)(5+2D)}{2D}-\frac{1}{2}\right]i_2=-(5+2D)V_0$$

$$\mathcal{E}_2'=\mathcal{E}_2 : \quad -\tfrac{1}{2}i_1+\left(\tfrac{D+4}{2D}\right)i_2=-V_0$$

$$\longrightarrow \begin{bmatrix} 0 & \frac{(D+4)(5+2D)-D}{2D} \\ -\frac{1}{2} & \frac{D+4}{2D} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -(5+2D)V_0 \\ -V_0 \end{bmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{D+4}{2D} \\ 0 & \underbrace{\frac{(D+4)(5+2D)-D}{2D}}_{\hat{P}_{nn}(D)} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -V_0 \\ -(5+2D)V_0 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow (D+4)(5+2D) - D = 0 \qquad \rightarrow 2D^2 + 13D + 20 - D = 0$$

$$\rightarrow D^2 + 6D + 10 = 0 \qquad \rightarrow \begin{matrix} S_1 = -3 + j \\ S_2 = -3 - j \end{matrix}$$

الگوریتم کتاب جبه‌دار برای بالامثلثی کردن ماتریس $P(D)$:

۱- در ستون اول ساده‌ترین عنصر را انتخاب می‌کنیم (از نظر درجه).

نکته۱: $P_{ij}(D)$ یا از درجه صفر یا از یک و یا از دو است.

نکته۲: اگر دو یا چند عنصر هم درجه (در پائین‌ترین درجه) داشته باشیم یکی را به دلخواه انتخاب می‌کنیم. $P_{k1}(D)$:

۲- برای $i \neq k$ این معادله را می‌نویسیم:

$$\frac{P_{i1}(D)}{P_{k1}(D)} = \underline{\underline{q_{i1}(D)}} + \frac{r_{i1}(D)}{P_{k1}(D)}$$

۳- دستگاه معادلات را به شکل زیر جایگزین کنیم:

$$\begin{aligned} \varepsilon_1' &= \varepsilon_1 - q_{11}(D) \cdot \varepsilon_k \\ \varepsilon_2' &= \varepsilon_2 - q_{21}(D) \cdot \varepsilon_k \\ &\vdots \\ \varepsilon_k' &= \varepsilon_k \\ &\vdots \\ \varepsilon_n' &= \varepsilon_n - q_{n1}(D) \cdot \varepsilon_k \end{aligned}$$

۴- مراحل ۱ و ۲ و ۳ را آن قدر تکرار می‌کنیم تا فقط یکی از عناصر ستون اول صفر نباشد.

۵- ردیف غیرصفر را به اول می‌بریم

نتیجه بعد از بند ۵ :

$$\begin{bmatrix} P'_{11}(D) & P'_{12}(D) & \cdots & P'_{1n}(D) \\ 0 & P'_{22}(D) & & P'_{2n}(D) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & P'_{n2}(D) & & P'_{nn}(D) \end{bmatrix}$$

۶- سطر و ستون اول را حذف کنیم.

$$\begin{bmatrix} P'_{22}(D) & \cdots & P'_{2n}(D) \\ P'_{32}(D) & & \vdots \\ \vdots & & \\ P'_{n2}(D) & & P'_{nn}(D) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f'_2 \\ f'_3 \\ \vdots \\ f'_n \end{bmatrix}$$

۷- مراحل ۱ تا ۶ را آن قدر ادامه می دهیم ~~که~~ تا $\hat{P}_{nn}(D)$ را بدست آوریم.

مثال ص ۳۰۳ کتاب جبه‌دار :

$$\begin{aligned} (D^2+2D+1)\, i_1 - (D+1)\, i_2 &= 0 \\ -(D^2+D)\, i_1 + (3D+1)\, i_2 &= e_s \end{aligned} \longrightarrow \begin{array}{c} \varepsilon_1 = \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \end{array} \begin{bmatrix} D^2+2D+1 & -(D+1) \\ -(D^2+D) & (3D+1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ e_s \end{bmatrix}$$

در مرحله‌ی اول $K=1$ انتخاب می شود :

$$\frac{-(D^2+D)}{D^2+2D+1} = \underbrace{(-1)}_{q_{21}(D)} + \frac{D+1}{D^2+2D+1}$$

$$\longrightarrow \begin{array}{c} \varepsilon'_1 = \varepsilon_1 \\ \varepsilon'_2 = \varepsilon_2 + \varepsilon_1 \end{array} \begin{bmatrix} D^2+2D+1 & -(D+1) \\ D+1 & 2D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ e_s \end{bmatrix}$$

در مرحله‌ی دوم $K=2$ انتخاب می شود :

$$\frac{D^2+2D+1}{D+1} = \underline{D+1} + \frac{0}{D+1}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_1'' &= \mathcal{E}_1' - (D+1)\mathcal{E}_2' \\ \mathcal{E}_2'' &= \mathcal{E}_2' \end{aligned} \quad \begin{bmatrix} 0 & -(D+1)(2D+1) \\ D+1 & 2D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -(D+1)e_s \\ e_s \end{bmatrix}$$

$$\longrightarrow \quad \begin{bmatrix} D+1 & 2D \\ 0 & \underbrace{-(D+1)(2D+1)}_{\hat{P}_{nn}(D)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_s \\ -(D+1)e_s \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{?} \quad \begin{aligned} S_1 &= -1 \\ S_2 &= \frac{-1}{2} \end{aligned}$$: فرکانسهای طبیعی i_2

نحوهٔ محاسبهٔ فرکانسهای طبیعی یک شبکه :

نکته : برای محاسبهٔ فرکانسهای طبیعی شبکه نیازی به محاسبهٔ تمامی فرکانسهای طبیعی متغیرهای شبکه نیست.

راه محاسبه :

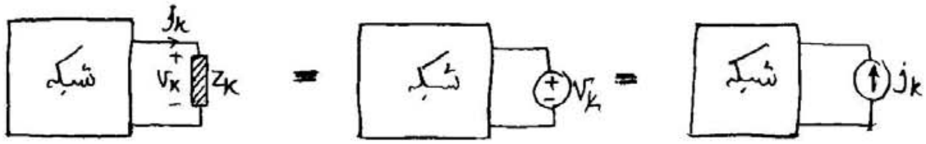
۱ـ ریشه های معادلهٔ $\det\left[P(D)\right] = 0$

۲ـ مقادیر ویژهٔ ماتریس A

قضیه جانشینی : چنانچه در شبکه شاخه خطی مونظر رحیم (شاخه k ام دارای ولتاژ V_k و جریان J_k می باشد). مشروط بر اینکه ۱- جواب یکتایی برای ولتاژ و جریان داشته باشیم.

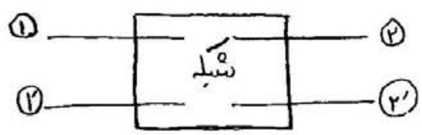
۲- تزویج در آن شاخه نباشد.

می توانیم آن مدار را با هر کدام از مدارهای زیر جایگزین کنیم.



قضیه هم پاسخی (recipricity):

مدار ۴ سر زیر را در نظر بگیرید.



درحالی که شبکه دارای خواص زیر است:

۱- منبع (وابسته، مستقل) نداشته باشیم.

۲- هدف فقط پاسخ حالت صفر باشد. (شرط اولیه نداشته باشیم)

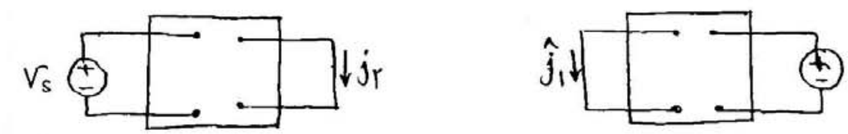
۳- ژیراتور در مدار نباشد.

به عبارت دیگر مدار متشکل از تعدادی مقاومت، سلف، خازن، سلف تزویج شده و ترانسفورماتور می تواند باشد.

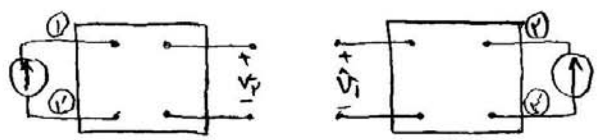
بیان ۱: مدار با خصوصیات ذکر شده هم پاسخ است بدین معنی که :

اگر به سرهای ① و ①' یک منبع ولتاژ وصل کنیم و سرهای ② و ②' را اتصال کوتاه کنیم و مقدار جریان اتصال کوتاه را j_2 بنامیم و همچنین اگر به سرهای ② و ②' همان منبع ولتاژ را وصل کنیم و این بار سرهای ① و ①' را اتصال کوتاه کنیم و مقدار جریان را $\hat{j}_1$ بنامیم در آن صورت

$$j_2 = \hat{j}_1$$

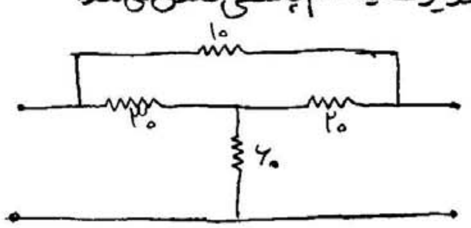


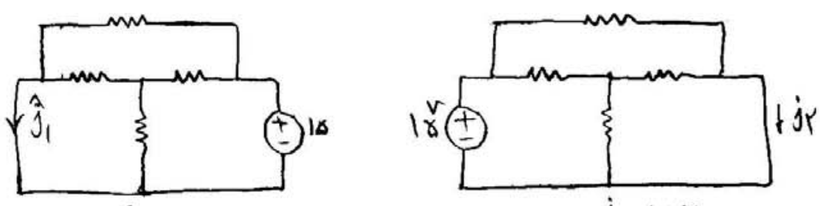
بیان ۲: مدار با خصوصیات ذکر شده هم پاسخ است بدین معنی که اگر به سرهای ① و ①' یک منبع جریان وصل کنیم و ولتاژ مدار باز دو سر ② و ②' را v_2 بنامیم و اگر همان منبع جریان را به سرهای ② و ②' وصل کنیم و ولتاژ مدار باز دو سر ① و ①' را $\hat{v}_1$ بنامیم در آن صورت:



$$V_2 = \hat{V}_1$$

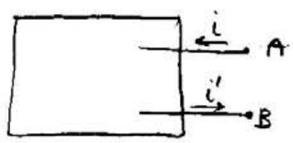
مثال: ثابت کنید که در مدار زیر قضیه هم پاسخی صدق می‌کند.



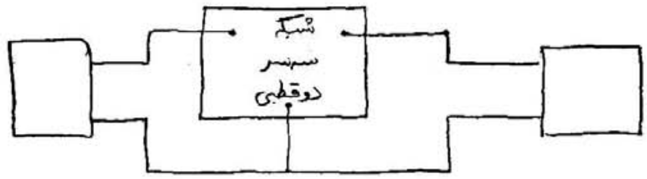


$\hat{j}_1 = ۱/۷۵$ $\quad$ $j_2 = ۱/۷۵$

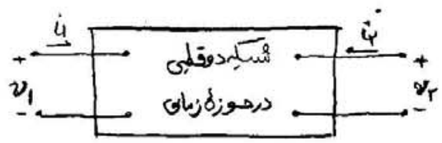
دوقطبی: یادآوری بحث معادل تونن

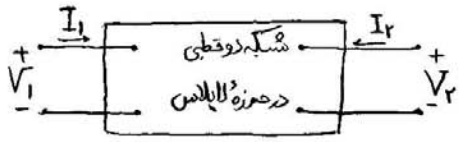


نکته: شبکه دوقطبی ممکن است از مدار سه سر ناشی شود.



بحث ما در فصل دوقطبی ها روی مداری به شکل زیر است





در تحلیل مدارهای دوقطبی دو متغیر را مستقل و دو متغیر را وابسته در نظر می گیرند.

$$\begin{cases} I_1 = y_{11} \cdot V_1 + y_{12} \cdot V_2 \\ I_2 = y_{21} \cdot V_1 + y_{22} \cdot V_2 \end{cases}$$

مدل ادمیتانسی

$$\begin{cases} V_1 = Z_{11} \cdot I_1 + Z_{12} \cdot I_2 \\ V_2 = Z_{21} \cdot I_1 + Z_{22} \cdot I_2 \end{cases}$$

مدل امپدانسی

به طور کلی به دو مدل بالا، مدل ایمیتانسی گویند.

مدلهای انتقالی:

مدل b:

$$\begin{cases} V_2 = b_{11} V_1 - b_{12} I_1 \\ I_2 = b_{21} V_1 - b_{22} I_1 \end{cases}$$

مدل a:

$$\begin{cases} V_1 = a_{11} \cdot V_2 - a_{12} I_2 \\ I_1 = a_{21} \cdot V_2 - a_{22} I_2 \end{cases}$$

مدلهای هیبرید:

$$\begin{cases} V_1 = h_{11} I_1 + h_{12} V_2 \\ I_2 = h_{21} I_1 + h_{22} V_2 \end{cases}$$

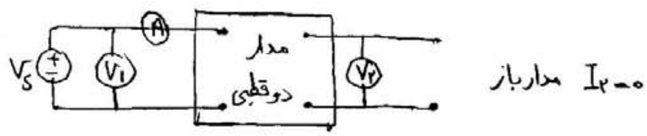
$$\begin{cases} I_1 = g_{11} V_1 + g_{12} I_2 \\ V_2 = g_{21} V_1 + g_{22} I_2 \end{cases}$$

نحوهٔ محاسبهٔ ضرائب :

۱- ضرائب مدل امپدانسی

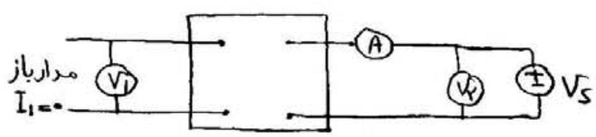
الف : راه آزمایش : برای محاسبه پارامترهای مدل امپدانسی دو آزمایش به شکل زیر لازم است

الف ۱ :



$$Z_{11} = \frac{V_1}{I_1}\Big|_{I_2=0} \quad , \quad Z_{21} = \frac{V_2}{I_1}\Big|_{I_2=0}$$

الف ۲ :



$$Z_{12} = \frac{V_1}{I_2}\Big|_{I_1=0} \quad , \quad Z_{22} = \frac{V_2}{I_2}\Big|_{I_1=0}$$

ب : راه محاسبه : با استفاده از روابط بالا می توانیم به جای آزمایش از محاسبه استفاده کنیم :

۲- ضرائب مدل ادمیتانسی

$$Y_{11} = \frac{I_1}{V_1}\Big|_{V_2=0} \quad , \quad Y_{21} = \frac{I_2}{V_1}\Big|_{V_2=0}$$

$$Y_{12} = \frac{I_1}{V_2}\Big|_{V_1=0} \quad , \quad Y_{22} = \frac{I_2}{V_2}\Big|_{V_1=0}$$

مثال : پارامترهای مدل امپدانسی دوقطبی زیر را محاسبه کنید