ترکیبیات

(دوم تجربی و ریاضی فیزیک)

مؤلف این مجموعه: دکتر علیرضا نورالدینی

تاریخ آنلاین: ۲ اردیبهشت ۱۳۹۲

بخش اول:

اصل‌های شمارش

معمولاً برای انجام یک کار، مراحل متفاوتی هر یک به تعداد حالت‌های مختلف انجام می‌گیرد و در نتیجه آن کار اصلی انجام می‌پذیرد. محاسبه‌ی تعداد این حالت‌ها هدف بحث‌های **آنالیز ترکیبی** یا همان **ترکیبیات** است. دستیابی به این هدف بر مبنای دو اصل مهم زیر پی‌ریزی می‌شود:

اصل شمارش جمع

فرض کنیم یک کار A به m طریق و کار دیگری چون B به n طریق مختلف قابل انجام باشد. اگر بخواهیم یکی از کارهای A **یا** B را انجام دهیم، این کار به $m+n$ طریق مختلف قابل انجام است.

اصل شمارش ضرب

فرض کنیم یک کار A به m طریق و برای هر کدام از این حالت‌ها، کار دیگری چون B به n طریق مختلف قابل انجام باشد. اکنون اگر بخواهیم کارهای A **و** B را با هم انجام دهیم، این کار به $m\times n$ طریق مختلف انجام می‌شود.

نکته. دو اصل شمارش بالا برای بیش از دو کار نیز به‌طریق مشابه برقرار هستند. مثلاً اگر کار اول به n_1 طریق، کار دوم به n_2 طریق و .... و کار kام به n_k طریق مختلف قابل انجام باشد، آنگاه انجام تمام این کارها با هم به $n_1\times n_2\times\cdots\times n_k$ طریق مختلف قابل انجام است.

مثال. تعداد ماتریس‌های از مرتبه‌ی ۳×۲ که با درایه‌های a، b و c تشکیل می‌شود را مشخص کنید.

پاسخ برای تشکیل یک چنین ماتریسی باید ۶ کار با هم انجام شوند، یعنی باید درایه‌های a_{11}، a_{12}، a_{21}، a_{22}، a_{31} و a_{32} را انتخاب کنیم. چون هر انتخاب به ۳ روش قابل انجام است، طبق اصل شمارش ضرب، تعداد انتخاب‌ها برابر است با:

$$3\times3\times3\times3\times3\times3=3^6=729$$

مثال. با ارقام ۰، ۱، ۲، ۳، ۴ و ۵ چند عدد سه رقمی فرد بدون تکرار ارقام می‌توان نوشت؟

پاسخ توجه کنید که در حل این مثال برای رقم یکان سه انتخاب ۱، ۳ و ۵ وجود دارد؛ رقم صفر در سمت راست نمی‌تواند قرار گیرد و تکرار ارقام مجاز نیست. بنابراین:

$$\underline{4}\times\underline{4}\times\underline{3}=48$$

غیر از ۰ و رقم قرار داده شده در یکان (۲) — سایر ارقام (۳) — یک رقم فرد (۱)

نکته. هرگاه محاسبه‌ی تعداد روش‌ها به روش مستقیم غیر ممکن و یا مشکل باشد، از روش غیر مستقیم **(متمم)** استفاده می‌کنیم.

مثال. با ارقام ۰، ۱، ۲، ۳، ۴ و ۵ چند عدد سه رقمی زوج بدون تکرار ارقام می‌توان نوشت؟

پاسخ تعداد کل اعداد سه رقمی بدون تکرار ارقام که با این پنج رقم تشکیل می‌شود، برابر است با:

$$\underline{۵}\times\underline{۵}\times\underline{۴}=۱۰۰$$

چون طبق مثال قبل، ۴۸ عدد از آن‌ها فرد هستند، پس تعداد عددهای زوج عبارت است از:

$$۱۰۰-۴۸=۵۲$$

تمرین. روش دیگری برای حل مثال قبل بیان کنید.

مثال. تعداد اعداد سه رقمی شامل رقم ۷ را تعیین کنید.

پاسخ در این مثال هم پاسخ مستقیم آسان نیست، زیرا رقم ۷ می‌تواند به دفعات مختلف و در جایگاه‌های متفاوت بکار رود. با استفاده از روش غیر مستقیم:

تعداد اعداد شامل ۷ $=$ (کل اعداد سه رقمی) $-$ (سه رقمی‌های بدون رقم ۷) $=۹\times۱۰\times۱۰-۸\times۹\times۹=۹۰۰-۶۴۸=۲۵۲$

تعریف. برای عدد طبیعی n، **فاکتوریل** آن به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$n!=n\times(n-۱)\times(n-۲)\times\cdots\times۲\times۱$$

به‌علاوه تعریف می‌کنیم $۰!=۱$.

نکته. عدد $n!$ را می‌توان بر حسب نیاز به صورت‌های مختلفی نوشت. مثلاً:

$$۹!=۹\times۸\times\underbrace{۷\times\cdots\times۲\times۱}_{۷!}=۹\times۸\times۷!=۹\times۸\times۷\times۶\times۵\times۴!$$

در حالت کلی، در مورد $n!$ می‌توان نوشت:

$$n!=n\times(n-۱)!=n\times(n-۱)\times(n-۲)!=\cdots$$

مثال. کسر $\frac{(n+۱)!\,۶!}{(n-۱)!\,۳!}$ را ساده کنید.

پاسخ با استفاده از نکته‌ی قبل، اعداد بزرگ‌تر را به فرم اعداد کوچک‌تر می‌نویسیم:

$$\frac{(n+۱)!\,۶!}{(n-۱)!\,۳!}=\frac{(n+۱)\times n\times(n-۱)!\times۶\times۵\times۴\times۳!}{(n-۱)!\,۳!}=۶\times۵\times۴n(n+۱)=۱۲۰\,n(n+۱)$$

بخش دوم:

جایگشت‌های اشیاء

تعریف. به هر یک از حالت‌هایی که چند شیء <u>مختلف</u> کنار هم قرار می‌گیرند یک **جایگشت** از آن اشیاء گفته می‌شود.

تذکر مهم. در جایگشت همواره ترتیب قرار گرفتن اشیاء در کنار هم دارای اهمیت است. مثلاً ABC و ACB دو جایگشت مختلف از حروف A، B و C هستند.

مثال. تعداد جایگشت‌های n شیء متمایز طبق اصل ضرب برابر است با $n!$.

$$\underline{n}\times\underline{n-۱}\times\cdots\times\underline{۳}\times\underline{۲}\times\underline{۱}=n!$$

مثال. به چند طریق می‌توان از میان سه نفر متقاضی استخدام در یک شرکت، یک مدیر، یک معاون و یک منشی انتخاب کرد؟

پاسخ چون ترتیب انتخاب در نوع شغل افراد تاثیر دارد، پس ترتیب مهم است و لذا تعداد حالت‌ها برابر است با $۳!=۶$.

نکته (جایگشت با تکرار). اگر در میان n شیء موجود، $n_۱$ تا از نوع اول، $n_۲$ تا از نوع دوم، . . . و n_k تا از نـوع kام باشـند، آنگـاه تعداد جایگشت‌های این n شیء برابر است با:

$$\frac{n!}{n_۱!\times n_۲!\times \cdots \times n_k!}$$

مثال. مشخص کنید که با حروف کلمه «فضیلت» و «تکرار» چند کلمه‌ی پنج حرفی نوشته می‌شود.

پاسخ در حروف کلمه‌ی «فضیلت» تکرار وجود ندارد و بنابراین تعداد کلمات پنج حرفی برابر است با تعداد جایگشت‌های پـنج حرف:

$$۵!=۱۲۰$$

اما در حروف کلمه‌ی «تکرار» حرف «ر» دو بار بکار رفته است و لذا با استفاده از نکته‌ی قبل، تعداد کلمات پنج حرفی که نوشـته می‌شود برابر است با:

$$\frac{۵!}{۲!}=\frac{۵\times ۴\times ۳\times ۲!}{۲!}=۵\times ۴\times ۳=۶۰$$

نکته. اگر n شیء متمایز داشته باشیم، آنگاه تعداد جایگشت‌های r شیء از میان این n شیء برابر است با:

$$P(n\,;\,r)=\frac{n!}{(n-r)!}$$

به این نوع جایگشت، **تبدیل** r شیء از n شیء نیز گفته می‌شود.

مثال. توسط ۹ نفر دانش‌آموز به چند طریق می‌توان صف‌های ۴ نفره تشکیل داد؟

پاسخ طبق نکته‌ی قبل باید تعداد جایگشت‌های ۴ شیء را از بین ۹ شیء محاسبه کنیم که برابر است با:

$$P(۹\,;\,۴)=\frac{۹!}{(۹-۴)!}=\frac{۹!}{۵!}=\frac{۹\times ۸\times ۷\times ۶\times ۵!}{۵!}=۹\times ۸\times ۷\times ۶=۳۰۲۴$$

تذکر. تعداد جایگشت‌های اشیاء را می‌توان با استفاده از اصل ضرب مستقیماً محاسبه کرد و استفاده از فرمول $P(n\,;\,r)$ بـه نـدرت انجام می‌شود. مثلاً در مورد مثال قبل می‌توانستیم نفر اول صف را به ۹ روش، نفر دوم را به ۸ روش، نفر سوم را به ۷ روش و نفر چهارم را به ۶ روش انتخاب کنیم و در نتیجه تعداد کل صف‌ها:

$$\underline{۹}\times\underline{۸}\times\underline{۷}\times\underline{۶}=۳۰۲۴$$

خواهد شد که با جواب بدست آمده به روش استفاده از فرمول مطابقت دارد.

تست. با ارقام ۰، ۱، ۲، ۳ و ۵ چند عدد سه رقمی مضرب ۵ بدون تکرار ارقام می‌توان نوشت؟

۱) ۱۲ ۲) ۱۵ ۳) ۱۸ ۴) ۲۱

پاسخ رقم یکان باید ۰ یا ۵ باشد. چون استفاده کردن یا نکردن از ۰ در جایگاه یکان در تعداد حالت‌های سایر ارقام موثر است، به اجبار باید دو حالت در نظر گرفت:

- رقم ۰ در یکان بکار رود: $۴\times ۳\times ۱=۱۲$
- رقم ۵ در یکان بکار رود: $۳\times ۳\times ۱=۹$

پس تعداد کل عددهایی که می‌توان نوشت طبق اصل جمع برابر $۱۲+۹=۲۱$ است.

چند نکته.

- تعداد حالت‌هایی که n نفر می‌توانند دور یک میز گرد بنشینند برابر است با $(n-۱)!$.
- تعداد گردن‌بندها یا تسبیح‌هایی که با n مهره می‌توان ساخت برابر است با $\frac{(n-۱)!}{۲}$.

مثال. به چند طریق می‌توان ۳ کتاب ریاضی و ۴ کتاب فیزیک را یک در میان در یک قسفه چید؟

پاسخ با توجه به این‌که تعداد کتاب‌های فیزیک بیشتر است، ابتدا کتاب فیزیک قرار می‌گیرد:

$$\underset{ف}{۴}\times\underset{ر}{۳}\times\underset{ف}{۳}\times\underset{ر}{۲}\times\underset{ف}{۲}\times\underset{ر}{۱}\times\underset{ف}{۱}=۴!\times۳!=۲۴\times۶=۱۴۴$$

نکته. اگر بخواهیم n شیء از یک نوع و m شیء از نوع دیگر را یک در میان کنار هم قرار دهیم، دو حالت رخ می‌دهد:

الف) اگر $m=n$، تعداد حالت‌ها برابر است با $۲m!n!$. (چرا؟)

ب) اگر $m=n+۱$، یعنی m و n دو عدد متوالی باشند، تعداد حالت‌ها برابر است با $m!n!$. (چرا؟)

نکته (طناب‌پیچ کردن). اگر بخواهیم n شیء مختلف را کنار هم قرار دهیم به‌طوری که rتای به‌خصوص **کنار هم قرار گیرند**، تعداد حالت‌ها برابر است با:

$$(n-r+۱)!\times r!$$

درنتیجه، تعداد حالت‌هایی که این r شیء **الزاماً همگی کنار هم نیستند** برابر است با:

$$n!-(n-r+۱)!\times r!$$

تست. ارقام ۱، ۲، ۳، ۴ و ۵ را به طریقی کنار هم قرار داده‌ایم که همواره رقم‌های فرد کنار هم باشند، تعداد پنج رقمی‌های حاصل کدام است؟ (سراسری تجربی ۸۲)

۱) ۱۲ ۲) ۲۴ ۳) ۳۶ ۴) ۴۸

پاسخ رقم‌های فرد را به هم طناب‌پیچ می‌کنیم و موقتاً به عنوان یک رقم در نظر می‌گیریم. این رقم با دو رقم ۲ و ۴ دارای !۳ جایگشت است. اما سه رقم طناب‌پیچ شده هم در کنار هم دارای !۳ جایگشت هستند. در نتیجه تعداد کل جایگشت‌ها (تعداد پنج رقمی‌ها) برابر است با:

$$۳!\times۳!=۶\times۶=۳۶$$

و بنابراین گزینه‌ی ۳ صحیح است.

مثال. تعیین کنید به چند طریق می‌توان ۳ کتاب ریاضی و ۳ کتاب شیمی را کنار هم قرار داد به‌طوری که کتاب‌های ریاضی همه کنار هم نباشند.

پاسخ ابتدا مانند تست قبلی حالت‌هایی که کتاب‌های ریاضی کنار هم باشند را محاسبه می‌کنیم:

$$۴!\times۳!=۲۴\times۶=۱۴۴$$

اکنون این عدد را از کل حالت‌هایی که این ۶ کتاب می‌توانند کنار هم قرار گیرند کم می‌کنیم:

$$۶!-۱۴۴=۷۲۰-۱۴۴=۵۷۶$$

مثال. الف) توسط رقم‌های ۱، ۱، ۱، ۶ و ۸ چند عدد پنج رقمی می‌توان نوشت؟

ب) توسط این ارقام چند عدد سه رقمی می‌توان نوشت؟

پاسخ در مورد قسمت (الف) چنان‌که قبلاً دیدیم باید از جایگشت‌های با تکرار استفاده کنیم. کل ارقام ۵تا هستند که سه‌تای آن‌ها تکراری است:

$$\frac{۵!}{۳!}=\frac{۵\times۴\times۳!}{۳!}=۵\times۴=۲۰$$

اما در مورد قسمت (ب) سه حالت می‌تواند رخ دهد:

یک رقم ۱ بکار رود : $۳\times۲\times۱=۶$

$$\text{دو رقم ۱ بکار رود} : \begin{cases} \dfrac{۳!}{۲!}=۳ \ : \text{رقم دیگر ۶ باشد} \\ \dfrac{۳!}{۲!}=۳ \ : \text{رقم دیگر ۸ باشد} \end{cases}$$

$$\text{سه رقم ۱ بکار رود} : ۱\times۱\times۱=۱$$

پس تعداد کل حالت‌ها طبق اصل شمارش جمع برابر است با:

$$۶+۳+۳+۱=۱۳$$

بخش سوم:

ترکیب (عدم اهمیتِ ترتیب)

تعریف. هرگاه در انتخاب r شیء از میان n شیء ترتیب مهم نباشد، به هر انتخاب یک **ترکیب** گوییم.

توجه. در تبدیل یا همان جایگشت‌های r شیء از میان n شیء معمولاً ساختن **صف** (با ترتیب) مورد توجه است، ولی در ترکیب به **گروه** یا **زیرمجموعه** rتایی از میان n شیء (بدون ترتیب) نظر داریم.

نکته. تعداد ترکیب‌های rتایی از میان n شیء را با $C(n;r)$ یا $\binom{n}{r}$ نشان می‌دهیم که از رابطه‌ی زیر بدست می‌آید:

$$\binom{n}{r}=\frac{n!}{r!\,(n-r)!}$$

واضح است که بین تعداد ترکیب‌ها و جایگشت‌های rتایی از میان n شیء رابطه‌ی زیر برقرار است:

$$P(n;r)=r!\,C(n;r)$$

مثال. به چند طریق می‌توان از بین ۵ مرد و ۴ زن، ۶ نفر را انتخاب کرد به‌طوری که لااقل ۳ زن انتخاب شوند؟

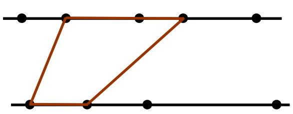
پاسخ توجه کنید که «لااقل سه نفر زن» یعنی سه نفر یا چهار نفر زن انتخاب شوند. ضمناً توجه کنید چون باید شش نفر انتخاب شوند، وقتی سه نفر زن انتخاب می‌شوند، سه نفر دیگر باید از مردها انتخاب شوند:

$$\binom{۴}{۳}\times\binom{۵}{۳}+\binom{۴}{۴}\times\binom{۵}{۲}=\frac{۴!}{۳!\,(۴-۳)!}\times\frac{۵!}{۳!\,(۵-۳)!}+\frac{۴!}{۴!\,(۴-۴)!}\times\frac{۵!}{۲!\,(۵-۲)!}$$

$$=۴\times۱۰+۱\times۱۰=۵۰$$

مثال. دو خط موازی در نظر گرفته، روی یک خط ۵ نقطه و روی خط دیگر ۴ نقطه قرار دهید. توسط این نقاط چند چهارضلعی تشکیل می‌شود؟

پاسخ همان‌طور که در شکل دیده می‌شود برای تشکیل چهارضلعی فقط یک حالت برای انتخاب چهار رأس آن وجود دارد؛ به این ترتیب که دو نقطه از بین پنج نقطه‌ی بالا و دو نقطه از بین چهار نقطه‌ی پایین انتخاب کنیم:



$$\binom{۵}{۲}\times\binom{۴}{۲}=۱۰\times۶=۶۰$$

مثال. فرض کنید در یک جمع ۹ نفر حاضر هستند.

الف) به چند طریق می‌توان از بین آن‌ها ۵ نفر انتخاب کرد به طوری که شامل ۳ فرد خاص باشد؟

ب) به چند طریق می‌توان ۴ نفر انتخاب کرد که ۲ شخص خاص در بین آن‌ها نباشد؟

پاسخ در قسمت (الف) می‌خواهیم ۵ نفر انتخاب کنیم ولی ۳ نفر از قبل به‌طور اجبار انتخاب شده‌اند. در نتیجه باید از بین ۶ نفر باقی‌مانده ۲ نفر انتخاب گردند:

$$\binom{6}{2}=\frac{6!}{2!\times(6-2)!}=\frac{6\times5\times4!}{2\times1\times4!}=\frac{6\times5}{2}=15$$

در قسمت (ب) می‌خواهیم ۴ نفر انتخاب کنیم، ولی چون ۲ نفر حق انتخاب شدن ندارند، ۴ فرد مورد نظر باید از بین ۷ فرد باقی-مانده انتخاب گردند:

$$\binom{7}{4}=\frac{7!}{4!\times(7-4)!}=\frac{7\times6\times5\times4!}{4!\times3\times2\times1}=7\times5=35$$

نکته. با در نظر داشتن مثال قبل می‌توان به موارد زیر اشاره کرد:

- تعداد زیرمجموعه‌های r عضوی از یک مجموعه‌ی n عضوی برابر است با $\binom{n}{r}$.
- تعداد انتخاب‌های r شیء از n شیء به‌طوری که شامل t شیء خاص باشد، برابر است با $\binom{n-t}{r-t}$.
- تعداد انتخاب‌های r شیء از n شیء به‌طوری که شامل t شیء خاص نباشد، برابر است با $\binom{n-t}{r}$.

نکته. روابط زیر در محاسبه تعداد ترکیب‌ها برای هر عدد طبیعی n برقرار هستند که در محاسبات بسیار مورد استفاده واقع می-شوند:

- $\binom{n}{0}=\binom{n}{n}=1$
- $\binom{n}{1}=\binom{n}{n-1}=n$
- $\binom{n}{2}=\binom{n}{n-2}=\frac{n(n-1)}{2}$
- در حالت کلی برای $1\le r\le n$ داریم:

$$\binom{n}{r}=\binom{n}{n-r}$$

مثال. به چند طریق می‌توان ۳ کتاب از بین ۵ کتاب سال اول و ۴ کتاب از ۶ کتاب سال دوم را یک در میان در قفسه‌ای چید؟

پاسخ ابتدا ۳ کتاب از بین ۵ کتاب سال اول، سپس ۴ کتاب از ۶ کتاب سال دوم انتخاب می‌کنیم و در پایان این کتاب‌ها به $3!\times4!$ حالت به‌طور یک در میان کنار هم قرار می‌گیرند:

$$\binom{5}{3}\times\binom{6}{4}\times3!\times4!=10\times15\times6\times24=21600$$

توجه. گاهی شمارش غیرمستقیم رسیدن به جواب را کوتاه‌تر می‌کند. مانند:

مثال. توسط حروف کلمه‌ی showman چند کلمه‌ی پنج حرفی می‌توان نوشت که:

الف) شامل حروف m و h باشند؟

ب) شامل حروف m یا h نباشند؟

پاسخ در قسمت (الف) دو حرف m و h از قبل انتخاب شده‌اند، لذا سه حرف دیگر را از بین پنج حرف دیگر انتخاب می‌کنیم و آن‌ها را در کنار هم جایگشت می‌دهیم:

$$\binom{5}{3}\times 5! = 10\times 120 = 1200$$

در مورد قسمت (ب) حالت‌های خواسته شده متمم حالتی است که در قسمت (الف) محاسبه کردیم:

$$7! - 1200 = 5040 - 1200 = 3840$$

نکته مهم. در انتخاب r شیء از میان n شیء بر حسب این که ترتیب مهم باشد یا نباشد و همچنین از این جهت که انتخاب با جایگذاری یا بدون جایگذاری انجام گیرد، معمولاً سه حالت رخ می‌دهد که توجه به تفاوت‌های آن‌ها مهم است. در مثال زیر با این مسأله مواجه هستیم.

مثال. از کیسه‌ای محتوی ۶ مهره‌ی آبی و ۵ مهره‌ی قرمز ۲ مهره طبق روش‌های زیر خارج می‌کنیم. تعداد حالت‌های ممکن برای این کار را در هر حالت تعیین کنید:

الف) دو مهره با هم از کیسه خارج شوند.

ب) ابتدا یک مهره انتخاب نموده و کنار بگذاریم و سپس مهره‌ی دیگری خارج کنیم.

ج) یک مهره خارج کرده، رنگ آن را مشاهده کنیم و به کیسه برگردانیم و مجدداً مهره‌ای خارج کنیم.

پاسخ (الف) ترکیب‌های ۲ مهره از ۱۱ مهره:

$$\binom{11}{2} = \frac{11\times 10}{2} = 55$$

(ب) برای انتخاب مهره اول ۱۱ حالت و برای مهره دوم ۱۰ حالت وجود دارد:

$$11\times 10 = 110$$

(ج) در انتخاب هر دو مهره ۱۱ حالت وجود دارد:

$$11\times 11 = 121$$

سخنی با شما:

دانش‌آموز عزیز، هدف از تهیه‌ی این مجموعه‌ها عمق بخشیدن به یادگیری و کمکی هر چند ناچیز به ارتقای سطح علمی شما آینده‌ساز ایران عزیز می‌باشد.

برای نیل به این اهداف، خواهشمند است موارد زیر را رعایت کنید:

- **درسنامه‌ی فوق را به دقت و با حوصله‌ی تمام مطالعه کنید. تعاریف و نکات گفته شده را در قالب مثال‌های مربوطه ضمن درک کامل، همواره در خاطر داشته باشید.**
- **توجه داشته باشید که مرحله‌ی قبل اگر به درستی انجام شود، نهایتاً ۵۰ تا ۷۰ درصد یادگیری صورت پذیرفته است. برای تکمیل این فرآیند، لازم است به تک‌تک تمریناتی که در پی می‌آید زمان مناسب را تخصیص داده و در صورت وجود مشکل در برخی از آن‌ها، از افراد مسلط در این زمینه، تنها راهنمایی جزیی طلب کنید.**

با آرزوی موفقیت‌های علمی بی‌پایان برای شما

دکتر علیرضا نورالدینی

بخش چهارم:

تمرینات ترکیبیات

۱- توسط ارقام ۰، ۱، ۳، ۴، ۶ و ۸ چند عدد شش رقمی زوج تحت هر یک از شرایط زیر می‌توان نوشت؟

- تکرار ارقام مجاز باشد.
- تکرار ارقام مجاز نباشد.

۲- توسط ارقام ۰، ۱، ۳، ۴، ۶ و ۸ چند عدد چهار رقمی بزرگ‌تر از ۴۸۰۰ تحت هر یک از شرایط زیر می‌توان نوشت؟

- تکرار ارقام مجاز باشد.
- تکرار ارقام مجاز نباشد.

۳- چند عدد چهار رقمی وجود دارد که فاقد رقم ۵ باشد؟

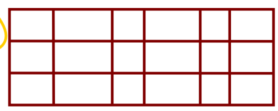
۴- شش شخص a، b، c، d، e و f می‌خواهند سخنرانی کنند. در چند حالت بین افراد a و e فقط یک نفر سخنرانی خواهد داشت؟

۵- توسط ارقام ۰، ۰، ۰، ۱، ۱، ۴، ۶ و ۸ چند عدد هشت رقمی می‌توان نوشت؟

۶- با حروف کلمه‌ی computer چند کلمه‌ی شش حرفی نوشته می‌شود که دارای حروف p و r باشند.

۷- از بین ۵ مهره سفید و ۴ مهره سیاه به چند روش می‌توان دو مهره‌ی غیر همرنگ را در کنار هم مرتب کرد؟

۸- در شکل زیر چند مستطیل دیده می‌شود؟



۹- مقدار n را از تساوی زیر تعیین کنید:

$$۱۲\binom{n}{۲}=P(n;۳)$$

۱۰- دو خط موازی در نظر گرفته، روی یک خط ۵ نقطه و روی خط دیگر ۴ نقطه قرار دهید. توسط این نقاط چند مثلث می‌توان تشکیل داد؟

۱۱- سه کتاب متمایز ریاضی و چهار کتاب متمایز ادبی را به چند طریق می‌توان در یک قفسه قرار داد که کتاب‌های ریاضی همواره کنار هم باشند؟

۱۲- سه کتاب ریاضی، دو کتاب فیزیک و دو کتاب شیمی را به چند طریق می‌توان کنار هم در قفسه‌ای چید به‌طوری که کتاب‌های هر درسی پهلوی هم باشند؟

۱۳- اگر تعداد تبدیل‌های x شیء از ۵ شیء، x برابر تعداد تبدیل‌های $x-۱$ شیء از ۵ شیء باشد، x را تعیین کنید.

۱۴- چند عدد پنج رقمی یافت می‌شود که رقم یکان آن‌ها ۳ و رقم سمت چپ آن‌ها ۷ بوده و رقم تکراری نداشته باشد؟

۱۵- از جعبه‌ای که شامل ۵ مهره سفید و ۶ مهره سیاه است، ۲ مهره به تصادف خارج می‌کنیم. در چند حالت مهره‌ها همرنگ هستند؟

۱۶- از بین ۱۲ عضو انجمن خانه و مدرسه، به چند طریق می‌توان سه نفر انتخاب کرد که همواره یک فرد مورد نظر بین آن‌ها باشد؟

تست‌های ترکیبیات در کنکورهای سراسری چند سال اخیر

۱- برای انجام مسابقه‌ای ۴ نفر از گروه ریاضی و ۶ نفر از گروه تجربی انتخاب شده‌اند. اگر به‌طور تصادف ۴ نفر از بین آن‌ها انتخاب شوند، در چند حالت تعداد افراد انتخابی در این دو گروه متفاوت‌اند؟ (سراسری ۸۵ با تغییر)

۱) ۹۰ ۲) ۱۱۰ ۳) ۱۲۰ ۴) ۲۱۰

۲- در یک همایش ۵ نفر برای سخنرانی ثبت‌نام کرده‌اند. چند طریق ترتیب سخنرانی برای آنان وجود دارد به‌طوری که بین سخنرانی دو فرد مورد نظر a و b از آنان فقط یک نفر سخنرانی کند؟ (سراسری ۸۷)

۱) ۲۰ ۲) ۲۴ ۳) ۳۶ ۴) ۴۰

۳- از ۱۰ پرسش موجود، به چند طریق می‌توان ۸ پرسش را جهت پاسخ‌گویی انتخاب کرد به شرط آن‌که حداقل ۴ پرسش از ۵ پرسش اول انتخاب شود؟ (سراسری ۸۹)

۱) ۲۵ ۲) ۳۰ ۳) ۳۲ ۴) ۳۵

۴- حروف کلمه‌ی ATAXIA را بریده و به‌طور تصادفی کنار هم قرار می‌دهیم. تعداد کل حالت‌ها و تعداد حالت‌هایی که هر سه حرف A کنار هم قرار می‌گیرند، کدام است؟ (سراسری ۸۹ تجربی با تغییر)

۱) ۱۲۰ و ۳۶ ۲) ۷۲۰ و ۳۶ ۳) ۱۲۰ و ۲۴ ۴) ۷۲۰ و ۲۴

۵- چند عدد چهار رقمی با ارقام متمایز و فرد، بزرگ‌تر از ۳۰۰۰ وجود دارد؟ (سراسری تجربی ۹۰)

۱) ۷۲ ۲) ۸۴ ۳) ۹۶ ۴) ۱۰۸

۶- با ارقام ۹، ۷، ۵، ۳ و ۱ چند عدد سه رقمی با شرط «رقم صدگان >رقم دهگان >رقم یکان» می‌توان نوشت؟ (سراسری ۹۱)

۱) ۸ ۲) ۹ ۳) ۱۰ ۴) ۱۲