Subject:
Year: ۹۵ Month: ۱۱ Date: ۱۰

(اصول آنالیز ریاضی / والتر رودین / علی اکبر عالم زاده)

$f: X \to Y \quad A \subset X$

$f(A) = \{ y \in Y : \exists x \in A : f(x) = y \}$

مثال)

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad f(x) = x^2$

$f((0,\infty)) = (0,\infty) \quad f((-1,1)) = [0,1)$

B (نقش معکوس) (تصویر وارون)

$f^{-1}(B) \quad B \subset Y \quad f^{-1}(B) = \{ x \in X : \exists y \in B : f(x) = y \}$

$f: X \to Y$ یک به یک است هرگاه دو عضو متفاوت X به یک عضو Y نظیر نشوند.

$\forall x_1, x_2 \in X \quad x_1 \neq x_2 \to f(x_1) \neq f(x_2)$

(قرینه معکوس) $x_1, x_2 \in X \quad f(x_1) = f(x_2) \to x_1 = x_2$

$f: X \to Y$ پوشاست $\quad B = \{y\} \to f^{-1}(\{\{y\}\})$ حداکثر یک عضو دارد

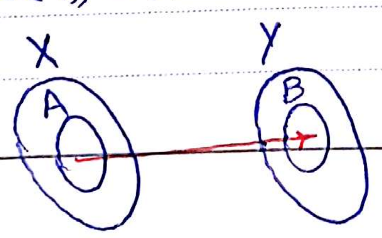
$\forall y \in Y \quad \exists x \in X : f(x) = y$

$f: X \to Y \quad A \subset X \quad B \subset Y$

$f^{-1}(f(A)) \supset A \qquad f(f^{-1}(B)) \subset B$

اگر f یک به یک باشد $\qquad$ اگر f پوشا باشد

$f^{-1}(f(A)) = A \qquad f(f^{-1}(B)) = B$



Subject:
Year. Month. Date. ( )

$f: X \to Y$

f یک به یک و پوشاست $\Leftarrow$ یک تناظر یک به یک بین X و Y برقرار است.

- اگر $J_n = \{1, 2, \ldots, n\}$

+ مجموعه A متناهی است هرگاه n ای موجود باشد به طوری که یک تناظر یک به یک بین A و J_n برقرار باشد.

+ A شمارش پذیر است هرگاه A با $\mathbb{N}$ در یک تناظر یک به یک قرار گیرد.

+ A حداکثر شمارش پذیر است هرگاه متناهی یا شمارش پذیر باشد.

$\mathbb{Z} \to \mathbb{N}$ $\quad\quad \mathbb{Z} = \mathbb{N} \cup \{0\} \cup (-\mathbb{N})$

$$f(n) = \begin{cases} -2n & n < 0 \\ 2n+1 & n \geq 0 \end{cases}$$

☑ روش قطری کانتور: (برای اعداد گویا $\mathbb{Q}$)

$\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots$

$\frac{2}{1}, \frac{2}{2}, \frac{2}{3}, \frac{2}{4}, \ldots$

$\frac{3}{1}, \frac{3}{2}, \frac{3}{3}, \frac{3}{4}, \ldots$

$\frac{4}{1}$

☑ هر زیر مجموعه نامتناهی یک مجموعه شمارش پذیر، شمارش پذیر است.

PAPCO

Subject:
Year.　Month.　Date.　(　)

+ می‌خواهیم نشان دهیم $(0,1)$ ناشمارا است.

هر عدد در بازه‌ی $(0,1)$ را به صورت اعشاری می‌نویسیم.

فرض می‌کنیم یک تناظر یک به یک بین $(0,1)$ و $\mathbb{N}$ وجود دارد.

$$1 \longleftrightarrow a_1 = 0/b_{11}b_{12}b_{13}\cdots$$
$$2 \longleftrightarrow a_2 = 0/b_{21}b_{22}b_{23}\cdots$$
$$\vdots \qquad \vdots$$
$$n \longleftrightarrow a_n = 0/b_{n1}b_{n2}b_{n3}\cdots$$
$$\vdots$$

$$c = 0/c_1c_2c_3\cdots$$

$$c_i = \begin{cases} 9 & b_{ii} \neq 9 \\ 5 & b_{ii} = 9 \end{cases}$$

⊕ پس به تناقض رسیدیم و بازه‌ی $(0,1)$ با $\mathbb{N}$ در تناظر یک به یک نیست پس ناشماراست.

$$\bigcup_{\alpha \in \mathbb{R}} E_\alpha = \{x : \exists \alpha \in \mathbb{R} : x \in E_\alpha\}$$

$$\bigcap_{\alpha \in A} E_\alpha = \{x : \forall \alpha \in A : x \in E_\alpha\}$$

(تا سر فضای متری)

☑ اجتماع دو مجموعه‌ی شمارا، شمارا می‌باشد.

برای اثباتش یک مجموعه را به اعداد فرد و مجموعه‌ی دیگر را به اعداد زوج متناظر می‌کنیم.

PAPCO

فضاهای متری:

فرض کنید X یک مجموعه ناتهی باشد هر تابع $d: X\times X \to \mathbb{R}$ (ضرب دکارتی) که در شرایط:

۱/ $x,y\in X$ $d(x,y)\geq 0$, $d(x,y)=0 \iff x=y$

۲/ $d(x,y)=d(y,x)$

۳/ $x,y,z\in X$: $d(x,z)\leq d(x,y)+d(y,z)$

صدق کند یک تابع فاصله یا متر نامیده میشود در این حالت به (X,d) یک فضای متری گوئیم.

مثال) $d: \mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ $\qquad d(x,y)=|x-y|$

d یک متر روی $\mathbb{R}$ است.

$|x-y|\geq 0$ و $|x-y|=0 \iff x=y$

$|x-y|=|y-x|$

$|x-z|\leq |x-y|+|y-z|$

مثال) $X=\mathbb{R}^2$ آیا d یک تابع فاصله است؟ $d(x,y)=|x-y|^2$

شرط سوم برقرار نیست پس تابع فاصله نیست $\left\{ x=0 \quad y=1 \quad z=2 \right.$

$(0-2)^2\leq(0-1)^2+(1-2)^2$

$4\leq 2$ ✗

مثال) $d(x,y)=\dfrac{|x-y|}{1+|x-y|}$ نشان دهید که d یک متر است؟

خاصیت اول و دوم را دارا می باشد.

$d(x,z)\leq d(x,y)+d(y,z)$

$$\frac{|x-z|}{1+(x-z)}\leq\frac{|x-y|}{1+|x-y|}+\frac{|y-z|}{1+|y-z|}$$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

فرض: $a \leq b+c$ حکم: $\frac{a}{1+a} \leq \frac{b}{1+b} + \frac{c}{1+c}$

$\Leftarrow \frac{a}{1+a} \leq \frac{b+bc+c+bc}{(1+b)(1+c)}$

$\Leftarrow a(1+b)(1+c) \leq (b+c+2bc)(1+a)$

$\Leftarrow a \leq b+c$ (فرض)

هرگاه d یک متر روی فضای X باشد در این صورت به ازای هر $x,y \in X$،

$d'(x,y) = \frac{d(x,y)}{1+d(x,y)}$ نیز یک متر روی X است، توجه کنید که $0 \leq d'(x,y) < 1$.

• $A \subseteq \mathbb{R}$ کراندار است هرگاه $M > 0$ موجود باشد به طوری که $\forall x \in A: |x| < M$

مثال) $X = \mathbb{R}^2$ $a = (x_1, y_1)$ $b = (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$

$d(a,b) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$ نشان دهید d یک متر روی $\mathbb{R}^2$ است؟

(متر اقلیدسی متداول) $a = \cancel{(x_1, y_1)}$ $b = \cancel{(x_2, y_2)}$ $c = \cancel{(x_3, y_3)}$

$d(a,c) \overset{?}{\leq} d(a,b) + d(b,c)$

$x = (x_1, x_2)$ / $y = (y_1, y_2)$ / $z = (z_1, z_2)$

$d(x,y) = |x - y| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2}$

حالت n نوشتن فرق کرده و اثباتش در ص ۷

Subject:
Year. Month. Date. ( )

مثال) $X = \mathbb{R}^2$

$$\begin{cases} x = (x_1, y_1) \\ y = (x_2, y_2) \end{cases} \qquad d(x,y) = |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|$$

نشان دهید یک متر است؟ (دو شرط اول برقرار است)

$z = (x_3, y_3)$

$$d(x,z) \leqslant d(x,y) + d(y,z)$$

$$|x_1 - x_3| + |y_1 - y_3| \leqslant |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2| + |x_2 - x_3| + |y_2 - y_3|$$

نامساوی مثلثی

$X = \mathbb{R}^2$
$\begin{cases} d_1 \text{ یک متر روی } \mathbb{R} \\ d_2 \text{ یک متر روی } \mathbb{R} \end{cases}$ (متر d را روی $\mathbb{R}^2$ تعریف می‌کنیم)

$A, B \in \mathbb{R}^2 \qquad \begin{cases} A = (x_1, y_1) \\ B = (x_2, y_2) \end{cases} \qquad d(A,B) = d_1(x_1, x_2) + d_2(y_1, y_2)$

مثال) $X = \mathbb{R}^n$

$$x = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \qquad y = (y_1, y_2, \cdots, y_n) \qquad d(x,y) = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|$$

نشان دهید d یک متر روی $\mathbb{R}^n$ است؟ بله

مثال) $X = \mathbb{R}^n$ ، آیا d یک متر روی $\mathbb{R}^n$ است؟

$$\begin{cases} x = \{x_1, x_2, \cdots, x_n\} \\ y = \{y_1, y_2, \cdots, y_n\} \end{cases}$$

$$d(x,y) = \mathrm{Max}\{|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|, \cdots, |x_n - y_n|\}$$

$z = \{z_1, z_2, \cdots, z_n\}$

$$d(x,z) \leqslant d(x,y) + d(y,z)$$

$$\mathrm{Max}\{|x_1 - z_1|, \cdots, |x_n - z_n|\} = |x_k - z_k| \leqslant |x_k - y_k| + |y_k - z_k|$$

$$\leqslant \underbrace{\mathrm{Max}\{|x_1 - y_1|, \cdots, |x_n - y_n|\}}_{d(x,y)} + \underbrace{\mathrm{Max}\{|y_1 - z_1|, \cdots, |y_n - z_n|\}}_{d(y,z)}$$

$$\begin{cases} x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \\ y = (y_1, y_2, \dots, y_n) \\ z = (z_1, z_2, \dots, z_n) \end{cases}$$

$$|x| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2} = (x \cdot x)^{1/2}$$

حکم: $|x+y| \leq |x| + |y|$

$$|x+y|^2 = (x+y)\cdot(x+y) = x\cdot x + 2x\cdot y + y\cdot y$$

$$\leq \underbrace{|x|^2 + 2|x||y| + |y|^2}_{(|x|+|y|)^2}$$

$$\begin{cases} x \to x-y \\ y \to y-z \end{cases}$$

$$|x-y+y-z| \leq |x-y| + |y-z|$$

$\Rightarrow |x-z| \leq |x-y| + |y-z|$ (اثبات مثال اول ص ۴)

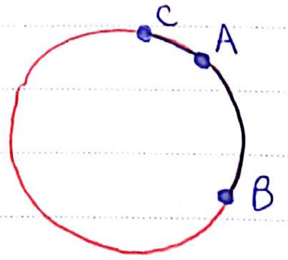
مثال) $X = \mathbb{C}$ $\quad d(z_1, z_2) = |z_1 - z_2|$ آیا d یک متر روی $\mathbb{C}$ است؟

$$\begin{cases} z_1 = (x_1, x_2) \\ z_2 = (y_1, y_2) \end{cases} \quad d(z_1, z_2) = |(x_1 - y_1, x_2 - y_2)| = \sqrt{(x_1-y_1)^2 + (x_2-y_2)^2}$$

مثال) $X = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 = 1\}$

A, B دو نقطه روی دایره

$d(A,B) =$ طول کمان کوتاه‌تر دایره از A تا B

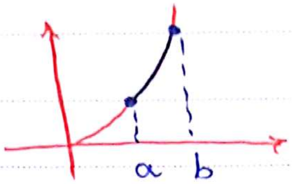


$$d(A,C) \leq d(A,B) + d(B,C)$$

مثال)

$$X\times X=\{(a,b)\in \mathbb{R}^{+}\times\mathbb{R}^{+} : b=a^{2}\}$$

$$d(A,B)=\left|\int_a^b\sqrt{1+4x^{2}}\,dx\right|$$



مثال)

$$d_1(x,y)=\ln(1+d(x,y))$$

1) $d_1(x,y)\geq 0$

2) $d(x,y)=0 \Rightarrow 1+d(x,y)=1 \Rightarrow d(x,y)=0 \Rightarrow x=y$

3) $d_1(x,z)\leq d_1(x,y)+d_1(y,z)$

$$\ln(1+d(x,z)) \overset{?}{\leq} \ln(1+d(x,y))+\ln(1+d(y,z))$$

$$(1+d(x,z))\leq(1+d(x,y))(1+d(y,z)) \Leftarrow$$

$$\Leftarrow\ d(x,z)\leq d(x,y)+d(y,z)+d(x,y)d(y,z) \ \checkmark$$

مثال)

$$d(p,q)=\begin{cases}1 & p\neq q\\ 0 & p=q\end{cases}$$

$p,q\in X$ و X یک مجموعه

(متر گسسته)

$p,q,r\in X \qquad d(p,r)\leq d(p,q)+d(q,r)$

اگر $p=r \Leftarrow d(p,r)=0$ رابطه بالا برقرار است.

اگر $p\neq r \Leftarrow$

$q=p \Rightarrow q\neq r \Rightarrow 1\leq 0+1$

$q=r \Rightarrow p\neq q \Rightarrow 1\leq 1+0$

$q\neq p\neq r \Rightarrow 1\leq 1+1$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

☑ توجه کنید که اگر X یک فضای متری با متر d باشد و $Y \subset X$ آن‌گاه Y نیز یک فضای متری با متر d است.

قطعه $(a,b)=\{x\in\mathbb{R} : a<x<b\}$

$[a,b]=\{x\in\mathbb{R} : a\leqslant x\leqslant b\}$ $[a,b)=\{x\in\mathbb{R} : a\leqslant x<b\}$

$\{(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n , \ a_i\leqslant x_i\leqslant b_i , i=1,\dots,n\}$ $a_i<b_i$
$a_i,b_i\in\mathbb{R}$

حجره یک بعدی : $[a_1,b_1]$ یک بازه بسته

حجره دو بعدی : مستطیل و درون آن $\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : \begin{array}{l} a_1\leqslant x\leqslant b_1 \\ a_2\leqslant y\leqslant b_2 \end{array}\right\}$

$X\in\mathbb{R}^n$ $B(X,r)=\{y\in\mathbb{R}^n : |y-X|<r\}$ (متر اقلیدسی)

$X=(x_1,x_2,\dots,x_n)$ $y=(y_1,y_2,\dots,y_n)$

$B(X,r)=\{y\in\mathbb{R}^n \sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2+\dots+(x_n-y_n)^2}<r\}$

$X\in\mathbb{R} \rightarrow X=x_1 , y=y_1$ $B(X,r)=\{y_1\in\mathbb{R} : \sqrt{(y_1-x_1)^2}<r\}$

$=\{y_1\in\mathbb{R} : |y_1-x_1|<r\}$ گوی باز

x_1-r x_1 x_1+r

تعریف) فرض کنید X یک فضای متری است.

الف- $p\in X$ یک همسایگی نقطه p با شعاع r ، $N_r(P)$ ، شامل همه نقاط $q\in X$ است که $d(p,q)<r$.

$N_r(P)=\{q\in X : d(p,q)<r\}$

PAPCO

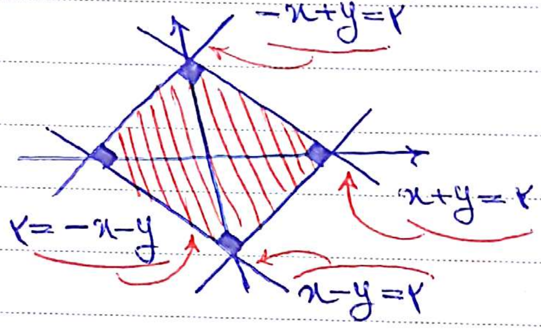
مثال) گوی باز به مرکز X و شعاع r یک همسایگی به مرکز X و شعاع r است.

مثال) $X=\mathbb{R}^2$ $d(X,Y)=|x_1-y_1|+|x_2-y_2|$ همسایگی به مرکز $(0,0)$ و

شعاع ۲ را مشخص کنید. $N_2((0,0))$ / $X=(x_1,x_2)$ / $Y=(y_1,y_2)$

$N_2((0,0))=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid |(x-0)|+|(y-0)|<2\}$

$|x|+|y|<2$



(همسایگی در متر گسسته)

(متر گسسته) ← $a\in X$

$N_r(a)=\{b\in X : d(b,a)<r\}$

$r\leq 1$ $N_r(a)=\{a\}$ $\qquad$ $r>1$ $N_r(a)=X$

+) و همیشه $(a\in N_r(a))$

Assume (X,d) یک فضای متری است.

تعریف نقطه حدی: $E\subset X$ ، $p\in X$ ، p یک نقطه‌ی حدی E است هرگاه

هر همسایگی p شامل نقطه‌ای مانند q باشد که $q\neq p$ و $q\in E$.

- هر همسایگی p ، E را در نقطه‌ای متمایز از p قطع کند.

- $\forall r>0\ \left(N_r(p)\cap E-\{p\}\right)\neq\emptyset$

مثال) اگر مجموعه‌ی نقاط حدی $\mathbb{Q}$ را با $\mathbb{Q}'$ نمایش دهیم $\mathbb{Q}'$ را بدست آورید.

$\mathbb{Q}' = \mathbb{R}$

مجموعه نقاط حدی گویا $\mathbb{R}$ است

+ اگر بازه‌ای روی مجموعه‌ی اعداد حقیقی داشته باشیم حتما عددی در این بازه هست که گویا باشد.

مثال) $X = \mathbb{R}$ $\quad E = \mathbb{Q}^c$ $\quad (\mathbb{Q}^c)' = \mathbb{R}$

مثال) $X = \mathbb{R}$ $\quad E(a,b)$ $\quad$ مجموعه نقاط حدی $E' = [a,b]$

مثال) $X = \mathbb{R}$ $\quad E = \left\{\frac{1}{n}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ $\quad E' = \{0\}$

مثال) $E = \mathbb{N}$ $\quad E' = \emptyset$ مجموعه نقاط حدی اعداد طبیعی تهی است

مثال) $E = \left\{ \ln\frac{1}{x} \quad x \in [e^{-2}, 1) \right\} = (0, 2]$

$2 \geq \ln\frac{1}{x} > 0 \Leftarrow e^2 \geq \frac{1}{x} > 1 \Leftarrow e^{-2} \leq x < 1$

$E' = [0, 2]$

مثال) $\mathbb{R}$ با متر گسسته $\quad E' = \emptyset$

با متر گسسته آیا E وجود دارد که $E' \neq \emptyset$ ؟

خیر چون اگر هر همسایگی بگیریم که شعاعش کمتر از یک باشد مثال نقض هایش است.

تعریف) $E \subset X$ و $p \in E$ و p یک نقطه حدی E نباشد، p یک نقطه تنهایی (isolated) E نامیده می‌شود.

در مثال $E = \left\{\frac{1}{n} \quad n \in \mathbb{N}\right\}$ هر نقطه $\frac{1}{n}$ یک نقطه تنهایی E است.

$(E\subset E)$

تعریف) $E\subset X$ یک مجموعه بسته است هرگاه شامل همه ی نقاط حدی اش باشد.

- با متر متداول $[0,1]$ در $\mathbb{R}$ بسته است.
- $\{\frac{1}{n} \quad n\in\mathbb{N}\}$ در $\mathbb{R}$ بسته نیست.
- $[0,1)$ در $\mathbb{R}$ بسته نیست.
- $\mathbb{Q}$ در $\mathbb{R}$ بسته نیست زیرا $\mathbb{Q}'=\mathbb{R}$.
- $\mathbb{N}$ در $\mathbb{R}$ بسته است چون $\mathbb{N}'=\emptyset$.
- $\mathbb{Z}$ در $\mathbb{R}$ بسته است. - $\mathbb{Q}^c$ در $\mathbb{R}$ بسته نیست.

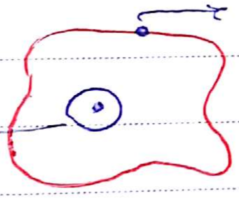
$\boxed{A\cup A'=\bar{A} \quad (A \text{ بستار})}$

تعریف) نقطه P یک نقطه درونی E است هرگاه یک همسایگی P مانند $N_r(P)$ موجود باشد به طوری که $N_r(P)\subset E$

این نقطه درونی نیست

E

نقطه درونی



+ با متر گسسته در $\mathbb{R}^2$ هر نقطه E یک نقطه ی درونی است.
+ هرگاه در $\mathbb{R}^2$ گوی باز به مرکز (x_0,y_0) و شعاع ۲ را در نظر بگیرید.
- هر نقطه این گوی باز یک نقطه ی درونی است.

$B((x_0,y_0),2)$

تعریف) E در X باز است (E یک زیرمجموعه باز X است) هرگاه هر نقطه ی E یک نقطه ی درونی باشد. مثال) $(0,1)$

تعریف) $E\subset X$ کامل است هرگاه بسته باشد و هر نقطه آن یک نقطه حدی باشد. $(E'=E)$

مثال) $[0,1]$

مثال) $\mathbb{N}$ کامل نیست زیرا هر نقطه آن نقطه حدی نیست.

مثال) $(0,1)$ کامل نیست زیرا بسته نیست.

تعریف) $E\subset X$ کراندار است هرگاه عدد حقیقی M و نقطه $q\in X$ وجود داشته باشد به طوری که به ازای هر $p\in E$ داشته باشیم: $d(p,q)<M$

تعریف) E در X چگال (dense) است هرگاه هر نقطه X یک نقطه E باشد یا یک نقطه حدی E:

$$E'\cup E=\bar{E}=X$$

مثال)
- • $\mathbb{Q}$ در $\mathbb{R}$ چگال است. $\bar{\mathbb{Q}}=\mathbb{R}$
- • $\mathbb{Q}^c$ در $\mathbb{R}$ چگال است. $\overline{\mathbb{Q}^c}=\mathbb{R}$
- • $\mathbb{N}$ در $\mathbb{R}$ چگال نیست.

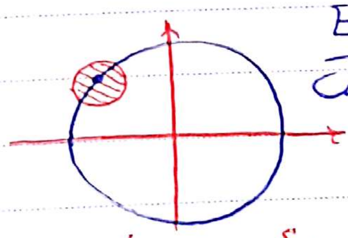
مثال) $X=\mathbb{R}^2$ $\quad A=(x_1,y_1)$ $\quad B=(x_2,y_2)$

$$d(A,B)=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2} \qquad E\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2=1\}$$

$E'=E$

E کامل است

باز نیست / بسته است / در $\mathbb{R}^2$ چگال نیست



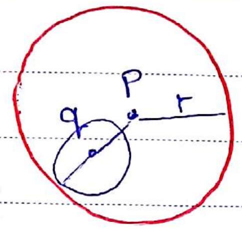
مثال) $E=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2<1\}$

$$E'=E\cup\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2=1\}$$

باز است.
بسته نیست در نتیجه کامل نیست و در $\mathbb{R}^2$ چگال نیست.

P4PCO

Subject:
Year. Month. Date. ( )



قضیه) هر همسایگی یک مجموعه باز است. (توصیفی)

Proof: فرض کنید $q \in N_r(p)$ باید نشان دهیم r'

وجود دارد به طوری که $N_{r'}(q) \subset N_r(p)$ قرار دهید: $r' \leq r - d(p,q)$

$$x \in N_{r'}(q) \to d(x,q) < r'$$

$$d(x,p) \leq d(x,q) + d(q,p) < r' + d(q,p)$$

$$\leq r - \cancel{d(p,q)} + \cancel{d(p,q)} = r \to x \in N_r(p)$$

تمرین) ۱) نشان دهید E° یک مجموعه‌ی باز است.

می خواهیم نشان دهیم هر نقطه E° درونی است، یعنی حکم:

$[x \in E^\circ \quad \exists r : N_r(x) \subset E^\circ]$

فرض کنید $x \in E^\circ$ پس $r > 0$ وجود دارد بطوری که $N_r(x) \subset E$ نشان دهیم

$N_r(x) \subset E^\circ$، یعنی هر نقطه $y \in N_r(x)$ یک نقطه درونی است؛

$$N_{r-d(x,y)}(y) \subset N_r(x) \subset E$$

پس $y \in E^\circ$ چون y دلخواه پس $N_r(x) \subset E^\circ$.

۲) E باز است اگر و تنها اگر $E = E^\circ$

$(\Leftarrow)$ فرض کنید E باز است

$$E^\circ \subset E \subset E^\circ \to E^\circ = E$$

$(\Rightarrow)$ فرض کنید $E = E^\circ \to$ هر نقطه $x \in E$ در E یک نقطه درونی است پس $x \in E^\circ$ یعنی

E باز است.

PAPCO

۳) اگر $G\subset E$ و G باز باشد آن‌گاه $G\subset E^\circ$.

$x\in G$ ، G باز است $\Rightarrow \exists r: N_r(x)\subset G\subset E \Rightarrow x\in E^\circ$

E° بزرگترین مجموعه باز زیرمجموعه E است یعنی E° اجتماع همه مجموعه باز زیرمجموعه E است

(اگر نشان دهیم اجتماع مجموعه‌های باز، باز است) .

۴) (X,d) $\quad E\subset X \quad (E^\circ)^c=\overline{E^c}$

$(\Rightarrow)$

$x\in (E^\circ)^c \Rightarrow x\notin E^\circ \Rightarrow \forall r>0\ \ N_r(x)\cap E^c\neq\emptyset \Rightarrow x\in (E^c\cup E^{c\prime})$

$\Rightarrow x\in \overline{E^c}$

$(\Leftarrow)$

$x\in \overline{E^c} \Rightarrow x\in (E^c\cup (E^c)') \Rightarrow \underset{(1)}{x\in E^c}$ یا $\underset{(2)}{x\in (E^c)'}$

(1) $x\in E^c \Rightarrow x\notin E \Rightarrow x\notin E^\circ \Rightarrow x\in (E^\circ)^c$

(2) $x\in (E^c)' \Rightarrow \forall r>0\ \ N_r(x)\cap (E^c-\{x\})\neq\emptyset \Rightarrow x\notin E^\circ$

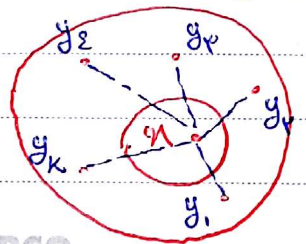
$\Rightarrow x\in (E^\circ)^c$

قضیه) (X,d) یک فضای متری و $E\subset X$ ؛

اگر p یک نقطه حدی E باشد هر همسایگی p ، شامل بی‌نهایت نقطه E است .

اثبات) فرض کنید p یک نقطه حدی E است و $r>0$ وجود دارد بطوری که

$N_r(x)\cap E=\{y_1,\dots,y_k\}$ قرار دهید $\underset{i=1,\dots,k}{r_i=d(x,y_i)}$ $\quad 0<r_0<\min\{r_i\ \ i=1,\dots,k\}$



در این صورت $N_{r_0}(x)\cap E=\emptyset$ ✗

نتیجه) اگر E متناهی باشد آن‌گاه $E'=\emptyset$

قضیه) $E\subset X$ باز است اگر و تنها اگر متمم آن بسته است.

فرض E باز است)

$x\in (E^c)' \to \forall r>0\ \ N_r(x)\cap(E^c-\{x\})\neq\emptyset \to x\notin E^\circ$, $E=E^\circ$
چون E باز است

$\to x\notin E \to x\in E^c$ پس E^c بسته است

فرض کنیم E^c بسته است)

(*) $x\in E \to x\notin (E^c)' \to \exists r: N_r(x)\cap(E^c-\{x\})=\emptyset$

$\to N_r(x)\cap E^c=\emptyset \to N_r(x)\subset E \to x\in E^\circ$

پس $E^\circ\subset E\subset E^\circ$ طبق (*) $\to E=E^\circ$

نتیجه) $E\subset X$ بسته است اگر و تنها اگر E^c باز باشد.

قضیه)

الف) به ازای هر خانواده $\{G_\alpha\}$ از مجموعه باز $G_\alpha\subset X$، $\bigcup_\alpha G_\alpha$ باز است.

ب) 〃 〃 $\{F_\alpha\}$ 〃 بسته 〃 〃، $\bigcap_\alpha F_\alpha$ بسته است.

پ) به ازای هر خانواده متناهی $\{G_\alpha\}$ از مجموعه های باز، $\bigcap_\alpha G_\alpha$ باز است.

ت) 〃 〃 〃 $\{F_\alpha\}$ 〃 بسته، $\bigcup_\alpha F_\alpha$ بسته است.

اثبات: الف) G_α باز $\leftarrow$ $\bigcup G_\alpha$ باز

$x\in\bigcup G_\alpha \to \exists\alpha: x\in G_\alpha \to \exists r>0: N_r(x)\subset G_\alpha\subset\bigcup G_\alpha$

$\to$ x یک نقطه درونی $\bigcup G_\alpha$ است.

ب) F_α بسته $\longrightarrow$ $\bigcap F_\alpha$ بسته

x یک نقطه حدی $\bigcap F_\alpha$ $\rightarrow \forall r>0 \quad N_r(x)\cap(\bigcap F_\alpha-\{x\})\neq\emptyset$

$\rightarrow \forall r>0, \alpha \quad N_r(x)\cap(F_\alpha-\{x\})\neq\emptyset$

$\rightarrow$ x نقطه حدی F_α به ازای هر α $\rightarrow \forall\alpha \quad x\in F_\alpha \rightarrow x\in\bigcap_\alpha F_\alpha$

(فرض F_α بسته)

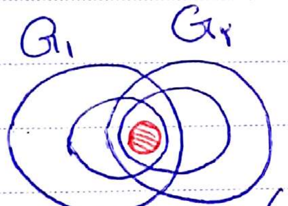
پ) $1\leq i\leq n$ G_i باز $\longrightarrow$ $\bigcap_{i=1}^{n} G_i$ باز

$x\in\bigcap_{i=1}^{n} G_i \rightarrow \forall i \quad 1\leq i\leq n \quad x\in G_i \rightarrow \exists r_i \quad N_{r_i}(x)\subset G_i$

$r=\min\{r_1,r_2,\dots,r_n\}$

$\rightarrow N_r(x)\subset N_{r_i}(x) \rightarrow N_r(x)\subset G_i \quad i=1,\dots,n$

$\rightarrow N_r(x)\subset\bigcap_{i=1}^{n} G_i \rightarrow$ x یک نقطه درونی $\bigcap_{i=1}^{n} G_i$ است



ت) F_i بسته $i=1,\dots,n$ $\longrightarrow$ $\bigcup_{i=1}^{n} F_i$ بسته

$\left(\bigcup_{i=1}^{n} F_i\right)^c=\bigcap_{i=1}^{n} F_i^c$ یک مجموعه باز $\longrightarrow$ $\bigcup_{i=1}^{n} F_i$ بسته است

مثال) $(-1/n,1/n)$ باز $\quad \{0\}=\bigcap_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right)$ بسته — برای (پ) در حالت نامتناهی

مثال) $(-1,1)$ باز $=\bigcup_{n=1}^{\infty}\left[-1+\frac{1}{n},1-\frac{1}{n}\right]$ — برای (ت) ــ

در حالت نامتناهی الزامی در درستی قضایا نیست.

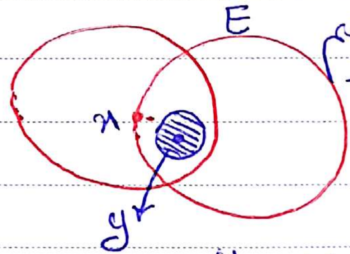
Subject:
Year. Month. Date. ( )

قضیه) (X,d) یک فضای متری است و $E\subset X$. نشان دهید:

الف- $\bar{E}$ بسته است.

ب- $E=\bar{E}$ اگر و تنها اگر E بسته باشد.

پ- هرگاه $F\subset X$ یک مجموعه بسته و $E\subset F$ در این صورت $\bar{E}\subset F$.



الف- فرض کنید x یک نقطه‌ی حدی $\bar{E}$ است می‌خواهیم نشان دهیم $x\in\bar{E}$.

$$\forall r>0 \quad N_r(x)\cap(\bar{E}-\{x\})\neq\emptyset$$

$$y\in N_r(x)\cap(\bar{E}-\{x\})\neq\emptyset$$

$$\rightarrow y\in\bar{E} \quad \exists r_0: N_{r_0}(y)\subset N_r(x)$$

$\bar{E} = E\cup E'$

چون $y\in\bar{E}$ پس $y\in E$ یا $y\in E'$ با فرض $y\in E'$

داریم: $N_{r_0}(y)\cap(E-\{y\})\neq\emptyset$, چون $N_r(x)\cap(E-\{x\})\neq\emptyset$

و $r>0$ دلخواه است پس $x\in E' \rightarrow x\in\bar{E}$

ب- E بسته است $\rightarrow$ (قسمت الف) $\bar{E}$ بسته و فرض $E=\bar{E}$

فرض $\bar{E}$ بسته است $\rightarrow E'\subset E$, $\bar{E}=E\cup E'=E$

پ- $x\in\bar{E} \rightarrow \overset{(I)}{x\in E}$ یا $\overset{(II)}{x\in E'}$

(I) $x\in E, E\subset F \rightarrow x\in F$

(II) $x\in E' \quad \forall r>0 \ N_r(x)\cap(E-\{x\})\neq\emptyset \rightarrow \forall r>0 \ N_r(x)\cap(F-\{x\})\neq\emptyset$

$\rightarrow x\in F'$, F بسته است $\rightarrow x\in F$ (I),(II) $\rightarrow \bar{E}\subset F$

فرض کنید (X,d) یک فضای متری است $Y\subset X$ ، Y نیز با d یک فضای متری است.

$E\subset Y$ و $x\in E$.

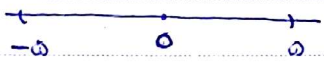
$N_r(x)$ در Y ، $\{y\in Y : d(y,x)<r\}=A$

توجه کنید که $A\subseteq B$

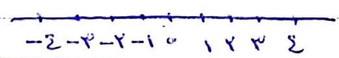
$N_r(x)$ در X ، $\{y\in X : d(y,x)<r\}=B$

مثال) $X=\mathbb{R}$ d متر متداول $Y=\mathbb{Z}$

همسایگی به مرکز ۰ و شعاع ۵ در X



Y " " " "



$N_r^Y(x) = N_r^X(x)\cap Y$

مثال) $X=\mathbb{R}$ ، $Y=[0,1]$

$N_1^Y(0)=[0,1)$

قضیه) فرض کنید $E\subset Y\subset X$ ، E نسبت به Y باز است اگر و تنها اگر مجموعه باز G از زیرمجموعه X موجود باشد به طوری که $E=Y\cap G$.

PROOF)

فرض کنید E نسبت به Y باز است. $x\in E$. چون E در Y باز است یک همسایگی x در Y وجود دارد به طوری که این همسایگی زیرمجموعه E است.

$(E\subset Y\cap G)$

$\forall x\in E\ \ \exists r_x : (N^X_{r_x}(x)\cap Y)\subset E^{(1)} \to$

$\to \bigcup_{x\in E} N^X_{r_x}(x) = G$ G در X باز است $G\cap Y \overset{?}{=} E$

$\to x\in G \to x\in N^X_{r_x}(x)\subset G,\ x\in Y \to x\in G\cap Y$ (I)

$(E\supset Y\cap G)$

$x\in G\cap Y \to x\in \left(\bigcup_{x\in E} N^X_{r_x}(x)\right)\cap Y \to x\in \bigcup_{x\in E}\left(N^X_{r_x}(x)\cap Y\right) \xrightarrow{(1)} x\in E$ (II)

نتیجه) فرض کنید E یک زیرمجموعه غیرتهی $\mathbb{R}$ باشد که از بالا کراندار است و $y = \sup E$

در این صورت $y \in \bar{E}$ و بنابراین $y \in E$ اگر E بسته باشد.

$\forall x \in E \quad x \leq y \qquad \forall \varepsilon > 0 \ \exists x \in E : x > y - \varepsilon$ ①

$y \geq$

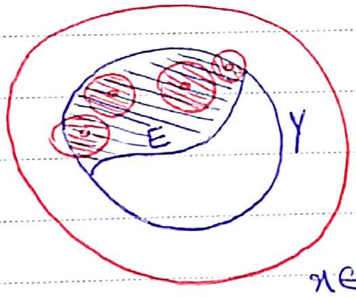
(Proof) :

$y = \sup E \qquad y \in E$ مسئله حل است

$y \notin E \rightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists x \in E : x \in (y-\varepsilon, y+\varepsilon)$ طبق ①

$\rightarrow N_\varepsilon(y) \cap (E - \{y\}) \neq \emptyset \rightarrow y \in E' \rightarrow y \in \bar{E}$

☑ ادامه اثبات قضیه ص (۱۹) :



حال فرض کنید G باز در X وجود دارد به طوری که $E = Y \cap G$

باید نشان دهیم E در Y باز است.

$x \in E \rightarrow x \in Y , x \in G$

G در X باز است پس r_x وجود دارد به طوری که $N^X_{r_x}(x) \subset G$ چون $Y \cap G \subset E$

پس $Y \cap N^X_{r_x}(x) \subset Y \cap G \subset E$ یعنی x یک نقطه درونی E نسبت به Y است.

x دلخواه بوده پس E نسبت به Y یک مجموعه باز است.

$$\boxed{N^X_{r_x}(x) \cap Y = N^Y_{r_x}(x)}$$

تمرین) آیا نقاط درونی E و $\bar{E}$ باهم برابرند؟ چرا؟

$E = \mathbb{Q}$

$\bar{E} = E \cup E' = \mathbb{R} = \mathbb{R}^\circ \neq E^\circ = \emptyset$

تمرین) آیا بستار E و E° باهم برابرند؟ چرا؟

$E = \mathbb{Q} \quad E^\circ = \emptyset$

$\bar{E} = \mathbb{R} \quad \overline{E^\circ} = \emptyset \ \Big\} \Rightarrow \overline{E^\circ} \neq \bar{E}$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

تمرین) $A\subset B \overset{?}{\Rightarrow} \bar{A}\subset \bar{B}$

$a\in \bar{A} \Rightarrow \overset{(I)}{a\in A}$ یا $\overset{(II)}{a\in A'}$

$(I) \Rightarrow a\in B \Rightarrow a\in \bar{B}$

$(II) \Rightarrow \forall r>0 \quad N_r(a)\cap (A-\{a\})\neq \emptyset \Rightarrow N_r(a)\cap (B-\{a\})\neq\emptyset$

$\Rightarrow a\in B' \Rightarrow a\in\bar{B}$

تمرین) آیا نقاط حدی E و E' با هم برابرند؟ چرا؟

$E=\{\frac{1}{n}\}$ $\quad \left.\begin{array}{l} E'=\{0\} \\ (E')'=\emptyset \end{array}\right\}\neq$

تمرین) ثابت کنید E و $\bar{E}$ دارای نقاط حدی یکسانی هستند؟

$(E'\subset(\bar{E})') \Rightarrow$

$x\in E' \Rightarrow \forall r>0 \quad N_r(x)\cap(E-\{x\})\neq\emptyset$

$\Rightarrow \forall r>0 \quad N_r(x)\cap(\underbrace{(E\cup E')}_{\bar{E}}-\{x\})\neq\emptyset \Rightarrow x\in(\bar{E})'$

$((\bar{E})'\subset E') \Rightarrow$

$x\in(\bar{E})' \Rightarrow \forall r>0 \quad N_r(x)\cap\bar{E}-\{x\}\neq\emptyset \quad y\in N_r(x)\cap\bar{E}-\{x\}\neq\emptyset$

$\Rightarrow y\in N_r(x),\ y\in\bar{E}-\{x\}$

y نقطه حدی E است $\quad \exists r': N_{r'}(y)\subset N_r(x),\quad N_{r'}(y)\cap(E-\{y\})\neq\emptyset$

$e\in N_{r'}(y)\cap(E-\{y\}) \rightarrow e\in N_r(x)\cap(E-\{x\})\neq\emptyset$

پس e یک نقطه حدی E است

PAPCO

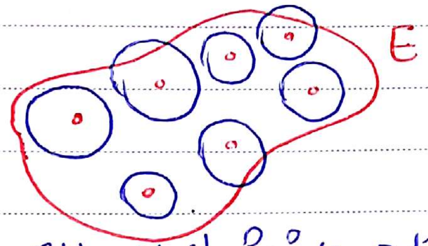
Subject:
Year. Month. Date. ( )

☑ مجموعه فشرده: فرض کنید (X,d) یک فضای متری است. $E\subset X$

$E\subset \bigcup_\alpha G_\alpha$

تعریف) یک پوشش باز مجموعه E یک خانواده $\{G_\alpha\}$ از مجموعه‌های باز X است به طوری که .

توجه کنید که $E\subset X$ و X یک مجموعه باز است.



$\forall x\in E\ \forall r>0\quad x\in N_r(x)\quad E\subset \bigcup_{x\in E} N_r(x)$

تعریف) $K\subset X$ فشرده (Compact) نامیده میشود هرگاه هر پوشش باز K، دارای یک زیرپوشش متناهی باشد؛ یعنی هرگاه $\{G_\alpha\}$ یک خانواده از مجموعه‌های باز باشد که $K\subset\bigcup_\alpha G_\alpha$، اندیس‌های $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ موجود است به طوری که:

$K\subset G_{\alpha_1}\cup G_{\alpha_2}\cup\dots\cup G_{\alpha_n}$ (با تعداد اعضای)

☑ ثابت کنید هر مجموعه متناهی فشرده است.

$E=\{x_1,\dots,x_n\}$ ، $\{G_\alpha\}$ یک پوشش دلخواه E است یعنی $E\subset\bigcup_\alpha G_\alpha$

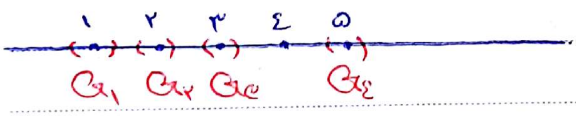
$x_1\in E \to x_1\in\bigcup G_\alpha \to \exists\alpha_1: x_1\in G_{\alpha_1}$

$\vdots$

$\to E\subset G_{\alpha_1}\cup G_{\alpha_2}\cup\dots\cup G_{\alpha_n}$

$x_n\in E\to x_n\in\bigcup G_\alpha\to\exists\alpha_n: x_n\in G_{\alpha_n}$

مثال) $(\mathbb{R}, d)$ متداول ، $\mathbb{N}\subset\mathbb{R}$ آیا $\mathbb{N}$ فشرده است؟ نیست



$G_n=(n-\frac{1}{2}, n+\frac{1}{2})$

$\mathbb{N}\subseteq\bigcup_{1}^{\infty} G_n$

$\{G_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ یک پوشش باز $\mathbb{N}$

$\mathbb{N}\subseteq G_{\alpha_1}\cup G_{\alpha_2}\cup\dots\cup G_{\alpha_n}$

$\{\alpha_1,\dots,\alpha_n\}\subset G_{\alpha_1}\cup G_{\alpha_2}\cup\dots\cup G_n$

Subject :
Year . Month . Date . ( )

مثال) $\{1, 1/2, 1/3, 1/4, 1/5, \dots, 1/n, \dots\} = \{1/n\}_{n\in\mathbb{N}}$

فشرده نیست چون مثلاً هر همسایگی حول نقاط $\frac{1}{n}$ بگیریم و با عضو دیگری اشتراک نداشته

باشد پس زیرپوشش متناهی ما نداریم. پس متناهی نیست $r = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$ $\frac{1}{n} \in N_r(\frac{1}{n})$

مثال) $\{\frac{1}{n}\} \cup \{0\}$ فشرده است

نشان می دهیم $E = \{\frac{1}{n}\}_{n\in\mathbb{N}} \cup \{0\}$ فشرده است. فرض کنید $\{G_\alpha\}$ یک پوشش باز

E باشد. بنابراین α_0 وجود دارد به طوری که $0 \in G_{\alpha_0}$. 0 یک نقطه ی حدی $\{\frac{1}{n}\}$ است.

پس $\emptyset \neq \{\frac{1}{n}\} \cap G_{\alpha_0} - \{0\}$ فرض کنید $\frac{1}{n_1} \in \{\frac{1}{n}\} \cap G_{\alpha_0} - \{0\}$

$E \subset G_1 \cup G_2 \cup \dots \cup G_{n_1} \cup G_{\alpha_0}$ $1 \in G_1$ $n > n_1 \rightarrow \frac{1}{n} \in G_{\alpha_0}$

$2 \in G_2$

$\vdots$

$n_1 \in G_{n_1}$

قضیه) فرض کنید $K \subset Y \subset X$ ، K نسبت X فشرده است اگر و تنها اگر نسبت به Y

فشرده باشد.

PROOF)

فرض کنید K در Y فشرده است. نشان می دهیم K در X فشرده است. فرض کنید $\{G_\alpha\}$

یک پوشش باز K در X باشد. $\{G_\alpha \cap Y\}$ یک پوشش باز K در Y است؛ چون K در Y

فشرده است پس $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ وجود دارد به طوری که:

$K \subset (G_{\alpha_1} \cap Y) \cup (G_{\alpha_2} \cap Y) \dots \cup (G_{\alpha_n} \cap Y) = (G_{\alpha_1} \cup G_{\alpha_2} \cup \dots \cup G_{\alpha_n}) \cap Y$

$\rightarrow K \subset G_{\alpha_1} \cup G_{\alpha_2} \cup \dots \cup G_{\alpha_n}$

Subject:
Year.	Month.	Date.	( )

حال فرض کنید K در X فشرده است. $\{H_\alpha\}$ یک پوشش باز K در Y است. می‌دانیم

$H_\alpha = G_\alpha \cap Y$ که در آن G_α در X باز است. پس $K \subset \bigcup H_\alpha$ یا

$K \subset \bigcup (G_\alpha \cap Y) = \left(\bigcup G_\alpha\right)\cap Y$ بنابراین

$K \subset \bigcup G_\alpha \to$ $\{G_\alpha\}$ یک پوشش باز K $\xrightarrow{\text{K فشرده است}}$ $\left\{ \begin{array}{l} K\subset G_{\alpha_1}\cup G_{\alpha_2}\cup\dots\cup G_{\alpha_n} \\ K\subset Y \end{array} \right.$

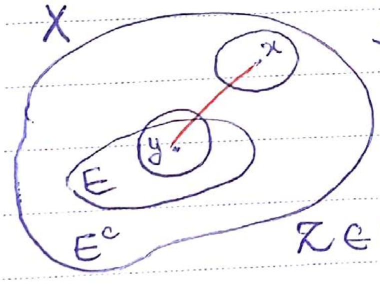
$$\to K\subset (G_{\alpha_1}\cup\dots\cup G_{\alpha_n})\cap Y \to K\subset \underbrace{(G_{\alpha_1}\cap Y)\cup\dots\cup(G_{\alpha_n}\cap Y)}_{H_{\alpha_1}\cup\dots\cup H_{\alpha_n}}$$

(X, d) یک فضای متری است

قضیه) هر زیرمجموعه فشرده یک فضای متری، بسته است.

PROOF) فرض کنید $E\subset X$ فشرده است. نشان دهیم E^c در X باز است.

باید نشان دهیم به ازای هر $x\in E^c$، $N_r(x)$ وجود دارد به طوری که $N_r(x)\subset E^c$.



فرض کنید $y\in E$ قرار دهید $r_y=\frac{d(x,y)}{۳}$ در این صورت

$N_{r_y}(x)\cap N_{r_y}(y)=\emptyset$ زیرا

$z\in N_{r_y}(x)\cap N_{r_y}(y) \to d(z,x)<r_y \,,\, d(z,y)<r_y$

$\to d(x,y) < ۲r_y = \frac{۲}{۳}d(x,y)$ (تناقض)

به ازای هر $y\in E$، همسایگی‌های متناظر را حول y و x در نظر می‌گیریم. پس

$E \subset \bigcup_{y\in E} N_{r_y}(y)$ چون E فشرده است این پوشش باز دارای یک زیر پوشش متناهی است.

$$E \subset N_{r_{y_1}}(y_1) \cup \dots \cup N_{r_{y_n}}(y_n)$$

$N_{r_{y_1}}(y_1) \cap \dots \cap N_{r_{y_n}}(y_n)$ یک همسایگی x است که شعاع آن

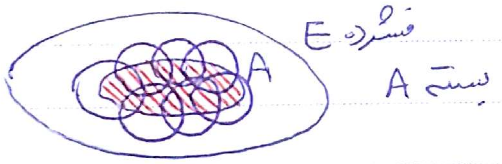
$r = \min\{r_{y_1}, \dots, r_{y_n}\}$ دراین $N_r(x) \cap E = \emptyset$ یعنی $N_r(x) \subset E^c$ پس

E^c باز است یا E بسته است.

قضیه) (X,d) یک فضای متری $E \subset X$ است.

هر زیر مجموعه بسته یک مجموعه فشرده، فشرده است.

PROOF) فرض کنیم $E \subset X$ فشرده است و $A \subset E$ بسته است. باید نشان دهیم A فشرده است.



فرض کنید $\{V_\alpha\}$ یک پوشش باز A است. A^c نیز یک مجموعه باز است. $E \subset A^c \cup \{\cup V_\alpha\}$ چون E فشرده است پس مقدار متناهی از V_α ها به اضافه A^c، E را می پوشاند یعنی $E \subset A^c \cup V_{\alpha_1} \cup \dots \cup V_{\alpha_n}$ در نتیجه

$A \subset V_{\alpha_1} \cup \dots \cup V_{\alpha_n}$.

نتیجه) اگر K فشرده و F بسته باشند آنگاه $F \cap K$ فشرده است.

اثبات) K بسته است چون فشرده است و F هم بسته پس $F \cap K$ بسته است و $F \cap K$ زیر مجموعه ی بسته ی K است و طبق قضیه قبل $F \cap K$ فشرده است.

Subject:
Year. Month. Date. ( )

فضای متری (X,d)

قضیه) فرض کنید $\{K_\alpha\}$ یک خانواده از زیرمجموعه‌های فشرده X باشد به طوری که اشتراک متناهی هر زیرخانواده $\{K_\alpha\}$ غیرتهی است ؛ در این صورت $\cap K_\alpha$ ناتهی است.

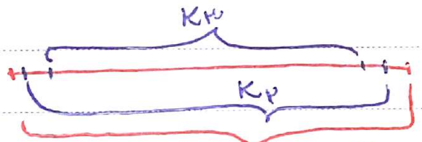
PROOF) (برهان خلف)

فرض کنیم $\cap K_\alpha = \varnothing \leftarrow (\cap_\alpha K_\alpha)^c = X$

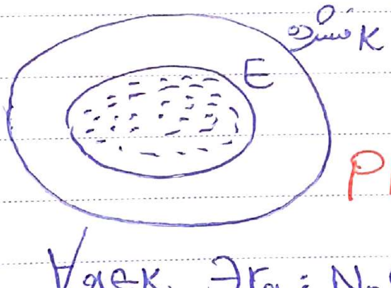
$\bigcup_\alpha K_\alpha^c = X \quad K_{\alpha_0} \subset X \rightarrow K_{\alpha_0} \subset \bigcup_\alpha K_\alpha^c \xrightarrow{\text{فشردگی } K_{\alpha_0}} K_{\alpha_0} \subset K_{\alpha_1}^c \cup K_{\alpha_2}^c \cup \dots \cup K_{\alpha_n}^c$

$\rightarrow K_{\alpha_0} \subset (K_{\alpha_1} \cap K_{\alpha_2} \cap \dots \cap K_{\alpha_n})^c \rightarrow \underbrace{K_{\alpha_0} \cap K_{\alpha_1} \cap \dots \cap K_{\alpha_n} = \varnothing}_{\text{تناقض با }(*)}$

نتیجه) اگر $\{K_n\}$ یک دنباله از زیرمجموعه‌های فشرده ناتهی باشد به طوری که $K_n \supset K_{n+1}$ ، $n=1,2,\dots$ آنگاه $\bigcap_{n=1}^{\infty} K_n$ ناتهی است.



قضیه) فرض کنید E یک زیرمجموعه نامتناهی مجموعه فشرده K باشد؛ در این صورت E دارای (لااقل) یک نقطه حدی در K است.



فرض کنیم E در K دارای نقطه حدی نیست (برهان خلف) PROOF)

$\forall x \in K \quad \exists r_x : N_{r_x}(x) \cap (E - \{x\}) = \varnothing$

$K \subset \bigcup_{x \in K} N_{r_x}(x) \xrightarrow{K \text{ فشرده است}} E \subset K \subset N_{r_{x_1}}(x_1) \cup \dots \cup N_{r_{x_n}}(x_n)$ ①

چون $E \cap N_{r_x}(x)$ حداکثر شامل x بوده طبق ① $E \subset \{x_1, \dots, x_n\}$ یعنی E متناهی است که این تناقض با فرض مسئله دارد.

Subject:
Year. Month. Date. ( )

قضیه) اگر $\{I_n\}$ یک دنباله از بازه‌های بسته در $\mathbb{R}$ باشد به طوری که $I_{n+1} \subset I_n$ ($n=1,2,\dots$) آن‌گاه $\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$ تهی نیست.

(PROOF) $I_n = [a_n, b_n]$

$A = \{a_n \; n\in\mathbb{N}\}$ $\qquad$ $B = \{b_n \; n\in\mathbb{N}\}$

A از بالا کراندار است زیرا $a_n \leqslant b_1$ بنابراین A دارای سوپریمم است و $\sup a_n = x$

پس $x \leqslant b_1$ از طرفی $a_n \leqslant a_{n+m} \leqslant b_{n+m} \leqslant b_n$

بنابراین $x \leqslant b_n$ و $x \geqslant a_n$ یعنی $a_n \leqslant x \leqslant b_n$ درنتیجه $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$

قضیه) فرض کنید k یک عدد طبیعی باشد اگر $\{I_n\}$ یک دنباله از حجره‌های k بعدی در $\mathbb{R}^k$ باشد به طوری که $I_n \supset I_{n+1}$ $n\in\mathbb{N}$ آن‌گاه $\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$ ناتهی است.

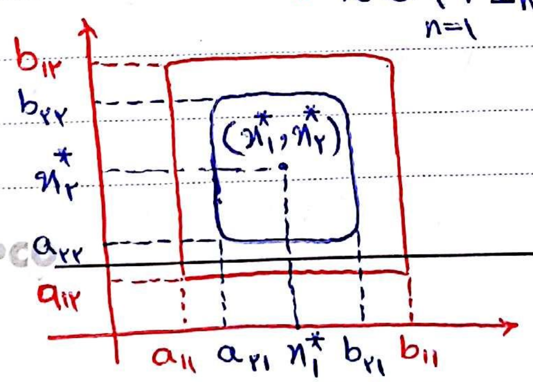
PROOF) $I_n = \{(x_1, x_2, \dots, x_k) \mid a_{n,j} \leqslant x_j \leqslant b_{n,j} \quad j=1,\dots,k\}$

(n برای دانستن که روی کدام حجره هستیم) ← $I_{n,j} = [a_{n,j}, b_{n,j}]$

به ازای j دنباله $\{I_{n,j}\}$ شرایط قضیه قبل را دارد پس $x_j^* \in \bigcap_{n=1}^{\infty} I_{n,j}$

پس $a_{n,j} \leqslant x_j^* \leqslant b_{n,j}$ قرار دهید $x^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_k^*)$ در این صورت

$x^* \in I_n$ (طبق قضیه قبل) و درنتیجه $x^* \in \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$.



قضیه) هر مجره K بعدی فشرده است.

PROOF) (برهان خلف)

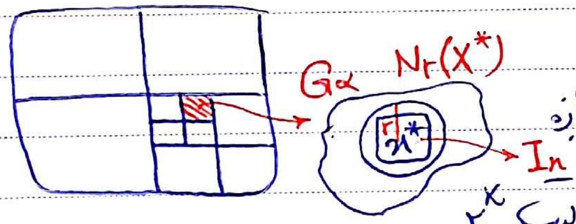
$$I=\{(x_1,x_2,\dots,x_k) \quad a_i\le x_i\le b_i\} \qquad \delta=\left(\sum_{i=1}^{k}(b_i-a_i)^2\right)^{1/2}$$

به ازای هر $x,y\in I$ داریم $|x-y|\le\delta$ زیرا:

$$|x-y|=\left(\sum_{i=1}^{k}(y_i-x_i)^2\right)^{1/2}\le\left(\sum_{i=1}^{k}(b_i-a_i)^2\right)^{1/2}$$

$x=(x_1,\dots,x_n) \qquad y=(y_1,\dots,y_k)$

فرض کنیم حکم برقرار نیست بنابراین یک پوشش باز $\{G_\alpha\}$ برای I وجود دارد که دارای هیچ زیر پوشش متناهی نیست.



$c_j=\frac{a_j+b_j}{2}$ هر بازه $[a_i,b_i]$ به دو زیر بازه $[a_i,c_i]$ و $[c_i,b_i]$ تقسیم میشود بدین ترتیب 2^k مجره K بعدی a_i بدست می آید. لااقل یکی از a_i ها دارای زیر پوشش متناهی نیست.

این مجره را انتخاب می کنیم و عمل بالا را ادامه می دهیم بنابراین دنباله ای از مجره های تودرتو بدست می آید که در شرایط زیر صدق می کنند.

الف) $I\supset I_1\supset I_2\supset\dots\supset I_n\supset\dots$

ب) I_n با یک زیر پوشش متناهی $\{G_\alpha\}$ پوشیده نمی شود.

ج) به ازای $x,y\in I_n$ داریم $|x-y|\le 2^{-n}\cdot\delta$.

Subject:
Year. Month. Date. ( )

با استفاده از قضیه قبل x^* وجود دارد به طوری $\forall n: x^* \in I_n$ چون $\{G_\alpha\}$
یک پوشش باز است پس α وجود دارد به طوری که $x^* \in G_\alpha$. G_α باز است پس $r>0$
وجود دارد به طوری که $N_r(x^*) \subset G_\alpha$. اگر n به اندازه‌ی کافی بزرگ باشد
$2^{-n}\delta < r$ در این حالت $I_n \subset G_\alpha$ که تناقض است زیرا I_n دارای زیر پوشش متناهی
G_α است.

قضیه) فرض کنید $E \subset \mathbb{R}^k$ شرایط زیر هم ارزند:

الف - E بسته و کراندار است.
ب - E فشرده است.
پ - هر زیرمجموعه نامتناهی E دارای یک نقطه حدی در E است.

قضیه (هاینه - برل) Heine-Borel

در هر فضای متری

اثبات) الف ← ب

E کراندار است پس مجره k بعدی I وجود دارد به طوری که $E \subset I$ می‌دانیم که I فشرده است
و E بسته و $E \subset I$ بنابراین طبق قضیه که هر زیرمجموعه بسته یک مجموعه بسته فشرده است پس
E فشرده است.

ب ← پ

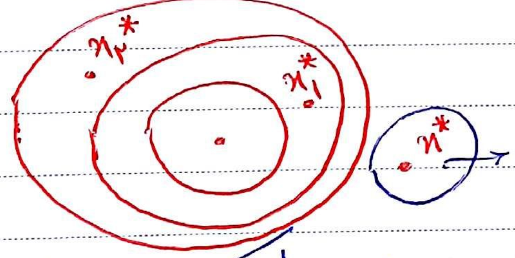
با برهان خلف فرض می‌کنیم یک زیرمجموعه نامتناهی E مانند A وجود دارد که دارای نقاط حدی

در E نیست. بنابراین به ازای هر $x \in E$ ، $r_x > 0$ وجود دارد به طوری که
$N_{r_x}(x) \cap A - \{x\} = \emptyset$. $\{N_{r_x}\}_{x \in E}$ یک پوشش باز E است. چون E فشرده
است، تعدادی متناهی از این همسایگی ها مانند $N_{r_1}(x_1), \dots, N_{r_n}(x_n)$ را
می پوشاند. $A \subset E \subset N_{r_1}(x_1) \cup N_{r_2}(x_2) \cup \dots \cup N_{r_n}(x_n)$ اما
$N_{r_n}(x_n) \cap A - \{x_n\} = \emptyset$ پس $A \subset \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ که تناقض با نامتناهی بودن A.

ب ← الف

ابتدا فرض می کنیم E کراندار نباشد پس به ازای هر $n \in \mathbb{N}$ وجود دارد که $x_n \in E$
به طوری که $|x_n| > n$.

$A = \{x_n \;\; n \in \mathbb{N}\}$ A نامتناهی است. طبق فرض A دارای نقطه ی حدی در E
است. اگر x^* نقطه ی حدی A باشد داریم. $N_1(x^*)$ باید شامل بی نهایت عضو A
باشد که تناقض است.



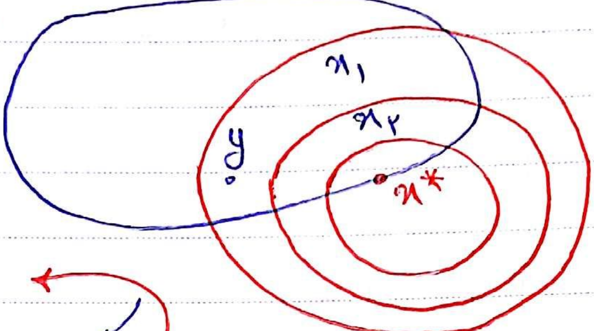
حال فرض می کنیم E بسته نیست پس $x^* \in \mathbb{R}^k$ وجود دارد به طوری که x^* نقطه ی حدی
E است و $x^* \notin E$. به ازای هر $n \in \mathbb{N}$ $E \cap N_{1/n}(x^*) \neq \emptyset$ فرض کنید
$x_n \in E \cap N_{1/n}(x^*)$. $\{x_n\}$ نامتناهی است پس باید در E دارای یک نقطه حدی مانند
y باشد.

$$\begin{cases} |x_n-x^*|<\frac{1}{n} \\ -|x_n-x^*|>-\frac{1}{n} \end{cases}$$

$$|y-x_n| = |y-x^*+x^*-x_n|$$

$$> |y-x^*| - |x^*-x_n|$$

$$> |y-x^*| - \frac{1}{n} > \frac{1}{2}|y-x^*|$$



اگر n به اندازه کافی بزرگ باشد داریم.

بنابراین y نقطه حدی $\{x_n\}$ نیست و تناقض نتوانستیم نقطه‌ی حدی در E پیدا کنیم

پس با فرض (ب) به تناقض رسیدیم.

قضیه (وایرشتراس): هر زیر مجموعه کراندار نامتناهی $\mathbb{R}^k$ در $\mathbb{R}^k$ دارای نقطه حدی است.

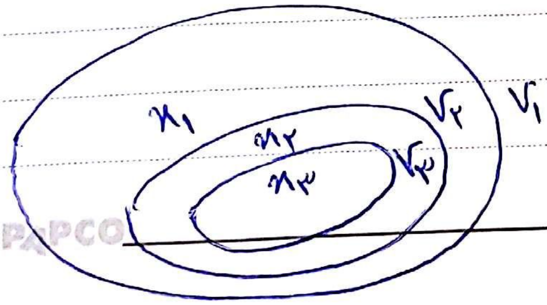
اثبات) E کراندار است پس مجره k بعدی I وجود دارد به طوری که $E\subset I$ فشرده I است پس هر زیرمجموعه نامتناهی آن در I دارای نقطه‌ی حدی است. پس E در I و در نتیجه در $\mathbb{R}^k$ دارای نقطه‌ی حدی است.

(مجموعه کامل):

قضیه) فرض کنید P یک مجموعه ناتهی کامل $\mathbb{R}^k$ باشد در این صورت P شمارش ناپذیر است.

اثبات) فرض می‌کنیم P شمارا است و $P=\{x_1,x_2,\dots\}$

$\overline{V_2}\subset V_1 \qquad x_1\notin\overline{V_2}$



$\overline{V_3}\subset V_2 \qquad x_2\notin\overline{V_3}$

$\vdots$

$\overline{V_n}\subset V_{n-1} \qquad x_{n-1}\notin\overline{V_n}$

می‌دانیم P بسته است و هر نقطه‌ی آن نقطه‌ی حدی است پس P نامتناهی است.

فرض می‌کنیم P شمارش‌پذیر است. $P\{x_1,x_2,\dots\}$ ، x_1 یک نقطه حدی P است و

V_1 یک همسایگی دلخواه x_1 است چون x_1 یک نقطه حدی P است پس $V_1-\{x_1\}\cap P\neq\emptyset$

بنابراین همسایگی V_2 حول یکی دیگر از نقاط P وجود دارد به طوری که $\overline{V_2}\subset V_1$ و $x_1\notin\overline{V_2}$

و $V_2\cap P\neq\emptyset$ این روند را ادامه می‌دهیم هرگاه V_n شناخته شده باشد. V_{n+1} را به صورت زیر می‌سازیم.

الف) $\overline{V_{n+1}}\subset V_n$

ب) $x_n\notin\overline{V_{n+1}}$

ج) $V_{n+1}\cap P\neq\emptyset$

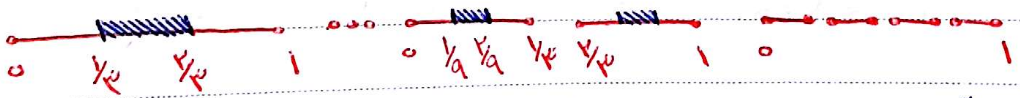
قرار دهید $K_n=\overline{V_n}\cap P$ ، K_n بسته و کراندار است و
پس فشرده است

$K_{n+1}\subset K_n$ در نتیجه $\emptyset\neq\bigcap_{n=1}^{\infty}K_n$ اما $x_n\notin\bigcap_{n=1}^{\infty}K_n$ به ازای $n\in\mathbb{N}$ که تناقض است.

نتیجه) $[a,b]$ شمارش‌ناپذیر است. (می‌دانیم $[a,b]$ کامل است، با استفاده از قضیه قبل $[a,b]$ شمارش‌ناپذیر است.)

* مثالی از مجموعه کامل ارائه دهید که به صورت بازه نباشد.

☑ مجموعه کانتور:



فرض کنید $E_0=[0,1]$ و $E_1=[0,\frac{1}{3}]\cup[\frac{2}{3},1]$ و $E_2=[0,\frac{1}{9}]\cup[\frac{2}{9},\frac{3}{9}]\cup[\frac{6}{9},\frac{7}{9}]\cup[\frac{8}{9},1]$

و ... و E_n به همین ترتیب ادامه می‌دهیم یک دنباله از مجموعه‌های فشرده E_n با خاصیت زیر بدست می‌آید.

Subject:
Year. Month. Date. ( )

الف) $\dots \subset E_n \subset \dots \subset E_2 \subset E_1$

ب) E_n برابر است اجتماع 2^n بازه بسته. هریک از این بازه‌های بسته دارای طول $\frac{1}{3^n}$ است.

قرار دهید $P=\bigcap_{n=0}^{\infty} E_n$ ؛ P مجموعه کانتور نامیده می‌شود.

۱) P ناتهی است زیرا ابتدا و انتهای هریک از 2^n بازه در E_n، در مجموعه کانتور است.

۲) مجموعه کانتور بسته است زیرا $P=\bigcap_{n=0}^{\infty} E_n$. به ازای هر n، E_n برابر است با اجتماع 2^n بازه بسته، پس E_n بسته است. P برابر است با اشتراک شمارش‌پذیر مجموعه‌های بسته، پس بسته است.

۳) مجموعه کانتور شامل هیچ بازه‌ای نیست.

$(n \in \mathbb{N})$

مقدمات اثبات ۳) توجه کنید که بازه‌ای به صورت $\left(\frac{3k+1}{3^n}, \frac{3k+2}{3^n}\right)$ در مجموعه کانتور وجود ندارد.

اثبات این جمله

$3k+2<3^n$

نشان می‌دهیم در E_n بازه‌ای به صورت $\left(\frac{3k+1}{3^n}, \frac{3k+2}{3^n}\right)$ وجود ندارد که در آن $3k+1<3^n$ و .

اثبات با استقرا) $n=1$، E_1 شامل بازه‌ای به صورت $\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$ نیست. فرض می‌کنیم برای n حکم برقرار است. E_n شامل 2^n بازه است که هریک از این بازه‌ها به صورت

باقی‌مانده‌ها

$\left[\frac{3k}{3^n}, \frac{3k+1}{3^n}\right]$ یا $\left[\frac{3k+2}{3^n}, \frac{3k+3}{3^n}\right]$ است.

$\frac{3k}{3^n}+\frac{1}{3^{n+1}}$

3 $\qquad \frac{3k}{3^n}+\frac{2}{3^{n+1}} \qquad \frac{3k+1}{3^n}$

$\frac{1}{3^{n+1}} \qquad \frac{1}{3^{n+1}} \qquad \frac{1}{3^{n+1}}$

$\left[\frac{9k}{3^{n+1}}, \frac{9k+1}{3^{n+1}}\right] \qquad \left[\frac{9k+2}{3^{n+1}}, \frac{9k+3}{3^{n+1}}\right]$

$3k=k' \downarrow \qquad 3k=k' \downarrow$

$\left[\frac{3k'}{3^{n+1}}, \frac{3k'+1}{3^{n+1}}\right] \qquad \left[\frac{3k'+2}{3^{n+1}}, \frac{3k'+3}{3^{n+1}}\right]$

اگر یکی از 2^n بازه در E_n به صورت $\left[\frac{3k}{3^n}, \frac{3k+1}{3^n}\right]$ باشد و در مرحله‌ی $n+1$ به دو بازه‌ی

Subject:

Year. Month. Date. ( )

$\left[\frac{9K+2}{3^{n+1}}, \frac{9K+3}{3^{n+1}}\right]$ و $\left[\frac{9K}{3^{n+1}}, \frac{9K+1}{3^{n+1}}\right]$ تبدیل می‌شود که هیچ یک از این بازه‌ها به صورت

$\left[\frac{3K+1}{3^{n+1}}, \frac{3K+2}{3^{n+1}}\right]$ نیست. به طور مشابه به بازه‌ای به صورت $\left[\frac{3K+2}{3^n}, \frac{3K+3}{3^n}\right]$ به دو زیر

بازه به صورت $\left[\overset{3K'+2}{\frac{9K+8}{3^{n+1}}}, \overset{3K'+3}{\frac{9K+9}{3^{n+1}}}\right]$ و $\left[\overset{3K'}{\frac{9K+6}{3^{n+1}}}, \overset{3K'+1}{\frac{9K+7}{3^{n+1}}}\right]$ تبدیل می‌شود.

اثبات ۳) برای اثبات (۳) فرض می‌کنیم $(\alpha,\beta)\subset P$، n را به اندازه‌ی کافی بزرگ اختیار می‌کنیم تا

$\frac{1}{3^n} < \frac{\beta-\alpha}{2}$. به طور مثال $\alpha = 1/100$ ، $\beta = 2/100 \Rightarrow \frac{\beta-\alpha}{2} = \frac{1}{200} \Rightarrow 1/3^n < 1/200$

$\Rightarrow 3^n > 200 \Rightarrow n = 5$ $(3^5 = 243)$. در این صورت لااقل یکی از 3^n بازه‌ای که در

افراز $[0,1]$ توسط نقاط $\frac{K}{3^n}$ ، $K = 0, \dots, 3^n$ حاصل می‌شود و آن را I می‌نامیم در درون

(α,β) قرار می‌گیرد. اگر $I \not\in E_n$ در این صورت $I \not\subset P$. تناقض با اینکه $(\alpha,\beta)\subset P$.

(اگر I یکی از 2^n بازه‌ای است که E_n را می‌سازد) اگر $I \subset E_n$، در این صورت در مرحله بعد $\frac{1}{3}$

میان I که به شکل $\left(\frac{3K+1}{3^n}, \frac{3K+2}{3^n}\right)$ به ازای K است حذف می‌شود پس $I \not\subset E_{n+1}$. در نتیجه

$I \not\subset P$. تناقض با اینکه $(\alpha,\beta)\subset P$. ۴) هر نقطه P یک نقطه‌ی حدی است.

اثبات) به ازای $\varepsilon > 0$ داده شده، n را به اندازه‌ی کافی بزرگ اختیار می‌کنیم تا $1/3^n < \varepsilon/3$ باشد و $x \in E_n$

بنابراین x به یکی از 2^n بازه‌ای که E_n را می‌سازد و آن را I می‌نامیم تعلق دارد. بنابراین $I \subset (x-\varepsilon, x+\varepsilon)$

یعنی در $N_\varepsilon(x)$، نقطه ابتدایی و انتهایی I وجود دارد که هر دو به P تعلق دارند.

(ناشمارا است مجموعه کانتور چون کامل است)

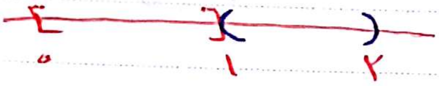
$x-\varepsilon$ $\quad x \quad$ $x+\varepsilon$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

- مجموعه‌های همبند:

فرض کنید A و B زیرمجموعه‌های یک فضای متری X هستند. A و B از هم جداشده نامیده می‌شوند هرگاه $A\cap\overline{B}=\varnothing$ و $B\cap\overline{A}=\varnothing$؛

مثال) $A=[0,1]$ $B=(1,2)$ $A\cap B=\varnothing$ اما A و B از هم جداشده نیستند. $1\in\overline{B}$ و $1\in A$



مثال) $A=[0,1]$ $B=[2,3]$ از هم جداشده هستند.

تعریف: $E\subset X$ همبند نامیده می‌شود هرگاه نتوان E را به صورت اجتماع دو مجموعه از هم جداشده غیرتهی نوشت.

E همبند است $\leftrightarrow (\forall x,y\in E, \forall z \quad \overset{x<y}{x<z<y} \rightarrow z\in E)$

قضیه) زیرمجموعه E از خط حقیقی R همبند است اگر و تنها اگر دارای خاصیت زیر باشد:

اگر $x\in E$ و $y\in E$ و $x<z<y$ آن‌گاه $z\in E$.

اثبات) نشان می‌دهیم E همبند نیست اگر و تنها اگر $x\in E$ و $y\in E$ و z بین x و y موجود باشند به طوری که $z\notin E$.

ابتدا فرض می‌کنیم E ناهمبند است بنابراین $A,B\subset E$ وجود دارد به طوری که $A\cup B=E$ ، $A\cap\overline{B}=\varnothing$ و $B\cap\overline{A}=\varnothing$.

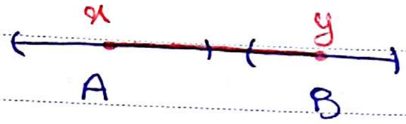
(بقیه صفحه‌ی بعد)

Subject:

Year. Month. Date. ( )

$x\in A,\ y\in B,$ فرض $x<y \quad z=\sup([x,y]\cap A) \to z\in\bar{A},\ \bar{A}\cap B=\varnothing \to z\notin B$ ③   ($x\leq z\leq y$)

(*) $z\notin A$ ④ $\to x\neq z$ ②   ① ② $\to x<z<y$ ③, ④ $\to z\notin A\cup B=E$; $z\neq y$ ①

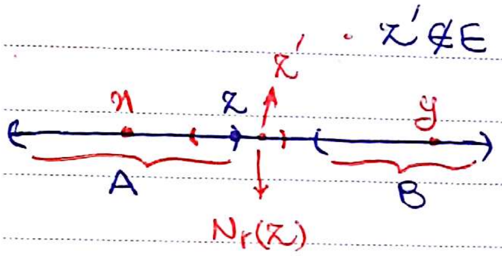


$z\in A$

حال فرض می‌کنیم $z\in A$ چون $A\cap\bar{B}=\varnothing$ پس $z\notin\bar{B}$. بنابراین $N_r(z)$ وجود دارد

بطوریکه $N_r(z)\cap B=\varnothing$ فرض کنید $z'\in N_r(z)$ و $z'>z$ ؛

بنابراین $z'\notin B$ ، $z'\notin A$ اما $x<z'<y$ و $z'\notin E$.



فرض می‌کنیم $x<z<y$ وجود دارد بطوریکه $x\in E$ ، $y\in E$ و $z\notin E$

$$\begin{cases} A=(-\infty,z]\cap E \\ B=[z,+\infty)\cap E \end{cases}$$

$$A\cup B=\left((-\infty,z]\cap E\right)\cup\left([z,+\infty)\cap E\right)$$

$$=E\cap\left((-\infty,z]\cup[z,+\infty)\right)=E\cap\mathbb{R}=E$$

$$\bar{A}=\left(\overline{(-\infty,z]\cap E}\right)\subset\overline{(-\infty,z]}\cap\bar{E}=(-\infty,z]\cap\bar{E}\subset(-\infty,z]$$

$$\bar{A}\cap B\subset(-\infty,z]\cap\left([z,+\infty)\cap E\right)=\varnothing$$

$$\bar{B}=\left(\overline{[z,+\infty)\cap E}\right)\subset[z,+\infty)\cap\bar{E}\subset[z,+\infty)$$

$$A\cap\bar{B}=\left((-\infty,z]\cap E\right)\cap[z,+\infty)=\varnothing$$

پس A و B دو مجموعه جدا از هم هستند پس E ناهمبند است.

PAPCO

Subject :
Year . Month . Date . ( )

دنباله‌های عددی و سری‌ها :

+ دنباله‌های همگرا :

$f : \mathbb{N} \to X$

فرض کنید X یک فضای متری است. هر تابع از $\mathbb{N}$ به X یک دنباله نامیده می‌شود

دنباله f را معمولاً با $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ نمایش می‌دهیم که در آن $x_n = f(n)$.

$$\begin{cases} f(1) = x_1 \\ f(2) = x_2 \\ \vdots \\ f(n) = x_n \end{cases}$$

تعریف) فرض کنید (X,d) یک فضای متری است. $\{P_n\}$ دنباله‌ای

در X است. $(P_n \in X)$ گوییم $\{P_n\}$ به نقطه $P \in X$ همگراست، هرگاه

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \quad n > N \to d(P_n, P) < \varepsilon$$

$$|P_n - P| < \varepsilon$$

قضیه) فرض کنید $\{P_n\}$ دنباله‌ای در فضای متری X باشد.

الف - $\{P_n\}$ به P همگراست اگر و تنها اگر هر همسایگی P شامل تمام اعضای $\{P_n\}$ مگر تعدادی متناهی باشد.

ب - حد یک دنباله در صورت وجود یکتاست.

پ - هرگاه $\{P_n\}$ همگرا باشد، $\{P_n\}$ کراندار است.

ت - هرگاه $E \subset X$ و P یک نقطه حدی E باشد، در این صورت $\{P_n\}$ وجود دارد بطوریکه

$P_n \in E$ و $P_n \to P$.

Subject:
Year. Month. Date. ( )

اثبات (الف) فرض می‌کنیم $\{P_n\}$ به P همگراست، می‌خواهیم نشان دهیم در هر همسایگی P همه P_n ها مگر تعداد متناهی قرار می‌گیرند. فرض کنید $N_\varepsilon(P)$ داده شده است. چون $\{P_n\}$ به P همگراست پس به ازای $\varepsilon > 0$ داده شده است N وجود دارد که اگر $n > N$ آن‌گاه $d(P_n, P) < \varepsilon$ پس اگر $n > N$ آن‌گاه $P_n \in N_\varepsilon(P)$.

فرض می‌کنیم در هر همسایگی P همه P_n ها مگر تعداد متناهی قرار می‌گیرند نشان می‌دهیم $\lim_{n\to\infty} P_n = P$.

به ازای $\varepsilon > 0$ داده شده، $N_\varepsilon(P)$ را در نظر می‌گیریم. فرض کنید

پس اگر $N = \max\{n_i : P_{n_i} \notin N_\varepsilon(P)\}$

$$n > N \to P_n \in N_\varepsilon(P) \to d(P_n, P) < \varepsilon$$

پس

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \quad n > N \to d(P_n, P) < \varepsilon$$

اثبات (ب) فرض می‌کنیم x و y حد دنباله $\{P_n\}$ می‌باشد. (برهان خلف)

$$\varepsilon = \frac{d(x,y)}{3} \Rightarrow N_\varepsilon(x) \cap N_\varepsilon(y) = \emptyset$$

$$\lim_{n\to\infty} P_n = x \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists N : n > N \quad P_n \in N_\varepsilon(x) \quad d(x, P_n) < \varepsilon$$

$$\lim_{n\to\infty} P_n = y \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists M : n > M \quad P_n \in N_\varepsilon(y) \quad d(y, P_n) < \varepsilon$$

$$N_1 = \max\{N, M\}$$

$$\left.\begin{array}{l} \forall n > N_1 \Rightarrow P_n \in N_\varepsilon(x) \\ \Downarrow \ P_n \in N_\varepsilon(y) \end{array}\right\} \Rightarrow P_n \in N_\varepsilon(x) \cap N_\varepsilon(y) \quad \times$$

تناقض $d(x,y) \leqslant d(x,P_n) + d(y,P_n) < \frac{d(x,y)}{3} + \frac{d(x,y)}{3} = \frac{2}{3} d(x,y)$

Subject :
Year . Month . Date . ( )

(اثبات / ب)

$$\begin{cases} \forall \varepsilon>0 \ \exists N \quad n>N \to d(p_n,p)<\varepsilon \\ \varepsilon=1 \ \exists N \quad n>N \to d(p_n,p)<1 \end{cases}$$

$$M = \max\{1, d(p_1,p), d(p_2,p), \dots, d(p_n,p)\}$$

$$\forall n\in N \quad d(p,p_n)<M+1$$

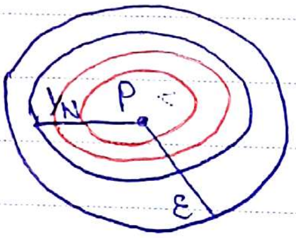
(اثبات / ت) $E\subset X$ ، p یک نقطه حدی E نشان می دهیم $\{p_n\}$ وجود دارد به

طوری که $\lim_{n\to\infty} p_n = p$. $(p_n\in E)$

$$\forall n\in N, \ \exists p_n\in E, \ d(p_n,p)<1/n$$ (همسایگی به مرکز p و شعاع $\frac{1}{n}$)

$$\lim_{n\to\infty} p_n = p$$

$$\forall \varepsilon>0, \exists N: \frac{1}{N}<\varepsilon \quad n>N \to \frac{1}{n}<\frac{1}{N}<\varepsilon \to d(p_n,p)<\frac{1}{n}<\frac{1}{N}<\varepsilon$$



قضیه) فرض کنید $\{s_n\}$ و $\{t_n\}$ دنباله های حقیقی باشند (مختلط)

و $\lim t_n = t$ در این صورت:

الف) $\lim_{n\to\infty}(s_n+t_n)=s+t$

ب) برای $c\in\mathbb{R}$ ، $\lim_{n\to\infty} cs_n = cs$ و $\lim_{n\to\infty}(c+s_n)=c+s$

پ) $\lim_{n\to\infty} s_n t_n = st$ ت) $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{s_n} = \frac{1}{s}$ $s\neq 0$

PAPCO

Subject:
Year. Month. Date. ( )

الف)
$$\lim_{n\to\infty} s_n = s \Rightarrow \forall \frac{\varepsilon}{2}>0\ \exists N'\ n>N' \Rightarrow |s_n - s| < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\lim_{n\to\infty} t_n = t \Rightarrow \forall \frac{\varepsilon}{2}>0\ \exists N''\ n>N'' \Rightarrow |t_n - t| < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$N = \max\{N', N''\} \quad n>N$$

$$|(s_n-s)+(t_n-t)| \leqslant |(s_n+t_n)-(s+t)| \leqslant |s_n-s| + |t_n-t| < \underbrace{\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}}_{\varepsilon}$$

ب)
$$\lim c s_n = c s \Rightarrow \forall \varepsilon>0\ \exists N\ n>N \Rightarrow |c s_n - c s| < \varepsilon$$

$$|c||s_n - s| < \varepsilon \quad c \neq 0$$

فرض $\frac{\varepsilon}{|c|}$

ج)
$$\lim_{n\to\infty} s_n t_n = st$$

چون $\{s_n\}$ همگراست $\rightarrow |s_n| < M$

$$\lim_{n\to\infty} s_n = s \quad \forall \varepsilon>0\ \exists N_1\ n>N_1 \rightarrow |s_n - s| < \varepsilon/2(|t|+1)$$ فرض!

$$\lim_{n\to\infty} t_n = t \quad \forall \varepsilon>0\ \exists N_2\ n>N_2 \rightarrow |t_n - t| < \varepsilon/2M$$

حکم:
$$\lim_{n\to\infty} s_n t_n = st \quad \forall \varepsilon>0\ \exists N\ n>N\ |s_n t_n - st| < \varepsilon$$

$$|s_n t_n - st| = |s_n t_n - s_n t + s_n t - st| = |s_n(t_n - t) + t(s_n - s)|$$

$$\leqslant |s_n||t_n-t| + |t||s_n-s| < M\cdot\frac{\varepsilon}{2M} + |t|\,\varepsilon/2(|t|+1) < \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

PAPCO $n > \max\{N_1, N_2\}$

Scanned by CamScanner

٣) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{s_n} = \frac{1}{s}$ $\quad s \neq 0 \quad ||a|-|b|| \leq |a+b| \leq |a|+|b|$

حکم: $\forall \varepsilon>0 \ \exists N \ \ n>N \ \ \left|\frac{1}{s_n}-\frac{1}{s}\right|<\varepsilon$

$\forall \varepsilon>0 \ \exists N_2 \ \ n>N_2 \to |s_n-s|<\varepsilon$

$\varepsilon = \frac{|s|}{2} \ \exists N_1 \ \ n>N_1 \ \ |s_n-s|<\frac{|s|}{2}$

$|s|-|s_n| < \frac{|s|}{2} \to |s|-\frac{|s|}{2} < |s_n|$

$\to \frac{|s|}{2} < |s_n| \to \frac{2}{|s|} > \frac{1}{|s_n|}$

$n > \max\{N_1, N_2\} \to \left|\frac{1}{s_n}-\frac{1}{s}\right| = \frac{|s-s_n|}{|s_n s|} < \frac{2|s-s_n|}{|s|^2} < \frac{2\varepsilon}{|s|^2}$

قضیه) الف) فرض کنید به ازای $n \in \mathbb{N}$ داریم $X_n \in \mathbb{R}^k$

$X_1 = (x_{1,1}, \dots, x_{1,k})$

$X_2 = (x_{2,1}, \dots, x_{2,k})$ $\qquad A = (a_1, a_2, \dots, a_k)$

$\vdots$

$X_n = (x_{n,1}, \dots, x_{n,k})$

$\lim\limits_{n\to\infty} X_n = A \longleftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} x_{n,i} = a_i$ به ازای هر $i=1,2,\dots,k$

فرض $\lim\limits_{n\to\infty} X_n = A \to \forall \varepsilon>0 \ \exists N \ \ n>N \to |X_n - A| < \varepsilon$

$| \ | \leq \sqrt{| \ |^2 + | \ |^2}$ $\qquad |x_{n,i}-a_i| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{k} |x_{n,i}-a_i|^2} < \varepsilon$

طرف دوم $\forall i \quad 1 \leq i \leq k \rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} x_{n,i} = a_i$

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N_i \ n > N_i \rightarrow |x_{n,i} - a_i| < \varepsilon$

$n > \operatorname{Max}\{n_i \ i = 1, \dots, k\} \ N \quad \left(\sum_{i=1}^{k} |x_{n,i} - a_i|^2\right)^{1/2} < (k\varepsilon^2)^{1/2}$

$n > N \quad |X_n - A| < \sqrt{k}\,\varepsilon$

ب) فرض کنید $\{X_n\}$ و $\{Y_n\}$ دنباله‌هایی در $\mathbb{R}^k$ باشند و $\{\beta_n\}$ دنباله‌ای حقیقی باشد و $X_n \rightarrow X$ ، $Y_n \rightarrow Y$ ، $\beta_n \rightarrow \beta$.

$\lim (X_n + Y_n) = X + Y \qquad \lim X_n \cdot Y_n = X \cdot Y$ و $\lim \beta_n X_n = \beta X$

ضرب داخلی

در اینصورت ضرب اسکالر

$(x_{n,1} y_{n,1} + x_{n,2} y_{n,2} + \dots + x_{n,k} y_{n,k}) \rightarrow x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_k y_k$

$X_1 = \beta_1 (x_{1,1}, x_{1,2}) \quad Y_1 = (y_{1,1}, y_{1,2}) \quad X_1 + Y_1 = (x_{1,1} + y_{1,1}, x_{1,2} + y_{1,2})$

$X_n = \beta_n (x_{n,1}, x_{n,2}) \quad Y_n = (y_{n,1}, y_{n,2}) \quad X_n + Y_n = (x_{n,1} + y_{n,1}, x_{n,2} + y_{n,2})$

$\beta x_1 \qquad \beta x_2$

[(X,d) یک فضای متری هستند، $P_k \in X$]

- **زیردنباله:** دنباله $\{P_k\}$ داده شده است.

تعریف) فرض کنید دنباله $\{P_n\}$ داده شده است، دنباله صعودی $\{n_k\}$ اعداد طبیعی را در نظر بگیرید.
یعنی: $n_1 < n_2 < n_3 < \cdots$ در این صورت دنباله $\{P_{n_k}\}$ یک زیردنباله $\{P_n\}$ نامیده می‌شود.

مثال)

$\{n\}_{n\geq 1}$ $1,2,3,\cdots \rightarrow$ $\{2n\}_{n\geq 1}$ زیردنباله

$\{-1\}^n$ $-1,1,-1,1,-1,\cdots \rightarrow$ $1,1,1,\cdots$ زیردنباله

+ $\{P_n\}$ همگراست $\rightarrow$ هر زیردنباله $\{P_n\}$ همگراست

قضیه) (الف) $P_n \rightarrow P$ اگر و تنها اگر هر زیردنباله آن به P همگرا باشد.

فرض
$P_n \rightarrow P$

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \quad n \geq N \rightarrow d(P_n, P) < \varepsilon \quad ①$$

به ازای $\varepsilon > 0$ داده شده در رابطه ① اگر $n_k \geq N$ در این صورت $\{P_{n_k}\}$ زیردنباله $\{P_n\}$

$$d(P_{n_k}, P) < \varepsilon$$

فرض کنید هر زیردنباله $\{P_n\}$ به غیر از $\{P_n\}$ به P همگراست. نشان می‌دهیم $\{P_n\}$ نیز به P همگراست. اگر $P_n \not\rightarrow P$ یعنی

$$\exists \varepsilon > 0 : \forall N \ \exists n \geq N : d(P_n, P) \geq \varepsilon$$

$N=1 \quad n_1 \geq 1 \quad d(P_{n_1}, P) \geq \varepsilon$

$N=2 \quad n_2 \geq 2 \quad d(P_{n_2}, P) \geq \varepsilon$

$\vdots$

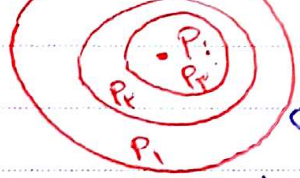
زیردنباله $\{P_{n_k}\}$ به P همگرا نیست.

قضیه) الف - $\{p_n\}$ دنباله‌ای در فضای متری فشرده X است. در این صورت $\{p_n\}$ دارای یک زیر دنباله همگرا به نقطه‌ای از X است.

ب - هر دنباله کراندار در $\mathbb{R}^k$ دارای یک زیر دنباله همگراست.

PROOF) (الف) اگر برد $\{p_n\}$ مجموعه‌ای متناهی باشد در این صورت این دنباله دارای یک زیر دنباله ثابت است که همگراست. حال فرض کنید برد $\{p_n\}$ نامتناهی است. پس برد $\{p_n\}$ دارای یک نقطه حدی p است. $N_{1/m}(p)$ را در نظر می‌گیریم p_{n_m} متعلق به برد دنباله وجود دارد به طوری که $p_{n_m}\in N_{1/m}(p)$ پس $d(p_{n_m},p)<1/m$ و $\{n_m\}$ یک دنباله صعودی است.

در این $\{p_{n_m}\}\to p$ و $\{p_{n_m}\}$ یک زیر دنباله $\{p_n\}$ است.



ب - می‌دانیم برد دنباله کراندار است. بنابراین مجموعه‌ای وجود دارد به صورتی که برد دنباله زیر مجموعه آن است هر مجموعه k بعدی فشرده است. طبق قسمت الف زیر دنباله‌ای همگرا وجود دارد.

مثال) $X=[-2,2]$ برد دنباله $\{(-1)^n\}$ $\{-1,1\}$

قضیه) مجموعه حدهای زیر دنباله‌های یک دنباله $\{p_n\}$ در یک فضای متری X یک زیر مجموعه بسته X است.

$1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{4},\ \cdots,\ \frac{1}{m},\ \cdots \to 0$

$\frac{1}{2}+1,\ \frac{1}{2}+\frac{1}{2},\ \cdots,\ \frac{1}{2}+\frac{1}{m},\ \cdots \to 1/2$

$\frac{1}{3}+1,\ \frac{1}{3}+1/2,\ \cdots,\ 1/3+1/m,\ \cdots \to 1/3$

$\vdots$

$1/n+1,\ 1/n+1/2,\ \cdots,\ 1/n+1/m,\ \cdots \to 1/n$

$\{0, 1/2, 1/3, \cdots, 1/n, \cdots\}$

- دنباله کشی : (X,d) یک فضای متری است .

تعریف) فرض کنید $\{P_n\}$ دنباله ای در فضای متری X باشد . $P_n \in X$. $\{P_n\}$ یک دنباله کشی است هرگاه به ازای هر $\varepsilon>0$ ، عدد طبیعی N موجود باشد به طوری که

$$n,m>N \to d(P_n,P_m)<\varepsilon$$

$$\forall \varepsilon>0 \ \exists N \ \forall n,m>N \to d(P_n,P_m)<\varepsilon$$

مثال) $\{\frac{1}{n}\}$ یک دنباله کشی است .

فرض کنید ε داده شده است . $N\in\mathbb{N}$ وجود دارد به طوری که $\frac{1}{N}<\varepsilon$

$$n,m>N \to \frac{1}{n},\frac{1}{m}<\frac{1}{N} \qquad \left|\frac{1}{n}-\frac{1}{m}\right|=\left|\frac{m-n}{mn}\right|<\left|\frac{1}{n}\right|+\left|\frac{1}{m}\right|<\frac{1}{N}+\frac{1}{N}$$

$$<2\varepsilon$$

مثال) $\sqrt{2}=1{,}41421a_6a_7\cdots$

$P_1=1 \quad P_2=1{,}4$

$P_3=1{,}41 \quad P_4=1{,}414$

$P_5=1{,}4142 \qquad P_n=1{,}41421a_6\cdots a_{n-1}$

$\{P_n\}$ یک دنباله کشی است

در $\mathbb{R}$ حد دارد ولی اگر $X=\mathbb{Q}$ باشد ، $\{P_n\}$ دنباله ای در $\mathbb{Q}$ است .

$\{P_n\}$ یک دنباله کشی است که در $\mathbb{Q}$ دارای حد نیست چون حدش $\sqrt{2}$ میشود که عضو $\mathbb{Q}$ نیست .

تعریف) فرض کنید $E\subset X$ $\quad S=\{d(p,q): p,q\in E\}$ $\quad \sup S$ قطر مجموعه S نامیده می‌شود .

فرض کنید $\{P_n\}$ یک دنباله در فضای متری X باشد ، $E_N=\{P_N,P_{N+1},P_{N+2},\cdots\}$

$\forall \varepsilon>0 \ \exists N: n\geq N \rightarrow \operatorname{diam}(E_n)<\varepsilon$

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} \operatorname{diam}(E_n)=0}$$

$P_1, P_2, \dots, P_n$

$E_1=\{P_1, P_2, P_3, \dots\}$

$E_2=\{P_2, P_3, P_4, \dots\}$

$\vdots$

$E_k=\{P_k, P_{k+1}, P_{k+2}, \dots\}$

دنباله $\{P_n\}$ کشی است.

$$\boxed{\forall \varepsilon>0 \ \exists N \quad n,m\geq N \rightarrow d(P_n,P_m)<\varepsilon}$$

$\rightarrow \operatorname{diam} E_{N+1} \leq \varepsilon$

تمرین) نشان دهید هر دنباله همگرا، کشی است.

$\lim_{n\to\infty} P_n = P \longrightarrow$ $\{P_n\}$ یک دنباله کشی است

اثبات)

$\forall \varepsilon>0 \ \exists N \quad n\geq N \rightarrow d(P_n,P)<\varepsilon$

$m\geq N \rightarrow d(P_m,P)<\varepsilon$

$n,m\geq N \longrightarrow d(P_n,P_m)\leq d(P_n,P)+d(P,P_m)<\varepsilon+\varepsilon=2\varepsilon$

قضیه) الف) $E\subset X$. در این صورت $\operatorname{diam}\overline{E}=\operatorname{diam}E$

ب) اگر $\{K_n\}$ دنباله‌ای از زیرمجموعه‌های فشرده X باشد به طوری که $K_n\supset K_{n+1}$ $(n=1,2,\dots)$ و اگر $\lim_{n\to\infty}\operatorname{diam}K_n=0$ در این صورت $\bigcap_{n=1}^{\infty}K_n$ تنها از یک نقطه تشکیل شده است.

$E\subset\bar{E} \to \operatorname{diam}E \leqslant \operatorname{diam}\bar{E}$ (الف)

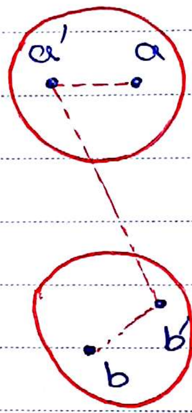
$a,b\in E \to a,b\in\bar{E}$

$\{d(a,b): a,b\in E\}\subset\{d(a,b): a,b\in\bar{E}\}$

$\sup\{d(a,b); a,b\in E\}\subset \sup\{d(a,b): a,b\in\bar{E}\}$

$a,b\in\bar{E}$ $\quad N_\varepsilon(a)\cap E\neq\emptyset \quad a'\in E\cap N_\varepsilon(a)$

$N_\varepsilon(b)\cap E\neq\emptyset \quad b'\in E\cap N_\varepsilon(b)$



$d(a,b)\leqslant d(a,a')+d(a',b')+d(b,b')$

$\leqslant \varepsilon+d(a',b')+\varepsilon$

$\to d(a,b)\leqslant d(a',b')+2\varepsilon$

$\sup\limits_{a,b\in\bar{E}} d(a,b)\leqslant \sup\limits_{a',b'\in E}(a',b')+2\varepsilon \to \operatorname{diam}\bar{E}\leqslant \operatorname{diam}E+2\varepsilon$

$\to \operatorname{diam}\bar{E}\leqslant\operatorname{diam}E$

$\forall\varepsilon>0 \quad M\leqslant N+\varepsilon \to M\leqslant N$

(برهان خلف) $M>N \quad 0<\frac{M-N}{2}=\varepsilon \quad M\leqslant N+\varepsilon=N+\frac{M-N}{2}=\frac{N+M}{2}$

$M\leqslant\frac{N+M}{2}<\frac{M+M}{2}=M$ ✗

ب) طبق مثال قبل $\bigcap_{n=1}^{\infty}K_n\neq\emptyset$ فرض کنید $x,y\in\bigcap_{n=1}^{\infty}K_n \leftarrow$

$\leftarrow \operatorname{diam}K_n\geqslant d(x,y)>0 \quad \leftarrow x,y\in K_n$

$\lim\limits_{n\to\infty}\operatorname{diam}K_n\geqslant d(x,y)>0$ ✗

Subject:
Year. Month. Date. ( )

(اثبات هردوحکم)

قضیه) الف ـ در هر فضای متری هر دنباله همگرا ، دنباله‌ای کوشی است .

ب ـ اگر X یک فضای متری فشرده باشد و اگر $\{P_n\}$ یک دنباله‌ی کوشی در X باشد ، آن گاه P_n به نقطه‌ای از X همگراست .

پ ـ در $\mathbb{R}^k$ هر دنباله کوشی همگراست .

اثبات (ب) :

کوشی است

$\{P_n\} \rightarrow \lim_{n\to\infty} \operatorname{diam} E_n = 0 \rightarrow \lim_{n\to\infty} \operatorname{diam} \overline{E}_n = 0$

① $\overline{E}_n \supset \overline{E}_{n+1} \supset \cdots$

$\overline{E}_n$ بسته است و $\overline{E}_n \subset X$ ، X فشرده پس $\overline{E}_n$ فشرده است و طبق ① $\overline{E}_{n+1} \subset \overline{E}_n$

طبق قضیه قبل $\bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{E}_n = \{P\}$ نشان می‌دهیم $\lim_{n\to\infty} P_n = P$.

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \ n > N \rightarrow \operatorname{diam} \overline{E}_n < \varepsilon \ , \ P \in \overline{E}_n$

$n > N \rightarrow d(P_n, P) < \varepsilon \rightarrow \lim_{n\to\infty} P_n = P$

اثبات (پ) :

$\varepsilon = 1 \ \exists N \ n,m > N \quad d(P_n, P_m) < 1$

$d(P_{N+1}, P_m) < 1$

$\rightarrow r = \operatorname{Max}\{1, d(P_{N+1}, P_1), d(P_{N+1}, P_2), \cdots, d(P_{N+1}, P_N)\}$

$\forall i \ d(P_i, P_{N+1}) < r \quad P_i \in \underbrace{\{x : d(x, P_{N+1}) < r\}}$

فشرده (استفاده از قضیه قسمت قبل)

Subject:
Year. Month. Date. ( )

تعریف: هر فضای متری که در آن هر دنباله کشی همگرا باشد یک فضای تام نامیده می‌شود.

پس هر فضای متری فشرده تام است. IR^n تام است. هر زیرفضای بسته یک فضای متری تام، تام است.

X فضای متری تام $A \subset X$ بسته

$\{P_n\}$ کشی $P_n \in A \to P_n \in X \to$ در X همگرا به P است $\{P_n\} \to$ P یک نقطه حدی A است

$\xrightarrow{A \text{ بسته است}} P \in A$

تعریف: دنباله $\{S_n\}$ از اعداد حقیقی

الف) افزایشی (یکنوا) است اگر $S_n \leqslant S_{n+1}$ $(n = 1, 2, \dots)$

ب) کاهشی (یکنوا) است اگر $S_n \geqslant S_{n+1}$ $(n = 1, 2, \dots)$

قضیه) فرض کنید $\{S_n\}$ یک دنباله یکنوا باشد، S_n همگراست اگر و تنها اگر $\{S_n\}$ کراندار است.

اثبات) فرض کنید $S_n \leqslant S_{n+1}$، E را برد دنباله $\{S_n\}$ در نظر بگیرید. E کراندار است. پس E دارای $\sup$ است. $S = \sup E$ نشان می‌دهیم $\lim\limits_{n \to \infty} S_n = S$.

$\forall \varepsilon > 0$ $S - \varepsilon$ کران بالای E نیست $\to \exists N: S_N > S - \varepsilon$

$S \geqslant \quad S_{N+K} \geqslant \dots \geqslant S_{N+1} \geqslant S_N \geqslant S - \varepsilon$

$\to |S_n - S| < \varepsilon$

تعریف) $\lim\limits_{n \to \infty} S_n = +\infty \quad \forall M > 0 \ \exists N \quad n > N \to S_n > M$

$\lim\limits_{n \to \infty} S_n = -\infty \quad \forall M > 0 \ \exists N \quad n > N \to S_n < -M$

Subject:
Year. Month. Date. [امتحان میان ترم (آنالیز ریاضی ۱) ۱۳۹۶/۲/۲۴]

حد بالایی و حد پایینی :

تعریف) فرض کنید $\{S_n\}$ دنباله‌ای از اعداد حقیقی باشد. فرض کنید E در دستگاه توسیع یافته $\mathbb{R}\cup\{-\infty,+\infty\}$ قرار دهید

اعداد حقیقی مجموعه حدهای زیردنباله‌های $\{S_n\}$ باشد یعنی هرگاه $x\in E$ زیردنباله $\{S_{n_k}\}$

وجود دارد بطوریکه $\lim\limits_{n_k\to\infty} S_{n_k}=x$

$\{S_n\}$ حد بالایی $S^* = \operatorname{Sup} E$ $\quad S^* = \limsup\limits_{n\to\infty}$

$\{S_n\}$ حد پایینی $S_* = \operatorname{Inf} E$ $\quad S_* = \liminf\limits_{n\to\infty}$

مثال) $\{S_n\}$

دنباله‌ای شامل همه اعداد گویا

مجموعه‌ی همه‌ی حدهای زیردنباله‌های $\{S_n\}$ $= \mathbb{R}$

$\operatorname{Sup} \mathbb{R}^* = +\infty$

$\operatorname{Inf} \mathbb{R}^* = -\infty$

$\{S_n\} = \dfrac{(-1)^n}{1+1/n} \quad E=\{-1,1\}$

$S^*=1 \quad S_*=-1$

قضیه) $n\geq N \quad S_n \leq t_n$

$\limsup\limits_{n\to\infty} S_n \leq \limsup\limits_{n\to\infty} t_n$

(اثبات به عهده خودمان)

$\liminf\limits_{n\to\infty} S_n \leq \liminf\limits_{n\to\infty} t_n$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

$S_1 = 0 \quad S_{2m} = \frac{S_{2m-1}}{2} \quad S_{2m+1} = \frac{1}{2} + S_{2m}$ (سؤال امتحانی)

$S_2 = 0$ $S_7 = 3/8 + 1/2 = 7/8$

$S_3 = 1/2$ $S_8 = 1/16 + 1/8 + 1/4$

$S_4 = 1/4$ $S_9 = 1/16 + 1/8 + 1/4 + 1/2$

$S_5 = 1/4 + 1/2 = 3/4$

$S_6 = 3/8$

$$S_{2n} = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{2^k} \qquad S_{2n+1} = \frac{1}{2} + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{2^k}$$

$$S_{2n+2} = \frac{1}{4} + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{2^{k+1}} = \frac{1}{4} + \sum_{u=3}^{n+1} \frac{1}{2^u} = \sum_{u=2}^{n+1} \frac{1}{2^u}$$ (به روش استقرا)

$k+1 = u$

$$S_{2(n+1)+1} = S_{2n+3} = \frac{1}{2} + \sum_{u=2}^{n+1} 1/2^u$$ (به روش استقرا)

$$\lim_{n\to\infty} S_{2n} = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{2^k} = \frac{1/4}{1-1/2} = 1/2 \qquad \begin{cases} S^* = 1 \\ S_* = 1/2 \end{cases}$$

$$\lim_{n\to\infty} S_{2n+1} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

(تعمیم) فرض کنید $\{S_n\}$ دنباله ای از اعداد حقیقی باشد و E و S^*

$\sup E \leftarrow$ مجموعه همه ی حدهای زیردنباله های در دستگاه توسعه یافته اعداد حقیقی ($\pm\infty$ را دارد)

مانند قبل تعریف شده باشند. در این صورت S^* دارای خواص زیر است.

PAPCO

Subject:
Year. Month. Date. ( )

الف) $s^* \in E$

ب) اگر $x > s^*$ عدد طبیعی N وجود دارد به طوری که به ازای $n \geq N$ داریم $s_n < x$

$$\forall x > s^* \quad \exists N \quad n \geq N \to s_n < x$$

بعلاوه s^* تنها عددی است که خواص الف و ب را دارد.

نتیجه مشابهی برای s_* برقرار است.

اثبات (الف): برای اثبات باید نشان دهیم زیر دنباله ای وجود دارد که حد آن s^* است.

اگر $s^* = \infty$ در این صورت E کراندار نیست. نشان می دهیم $\{s_n\}$ کراندار نیست.

زیرا اگر N وجود داشته باشد به طوری که $|s_n| \leq N \to |s^*| \leq N$

$\forall M \quad \exists n : s_n > M$

$\exists n_1 : s_{n_1} > 1$

$\exists n_2 > n_1 : s_{n_2} > 2$ $\qquad s_{n_k} \to \infty \qquad \lim_{n \to \infty} s_n = s^*$ بنابراین

$\vdots$

$\exists n_k > n_{k-1} : s_{n_k} > K$

حال فرض کنید $s^* = -\infty$ در این صورت هر عضو E، $-\infty$ است. یعنی هر زیر دنباله ای

که حد دارد حد آن $-\infty$ است. فرض می کنیم $s^* \in \mathbb{R}$ یعنی E از بالا کراندار است و

$E \neq \emptyset$ طبق قضایای قبل E بسته است. چون $\sup E \in \bar{E}$ بنابراین $\sup E \in E$

پس $s^* \in E$.

$\boxed{\text{کراندار} \quad A \subset \mathbb{R} \quad \sup A \in \bar{A}}$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

اثبات (ب): فرض کنید x ای وجود دارد به طوری که $x > s^*$ و به ازای تعدادی

نامتناهی n داریم $s_n \geq x$. بنابراین زیردنباله $\{s_{n_k}\}$ وجود دارد به طوری که $s_{n_k} \geq x$.

دنباله $\{s_{n_k}\}$ کراندار است زیرا $s^* \neq +\infty$. بنابراین $\{s_{n_k}\}$ دارای یک زیردنباله

همگراست. حد این زیردنباله بزرگتر یا مساوی x است پس $s^* \geq x$. (تناقض)

برای اثبات یکتایی فرض کنید p و q دو شرط الف و ب را برقرار می‌کنند. $p < q$.

بنابراین x بین p و q وجود دارد $p < x < q \to \exists N$

$n > N \to s_n < x < q \to q \notin E$

+ (چند دنباله‌ی خاص را از روی کتاب بخوان ص ۷۲ و ۷۳) +

$\{a_n\}$
$$\begin{cases} s_1 = a_1 \\ s_2 = a_1 + a_2 \\ \vdots \\ s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \end{cases}$$
(مجموع جزئی n ام)

PAPCO

Subject:
Year. Month. Date. ( )

$$\forall \varepsilon>0 \quad \exists N \quad m\geq n\geq N \rightarrow |S_n-S_m|<\varepsilon$$

$$\left|\sum_{i=1}^{m} a_i-\sum_{i=1}^{n} a_i\right|<\varepsilon$$

$$\left|\sum_{i=n+1}^{m} a_i\right|<\varepsilon$$

قضیه) هرگاه $\sum a_n$ همگرا باشد آن گاه $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=0$ $(\sum a_n=S)$

$$\lim_{n\to\infty} a_n=\lim_{n\to\infty}(S_{n+1}-S_n)=\lim_{n\to\infty} S_{n+1}-\lim_{n\to\infty} S_n=S-S=0$$

مثال) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 1/2^n$ همگرا $\quad a_n=1/2^n \quad \lim\limits_{n\to\infty} a_n=0$

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} 1/n$ واگرا $\quad a_n=1/n \quad \lim\limits_{n\to\infty} a_n=0$

قضیه) هر سری حقیقی با جملات نامنفی همگراست اگر و تنها اگر دنباله مجموعهای جزئی آن کراندار باشد.

$S_n=a_1+a_2+\cdots+a_n$

$S_n\leq S_{n+1}$ $\{S_n\}$ دنباله‌ای صعودی است قبلاً نشان دادیم یک دنباله صعودی همگراست اگر و تنها اگر کراندار باشد.

قضیه) [آزمون مقایسه] الف) هرگاه عدد طبیعی N موجود باشد بطوریکه به ازای $n\geq N_0$ $|a_n|\leq c_n$ و $\sum c_n$ همگرا باشد در این صورت $\sum a_n$ همگراست.

Subject :
Year . Month . Date . ( )

ب) اگر به ازای $n \geq N_0$ ، $a_n \geq d_n \geq 0$ و $\sum d_n$ واگرا باشد آنگاه $\sum a_n$ واگرا است.

اثبات (الف):

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N : m \geq n \geq N \rightarrow \left|\sum_{i=n}^{m} c_i\right| < \varepsilon$

$$\left|\sum_{i=n}^{m} a_i\right| \leq \sum_{i=n}^{m} |a_i| \leq \sum_{i=n}^{m} c_i < \varepsilon$$

اثبات (ب):

اثبات با برهان خلف فرض کنیم $\sum a_n$ همگرا است. با استفاده از قسمت الف $\sum d_n$ همگرا است.

قضیه) $a_i \geq a_{i+1} \geq 0$ ، $i \in \mathbb{N}$

در اینصورت $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ همگرا است اگر و تنها اگر $\sum_{k=0}^{\infty} 2^k a_{2^k}$ همگرا باشد.

$a_1 + (a_2 + a_2) + (a_4 + a_4 + a_4 + a_4)$

$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + \cdots + a_7 + \cdots + a_n \leq \underbrace{a_1 + (a_2 + a_2) + (a_4 + a_4 + a_4 + a_4) + \cdots}_{t_k}$

$S_n \leq t_k$ ①

$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \cdots + a_7 + \cdots + a_n \geq a_1 + a_2 + a_4 + a_4 + (a_8 + a_8 + a_8 + a_8) + \underbrace{(a_{16} + \cdots + a_{16})}_{\text{۸ بار}} + \cdots$

$\geq \frac{1}{2} t_k$ ②

PAPCO

Subject:
Year. Month. Date. ( )

از ① و ② نتیجه می‌گیریم $\{S_n\}$ کراندار است اگر و تنها اگر $\{t_n\}$ کراندار باشد.

پس $\{S_n\}$ همگرا است اگر و تنها اگر $\{t_n\}$ همگرا باشد.

قضیه) اگر $p>1$ $\sum \frac{1}{n^p}$ همگرا است و اگر $p\leqslant 1$ سری $\sum \frac{1}{n^p}$ واگرا است.

اثبات)

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^k}{(2^k)^p} = \sum_{k=0}^{\infty} 2^{k-kp} = \sum_{k=0}^{\infty} 1/2^{kp-k} = \sum_{k=0}^{\infty} 1/2^{k(p-1)} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(1/2^{p-1}\right)^k$$

سری هندسی بالا همگرا است اگر و تنها اگر $\left|\frac{1}{2^{p-1}}\right|<1$ یا $p>1$.

قضیه) هرگاه $p>1$، $\sum_{n=2}^{\infty} 1/n(\log n)^p$ همگرا است و اگر $p<1$ سری واگرا است.

($\sum a_n$ $a_i \geqslant 0$ $a_{i+1} \leqslant a_i$ همگرا است اگر و تنها اگر $\sum_{k=0}^{\infty} 2^k a_{2^k}$ همگرا باشد.)

می‌دانیم $\log x$ تابعی صعودی است. بنابراین $a_{n+1} < a_n$. چون $n \geqslant 2$ پس

$1/n(\log n)^p > 0$

$$\sum_{k=1} 2^k/2^k(\log 2^k)^p = \sum 1/(k\log 2)^p$$

$$= \sum_{k=1} 1/k^p(\log 2)^p = 1/(\log 2)^p \sum_{k=1}^{\infty} 1/k^p$$

سری بالا همگرا است اگر و تنها اگر $p>1$.

PAPCO

Subject:

Year. Month. Date. ( )

☑ عدد e : تعریف $e=\sum_{n=0}^{\infty} 1/n!$

$$S_n=\sum_{k=0}^{n} 1/k!$$

$$S_n=1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\dots+\frac{1}{n!}\leq 1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\dots+\frac{1}{2^{n-1}}\leq \underbrace{1+\frac{1}{1-1/2}}_{3}$$

قضیه) $\lim_{n\to\infty}(1+1/n)^n=e$

$$S_n=\sum_{k=0}^{n} 1/k!$$

$$t_n=(1+1/n)^n \qquad (a+b)^n=\sum_{k=0}^{n} C_n^k a^k b^{n-k}$$

$$t_n=1+n\cdot 1/n+\frac{n(n-1)}{2!}\left(\frac{1}{n}\right)^2+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\left(1/n\right)^3+\dots+\left(1/n\right)^n$$

$$=1+1+\frac{1}{2!}\frac{n}{n}\left(\frac{n-1}{n}\right)+\frac{1}{3!}\frac{n}{n}\cdot\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-2}{n}+\dots+\frac{n!}{n!}\left(\frac{1}{n}\right)^n$$

$$=1+1+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)+\dots+\frac{1}{n!}\cdot\frac{1}{n}\cdot\frac{2}{n}\cdots\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n}{n}$$

$$\leq 1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\dots+\frac{1}{n!}=S_n$$

$$\limsup_{n\to\infty} t_n\leq \limsup_{n\to\infty} S_n=e$$

ثابت

$$n\geq m^2 \qquad t_n>1+1+1/2!\,(1-1/n)+\dots+1/m!\,(1-1/n)(1-2/n)\cdots\left(1-\frac{m-1}{n}\right)$$

$$\liminf_{n\to\infty} t_n\geq 1+1+\frac{1}{2!}+\dots+\frac{1}{m!}$$

$$\liminf_{n\to\infty} t_n\geq \lim_{m\to\infty}\left(1+1+\frac{1}{2!}+\dots+\frac{1}{m!}\right)=e$$

$$e\leq \liminf t_n\leq \limsup t_n\leq e \rightarrow \lim_{n\to\infty} t_n=e$$

حال سرعت همگرایی سری $\sum_{n=0}^{\infty} 1/n!$ را تقریب می زنیم.

$$e - S_n = \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+2)!} + \cdots$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} 1/k! - \sum_{k=1}^{n} 1/k!$$

$$= \frac{1}{(n+1)!}\left(1+\frac{1}{(n+2)}+\frac{1}{(n+2)(n+3)}+\cdots\right)$$

$$< \frac{1}{(n+1)!}\left(1+\frac{1}{(n+1)}+\frac{1}{(n+1)^2}+\cdots+\frac{1}{(n+1)^k}+\cdots\right)$$

$$= \frac{1}{(n+1)!}\left(\frac{1}{1-\frac{1}{n+1}}\right) = \frac{1}{n\cdot n!}$$

نشان می دهیم e عددی گنگ است. اگر چنین نباشد $e=\frac{p}{q}$ که p و q اعدادی طبیعی هستند.

$$S_q = 1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{q!}$$

$q!S_q = A$ عدد طبیعی $\qquad 0<e-S_q<\frac{1}{q\,q!}$

$$\Rightarrow 0<\frac{p}{q}-S_q<\frac{1}{q\cdot q!}$$

$$\Rightarrow 0<p(q-1)!-q!S_q<\frac{1}{q}$$

$$\Rightarrow 0<p(q-1)!-A<\frac{1}{q}\leq 1$$ تناقض

• قضیه آزمون ریشه) [تذکر ← این آزمون ها در مورد دنباله های مثبت است]

$\sum a_n$ داده شده است. $\alpha=\limsup \sqrt[n]{|a_n|}$. در این صورت

الف) $\alpha<1$ ، $\sum a_n$ همگراست. ب) $\alpha>1$ ، $\sum a_n$ واگراست.

ج) $\alpha=1$ ، این آزمون در مورد همگرایی سری $\sum a_n$ اطلاعاتی نمی دهد.

Subject:
Year. Month. Date. ( )

الف) β را به گونه‌ای در نظر که $\alpha < \beta < 1$

$\exists N \quad n \geq N \quad \sqrt[n]{|a_n|} < \beta \rightarrow |a_n| < \beta^n$

- $\sum \beta^n$ یک سری هندسی همگراست با استفاده از آزمون مقایسه $\sum |a_n|$ همگراست.

- درنتیجه $\sum a_n$ همگراست.

$$\left\{ \left|\sum_{i=n}^{m} a_i\right| \leq \sum_{i=n}^{m} |a_i| < \varepsilon \right\}$$

ب) زیردنباله $\{a_{n_k}\}$ وجود دارد بطوری که

$\lim\limits_{n_k \to \infty} \sqrt[n]{|a_{n_k}|} = \alpha > 1$

اگر n_k به اندازه کافی بزرگ باشد آن‌گاه $|a_{n_k}| > 1$ درنتیجه $\lim\limits_{n \to \infty} a_n \neq 0$ شرط لازم برای همگرایی سری برقرار نیست.

$\sum 1/n^2$ همگراست

$\sum 1/n$ واگراست

• قضیه (آزمون نسبت) $\sum a_n$ داده شده است.

الف) اگر $\alpha = \limsup \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1$ سری همگراست.

ب) اگر n_0 وجود داشته باشد به طوری که برای $n \geq n_0$ داشته باشیم $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \geq 1$، آن‌گاه سری واگراست.

الف) β را به گونه‌ای در نظر می‌گیریم $\alpha < \beta < 1$

$\exists N \quad n \geq N \rightarrow \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < \beta \rightarrow |a_{n+1}| < \beta |a_n|$

$|a_{N+1}| < \beta |a_N|$

Subject:

Year. Month. Date. ( )

$$|a_{N+2}| \leqslant \beta |a_{N+1}| \leqslant \beta(\beta |a_N|) = \beta^2 |a_N|$$

$$\vdots$$

$$|a_{\underset{n}{N+K}}| \leqslant \beta |a_{N+K-1}| \leqslant \beta^K |a_N| = \beta^K |a_N| \beta^N \beta^{-N}$$

$$= \beta^{\overset{n}{\overbrace{K+N}}} |a_N| \beta^{-N}$$

$$n \geqslant N \rightarrow |a_n| \leqslant \beta^n |a_N| \beta^{-N}$$

ب)

$$|a_{n_0+1}| \geqslant |a_{n_0}|$$

$$|a_{n_0+2}| \geqslant |a_{n_0+1}| \geqslant |a_{n_0}|$$

اگر $n \geqslant n_0 \rightarrow |a_n| \geqslant |a_{n_0}| > 0 \rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n \neq 0 \rightarrow$ واگراست

$$\boxed{\begin{aligned} -\limsup_{n\to\infty}(a_n) &= \liminf_{n\to\infty}(-a_n) \\ \liminf_{n\to\infty}(a_n) &= -\limsup_{n\to\infty}(-a_n) \end{aligned}}$$

مثال)

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3}+\cdots+\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n}$$

$$\lim \frac{1/3^n}{1/2^n} = \lim \left(\tfrac{2}{3}\right)^n = 0$$

$$\lim \frac{1/2^{n+1}}{1/3^n} = \lim \tfrac{1}{2}\left(\tfrac{3}{2}\right)^n = \infty$$

$$\lim \sqrt[n]{1/2^n} = 1/2$$

$$\lim \sqrt[n]{1/3^n} = 1/3$$

$$\limsup_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \infty$$

$$\liminf_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 0$$

$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 1/2 \Rightarrow$ سری همگراست

$$\liminf_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 1/3$$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

مثال) $\frac{1}{2^1}+\frac{1}{2^0}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^{n+1}}+\frac{1}{2^n}+\cdots$

$$\left\{\frac{1}{2^1},\frac{1}{2^0},\frac{1}{2^3},\frac{1}{2^2},\frac{1}{2^5},\frac{1}{2^4},\cdots,\frac{1}{2^{n+1}},\frac{1}{2^n},\cdots\right\}$$

$$\underbrace{\frac{1}{2^{n+1}},\frac{1}{2^n}},\underbrace{\frac{1}{2^{n+3}}},\frac{1}{2^{n+2}}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{2^{n+3}}}{\frac{1}{2^n}}=\frac{1}{8}\qquad \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{2^n}}{\frac{1}{2^{n+1}}}=2$$

$$\limsup_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=2\qquad \liminf_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\frac{1}{8}$$

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{2^n}}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{2^{n+1}}}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{2^{n+3}}}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{2^{n+2}}}=\frac{1}{2}$$

$$\limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=\frac{1}{2}\qquad \liminf_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=\frac{1}{2}$$

توضیح) برای هر دنباله $\{C_n\}$ از اعداد مثبت داریم

الف) $\limsup \sqrt[n]{C_n}\leq \limsup \frac{C_{n+1}}{C_n}$

ب) $\liminf \sqrt[n]{C_n}\geq \liminf \frac{C_{n+1}}{C_n}$

اثبات الف) فرض کنید $\alpha=\limsup_{n\to\infty}\frac{C_{n+1}}{C_n}$ اگر $\alpha=\infty$ رابطه برقرار است. فرض می‌کنیم $\alpha<\infty$ و $\alpha<\beta$.

$$\exists N\quad n\geq N\to\frac{C_{n+1}}{C_n}<\beta$$

(بقیه ص بعد)

Subject:
Year. Month. Date. ( )

$$\frac{c_{N+1}}{c_N} < \beta \to c_{N+1} < \beta c_N$$

$$\frac{c_{N+2}}{c_{N+1}} < \beta \to c_{N+2} < \beta c_{N+1} < \beta^2 c_N$$

$\vdots$

$$\underbrace{c_{N+K}}_{n} < \beta^K c_N = \beta^K c_N \beta^N \beta^{-N} = \beta^{K+N} \beta^{-N} c_N$$

$$= \beta^n \beta^{-N} c_N$$

نشان دادیم که

$$\boxed{n \geq N \qquad c_n < \beta^n \beta^{-N} c_N}$$

(فرض) $(\alpha < \beta < \beta_1)$

$$n \geq N \to \sqrt[n]{c_n} < \sqrt[n]{\beta^n} \sqrt[n]{\beta^{-N} c_N} \Rightarrow \limsup_{n \to \infty} \sqrt[n]{c_n} \leq \beta \cdot 1 < \beta_1$$

اثبات پ) به عهده خودتان

سری توانی :

فرض کنید دنباله ی $\{c_n\}$ از اعداد مختلط داده شده است . $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ یک سری

توانی نامیده می شود ، c_n ها ضرایب سری نامیده می شوند .

قضیه) سری توانی $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ داده شده است . $\alpha = \limsup_{n \to \infty} \sqrt[n]{|c_n|}$ ،

$R = 1/\alpha$ اگر $|z| < R$ سری همگراست . اگر $|z| > R$ سری واگراست .

Subject:
Year. Month. Date. ( )

$\alpha|z|>1 \Rightarrow |z|>\frac{1}{\alpha}=R$ سری واگراست

$R=1/\alpha$ شعاع همگرایی سری $\sum c_n z^n$ نامیده می‌شود.

مثال) الف) $\sum_{n=1}^{\infty} n^n z^n$

$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^n} = \limsup_{n\to+\infty} n = \infty$ $\quad R=\frac{1}{\infty}=0$ شعاع همگرایی صفر

در نقطه $z=0$ سری مقدار ثابت 0 دارد.

ب) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$

$\limsup_{n\to\infty} \frac{|z^{n+1}|}{(n+1)!} \times \frac{n!}{|z^n|} = \limsup_{n\to\infty} \frac{|z|}{n+1} = 0<1$ $\quad R=\infty$

ج) $\sum z^n$

$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{1} = 1$ $\quad R=1$ $\quad |z|<1$ همگرا

$|z|>1$ واگرا

د) $\sum \frac{z^n}{n}$

$\limsup \sqrt[n]{\frac{1}{n}} = 1$

$|z|<1$ همگرا

$|z|>1$ واگرا

ه) $\sum \frac{z^n}{n^2}$

$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n^2}} = 1$

$|z|<1$ همگرا

$|z|>1$ واگرا

$\limsup_{n\to\infty} \left(\frac{|z^{n+1}||c_{n+1}|}{|z^n||c_n|}\right) = |z|\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right|<1 \Rightarrow |z|<\left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right|$

PAPCO

Subject :
Year . Month . Date . ( )

قضیه) دنباله‌های $\{a_n\}$ و $\{b_n\}$ داده شده‌اند

$A_n=\sum_{k=0}^{n} a_k \quad n\geqslant 0$ ، $A_{-1}=0$ هرگاه $0\leqslant p\leqslant q$ داریم:

$$\sum_{n=p}^{q} a_n b_n=\sum_{n=p}^{q-1} A_n(b_n-b_{n+1})+A_q b_q-A_{p-1}b_p$$ (فرمول جمع‌بندی جزئی)

(اثبات)

$$\sum_{n=p}^{q} a_n b_n=\sum_{n=p}^{q}(A_n-A_{n-1})b_n=\sum_{n=p}^{q}A_n b_n-\sum_{n=p}^{q}\underbrace{A_{n-1}}_{m}b_n$$

$$=\sum_{n=p}^{q}A_n b_n-\sum_{m=p-1}^{q-1}A_m b_{m+1}=\sum_{n=p}^{q-1}A_n b_n+A_q b_q-A_{p-1}b_p$$

$$-\sum_{m=p}^{q-1}A_m b_{m+1}=\sum_{n=p}^{q-1}A_n(b_n-b_{n+1})+A_q b_q-A_{p-1}b_p$$

فرمول جمع‌بندی جزئی

قضیه) فرض کنید: الف) $A_n=\sum_{k=0}^{n} a_k$ دنباله‌ای کراندار است $(\exists M : \forall n\in\mathbb{N} \ |A_n|<M)$

ب) $b_0\geqslant b_1\geqslant b_2\geqslant\cdots$ دنباله‌ای نزولی

پ) $\lim_{n\to\infty} b_n=0$

در این صورت $\sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n$ همگراست.

Proof) نشان می‌دهیم $C_n=\sum_{k=0}^{n} a_k b_k$ یک دنباله کشی است.

$$\left|\sum_{n=p}^{q} a_n b_n\right|=\left|\sum_{n=p}^{q-1}A_n(b_n-b_{n+1})+A_q b_q-A_{p-1}b_p\right|$$

$$\leqslant\sum_{n=p}^{q-1}|A_n||b_n-b_{n+1}|+|A_q b_q|+|A_{p-1}b_p|$$

$$\leq M\Big(\underbrace{\sum_{n=p}^{q-1}(b_n-b_{n+1})}_{b_p-b_q}+b_q+b_p\Big) = M(2b_p) < \varepsilon$$

در صورتی که p به اندازه کافی بزرگ اختیار شده باشد.

قضیه) الف - $|c_1|\geq|c_2|\geq\cdots$

ب - $c_{2m-1}\geq 0$ و $c_{2m}\leq 0$

پ - $\lim_{n\to\infty} c_n=0$ در این صورت $\sum c_n$ همگرا است.

اثبات) $a_n=(-1)^{n+1}$ $\quad b_n=|c_n|$

با استفاده از قضیه‌ی قبل $\sum a_nb_n=\sum c_n$ همگرا است.

قضیه) فرض کنید شعاع همگرایی سری توانی $\sum c_nz^n$ برابر ۱ است.

و $c_0\geq c_1\geq\cdots$ ، $\lim_{n\to\infty} c_n=0$ در این صورت سری در هر نقطه $|z|=1$ ،

مگر احتمالاً در $z=1$ ، همگرا است.

در قضیه قبل قرار دهید $a_k=z^k$ و $b_k=c_k$

$$|A_n|=\left|\sum_{m=0}^{n} z^m\right| = \left|\frac{1-z^{m+1}}{1-z}\right| \leq \frac{1+|z|}{|1-z|} = 2/|1-z|$$

اگر $z\neq 1$ ، A_n کراندار است. شرایط این قضیه برقرار است پس $\sum a_kb_k$

همگرا است $\sum c_kz^k$ همگرا است در صورتی که $|z|=1$ و $z\neq 1$.

Subject:
Year.   Month.   Date.   ( )

☑ همگرایی مطلق:

سری $\sum a_n$ همگرای مطلق (مطلقاً همگرا) نامیده می‌شود هرگاه $\sum |a_n|$ همگرا باشد.

قضیه) اگر $\sum a_n$ همگرای مطلق باشد، آن‌گاه $\sum a_n$ همگراست.

$$\left|\sum_{k=m}^{n} a_k\right| \leqslant \sum_{k=m}^{n} |a_k| \quad (*)$$

چون $\sum |a_n|$ همگراست پس کشی است، یعنی

$$\forall \varepsilon\ \exists N \quad n,m > N \rightarrow \sum_{k=m}^{n} |a_k| < \varepsilon$$

با استفاده از $(*)$ داریم

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N \quad m,n > N \rightarrow \left|\sum_{k=m}^{n} a_k\right| < \varepsilon$$

یعنی $\sum a_k$ کشی و درنتیجه همگراست.

توجه کنید که عکس قضیه برقرار نیست یعنی ممکن است یک سری همگرا باشد اما همگرای مطلق نباشد.

مثال) ۱) $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n$ واگراست ، ۲) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ همگراست

☑ جمع و ضرب سری‌ها:

قضیه) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = A$ ، $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = B$ دراین صورت $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = A + B$ و به

ازای $c \in \mathbb{C}$ داریم $\sum_{n=1}^{\infty} c a_n = cA$.

PAPCO

$$\begin{cases} A_n = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \\ B_n = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \end{cases} \quad \lim_{n\to\infty}(A_n+B_n) = \lim_{n\to\infty} A_n + \lim_{n\to\infty} B_n$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} a_k + \sum_{k=1}^{\infty} b_k = A+B$$

$\{A_n\}$, $\{B_n\}$ $\begin{cases} A_n = a_1+a_2+\cdots+a_n \\ B_n = b_1+b_2+\cdots+b_n \end{cases}$.

تعریف) سری‌های $\sum a_n$ ، $\sum b_n$ داده شده‌اند. ضرب (کشی) دو سری به صورت $\sum c_n$ تعریف می‌شود که در آن $c_n = \sum_{i=1}^{n} a_i b_{n-i}$.

مثال) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ ، $\sum_{n=1}^{\infty} n^2$

$c_1 = a_1 b_0 + b_1 a_0 = 0$

$c_2 = a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0 = 1$

$c_3 = \cancel{a_0} b_3 + a_1 b_2 + a_2 b_1 + a_3 \cancel{b_0} = 1\cdot 4 + \frac{1}{2}\cdot 1 = 4 + \frac{1}{2}$

هرگاه $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ و $\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ دو سری توانی باشند.

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n\right)\cdot\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} d_n z^n$$

$$c_n = a_0 z^0 \cdot b_n z^n + a_1 z^1 \cdot b_{n-1} z^{n-1} + a_2 z^2 \cdot b_{n-2} z^{n-2} + \cdots + a_n z^n \cdot b_0 z^0$$

$$= \underbrace{(a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \cdots + a_n b_0)}_{d_n} z^n$$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

+ می‌خواهیم ببینیم اگر $\sum a_n$ و $\sum b_n$ همگرا باشند حتماً $\sum a_n \sum b_n$ نیز همگراست؟

$$\sum a_n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}} \qquad \sum b_n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$$

$$c_n = \sum_{i=0}^{n} a_i b_{n-i}$$

$$c_n = \sum_{i=0}^{n} \frac{(-1)^i}{\sqrt{i+1}} \times \frac{(-1)^{n-i}}{\sqrt{n-i+1}} = \sum_{i=0}^{n} \frac{(-1)^n}{\sqrt{i+1}\sqrt{n-i+1}}$$

$$(n-i+1)(i+1) = \left(\frac{n}{2}+1\right)^2 - \left(-i+\frac{n}{2}\right)^2 < \left(\frac{n}{2}+1\right)^2$$

$$\frac{1}{\sqrt{i+1} \times \sqrt{n-i+1}} > \frac{1}{\left(\frac{n}{2}+1\right)} = \frac{2}{n+2}$$

$$|c_n| > \sum_{i=0}^{n} \frac{2}{n+2} = \frac{2n}{n+2} \qquad \lim_{n\to\infty} c_n \neq 0 \longrightarrow \text{سری واگرا است}$$

قضیه) فرض کنید: (فقط کاربرد)

الف - $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ همگرای مطلق است؛ ب - $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = A$؛

ب - $\sum_{n=0}^{\infty} b_n = B$؛ ج - $c_n = \sum_{k=0}^{n} a_n b_{n-k}$؛

حکم ← دراین صورت $\sum_{n=0}^{\infty} c_n = AB$.

اثبات) (ص بعد)

Subject:
Year. Month. Date. ( )

$$A_n=\sum_{k=0}^{n} a_k \; ; \quad B_n=\sum_{k=0}^{n} b_k \; ; \quad C_n=\sum_{k=0}^{n} c_k$$

$$\beta_n = B - B_n$$

$$C_n=(a_0b_0)+(a_0b_1+a_1b_0)+(a_0b_2+a_1b_1+a_2b_0)+\cdots$$
$$+(a_0b_n+a_1b_{n-1}+\cdots+a_nb_0)$$
$$=a_0(b_0+b_1+\cdots+b_n)+a_1(b_0+b_1+\cdots+b_{n-1})+a_2(b_0+b_1+\cdots+b_{n-2})$$
$$+\cdots+a_nb_0$$
$$=a_0B_n+a_1B_{n-1}+a_2B_{n-2}+\cdots+a_nB_0$$
$$=a_0(B-\beta_n)+a_1(B-\beta_{n-1})+a_2(B-\beta_{n-2})+\cdots+a_n(B-\beta_0)$$
$$=(a_0+a_1+\cdots+a_n)B-(a_0\beta_n+a_1\beta_{n-1}+\cdots+a_n\beta_0)$$
$$=A_nB-\overbrace{(a_0\beta_n+a_1\beta_{n-1}+\cdots+a_n\beta_n)}^{\gamma_n}$$

نشان می‌دهیم $\lim_{n\to\infty}\gamma_n = 0$. می‌دانیم $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ همگرای مطلق است. قرار دهیم

$\alpha=\sum_{n=0}^{\infty}|a_n|$ از طرفی چون $\sum_{n=0}^{\infty} b_n = B$ پس $\lim_{n\to\infty}(B-B_n)=\lim_{n\to\infty}\beta_n = 0$.

$$\forall \varepsilon>0 \;\; \exists N \;\; n>N \rightarrow |\beta_n|<\varepsilon$$

$$|\gamma_n| = |a_0\beta_n+a_1\beta_{n-1}+\cdots+a_n\beta_0| \leq |a_0\beta_n+\cdots+a_{n-N-1}\beta_{N+1}|+|a_{n-N}\beta_N+\cdots+a_n\beta_0|$$

$$\leq |a_0||\beta_n|+\cdots+|a_{n-N-1}||\beta_{N+1}|+|a_{n-N}\beta_N+\cdots+a_n\beta_0|$$

$$\leq \varepsilon\alpha+|a_{n-N}\beta_N+\cdots+a_n\beta_0|$$

چون a_n همگراست $\limsup = 0$ می‌شود.

حدش صفر است

Subject:
Year. Month. Date. ( )

$$0 \leq \limsup_{n\to\infty} |\gamma_n| \leq \varepsilon\alpha \qquad \forall n$$

چون رابطه به ازای هر ع برقرار است پس:

$$\limsup_{n\to\infty} |\gamma_n| = 0 \to \lim_{n\to\infty} \gamma_n = 0$$

قضیه) اگر سری های $\sum a_n$ و $\sum b_n$ و $\sum c_n$ به A و B و C همگرا باشند و

$C_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \cdots + a_n b_0$ در این صورت $C = AB$.

اثبات) نتیجه قضیه فصل ۸:

$$\sum a_n = A \quad \sum b_n = B \quad \sum c_n = C \Rightarrow AB = C$$

بازآرایی: فرض کنید $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ تابعی یک به یک و پوشا باشد. سری $\sum a_n$ داده شده است. قرار دهید $a'_n = a_{k_n}$ $(n \to k_n)$ در این صورت $\sum a'_n$ یک بازآرایی سری $\sum a_n$ نامیده می شود.

مثال)

$$f(n) = \begin{cases} 2k-1 & n = 2k \\ 2k+2 & n = 2k+1 \end{cases} \qquad \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 1 & 4 & 3 & 5 & 6 \end{matrix}$$

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = a_2 + a_1 + a_4 + a_3 + \cdots$$

مثال) سری متناهی با بازآرایی حدش فرقی نمی کند ولی سری نامتناهی باشد تغییر می کند حدش.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = S$$

$$\underbrace{1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3}}_{\frac{5}{6}} \underbrace{- \frac{1}{4} + \frac{1}{5}}_{<0} \underbrace{- \frac{1}{6} + \frac{1}{7}}_{<0} + \cdots \to S < \frac{5}{6}$$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

$$1+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{1}{4}+\cdots$$

$$\sum_{k=0}\left(\frac{1}{4k+1}+\frac{1}{4k+3}-\frac{1}{2k+2}\right)=1+1/3-1/2+ \text{مثبت} > \frac{5}{6}$$

$$1/_{4k+1}+1/_{4k+3}-1/_{2k+2}>0 \Rightarrow 1/_{4k+1}+1/_{4k+3}-1/_{2k+2}>2/_{4k+3}-1/_{2k+2}$$

$$=1/_{(2k+2)(4k+3)}>0$$

* قضیه (ریمان): (فقط کاربرد)

فرض کنید $\sum a_n$ یک سری همگرا از اعداد حقیقی باشد که به طور مطلق همگرا نیست. و فرض کنید:

$$-\infty \leq \alpha \leq \beta \leq \infty$$

در این صورت یک بازآرایی سری مانند $\sum a'_n$ با مجموع های جزئی S'_n وجود دارد به طوری که

$$\lim_{n\to\infty} \operatorname{Inf} S'_n=\alpha \qquad \lim_{n\to\infty} \operatorname{Sup} S'_n=\beta$$

$\alpha<\beta$ فرض کنید

(اثبات) جملات مثبت را به ترتیب بنویسید: $\sum p_n$

جملات منفی " " " " : $\sum q_n$

$$\begin{cases}\lim \beta_n=\beta \\ \lim \alpha_n=\alpha \quad ; \quad \alpha_n<\beta_n\end{cases}$$

+ کاربرد قضیه ریمان (در مثال)

$$1-1/2+1/3-1/4+1/5-1/6+\cdots$$

$$\begin{cases}1+1/3+1/5+\cdots \\ -1/2-1/4-1/6-1/8-\cdots\end{cases}$$

+ می خواهیم حدمان $3/2$ بشود !؟

$$1+1/3+1/5-1/2+1/7-1/8+\cdots$$

+ این بازآرایی حدش به $3/2$ می رسد!

Scanned by CamScanner

Subject:
Year. Month. Date. ( )

قضیه) اگر $\sum a_n$ یک سری از اعداد مختلط (حقیقی) باشد که به طور مطلق همگراست،

آنگاه هر بازآرایی $\sum a_n$ همگراست و حد سری تغییر نمی‌کند.

اثبات) فرض کنید $\sum a'_n$ یک بازآرایی $\sum a_n$ باشد با مجموع‌های جزئی S'_n.

$$\forall \varepsilon>0 \quad \exists N : m>n>N \rightarrow \sum_{i=n}^{m} |a_i| < \varepsilon \quad (1)$$

حال p را به گونه‌ای انتخاب می‌کنیم که $\{1,2,\dots,N\}$ در مجموعه $\{k_1,k_2,\dots,k_p\}$

قرار بگیرد. اگر $n>p$ اختیار شود آنگاه $|S_n-S'_n|$ شامل اعداد $a_1,\dots,a_N$

نیست و در نتیجه طبق (1) $|S_n-S'_n|<\varepsilon$ بنابراین $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty} S'_n$.