کتابچه نمونه سوالات چیست:

سایت ما **افتخار** دارد برای اولین بار در ایران توانسته است کتابچه نمونه سوالات تمام دروس پیام نور که هر یک حاوی تمامی آزمون های برگزار شده پیام نور (تمامی نیمسالهای موجود حتی الامکان با جواب) را در یک فایل به نام کتابچه جمع آوری کند و هر ترم نیز آن را آپدیت نماید.

مراحل ساخت یک کتابچه نمونه سوال

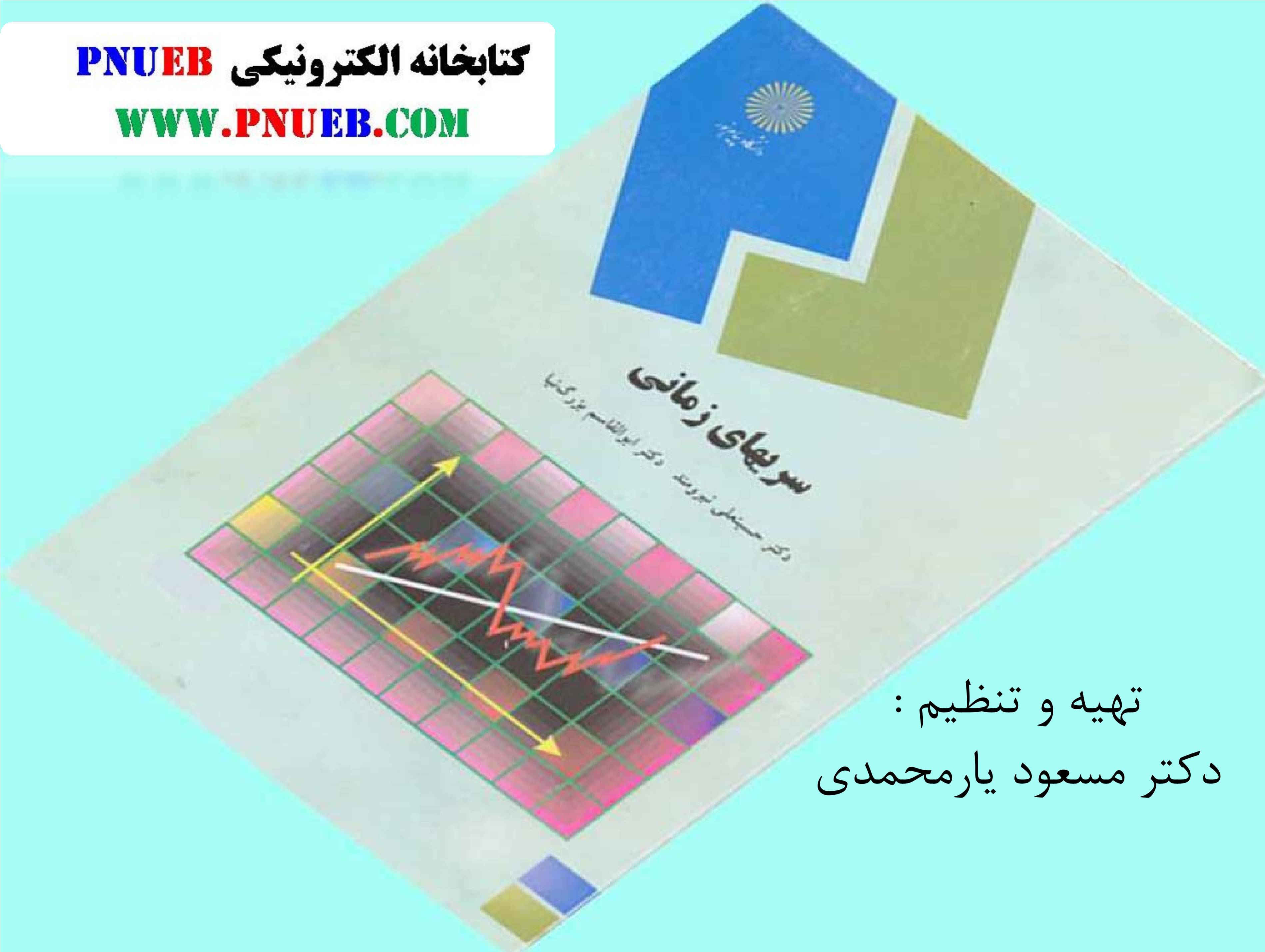
(برای آشنایی با زحمت بسیار زیاد تولید آن در هر ترم) :

دسته بندی فایلها – سرچ بر اساس کد درس – چسباندن سوال و جواب – پیدا کردن یک درس در نیمسالهای مختلف و چسباندن به کتابچه همان درس – چسباندن نیمسالهای مختلف یک درس به یکدیگر – وارد کردن اطلاعات تک تک نیمسالها در سایت – آپلود کتابچه و خیلی موارد دیگر..

همچنین با توجه به تغییرات کدهای درسی دانشگاه استثنائات زیادی در ساخت کتابچه بوجود می آید که کار ساخت کتابچه را بسیار پیچیده می کند .

WWW.PNUEB.COM


بسم الله الرحمن الرحيم



تهیه و تنظیم :
دکتر مسعود یارمحمدی

نام درس : سریهاي زماني

تعداد واحد : 4

منبع درس : کتاب سریهاي زماني

مولفان :

دکتر حسینعلي نيرومند

دکتر ابولقاسم بزرگ نيا

تهيه و تنظيم اسلايد : دکتر مسعود يارمحمدي

عناوین فصلها :

فصل اول : سریهای زمانی

فصل دوم : تحلیل توصیفی سریهای زمانی

فصل سوم : آشنایی با مفاهیم بنیادی

فصل چهارم : فرآیندهای تصادفی والگوهای سری زمانی مانا

فصل پنجم : الگوهای سریهای زمانی مانا

فصل ششم : الگو سازی برای یک سری زمانی

فصل هفتم : فرآیندهای مانا در قلمرو فرکانس

فصل هشتم : استفاده از نرم افزار آماری برای یک مثال کاربردی

راهنمای کاربران

خروج

فصل اول

سریهای زمانی

فصل اول : تعریف سری زمانی

- اهداف فصل
- تعریف سری زمانی
- انواع سری زمانی
- اجزا تشکیل دهنده سری زمانی
- محاسبه روند
- روش کمترین مربعات
- تعیین تغییرات فصلی

هدف کلی

آشنایی با سریهای زمانی و روشهای آمار توصیفی مورد استفاده.

هدفهای رفتاری

پس از مطالعهٔ این فصل می‌توانید:

- سری زمانی را تعریف کنید و انواع آن را بیان کنید،
- نمودار یک سری زمانی را رسم و اجزاء تشکیل‌دهندهٔ سری زمانی را مشخص کنید،
- مقدار روند را با روشهای مشاهدهٔ مستقیم، میانگین محرک، نصف کردن داده‌ها و کمترین مربعات به دست آورید،
- با کمک روش کمترین مربعات، یک منحنی مناسب را به داده‌ها برازش دهید،
- تغییرات فصلی را با روشهای درصد متوسط، درصد روند و درصد میانگین متحرک تعیین کنید،
- تغییرات فصلی را از داده‌ها حذف کنید،
- روند را از یک سری زمانی حذف کنید،
- سری زمانی را برای آینده پیش‌بینی کنید.

تعریف

سری زمانی مجموعه‌ای از مشاهدات است که برحسب زمان (یا هر کمیت دیگر) مرتب شده باشد. و معمولاً آن را به صورت زیر نشان می‌دهند

$$X_{t_1}, X_{t_2}, \ldots, X_{t_N}$$

این قبیل مشاهدات معمولاً در کسب و کار، اقتصاد، قیمت سهام در بازار بورس، شاخصهای قیمت ماهانه، ارقام فروش سالانه و غیره به دست می‌آیند. مثلاً،

در اقتصاد: قیمت گندم در سالهای متوالی.

در فیزیک: درجهٔ حرارت در ساعات مختلف روز.

در تجارت: ارقام فروش در هفته‌های متوالی یا روزهای متوالی.

در سرشماری: گزارشهای متوالی آمارگر.

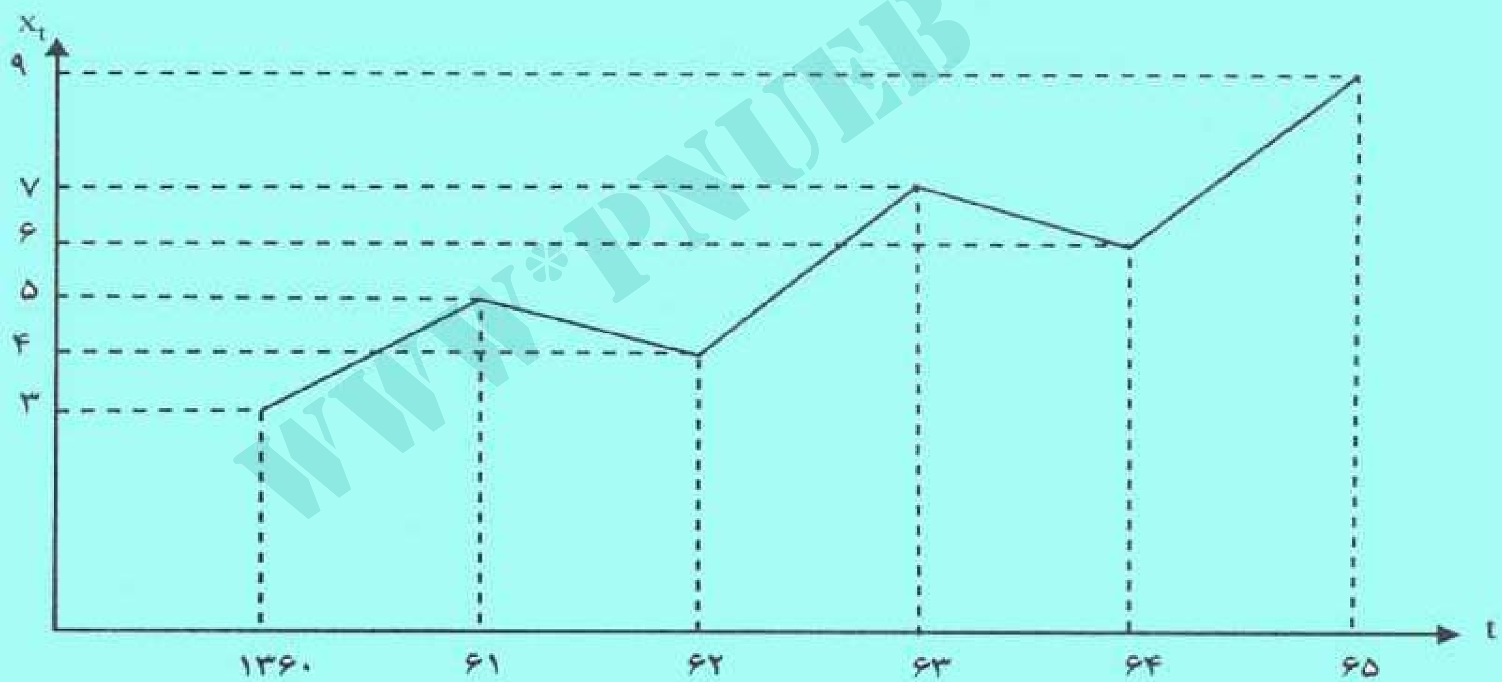
در صنعت: تولید فولاد کشور در سالهای مختلف.

در کنترل کیفیت: تغییرات تولید.

مثال

فروش کل یک فروشگاه برحسب میلیون ریال در سالهای ۱۳۶۰ تا ۱۳۶۵ در جدول زیر داده شده است. نمودار سری زمانی را در این فاصلهٔ زمانی رسم کنید.

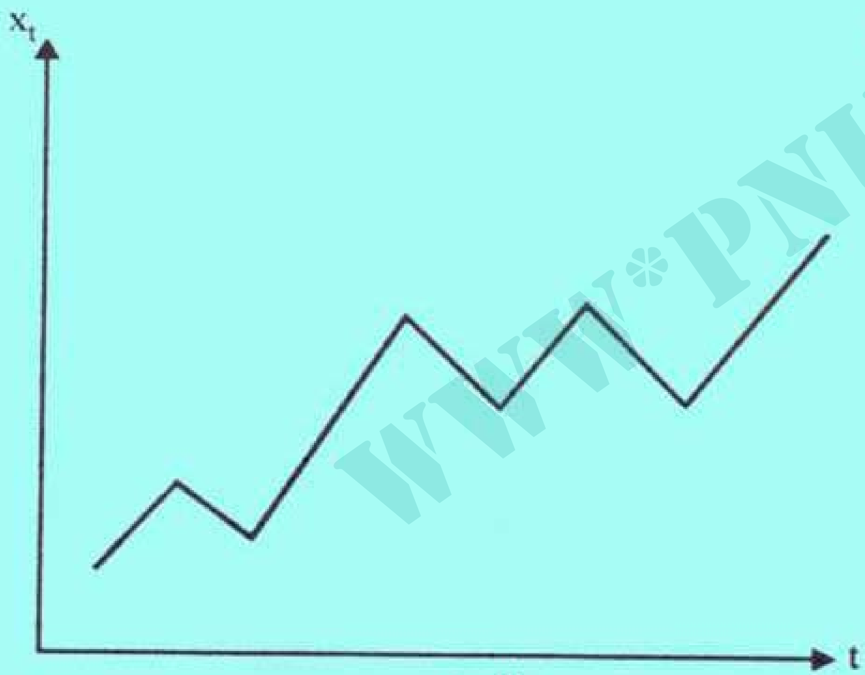
زمان	۱۳۶۰	۶۱	۶۲	۶۳	۶۴	۶۵
مبلغ فروش	۳	۵	۴	۷	۶	۹

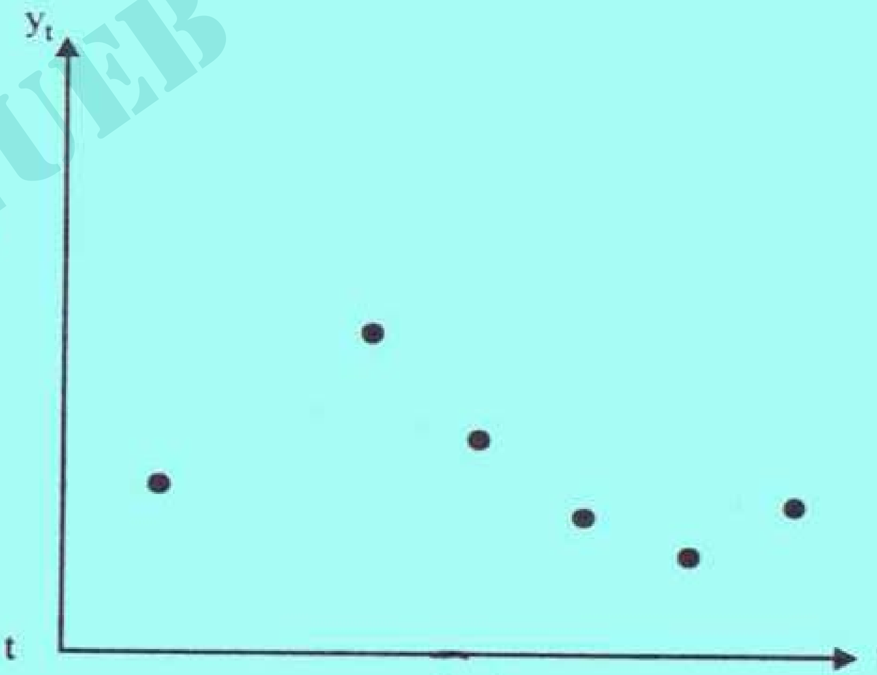


نمودار سری زمانی برحسب زمان

انواع سریهای زمانی

سریهای زمانی را معمولاً به صورت گسسته یا پیوسته بررسی می‌کنند. اگر مشاهدات به‌طور پیوسته برحسب زمان در نظر گرفته شوند سری زمانی حاصل را **پیوسته** می‌نامند. مانند سری زمانی شکل الف که اغلب در جریانهای الکتریکی پیش می‌آید. اگر مشاهدات را به‌طور منظم در فاصله‌های مساوی ثبت کنیم یک سری زمانی **گسسته** به دست می‌آید. مانند میزان صادرات در سالهای ۱۳۵۰ تا ۱۳۷۳ (شکل ب).





نمودار سری زمانی پیوسته و گسسته

اجزاء تشکیل دهندهٔ سری زمانی

تغییرات سری زمانی می‌تواند به علت تغییرات بعضی از عوامل زیر باشد که تعدادی از آنها طبیعی و بعضی ناشی از عوامل اقتصادی و اجتماعی هستند.

۱- روند

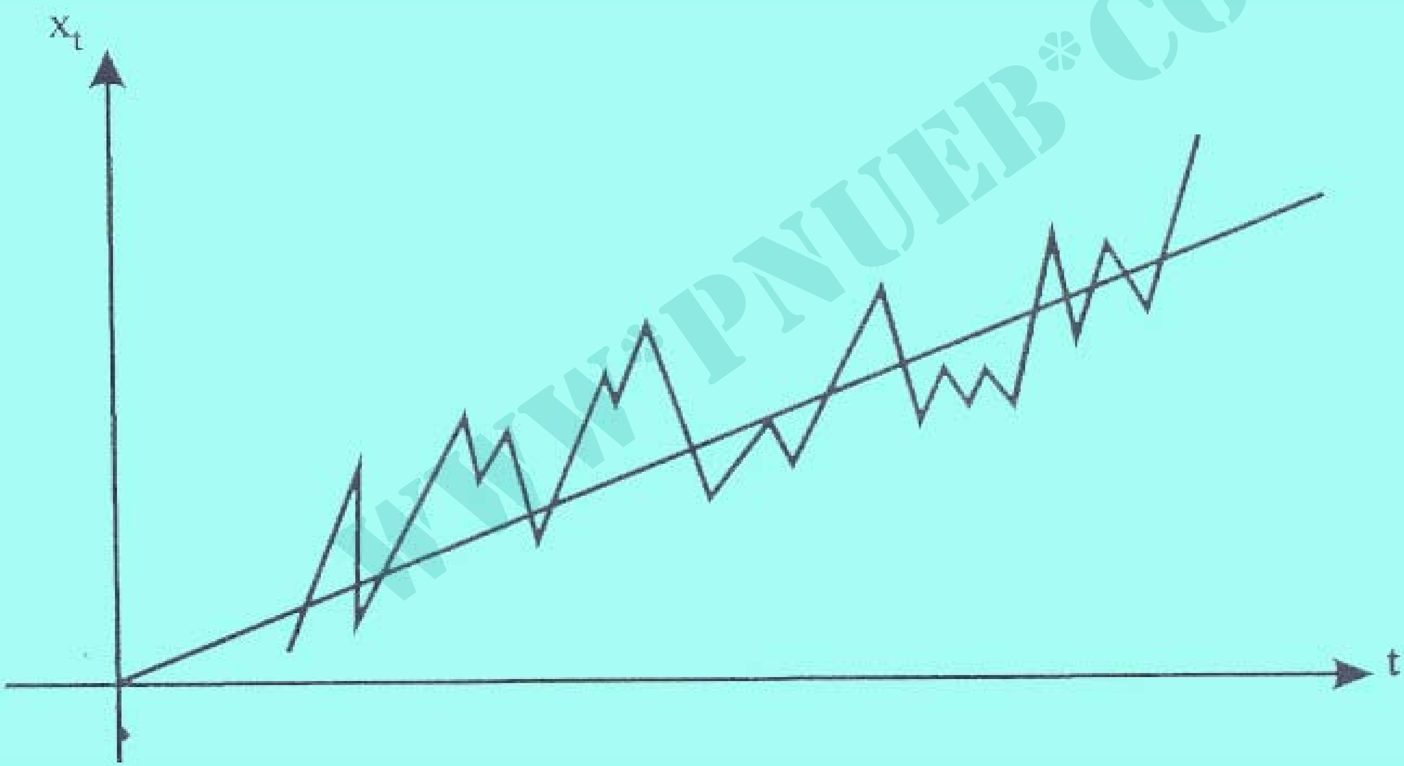
۲- تغییرات فصلی

۳- تغییرات دوره‌ای

۴- تغییرات نامنظم

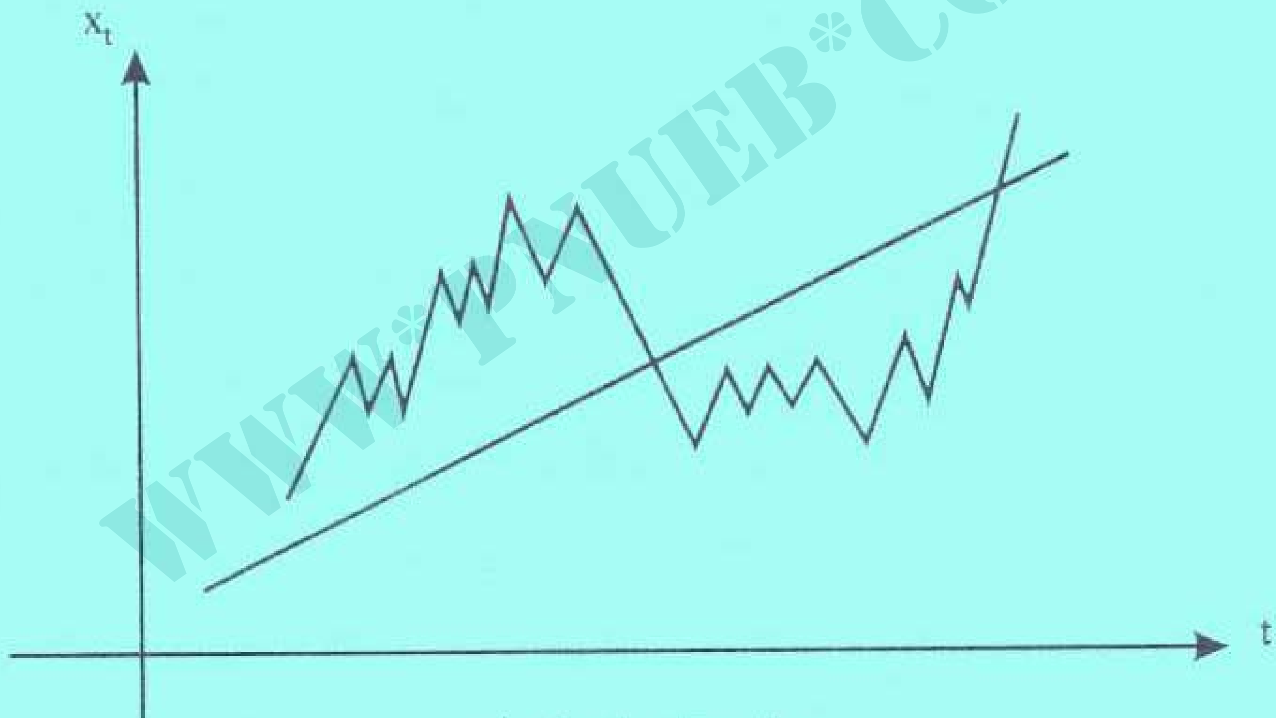
روند

روند عبارت از تغییرات درازمدت در میانگین سری زمانی است. به عبارت دیگر سیر طبیعی سری زمانی را در درازمدت روند می‌گویند.



تغییرات فصلی

تغییرات فصلی تغییراتی هستند که در دوره‌های تناوبی کوتاه پیش می‌آیند. این تغییرات مربوط به عواملی هستند که به طریقی منظم و چرخه‌ای روی یک دورهٔ کمتر از یک سال عمل می‌کنند.



روند و تغییرات فصلی

تغییرات دوره‌ای

حرکات نوسانی در یک سری زمانی با دورهٔ نوسان بیشتر از یک سال را تغییرات دوره‌ای می‌نامند. این تغییرات در سریهای زمانی به واسطهٔ افت و خیزهایی است که بعد از یک دورهٔ بیشتر از یک سال رجعت می‌کنند.

تغییرات نامنظم

در هر سری زمانی عامل دیگری وجود دارد که آن را تغییرات نامنظم یا تصادفی می‌نامند. این تغییرات کاملاً تصادفی بوده و نتیجهٔ عواملی غیرقابل پیش‌بینی هستند که به طریقی نامنظم عمل می‌کند. این تغییرات به وسیلهٔ عواملی مانند سیلها، زلزله، اعتصابها و ... به وجود می‌آیند که رفتار آنها نامنظم و غیرقابل پیش‌بینی است.

محاسبهٔ روند

مقدار روند را به روشهایی مختلف می‌توان محاسبه کرد که در زیر به چند روش اشاره می‌کنیم.

الف) مشاهدهٔ مستقیم:

ب) روش میانگین متحرک:

ج) روش نصف کردن داده‌ها:

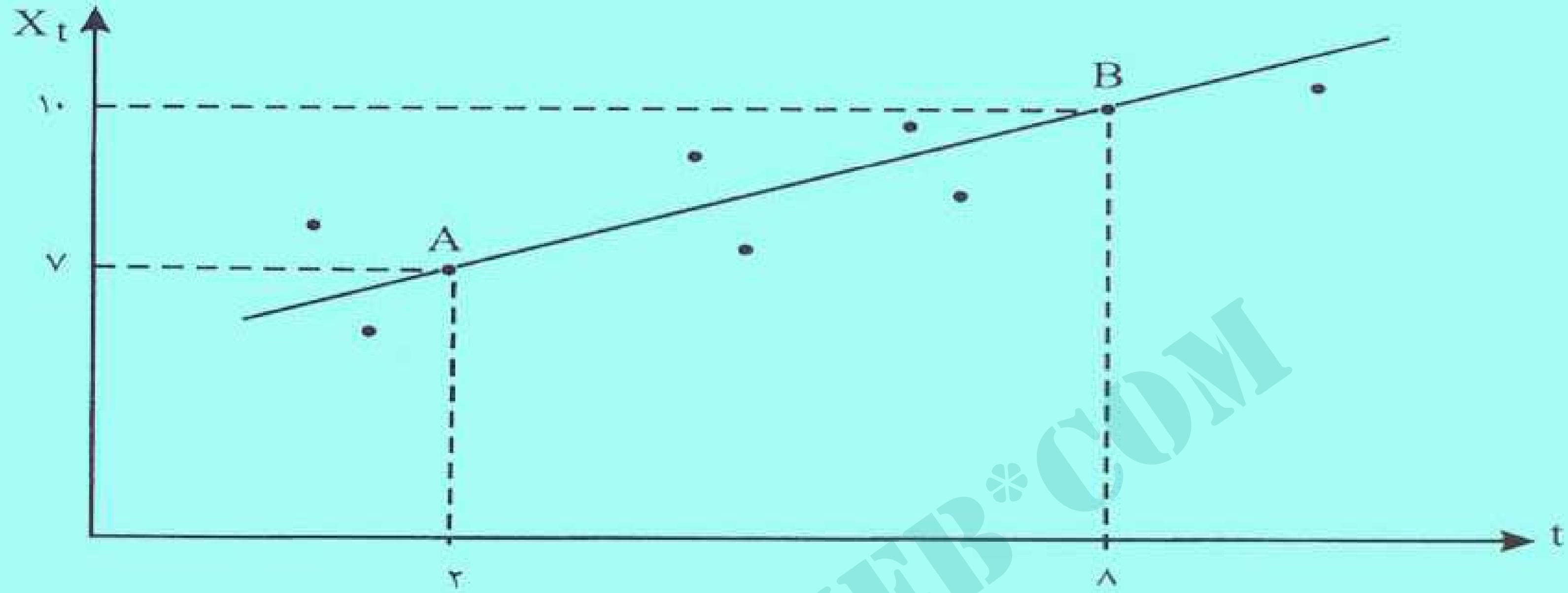
الف) مشاهدهٔ مستقیم: یک منحنی یا یک خط راست را با توجه به نمودار سری زمانی به‌طور نظری می‌برازانیم. برای رسم این خط ابتدا دو نقطهٔ دلخواه ولی مناسب مانند A و B را به قسمی انتخاب می‌کنیم که خط رسم‌شده از این دو نقطه تقریباً مقادیر داده‌ها را شامل باشد. سپس معادلهٔ این خط را با در دست داشتن دو نقطه نوشته، مقادیر روند را از روی آن به دست می‌آوریم. حال اگر x نقاط خط را به ترتیب مقادیر معین t بگیریم عرضهای متناظر با این xها معرف مقادیر روند هستند.

مثال

مطلوب است خط روند مربوط به داده‌های زیر با روش مشاهدهٔ مستقیم.

t	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹
X_t	۵	۷	۶	۹	۷	۱۰	۶	۱۰	۱۱

حل:



با توجه به نقاط روی شکل دو نقطهٔ $A\,(۲,۷)$ و $B\,(۸,۱۰)$ را که مناسب‌تر به نظر می‌رسند انتخاب کرده و معادلهٔ خط AB را می‌نویسیم.

$$X_t = \frac{۱}{۲}t + ۶$$

این معادلهٔ خط روند است. حال مقادیر روند را در زمانهای مختلف می‌توان به کمک این خط محاسبه کرده آنها را در جدول زیر نوشت:

t	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹
X_t	۵	۷	۶	۹	۷	۱۰	۶	۱۰	۱۱
روند T	۶/۵	۷	۷/۵	۸	۸/۵	۹	۹/۵	۱۰	۱۰/۵

ب) روش میانگین متحرک: اگر X_1، X_2،... مشاهدات یک سری زمانی باشند، مشاهدات میانگین متحرک مرتبهٔ N به صورت زیر تعریف می‌شود

$$Y_1 = \frac{X_1 + \cdots + X_N}{N}, \; Y_2 = \frac{X_2 + \cdots + X_{N+1}}{N}, \; Y_3 = \frac{X_3 + \cdots + X_{N+2}}{N}, \; \ldots$$

مثال

با توجه به داده‌های زیر مشاهدات میانگین متحرک مرتبهٔ ۳ را مشخص کنید.

X_t : ۲, ۶, ۱, ۵, ۳, ۷, ۲

حل:

$$Y_۱ = \frac{۲+۶+۱}{۳} = ۳,\ Y_۲ = \frac{۶+۱+۵}{۳} = ۴,\ Y_۳ = \frac{۱+۵+۳}{۳} = ۳,\ \ldots$$

در نتیجه مشاهدات میانگین متحرک مزبور عبارت‌اند از ۳، ۴، ۳، ۵، ۴. معمولاً این میانگینهای متحرک را در جایی مناسب نسبت به مشاهدات مربوط قرار می‌دهند. مثلاً در مثال فوق می‌نویسیم.

سری زمانی	۲	۶	۱	۵	۳	۷	۲
میانگین متحرک	ـ	۳	۴	۳	۵	۴	ـ

عدد ۳ را که میانگین اعداد ۱، ۶، ۲ است در زیر عدد وسط یعنی ۶ قرار می‌دهیم.

اگر برای محاسبهٔ میانگینهای متحرک به جای میانگین ساده مشاهدات از میانگین موزون استفاده کنیم، وزنها باید از قبل معین شوند. در این صورت مقادیر حاصل را مشاهدات میانگین موزون متحرک مرتبهٔ N می‌نامند.

مثال

اگر در مثال قبل از وزنهای ۱، ۴ و ۱ استفاده کنیم مقادیر میانگینهای موزون مرتبهٔ ۳ به صورت زیر به دست می‌آیند.

$$\frac{۱(۲)+۴(۶)+۱(۱)}{۱+۴+۱}, \frac{۱(۶)+۴(۱)+۱(۵)}{۱+۴+۱}, \frac{۱(۱)+۴(۵)+۱(۳)}{۱+۴+۱}, \ldots$$

به این ترتیب میانگینهای متحرک موزون عبارت‌اند از ۴/۵، ۲/۵، ۳/۵.

خاصیت و عیب روش میانگین متحرک

خاصیت میانگین متحرک این است که تغییرات موجود در یک مجموعه را کاهش می‌دهد. در سریهای زمانی از این خاصیت برای حذف نوسانات غیرضروری استفاده می‌شود.

عیب روش میانگین متحرک حذف شدن بعضی از مشاهدات از ابتدا و انتهای سری زمانی است. در مثال قبل که با هفت مشاهده شروع شد بعد از محاسبهٔ میانگینهای متحرک مرتبهٔ ۳ فقط ۵ عدد نتیجه شد. یک عیب دیگر این است که ممکن است باعث تغییرات دوره‌ای یا سایر تغییرات شود که در داده‌های اولیه وجود نداشته‌اند. عیب سوم میانگین متحرک این است که به شدت تحت تأثیر ماکسیمم و مینیمم مشاهدات قرار دارد. برای رفع این عیب از میانگین متحرک موزون می‌توان استفاده کرد. در این حالت به مشاهدات مرکزی بیشترین وزن و به مشاهدات انتهایی کمترین وزن را می‌دهند.

تبصره

در مورد محاسبهٔ میانگینهای متحرک با مرتبهٔ K دو حالت اتفاق می‌افتد.

۱ ـ **عدد K فرد است.** در این حالت مقادیر متوالی میانگینهای متحرک را در مقابل مقادیر مشاهدات متناظر می‌توان قرار داد. مثلاً اگر $K = ۵$، اولین مقدار میانگین متحرک در مقابل مشاهدهٔ سوم و دومین مقدار میانگین متحرک در مقابل مشاهدهٔ چهارم و الی آخر قرار می‌گیرد.

۲ ـ **عدد K زوج است.** در این حالت مقادیر محاسبه‌شده میانگینهای متحرک دقیقاً در مقابل مشاهدات سری زمانی قرار نمی‌گیرند بلکه بین دو مشاهدهٔ متوالی واقع می‌شوند در این مورد با در نظر گرفتن متوسط دو میانگین متحرک و قرار دادن آن در مقابل مشاهدهٔ متناظر، آنها را با داده‌های اولیه همزمان می‌کنند. این روش را **مرکزی** کردن و مقادیر میانگینهای متحرک حاصل را **میانگینهای متحرک مرکزی** می‌نامند.

مثال

داده‌های جدول زیر متوسط تولید ماهانهٔ زغال سنگ را برحسب هزار تن در سالهای ۱۳۵۰ تا ۱۳۵۸ به دست می‌دهد. مطلوب است محاسبهٔ:

الف) میانگین متحرک ۴ ساله

ب) میانگین متحرک مرکزی چهارساله

۵۸	۵۷	۵۶	۵۵	۵۴	۵۳	۵۲	۵۱	۵۰	سال
۱۱	۱۲	۹	۱۰	۶	۷	۴	۵	۳	میانگین تولید ماهانه

میانگینهای متحرک ۴ ساله در جدول زیر محاسبه شده‌اند همان‌طورکه دیده می‌شود این مقادیر در فاصلهٔ سالهای متوالی واقع می‌شوند و از تقسیم مجموع متحرک ۴ ساله بر ۴ به دست می‌آیند.

سال	مشاهدات	مجموع متحرک ۴ ساله	میانگین متحرک ۴ ساله
۱۳۵۰	۳	—	—
۱	۵	—	—
		۱۹	۴/۷۵
۲	۴		
		۲۲	۵/۵
۳	۷		
		۲۷	۶/۷۵
۴	۶		
		۳۲	۸
۵	۱۰		
		۳۷	۹/۲۵
۶	۹		
		۴۲	۱۰/۵
۷	۱۲	—	—
۸	۱۱	—	—

برای محاسبهٔ میانگینهای متحرک مرکزی ۴ ساله دو روش معمول است. در روش اول ابتدا میانگین متحرک ۴ ساله را محاسبه می‌کنند و سپس میانگینهای متحرک دوسالهٔ مقادیر حاصل را به دست می‌آورند. در روش دوم ابتدا مجموع متحرک ۴ ساله را محاسبه می‌کنند سپس میانگین متحرک دوسالهٔ اعداد حاصل را به دست می‌آورند و در نتیجه این اعداد را بر ۸ تقسیم می‌کنند. در زیر میانگین متحرک مرکزی ۴ ساله را با روش دوم حساب می‌کنیم.

میانگین متحرک ۴ ساله مرکزی	مجموع متحرک ۲ ساله	مجموع متحرک ۴ ساله	مشاهدات	سال
—	—	—	۳	۱۳۵۰
—	—	—	۵	۱
۵/۱۲۵	۴۱	۱۹	۴	۲
۶/۱۲۵	۴۹	۲۲	۷	۳
۷/۳۷۵	۵۹	۲۷	۶	۴
۸/۶۳۵	۶۹	۳۲	۱۰	۵
۹/۸۷۵	۷۹	۳۷	۹	۶
—	—	۴۲	۱۲	۷
—	—	—	۱۱	۸

ج) روش نصف کردن داده‌ها: در این روش مشاهدات سری زمانی را به دو قسمت تقسیم می‌کنیم (بهتر است در صورت امکان دو قسمت مساوی باشند). سپس متوسط هر قسمت را محاسبه می‌کنیم. به این ترتیب دو نقطه به دست می‌آید. خط روند خطی است که از این دو نقطه می‌گذرد و به کمک آن می‌توان مقادیر روند را محاسبه کرد. هرچند این روش ساده است ولی ممکن است نتایج حاصل دقیق نباشد و باید وقتی از آن استفاده کرد که روند خطی یا تقریباً خطی است. در صورت لزوم داده‌ها را به چند قسمت تقسیم می‌کنیم به قسمی که روند در هر قسمت تقریباً خطی باشد.

مثال

مثال

مقادیر روند مشاهدات مثال قبل را با استفاده از روش نصف داده‌ها به دست آورید. در محاسبه مقدار متوسط الف) از میانگین ب) از میانه استفاده کنید.

مشاهدات	سال	مشاهدات	سال
۱۰	۱۳۵۵	۳	۱۳۵۰
۹	۶	۵	۱۳۵۱
۱۲	۷	۴	۱۳۵۲
۱۱	۸	۷	۱۳۵۳
۱۳	۹	۶	۱۳۵۴
۵۵	جمع	۲۵	جمع

حل:

مشاهدات	سال	مشاهدات	سال
۱۰	۱۳۵۵	۳	۱۳۵۰
۹	۶	۵	۱۳۵۱
۱۲	۷	۴	۱۳۵۲
۱۱	۸	۷	۱۳۵۳
۱۳	۹	۶	۱۳۵۴
۵۵	جمع	۲۵	جمع

با توجه به مقادیر فوق می‌توان روند سری زمانی را محاسبه کرد. این نتایج را می‌توان با رسم خطی که از نقاط (۵۲, ۵) و (۵۷, ۱۱) می‌گذرد به دست آورد. میانهٔ هریک از دو قسمت مشاهدات به ترتیب عبارت است از: ۵ و ۱۱ پس در نتیجه مقدار کاهش سالانه عبارت‌است از

$$\text{مقدار کاهش سالانه} = \frac{۱۱ - ۵}{۵} = \frac{۶}{۵} = ۱/۲$$

که در آن ۵ نصف فاصله زمانی است. در نتیجه مقادیر روند به صورت زیر خواهد بود.

۵۹	۵۸	۵۷	۵۶	۵۵	۵۴	۵۳	۵۲	۵۱	۵۰	سال
۱۳/۴	۱۲/۲	۱۱	۹/۸	۸/۶	۷/۴	۶/۲	۵	۳/۸	۲/۶	روند

مثال

تولید فولاد کشور برحسب هزار تن در سالهای ۱۳۶۶ تا ۱۳۷۶ در جدول زیر داده شده است. اولاً نمودار داده‌ها را رسم کنید. ثانیاً مقدار فولاد را در سالهای ۱۳۷۷ و ۱۳۷۸ پیش‌بینی و با مقادیر واقعی ۱۳۰ و ۱۵۵ مقایسه کنید.

سالها	۶۶	۶۷	۶۸	۶۹	۷۰	۷۱	۷۲	۷۳	۷۴	۷۵	۷۶
تولید	۵۰	۷۰	۶۰	۸۰	۷۰	۱۰۰	۸۰	۹۰	۱۲۰	۱۰۰	۱۲۰

حل:

چون تعداد سالها فرد است می‌توان سال وسط یعنی ۷۱ را صفر در نظر گرفت. بعد از این تبدیل متغیر سال را با X و میزان تولید را با Y نشان می‌دهیم، در این صورت داده‌ها به صورت زیر مرتب می‌شوند.

سال	X	Y	$X^۲$	XY
۱۳۶۶	۵-	۵۰	۲۵	۲۵۰-
۱۳۶۷	۴-	۷۰	۱۶	۲۸۰-
۱۳۶۸	۳-	۶۰	۹	۱۸۰-
۱۳۶۹	۲-	۸۰	۴	۱۶۰-
۱۳۷۰	۱-	۷۰	۱	۷۰-
۱۳۷۱	۰	۱۰۰	۰	۰
۱۳۷۲	۱	۸۰	۱	۸۰
۱۳۷۳	۲	۹۰	۴	۱۸۰
۱۳۷۴	۳	۱۲۰	۹	۳۶۰
۱۳۷۵	۴	۱۰۰	۱۶	۴۰۰
۱۳۷۶	۵	۱۲۰	۲۵	۶۰۰
	$\bar{X} = ۰$	$\bar{Y} = ۸۵/۴۵$	$\Sigma X^۲ = ۱۱۰$	$\Sigma XY = ۶۸۰$

$$Y = \bar{Y} + \left[\frac{\sum XY}{\sum X^{۲}}\right] X \qquad \text{یا} \qquad Y = ۸۵/۴۵ + \frac{۶۸۰}{۱۱۰} X$$

که در آن $X = ۰$ معادل است با سال ۱۳۷۱. برای انتقال به سال مبدأ، کافی است به جای X، $X - ۵$ قرار دهیم. حال مقدار پیش‌بینی برای سال ۱۳۷۷ به ازای $X = ۶$ برابر ۱۲۲/۴۷ و در سال ۱۳۷۸ یعنی $X = ۷$ برابر ۱۲۸/۷۲ به دست می‌آید.

روش کمترین مربعات

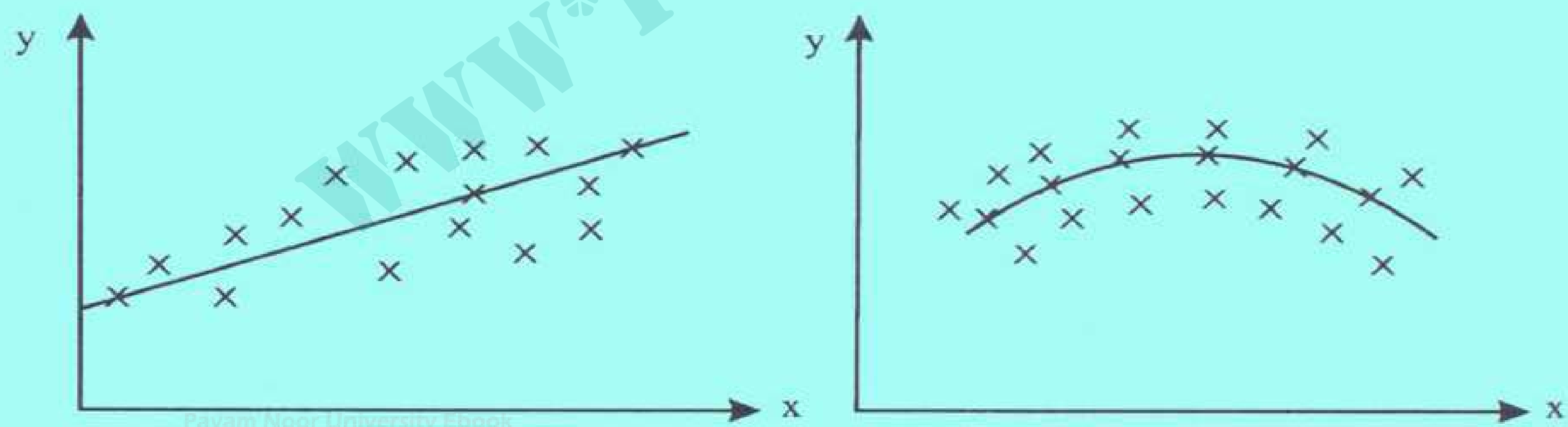
- برازش یک منحنی
- برازش کمترین مربعات
- خط کمترین مربعات
- چند مثال حل شده

برازش یک منحنی

فرض کنید x و y به ترتیب اندازهٔ قد و وزن هر فرد باشد. حال به کمک نمونه‌ای به حجم n مشاهدات زیر را به دست می‌آوریم

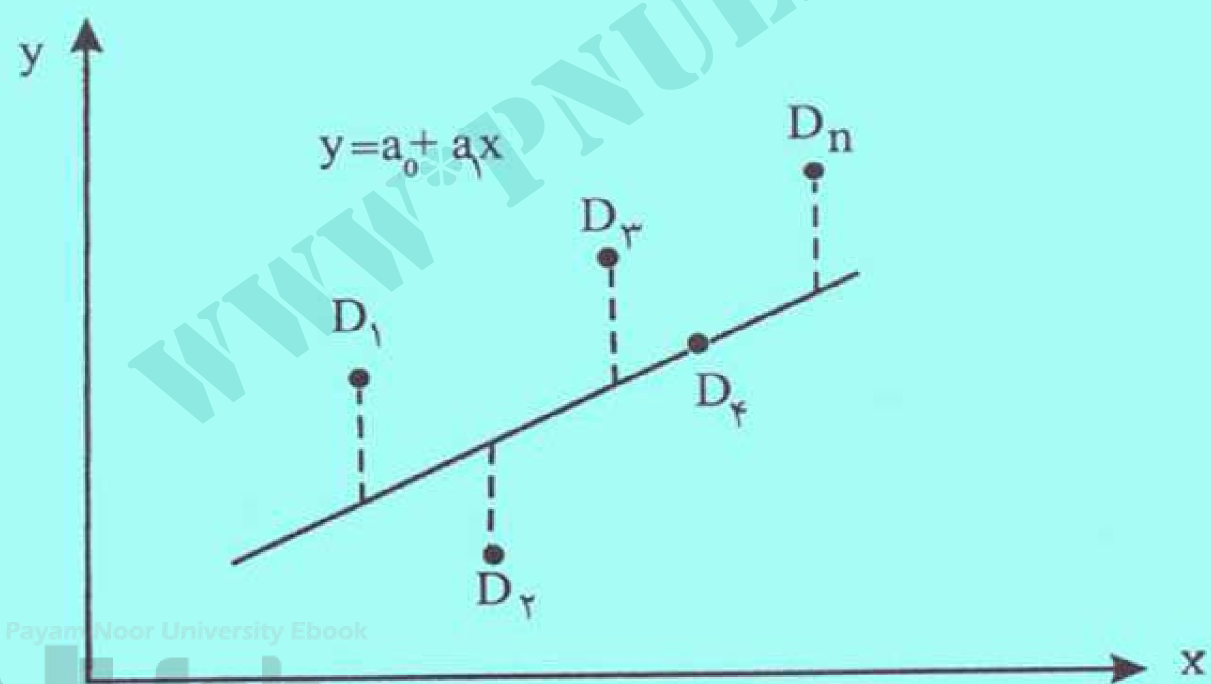
$$x_1, x_2, \ldots, x_n \qquad , \qquad y_1, y_2, \ldots, y_n$$

سپس در صفحهٔ مختصات قائم نقاط (x_i, y_i) را مشخص می‌کنیم، مجموعهٔ این نقاط را نمودار پراکندگی گوییم. با توجه به این نمودار اغلب می‌توان یک منحنی هموار به مشاهدات برازش داد. بخصوص اگر بتوان یک خط راست به داده‌ها برازش داد یک رابطهٔ خطی بین متغیرها برقرار است. به شکلهای توجه کنید.



برازش کمترین مربعات

با توجه به شکل زیر از تمام منحنیهایی که تقریباً به داده‌ها برازش دارند آن منحنی را که برای حاصل جمع انحرافهای $D_1^2 + D_2^2 + \cdots + D_n^2$ مینیمم باشد بهترین منحنی برازش داده‌شده می‌نامند. هر برازش که به این ترتیب انجام شود **برازش کمترین مربعات** نامیده می‌شود.



خط کمترین مربعات

خط کمترین مربعات را که به داده‌های (X_1, Y_1) .... (X_n, Y_n) برازش داده می‌شود به صورت زیر در نظر می‌گیریم

$$Y = a_0 + a_1 X$$

برای محاسبهٔ a_0 و a_1 دستگاه زیر را تشکیل داده و آن را حل می‌کنیم. معادلات این دستگاه را معادلات نرمال می‌گویند.

$$\begin{cases} \sum y_i = n a_0 + a_1 \sum x_i \\ \sum x_i y_i = a_0 \sum x_i + a_1 \sum x_i^2 \end{cases}$$

حال با جایگذاری مشاهدات در این دستگاه و حل آن نسبت به a_0 و a_1 مقادیر زیر به عنوان براورد ضرایب به دست می‌آیند

$$\hat{a}_0 = \frac{\left[\sum Y\right]\left[\sum X^2\right] - \left[\sum X\right]\left[\sum XY\right]}{n\sum X^2 - \left[\sum X\right]^2}$$

$$\hat{a}_1 = \frac{n\sum XY - \sum X \sum Y}{n\sum X^2 - \left[\sum X\right]^2}$$

گاهی اوقات با تبدیلهای $y = Y - \bar{Y}$, $x = X - \bar{X}$ معادلهٔ خط رگرسیون به صورت ساده‌تر زیر نوشته می‌شود.

$$y = \left[\frac{\sum XY}{\sum X^{2}} \right] x$$

بخصوص اگر مشاهدات X_i به قسمی باشند که $\sum X_i = 0$ در این صورت معادلهٔ خط رگرسیون عبارت است از

$$y = \bar{Y} + \left[\frac{\sum XY}{\sum X^{2}} \right] x$$

مثال ۱ـ داده‌های زیر تعداد فروشنده‌هایی را نشان می‌دهد که در یک فروشگاه کار می‌کنند. با استفاده از روش کمترین مربعات خط روند را به داده‌ها برازش دهید و تعداد فروشنده‌ها را در سال ۱۳۷۵ برآورد کنید.

سال	۱۳۷۰	۱۳۷۱	۱۳۷۲	۱۳۷۳	۱۳۷۴
تعداد فروشنده‌ها	۲۸	۳۸	۴۶	۴۰	۵۶

حل: خط روند را به صورت $y = a + bx$ در نظر می‌گیریم. برای سهولت محاسبات فرض می‌کنیم $x = t - ۱۳۷۲$ یعنی مبدأ را سال ۱۳۷۲ در نظر می‌گیریم.

سال t	تعداد فروشنده‌ها y	$X = t - ۱۳۷۲$	XY	$X^۲$	مقادیر روند $Y_e = ۴۱/۶ + ۵/۸X$
۱۳۷۰	۲۸	−۲	−۵۶	۴	۴۱/۶ − ۱۱/۶ = ۳۰
۱۳۷۱	۳۸	−۱	−۳۸	۱	۴۱/۶ − ۵/۸ = ۳۵/۸
۱۳۷۲	۴۶	۰	۰	۰	۴۱/۶
۱۳۷۳	۴۰	۱	۴۰	۱	۴۱/۶ + ۵/۸ = ۴۷/۴
۱۳۷۴	۵۶	۲	۱۱۲	۴	۴۱/۶ + ۱۱/۶ = ۵۳/۸
	$\Sigma Y = ۲۰۸$	$\Sigma X = ۰$	$\Sigma XY = ۵۸$	$\Sigma X^۲ = ۱۰$	$\Sigma Y_e = ۲۰۸$

حال با استفاده از معادلات نرمال a و b را برآورد می‌کنیم

$$(i)\ \sum Y = na + b\sum X$$

$$۲۰۸ = ۵a + ۰ \rightarrow a = \frac{۲۰۸}{۵} = ۴۱/۶ \rightarrow \hat{a} = ۴۱/۶$$

$$(ii)\ \sum XY = a\sum X + b\sum X^{۲}$$

$$۵۸ = a \times ۰ + ۱۰b \rightarrow \hat{b} = ۵/۸$$

پس خط روند عبارت است از:

$$Y = ۴۱/۶ + ۵/۸X$$

اگر در معادلهٔ خط روند به ترتیب مقادیر ۲، ۱، ۰، ۱−، ۲− = x را قرار دهیم مقادیر روند برای سالهای ۱۳۷۰ تا ۱۳۷۴ به دست می‌آیند مقادیر روند در ستون آخر جدول فوق داده شده است. برآوردی از تعداد فروشنده‌ها در سال ۱۳۷۵ با قرار دادن $X = t - ۱۳۷۲ = ۱۳۷۵ - ۱۳۷۲ = ۳$ در معادلهٔ خط روند حاصل می‌شود که عبارت است از $۵۹ = ۵/۸ \times ۳ + ۴۱/۶$. بنابراین برآورد تعداد فروشنده در سال ۱۳۷۵ برابر ۵۹ است.

مثال ۲ـ در یک کشور، تولید فولاد به میلیون تن در سالهای ۱۳۵۶ تا ۱۳۶۶ در جدول زیر داده شده است.

الف) نمودار داده‌ها را رسم کنید.

ب) خط روندی را که به داده‌ها برازش داده می‌شود با روش کمترین مربعات به دست آورده آن را در همان صفحهٔ مختصات رسم کنید.

ج) مقادیر روند را برای سال ۱۳۶۲ محاسبه کرده و تولید فولاد را برای سالهای ۱۳۶۷ و ۱۳۶۸ برآورد کنید.

سال	۱۳۵۶	۱۳۵۷	۱۳۵۸	۱۳۵۹	۱۳۶۰	۱۳۶۱	۱۳۶۲	۱۳۶۳	۱۳۶۴	۱۳۶۵	۱۳۶۶
تولید فولاد به میلیون تن	۶۶/۶	۸۴/۹	۸۸/۶	۷۸	۹۶/۸	۱۰۵/۲	۹۳/۲	۱۱۱/۶	۸۸/۳	۱۱۷	۱۱۵/۲

حل: چون $n=$ ۱۱ فرد است، مبدأ را به وسط دورهٔ زمانی یعنی سال ۱۳۶۱ انتقال می‌دهیم. فرض می‌کنیم:

$$X = t - ۱۳۶۱$$

سال (t)	$Y =$ تعداد	$X = t - ۱۳۶۱$	XY	$X^۲$	مقادیر روند y
۱۳۵۶	۶۶/۶	−۵	−۳۳۳	۲۵	۷۵/۷۴
۱۳۵۷	۸۴/۹	−۴	−۳۹۹/۶	۱۶	۷۹/۶۹
۱۳۵۸	۸۸/۶	−۳	−۲۶۵/۸	۹	۸۳/۶۴
۱۳۵۹	۷۸	−۲	−۱۵۶	۴	۸۷/۵۹
۱۳۶۰	۹۶/۸	−۱	−۹۶/۸	۱	۹۱/۵۴
۱۳۶۱	۱۰۵/۲	۰	۰	۰	۹۵/۴۹
۱۳۶۲	۹۳/۱	۱	۹۳/۲	۱	۹۹/۴۴
۱۳۶۳	۱۱۱/۶	۲	۲۲۳/۲	۴	۱۰۳/۳۹
۱۳۶۴	۸۸/۳	۳	۲۶۴/۹	۹	۱۹۷/۳۴
۱۳۶۵	۱۱۷	۴	۴۶۸	۱۶	۱۱۱/۲۹
۱۳۶۶	۱۱۵/۲	۵	۵۷۶	۲۵	۱۱۵/۲۴
	$\Sigma Y =$ ۱۰۴۵/۳	$\Sigma X =$ ۰	$\Sigma XY =$ ۴۳۴/۱	$\Sigma X^۲ =$ ۱۱۰	

خط روند را به صورت $Y = a + bX$ در نظر می‌گیریم. معادلات نرمال عبارت‌اند از:

$$\sum Y = na + b\sum X \quad , \quad \sum XY = a\sum X + b\sum X^{۲}$$

با توجه به این معادلات مقادیر a و b را به دست می‌آوریم.

$$۱۰۴۵/۳ = ۱۱a \rightarrow a = ۹۵/۰۳$$
$$۴۳۴/۱ = ۱۱۰b \rightarrow b = ۳/۹۵$$

پس خط کمترین مربعات که به داده‌ها برازش داده می‌شود عبارت است از:

$$Y = ۹۵/۰۳ + ۳/۹۵X$$

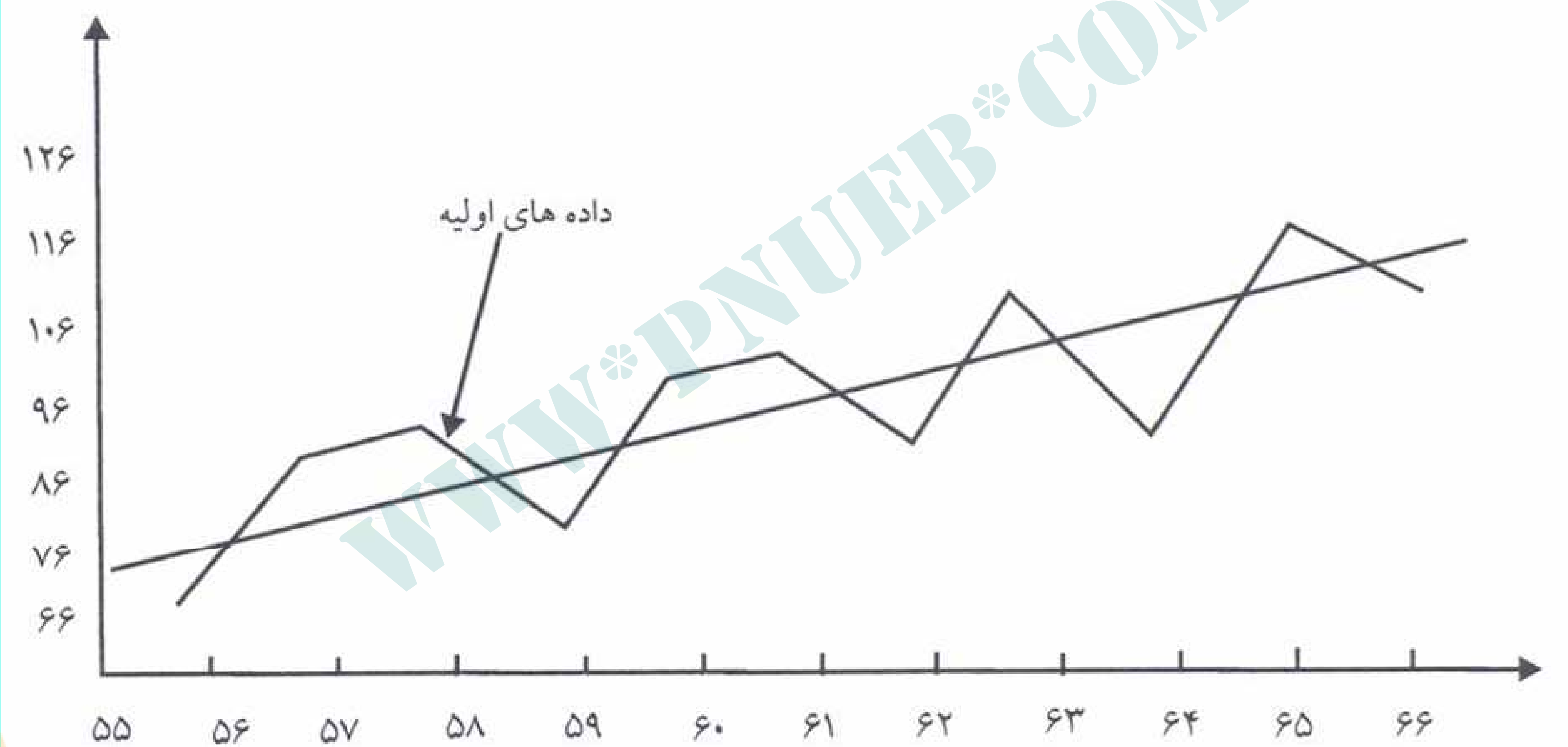
با قرار دادن $X = ۱$ در معادلهٔ خط روند مقدار روند برای سال ۱۳۶۲ به دست می‌آید.

$$(Y)_{۱۳۶۲} = ۹۵/۰۳ + ۳/۹۵ \times ۱ = ۹۸/۹۸ \text{ (میلیون تن)}$$

مقادیر روند برای سالهای ۱۳۵۶ تا ۱۳۶۶ به ترتیب با قرار دادن ۵ و ۴ و ... و ۴- و ۵- $= X$ در معادلهٔ خط روند به دست می‌آید

به‌طور مشابه اگر $X = ۷$ $(X = ۱۳۶۸ - ۱۳۶۱ = ۷)$ را در معادلهٔ خط روند قرار دهیم برآورد سال ۱۳۶۸ به دست می‌آید. (میلیون تن) $Y_{(۱۳۶۸)} = ۹۵/۰۳ - ۳/۹۵ \times ۷ = ۱۲۲/۶۸$

نمودار داده‌ها و خط روند به صورت زیر است:



مثال ۳- سری زمانی زیر را رسم کنید و براساس اطلاعات جدول زیر یک خط راست و یک منحنی درجهٔ دوم به داده‌ها برازش دهید.

سال	۱۹۰۱	۱۹۱۱	۱۹۲۱	۱۹۳۱	۱۹۴۱	۱۹۵۱	۱۹۶۱	۱۹۷۱
جمعیت (میلیون)	۲۳۸/۳	۲۵۲	۲۵۱/۲	۲۷۸/۹	۳۱۸/۵	۳۶۱	۴۳۹/۱	۵۴۷/۹

حل: $y = ۳۳۵/۸۶ + ۲۰/۶۶x$ ، $y = ۲۹۳/۰۲۲ + ۲۰/۶۶x + ۲/۰۴x^{۲}$

مثال ۴ ـ منحنی روند $y = ab^x$ را به داده‌های زیر برازش دهید و مقدار روند را به ازاء $x = ۱$ حساب کنید.

x	۱	۲	۳	۴	۵
y	۱/۶	۴/۵	۱۳/۸	۴۰/۲	۱۳۵

حل: $\log y = \log a + x\log B \rightarrow y = A + Bx, y = \log y, A = \log a, B = \log b$

$y = ۰/۵۲۳۱ \times (۲/۹۷۷)^x$ ، $y = ۱/۵۵۷۳$

مثال ۵ ـ براساس اطلاعات جدول زیر:

سال (x)	۱۳۱۱	۱۳۲۱	۱۳۳۱	۱۳۴۱	۱۳۵۱	۱۳۶۱	۱۳۷۱
جمعیت (y)	۲۵	۲۵/۱	۲۷/۹	۳۱/۹	۳۶/۱	۴۳/۹	۵۴/۷

یک منحنی روند نمایی مانند $y = ab^x$ را با روش کمترین مربعات به داده‌ها برازش داده و مقادیر روند را به دست آورید. جمعیت را در سال ۱۳۸۱ برآورد کنید.

حل: منحنی روند $y = ۳۳/۶۰ \times (۱/۱۴۲)^u$ است، که در آن $u = \frac{x - ۱۹۴۱}{۱۰}$، $(y)_{u=۰} = ۳۳/۶۰$. مقادیر روند در سالهای ۱۳۱۱ تا ۱۳۷۱ به ترتیب عبارت‌اند از ۲۲/۵۶، ۲۵/۷۶، ۲۹/۴۲، ۳۳/۶۰، ۳۸/۳۷، ۴۳/۸۲، ۵۰/۰۴.

تعیین تغییرات فصلی

تعیین تغییرات فصلی

محاسبه تغییرات فصلی

تعیین تغییرات فصلی S

برای تعیین تغییرات فصلی در معادلهٔ $Y = T.S.C.I$ باید مشخص کنیم که داده‌های یک سری زمانی چگونه از یک ماه به ماه دیگر در طول یک سال تغییر می‌کند. مجموعه‌ای از اعداد که مقادیر نسبی یک متغیر را در ماههای سال نشان می‌دهد شاخص فصلی آن متغیر می‌نامیم. مثلاً اگر مقدار فروش در فروردین، اردیبهشت، خرداد، ... به ترتیب ۵۰، ۱۲۰، ۹۰، ... درصد متوسط ماهانه در تمام سال باشد، اعداد ۵۰، ۱۲۰ و ۹۰ را شاخص فصلی آن سال می‌نامند. متوسط شاخص فصلی در تمام سال باید ۱۰۰٪ شود یعنی مجموع اعداد شاخص باید ۱۲۰۰٪ باشد.

برای محاسبهٔ شاخص فصلی نیز روشهای مختلفی وجود دارد که بعضی از آنها را در زیر به اختصار شرح می‌دهیم.

۱ ـ روش درصد متوسط سالانه

۲ـ روش ارتباط نسبی

۳ـ روش درصد میانگین متحرک

۴ ـ روش درصد روند

روش درصد متوسط سالانه

در این روش داده‌های هر ماه را به صورت متوسط سالانه محاسبه می‌کنیم سپس درصدهای حاصل هر ماه را در سالهای مختلف در نظر گرفته میانگین یا میانهٔ آنها را به دست می‌آوریم. اگر از میانگین استفاده کنیم بهتر آن است که از مقادیر فرین صرفنظر کنیم. درصدهای محاسبه‌شده در ۱۲ ماه شاخص فصلی خواهد بود اگر میانگین برابر ۱۰۰٪ شود. (اگر مجموع برابر ۱۲۰۰٪ نشود آن را با ضرب در یک عامل مناسب تصحیح می‌کنیم.)

روش ارتباط نسبی

در این روش داده هر ماه را به صورت درصد دادهٔ ماه قبل بیان می‌کنیم، سپس متوسط مقادیر حاصل را برای ماههای متناظر محاسبه می‌کنیم. در این صورت برحسب آنکه روند سری زمانی صعودی یا نزولی باشد درصد فروردین آینده ممکن است کمتر یا بیشتر از ۱۰۰٪ باشد با توجه به این اختلاف می‌توان درصدهای حاصل را تصحیح کرد. درصدهای حاصل همان شاخص فصلی خواهد بود.

روش درصد میانگین متحرک

در این روش میانگین متحرک ۱۲ ماهه محاسبه می‌شود. چون مقادیر حاصل در فاصله هر دو ماه قرار می‌گیرد، مجدداً یک میانگین متحرک ۲ ماهه را محاسبه می‌کنیم تا مقادیر حاصل در مقابل ماههای متناظر قرار گیرند. پس از محاسبه مقادیر فوق داده‌های اولیه را به صورت درصد میانگین متحرک ماهانه بیان می‌کنیم سپس متوسط درصدهای حاصل را به عنوان شاخص فصلی مطلوب در نظر می‌گیریم.

دقت کنید که در این محاسبات از مقادیر Y تغییرات مؤلفهٔ فصلی S و نامنظم I حذف می‌شود و ارقام حاصل معادل TC خواهد بود. سپس با تقسیم مشاهدات اولیه بر TC خارج قسمت برابر SI می‌شود که با در نظر گرفتن متوسط آنها تغییرات نامنظم I نیز از مشاهدات حذف شده و نتیجه شاخص مناسبی برای S خواهد بود.

فصل دوم

تحلیل توصیفی سریهای زمانی

فصل دوم : تحلیل توصیفی سریهای زمانی

اهداف فصل

رسم نمودار سری زمانی

تبدیلها

برازش منحنی

صافی کردن

عملگر پسرو

تفاضلی کردن

حذف تغییرات فصلی

خود همبستگی

همبستگی نگار

هدف کلی

آشنایی با روشهای توصیفی تحلیل سریهای زمانی.

هدفهای رفتاری

پس از مطالعهٔ این فصل می‌توانید:

- اهداف تحلیل یک سری زمانی را بیان کنید،
- هدف از تحلیل یک سری زمانی را در موارد مختلف تشخیص دهید،
- روشهای توصیفی تحلیل سریهای زمانی را بیان کنید،
- سری زمانی مانا را تعریف کنید،
- با استفاده از نمودار حاصل از داده‌ها تبدیل مناسبی را برای داده‌ها بیابید،
- تبدیلهای مناسب را برای پایدار کردن واریانس و جمعی کردن اثرهای فصلی استفاده کنید،

- به داده‌های غیرفصلی که شامل یک روند سالانه‌اند منحنی مناسبی را برازش دهید،
- از صافیهای خطی برای بررسی روند سری زمانی استفاده کنید،
- صافی تفاضلی کردن را برای مانا کردن سریهای زمانی به کار برید،
- صافی مناسبی برای حذف تغییرات فصلی به کار برید،
- ضریب خودهمبستگی را تعریف کنید،
- ضریب خودهمبستگی بین مشاهدات را به دست آورید،
- نمودار همبستگی نگار را رسم کنید،
- با استفاده از نمودار همبستگی نگار، سری تصادفی، سری با همبستگی کوتاه‌مدت، سری متناوب و سری نامانا را تشخیص دهید و تعبیر و تفسیر کنید،

رسم نمودار سری زمانی

اولین مرحله در تحلیل مجموعه‌ای از داده‌ها این است که نمودار مشاهدات را نسبت به زمان رسم کنیم. این کار اغلب مهمترین خواص یک سری زمانی مانند روند، تغییرات فصلی، ناپیوستگیها و مشاهدات دورافتاده را آشکار می‌سازد. رسم نمودار زمانی داده‌ها به آن سهولت که به نظر می‌رسد نیست. انتخاب مقیاسها، اندازهٔ عرض از مبدأ و نحوهٔ مشخص کردن داده‌ها ممکن است به‌طور اساسی تلقی شخصی از سری زمانی را تحت تأثیر قرار دهد و لذا تحلیل‌گر باید قضاوت دقیق را با تمرین فراگیرد.

تبدیلها

گاهی نمودار حاصل از داده‌ها تبدیلهای مناسبی را پیشنهاد می‌کنند. دلایل مختلف برای استفاده از این تبدیلها مانند لگاریتم یا ریشهٔ دوم عبارتند از:

الف) پایدار کردن واریانس:

ب) جمعی کردن اثرهای فصلی:

الف) پایدار کردن واریانس: اگر در سری روند وجود داشته باشد و به نظر برسد که با افزایش میانگین واریانس زیاد می‌شود، تبدیل داده‌ها توصیه می‌شود. بخصوص اگر انحراف معیار با میانگین نسبت مستقیم داشته باشد یک تبدیل لگاریتمی مناسب است.

ب) جمعی کردن اثرهای فصلی: اگر در سری، روند وجود داشته باشد و به نظر برسد که اثرهای فصلی با میانگین افزایش پیدا می‌کند، باید از تبدیلی استفاده کنیم که اثر فصلی را به صورت ثابت درآورد. بخصوص اگر اثر فصلی با میانگین نسبت مستقیم داشته باشد در آن صورت اثر فصلی را ضربی گوییم و با یک تبدیل لگاریتمی این اثر به صورت جمعی درمی‌آید

سه الگوی فصلی که معمولاً به کار برده می‌شود عبارت‌اند از:

$$X_t = m_t + S_t + \varepsilon_t \qquad \text{(الف)}$$

$$X_t = m_t S_t + \varepsilon_t \qquad \text{(ب)}$$

$$X_t = m_t S_t \varepsilon_t \qquad \text{(ج)}$$

که در آنها X_t مقدار مشاهده در زمان t، m_t میانگین، S_t اثر فصلی و ε_t خطای تصادفی است. الگوی (الف) کاملاً جمعی است و احتیاج به تبدیل ندارد. الگوی (ج) کاملاً ضربی است و به وضوح یک تبدیل لگاریتمی مناسب است. الگوی (ب) دارای مؤلفهٔ فصلی ضربی و خطای جمعی است. اندازهٔ نسبی این اثرها تبدیل مطلوب را تعیین می‌کند.

برازش منحنی

به داده‌های غیرفصلی که شامل یک روند سالانه‌اند می‌توان یک منحنی ساده مانند چندجمله‌ای (خطی، درجه دو، درجه سه و غیره)، یک منحنی گمپرتز یا یک منحنی لجستیک برازش داد. منحنی گمپرتز با معادلهٔ زیر تعریف می‌شود.

$$Log X_t = a - br^t$$

که در آن a، b و r پارامترند و $0 < r < 1$. منحنی لجستیک با معادلهٔ زیر تعریف می‌شود.

$$X_t = \frac{a}{1 + be^{-ct}}$$

این دو منحنی به شکل S هستند و اگر $t \to \infty$ به یک مقدار مجانبی میل می‌کنند. تابعی که برازش داده شده است مقدار روند را مشخص می‌سازد و مانده‌ها تفاوت بین مشاهدات و این مقادیر روند هستند که برآورد نوسانات موضعی را نشان می‌دهند.

تبصره: منحنی مناسب با توجه به نمودار داده‌های سری زمانی انتخاب می‌شود. به‌خصوص اگر شکل نمودار شبیه S باشد منحنی لجستیک یا گمپرتز برازش داده می‌شود.

صافی کردن

روش دیگر برای بررسی روند یک سری زمانی استفاده از یک «صافی خطی» است که سری زمانی $\{X_t\}$ را به یک سری زمانی $\{Y_t\}$ تبدیل می‌کند. (به فصل اول مراجعه شود)

$$Y_t = \sum_{r=-q}^{q} a_r X_{t+r}$$

که در آن دنبالهٔ $\{a_r\}$ مجموعه وزنهایی است که به مشاهدات سری زمانی داده می‌شود.

برای برآورد میانگین و هموار کردن نوسانات موضعی واضح است که باید وزنها را طوری انتخاب کنیم که $\Sigma_r a_r = 1$ که اغلب آن را «میانگین متحرک» می‌نامند.

میانگینهای متحرک اغلب متقارن اختیار می‌شوند یعنی $s = q$ و $a_{-j} = a_j$ ساده‌ترین مثال از یک صافی متقارن میانگین متحرک ساده است که در آن

$$r = -q, -q+1, \ldots, +q \quad , \quad a_r = \frac{1}{2q+1}$$

عملگر پسرو و تفاضلی کردن

عملگر پسرو که به B نشان داده می‌شد روی شاخص زمانی عمل کرده و آن را به اندازهٔ یک واحد زمانی عقب می‌برد و سری جدیدی را حاصل می‌کند. بخصوص اگر $\{X_t\}$ یک سری زمانی باشد داریم

$$B X_t = X_{t-1}$$

$$B^2(X_t) = X_{t-2}$$

به‌طور کلی برای هر عدد درست m داریم

$$B^m(X_t) = X_{t-m}$$

عملگر پسرو به صورت خطی عمل می‌کند، زیرا برای ثابتهای a، b، c و سریهای X_t و Y_t به‌آسانی می‌توان نوشت

$$B(aX_t + bY_t + c) = a[B(X_t)] + b[B(Y_t)] + c$$

تفاضلی کردن

یک صافی خاص که بخصوص برای حذف روند مفید است، عبارت از **تفاضلی کردن** سریهای زمانی است تا وقتی مانا شوند.

برای داده‌های غیرفصلی معمولاً تفاضلی کردن مرتبهٔ اول کافی خواهد بود. عمل تفاضلی کردن در ضمیمهٔ الف به تفصیل شرح داده شده است. در اینجا با توجه به سری زمانی $X_1, X_2, \dots, X_N$ سری جدید تفاضلی‌شده را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$Y_t = X_{t+1} - X_t = \nabla X_{t+1}$$

گاهی تفاضلی کردن مرتبهٔ دوم لازم می‌شودکه آن را به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$\nabla^2 X_{t+2} = \nabla X_{t+2} - \nabla X_{t+1} = (X_{t+2} - X_{t+1}) - (X_{t+1} - X_t) = X_{t+2} - 2X_{t+1} + X_t$$

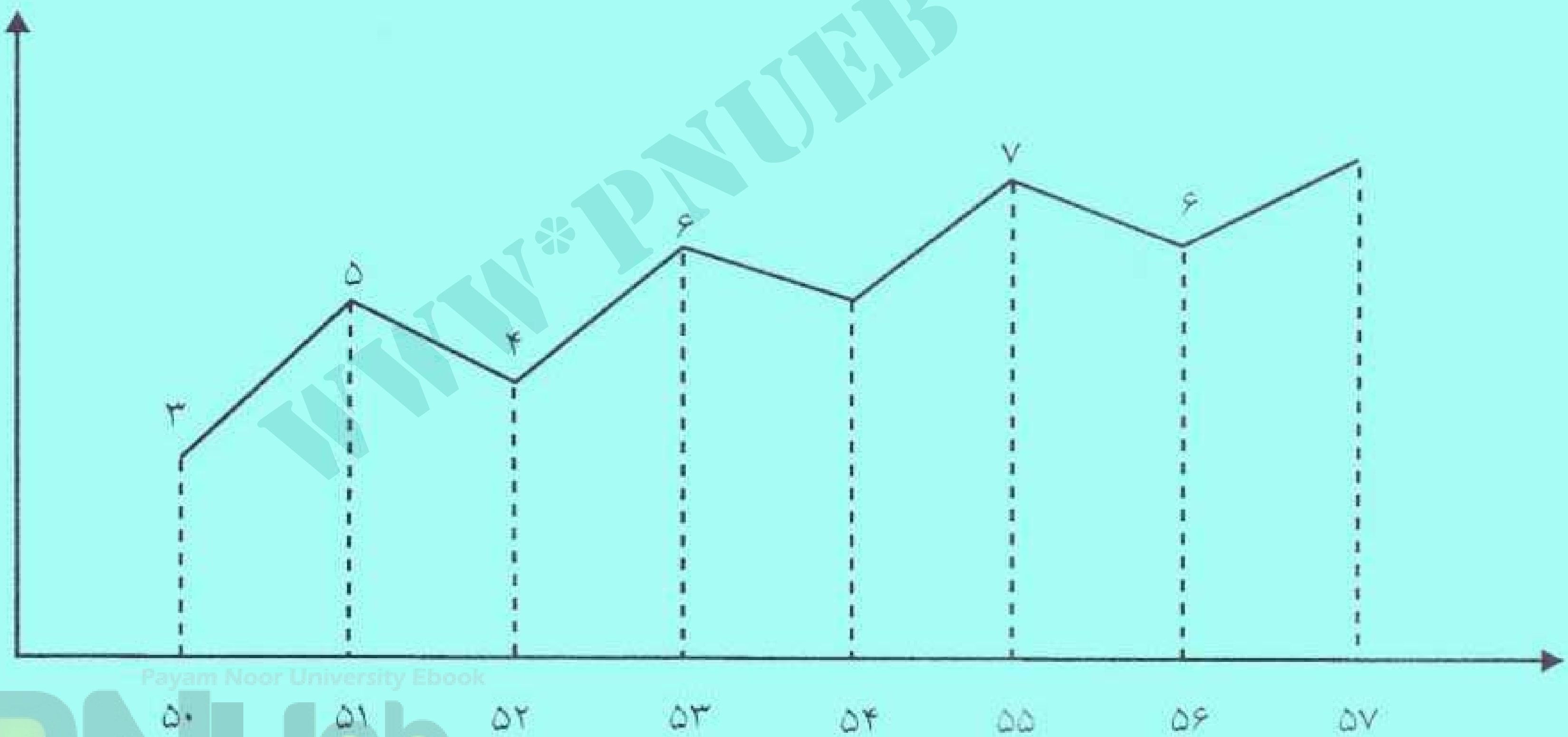
مثال

مثال

سری زمانی زیر را رسم کنید. سری حاصل از تفاضلی کردن مرتبهٔ اول و دوم را نیز محاسبه کنید.

حل:

t	۱۳۵۰	۵۱	۵۲	۵۳	۵۴	۵۵	۵۶	۱۳۵۷
X_t	۳	۵	۴	۶	۵	۷	۶	۸



حـل: سری حاصل از تفاضلی کردن مرتبهٔ اول: اگر مشاهدات را به ترتیب

با $X_۱$، $X_۲$، ...، $X_۹$ نشان دهیم

$$Y_t = \nabla X_{t+۱} = X_{t+۱} - X_t$$

$$Y_۱ = \nabla X_۲ = X_۲ - X_۱ = ۵ - ۳ = ۲$$

$$Y_۲ = \nabla X_۳ = X_۳ - X_۲ = ۴ - ۵ = -۱$$

$$Y_۳ = \nabla X_۴ = X_۴ - X_۳ = ۶ - ۴ = ۲$$

$$Y_۴ = \nabla X_۵ = X_۵ - X_۴ = ۵ - ۶ = -۱$$

$$Y_۵ = \nabla X_۶ = X_۶ - X_۵ = ۷ - ۵ = ۲$$

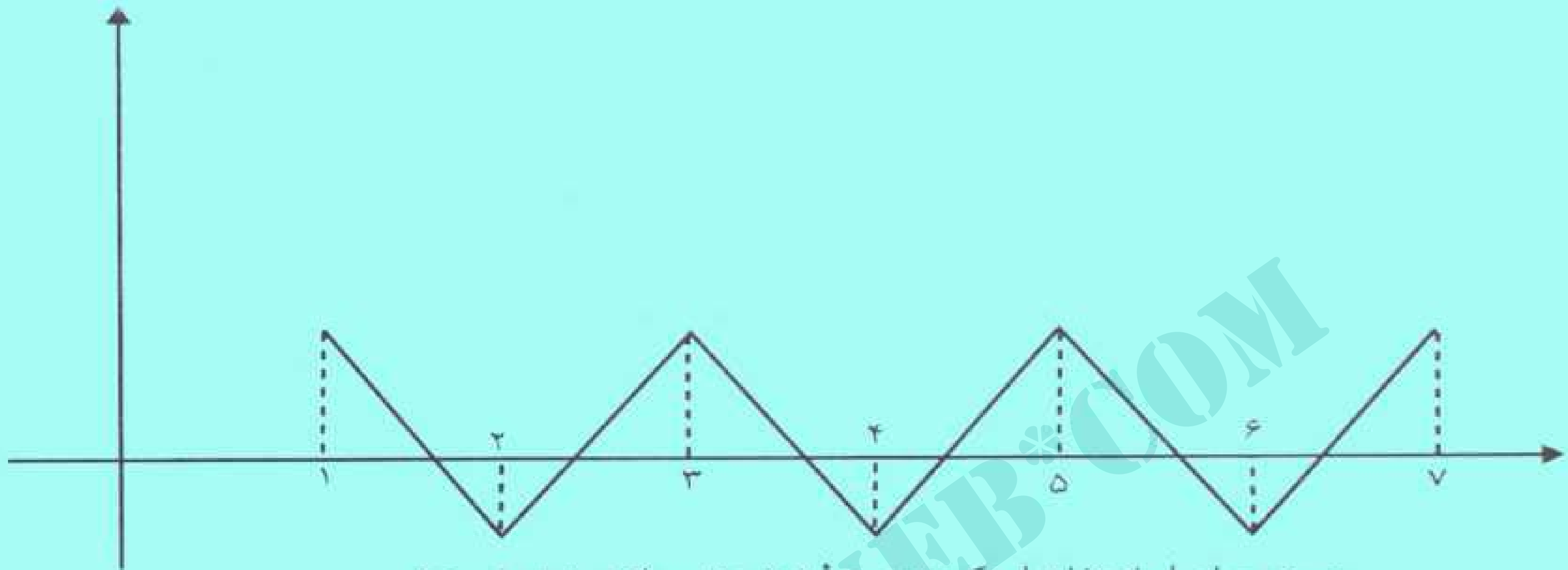
$$Y_۶ = \nabla X_۷ = X_۷ - X_۶ = ۶ - ۷ = -۱$$

$$Y_۷ = \nabla X_۸ = X_۸ - X_۷ = ۸ - ۶ = ۲$$

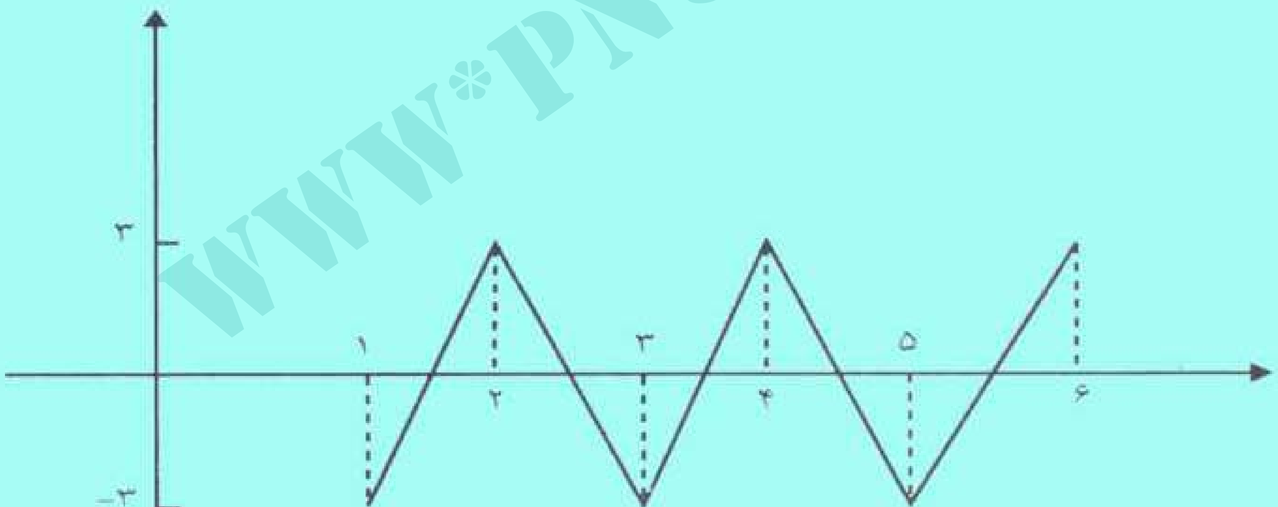
شکل

به همین ترتیب می‌توان سری حاصل از تفاضلی کردن مرتبهٔ ۲ را به دست آورد

$$Y_۱ = -۳ \quad Y_۲ = ۳ \quad Y_۳ = -۳ \quad Y_۴ = ۳ \quad Y_۵ = -۳ \quad Y_۶ = ۳$$



سری حاصل از تفاضلی کردن مرتبهٔ ۱ (روند حذف شده است)



سری حاصل از تفاضلی کردن مرتبهٔ ۲ (روند حذف شده است)

حذف تغییرات فصلی

برای حذف تغییرات فصلی از داده‌های ماهانه معمولاً از یک صافی به صورت زیر استفاده می‌کنیم.

$$Y_t = \frac{\frac{۱}{۲}X_{t-۶} + X_{t-۵} + \cdots + \frac{۱}{۲}X_{t+۶}}{۱۲}$$

و برای داده‌های ۳ ماهه از یک صافی به صورت زیر استفاده می‌کنیم.

$$Y_t = \frac{\frac{۱}{۲}X_{t-۲} + X_{t-۱} + \cdots + \frac{۱}{۲}X_{t+۲}}{۴}$$

اثر فصلی را می‌توان با تفاضلی کردن نیز حذف کرد. مثلاً اگر داده‌ها ماهانه باشد از عملگر $\nabla_{۱۲}$ استفاده می‌شود که تعریف آن به صورت زیر است:

$$\nabla_{۱۲} X_t = X_t - X_{t-۱۲}$$

خود همبستگی

تعریف خود همبستگی

تعریف ضریب خود همبستگی

مثال

خودهمبستگی

قبلاً با ضریب همبستگی دو متغیر X و Y آشنا شده‌اید. اگر (X_1,Y_1)، (X_2,Y_2)، ...، (X_N,Y_N)، N جفت مشاهده باشد ضریب همبستگی r به صورت زیر تعریف می‌شود

$$r=\frac{\sum(X_i-\bar{X})(Y_i-\bar{Y})}{\sqrt{\sum(X_i-\bar{X})^2\sum(Y_i-\bar{Y})^2}}$$

برای آن که ببینیم مشاهدات متوالی یک سری زمانی همبسته‌اند می‌توانیم از ایدهٔ بالا استفاده کنیم.

ضریب خودهمبستگی

ضریب خودهمبستگی بین مشاهداتی را که از هم به فاصلهٔ k قرار دارند به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$r_k = \frac{\sum_{1}^{N-k} (X_t - \bar{X})(X_{t+k} - \bar{X})}{\sum_{1}^{N} (X_t - \bar{X})^2}, \qquad k = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

که آن را همبستگی با تأخیر k نامند.

در عمل ضرایب خودهمبستگی را با محاسبهٔ ضرایب اتوکوواریانس، C_kها به دست می‌آوریم که در مقایسه با فرمول کوواریانس به صورت زیر تعریف می‌شود

$$C_K = \frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N-K}(X_t - \bar{X})(X_{t+k} - \bar{X}) \quad , \quad K \geq ۰$$

در این صورت با توجه به تعریف r_k داریم

$$r_k = \frac{C_k}{C_۰} \quad , \quad k = ۰, ۱, ۲, \ldots$$

معمولاً برای مقادیر k بزرگتر از $\frac{N}{۴}$ نباید r_kها را محاسبه کرد. (زیرا در این صورت خیلی از اطلاعات سری زمانی را از دست می‌دهیم.)

مثال

مثال

۵۰ مشاهدهٔ یک سری زمانی در جدول زیر داده شده‌اند.

الف) مقدار r_1 را با استفاده از ۸ مشاهدهٔ اول حساب کنید. ب) به منظور به دست آوردن $r_1, r_2, \ldots, r_{12}$ برای ۵۰ مشاهده، یک برنامهٔ کامپیوتری بنویسید و مقادیر مطلوب را حساب کنید.

t	X_t									
۱ - ۱۰	۲۸۹	۲۸۵	۲۸۹	۲۸۶	۲۸۸	۲۸۷	۲۸۸	۲۹۲	۲۹۱	۲۹۱
۱۱ - ۲۰	۲۹۲	۲۹۶	۲۹۷	۳۰۱	۳۰۴	۳۰۴	۳۰۳	۳۰۷	۲۹۹	۲۹۶
۲۱ - ۳۰	۲۹۳	۳۰۱	۲۹۳	۳۰۱	۲۹۵	۲۸۴	۲۸۶	۲۸۶	۲۸۷	۲۸۴
۳۱ - ۴۰	۲۸۲	۲۷۸	۲۸۱	۲۷۸	۲۷۷	۲۷۹	۲۷۸	۲۷۰	۲۶۸	۲۷۲
۴۱ - ۵۰	۲۷۳	۲۷۹	۲۷۳	۲۸۰	۲۷۵	۲۷۱	۲۷۷	۲۷۸	۲۷۹	۲۸۳

حل:

حل: الف)

$$\bar{X} = ۲۸۸ + \frac{۱}{۸}(۱ - ۳ + ۱ - ۲ + ۰ - ۱ + ۰ + ۴) = ۲۸۸$$

$$C_۰ = \frac{۱}{۸}(۱ + ۹ + ... + ۱۶) = ۴$$

$$C_۱ = \frac{۱}{۸}(-۳ - ۳ - ... + ۰) = -۱$$

در نتیجه

$$r_۱ = \frac{C_۱}{C_۰} = -۰/۲۵$$

ب) حال با نوشتن برنامهٔ کامپیوتری و محاسبهٔ r_i برای ۵۰ مشاهدهٔ سری زمانی جدول زیر به‌دست می‌آید

K	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲
r_k	۰/۸۴	۰/۷۳	۰/۴۱	۰/۵۴	۰/۴۷	۰/۴۶	۰/۳۸	۰/۲۹	۰/۱۷	۰/۵	۰/۰۴	-۰/۰۱

همبستگی نگار

برای تعبیر و تفسیر سری زمانی، نمودار مجموعه‌ای از ضرایب خودهمبستگی را رسم می‌کنیم که آن را **همبستگی نگار** می‌نامند. برای این کار مقادیر k را روی محور xها و مقادیر r_kها را در مقابل آنها رسم می‌کنیم. معمولاً بررسی حالات زیر پیشنهاد می‌شود.

۱- سری تصادفی

۲- همبستگی کوتاه‌مدت

۳- سری متناوب

۴- سری نامانا

۱- سری تصادفی

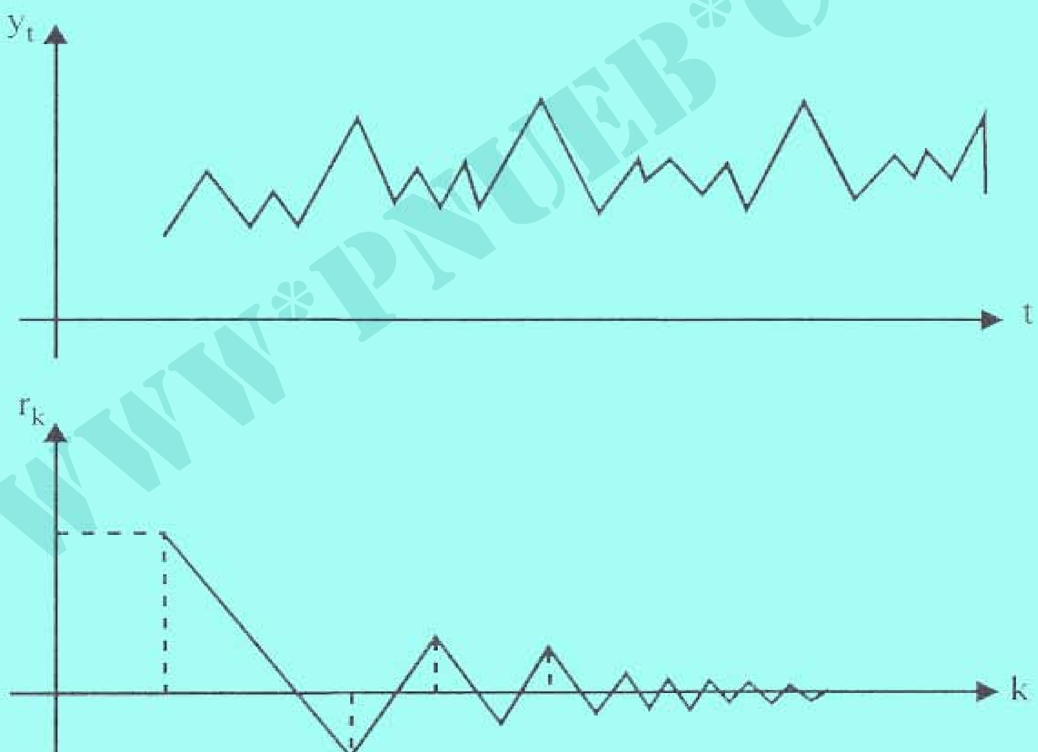
اگر یک سری زمانی کاملاً تصادفی باشد، آنگاه به ازای مقادیر بزرگ N و تمام مقادیر $k \neq ۰$ داریم

$$r_k = ۰$$

در واقع ثابت می‌شود که توزیع متغیر تصادفی r_k تقریباً به صورت $N(۰ , ۱/N)$ است. بنابراین، اگر یک سری زمانی تصادفی باشد انتظار داریم که ۱۹ مقدار از ۲۰ مقدار r_k در فاصلهٔ $\pm \frac{۲}{\sqrt{N}}$ قرار گیرد (با احتمال ۹۵٪). یعنی اگر ۲۰ مقدار اولیهٔ r_k را رسم کنیم انتظار داریم به‌طور متوسط یک مقدار معنی‌دار وجود داشته باشد حتی اگر سری زمانی واقعاً تصادفی باشد.

۲ ـ همبستگی کوتاه‌مدت

سریهای مانا اغلب همبستگی کوتاه‌مدت را نشان می‌دهند ،که به وسیلهٔ یک مقدار نسبتاً بزرگ r_1 و دو یا سه مقدار معنی‌دار دیگر r که به ترتیب کوچک می‌شوند مشخص می‌شود. برای تأخیرهای بزرگتر، مقادیر r_k تقریباً به صفر میل می‌کند. برای روشن شدن مطلب به شکل سری زمانی و همبستگی نگار متناظر آن توجه کنید.



سری زمانی، همبستگی کوتاه‌مدت را نشان می‌دهد.

۳ـ سری متناوب

اگر یک سری زمانی در دو طرف میانگین به تناوب نوسان کند آن را سری متناوب می‌گویند و در این صورت همبستگی نگار نیز متناوب خواهد بود.

۴- سری نامانا

اگر سری زمانی دارای روند باشد مقادیر r_k نزولی نخواهد بود، مگر بـه ازای مـقادیر بـزرگ k دلیلش این است که مشاهده‌ای واقع در یک طرف میانگین کل باعث می‌شود که تعداد زیادی مشاهدات واقع در همان طرف میانگین به علت وجود روند قرار گیرند.

فصل سوم

آشنایی با مفاهیم بنیادی

فصل سوم : آشنایی با مفاهیم بنیادی

- اهداف فصل
- تعریف مانای اکید
- تعریف مانای ضعیف
- تعریف تابع اتوکواریانس
- خواص توابع اتوکواریانس وهمبستگی
- تابع مشخصه
- تابع خود همبستگی جزئی
- برآورد توابع خود همبستگی

هدف کلی

آشنایی با توابع اتوکوواریانس و خودهمبستگی و خواص آنها.

هدفهای رفتاری

پس از مطالعهٔ این فصل می‌توانید:

- تابع توزیع توأم سری زمانی $\{X_t : t \in T\}$را تعریف کنید،
- شرایط مانایی اکید را برای یک سری زمانی بررسی کنید،
- شرایط مانایی ضعیف را برای یک سری زمانی بررسی کنید،
- تابع اتوکوواریانس و تابع خودهمبستگی را برای یک سری زمانی مانا به دست آورید،
- خواص تابع اتوکوواریانس و خودهمبستگی را بیان و ثابت کنید،
- ارتباط بین تابع مشخصه، تابع خودهمبستگی و تابع توزیع یک سری زمانی مانا را بنویسید،
- ماتریس خودهمبستگی را برای یک سری مانا بنویسید،
- خواص ماتریس خودهمبستگی را بیان و اثبات کنید،
- توابع خودهمبستگی را برآورد کنید،

تعریف

سری زمانی $\{X_t : t \in T\}$ را مانای اکید گوییم اگر

$$F_{X_{t_1} \dots X_{t_n}}(x_{t_1}, \dots, x_{t_n}) = F_{X_{t_1+k} \dots X_{t_n+k}}(x_{t_1}, \dots, x_{t_n})$$

به ازای هر مجموعه از اندیسهای $(t_1, \dots, t_n)$ و $(t_1 + k, \dots, t_n + k)$ متعلق به T و تمام $(x_{t_1}, \dots, x_{t_n})$ متعلق به حوزهٔ مقادیر متغیر تصادفی X_t برقرار باشد.

بخصوص به ازای $n = 1$ و هر k داریم

$$F_{X_{t_1}}(x_{t_1}) = F_{X_{t_1+k}}(x_{t_1})$$

یعنی تابع توزیع در هر نقطه مجموعهٔ اندیس‌گذار یکسان است. در نتیجه تمام X_tها هم‌توزیع‌اند.

اگر سری $\{X_t, t \in T\}$ اکیداً مانا باشد و $E(X_t) < \infty$، آنگاه میانگین X_t به ازای هر مقدار t

ثابت است است زیرا تابع توزیع آن به ازای تمام tها یکسان است.

$$E(X_t) = \mu \quad , \quad \forall t \in T$$

همین‌طور اگر $EX_t^2 < \infty$ واریانس X_tها به ازای هر t ثابت خواهد بود،

$$V(X_t) = \sigma^2 \quad , \quad \forall t \in T$$

اگر به ازای هر مجموعهٔ متناهی از متغیرهای $(X_{t_1}, \dots, X_{t_n})$ تابع توزیع توأم آنها معلوم باشد، سری زمانی از نظر احتمال کاملاً معین است. ولی در بیشتر کاربردها تابع توزیع مجهول است. در این صورت مشخصات لازم سری زمانی را به کمک دو گشتاور اول و دوم به دست می‌آوریم.

تعریف

سری زمانی $\{X_t, t \in T\}$ را مانای ضعیف گوییم اگر

۱ ـ میانگین X_t به t بستگی نداشته باشد، $EX_t = \mu$.

۲ ـ ماتریس کوواریانس $(X_{t_1}, \dots, X_{t_n})$ با ماتریس کوواریانس $(X_{t_1+k}, \dots, X_{t_n+k})$ به‌ازای هر مجموعهٔ $(t_1, \dots, t_n)$ از مجموعهٔ اندیس‌گذار و هر n برابر باشد.

چون میانگین X_t ثابت است می‌توان آن را برابر صفر فرض کرد. همچنین ماتریس کوواریانس تابعی از فاصلهٔ بین مشاهدات است. یعنی کوواریانس X_{t+k} و X_t فقط به k بستگی دارد و می‌توان نوشت

$$\operatorname{cov}(X_t, X_{t+k}) = E(X_t . X_{t+k}) = \gamma(k)$$

تعریف

تابع $\gamma(k)$ را تابع اتوکوواریانس سری $\{X_t\}$ نامند و آن را با نماد اختصاری $acv.f$ نشان می‌دهند.

معمولاً برای مقایسهٔ خواص اساسی سریهای زمانی اغلب مفید است تابعی داشته باشیم که از واحد اندازه‌گیری مستقل باشد. برای این منظور تابع خودهمبستگی را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$\rho(k) = \frac{\gamma(k)}{\gamma(0)}$$

و آن را با نماد اختصاری $ac.f$ نشان می‌دهند. همان‌طور که ملاحظه می‌شود مقدار $\rho(k)$ در نقطهٔ $k = 0$ برابر ۱ است.

خواص توابع اتوکوواریانس و خودهمبستگی

تعریف. تابع $f(n)$ را **نیمه معین مثبت** گوییم اگر به ازای هر مجموعه از اعداد حقیقی $(a_1, \dots, a_n)$ و $(t_1, \dots, t_n)$ داشته باشیم

$$\sum\sum a_i a_j f(t_i - t_j) \geq 0$$

الف) تابع اتوکوواریانس یک سری زمانی مانا نیمه معیّن مثبت است.

ب) همواره داریم $|\rho(k)| \leq 1$

ج) تابع اتوکوواریانس یک سری زمانی حقیقی مانا، زوج است. یعنی

$$\gamma(k) = \gamma(-k)$$

قضیه

تابع اتوکوواریانس یک سری زمانی مانا نیمه معیّن مثبت است.

برهان: وقتی که $EX_t = 0$ ، $(t_1, \dots, t_n) \in T$ اگر $\gamma(t_i - t_j)$ تابع اتوکواریانس X_{t_i}، X_{t_j} باشد آنگاه

$$0 \le V\left[\sum a_i X_{t_i}\right] = E\left\{\sum_i \sum_j a_i a_j X_{t_i} X_{t_j}\right\}$$

$$= \sum_i \sum_j a_i a_j E X_{t_i} X_{t_j} = \sum_i \sum_j a_i a_j \gamma(t_i - t_j)$$

نتیجه

همواره داریم $|\rho(k)| \leq ۱$

برهان: به ازای $n = ۲$ رابطهٔ $\sum_i \sum_j a_i a_j \gamma(t_i - t_j) \geq ۰$

را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$۰ \leq a_۱^۲ \gamma(۰) + a_۲^۲ \gamma(۰) + ۲ a_۱ a_۲ \gamma(t_۱ - t_۲)$$

$$\frac{۱}{۲}(a_۱^۲ + a_۲^۲) \geq -a_۱ a_۲ \frac{\gamma(t_۱ - t_۲)}{\gamma(۰)}$$

که به ازای $t_۱ - t_۲ = k$ و $a_۱ = a_۲ = ۱$ نتیجه می‌شود $\rho(k) \geq -۱$ و به ازای $-a_۱ = a_۲ = ۱$ نتیجه می‌شود

$$\rho(k) \leq ۱$$

قضیه

تابع اتوکوواریانس یک سری زمانی حقیقی مانا، زوج است. یعنی

$$\gamma(k) = \gamma(-k)$$

برهان: فرض کنید $EX_t = 0$، از مانایی سری زمانی نتیجه می‌شود

$$E(X_t, X_{t+h}) = \gamma(h), \forall t, t+h \in T$$

یا

$$\gamma(-h) = E(X_t X_{t-h})$$

حال با تبدیل t به $t+h$ نتیجه می‌شود

$$\gamma(-h) = E(X_{t+h}, X_t) = E(X_t X_{t+h}) = \gamma(h)$$

تابع مشخصه

اگر $G(x)$ تابع توزیع یک متغیر تصادفی X باشد تابع

$$\phi(h) = \int e^{ixh} dG(x)$$

را تابع مشخصه X می‌نامند که در آن

$$e^{ixh} = \cos xh + i \sin xh$$

به آسانی دیده می‌شود تابع $\phi(h)$ دارای خواص زیر است:

الف) $\phi(۰) = ۱$

ب) همواره $|\phi(h)| \leq ۱$

ج) تابع ϕ پیوسته یکنواخت است.

تابع خود همبستگی جزئی

تعریف ماتریس خودهمبستگی

قضیه

تعریف تابع خود همبستگی جزئی

ماتریس خودهمبستگی

ماتریس خودهمبستگی برای یک سری مانا به طول N به صورت زیر تعریف می‌شود

$$P_N = \begin{bmatrix} ۱ & \rho_۱ & \rho_۲ & \cdots & \rho_{N-۱} \\ \rho_۱ & ۱ & \rho_۱ & \cdots & \rho_{N-۲} \\ . & . & . & \cdots & . \\ . & . & . & \cdots & . \\ \rho_{N-۱} & . & . & \cdots & ۱ \end{bmatrix}$$

که در آن سطر اول به صورت زیر نوشته می‌شود

$$\rho(۱,k)\ ,\ k=۱,\ldots,N\ ,\ \rho(۱,۱)=\rho_{۱۱}=\frac{\gamma(۰)}{\gamma(۰)}=۱\ ,\ \rho(۱,۲)=\rho_{۱۲}=\frac{\gamma(۱)}{\gamma(۰)}=\rho_۱,\ldots$$

سطر دوم با محاسبهٔ $\rho(۲,k)$، ...، سطر آخر با محاسبهٔ $\rho(N,K)$ به دست می‌آید.

قضیه

ماتریس خودهمبستگی معین مثبت است.

برهان: به ازای هر مجموعه از اعداد λ_1، λ_2، ...، λ_N که همه صفر نباشند می‌نویسیم

$$Y_t = \lambda_1 X_{t_1} + \cdots + \lambda_N X_{t_N} = \lambda' \mathbf{X_t}$$

که در آن λ' یک بردار سطری و X_t یک بردار ستونی است.

واریانس این متغیر که در ضمن منفی نخواهد بود عبارت است از

$$0 \le V((Y_t) = V(\lambda' X_t') = \lambda' V(X_t)\lambda = \lambda' P_N \lambda \sigma_{x_t}^2$$

چون σ^2 مثبت است داریم $\lambda' P_N \lambda > 0$ یعنی P_N معیّن مثبت است.

تابع خودهمبستگی جزئی

وسیلهٔ مهم دیگری برای مطالعهٔ سریهای زمانی تابع خودهمبستگی جزئی است که آن را با نماد اختصاری $(pac.f)$ نشان می‌دهیم.

ماتریس خودهمبستگی برای یک سری مانا به طول K به صورت زیر تعریف می‌شود

$$P_k = \begin{bmatrix} ۱ & \rho_۱ & \rho_۲ & \cdots & \rho_{k-۱} \\ \rho_۱ & ۱ & \rho_۱ & \cdots & \rho_{k-۲} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \rho_{k-۱} & \cdot & \cdot & \cdots & ۱ \end{bmatrix}$$

حال می‌توانیم تابع خودهمبستگی جزئی با تأخیر K را به صورت زیر تعریف کنیم

$$\varphi_{kk} = \frac{|P_k^*|}{|P_k|}$$

که در آن P_k ماتریس خودهمبستگی $K \times K$ و P_k^* همان ماتریس قبلی است که ستون آخر آن با بردار $(\rho_۱, \rho_۲, \ldots, \rho_k)'$ عوض می‌شود.

برآورد توابع خودهمبستگی

فرض کنید سری زمانی $X_{t_1}, \dots, X_{t_N}$ داده شده است. ابتدا مقادیر زیر را به کمک این نمونه محاسبه می‌کنیم

$$\hat{\mu} = \bar{X}_t = \frac{1}{N}\sum_{v=1}^{N} X_{t_v}$$

$$\hat{\gamma}(k) = C_k = \frac{1}{N}\sum_{t=K+1}^{N} (X_t - \bar{X}_t)(X_{t-k} - \bar{X}_t)$$

$$= \frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N-k} (X_t - \bar{X}_t)(X_{t+k} - \bar{X}_t)$$

برای $K = 0$ داریم

$$\hat{\gamma}(0) = C_0 = \frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N} (X_t - \bar{X}_t)^2$$

$$\hat{\rho} = \frac{C_k}{C_0} = \frac{\hat{\gamma}(k)}{\hat{\gamma}(0)}$$

فصل چهارم

فرآیند های تصادفی و الگوهای سری زمانی مانا

فصل چهارم : فرآیند های تصادفی والگوهای سری زمانی مانا

اهداف فصل

فرآیند تصادفی محض

فرآیند قدم زدن تصادفی

فرآیندهای اتورگرسیو

معادلات یول واکر

فرآیند های میانگین متحرک

نمایش سری زمانی به صورت فرآیند میانگین متحرک اتورگرسیو

دوگانگی بین فرآیند میانگین متحرک و اتورگرسیو

فرآیندهای اتورگرسیو میانگین متحرک

هدف کلی

معرفی الگوهای سری زمانی مانا

هدفهای رفتاری

پس از مطالعهٔ این فصل می‌توانید:

ـ فرآیند تصادفی محض را تعریف کنید،

ـ فرآیند قدم زدن تصادفی را تعریف و شرط مانایی آن را بیان کنید،

ـ فرآیند اتورگرسیو مرتبهٔ p، $AR(p)$ را تعریف و شرط مانایی آن را بیان کنید،

ـ فرآیند اتورگرسیو مرتبهٔ اول، $AR(1)$ را تعریف و تابع اتوکوواریانس، خودهمبستگی میانگین و واریانس آن را به دست آورید،

ـ تابع خودهمبستگی جزئی فرآیند $AR(1)$ را به دست آورید،

- فرآیند اتورگرسیو مرتبهٔ دوم $AR(2)$ را تعریف و تابع اتوکوواریانس، خودهمبستگی و میانگین و واریانس آن را به دست اورید،
- تابع خودهمبستگی جزئی فرآیند $AR(2)$ را به دست آورید،
- تابع خودهمبستگی و خودهمبستگی جزئی و واریانس فرآیند $AR(p)$ را به دست آورید،
- فرآیندهای میانگین متحرک مرتبهٔ q، $MA(q)$ را تعریف کنید،
- تابع خودهمبستگی و خودهمبستگی جزئی را برای فرآیندهای $MA(1)$ و $MA(2)$ به دست آورید،
- تابع اتوکوواریانس و خودهمبستگی را برای فرآیند $MA(q)$ در حالت کلی به دست آورید،
- سری زمانی را به صورت فرآیند میانگین متحرک و اتورگرسیو نمایش دهید،
- موارد دوگانگی فرآیندهای AR و فرآیندهای MA را بنویسید و اثبات کنید،

فرآیند تصادفی محض

تعریف

هر فرآیند گسستهٔ $\{Z_t, t \in T\}$ را که به صورت دنباله‌ای از متغیرهای تصادفی ناهمبسته از توزیعی با میانگین ثابت $E(Z_t) = \mu_z$ (که معمولاً صفر فرض می‌شود)، با واریانس ثابت $\operatorname{var}(Z_t) = \sigma_z^2$ و تابع اتوکوواریانس $\gamma_k = \operatorname{cov}(Z_t, Z_{t-k}) = 0$ (به ازای $k \neq 0$) است یک **فرآیند تصادفی محض** می‌نامند. از این تعریف نتیجه می‌گیریم که فرآیند تصادفی محض $\{Z_t\}$ ماناست با تابع اتوکوواریانس

$$\gamma_k = \operatorname{cov}(Z_t, Z_{t-k}) = \begin{cases} \sigma_z^2 & k = 0 \\ 0 & k \neq 0 \end{cases}$$

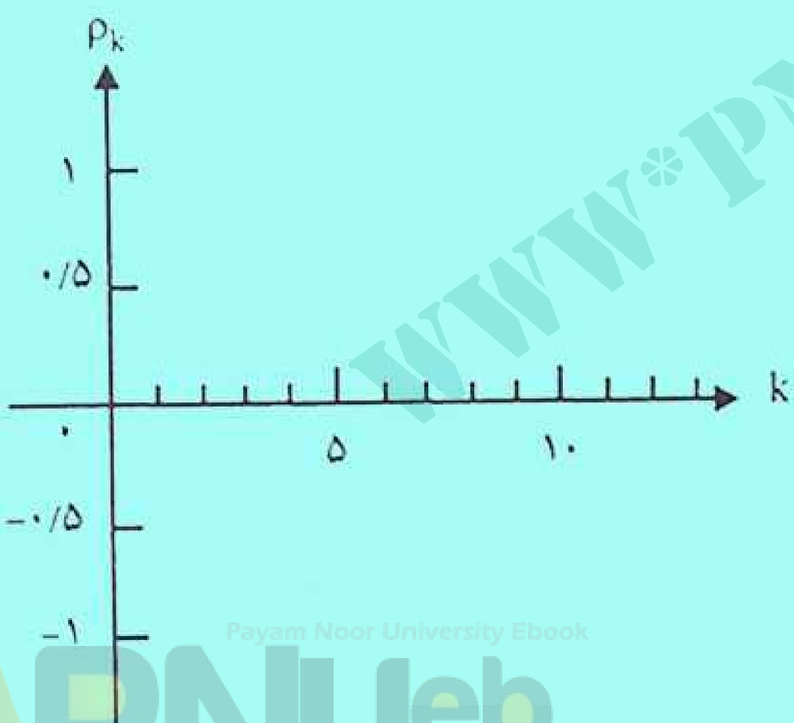
و تابع خودهمبستگی

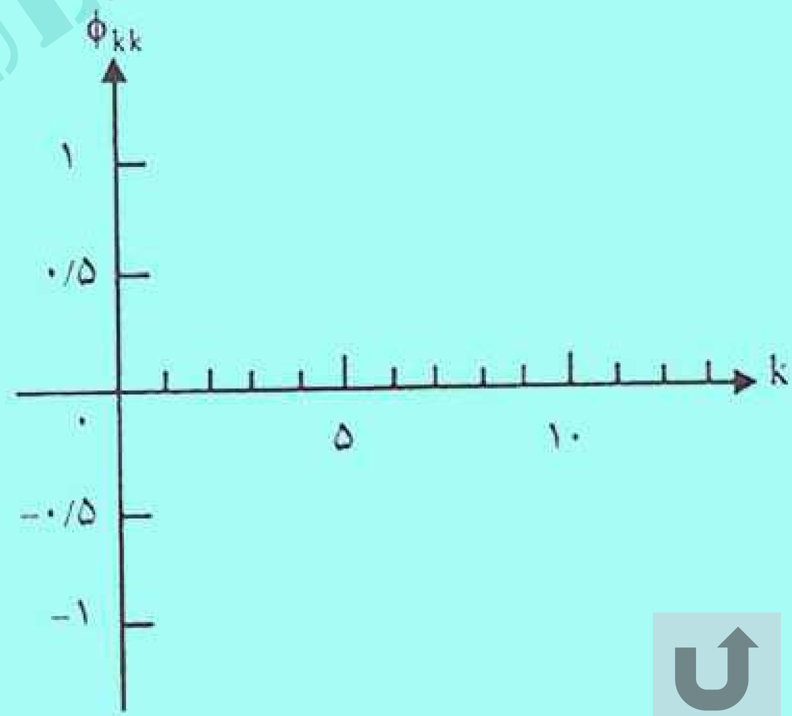
$$\rho_k = \frac{\gamma_k}{\gamma_0} = \begin{cases} 1 & k = 0 \\ 0 & k \neq 0 \end{cases}$$

و تابع خودهمبستگی جزئی

$$\phi_{kk} = \frac{|P_k^*|}{|P_k|} = \begin{cases} 1, & k = 0 \\ 0, & k \neq 0 \end{cases}$$

چون مطابق تعریف برای هر فرآیند داریم $\rho_0 = \phi_{00} = 1$ لذا وقتی دربارهٔ خودهمبستگی و خودهمبستگی جزئی صحبت می‌شود منظور مقادیر ρ_k، ϕ_{kk} برای $k \neq 0$ است. پدیدهٔ اصلی فرآیند اغتشاش این است که توابع خودهمبستگی و خودهمبستگی جزئی آن برابر صفر است. تابع خودهمبستگی $(ac.f)$ و تابع خودهمبستگی جزئی $(pac.f)$ یک فرآیند اغتشاش در شکل زیر نشان داده شده است





فرآیند قدم زدن تصادفی

فرآیند $\{X_t\}$ را فرآیند قدم زدن تصادفی گویند هرگاه

$$* \quad X_t = X_{t-1} + Z_t$$

که در آن $\{Z_t\}$ فرآیند تصادفی ناهمبسته محض با میانگین μ_Z و واریانس σ_Z^2 است و معمولاً وقتی $t = 0$ است فرآیند از صفر شروع می‌شود $(X_0 = 0)$ لذا با جایگذاریهای متوالی به جای X_{t-1}، X_{t-2}، ... در رابطه $(*)$ خواهیم داشت.

$$X_t = \sum_{i=1}^{t} Z_i$$

$$\operatorname{var}(X_t) = t\,\sigma_z^{۲}$$

و

$$E(X_t) = t\mu$$

لذا این فرآیند مانا نیست زیرا میانگین و واریانس آن با زمان تغییر می‌کند. اگر این فرآیند را یک بار تفاضلی کنیم نتیجه‌اش فرآیند تصادفی محض است که ماناست، یعنی داریم

$$Z_t = \nabla X_t = X_t - X_{t-۱}$$

قیمت سهام از معروفترین مثالهایی از سریهای زمانی است که رفتار آن بسیار شبیه قدم زدن تصادفی است.

خطای تصادفی + قیمت آن سهم در روز $(t - ۱)$ = قیمت هر سهم در روز t

فرآیند اتورگرسیو

تعریف فرآیند اتورگرسیو

فرآیند اتورگرسیو مرتبه اول

فرآیند اتورگرسیو مرتبه دوم

فرآیند اتورگرسیو مرتبه p

چند مثال حل شده

فرآیندهای اتورگرسیو

فرض می‌کنیم $\{Z_t\}$ یک فرآیند تصادفی محض با میانگین صفر و واریانس σ_Z^2 باشد، فرآیند $\{X_t\}$ را فرآیند اتورگرسیو مرتبهٔ p گویند هرگاه

$$X_t = \alpha_1 X_{t-1} + \alpha_2 X_{t-2} + \cdots + \alpha_p X_{t-p} + Z_t$$

اگر به مسئلهٔ رگرسیون فکر کنیم می‌بینیم که الگوی بالا در واقع یک الگوی رگرسیون چندگانه است با این تفاوت که در اینجا X_t روی متغیرهای مستقل رگرسیون نشده بلکه روی مقادیر گذشتهٔ X_t رگرسیون شده است و به این دلیل است که فرآیند $\{X_t\}$ را **اتورگرسیو** نامیده‌اند. یک

فرآیند اتورگرسیو مرتبهٔ p را با نماد اختصاری $AR(p)$ نمایش می‌دهند. این قبیل فرآیندها را یول در سال ۱۹۲۰ معرفی کرده است. این فرآیند همواره وارون‌پذیر است، یعنی همواره بدون گذاشتن شرط یا شرایطی روی α_iها می‌توان Z_t را به صورت یک ترکیب خطی موزون از مشاهدات حال و گذشتهٔ فرآیند نوشت. این فرآیند را با توجه عملگر انتقال پسرو می‌توان به‌صورت زیر نوشت

$$\phi(B)X_t = Z_t$$

که در آن

$$\phi(B) = 1 - \alpha_1 B - \alpha_2 B^2 - \cdots - \alpha_p B^P$$

ثابت می‌شود که برای مانایی فرآیند **اتورگرسیو** باید ریشه‌های $\phi(B) = 0$ از لحاظ قدر مطلق بزرگتر از واحد باشند (خارج دایرهٔ واحد باشند).

فرآیند اتورگرسیو مرتبه اول

فرآیند اتورگرسیو مرتبه اول

تابع خود همبستگی فرآیند اتورگرسیو مرتبه اول

میانگین و واریانس فرآیند اتورگرسیو مرتبه اول

تابع خود همبستگی جزئی فرآیند اتورگرسیو مرتبه اول

خلاصه

مثال

فرآیند اتورگرسیو مرتبهٔ اول $AR(1)$

اگر در فرآیند $AR(p)$ قرار دهیم $p = 1$، فرآیند $AR(1)$ حاصل می‌شود که به صورت زیر است

$$X_t = \alpha_1 X_{t-1} + Z_t$$

با استفاده از عملگر پسرو می‌توان نوشت

$$(1 - \alpha_1 B)X_t = Z_t$$

این فرآیند همواره وارون‌پذیر است، برای این که فرآیند مانا باشد باید ریشه‌های $1 - \alpha_1 B = 0$ از لحاظ قدر مطلق بزرگتر از واحد باشند که از آن $|\alpha_1| < 1$ نتیجه می‌شود. به دلیل این که مقدار X_t به‌طور کامل به وسیلهٔ X_{t-1} تعیین می‌شود، گاهی اوقات فرآیند $AR(1)$ را فرآیند مارکوف نیز می‌نامند.

تابع خودهمبستگی فرآیند $AR(1)$

اگر طرفین معادلهٔ $X_t = \alpha_1 X_{t-1} + Z_t$ را در X_{t-k} ضرب کنیم و امیدهای ریاضی جملات طرفین تساوی را به دست آوریم خواهیم داشت.

$$E(X_{t-k}X_t) = E(\alpha_1 X_{t-1} X_{t-k}) + E(Z_t X_{t-k})$$

برای $k \geq 1$ چون خطای زمان حال مستقل از گذشتهٔ فرآیند است ($E Z_t X_{t-k} = 0 , k > 0$)، به‌صورت

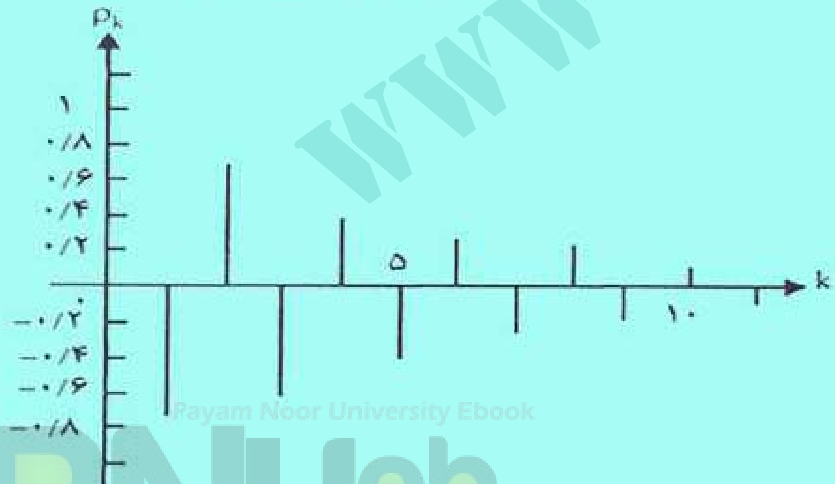
$$\gamma_k = \alpha_1 \gamma_{k-1} \quad , \quad k \geq 1$$

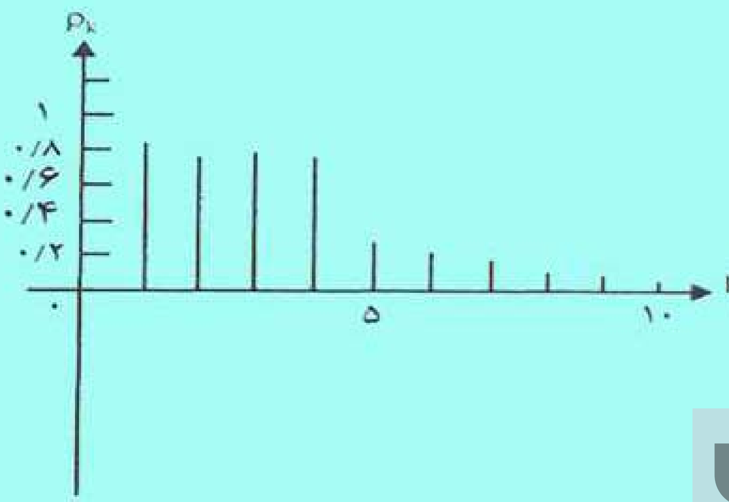
درمی‌آید. اگر طرفین این تساوی را بر واریانس فرآیند (یعنی $\sigma_X^2 = \gamma_0$) تقسیم کنیم تابع خودهمبستگی فرآیند $AR(1)$ به دست می‌آید

$$\frac{\gamma_k}{\gamma_0} = \alpha_1 \frac{\gamma_{k-1}}{\gamma_0} \quad , \quad k \geq 1$$

یا

$$\rho_k = \alpha_1 \rho_{k-1} \quad , \quad k \geq 1$$





میانگین و واریانس فرآیند اتورگرسیو مرتبهٔ اول

اگر از طرفین تساوی $X_t = \alpha_1 X_{t-1} + Z_t$ امید ریاضی بگیریم داریم

$$EX_t = \alpha_1 EX_{t-1} + 0$$

یا

$$\mu_x - \alpha_1 \mu_x = 0 \rightarrow (1 - \alpha_1)\mu_x = 0$$

ولی چون $\phi(1) = 1 - \alpha_1 \neq 0$، باید داشته باشیم $EX_t = \mu_x = 0$

برای به دست آوردن واریانس فرآیند $AR(1)$ در عبارت

$$EX_t X_{t-k} = E(\alpha_1 X_{t-1} X_{t-k}) + E(X_{t-k} Z_t)$$

مقدار $k = 0$ را قرار داده و با توجه به $EX_t^2 = \sigma_x^2$ (چون میانگین صفر است) و $EZ_t X_t = \sigma_z^2$ داریم،

$$\sigma_x^2 = \alpha_1 \gamma_1 + \sigma_z^2$$

از طرفی به ازاء $k = 1$ عبارت بالا نتیجه می‌دهد $\gamma_1 = \alpha_1 \gamma_0 = \alpha_1 \sigma_x^2$، پس

$$\sigma_x^2 = \alpha_1 (\alpha_1 \sigma_x^2) + \sigma_z^2$$

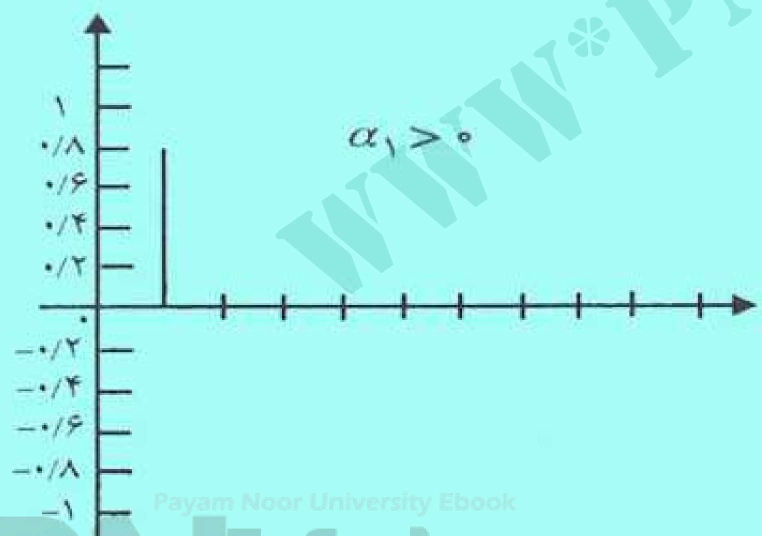
و با $\alpha_1 \neq 1$ داریم $\sigma_x^2 = \gamma_0 = \dfrac{\sigma_z^2}{1-\alpha^2}$.

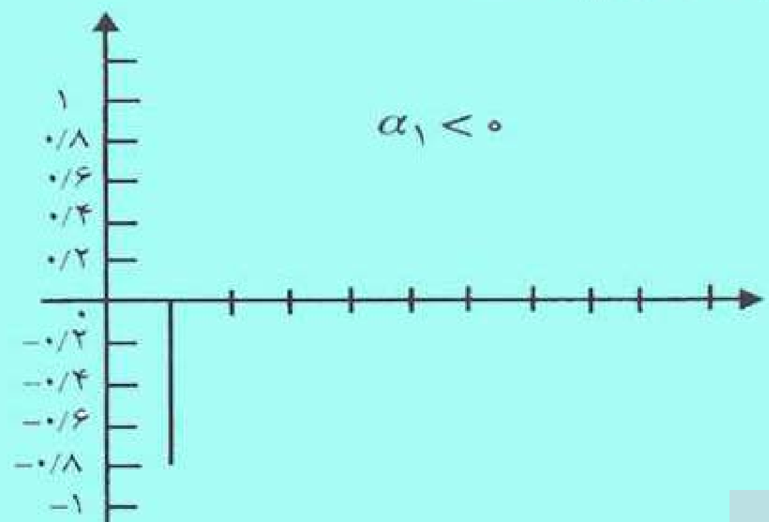
تابع خودهمبستگی جزئی فرآیند اتورگرسیو مرتبهٔ اول

با توجه به تعریف تابع خودهمبستگی جزئی $\phi_{kk} = \left| P_k^* \right| / \left| P_k \right|$ می‌توان نوشت،

$$\phi_{kk} = \begin{cases} \rho_1 = \alpha_1 & , \quad k = 1 \\ 0 & , \quad k \geq 2 \end{cases}$$

ملاحظه می‌کنیم که وقتی تأخیر بین مشاهدات سری زمانی مساوی ۲ یا بیش از ۲ است تابع خودهمبستگی جزئی برابر صفر است (قطع می‌شود) ولی تابع خودهمبستگی جزئی وقتی $k = 1$ است برابر ضریب همبستگی بین مشاهدات متوالی سری زمانی است که با توجه به علامت α_1 مقدار آن مثبت یا منفی است. تابع خودهمبستگی جزئی فرآیند $AR(1)$ در شکل زیر نشان داده شده است.





به‌طور خلاصه میانگین، واریانس، تابع اتوکوواریانس ، تابع خـودهمبستگی و تابع خودهمبستگی جزئی فرآیـند $AR(1)$ به‌صورت زیرند.

$$\mu_X = EX_t = 0$$

$$\sigma_X^2 = \gamma_0 = \frac{\sigma_Z^2}{1-\alpha_1^2} \quad , \quad \alpha_1 \neq 1$$

$$\gamma_k = \alpha_1 \gamma_{k-1} \quad , \quad k \geq 1$$

$$\rho_k = \alpha_1^k \quad , \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

$$\phi_{kk} = \begin{cases} \rho_1 = \alpha_1 & , \quad k = 1 \\ 0 & , \quad k \geq 2 \end{cases}$$

مثال

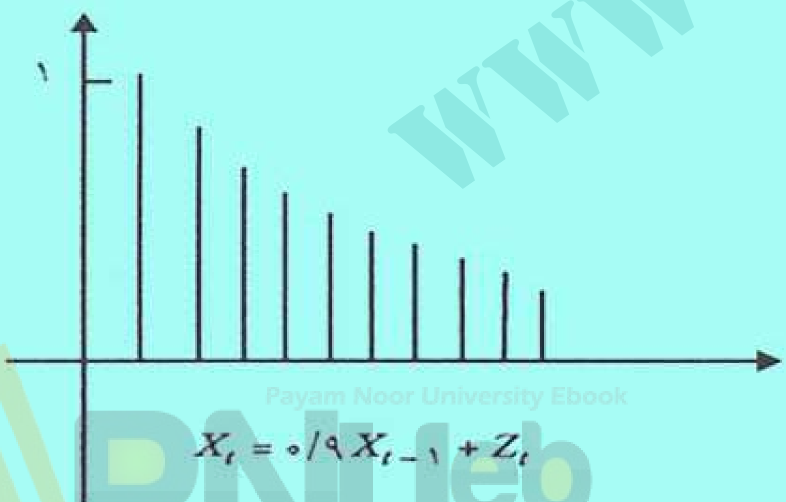
تابع خودهمبستگی فرآیند $X_t = 0/9X_{t-1} + Z_t$، $X_t = 0/4X_{t-1} + Z_t$ را به دست آورده و آنها را رسم کنید (به ازاء $k = 1, 2, 3, \ldots, 10$)

حل: با توجه به تابع خودهمبستگی فرآیند یعنی $k = 0, 1, 2, \ldots$ ، $\rho_k = \alpha_1^k$ داریم،

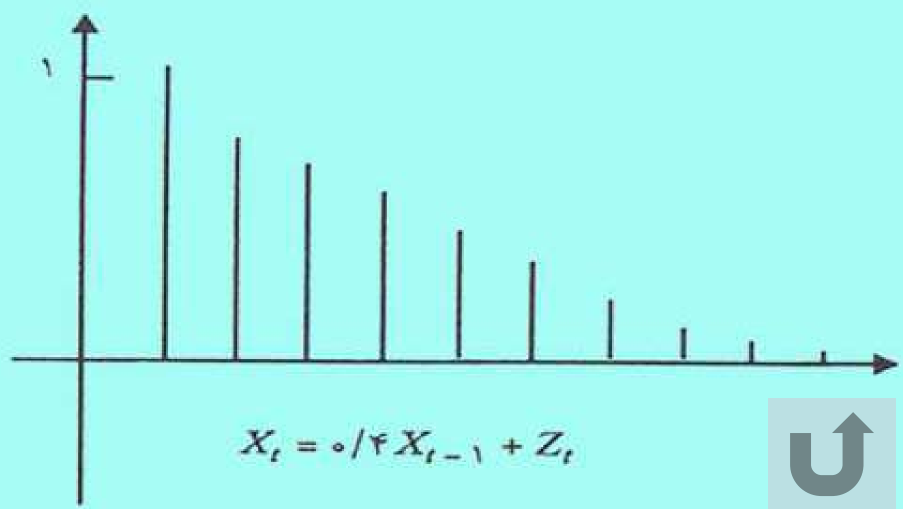
$$\rho_k = 0/9^k \qquad , \quad k = 0, 1, 2, \ldots, 10$$

$$\rho_k = 0/4^k \qquad , \quad k = 0, 1, 2, \ldots, 10$$

توجه می‌کنیم که برای α_1 نزدیک به ± 1 تنزل نمایی خودهمبستگیها کاملاً کند بوده ($0/53 = 0/9^6$) ولی برای α_1 کوچکتر این تنزل سریع است ($0/4^6 = 0/0041$). سری نسبتاً هموار و برای α_1های منفی، یک سری دندانه‌دار داریم. شبیه‌سازی کامپیوتری این سریها مطالب بالا را در نمودارهای زیر مشخص می‌کند.



$X_t = 0/9X_{t-1} + Z_t$



$X_t = 0/4X_{t-1} + Z_t$

فرآیند اتورگرسیو مرتبه دوم

فرآیند اتورگرسیو مرتبه دوم

میانگین و تابع اتوکواریانس فرآیند اتورگرسیو مرتبه دوم

تابع خود همبستگی فرآیند اتورگرسیو مرتبه دوم

واریانس فرآیند اتورگرسیو مرتبه دوم

تابع خود همبستگی جزئی فرآیند اتورگرسیو مرتبه دوم

نمودار توابع خود همبستگی و خودهمبستگی جزئی چند فرآیند اتورگرسیو مرتبه دوم

فرآیند اتورگرسیو مرتبهٔ دوم

اگر در فرآیند کلی $AR(p)$ قرار دهیم $p = ۲$، فرآیند $AR(۲)$ نتیجه می‌شود که به صورت زیر است

$$X_t = \alpha_۱ X_{t-۱} + \alpha_۲ X_{t-۲} + Z_t$$

با استفاده از عملگر پسرو (عملگر B) فرآیند را به صورت زیر می‌توان نوشت

$$(۱ - \alpha_۱ B - \alpha_۲ B^۲) X_t = Z_t$$

یا

$$\phi(B) X_t = Z_t$$

که در آن $\phi(B) = ۱ - a_۱ B - a_۲ B^۲$. این فرآیند متناهی همواره وارون‌پذیر است و برای این که مانا شود باید ریشه‌های $\phi(B) = ۰$ از لحاظ قدر مطلق بزرگتر از واحد باشند (ریشه‌های خارج دایرهٔ واحد).

میانگین و تابع اتوکوواریانس فرآیند $AR(2)$

با توجه به فرض $EZ_t = 0$

$$\mu_x = \alpha_1 \mu_x + \alpha_2 \mu_x + 0$$

در نتیجه

$$(1 - \alpha_1 - \alpha_2)\mu_x = 0$$

که در آن با توجه به شرط مانایی فرآیند $\Phi(1) = 1 - \alpha_1 - \alpha_2 \neq 0$ ، نتیجه می‌شود

$$\mu_x = 0$$

برای به دست آوردن تابع اتوکوواریانس طرفین تساوی بالا را در X_{t-k} ضرب نموده و امیدهای ریاضی طرفین تساوی را به دست آوریم،

$$EX_tX_{t-k} = \alpha_1 E(X_{t-1}X_{t-k}) + \alpha_2 E(X_{t-2}X_{t-k}) + E(Z_tX_{t-k})$$

و با توجه به

$$E(Z_tX_{t-k}) = 0 \quad , \quad k \geq 1$$

داریم

$$\gamma_k = \alpha_1 \gamma_{k-1} + \alpha_2 \gamma_{k-2} \quad , \quad k \geq 1$$

از حل این معادلهٔ تفاضلی، γ_k تعیین می‌شود.

تابع خودهمبستگی فرآیند اتورگرسیو مرتبهٔ دوم

اگر طرفین تابع اتوکوواریانس را بر σ_x^2 بخش کنیم خواهیم داشت،

$$\rho_k = \alpha_1 \rho_{k-1} + \alpha_2 \rho_{k-2} \quad , \quad k \geq 1$$

در حالت خاص، اگر $k = 1, 2$ داریم،

$$\rho_1 = \frac{\alpha_1}{1 - \alpha_2}$$

$$\rho_2 = \frac{\alpha_1^2}{1 - \alpha_2} + \alpha_2 = \frac{\alpha_1^2 + \alpha_2 - \alpha_2^2}{1 - \alpha_2}$$

و برای $k \geq 3$، ρ_k به‌طور بازگشتی از معادلهٔ $k \geq 1$ و $\rho_k = \alpha_1 \rho_{k-1} + \alpha_2 \rho_{k-2}$ به دست می‌آید. از حل این معادلهٔ تفاضلی یا $(1 - \alpha_1 B - \alpha_2 B^2)\rho_k = 0$ می توان ρ_k را به دست آورد.

برای تعیین ρ_k از معادلهٔ تفاضلی خطی با ضرایب ثابت $\rho_k = \alpha_1\rho_{k-1} + \alpha_2\rho_{k-2}$، سه حالت اتفاق می‌افتد.

حالت اول: اگر معادلهٔ مفسر $y^2 - \alpha_1 y - \alpha_2 = 0$ دارای دو ریشهٔ حقیقی و متمایز باشد، یعنی $a_1^2 + 4a_2 > 0$، در این صورت تابع خودهمبستگی به صورت زیر خواهد بود.

$$\rho_k = A_1G_1^k + A_2G_2^k = A_1\left[\frac{a_1 + \sqrt{a_1^2 + 4a_2}}{2}\right]^k + A_2\left[\frac{a_1 - \sqrt{a_1^2 + 4a_2}}{2}\right]^k$$

حالت دوم: اگر ریشه‌های معادلهٔ مفسر مکرر باشند یعنی $\alpha_1^2 + 4\alpha_2 = 0$، در این صورت جواب معادلهٔ تفاضلی یعنی ρ_k به صورت زیر خواهد بود.

$$\rho_k = (A + Bk)G_0^k$$

حالت سوم: اگر $\alpha_1^2 + 4\alpha_2 < 0$، در این صورت معادلهٔ مفسر دارای ریشه‌های مختلط است و جواب معادلهٔ تفاضلی یعنی ρ_k به صورت زیر خواهد بود

$$\rho_k = s^k C\cos(\alpha k + D)$$

واریانس فرآیند $AR(۲)$

$$\sigma_x^۲ = \frac{(۱-\alpha_۲)\sigma_z^۲}{(۱+\alpha_۲)(۱-\alpha_۱-\alpha_۲)(۱+\alpha_۱-\alpha_۲)}$$

برای این که سمت راست مثبت باشد لازم است هریک از عوامل صورت و مخرج کسر مثبت باشند یعنی باید داشته باشیم

$$\begin{cases} \alpha_۱+\alpha_۲ < ۱ \\ \alpha_۲-\alpha_۱ < ۱ \\ ۱ > \alpha_۲ > -۱ \end{cases}$$

که همان شرایط مانایی فرآیند $AR(۲)$ است.

تابع خودهمبستگی جزئی فرآیند $AR(2)$

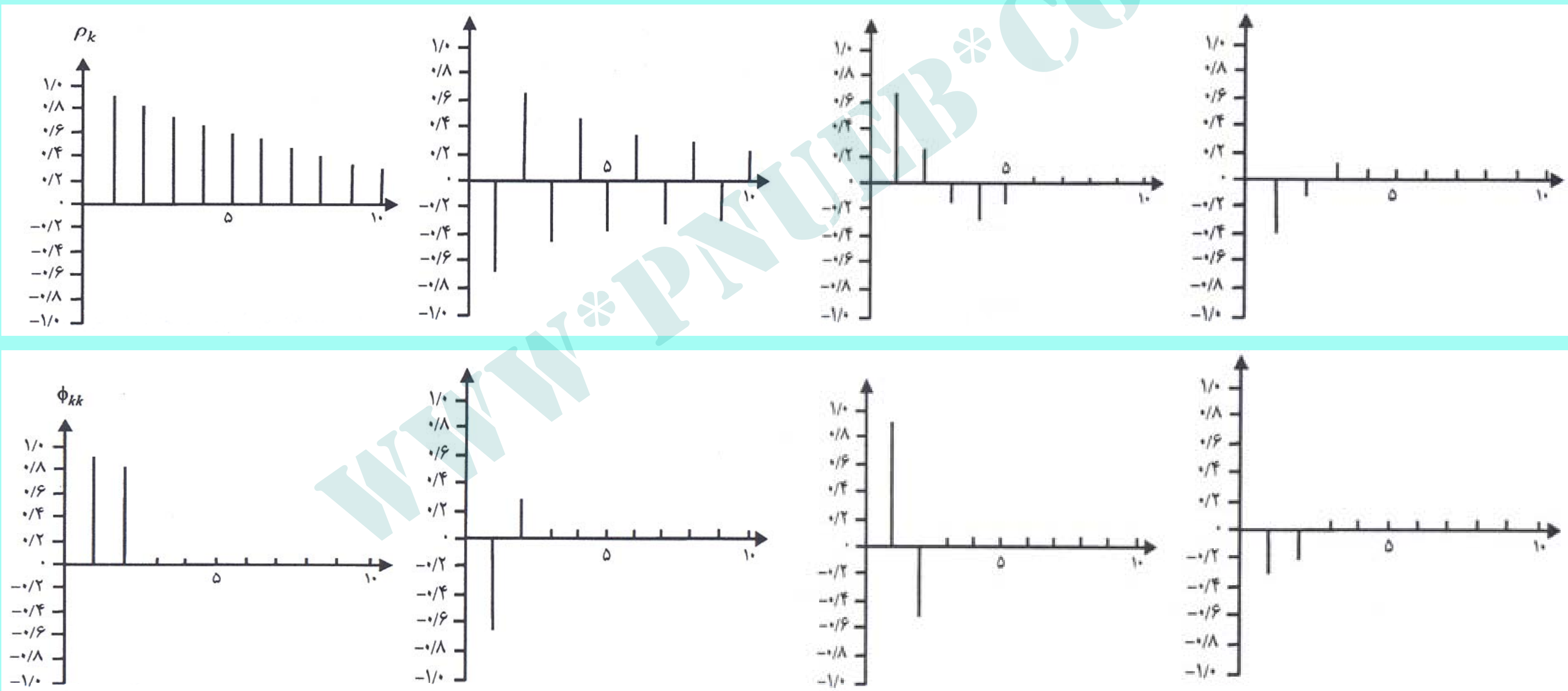
با توجه به تعریف تابع خودهمبستگی جزئی

$$\phi_{kk}=\frac{|P_k^*|}{|P_k|}=\frac{\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 & \rho_2 & \cdots \rho_1 \\ \rho_1 & 1 & \rho_1 & \cdots \rho_2 \\ \rho_2 & \rho_1 & 1 & \cdots \rho_3 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots \cdot \\ \rho_{k-1} & \rho_{k-2} & \rho_{k-3} & \cdots \rho_k \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 & \rho_2 & \cdots \rho_{k-1} \\ \rho_1 & 1 & \rho_1 & \cdots \rho_{k-2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots \cdot \\ \rho_{k-1} & \rho_{k-2} & \rho_{k-3} & \cdots 1 \end{vmatrix}}$$

و با توجه به $\rho_k = \alpha_1\rho_{k-1} + \alpha_2\rho_{k-2}, k \ge 1$ داریم،

$$\phi_{11}=\rho_1=\frac{\alpha_1}{1-\alpha_2} \text{ و } \phi_{22}=\frac{\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 \\ \rho_1 & \rho_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 \\ \rho_1 & 1 \end{vmatrix}}=\alpha_2 \text{ و } \phi_{kk}=0 \text{ ،} k \ge 3$$

شکل زیر تابع خودهمبستگی جزئی و تابع خودهمبستگی مربوط به چند فرآیند $AR(۲)$ را نشان می‌دهد. بنابراین ملاحظه می‌کنیم که تابع خودهمبستگی جزئی یک فرآیند $AR(۲)$ بعد از تأخیر ۲ قطع می‌شود.



فرآیند $AR(p)$

تابع خود همبستگی فرآیند $AR(p)$

تابع خود همبستگی جزئی فرآیند $AR(p)$

واریانس فرآیند $AR(p)$

تابع خودهمبستگی فرآیند $AR(p)$

تابع خودهمبستگی ρ_k با توجه به معادلهٔ تفاضلی زیر تعیین می‌شود

$$\phi_p(B)\rho_k = (۱ - \alpha_۱ B - \alpha_۲ B^۲ - \cdots - \alpha_p B^p)\rho_k = ۰ \quad , \quad k > ۰$$

بنابراین می‌توان نوشت،

$$\phi_p(B) = \prod_{i=۱}^{m} (۱ - G_i B)^{d_i}$$

که در آن $\sum_{i=۱}^{m} d_i = p$ ، $G_i^{-۱}$, $i = ۱, ۲, \ldots, m$ ریشه‌های مرتبهٔ d_i معادلهٔ $\phi(B) = ۰$ است، با استفاده از نتیجهٔ قضیهٔ مربوط به ضمیمهٔ ب داریم،

$$\rho_k = \sum_{i=۱}^{m} G_i^k \sum_{j=۰}^{d_i - ۱} A_{ij} K^j$$

اگر به ازای هر i، $d_i = ۱$، آنگاه تمام $G_i^{-۱}$ها متمایز بوده و عبارت بالا به صورت زیر خلاصه می‌شود.

$$\rho_k = \sum_{i=۱}^{p} A_i G_i^k \quad , \quad k > ۰$$

$$\rho_k = \sum_{i=1}^{m} G_i^k \sum_{j=0}^{d_i - 1} A_{ij} K^j$$

چون برای یک فرآیند مانا ۱ < $\left|G_i^{-1}\right|$ یا ۱ > $|G_i|$ ، بنابراین تابع خودهمبستگی ρ_k ترکیبی از افتهای نمایی و موجهای سینوسی میراست (که بستگی به ریشه‌های ۰ = $\phi_p(B)$ دارد) موجهای سینوسی وقتی ظاهر می‌شوند که ریشه‌ها مختلط باشند.

تابع خودهمبستگی جزئی فرآیند کلی $AR(p)$

با توجه به معادلهٔ $\rho_k = \alpha_1 \rho_{k-1} + \alpha_2 \rho_{k-2} + \cdots + \alpha_p \rho_{k-p} , k > 0$ به سهولت می‌بینیم که برای $K > P$ ستون آخر ماتریس P_k^* در ϕ_{kk} را می‌توان به صورت یک ترکیب خطی از ستونهای قبلی آن نوشت. بنابراین تابع خودهمبستگی جزئی بعد از تأخیر P صفر می‌شود و این یک خاصیت مهم برای شناسایی یک الگوی AR در ساختن الگوی سری زمانی است.

واریانس فرآیند $AR(P)$

اگر طرفین معادلهٔ $X_t = \alpha_1 X_{t-1} + \alpha_2 X_{t-2} + \cdots + \alpha_p X_{t-p} + Z_t$ را در X_t ضرب کرده و امید ریاضی بگیریم خواهیم داشت،

$$E(X_t^2) = E(\alpha_1 X_t X_{t-1}) + E(\alpha_2 X_t X_{t-2}) + \cdots + E(\alpha_p X_t X_{t-p}) + EZ_t X_t$$

و از آن نتیجه می‌شود

$$\gamma_0 = \alpha_1 \gamma_1 + \alpha_2 \gamma_2 + \cdots + \alpha_p \gamma_p + \sigma_z^2$$

که با استفاده از $\rho_k = \frac{\gamma_k}{\gamma_0}$ به صورت زیر نوشته می‌شود،

$$\gamma_0 (1 - \alpha_1 \rho_1 - \alpha_2 \rho_2 - \cdots - \alpha_p \rho_p) = \sigma_z^2$$

و یا

$$\gamma_0 = \frac{\sigma_z^2}{1 - \alpha_1 \rho_1 - \alpha_2 \rho_2 - \cdots - \alpha_p \rho_p}$$

که واریانس فرآیند یعنی $\sigma_x^2 = \gamma_0$ را برحسب σ_z^2 و پارامترهای α_1، α_2، ...، α_p و مقادیر ρ_1، ρ_2، ...، ρ_p بیان می‌کند.

- چند مثال حل شده

مثال ۱ـ تابع خودهمبستگی فرآیند اتورگرسیو مرتبهٔ اول $X_t = ۰/۷X_{t-۱} + Z_t$ را پیدا کرده و آن را به ازاء $k = ۰, ۱, ۲, ۳, ۴, ۵, ۶$ رسم کنید.

حل:

مثال ۲ـ تابع خودهمبستگی فرآیند $AR(۲)$، $X_t = \frac{۱}{۱۲}X_{t-۱} + \frac{۱}{۱۲}X_{t-۲} + Z_t$ را به دست آورید.

حل:

مثال ۳ـ تابع خودهمبستگی فرآیند $X_t = \frac{۱}{۲}X_{t-۱} - \frac{۱}{۱۶}X_{t-۲} + Z_t$ را به دست آورید.

حل:

مثال ۱ـ تابع خودهمبستگی فرآیند اتورگرسیو مرتبهٔ اول $X_t = 0/7 X_{t-1} + Z_t$ را پیدا کرده و آن را به ازاء $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$ رسم کنید.

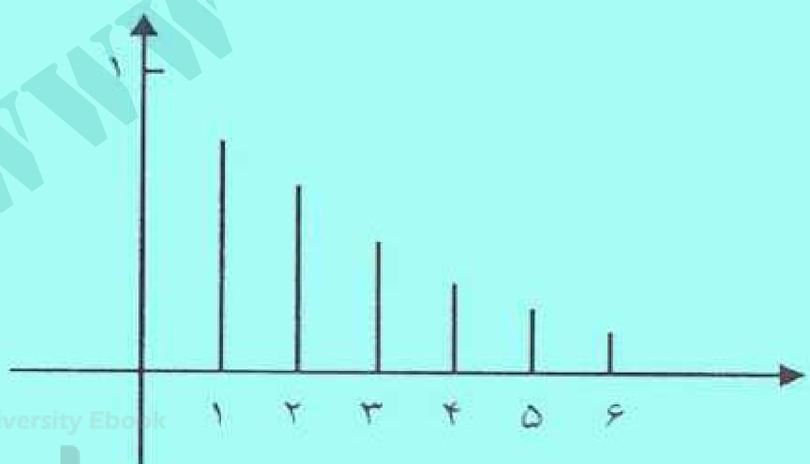
حل: تابع خودهمبستگی فرآیند $AR(1)$، $X_t = \alpha_1 X_{t-1} + Z_t$ به صورت زیر است

$$\rho_k = \alpha_1^k$$

بنابراین تابع خودهمبستگی فرآیند $X_t = 0/7 X_{t-1} + Z_t$ عبارت است از

$$\rho_k = 0/7^k$$

$$\begin{cases} k = 0 \\ \rho_0 = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} k = 1 \\ \rho_1 = 0/7 \end{cases} \quad \begin{cases} k = 2 \\ \rho_2 = 0/7^2 \end{cases} \quad \begin{cases} k = 3 \\ \rho_3 = 0/7^3 \end{cases} \quad \begin{cases} k = 4 \\ \rho_4 = 0/7^4 \end{cases} \quad \begin{cases} k = 5 \\ \rho_5 = 0/7^5 \end{cases} \quad \begin{cases} k = 6 \\ \rho_6 = 0/7^6 \end{cases}$$



مثال ۲- تابع خودهمبستگی فرآیند $AR(2)$، $X_t = \frac{1}{12}X_{t-1} + \frac{1}{12}X_{t-2} + Z_t$ را به دست آورید.

حل: معادلهٔ مفسر عبارت است از $y^2 - \frac{1}{12}y - \frac{1}{12} = 0$

$$\Delta = \alpha_1^2 + 4\alpha_2 = \frac{1}{144} + \frac{4}{12} = \frac{49}{144} > 0$$

پس معادلهٔ مفسر دو ریشهٔ حقیقی متمایز دارد، در نتیجه جواب معادلهٔ تفاضلی

$$\rho_k = \frac{1}{12}\rho_{k-1} + \frac{1}{12}\rho_{k-2}$$

به صورت زیر است،

$$\rho_k = A_1 G_1^k + A_2 G_2^k$$

$$G_i = \frac{+\frac{1}{12} \pm \frac{7}{12}}{2} \quad , \quad i = 1, 2$$

$$G_1 = \frac{8}{24} = \frac{1}{3} \quad , \quad G_2 = -\frac{6}{24} = -\frac{1}{4}$$

با استفاده از شرایط مرزی $\rho_0 = 1$ و $\rho_1 = \frac{\alpha_1}{1-\alpha_2}$ مقادیر A_1 و A_2 را تعیین می‌کنیم.

$$\rho_0 = 1 \rightarrow A_1 + A_2 = 1$$

$$\rho_1 = \frac{1/12}{1 - 1/12} \rightarrow \frac{1}{3}A_1 - \frac{1}{4} = \frac{1}{11}$$

$$\frac{1}{3}A_1 - \frac{1}{4}(1 - A_1) = \frac{1}{11}$$

$$\frac{1}{3}A_1 + \frac{1}{4}A_1 = \frac{1}{11} + \frac{1}{4} = \frac{4+11}{44} = \frac{15}{44}$$

$$\frac{7A_1}{12} = \frac{15}{44} \rightarrow A_1 = \frac{15}{44} \times \frac{12}{7} = \frac{45}{77}$$

$$A_2 = 1 - A_1 = 1 - \frac{45}{77} = \frac{32}{77}$$

پس تابع خودهمبستگی عبارت خواهد بود از

$$\rho_k = \frac{45}{77}\left(\frac{1}{3}\right)^k + \frac{32}{77}\left(-\frac{1}{4}\right)^k \qquad , \qquad k = 0, 1, 2, \ldots$$

مثال ۳ـ تابع خودهمبستگی فرآیند $X_t = \frac{1}{2}X_{t-1} - \frac{1}{16}X_{t-2} + Z_t$ را به دست آورید.

حل: تابع خودهمبستگی در معادلهٔ تفاضلی $\rho_k = \frac{1}{2}\rho_{k-1} - \frac{1}{16}\rho_{k-2}, k = 0$ صدق می‌کند. برای حل آن ابتدا معادلهٔ مفسر را تشکیل می‌دهیم

$$y^2 - \frac{1}{2}y + \frac{1}{16} = 0$$

$$\alpha_1^2 + 4\alpha_2 = \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = 0$$

پس این معادله ریشهٔ مکرر دارد و در این حالت تابع خودهمبستگی به صورت زیر است

$$\rho_k = (A + B\,k)\,G_0^k$$

در اینجا

$$G_0 = \frac{\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{1}{4}}}{2} = \frac{1}{4}$$

حال با توجه به شرایط مرزی $\rho_0 = 1$ و $\rho_1 = \frac{\alpha_1}{1-\alpha_2}$ داریم،

$$\rho_0 = 1 \quad (A + B \times 0)G_0^0 = 1 \quad , \quad A = 1$$

$$\rho_1 = \frac{\frac{1}{2}}{1 + \frac{1}{16}} = \frac{8}{17} \rightarrow \frac{8}{17} = (1 + B)(\frac{1}{4})^1$$

پس تابع خودهمبستگی به صورت زیر است

$$1 + B = \frac{32}{17} \rightarrow B = \frac{32}{17} - 1 = \frac{15}{17}$$

$$\rho_k = (1 + \frac{15}{17}k)(\frac{1}{4})^k$$

معادلات یول ـ والکر

اگر در معادلهٔ $\rho_k = \alpha_1 \rho_{k-1} + \alpha_2 \rho_{k-2} + \cdots + \alpha_p \rho_{k-p}, k \geq 1$ قرار دهیم، $k = 1, 2, \ldots, p$
و توجه کنیم که $\rho_0 = 1$ و $\rho_{-k} = \rho_k$، خواهیم داشت

$$\rho_1 = \alpha_1 + \alpha_2 \rho_1 + \cdots + \alpha_p \rho_{p-1}$$

$$\rho_2 = \alpha_1 \rho_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_p \rho_{p-2}$$

....

....

$$\rho_p = \alpha_1 \rho_{p-1} + \alpha_2 \rho_{p-2} + \cdots + \alpha_p$$

این دستگاه معادلات را معادلات یول ـ والکر می‌نامند. با داشتن مقادیر $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$
از حل این معادلات خطی می‌توانیم $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_p$ را به دست آوریم، با استفاده از معادلهٔ

$$\rho_k = \alpha_1 \rho_{k-1} + \alpha_2 \rho_{k-2} + \cdots + \alpha_p \rho_{k-p} \quad , \quad k \geq 1$$

می‌توانیم ρ_k را برای تأخیرهای بالاتر به دست آوریم.

فرآیند های میانگین متحرک

تعریف فرآیند میانگین متحرک

فرآیند میانگین متحرک مرتبه اول

فرآیند میانگین متحرک مرتبه دوم

فرآیند میانگین متحرک مرتبه q

چند مثال حل شده

فرآیندهای میانگین متحرک

اگر $\{Z_t\}$ فرآیند تصادفی محض با میانگین صفر و واریانس σ_Z^2 باشد در آن صورت فرآیند $\{X_t\}$ را میانگین متحرک تا مرتبهٔ q گوییم هرگاه،

$$X_t = \beta_0 Z_t - \beta_1 Z_{t-1} - \cdots - \beta_q Z_{t-q}$$

که در آن β_iها ثابت‌اند و معمولاً $\beta_0 = 1$ در نظر گرفته می‌شود. با استفاده از عملگر پسرو، این فرآیند به صورت زیر نوشته می‌شود.

$$X_t = \theta(B) Z_t$$

که در آن

$$\theta(B) = 1 - \beta_1 B - \beta_2 B^2 - \cdots - \beta_q B^q$$

این فرآیند همواره ماناست و برای این که وارون‌پذیر باشد باید ریشه‌های $\theta(B) = 0$ از لحاظ قدر مطلق بزرگتر از واحد باشند.

فرآیند میانگین متحرک مرتبه اول

تعریف فرآیند میانگین متحرک مرتبه اول

تابع خود همبستگی فرآیند میانگین متحرک مرتبه اول

تابع خود همبستگی جزئی فرآیند میانگین متحرک مرتبه اول

فرآیند میانگین متحرک مرتبهٔ اول

فرآیند $\{X_t\}$ میانگین متحرک مرتبهٔ اول است هرگاه داشته باشیم،

$$X_t = Z_t - \beta_۱ Z_{t-۱}$$
$$= (۱ - \beta_۱ B) Z_t$$

که در آن $\{Z_t\}$ فرآیند اغتشاش با میانگین صفر و واریانس ثابت $\sigma_Z^۲$ است. با توجه به $EZ_t = ۰$ معلوم می‌شود که میانگین فرآیند صفر خواهد بود یعنی $\mu_x = EX_t = ۰$. فرآیند میانگین متحرک مرتبهٔ اول با فرض $q = ۱$ از فرآیند $MA(q)$ به دست می‌آیند.

تابع خودهمبستگی فرآیند $MA(1)$

$$\gamma_k = \operatorname{cov}(X_t, X_{t-k}) = \operatorname{cov}(Z_t - \beta_1 Z_{t-1}, Z_{t-k} - \beta_1 Z_{t-k-1})$$

$$= EZ_t Z_{t-k} - \beta_1 EZ_t Z_{t-k-1} - \beta_1 EZ_{t-1} Z_{t-k} + \beta_1^2 EZ_{t-1} Z_{t-k-1}$$

تابع γ_k را به ازای $k = 0, 1, 2, \ldots$ مورد مطالعه قرار می‌دهیم. به ازای $k = 0$ داریم،

$$\gamma_0 = EZ_t^2 + \beta_1^2 EZ_{t-1}^2 = \sigma_Z^2 + \beta_1^2 \sigma_Z^2$$

پس واریانس فرآیند $MA(1)$ عبارت است از

$$\boxed{\operatorname{var}(X_t) = \gamma_0 = \sigma_Z^2(1 + \beta_1^2)}$$

اگر $k = 1$، داریم

$$\gamma_1 = -\beta_1 \sigma_Z^2$$

به همین ترتیب می‌توان دید که به ازای $k \geq 2$، $\gamma_k = 0$. پس تابع اتوکوواریانس فرآیند $MA(1)$ به‌طور خلاصه عبارت است از

$$\gamma_k = \begin{cases} \sigma_Z^2(1 + \beta_1^2) & k = 0 \\ -\beta_1 \sigma_Z^2 & k = 1 \\ 0 & k \geq 2 \end{cases}$$

تابع خودهمبستگی جزئی فرآیند $MA(1)$

با توجه به تعریف تابع خودهمبستگی جزئی $\phi_{kk} = \left| P_k^* \right| / \left| P_k \right|$ و با استفاده از تابع خودهمبستگی فرآیند می‌توان نوشت

$$\phi_{kk} = \frac{-\beta_1^k (1-\beta_1^2)}{1-\beta_1^{2(k+1)}} \quad , \quad k \geq 1$$

برخلاف تابع خود همبستگی که بعد از تاخیر یک، صفر می‌شود، تابع خودهمبستگی جزئی فرآیند $MA(1)$، بسته به علامت β_1 (در نتیجه علامت ρ_1)، به‌طور نمایی تنزل می‌کند. می‌توان دید که مانند تابع خودهمبستگی در مورد تابع خودهمبستگی جزئی نیز داریم

$|\phi_{kk}| < \frac{1}{2}$.

فرآیند میانگین متحرک مرتبه دوم

تعریف فرآیند میانگین متحرک مرتبه دوم

واریانس فرآیند میانگین متحرک مرتبه دوم

تابع اتوکواریانس فرآیند میانگین متحرک مرتبه دوم

تابع خود همبستگی فرآیند میانگین متحرک مرتبه دوم

تابع خود همبستگی جزئی فرآیند میانگین متحرک مرتبه دوم

نمودار توابع خود همبستگی و خود همبستگی جزئی چند فرآیند میانگین متحرک مرتبه دوم

فرآیند میانگین متحرک مرتبهٔ دوم

فرآیند میانگین متحرک مرتبهٔ دوم به صورت زیر است

$$X_t = Z_t - \beta_1 Z_{t-1} - \beta_2 Z_{t-2}$$

که در آن $\{Z_t\}$ فرآیند تصادفی محض با میانگین صفر است. یک فرآیند میانگین متحرک مرتبهٔ دوم $\{X_t\}$ همواره ماناست. شرط وارون‌پذیری این فرآیند این است که ریشه‌های $\phi(B) = 1 - \beta_1 B - \beta_2 B^2 = 0$ از لحاظ قدر مطلق بزرگتر از واحد باشند، که از آن نتیجه می‌شود

$$\begin{cases} \beta_2 + \beta_1 < 1 \\ \beta_2 - \beta_1 < 1 \\ -1 < \beta_2 < 1 \end{cases}$$

با توجه به عملگر پسرو، فرآیند $MA(2)$ به صورت زیر نوشته می‌شود

$$X_t = \phi(B) Z_t$$

که در آن $\phi(B) = 1 - \beta_1 B - \beta_2 B^2$.

واریانس فرآیند $MA(2)$

با توجه به مقدار $X(t)$ داریم:

$$\gamma_0 = \mathrm{var}(X_t) = \mathrm{var}(Z_t - \beta_1 Z_{t-1} - \beta_2 Z_{t-2})$$

$$= E\left[(Z_t - \beta_1 Z_{t-1} - \beta_2 Z_{t-2}) - 0\right]^2$$

$$= E\left[Z_t - \beta_1 Z_{t-1} - \beta_2 Z_{t-2}\right]^2$$

$$= EZ_t^2 + \beta_1^2 EZ_{t-1}^2 + \beta_2^2 EZ_{t-2}^2 +$$ امید ریاضی جملات حاصلضرب که صفر است

$$= (1 + \beta_1^2 + \beta_2^2)\sigma_z^2$$

پس

$$\boxed{\gamma_0 = \sigma_x^2 = \sigma_z^2(1 + \beta_1^2 + \beta_2^2)}$$

تابع اتوکوواریانس فرآیند میانگین متحرک مرتبهٔ دوم $MA(2)$

می‌توان نوشت،

$$\gamma_k = \text{cov}(X_t, X_{t-k})$$

(زیرا میانگین صفراست)

$$= E X_t X_{t-k}$$

$$= E(Z_t - \beta_1 Z_{t-1} - \beta_2 Z_{t-2})(Z_{t-k} - \beta_1 Z_{t-k-1} - \beta_2 Z_{t-k-2})$$

$$= E Z_t Z_{t-k} - \beta_1 E Z_t Z_{t-k-1} - \beta_2 E Z_t Z_{t-k-2} - \beta_1 E(Z_{t-1} Z_{t-k})$$

$$+ \beta_1^2 E(Z_{t-1} Z_{t-k-1}) + \beta_1 \beta_2 E(Z_{t-1} Z_{t-k-2}) - \beta_2 E(Z_{t-2} Z_{t-k})$$

$$+ \beta_2 \beta_1 E(Z_{t-2} Z_{t-k-1}) + \beta_2^2 E(Z_{t-2} Z_{t-k-2})$$

به ازای مقادیر $k \geq 0$ به‌طور خلاصه داریم

$$\gamma_k = \begin{cases} (1 + \beta_1^2 + \beta_2^2)\sigma_Z^2 & k = 0 \\ (-\beta_1 + \beta_1 \beta_2)\sigma_Z^2 & k = 1 \\ -\beta_2 \sigma_Z^2 & k = 2 \\ 0 & k \geq 3 \end{cases}$$

تابع خودهمبستگی فرآیند $MA(2)$

اگر تابع اتوکوواریانس را بر γ_0 یعنی واریانس فرآیند تقسیم کنیم تابع خودهمبستگی حاصل می‌شود. پس می‌توان نوشت،

$$\rho_k=\frac{\gamma_k}{\gamma_0}=\begin{cases}1 & k=0\\ \dfrac{-\beta_1(1-\beta_2)}{1+\beta_1^2+\beta_2^2} & k=1\\ \dfrac{-\beta_2}{1+\beta_1^2+\beta_2^2} & k=2\\ 0 & k>2\end{cases}$$

ملاحظه می‌کنیم که تابع خودهمبستگی این فرآیند بعد از تأخیر ۲ صفر می‌شود. (به خاطر دارید که تابع خودهمبستگی جزئی فرآیند $AR(2)$ بعد از تأخیر ۲ صفر می‌شود.)

تابع خودهمبستگی جزئی $MA(2)$

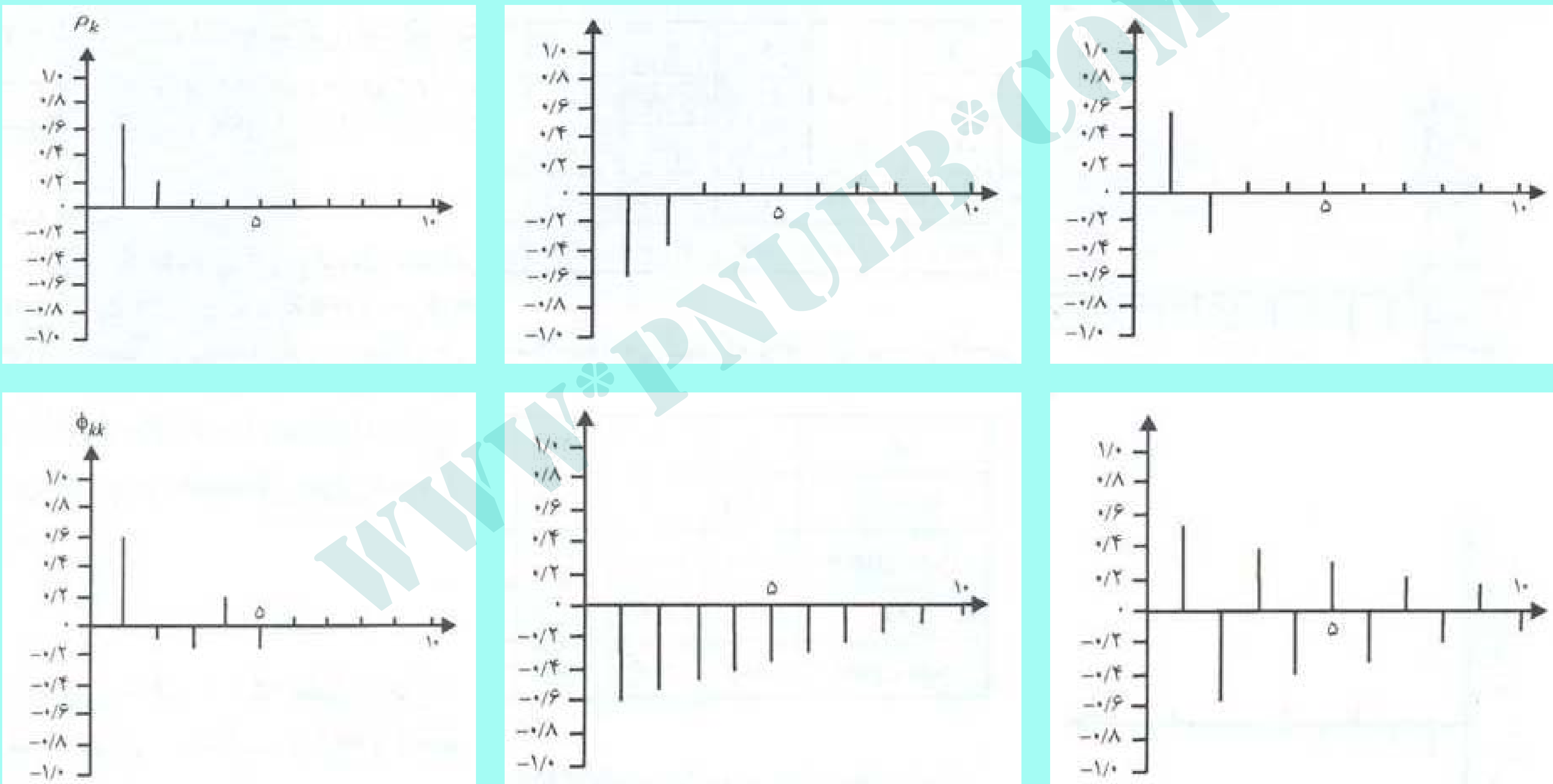
با توجه به تعریف $\phi_{kk} = \left|P_k^*\right| / \left|P_k\right|$ و با توجه به این که برای، $k > 2$، $\rho_k = 0$ می توان نوشت،

$$\phi_{11} = \rho_1$$

$$\phi_{22} = \frac{\rho_2 - \rho_1^2}{1 - \rho_1^2}$$

$$\phi_{33} = \frac{\rho_1^3 - \rho_1\rho_2(2 - \rho_2)}{1 - \rho_2^2 - 2\rho_1^2(1 - \rho_2)}$$

شکل زیر تابع خودهمبستگی جزئی و تابع خودهمبستگی مربوط به چند فرآیند $MA(۲)$ را نشان می‌دهد. بنابراین ملاحظه می‌کنیم که تابع خودهمبستگی جزئی یک فرآیند $MA(۲)$ بعد از تأخیر ۲ قطع می‌شود.



فرآیند میانگین متحرک مرتبه q

واریانس و تابع اتوکواریانس فرآیند میانگین متحرک مرتبه q

تابع خود همبستگی فرآیند میانگین متحرک مرتبه q

واریانس و تابع اتوکوواریانس فرآیند میانگین متحرک مرتبهٔ q

واریانس فرآیند $MA(q)$ عبارت است از

$$\gamma_0 = \operatorname{var}(X_t) = \sigma_Z^2 \sum_{j=0}^{q} \beta_j^2 \quad , \quad \beta_0 = 1$$

و به‌طور خلاصه تابع اتوکوواریانس فرآیند $MA(q)$ به صورت زیر است.

$$\gamma_k = \begin{cases} \sigma_Z^2 (-\beta_k + \beta_1 \beta_{k+1} + \cdots + \beta_{q-k} \beta_q) & k = 1, 2, \ldots, q \\ 0 & k > q \end{cases}$$

تابع خودهمبستگی $MA(q)$

طبق معمول اگر تابع اتوکوواریانس را بر واریانس فرآیند یعنی γ_0 تقسیم کنیم تابع خودهمبستگی نتیجه می‌شود پس داریم،

$$\rho_k = \begin{cases} \dfrac{-\beta_k + \beta_1\beta_{k+1} + \cdots + \beta_{q-k}\beta_q}{1+\beta_1^2 + \cdots + \beta_q^2} & k = 1, 2, \ldots, q \\ 0 & k > q \end{cases}$$

توجه داریم که چون تابع اتوکوواریانس (γ_k) به زمان بستگی نداشته و تنها به k بستگی دارد و میانگین فرآیند نیز ثابت است لذا به ازای تمام مقادیر $\{\beta_i\}$ فرآیند، مانای مرتبهٔ دوم است.

چند مثال حل‌شده

مثال ۱ـ تابع اتوکوواریانس و خودهمبستگی هریک از فرآیندهای زیر را به دست آورده و همبستگی نگار آنها را رسم کنید.

الف) $X_t = Z_t - ۰/۸ Z_{t-۱}$

ب) $X_t = Z_t - ۱/۲ Z_{t-۱} + ۰/۵ Z_{t-۲}$

حل: الف)

حل: ب)

مثال ۲ـ فرآیند $MA(۲)$، $X_t = Z_t - ۰/۱ Z_{t-۱} + ۰/۲۱ Z_{t-۲}$ مفروض است

الف) آیا این فرآیند ماناست؟ چرا؟

ب) آیا فرآیند وارون‌پذیر است؟ چرا؟

ج) تابع خودهمبستگی فرآیند را به دست آورید.

حل: الف)

حل: ب و ج)

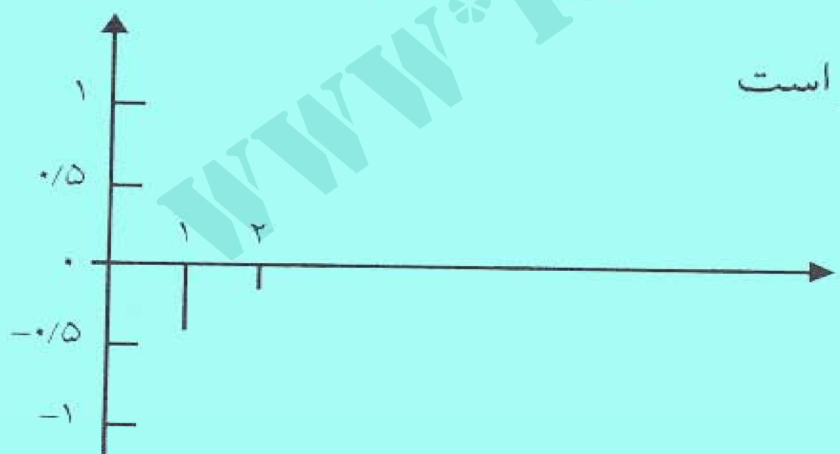
حل: الف) این فرآیند میانگین متحرک مرتبهٔ اول است، لذا با توجه به این که تابع اتوکوواریانس این فرآیند به‌طور کلی می‌توان نوشت،

$$\gamma_k = \begin{cases} 1.64\,\sigma_z^2 & k=0 \\ -0.8\,\sigma_z^2 & k=1 \\ 0 & k\geq 2 \end{cases}$$

پس، تابع خودهمبستگی این فرآیند عبارت است از

$$\rho_k = \frac{\gamma_k}{\gamma_0} = \begin{cases} 1 & k=0 \\ \dfrac{-0.8}{1.64} & k=1 \\ 0 & k\geq 2 \end{cases}$$

همبستگی نگار فرآیند به صورت زیر است



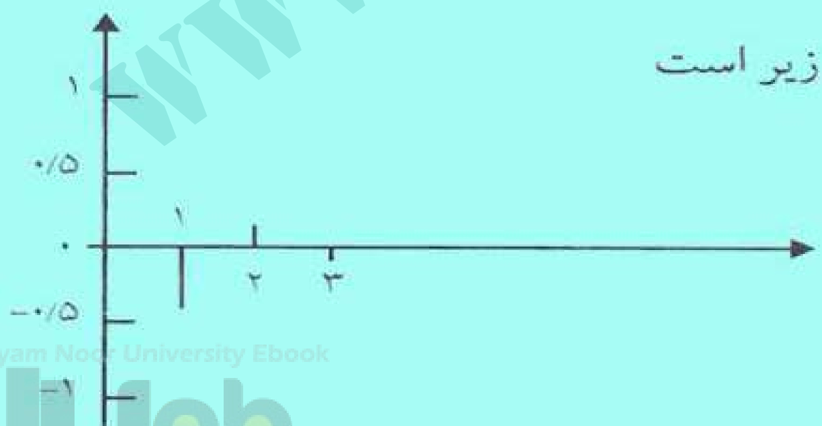
حل: ب) این فرآیند میانگین متحرک مرتبهٔ دوم است ولذا با توجه به این که تابع اتوکوواریانس این فرآیند به‌طور کلی به صورت زیر است

$$\gamma_k = \begin{cases} (۱ + ۱/۴۴ + ۰/۲۵)\sigma_z^۲ & k = ۰ \\ -۱/۲(۱ + ۰/۵)\sigma_z^۲ & k = ۱ \\ ۰/۵\sigma_z^۲ & k = ۲ \\ ۰ & k \geq ۳ \end{cases}$$

و تابع خودهمبستگی فرآیند عبارت است از،

$$\rho_k = \begin{cases} ۱ & k = ۰ \\ \frac{-۱/۸}{۲/۶۹} & k = ۱ \\ \frac{+۰/۵}{۲/۶۹} & k = ۲ \\ ۰ & k \geq ۳ \end{cases}$$

همبستگی نگار فرآیند به صورت زیر است



حل: الف) این فرآیند ماناست، زیرا $EX_t = ۰$ به زمان بستگی ندارد و تابع اتوکوواریانس آن نیز به زمان بستگی نداشته و فقط به k بستگی دارد

$$\gamma_k = \begin{cases} (۱ + ۰/۰۱ + ۰/۰۴۴۱)\sigma_z^۲ & , \quad k = ۰ \\ -۰/۱(۱ - ۰/۲۱)\sigma_z^۲ & , \quad k = ۱ \\ ۰/۲۱\sigma_z^۲ & , \quad k = ۲ \\ ۰ & , \quad k \geq ۳ \end{cases}$$

حل: ب) این فرآیند وارون‌پذیر است زیرا β_i، $i = ۱, ۲$ در شرط وارون‌پذیری

$$\begin{cases} \beta_۲ + \beta_۱ < ۱ \\ \beta_۲ - \beta_۱ < ۱ \\ |\beta_۲| < ۱ \end{cases}$$

صدق می‌کند.

حل: ج) تابع خودهمبستگی آن به صورت زیر است

$$\rho_k = \begin{cases} ۱ & , \quad k = ۰ \\ \dfrac{-۰/۰۷۹}{۱/۰۵۴۱} & , \quad k = ۱ \\ \dfrac{۰/۲۱}{۱/۰۵۴۱} & , \quad k = ۲ \\ ۰ & , \quad k \geq ۳ \end{cases}$$

نمایش سری زمانی به صورت فرآیند میانگین متحرک و اتورگرسیو

(۱) فرآیند X_t را می‌توان به صورت ترکیبی خطی دنباله‌ای از متغیرهای تصادفی ناهمبسته نوشت، یعنی

$$X_t = \psi(B) Z_t$$

(۲) شکل مفید دیگر این است که فرآیند X_t را به صورت اتورگرسیو نمایش دهیم که در آن رگرسیون مقدار X_t در زمان t روی مقادیر گذشتهٔ آن به علاوه یک خطای تصادفی باشد. یعنی

$$\pi(B) X_t = Z_t$$

(۱) فرآیند X_t را می‌توان به صورت ترکیبی خطی دنباله‌ای از متغیرهای تصادفی ناهمبسته نوشت، یعنی

$$X_t = \mu + Z_t + \psi_1 Z_{t-1} + \psi_2 Z_{t-2} + \cdots = \mu + \sum_{j=0}^{\infty} \Psi_j Z_{t-j}$$

که در آن $\psi_0 = 1$ و $\{Z_t\}$ فرآیند اغتشاش با میانگین صفر است.

با معرفی عملگر پسرو $B^j X_t = X_{t-j}$ می‌توانیم $X_t = \psi(B) Z_t$ را به شکلی بنویسیم که در آن

$$\Psi(B) = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j B^j$$

به سهولت می‌توان نشان داد که

$$\gamma_k = E(X_t X_{t+k}) = \sigma_z^2 \sum_{i=0}^{\infty} \Psi_i \Psi_{i+k}$$

برای این که فرآیند مانا باشد باید γ_k برای هر k متناهی باشد. در نتیجه $\sum_{j=0}^{\infty} \Psi_j^2 < \infty$ زیرا

$$|\gamma_k| = |E(X_t X_{t+k})| \le [\operatorname{var}(X_t) \operatorname{var}(X_{t+k})]^{1/2} = \sigma_z^2 \sum_{j=0}^{\infty} \Psi_j^2$$

(۲) شکل مفید دیگر این است که فرآیند X_t را به صورت اتورگرسیو نمایش دهیم که در آن رگرسیون مقدار X_t در زمان t روی مقادیر گذشتهٔ آن به علاوه یک خطای تصادفی باشد. یعنی

$$X_t = \pi_1 X_{t-1} + \pi_2 X_{t-2} + \cdots + Z_t$$

با استفاده از عملگر پسرو می‌توان نوشت

$$\pi(B)X_t = Z_t$$

که در آن $\pi(B) = 1 - \sum_{j=0}^{\infty} \pi_j B^j$. نمایش اتورگرسیو در فهم مکانیسم پیش‌بینی مفید است. باکس و جینکینس فرآیندی را وارون‌پذیر می‌نامند که آن را بتوان به این شکل نوشت. بحث آنها این است که فرآیندی که دارای وارون نیست در پیش‌بینی مفهومی ندارد. برای این که فرآیند خطی $X_t = \psi(B)Z_t$ وارون‌پذیر باشد و بتوان آن را برحسب AR بنویسیم باید ریشه‌های $\psi(B) = 0$ از لحاظ قدر مطلق بیشتر از واحد باشند.

دوگانگی بین فرآیندهای $AR(p)$ و $MA(q)$

موارد دوگانگی که بین فرآیندهای اتورگرسیو میانگین متحرک وجود دارند به شرح زیرند.

فرآیند $AR(p)$ مانای متناهی را می‌توان به صورت فرآیند MA ی نامتناهی نوشت و برعکس فرآیند متناهی وارون‌پذیر $MA(q)$ را می‌توان به صورت فرآیند AR نامتناهی نوشت و موضوع را به طریق زیر پی می‌گیریم. برای فرآیند اتورگرسیو متحرک مرتبهٔ p مانای $\phi_p(B)X_t = Z_t$ که در آن $\phi_p(B) = ۱ - \alpha_۱ B - \cdots - \alpha_p B^p$ می‌توان نوشت

$$X_t = \frac{۱}{\phi_p(B)} Z_t = \psi(B) Z_t$$

که در آن $\psi(B) = ۱ + \psi_۱ B + \psi_۲ B^۲ + \cdots$ به‌طوری که $\phi_p(B)\psi(B) = ۱$ وزنهای ψ را با مساوی قرار دادن ضرایب B^j در دو طرف این تساوی می‌توان به دست آورد.

فرآیندهای اتورگرسیو میانگین متحرک

تعریف فرآیند اتورگرسیو میانگین متحرک

شرط وارون پذیری و مانایی $ARMA(p,q)$

فرآیند $ARMA(1,1)$

تابع خود همبستگی فرآیند $ARMA(1,1)$

تبصره

نمودار توابع خود همبستگی و خود همبستگی جزئی مربوط به چند فرآیند $ARMA(1,1)$

فرآیندهای اتورگرسیو میانگین متحرک

فرآیند مرکب اتورگرسیو و میانگین متحرک زیر را، که p جمله اتورگرسیو و q جمله میانگین متحرک دارد را با نماد اختصاری $ARMA(p,q)$ می‌نویسند.

$$X_t = \alpha_1 X_{t-1} + \alpha_2 X_{t-2} + \cdots + \alpha_p X_{t-p} + Z_t - \beta_1 Z_{t-1} - \beta_2 Z_{t-2} - \cdots - \beta_q Z_{t-q}$$

که با استفاده از عملگر پسرو به صورت زیر نوشته می‌شود

$$\phi_p(B) X_t = \theta_q(B) Z_t$$

که

$$\phi_p(B) = 1 - \alpha_1 B - \cdots - \alpha_p B^p$$

و

$$\theta_q(B) = 1 - \beta_1 B - \beta_2 B^2 - \cdots - \beta_q B^q$$

شرط وارون‌پذیری فرآیند $ARMA(p,q)$

برای این که فرآیند وارون‌پذیر باشد باید ریشه‌های $\theta_q(B) = 0$ از لحاظ قدر مطلق بزرگتر از واحد باشند.

شرط مانایی فرآیند $ARMA(p,q)$

برای این که فرآیند مانا باشد باید ریشه‌های $\phi_p(B) = 0$ از لحاظ قدر مطلق بزرگتر از واحد باشند. ضمناً باید توجه داشت که $\phi_p(B) = 0$ و $\theta_q(B) = 0$ نباید ریشه‌های مشترک داشته باشند.

فرآیند $ARMA(1,1)$

اگر در فرآیند کلی $ARMA(p,q)$ قرار دهیم $p = q = 1$، فرآیند $ARMA(1,1)$ نتیجه می‌شود یعنی

$$X_t = \alpha_1 X_{t-1} + Z_t - \beta_1 Z_{t-1}$$

که با استفاده از عملگر پسرو می‌توان نوشت،

$$(1 - \alpha_1 B)X_t = (1 - \beta_1 B)Z_t$$

از شرط مانایی فرآیند یعنی $1 - \alpha_1 B = 0$، $|\alpha_1| < 1$ نتیجه می‌شود و از شرط وارون‌پذیری $1 - \beta_1 B = 0$، $|\beta_1| < 1$ حاصل می‌شود. اگر $\alpha_1 = 0$ نتیجهٔ فرآیند $ARMA(0,1)$ یک فرآیند $MA(1)$ است و به ازای $\beta_1 = 0$ یک فرآیند $AR(1)$ به دست می‌آید، در نتیجه فرآیندهای $MA(1)$ و $AR(1)$ حالت خاص فرآیندهای $ARMA(1,1)$ هستند.

تابع خودهمبستگی فرآیند $ARMA(1,1)$

ابتدا تابع اتوکوواریانس فرآیندرا به دست آورده و سپس آن را بر واریانس فرآیند تقسیم می‌کنیم تا تابع خودهمبستگی حاصل شود برای این کار طرفین تساوی

$$X_t = \alpha_1 X_{t-1} + Z_t - \beta_1 Z_{t-1}$$

را در X_{t-k} ضرب کرده و امید ریاضی طرفین تساوی را به دست می‌آوریم.

به‌طور خلاصه تابع اتوکوواریانس فرآیند $ARMA(1,1)$ عبارت است از

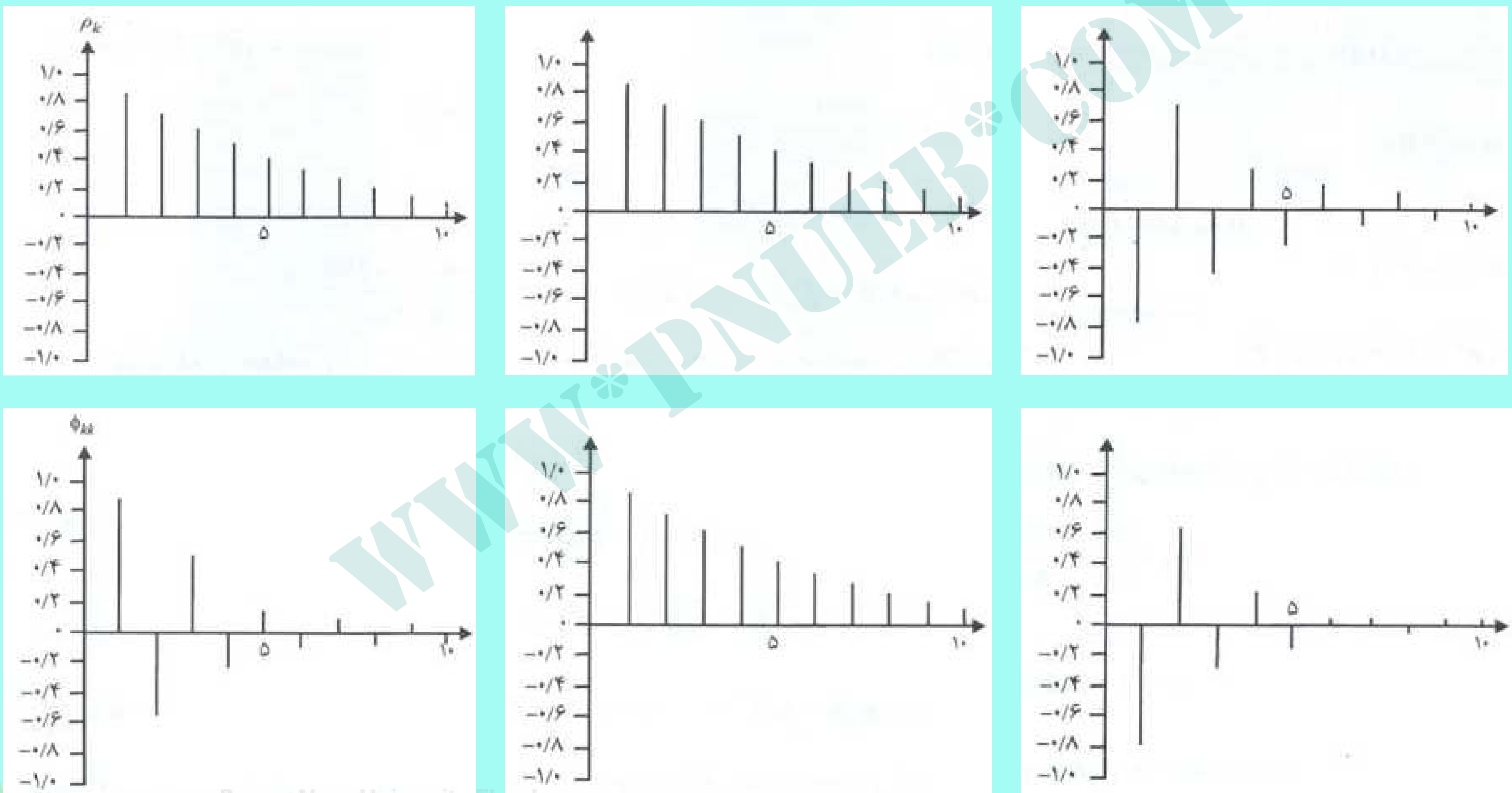
$$\gamma_k = \begin{cases} \dfrac{(1+\beta_1^2 - 2\alpha_1\beta_1)}{(1-\alpha_1^2)}\sigma_Z^2 & k=0 \\[2ex] \dfrac{(\alpha_1-\beta_1)(1-\alpha_1\beta_1)}{(1-\alpha_1^2)}\sigma_Z^2 & k=1 \\[2ex] \alpha_1\gamma_{k-1} & k\geq 2 \end{cases}$$

تبصره

تابع خودهمبستگی یک الگوی $ARMA(1,1)$ ویژگیهای فرآیندهای $AR(1)$ و $MA(1)$ را دارد. پارامتر میانگین متحرک β_1 در محاسبهٔ ρ_1 ظاهر شده و نافذ است و تابع خودهمبستگی الگوی $ARMA(1,1)$ به ازای $k \geq 2$ همان رفتار تابع خودهمبستگی فرآیند $AR(1)$ را داراست.

تابع خودهمبستگی جزئی فرآیند $ARMA(۱,۱)$

شکل زیر تابع خودهمبستگی جزئی و تابع خودهمبستگی مربوط به چند فرآیند $ARMA(۱,۱)$ را نشان می‌دهد.



(الف) (ب) (ج)

فصل پنجم

الگوهای سری زمانی نامانا

فصل پنجم : الگوهای سری زمانی نامانا

اهداف فصل

نامانایی در میانگین

الگوهای اتورگرسیو میانگین متحرک تلفیق شده

نامانایی در واریانس و اتوکواریانس

هدف کلی

معرفی الگوهای سریهای زمانی نامانا

هدفهای رفتاری

پس از مطالعهٔ این فصل می‌توانید:

- الگوی روند قطعی را برای یک فرآیند نامانا در میانگین به دست آورید،
- فرآیند نامانای همگن را تعریف کنید،
- الگوی روند تصادفی را برای سری زمانی نامانای همگن با روش تفاضلی کردن به دست آورید،
- الگوی $ARIMA(p,d,q)$ را تعریف کنید،
- الگوی قدم زدن تصادفی را تعریف کنید،
- الگوی $ARIMA(۰,۱,۱)$ یا $IMA(۱,۱)$ را تعریف کنید،
- نامانایی واریانس و اتوکوواریانس الگوی $IMA(۱,۱)$ را بررسی کنید،
- تبدیل پایداری واریانس را برای یک سری زمانی مانا در میانگین و نامانا در واریانس به‌دست آورید،

نامانایی در میانگین

یک فرآیند نامانا در میانگین می‌تواند مسئله‌ای بسیار جدی برای برآورد تابع میانگین وابسته به زمان را به وجود آورد. دو رده از الگوهایی را که در به الگو درآوردن سریهای زمانی نامانا مفیدند در این بخش ارائه می‌کنیم.

۱ - الگوهای روند قطعی

۲ - الگوی روند تصادفی و تفاضلی کردن

۱ - الگوهای روند قطعی

تابع میانگین یک فرآیند نامانا را با یک روند قطعی از زمان می‌توان نشان داد. دراین حالت از یک الگوی رگرسیون استاندارد برای بیان پدیده می‌توان استفاده کرد. برای مثال اگر تابع میانگین (μ_t) از یک روند خطی $\mu_t = \alpha_0 + \alpha_1 t$ تبعیت کند از الگوی خطی قطعی زیر که $\{Z_t\}$ تصادفی محض با میانگین صفر است می‌توان استفاده نمود.

$$X_t = \alpha_0 + \alpha_1 t + Z_t$$

به‌طور کلی اگر روند قطعی را با یک چندجمله‌ای مرتبهٔ k از زمان بتوان نشان داد، فرآیند را می‌توان با

$$X_t = \alpha_0 + \alpha_1 t + \cdots + \alpha_k t^k + Z_t$$

۲ ـ الگوی روند تصادفی و تفاضلی کردن

با توجه به الگوهای $ARMA$، فرایند ناماناست هرگاه ریشه‌های چندجمله‌ای AR آن از لحاظ قدر مطلق بزرگتر از واحد نباشد. با وجود این بنا به طبیعت همگن بودن، رفتار این نوع سریهای نامانای همگن مستقل از سطح آن است. بنابراین اگر $\phi(B)$ عملگر اتورگرسیو باشد که رفتار را بیان می‌کند، برای هر ثابت C داریم

$$\psi(B)(X_t + C) = \psi(B)X_t$$

از این نتیجه می‌شود برای $d > ۰$ که $\phi(B)$ یک عملگر اتورگرسیو ماناست باید $\psi(B)$ به صورت زیر باشد

$$\psi(B) = \phi(B)(۱ - B)^d$$

بنابراین یک سری نامانای همگن را با تفاضلی کردن مناسب به یک سری مانا تبدیل می‌کنیم. به عبارت دیگر سری $\{X_t\}$ ناماناست ولی سری تفاضلی‌شدهٔ مرتبهٔ dام یعنی $\{(۱ - B)^d X_t\}$ برای عدد درست $d \geq ۱$ ماناست.

الگوهای اتورگرسیو میانگین متحرک تلفیق شده

تعریف الگوهای اتورگرسیو میانگین متحرک تلفیق شده

الگوی قدم زدن تصادفی $ARIMA(0,1,0)$

الگوی $ARIMA(0,1,1)$ یا $IMA(1,1)$

الگوهای اتورگرسیو میانگین متحرک تلفیق‌شده

الگوی نامانای همگن $ARIMA$ را یک الگوی اتورگرسیو تلفیق‌شده با میانگین متحرک از مرتبهٔ (p,d,q) می‌نامند که به صورت

$$\phi_p(B)(1-B)^d X_t = \theta_0 + \theta_q(B) Z_t$$

که در آن $\phi_p(B) = (1 - \phi_1 B - \cdots - \phi_p B^p)$ عملگر AR (مانا) و $\theta_q(B) = (1 - \theta_1 B - \cdots - \theta_q B^q)$ عملگر MA (وارون‌پذیر) ریشهٔ مشترک ندارد. پارامتر θ_0 برای $d = 0$ و $d > 0$ نقشهای بسیار متفاوتی بازی می‌کند. اگر $d = 0$ فرآیند اولیه ماناست و θ_0 به میانگین فرآیند وابسته است، یعنی $\theta_0 = \mu(1 - \phi_1 - \cdots - \phi_p)$ معهذا وقتی $d \geq 1$، θ_0 را جملهٔ روند قطعی می‌نامند و اغلب آن را از الگو حذف می‌کنند مگر این که واقعاً لازم باشد.

الگوی قدم زدن تصادفی

اگر درالگوی $ARIMA(p,d,q)$ ، $p = ۰ ,d = ۱ ,q = ۰$ قرار دهیم الگوی قدم زدن تصادفی

$$(۱ - B)X_t = Z_t$$

یا

$$X_t = X_{t-۱} + Z_t$$

را داریم. $E(X_t) = t\mu$ و $\mathrm{var}(X_t) = t\sigma_Z^۲$ لذا این فرآیند مانا نیست زیرا میانگین و واریانس آن با زمان تغییر می‌کند. اگر این فرآیند را یک بار تفاضلی کنیم نتیجه‌اش فرآیند تصادفی محض است که ماناست، یعنی داریم

$$Z_t = \nabla X_t = X_t - X_{t-۱}$$

از این الگو به‌طور وسیعی برای بیان رفتار سریهای قیمت سهام استفاده مـی‌شود. در الگوی قدم زدن تصادفی مقدار X در زمان t برابر مقدار آن در زمان $(t - ۱)$ به علاوهٔ یک ضربهٔ تصادفی است.

توجه می‌کنیم که وقتی $\alpha \to ۱$ حد فرآیند $AR(۱)$، $(۱ - B)X_t = Z_t$ یک الگوی قدم زدن تصادفی است.

الگوی $ARIMA(0,1,1)$ یا $IMA(1,1)$

به ازای $p = 0$، $d = 1$، $q = 1$ فرض کنیم الگوی $ARIMA(p,d,q)$ به صورت زیر درمی‌آید

که در آن $-1 < \theta < 1$، $(1 - B)X_t = (1 - \theta B)Z_t$ یا

$$X_t = X_{t-1} + Z_t - \theta Z_{t-1}$$

این الگوی $IMA(1,1)$ پس از یک بار تفاضلی کردن به صورت فرآیند $MA(1)$ مانا درمی‌آید. الگوی قدم زدن تصادفی حالت خاص این الگوی $IMA(1,1)$ با $\theta = 0$ است. بنابراین پدیدهٔ اصلی الگوی $IMA(1,1)$ با این حقیقت مشخص می‌شودکه تابع خودهمبستگی نمونهٔ سری اولیه به سمت صفر میل نکند و تابع خودهمبستگی نمونهٔ سری تفاضلی مرتبهٔ اول طرح یک پدیدهٔ میانگین متحرک مرتبهٔ اول را نشان می‌دهد.

نامانایی در واریانس و اتوکواریانس

واریانس و اتوکواریانس الگوهای *ARIMA*

مثال

نتیجه گیری

تبدیلات پایداری واریانس

چند تذکر مهم در مورد تبدیلات پایداری واریانس

نامانایی در واریانس و اتوکوواریانس

واریانس و اتوکوواریانس الگوهای *ARIMA*

فرآیندی که در میانگین مانا است الزاماً در وامثال و کوواریانس مانا نیست. با وجود این یک فرآیند نامانای در میانگین نامانای در واریانس و کوواریانس خواهد بود. ملاحظه کردیم تابع میانگین الگوی *ARIMA* به زمان وابسته است. اکنون نشان می‌دهیم که الگوی *ARIMA* نیز نامانا در توابع واریانس و اتوکوواریانس است.

مثال

برای مثال فرض کنید الگوی $IMA(1,1)$، یعنی $(1-B)X_t = (1-\theta B)Z_t$

یا $X_t = X_{t-1} + Z_t - \theta Z_{t-1}$

را به سری n_0 مشاهده‌ای برازش می‌دهیم با توجه به این مبدأ زمان n_0، برای $t > n_0$ با جایگزینی‌های متوالی می‌توان نوشت

$$X_t = X_{n_0} + Z_t + (1-\theta)Z_{t-1} + \cdots + (1-\theta)Z_{n_0+1} - \theta Z_{n_0}$$

به‌طور مشابه برای $t-k > n_0$ داریم،

$$X_{t-k} = X_{n_0} + Z_{t-k} + (1-\theta)Z_{t-k-1} + \cdots + (1-\theta)Z_{n_0+1} - \theta Z_{n_0}$$

بنابراین نسبت به مبدأ زمان n_0 داریم

$$\mathrm{var}(X_t) = [1 + (t-n_0-1)(1-\theta)^2]\sigma_Z^2$$

$$\mathrm{var}(X_{t-k}) = [1 + (t-k-n_0-1)(1-\theta)^2]\sigma_Z^2$$

$$\mathrm{cov}(X_{t-k}, X_t) = [(1-\theta) + (t-k-n_0-1)(1-\theta)^2]\sigma_Z^2$$

$\mathrm{var}(X_t)$، $\mathrm{var}(X_{t-k})$، $\mathrm{cov}(X_{t-k}, X_t)$ و $\mathrm{corr}(X_{t-k}, X_t)$ فرآیند نیز به زمان بستگی دارند و لذا نسبت به تبدیل زمان پایا نیستند.

به‌طور کلی می‌توان نشان داد که

۱ ـ $\mathrm{var}(X_t)$ فرآیند $ARIMA$ به زمان وابسته است و برای $k \neq ۰$، $\mathrm{var}(X_t) \neq \mathrm{var}(X_{t-k})$

۲ ـ $\mathrm{var}(X_t)$ وقتی $t \to \infty$ نامحدود است.

۳ ـ $\mathrm{cov}(X_{t-k}, X_t)$ و خودهمبستگی $\mathrm{corr}(X_{t-k}, X_t)$ فرآیند نیز به زمان بستگی دارند و لذا نسبت به تبدیل زمان پایا نیستند. به بیان دیگر آنها فقط توابعی از اختلاف زمان k نیستند بلکه توابعی از مبدأ زمان t و نقطهٔ مرجع اولیهٔ $n_۰$ نیز هستند.

۴ ـ اگر $n_۰$ نسبت به k بزرگ باشد داریم

$$\mathrm{corr}(X_{t-k}, X_t) = \frac{\mathrm{cov}(X_{t-k}, X_t)}{\sqrt{\mathrm{var}(X_{t-k})\,\mathrm{var}(X_t)}} \approx ۱$$

از $\mathrm{corr}(X_{t-k}, X_t) \leq ۱$ نتیجه می‌شود که اگر k زیاد شود تابع خودهمبستگی به کندی از بین می‌رود.

تبدیلات پایداری واریانس

۱. تفاضلی کردن مرتبهٔ ۲

۲. استفاده از تبدیلات باکس و کاکس

برای پایداری واریانس از تبدیل توانی $T(X_t)=X_t^{(\lambda)}=\frac{X_t^{\lambda}-1}{\lambda}$

که به وسیلهٔ باکس و کاکس (۱۹۶۴) معرفی شده است می‌توان استفاده کرد. λرا پارامتر تبدیل می‌نامند. چند مقدار λکه معمولاً از آن استفاده می‌شود و تبدیلات مربوط به آن به شرح زیر است

تبدیل	مقادیر λ
$1/X_t$	۱-
$1/\sqrt{X_t}$	۰/۵-
$\ln X_t$	۰
$\sqrt{X_t}$	۰/۵
X_t (بدون تبدیل)	۱

به چند تذکر مهم زیر توجه کنید

۱. تبدیلات پایداری واریانس که در بالا تعریف شد فقط برای سریهای مثبت است. معهذا به‌طوری که به نظر می‌رسد محدودیتی وجود ندارد زیرا همیشه می‌توان ثابتی را به سری افزود بدون این که ساختمان همبستگی تغییر کند.

۲. اگر یک تبدیل پایداری واریانس لازم باشد باید قبل از هرگونه تحلیلی نظیر تفاضلی کردن به اجرا درآید.

۳. در تبدیل توانی λ را به صورت یک پارامتر الگو که از سری مشاهده‌شده برآورد می‌شود می‌توان در نظر گرفت. برآورد درستنمایی λ آن است که مجموع مربعات باقیمانده را مینیمم کند. برای هر مقدار معلوم λ، مجموع مربعات از الگوی برازش‌شده محاسبه می‌شود.

۴. غالباً تبدیل کردن فقط برای پایداری واریانس نیست بلکه تقریب برای نرمال بودن را بهتر می‌کند.

فصل ششم

الگو سازی برای یک سری زمانی

فصل ششم : الگوسازی برای یک سری زمانی

اهداف فصل

مراحل شناخت الگو

برآورد پارامترهای یک الگوی سری زمانی

پیش بینی

هدف کلی

شناختن یک الگوی مناسب و برازش آن به داده‌های سری زمانی.

هدفهای رفتاری

پس از مطالعهٔ این فصل می‌توانید:

- در طی چند مرحله، الگوی مناسبی را برای داده‌ها شناسایی کنید،
- درجهٔ لازم تفاضلی کردن توابع $ac.f$ و $pac.f$ را محاسبه و امتحان کنید،
- مرتبه‌های p و q در الگوهای اتورگرسیو و میانگین متحرک را تعیین کنید،
- پارامترهای فرآیند میانگین متحرک مرتبهٔ اول را برآورد کنید،
- پارامترهای فرآیندهای $MA(۲)$، $AR(۱)$، $AR(۲)$ و $ARMA(۱,۱)$ را برآورد کنید،
- فرآیند $AR(۱)$ را در l مرحلهٔ بعد پیش‌بینی کنید،
- واریانس خطای پیش‌بینی را برای فرآیند $AR(۱)$ به دست آورید،
- فرآیند میانگین متحرک مرتبهٔ اول را پیش‌بینی کنید،
- فرآیند $ARMA(p,q)$ را برای l مرحلهٔ بعد پیش‌بینی کنید،

مراحل شناخت الگوی یک سری زمانی

مرحله اول

مرحله دوم

مرحله سوم

مرحلهٔ اول

در یک تحلیل سری زمانی اوّلین مرحله رسم نمودار داده‌هاست. با امتحان و بررسی دقیق نمودار سری زمانی می‌توانیم ایدهٔ خوبی در مورد این که روند، نوسانات فصلی، نقاط پرت و واریانس غیرثابت و ... وجود دارند یا خیر، به دست آوریم.

مرحلهٔ دوم

برای تعیین درجهٔ لازم تفاضلی کردن، توابع $ac.f$ و $pac.f$ را برای سری اوّلیه محاسبه و امتحان می‌کنیم. برای این کار می‌توان از چند قاعدهٔ کلی زیر استفاده کرد:

الف) اگر $ac.f$ بسیار کند تنزل کند و $pac.f$ نمونه بعد از تأخیر یک قطع شود. داده‌ها نامانا بوده و پیشنهاد می‌شود از تبدیل تفاضلی‌کردن استفاده شود.

ب) برای حذف نامانایی ممکن است تفاضلی کردن مرتبهٔ بالاتر $(۱ - B)^d Z_t$، $d > ۱$ لازم باشد.

مرحلهٔ سوّم

برای تعیین مرتبه‌های p و q در الگوهای اتورگرسیو و میانگین متحرک، که p بالاترین مرتبهٔ چندجمله‌ای اتورگرسیو $(1 - \phi_1 B - \cdots - \phi_p B^p)$ و q بالاترین مرتبه در چندجمله‌ای میانگین متحرک $(1 - \phi_1 B - \cdots - \phi_q B^q)$ است،

در جدول زیر ویژگیهای نظری $ac.f$ و $pac.f$ را در سریهای مانا به اختصار می‌آوریم.

فرآیند	$ac.f$	$pac.f$
$AR(p)$	به صورت نمایی یا موج سینوسی میرا به سمت صفر میل می‌کند	بعد از تأخیر p قطع می‌شود
$MA(q)$	بعد از تأخیر q قطع می‌شود	به صورت نمایی یا موج سینوسی میرا به سمت صفر میل می‌کند
$ARMA(p,q)$	بعد از تأخیر $(q\text{-}p)$ به سمت صفر میل می‌کند	بعد از تأخیر $(p\text{-}q)$ به سمت صفر میل می‌کند

برآورد پارامترهای یک الگوی سری زمانی

برآورد پارامترهای یک الگوی سری زمانی

برآورد پارامترهای فرآیند میانگین متحرک مرتبه اول

برآورد پارامترهای فرآیند اتورگرسیو مرتبه دوم

برآورد پارامترهای یک الگوی سری زمانی

پس از شناسایی نوع و مرتبه سری زمانی (مرحله شناخت) باید پارامترهای مربوطه را برآورد کنیم. برای برآورد کردن پارامترهای یک الگوی سری زمانی می توانیم از روشهای متداول برآورد نظیر روش گشتاورها، روش درستنمایی ماکزیمم و روش کمترین مربعات استفاده میگنیم. البته باید توجه داشت که بعضی از این روشهابرای بعضی از الگوها کارایی لازم را ندارند

برآورد پارامترهای فرآیند میانگین متحرک مرتبهٔ اول.

برای این کار از تابع خودهمبستگی فرآیند میانگین متحرک مرتبهٔ اول یعنی

$$\rho_k = \begin{cases} 1 & k = 0 \\ \dfrac{-\beta}{1+\beta^2} & k = 1 \end{cases} \qquad (1)$$

استفاده می‌کنیم اگر در (۱) به جای ρ_1 برآورد نمونه‌ای آن r_1 را قرار دهیم خواهیم داشت:

$$r_1 = \frac{-\hat{\beta}}{1+\hat{\beta}^2}$$

از حل این معادله $r_1\hat{\beta}_1^2+\hat{\beta}+r_1=0$ برآورد β را محاسبه می‌کنیم $\hat{\beta}$

$$\hat{\beta}_1 = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4r_1^2}}{2r_1}$$

ضمناً باید توجه کنیم که این برآوردها باید در شرط وارون‌پذیری $|\hat{\beta}| < 1$ صدق کنند.
برای برآورد σ_z^2 از رابطهٔ $\sigma_x^2 = (1+\beta^2)\sigma_z^2$ استفاده می‌کنیم و در آن به جای β، $\hat{\beta}$ و به جای σ_x^2 از واریانس نمونه‌ای C_0 استفاده می‌کنیم لذا خواهیم داشت:

$$\hat{\sigma}_z^2 = \frac{C_0}{1+\hat{\beta}^2}$$

ب) برآورد مقدماتی پارامترهای فرآیند $MA(2)$.

از توابع خودهمبستگی ρ_k و واریانس σ_x^2 می‌توان نوشت

$$\sigma_x^2 = \operatorname{var}(X_t) = \sigma_z^2(1+\beta_1^2+\beta_2^2) \quad \text{و} \quad \rho_k = \begin{cases} 1 & k=0 \\ \dfrac{-\beta_1(1+\beta_2)}{1+\beta_1^2+\beta_2^2} & k=1 \\ \dfrac{-\beta_2^2}{1+\beta_1^2+\beta_2^2} & k=2 \\ 0 & k>2 \end{cases}$$

حال از حل دستگاه معادلات غیرخطی

$$\begin{cases} r_1 = \dfrac{-\hat{\beta}_1(1+\hat{\beta}_2)}{1+\hat{\beta}_1^2+\hat{\beta}_2^2} \\ r_2 = \dfrac{-\hat{\beta}_2}{1+\hat{\beta}_1^2+\hat{\beta}_2^2} \end{cases}$$

برآوردهای مقدماتی پارامترهای β_1 و β_2 یعنی $\hat{\beta}_1$ و $\hat{\beta}_2$ را به دست می‌آوریم و سپس $\hat{\sigma}_z^2$ را از رابطهٔ زیر محاسبه می‌کنیم.

$$\hat{\sigma}_z^2 = \frac{C_0}{1+\hat{\beta}_1^2+\hat{\beta}_2^2}$$

پیش‌بینی

۱ - پیش‌بینی با فرآیند $AR(1)$

۲ - پیش‌بینی برای فرآیند میانگین متحرک مرتبهٔ اوّل

۳- پیش‌بینی برای فرآیند اتورگرسیو و میانگین متحرک کلّی مانا

پیش‌بینی با فرآیند $AR(۱)$

$$X_t - \mu = \alpha(X_{t-۱} - \mu) + Z_t \qquad (۱)$$

ابتدا پیش‌بینی یک واحد زمان بعد $(l = ۱)$ را در نظر می‌گیریم. اگر در (۱) t را به $t + ۱$ تبدیل کنیم داریم:

$$X_{t+۱} - \mu = \alpha(X_t - \mu) + Z_{t+۱} \qquad (۲)$$

اگر از طرفین این تساوی امید شرطی بگیریم خواهیم داشت:

$$\hat{X}_t(۱) - \mu = \alpha[E(X_t | X_t, X_{t-۱}, \ldots, X_۱) - \mu] + E(Z_{t+۱} | X_t, X_{t-۱}, \ldots, X_۱) \qquad (۳)$$

با توجه به این که

$$E(X_t | X_t, X_{t-۱}, \ldots, X_۱) = X_t \qquad (۴)$$

و چون $Z_{t+۱}$ مستقل از $X_۱, X_۲, \ldots, X_{t-۱}, X_t$ است لذا

$$E(Z_{t+۱} | X_t, X_{t-۱}, \ldots, X_۱) = E(Z_{t+۱}) = ۰$$

در نتیجه معادلهٔ (۳) را به صورت زیر می‌توان نوشت

$$\hat{X}_t(۱) = \mu + \alpha(X_t - \mu) \qquad (۵)$$

یا

$$\boxed{\hat{X}_t(l) = \mu + \alpha^l (X_t - \mu) \quad , \quad l \geq ۱} \qquad (۶)$$

مثال

مثال

فرآیند $X_t - ۱۰/۲ = ۰/۷(X_{t-۱} - ۱۰/۲) + Z_t$ را در نظر می‌گیریم و فرض می‌کنیم مقدار فعلی فرآیند ۱۰/۶ باشد. در این صورت پیش‌بینی یک واحد زمان بعد عبارت است از

$$\hat{X}_t(۱) = ۱۰/۲ + ۰/۷(۱۰/۶ - ۱۰/۲) = ۱۰/۲ + ۰/۲۸ = ۱۰/۴۸$$

و برای $l = ۲$ از معادلهٔ (۶) داریم:

$$\hat{X}_t(۲) = ۱۰/۲ + ۰/۷(۱۰/۴۸ - ۱۰/۲)$$
$$= ۱۰/۲ + ۰/۱۹۶$$
$$= ۱۰/۳۹۶$$

پیش‌بینی برای فرآیند میانگین متحرک مرتبهٔ اوّل

فرآیند $X_t = \mu + Z_t - \theta Z_{t-1}$ که در آن μ میانگین فرآیند و $\{Z_t\}$ فرآیند تصادفی محض با میانگین صفر و واریانس σ_Z^2 است را در نظر می‌گیریم. اگر t را به $t+1$ تبدیل کنیم و امیدهای شرطی دو طرف را محاسبه کنیم خواهیم داشت:

$$X_{t+1} = \mu + Z_{t+1} - \theta Z_t$$

$$E(X_{t+1} | X_t, X_{t-1}, \ldots, X_1) = \mu + E(Z_{t+1} | X_t, X_{t-1}, \ldots, X_1) - \theta E(Z_t | X_t, X_{t-1}, \ldots, X_1)$$

یا

$$\hat{X}_t(1) = \mu - \theta E(Z_t | X_t, X_{t-1}, \ldots, X_1)$$

می‌دانیم Z_t (خطای در زمان حال) تابعی است از $X_t, X_{t-1}, \ldots, X_2, X_1$. لذا داریم:

$$E(Z_t | X_t, X_{t-1}, \ldots, X_1) = Z_t$$

پیش‌بینی یک مرحله بعد برای الگوی $MA(1)$ عبارت است از:

$$\hat{X}_t(1) = \mu - \theta Z_t$$

پیش‌بینی برای فرآیند اتورگرسیو و میانگین متحرک کلّی مانا

برای یک الگوی $ARMA(p,q)$ معادلهٔ تفاضلی برای محاسبهٔ پیش‌بینی‌ها عبارت است از

$$\hat{X}_t(l) = \alpha_1 \hat{X}_t(l-1) + \alpha_2 \hat{X}_t(l-2) + \cdots + \alpha_P \hat{X}_t(l-P) + \theta_0$$
$$- \theta_1 E(Z_{t+l-1} | X_t, X_{t-1}, \ldots, X_1) - \theta_2 E(Z_{t+l-2} | X_t, X_{t-1}, \ldots, X_1)$$
$$- \cdots - \theta_q E(Z_{t+l-q} | X_t, X_{t-1}, \ldots, X_1)$$

که در آن

$$E(Z_{t+j} | X_t, X_{t-1}, \ldots, X_1) = \begin{cases} 0 & j \geq 1 \\ Z_{t+j} & j \leq 0 \end{cases}$$

مثال

توجه می‌کنیم که $\hat{X}_t(j)$ یک پیش‌بینی واقعی برای $j > 0$ است لیکن

$$\hat{X}_t(j) = X_{t+j} \qquad -(P-1) \leq j \leq 0$$

مثال

برای الگوی ۱ - $X_t = \alpha_۱ X_{t-۱} + Z_t - \theta Z_{t-۱}$ داریم:

$$\hat{X}_t(۱) = \alpha X_t + \theta_۰ - \theta Z_t \qquad (۱)$$

و به‌طور کلی،

$$\hat{X}_t(۲) = \alpha \hat{X}_t(۱) + \theta_۰$$

$$\hat{X}_t(l) = \alpha \hat{X}_t(l-۱) + \theta_۰ \qquad l \geq ۲ \qquad (۲)$$

از حل معادلات (۱) و (۲) و همچنین با تکرار می‌توان عبارت صریح زیر را پیدا کرد.

$$\hat{X}_t(l) = \mu + \alpha^l (X_t - \mu) - \alpha^{l-۱} \theta Z_t \qquad l \geq ۱$$

در عین حال به ازای $l > q$ داریم:

$$\hat{X}_t(l) = \alpha_۱ \hat{X}_t(l-۱) + \alpha_۲ \hat{X}_t(l-۲) + \cdots + \alpha_P \hat{X}_t(l-P) + \theta_۰ \qquad l > q$$

فصل هفتم

فرآیند های مانا در قلمرو فرکانس

فصل هفتم : فرآیند های مانا در قلمرو فرکانس

اهداف فصل

مقدمه

تابع توزیع طیفی

تابع چگالی طیفی

تابع مولد اتوکواریانس

هدف کلی

آشنایی با تابع چگالی طیفی و تحلیل نوسانات سری زمانی در فرکانسهای مختلف.

هدفهای رفتاری

پس از مطالعهٔ این فصل می‌توانید:

- الگویی برای یک سری زمانی با مؤلفه‌های دوره‌ای ارائه دهید،
- قضیهٔ وینر ـ خنیتشین را دربارهٔ وجود تابع توزیع طیفی بنویسید،
- تابع توزیع طیفی را تعریف کنید،
- قضیهٔ تجزیهٔ والد یک فرآیند مانا را بنویسید،
- شکل نرمال‌شدهٔ تابع توزیع طیفی را بنویسید،
- تابع چگالی طیفی (طیف) را تعریف کنید،

- تابع اتوکوواریانس و تابع چگالی طیفی را مقایسه کنید و رابطهٔ بین آنها را بنویسید،
- تابع چگالی طیفی نرمال‌شده را تعریف کنید،
- طیف یک فرآیند تصادفی محض را به دست آورید،
- فرآیند *white noise* را تعریف کنید،
- طیف فرآیند اتورگرسیو مرتبهٔ اول را به دست آورید،
- طیف فرآیند میانگین متحرک مرتبهٔ اول را به دست آورید،
- تابع مولد اتوکوواریانس را تعریف کنید،
- رابطهٔ بین طیف و تابع مولد اتوکوواریانس را بیان کنید،
- با استفاده از تابع مولد اتوکوواریانس، واریانس و اتوکوواریانس فرآیند را به دست آورید،

مقدمه

روشهای سری زمانی در فصول گذشته که ارائه گردید از توابع اتوکوواریانس و خودهمبستگی و خودهمبستگی جزئی برای مطالعهٔ تکامل تدریجی یک سری زمانی با توجه به الگوهای پارامتری استفاده می‌کند که این روشها را ***تحلیل در قلمرو زمان*** می‌نامند. تحلیل در قلمرو فرکانس روش دیگری است که نوسانات سری زمانی را برحسب رفتار سینوسی در فرکانسهای مختلف بیان می‌کند. در این فصل تابع مهم دیگری که «تابع چگالی طیفی» یا به اختصار «طیف» نامیده می‌شود و در واقع مکمل تابع اتوکوواریانس است را معرفی می‌کنیم. ضرورت روشهای فرکانس در زمینه‌هایی چون مهندسی برق، ژئوفیزیک و هواشناسی به‌طور گسترده‌ای احساس می‌شود.

تابع توزیع طیفی

تابع توزیع طیفی

تذکر

قضیه وینر و خنیتشن

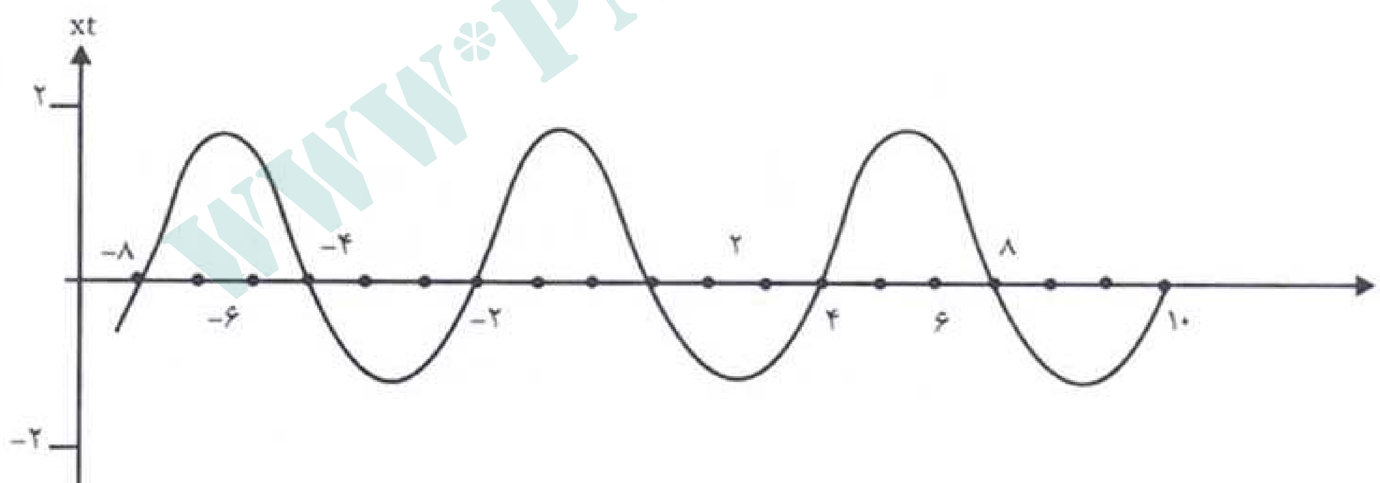
شکل نرمال شده تابع توزیع طیفی

تابع توزیع طیفی

فرض کنید یک سری زمانی شامل مؤلفه‌ای دوره‌ای با فرکانس معلوم است، در این صورت الگوی طبیعی زیر را داریم،

$$X_t = A\cos(\omega t + \theta) + Z_t$$

در این الگو ω فرکانس تغییرات دوره‌ای، A دامنهٔ تغییرات، θ فاز و Z_t یک سری تصادفی مانا را نشان می‌دهد شکل زیر مثالی از مؤلفهٔ دوره‌ای را نشان می‌دهد.



نمونه‌ای از $A\cos(\omega t + \theta)$، به ازای $A = ۲, \omega = \frac{\pi}{۳}, \theta = \frac{\pi}{۶}$

در این صورت می‌توان نشان داد که هر فرآیند مانای گسسته‌ای که در فاصلهٔ زمانی واحد اندازه‌گیری می‌شود را می‌توانیم به شکل

$$X_t = \int_0^{\pi} \cos \omega t \, dv(\omega) + \int_0^{\pi} \sin \omega t \, du(\omega)$$

نمایش دهیم که در آن $U(\omega)$ و $V(\omega)$ فرآیندهای نابستهٔ با نموهای متعامدی هستند که به ازای هر ω واقع در فاصلهٔ $(0, \pi)$ تعریف شده باشند. منظور از این مطلب آن است که متغیرهای تصادفی $[U(\omega_2) - U(\omega_1)]$ و $[U(\omega_4) - U(\omega_3)]$ در بازه‌های غیرمتقاطع (ω_1, ω_2) و (ω_3, ω_4) ناهمبسته‌اند. معادلهٔ فوق را نمایش طیفی فرآیند می‌نامند. نکتهٔ اصلی در معرفی نمایش طیفی فوق این است که نشان دهیم هر فرکانس واقع در فاصلهٔ $(0, \pi)$ در تغییرات فرآیند می‌تواند چقدر سهیم باشد.

تذکر:

باید توجه داشته باشیم که زاویهٔ $(\omega t + \theta)$ برحسب رادیان اندازه‌گیری می‌شود. چون ω برابر است با تعداد رادیانها در واحد زمان لذا بعضی اوقات فرکانس «زاویه‌ای» یا به اختصار فرکانس نامیده می‌شود. بعضی‌ها فرکانس را به صورت $f = \omega/2\pi$ یعنی «تعداد دوره‌ها در واحد زمان» در نظر می‌گیرند، این فرکانس اغلب برای تعبیر و تفسیر داده‌ها به‌کار برده می‌شود و $2\pi/\omega$ را «طول موج» می‌نامند.

قضیهٔ وینر و خنیتشین (مربوط به فرآیندهای حقیقی)

برای هر فرآیند تصادفی مانا با تابع اتوکوواریانس γ_k، تابع یکنوای افزایشی $F(\omega)$ وجود دارد به طوری که

$$\gamma_k = \int_{0} \cos k\omega \, dF(\omega)$$

این معادله را نمایش طیفی تابع اتوکوواریانس و $F(\omega)$ را تابع توزیع طیفی می‌نامند. تابع توزیع طیفی را به صورت زیر نیز می‌توان تعریف کرد.

شکل نرمال‌شدهٔ تابع توزیع طیفی

گاهی اوقات از شکل نرمال‌شدهٔ $F(\omega)$ که با رابطهٔ

$$F^*(\omega)=\frac{F(\omega)}{\sigma_x^2}$$

یعنی نسبت واریانس حاصل از فرکانس در بازهٔ $(\omega, 0)$ داده می‌شود استفاده مـی‌شود. چـون $F^*(\pi)=1$ و $F^*(\omega)$ یکنوایی افزایشی است لذا $F^*(\omega)$ خواصی مشابه با تابع توزیع تجمعی دارد. حال تابع چگالی طیفی را معرفی می‌کنیم.

تابع چگالی طیفی

تعریف تابع چگالی طیفی

رابطه بین تابع اتوکواریانس و تابع چگالی طیفی

تابع چگالی طیفی یک فرآیند تصادفی محض

طیف فرآیند اتورگرسیو مرتبه اول

طیف فرآیند میانگین متحرک مرتبه اول

تابع چگالی طیفی (طیف)

برای یک فرآیند مانای گسسته تصادفی، تابع توزیع طیفی تـابعی پـیوسته بـر $(\circ, \pi)$ است و می‌توانیم از آن نسبت به ω مشتق بگیریم. مشتق این تابع توزیع طیفی را با $f(\omega)$ نمایش داده و به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$f(\omega) = \frac{dF(\omega)}{d\omega}$$

و آن را تابع چگالی طیفی (طیف) می‌نامیم.

اگر $f(\omega)$ وجود داشته باشد از رابطهٔ

$$\gamma(k) = \int_{0}^{\pi} \cos k\omega \, dF(\omega)$$

خواهیم داشت

$$\gamma(k) = \int_{0}^{\pi} \cos k\omega \, f(\omega) \, d\omega$$

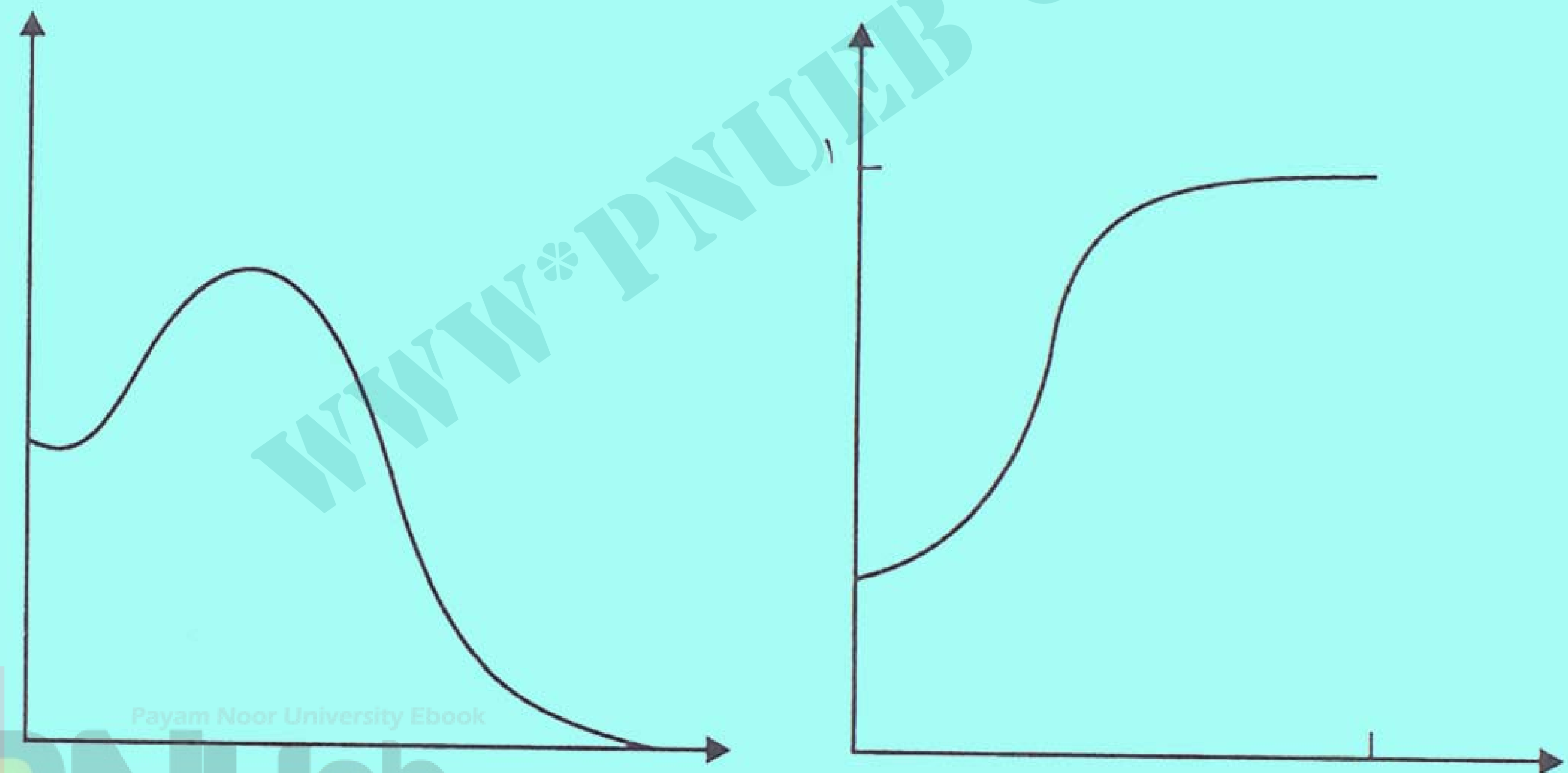
که از آن با فرض $k = 0$ عبارت زیر حاصل می‌شود

$$\gamma_0 = \sigma_x^2 = \text{واریانس فرآیند}$$

$$= \int_{0}^{\pi} f(\omega) \, d\omega = F(\pi)$$

$f(\omega)d\omega$ را می‌توان به عنوان سهم واریانس مؤلفه‌های با فرکانسهای واقع در فاصلهٔ $(\omega, \omega + d\omega)$ تعبیر نمود.

اگر تابع چگالی طیفی را داشته باشیم و آن را رسم کنیم سطح زیـر منحنی آن برابر واریانس فرآیند خواهد بود. مثالی از تابع چگالی طیفی همراه با تـابع تـوزیع طیفی نرمال‌شدهٔ مربوط به آن در شکل زیر نشان داده شده است.



رابطهٔ بین تابع اتوکوواریانس و تابع چگالی طیفی

به چند نکتهٔ مهم زیر توجه کنید.

۱. تابع اتوکوواریانس و تابع چگالی طیفی (طیف) راههای معادل بیان یک فرآیند تصادفی مانا هستند که یکدیگر را در عمل تکمیل می‌کنند.

۲. دو تابع اتوکوواریانس و چگالی طیفی اطلاعات یکسانی دارند لیکن بیان آنها متفاوت است، گاهی اوقات یک روش در قلمرو زمان که بر پایهٔ تابع اتوکوواریانس قرار دارد مفیدتر است در حالی که بعضی اوقات یک روش در قلمرو فرکانس ترجیح داده می‌شود.

۳. رابطهٔ بین این دو تابع تا اندازه‌ای مشابه رابطهٔ بین چگالی احتمال و تابع مشخصهٔ یک توزیع احتمال پیوسته است.

$$\gamma(k) = \int_{0}^{\pi} \cos k\omega \, f(\omega)\, d\omega \iff f(\omega) = \frac{1}{\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \gamma(k) e^{-ik\omega}$$

تابع چگالی طیفی «تبدیل فوریه» تابع اتوکوواریانس است. با توجه به زوج بودن تابع اتوکوواریانس $(\gamma(k) = \gamma(-k))$ می‌توان نوشت

$$f(\omega)=\frac{۱}{\pi}\left[\gamma(۰)+\sum_{k=-\infty}^{-۱}\gamma(k)e^{-ik\omega}+\sum_{k=۱}^{\infty}\gamma(k)e^{-ik\omega}\right]$$

$$=\frac{۱}{\pi}\left[\gamma(۰)+\sum_{k=۱}^{\infty}\gamma(-k)e^{ik\omega}+\sum_{k=۱}^{\infty}\gamma(k)e^{-ik\omega}\right]$$

$$=\frac{۱}{\pi}\left[\gamma(۰)+۲\sum_{k=۱}^{\infty}\gamma(k)\left\{e^{ik\omega}+e^{-ik\omega}\right\}\right]$$

$$=\frac{۱}{\pi}\left[\gamma(۰)+۲\sum_{k=۱}^{\infty}\gamma(k)\cos k\omega\right]$$

تابع چگالی طیفی (طیف) یک فرآیند تصادفی محض

تابع اتوکوواریانس فرآیند تصادفی محض $\{Z_t\}$ عبارت است از:

$$\gamma(k)=\begin{cases}\sigma_Z^2 & , \quad k=0\\ 0 & , \quad k\neq 0\end{cases}$$

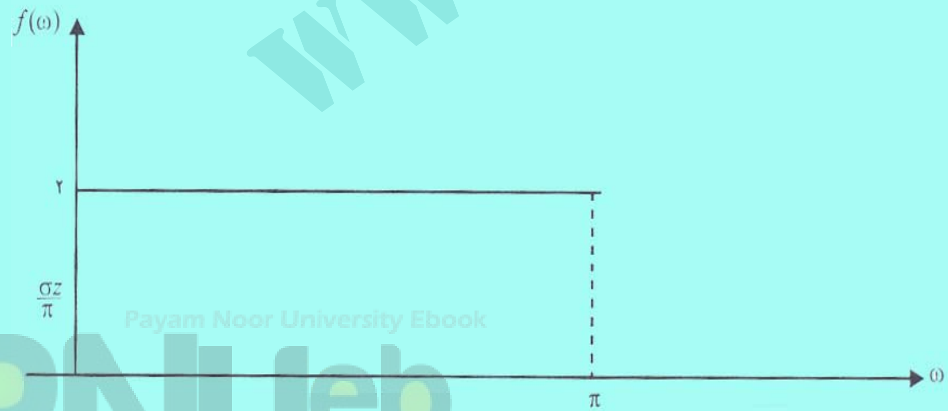
بنابراین با توجه به

$$f(\omega)=\frac{1}{\pi}\left[\gamma(0)+2\sum_{k=1}^{\infty}\gamma(k)\cos k\omega\right]$$

می‌توان نوشت

$$f(\omega)=\frac{1}{\pi}\left[\sigma_Z^2+0\right]=\frac{\sigma_Z^2}{\pi}$$

که از آن نتیجه می‌شود که طیف در فاصلهٔ $(0,\pi)$ مقدار ثابتی است و این بدان معنی است که سهم واریانس در تمام فرکانسها مساوی است.



طیف فرآیند اتورگرسیو مرتبهٔ اول

این فرآیند را به صورت $X_t = \alpha X_{t-۱} + Z_t$ تعریف کردیم و دیدیم که تابع اتوکوواریانس آن به‌صورت زیر است

$$\gamma(k) = \sigma_X^۲ \alpha^{|k|} \quad , \quad k = ۰, \pm ۱, \ldots$$

بنابراین با توجه به

$$f(\omega) = \frac{۱}{\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \gamma(k) e^{-ik\omega}$$

تابع چگالی طیفی عبارت است از

$$f(\omega) = \frac{\sigma_Z^۲}{\pi(۱ - ۲\alpha\cos\omega + \alpha^۲)}$$

ملاحظه می‌کنیم که شکل طیف بستگی به علامت α دارد. به‌طوری که در شکل زیر نشان داده شده وقتی $\alpha > 0$ و در نتیجه خودهمبستگی سری مثبت است، طیف تحت تأثیر مؤلفه‌های با فرکانس پایین واقع می‌شود. اگر $\alpha < 0$ خودهمبستگی سری است و طیف تحت تأثیر مؤلفه‌های با فرکانس بالا واقع می‌شود. به بیان دیگر تحت تأثیر قرار گرفتن طیف به وسیلهٔ فرکانسهای پایین نسبتاً هموار بودن سری را نشان می‌دهد، در صورتی که تحت تأثیر قرار گرفتن طیف با فرکانسهای بالا ناهموار بودن سری را نتیجه می‌دهد.

طیف فرآیند میانگین متحرک مرتبهٔ اول

این فرآیند را به صورت $X_t = Z_t - \beta Z_{t-1}$ تعریف نمودیم و ثابت کردیم تابع خودهمبستگی آن عبارت است از

$$\rho_k = \begin{cases} 1 & k = 0 \\ \dfrac{-\beta}{1+\beta^2} & k = 1 \\ 0 & k \geq 2 \end{cases}$$

بنابراین با توجه به

$$f^*(\omega) = \frac{1}{\pi}\left[1 + 2\sum_{k=1}^{\infty} \rho_k \cos k\omega\right]$$

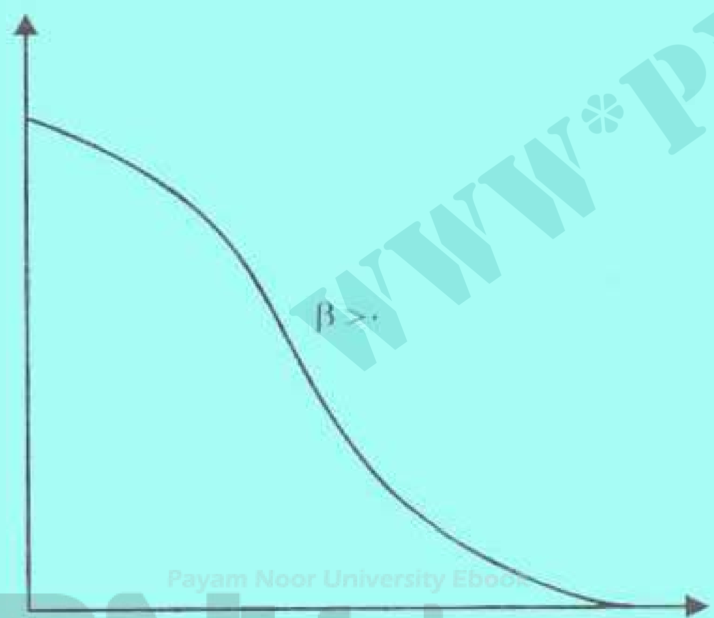
تابع چگالی طیفی نرمال‌شده در فاصلهٔ $(0, \pi)$ به صورت زیر است

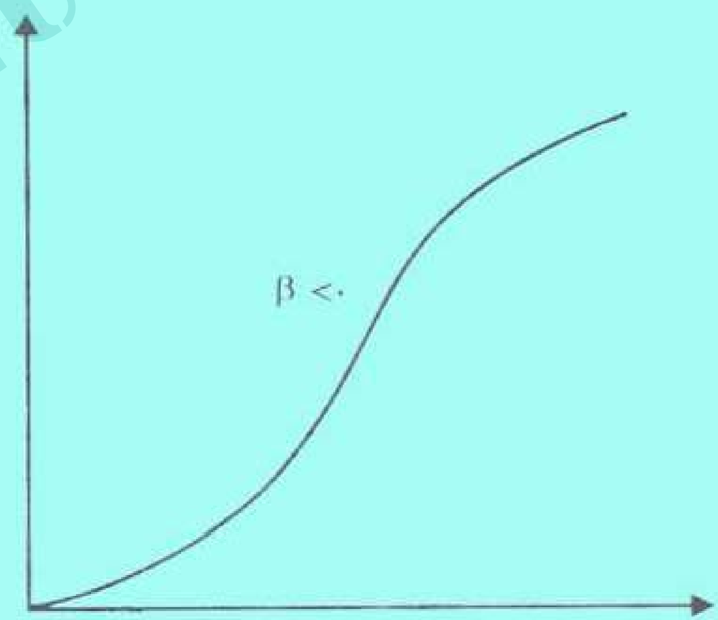
$$f^*(\omega) = \frac{1}{\pi}\left[1 - \frac{2\beta\cos\omega}{1+\beta^2}\right]$$

بنابراین تابع چگالی طیفی عبارت است از

$$f(\omega) = \sigma_x^2 f^*(\omega) = \frac{\sigma_z^2}{\pi}\left[1 + \beta^2 - 2\beta\cos\omega\right]$$

ملاحظه می‌کنیم که شکل $f(\omega)$ به علامت β بستگی دارد. بنابراین وقتی β مثبت است خودهمبستگی سری منفی بوده و در نتیجه نسبتاً ناهموار است که با یک طیف با مقادیر بالا در فرکانسهای بالا نشان داده می‌شود. همین‌طور وقتی β منفی است خودهمبستگی سری مثبت بوده و در نتیجه نسبتاً هموار است. این دو حالت در شکل زیر نشان داده می‌شود و به‌طوری که انتظار داشتیم تابع خودهمبستگی در قلمرو زمان و طیف در قلمرو فرکانس درست اطلاعات یکسانی را در مورد فرآیند دارا می‌باشند.





تابع مولد اتوکوواریانس

تابع مولد اتوکوواریانس یک فرآیند مانای گسسته که آن را به $\Gamma(B)$ نمایش می‌دهیم یا

$$\Gamma(B)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\gamma(k)B^{k}$$

رابطهٔ بین طیف و تابع مولد اتوکوواریانس

اگر دنبالهٔ اتوکوواریانسهای معلوم $\gamma(k)$ مطلقاً جمع‌پذیر باشد آنگاه طیف یا چگالی طیفی وجود دارد و دیدیم که طیف به صورت زیر است

$$f(\omega)=\frac{1}{\pi}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\gamma(k)e^{-ik\omega}$$

تذکر

مثال

بنابراین در مقایسهٔ این تابع با تابع مولد اتوکوواریانس رابطهٔ زیر عاید می‌شود

$$f(\omega)=\frac{1}{\pi}\Gamma(e^{-i\omega})$$

از این نتیجه می‌توان برای به دست آوردن طیف بسیاری از فرآیندهایی که معمولاً مورد استفاده قرار می‌گیرند استفاده کرد.

تذکر ۱: با استفاده از تابع مولد اتوکوواریانس $\Gamma(B) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \gamma(k) B^k$ می‌توان واریانس (γ_0) و اتوکوواریانس در تأخیر k، ($\gamma(k)$) را به دست آورد. می‌توان نوشت،

$$\Gamma(B) = \cdots + \gamma(-2)B^{-2} + \gamma(-1)B^{-1} + \gamma(0)B^{0} + \gamma(1)B^{1} + \gamma(2)B^{2} + \cdots$$

ملاحظه می‌کنیم که واریانس فرآیند یعنی γ_0 ضریب $B^0 = 1$ و اتوکوواریانس در تأخیر k، $\gamma(k)$ ضریب B^k و B^{-k} است.

تذکر ۲: می‌توان نشان داد که برای یک فرآیند میانگین متحرک نامتناهی $X_t = \theta(B)Z_t$

که در آن $\{Z_t\}$ فرآیند تصادفی محض و $\theta(B) = \sum_{j=0}^{\infty} b_j B^j$ است تابع مولد اتوکوواریانس

به صورت زیر است

$$\Gamma(B) = \sigma_z^2 \theta(B)\theta(B^{-1})$$

مثال

تابع مولد اتوکوواریانس یک فرآیند اتورگرسیو مرتبهٔ اول را به دست آورده پس با توجه به رابطه‌ای که بین این تابع و طیف فرآیند وجود دارد تابع چگالی طیفی فرآیند را به دست آورید.

حل: فرآیند $AR(1)$ مانای $(1-\phi B)X_t = Z_t$ راکه در آن $\{Z_t\}$ فرآیند تصادفی محض است در نظر می‌گیریم. داریم

$$X_t = \frac{Z_t}{(1-\phi B)}$$

تذکر : می‌توان نشان داد که برای یک فرآیند میانگین متحرک نامتناهی

$$X_t = \theta(B) Z_t$$

که در آن $\{Z_t\}$ فرآیند تصادفی محض و $\theta(B)=\sum_{j=0}^{\infty} b_j B^j$ است تابع مولد اتوکوواریانس به صورت زیر است

$$\Gamma(B)=\sigma_z^2\theta(B)\theta(B^{-1})$$

$$\Gamma(B)=\sigma_z^2\frac{1}{(1-\phi B)}\times\frac{1}{(1-\phi B^{-1})}$$

حال از رابطهٔ $f(\omega)=\frac{1}{\pi}\Gamma(e^{-i\omega})$ استفاده کرده و طیف فرآیند $AR(1)$ را به صورت زیر پیدا می‌کنیم

$$\begin{aligned}f(\omega)&=\frac{\sigma_z^2}{\pi}\times\frac{1}{(1-\phi e^{-i\omega})(1-\phi e^{i\omega})}\\&=\frac{\sigma_z^2}{\pi}\times\frac{1}{(1+\phi^2-2\phi\cos\omega)}\end{aligned}$$

راهنمای استفاده از برنامه پاورپوینت برای سری زمانی :

دسترسی به کلیه مطالب از طریق لینکهای موجود در صفحات امکان پذیرمی باشد . و علاوه بر عناوین فصلها و بخشها که به صورت زیر خط دار مشخص شده اند سایر کلمات موجود در صفحات که با شماره و یا حرف مشخص شده اند و همچنین کلماتی نظیر مثال، حل،تذکر، شکل، تبصره،... لینکهایی هستند که صفحات مرتبط با هر کلمه را نشان می دهند.

شناسایی لینکهای صفحه با استفاده از ماوس :

با حرکت و ثابت نگه داشتن نشانگر بر روی متن مورد نظرچنانچه آن متن دارای لینک باشد علامت دست ظاهر میشود. که با کلیک بر روی آن می توان به صفحات مرتبط با آن لینک رفت.

شناسایی لینکهای صفحه با استفاده از صفحه کلید :

با زدن دکمه *Tab* از صفحه کلید، کلیه لینکهای موجود در صفحه به ترتیب به وسیله یک مستطیل خط چین شده به نمایش در می آیند که با زدن دکمه *Enter* میتوان به صفحات مرتبط با آن لینک رفت.

با زدن دکمه بازگشت به شکل در هرمرحله می توان به صفحه لینک مرتبط بازگشت

خروج