فصل یازدهم

۱-۱۱ آزمون فرض

در فصل قبل با روشهای برآورد پارامترهای مجهول جامعه آشنا شدید، به عبارتی نشان دادیم که چگونه می‌توان با استفاده از نتایج حاصل از نمونه‌گیری پارامترهای مجهول یک جامعه آماری با توزیع معلوم را بدست آورد. حال در این فصل نشان می‌دهیم که چگونه می‌توان در مورد صحت یک فرضیه بر اساس یک جامعه آماری قضاوت نمود. به عنوان مثال فرض می‌کنیم که یک داروی بخصوص بر روی یک بیماری اثر مثبتی دارد به این ترتیب می‌بایستی برای اثبات این فرضیه، عده‌ای از بیماران را انتخاب کرده و دارو را روی آنها آزمایش می‌کنیم و با توجه به نتایج بدست آمده در مورد صحت یا عدم صحت فرضیه مورد نظر تصمیم می‌گیریم. روشی که در آن فرض مربوطه را پذیرفته یا رد می‌کنیم به آزمون فرض معروف می‌باشد، در این فصل نحوه آزمون فرضهای مختلف را معرفی می‌کنیم.

۲-۱۱

۱۱ . ۱ فرضها و آزمونها

تعریف دقیق فرض و آزمون فرض عبارتند از:

فرض: یک فرض عبارتست از گزاره‌ای درباره قانون احتمال یک متغیر تصادفی (که قابل نمونه‌گیری باشد)

آزمون فرض: نمونه‌گیری از متغیر تصادفی مربوطه و تصمیم‌گیری در مورد پذیرفتن یا رد فرض مورد نظر بر اساس نمونه بدست آمده.

بطور کلی نتیجه یک آزمون فرض یکی از چهار مورد زیر می‌باشد:

۱- فرض را رد می‌کنیم هنگامی که واقعاً صحیح باشد.

۲- فرض را رد می‌کنیم هنگامی که واقعاً صحیح نباشد.

۳- فرض را رد می‌پذیریم هنگامی که واقعاً صحیح باشد.

۴- فرض را رد می‌پذیریم هنگامی که واقعاً صحیح نباشد.

برای وشن شدن مطلب به مثال زیر توجه کنید:

۳-۱۱ مثال ۱: گروهی از پزشکان معتقدند یک دارو نیروزا می‌باشد. برای تصمیم‌گیری در این مورد آنرا روی ۲۰ نفر از ورزشکاران آزمایش می‌کنند. در صورتی که دارو در بیشتر از ۷۰ درصد مواقع مثبتی بر عملکرد عادی ورزشکاران داشته باشد، پزشکان آنرا جزء داروهای نیروزا طبقه بندی می‌کنند. متغیر تصادفی X را برابر تعداد ورزشکارانی در بین ۲۰ نفر در نظر می‌گیریم که دارو تاثیر مثبتی بر عملکرد آنها داشته است. در این صورت X یک متغیر تصادفی دو جمله‌ای با پارامترهای $X \sim B(p\ ,\ ۲۰)$ می‌باشد. که در آن p درصد موثر بودن دارو می‌باشد و مقداری نامعلوم می‌باشد.

نیروزا بودن دارو به این معنی است که $p > ۰/۷۰$ به عبارتی اگر از روی نمونه‌ها به این نتیجه برسیم که $p > ۰/۷۰$ می‌باشد در این صورت می‌توان گفت که دارو نیروزا بوده است. نتایج حاصل از نمونهٔا یکی از دو حالت (فرض) زیر را نتیجه می‌دهد:

۱- داروی مورد نظر نیروزا می‌باشد : $p > ۰/۷۰$

۲- داروی مورد نظر نیروزا نمی‌باشد : $p > ۰/۷۰$

۴-۱۱ در روش آزمون یکی از فرضها را فرض خنثی یا فرض صفر در نظر می‌گیریم و آنرا با $H_۰$ نمایش می‌دهیم به عبارتی $H_۰$ در این مثال همان فرض است که مورد ادعای پزشکان می‌باشد یعنی فرض داروی مورد نظر نیروزا می‌باشد $(p > ۰/۷۰)$ فرض $H_۰$ خواهد بود.

در مقابل هر فرضی که فرض $H_۰$ را رد کند فرض مخالف یا مکمل نامیده می‌شود و با $H_۱$ نمایش داده می‌شود. که در این مثال فرض داروی مورد نظر نیروزا نمی‌باشد $(p \le ۰/۷۰)$ فرض $H_۱$ می‌باشد. بنابراین:

دارو نیروزاست $H_۰ = p > ۰/۷۰$

دارو نیروزا نیست $H_1 = p \leq ۰/۷۰$

توجه کنید که فرض مخالف صورتهای متفاوتی می‌تواند داشته باشد مثلاً اگر فرض $H_\circ$ برابر $p = ۰/۷$ می‌بود در این صورت فرض H_1 هر یک از حالات زیر می‌توانست باشد:

$H_1 : p > ۰/۷$

$H_1 : p \neq ۰/۷$

$H_1 : p = ۰/۵$

تصمیم‌گیری در مورد اینکه کدام فرض را فرض مخالف در نظر بگیریم اهمیت زیادی دارد و معمولاً به صورت مساله بستگی دارد.
در ایم مثال پزشکان برای اثبات ادعای خود ۲۰ ورزشکار را انتخاب نموده و با توجه به متغیر تصادفی X این احتمال وجود دارد که نتایج طوری بدست آیند که پرشکان دارو را نیروزا معرفی کنند در حالی که واقعاً دارو نیروزا بوده است.

۵-۱۱ به عنوان مثالی دیگر فرض کنید یک سکه را ۲۰ مرتبه پرتاب کنیم و ۱۶ شیر مشاهده کنیم بوضوح مشاهدهٔ ۱۶ شیر تنها با ۲۰ مرتبه پرتاب سکه دلیلی بر ناسالم بودن سکه نمی‌باشد در مثال داروی نیروزا هم این مطلب صدق می‌کند. بنابراین در حالت کلی چهار حالت زیر بدست می‌آید:

۱- $H_\circ$ را می‌پذیریم هنگامی که واقعاً صحیح باشد.
۲- $H_\circ$ را رد می‌کنیم هنگامی که واقعاً صحیح باشد.
۳- $H_\circ$ را می‌پذیریم هنگامی که واقعاً صحیح نباشد.
۴- $H_\circ$ را رد می‌کنیم هنگامی که واقعاً صحیح نباشد.

مشاهده می‌کنید که حالت دوم و سوم نشان دهنده خطا در تصمیم‌گیری می‌باشند حالت دوم را خطای نوع اول (ریسک فروشنده می‌نامیم و حالت سوم را خطای نوع دوم (ریسک مشتری) می‌نامیم. خطای نوع اول را با α نمایش می‌دهند و آنرا سطح معنی‌دار یا سطح تشخیص آزمون می‌نامند و خطای نوع دوم را با B نمایش می‌دهند.

۶-۱۱ ۱۱ . ۲ ناحیه بحرانی و آماره آزمون

برای بیان ناحیه بحرانی و آماره آزمون مجدداً به مثال ۱ توجه کنید. در مثال ۱ نشان دادیم که:

$H_\circ : p > ۰/۷۰$

$H_1 : p \leq ۰/۷۰$

چگونگی انجام آزمون به این ترتیب است که متغیر تصادفی X را برابر تعداد ورزشکاران که دارو بروی عملکرد آنها تاثیر مثبتی داشته در نظر می‌گیریم در این صورت اگر مقدار مشاهده شده X مثلاً برابر ۱۵ باشد در نتیجه $p = \frac{۱۵}{۲۰} = \frac{۳}{۴} = ۰/۷۵$ و فرض $H_\circ$ را قبول می‌کنیم زیرا $p > ۰/۷۰$ اما اگر مقدار مشاهده شده X مثلاً برابر ۵ باشد بوضوح فرض $H_\circ$ را رد می‌کنیم و فرض H_1 را می‌پذیریم زیرا $p = \frac{۵}{۲۰} = ۰/۲۵$ و $p \leq ۰/۷۰$.

در حالت کلی زمانی فرض $H_\circ$ را می‌پذیریم که مقدار مشاهده شدهٔ X از عدد ۱۴ بیشتر باشد زیرا: $p = \frac{۱۴}{۲۰} = ۰/۷۰$

و اگر مقدار مشاهده شده X کوچکتر یا مساوی ۱۴ باشد فرض $H_\circ$ را رد می‌کنیم یعنی اگر مقادیر مشاهده شده X متعلق به مجموعه $C = \{x \mid x \leq ۱۴\}$ باشد آنگاه $H_\circ$ را رد می‌کنیم و در غیر این صورت $H_\circ$ را می‌پذیریم. به آماره X که بر اساس مقادیر مشاهده شده آن $H_\circ$ را رد می‌کنیم یا می‌پذیریم آماره آزمون گویند و به ناحیه C که به ازای مقادیر آن $H_\circ$ رد می‌شود ناحیه بحرانی می‌گوییم. به تعریف زیر توجه کنید:

۷-۱۱ تعریف: به آماره $T = T(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ که بر اساس مقادیر مشاهده شده آن یک فرض را می‌پذیریم یا رد می‌کنیم، آماره آزمون گویند. و به ازای مجموعه مقادیری از این آماره که بر اساس آنها فرض H_0 رد می‌شود ناحیه بحرانی آزمون می‌گوییم و با نماد C نمایش می‌دهیم و به متمم ناحیه بحرانی که با C' نمایش می‌دهیم ناحیه پذیرش آزمون می‌گوییم.

با توجه به تعریف در آزمون یک فرض به این صورت عمل می‌کنیم که ابتدامقادیر نمونه‌های $X_1, X_2, \cdots, X_n$ را جمع آوری می‌کنیم و بر اساس آنها آماره آزمون را که بشکل $t = T(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ می‌باشد تشکیل می‌دهیم حال اگر $t \in C$ باشد فرض H_0 را رد می‌کنیم و در غیر این صورت آن را می‌پذیریم.

۸ .۱۱. ۳ خطای آزمون

اشاره کردیم که رد تصمیم‌گیری ممکن است دو نوع خطای نوع اول (α) و نوع دوم (β) رخ دهد، که در هر دو حالت نتیجه مطلوب نمی‌باشد و در عمل می‌خواهیم تا جای ممکن مقدار خطای α و β را کاهش دهیم. با استفاده از احتمالات شرطی خطای نوع اول و دوم بصورت زیر بدست می‌آیند:

$$\alpha = p\,(\text{فرض } H_0 \text{ رد شود} \mid H_0 \text{ درست باشد}) = p(T(X_1, \cdots X_n) \in C \mid H_0 \text{ درست باشد})$$

$$\beta = p\,(\text{فرض } H_0 \text{ پذیرفته شود} \mid H_1 \text{ درست باشد}) = p(T(X_1, \cdots X_n) \notin C \mid H_1 \text{ درست باشد})$$

اگر در آزمون فرض به این نتیجه برسیم که H_0 باید رد شود و در حالی که H_1 واقعاً درست باشد یعنی مقدار احتمال زیر را داشته باشیم:

$$p\,(H_0 \text{ رد شود} \mid H_1 \text{ درست باشد})$$
$$= p\,(H_0 \text{ رد شود} \mid H_0 \text{ واقعاً نادرست باشد})$$

آشکار است که هر چه مقدار این احتمال بیشتر باشد آزمون نتیجه دقیق‌تری بدست داده است به همین دلیل به این احتمال توان آزمون گفته می‌شود. و با علامت β^* نمایش داده می‌شود.

توجه کنید که مقدار β^* برابر با $1-\beta$ می‌باشد:

$$\beta^* = p\,(H_0 \text{ رد شود} \mid H_1 \text{ درست باشد}) = 1 - p\,(H_0 \text{ پذیرفته شود} \mid H_1 \text{ درست باشد})$$
$$= 1 - \beta$$

۹ مثال ۲: شخصی ادعا می‌کند که سکه استفاده شده برای تعین زمین بازی در یک مسابقه فوتبال یکنواخت نبوده و با احتمال ۰/۶ شیر می‌آمده است. برای تحقیق صحت ادعای وی سکه را ۲۰ مرتبه پرتاب می‌کنیم مطلوبست:

الف) تعین ناحیه بحرانی آزمون و فرضهای آزمون.

ب) محاسبه مقدار احتمال خطای نوع اول و خطای نوع دوم.

ج) محاسبه توان آزمون.

حل: الف) X را تعداد شیرهای بدست آمده در ۲۰ مرتبه پرتاب سکه در نظر می‌گیریم در این صورت X یک متغیر تصادفی دو جمله‌ای با پارامتر p و ۲۰ می‌باشد. $X \sim \beta(20, p)$.

طبق تعریف فرض صفر خلاف ادعای مطرح شده می‌باشد بنابراین:

$$\begin{cases} H_0 : \ p = \frac{1}{2} \\ H_1 : \ p = \frac{6}{10} \end{cases}$$

با توجه به اینکه در متغیر تصادفی برنولی $\mu = np$ می‌باشد بنابراین اگر در ۲۰ مرتبه پرتاب سکه حداقل تعداد $12 = 20 \times \frac{6}{10}$ شیر مشاهده کنیم می‌بایستی فرض H_0 را رد کنیم به این ترتیب ناحیه بحرانی عبارتست از:

$$C = \{x \mid x \geq 12\}$$

ب) محاسبه خطای نوع اول:

$\alpha = p\,(X \in C \mid H_0 \text{ درست باشد}) = p(X \geq ۱۲ \mid p = \frac{۱}{۲})$

$۱ - p\,(X \leq ۱۱ \mid p = \frac{۱}{۲}) = ۱ - ۰/۷۴۸۳ = ۰/۲۵۱۷$

محاسبه خطای نوع دوم:

$\beta = p\,(X \notin C \mid H_۱ \text{ درست}) = p(X < ۱۲ \mid p = ۰/۶)$
$= p(X \leq ۱۱ \mid p = ۰/۶) = ۰/۴۰۴۴$

ج) محاسبه توان آزمون:

$\beta^* = ۱ - \beta = ۰/۵۹۵۶$

ملاحظه می‌کنید که احتمال خطای نوع اول کم و احتمال خطای نوع دوم زیاد می‌باشد.

۱۰-۱۱ مثال ۳: در مثال قبل اگر ناحیه بحرانی بصورت $C = \{x \mid x \geq ۱۳\}$ باشد احتمال خطای نوع اول و دوم و توان آزمون را محاسبه کنید؟

حل:

$\alpha = p(X \geq ۱۳ \mid p = \frac{۱}{۲}) = ۱ - p\,(X \leq ۱۲ \mid p = \frac{۱}{۲}) = ۱ - ۰/۸۶۸۴ = ۰/۱۳۱۶$

$\beta = p(X < ۱۳ \mid p = ۰/۶) = p\,(X \leq ۱۲ \mid p = ۰/۶) = ۰/۵۸۴۱$

$\beta^* = ۱ - \beta = ۰/۴۱۵۹$

ملاحظه می‌کنید که در حالت دوم با متغیر ناحیه بحرانی مقدار احتمال نوع اول کاهش یافت اما این مساله موجب افزایش احتمال خطای نوع دوم شده است.

بنابراین می‌بایستی ناحیه بحرانی طوری انتخاب شود که همزمان با در نظر گرفتن یک مقدار حداکثر برای خطای نوع اول باعث حداقل نمودن نوع دوم شود. به این ترتیب توان آزمون نیز حداکثر می‌شود.

در مثال بعد با قرار دادن یک مقدار معین برای احتمال خطای نوع اول (α) تلاش می‌نیم احتمال خطای نوع دوم را تا جای ممکن کاهش دهیم و در نتیجه توان آزمون را افزایش دهیم.

۱-۱۱-۱۱ مثال ۴: X یک متغیر تصادفی نرمال با میانگین مجهول μ و واریانس ۹ می‌باشد. آزمون فرض زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{cases} H_۰ : \ \mu = ۰ \\ H_۱ : \ \mu = ۱ \end{cases}$$

اگر از X یک نمونه ۲۵ تایی بگیریم و ناحیه بحرانی بصورت $C = \{(X_۱, \cdots, X_{۲۰}) \mid \overline{X} \geq C\}$ باشد مقدار C را طوری بدست بیاورید که $\alpha = ۰/۱$ باشد و سپس احتمال خطای نوع دوم و توان آزمون را محاسبه کنید؟

حل: ابتدا توجه کنید که $\overline{X}$ دارای میانگین μ و واریانس $\frac{\sigma^۲}{n}$ می‌باشد. یعنی $\overline{X} \sim (\mu, \frac{۹}{۲۵})$ به این ترتیب:

$$\alpha = ۰/۱ = p(\overline{X} > C \mid \mu = ۰) = p\,(\frac{\overline{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} > \frac{C - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \mid \mu = ۰)$$

$$= p(\frac{\overline{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} > \frac{C - ۰}{\frac{۳}{۵}}) = p\,(Z > ۱/۶۶\, C) = ۰/۱$$

$$\Rightarrow ۱ - p\,(Z \leq ۱/۶۶\, C) = ۰/۱ \quad \Rightarrow p(Z \leq ۱/۶۶\, C) = ۰/۹$$

رابطه اخیر معادل است با اینکه $Z_{۰/۹} = ۱/۶۶\, C$ از جدول مقدار $Z_{۰/۹}$ برابر است با ۱/۲۸ بنابراین:

$$Z_{0/9} = 1/28 = 1/66\,C \quad \Rightarrow \quad C = 0/77$$

به این ترتیب ناحیه بحرانی بصورت زیر بدست می‌آید:

$$C = \left\{ (X_1, \cdots, X_{25}) \mid \overline{X} > 0/77 \right\}$$

ملاحظه می‌کنید مه در این مثال برای اینکه بتوانیم مقدار خطای نوع اول را به دلخواه کاهش دهیم به ناچار می‌بایستی بازه ناحیه بحرانی را متغیر فرض می‌کردیم، حال مقدار خطای نوع دوم را بدست می‌آوریم:

$$\beta = p\,(\overline{X} \le C \mid \mu = 1) = p\,\left(\frac{\overline{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \le \frac{0/77 - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \mid \mu = 1 \right)$$

$$= p\left(\frac{\overline{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \le \frac{0/77 - 1}{\frac{3}{5}} \right) = p\,(Z \le -0/38) = N_Z(-0/38) = 0/3520$$

توان آزمون: $\beta^* = 1 - \beta = 1 - 0/3520 = 0/648$

۱۲-۱۱ ۱۱ . ۴ انواع فرضها

فرض $H_0 : \mu = 2$ را در نظر بگیرید، این فرض با بیان اینکه میانگین جامعه برابر ۲ می‌باشد توزیع جامعه را معلوم می‌کند و نشان می‌دهد که پارامتر مجهول جامعه میانگین برابر عدد ۲ می‌باشد، به این نوع فرضها که توزیع جامعه را کاناُ مشخص می‌سازند فرضهای ساده می‌کوییم.
حال فرض $H_1 : \mu \ge 2$ را در نظر بگیرید، واضح است که اگر این فرض درست باشد با بیان یک بازه برای پارامتر مجهول جانعه، توزیع را بصورت دقیق مشخص نمی‌کند به این فرضها که با درست بودنشان پارامتر مجهول جامعه و در نتیجه توزیع جامعه بصورت دقیق مشخص نمی‌شود فرضهای مرکب می‌گوییم.
به عنوان مثال در مثال ۴ فرضهای $H_0 : \mu = 0$ و $H_1 : \mu = 1$ فرضهای ساده می‌باشند اما در مثال ۱ فرضهای $H_0 : p \ge 0/6$ و $H_1 : p < 0/6$ فرضهای مرکب می‌باشند.

۱۳-۱۱ ۱۱ . ۵ انواع آزمونها

اگر θ یک پارامتر نامعلوم جامعه باشد و بخواهیم آزمونهایی در مورد این پارامتر انجام دهیم، آزمون هر فرض آماری که در آن فرضیه مقابل (H_1) یک طرفه باشد آزمون یک طرفه نامیده می‌شود. به عنوان مثال برای مقدار ثابت θ_0 از θ آزمونهای زیر همگی یک طرفه می‌باشند:

$$\begin{cases} H_0 : \theta = \theta_0 \\ H_1 : \theta \ge \theta_0 \end{cases} \qquad \begin{cases} H_0 : \theta \ge \theta_0 \\ H_1 : \theta < \theta_0 \end{cases}$$

اگر در یک آزمون فرضیه مقابل (H_1) دو طرفه باشد آن آزمون را آزمون دو طرفه می‌نامیم. مانند آزمون زیر:

$$\begin{cases} H_0 : \theta = \theta_0 \\ H_1 : \theta \ne \theta_0 \end{cases}$$

۱۴-۱۱ ۱۱ . ۶ مراحل انجام یک آزمون فرض

برای انجام یک آزمون فرض می‌بایستی مراحل زیر را بصورت گام به گام طی نمود:

۱- تعین فرضهای صفر H_0 و فرض مقابل H_1.

۲- تعین یک طسح معنی‌دار α که معمولاً یکی از اعداد ۰/۰۱ ، ۰/۰۵ یا ۰/۱ در نظر گرفته می‌شود.

۳- تعین اماره آزمون $T = T(X_1, \cdots, X_n)$ که عموماً بر اساس برآوردگر نقطه‌ای پارامتر مجهول θ بدست می‌آید.

۴- تعین ناحیه بحرانی آزمون که از روی آماره آزمون، فرض مقابل آزمون و سطح معنی‌دار α بدست می‌آید.

۵- محاسبه مقدار آماره آزمون که از روی نمونه‌های تصادفی $X_1, X_2, \cdots, X_n$ بدست می‌آید.

۶- نتیجه‌گیری – اگر مقدار محاسبه شده آماره آزمون درون ناحیه بحران باشد فرض H_0 را رد و در غیر این صورت فرض H_0 را می‌پذیریم.
توجه کنید که عموماً در حل مسایل آزمون فرض، با در نظر گرفتن انواع آزمون فرضها و تعین آماره آزمون و ناحیه بحرانی برای هر یک از آزمون فرض‌ها محاسبه مراحل ۳ و ۴ بسیار ساده‌تر می‌شود.

۱۵-۱۱ ۱۱ . ۷ آزمون فرضهای آماری برای پارامترهای جامعه

برای سادگی انجام آزمونهای فرض بهترین راه محاسبه آماره آزمون و ناحیه بحرانی برای فرضهای متفاوت می‌باشد. بنابراین در این بخش ابتدا آزمون فرض را روی میانگین یک جمعیت را زمانی که واریانس معلوم می‌باشد انجام می‌دهیم:

فرض می‌کنیم X یک متغیر تصادفی با میانگین مجهول μ و واریانس معلوم σ^2 باشد. نمونه‌های تصادفی $X_1, X_2, \cdots, X_n$ را انتخاب می‌کنیم، می‌خواهیم آزمونهایی را روی میانگین μ انجام دهیم. در این صورت سه حالت کلی زیر را در نظر می‌گیریم:

۱- آزمون فرض $\begin{cases} H_0 : \mu = \mu_0 \\ H_1 : \mu > \mu_0 \end{cases}$ که در آن H_0 رد می‌شود اگر $\overline{X} > C$

۲- آزمون فرض $\begin{cases} H_0 : \mu = \mu_0 \\ H_1 : \mu < \mu_0 \end{cases}$ که در آن H_0 رد می‌شود اگر $\overline{X} > C$

۳- آزمون فرض $\begin{cases} H_0 : \mu = \mu_0 \\ H_1 : \mu \neq \mu_0 \end{cases}$ که در آن H_0 رد می‌شود اگر $\overline{X} < C_1$ یا $\overline{X} > C_2$

توجه کنید که در هر حالت مقدار C که بیانگر ناحیه بحرانی می‌باشد با توجه به سطح معنی‌دار α بدست می‌آید. حال برای هر حالت آماره آزمون و مقدار C را محاسبه می‌کنیم:

۱۶-۱۱ حالت اول: H_0 رد می‌شود اگر $\overline{X} > C$ بنابراین خطای نوع اول عبارتست از:
$$\alpha = p(\overline{X} > C \mid \mu = \mu_0)$$

اگر X یک متغطر تصادفی نرمال باشد یا $n \geq 30$ باشد قبلاً نشان دادیم که $Z=\frac{\overline{X}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$ یک متغیر تصادفی نرمال استاندارد می‌باشد بنابراین:

$$Z=\frac{\overline{X}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \sim N(0,1)$$

$$\alpha = p(\overline{X} > C \mid \mu = \mu_0) = p\left(\frac{\overline{X}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} > \frac{C-\mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right) = p\left(Z > \frac{C-\mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right)$$

$$\Rightarrow 1-p\left(Z > \frac{C-\mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right) = \alpha \quad \Rightarrow \quad p\left(Z > \frac{C-\mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right) = 1-\alpha$$

$$\Rightarrow \frac{C-\mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} = Z_{1-\alpha} \quad \Rightarrow \quad C = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}(Z_{1-\alpha}) + \mu_0$$

حال با توجه به مقدار C ناحیه بحرانی ازمون بصورت زیر بدست می‌آید:

$$\overline{X} > C \quad \rightarrow \quad \overline{X} > \mu_0 + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} Z_{1-\alpha} \quad \text{یا} \quad \frac{\overline{X}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} > Z_{1-\alpha}$$

نتیجه می‌گیریم که:

در آزمون $\begin{cases} H_0 : \mu = \mu_0 \\ H_1 : \mu > \mu_0 \end{cases}$ فرض H_0 رد می‌شود اگر و فقط اگر:

$$Z=\frac{\overline{X}-\mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} > Z_{1-\alpha}$$

توجه کنید که اگر فرض H_0 بصورت $H_0 : \mu \leq \mu_0$ باشد می‌توان نشان داد که ناحیه بحرانی باز هم به صورت رابطه بالا می‌باشد.

۱۱-۱۷ حالت دوم: آزمون فرض $\begin{cases} H_0 : \mu = \mu_0 \\ H_1 : \mu < \mu_0 \end{cases}$ H_0 را رد می‌کنیم اگر $\overline{X} < C$ مشابه حالت قبل اگر C را محاسبه کنیم مقدار ناحیه بحرانی بصورت زیر بدست می‌آید:

$$C = \mu_0 - Z_{1-\alpha}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \quad \Rightarrow \quad \overline{X} < C \ \rightarrow \ \overline{X} < \mu_0 - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} Z_{1-\alpha}$$

$$Z = \frac{\overline{X}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} < -Z_{1-\alpha}$$

بنابراین در حالت کلی در آزمون $\begin{cases} H_0 : \mu = \mu_0 \\ H_1 : \mu < \mu_0 \end{cases}$ فرض H_0 رد می‌شود اگر و فقط اگر $Z = \frac{\overline{X}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} < -Z_{1-\alpha}$ در این حالت هم اگر فرض H_0 بصورت $H_0 : \mu \geq \mu_0$ می‌بود باز هم ناحیه بحرانی بصورت رابطه فوق بدست می‌آمد.

۱۱-۱۸ حالت سوم: آزمون فرض $\begin{cases} H_0 : \mu = \mu_0 \\ H_1 : \mu \neq \mu_0 \end{cases}$ که در آن H_0 رد می‌شود اگر $\overline{X} > C_2$ یا $\overline{X} < C_1$ باشد بنابراین خطای نوع اول عبارتست از:

$$\alpha = p(\overline{X} < C_1 \text{ یا } \overline{X} > C_2 \mid \mu = \mu_0) \ \rightarrow \ 1-\alpha = p(C_1 < \overline{x} < C_2 \mid \mu = \mu_0)$$

$$p = \left(\frac{C_1-\mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} < \frac{\overline{X}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} < \frac{C_2-\mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right)$$

$$= p\left(\frac{C_1-\mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} < Z < \frac{C_2-\mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right) = 1-\alpha$$

که در آن:

$$\frac{C_2-\mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} = -\frac{C_1-\mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} < Z_{1-\alpha}$$

و در نتیجه بدست می‌آوریم:

$$C_1 = \mu_0 - Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

$$C_2 = \mu_0 + Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

و ناحیه بحرانی به صورت زیر بدست می‌آید:

$$\overline{X} > \mu_0 + Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \qquad \text{یا} \qquad \overline{X} < \mu_0 - Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

که معادل است با:

$$\left|\frac{X'-\mu_{\circ}}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right| > Z_{۱-\frac{\alpha}{۲}}$$

بنابراین در حالت کلی در آزمون فرض $\begin{cases} H_{\circ}: \mu = \mu_{\circ} \\ H_{۱}: \mu \neq \mu_{\circ} \end{cases}$ فرض $H_{\circ}$ رد می‌شود اگر وفقط اگر:

$$|Z| = \left|\frac{X'-\mu_{\circ}}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right| > Z_{۱-\frac{\alpha}{۲}}$$

در مثالهای بعدی هر حالت را مورد بررسی قرار می‌دهیم.

۱۹-۱۱ مثال ۵: توان شکنندگی (مقدار نیروی لازم برای شکستن) کابلهایی که توسط یک شرکت تولید می‌شوند دارای میانگین ۱۸۰۰ پوند و انحراف معیار ۱۰۰ می‌باشند. محققان شرکت با اعمال تکنیک جدیدی که در مراحل ساخت اعمال کرده‌اند ادعا کرده‌اند که توان شکنندگی افزایش یافته است. برای آزمودن این ادعا یک نمونه ۵۰ تایی از کابلها تحت آزمون قرار می‌گیرند و میانگین توان شکنندگی ۱۸۵۰ پوند بدست می‌آید. آیا در سطح معنی‌دار ۰/۰۱ این ادعا پذیرفته است؟

حل: ابتدا هر یک ار فرضهای صفر و مقابل را تعریف می‌کنیم:

$H_{\circ}:$ $\mu = ۱۸۰۰$ هیچ تغییری در توان شکنندگی رخ نداده است.

$H_{۱}:$ $\mu > ۱۸۰۰$ توان شکنندگی افزایش یافته است.

ملاحظه می‌کنید که حالت اول رخ داده است و با توجه به مطالب ارایه شده آماره آزمون و ناحیه بحرانی بصورت زیر خواهند بود:

$$Z = \frac{X'-\mu_{\circ}}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} > Z_{۱-\frac{\alpha}{۲}}$$

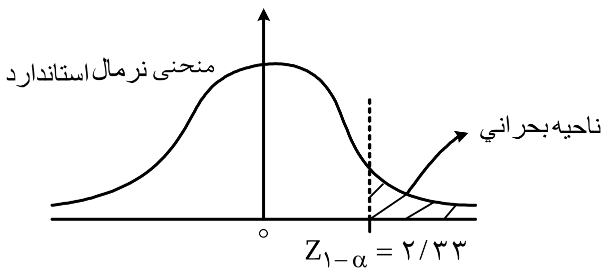
که در آن:

$$\alpha = ۰/۰۱$$
$$\Rightarrow ۱-\alpha = ۱-۰/۰۱ = ۰/۹۹ \quad \Rightarrow \quad Z_{۱-\alpha} = Z_{۰/۹۹} = ۲/۳۳$$

یعنی ناحیه بحرانی بصورت $Z > ۲/۳۳$ می‌باشد و اگر مقدار آماره Z بزرگتر از ۲/۳۳ باشد فرض $H_{\circ}$ را رد می‌کنیم و به عبارتی ادعای محققان را می‌پذیریم. مقدار آماره Z برابر است با:

$$Z = \frac{X'-\mu_{\circ}}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} >= \frac{۱۸۵۰ - ۱۸۰۰}{\frac{۱۰۰}{\sqrt{۵۰}}} = ۳/۵۵$$

بنابراین در سطح معنی‌دار $\alpha = ۰/۰۱$ نتایج نشان می‌دهند که $Z > ۲/۳۳$ می‌باشد و در نتیجه ادعای محققان را در مورد افزایش توان شکنندگی کابلها می‌پذیریم. در نمودار زیر ناحیه رد فرض $H_{\circ}$ را ملاحظه می‌کنید:



۲۰-۱۱ مثال ۶: عمر متوسط ۱۰۰ عدد از لامپهای مهتابی تولید شده توسط یک کارخانه برابر ۱۵۷۰ ساعت با انحراف معیار ۱۲۰ ساعت بدست آمده است. کارخانه تولید کننده ادعا می‌کند که عمر متوسط لامپها برابر ۱۶۰۰ ساعت می‌باشد در حالی که مصرف کنندگان این ادعا را قبول ندارند. صحت ادعای کارخانه سازنده را در سطح $\alpha = ۰/۰۵$ و $\alpha = ۰/۰۱$ بررسی کنید؟

حل: در این حالت دو فرض زیر را پیش رد داریم:

$$\begin{cases} H_{۰} : \mu = ۱۶۰۰ \\ H_{۱} : \mu \neq ۱۶۰۰ \end{cases}$$

ملاحظه می‌کنید که در این حالت یک آزمون دو طرفه انجام می‌گیرد که در آن آماره آزمون و ناحیه بحرانی بصورت زیر می‌باشد:

$$|Z| = \left| \frac{X' - \mu_{۰}}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \right| > Z_{۱-\frac{\alpha}{۲}}$$

الف) ابتدا آزمون فرض را در سطح معنی‌دار $\alpha = ۰/۰۵$ انجام می‌دهیم:

$$\alpha = ۰/۰۵ \quad \rightarrow \quad ۱-\frac{\alpha}{۲} = ۰/۹۷۵$$

$$\rightarrow \quad Z_{۱-\frac{\alpha}{۲}} = Z_{۰/۹۷۵} = ۱/۹۶$$

بنابراین فرض $H_{۰}$ را رد می‌کنیم اگر $|Z| > ۱/۹۶$ باشد یا به عبارتی:

$$|Z| > ۱/۹۶ \quad \text{یا} \quad Z < -۱/۹۶$$

۲۱-۱۱ حال مقدار آماره آزمون را بدست می‌آوریم:

ابتدا توجه کنید که مقدار واقعی انحراف معیار طول عمر لامپها را نداریم بنابراین از واریانس یا انحراف معیار $\overline{X}$ برای تخمین واریانس واقعی طول عمر لامپها استفاده می‌کنیم:

$$\sigma_{\overline{X}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{۱۲۰}{\sqrt{۱۰۰}} = ۱۲$$

به این ترتیب آماره آزمون بصورت زیر بدست می‌آید:

$$Z = \frac{X' - \mu_{۰}}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} > \frac{۱۵۷۰ - ۱۶۰۰}{۱۲} = -۲/۵$$

ملاحظه می‌کنید که ۲/۵- خارج از بازه $(-۱/۹۶ , ۱/۹۶)$ قرار دارد بنابراین $H_{۰}$ را در سطح معنی‌دار ۰/۰۵ رد می‌کنیم یعنی ادعای مصرف کنندگان در مورد عدم صحت میانگین طول عمر مطرح شده توسط کارخانه سازنده، صحیح می‌باشد.

ب) حال آزمون فرض را در سطح معنی‌دار ۰/۰۱ انجام می‌دهیم:

$$\alpha = ۰/۰۱ \quad \rightarrow \quad ۱-\frac{\alpha}{۲} = ۰/۹۹۵$$

$$\rightarrow \quad Z_{۱-\frac{\alpha}{۲}} = Z_{۰/۹۹۵} = ۲/۵۸$$

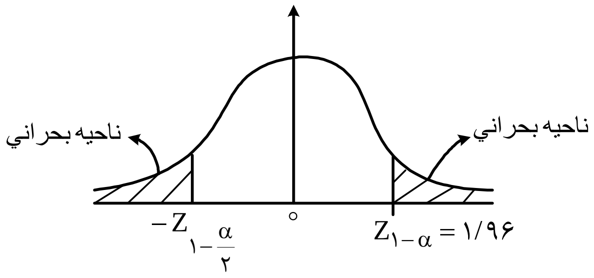
در این حالت اگر آماره آزمون در خارج از بازه $(-۲/۵۸ , ۲/۵۸)$ قرار داشته باشد $H_{۰}$ را رد می‌کنیم. مقدار آماره آزمون در این حالت برابر همان مقدار بدست آمده در بند الف مثال می‌باشد:

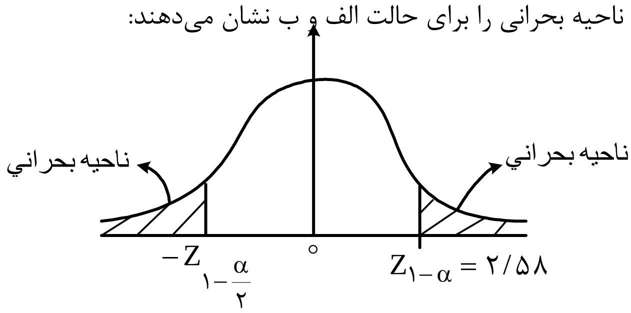
$$Z = -۲/۵ \quad \Rightarrow \quad |Z| > ۲/۵۸$$

۲۲-۱۱ از آنجا که مقدار Z برابر ۲/۵ می‌باشد و در بازه $(-۲/۵۸ , ۲/۵۸)$ قرار دارد بنابراین در سطح معنی‌دار $\alpha = ۰/۰۱$ و فرض $H_{۰}$ را می‌پذیریم.

ملاحظه می‌کنید که با تغییر سطح معنی‌داری و به دنبال آن تغییر ناحیه بحرانی، این احتمال وجود دارد که تصمیم‌گیری در مورد رد یا پذیرش فرض $H_۰$ کاملاً عوض شود. توجه کنید که در حالت دوم $(\alpha = ۰/۰۱)$ فرض $H_۰$ را می‌پذیریم اما این به معنی رد فرض $H_۱$ نمی‌باشد بلکه در این حالت می‌گوییم نمی‌توان در مورد رد فرض $H_۱$ نظری داد یا به بعارت دیگر هیچ تصمیمی نمی‌گیریم.

دو نمودار زیر ناحیه بحرانی را برای حالت الف و ب نشان می‌دهند:





۱۱-۲۳ آزمون فرض برای میانگین نرمال با واریانس نامعلوم

در صورتی که واریانس جامعه نامعلوم باشد نشان دادیم که آماره $T = \dfrac{\overline{X} - \mu_۰}{\frac{S}{\sqrt{n}}}$ دارای توزیع t با $n-۱$ درجه آزادی است، بنابراین در این حالت و با توجه به روشهای ارایه شده برای بدست آوردن ناحیه بحرانی در بخش قبل، می‌توان نشان داد که آماره آزمون و ناحیه بحرانی برای هرحالت بصورت زیر بدست می‌آیند:

۱- در آزمون فرض $\begin{cases} H_۰ : \mu = \mu_۰ \text{ یا } \mu \le \mu_۰ \\ H_۱ : \mu > \mu_۰ \end{cases}$ $H_۰$ رد می‌شود اگر و فقط اگر:

$$T = \frac{\overline{X} - \mu_۰}{\frac{S}{\sqrt{n}}} > t_{۱-\alpha}(n-۱)$$

۲- در آزمون فرض $\begin{cases} H_۰ : \mu = \mu_۰ \text{ یا } \mu \ge \mu_۰ \\ H_۱ : \mu < \mu_۰ \end{cases}$ $H_۰$ رد می‌وشد اگر و فقط اگر:

$$T = \frac{\overline{X} - \mu_۰}{\frac{S}{\sqrt{n}}} < -t_{۱-\alpha}(n-۱)$$

۳- در آزمون فرض $\begin{cases} H_۰ : \mu = \mu_۰ \\ H_۱ : \mu \ne \mu_۰ \end{cases}$ $H_۰$ رد می‌شود اگر و فقط اگر:

$$|T| = \left| \frac{\overline{X} - \mu_۰}{\frac{S}{\sqrt{n}}} \right| > t_{۱-\frac{\alpha}{۲}}(n-۱)$$

۱۱-۲۴ مثال ۷: تعداد نامه‌های رسیده به یک شرکت در طول ۱۰ روز عبارتست از:

۱ , ۳ , ۲ , ۵ , ۶ , ۴ , ۵ , ۸ , ۹ , ۱

اگر توزیع تعداد نامه‌های رسیده از متغیر تصادفی نرمال پیروی کند، آیا در سطح معنی‌دار $\alpha = ۰/۰۱$ می‌توان ادعا نمود که بطور متوسط روزانه حداقل ۴ نامه به شرکت پست ارسال می‌شود؟

حل: فرضهای زیر را در نظر می‌گیریم:

$$\begin{cases} H_۰ : \mu = ۴ \\ H_۱ : \mu > ۴ \end{cases}$$

واریانس جامعه نامعلوم است بنابراین برای محاسبه از آماره $T = \dfrac{\overline{X} - \mu_۰}{\frac{S}{\sqrt{n}}}$ استفاده می‌کنیم که در آن $\overline{X}$ و S برابر هستند با:

$$\overline{X} = \frac{۱}{۱۰}(۱+۳+۲+۵+۶+۴+۵+۸+۹+۱) = ۴/۴$$

$$S^۲ = \frac{۱}{n-۱}\left(\sum_{i=۱}^{n} X_i^۲ - \frac{\overline{X}^۲}{n}\right) = \frac{۱}{۹}\left\{(۱+۹+۴+۲۵+۳۶+۱۶+۲۵+۶۴+۸۱+۱) - \frac{(۴/۴)^۲}{۱۰}\right\}$$

$$= \frac{۱}{۹}\left(۲۶۲ - \frac{(۴/۴)^۲}{۱۰}\right) = ۲۸/۸ \quad \Rightarrow \quad S = \sqrt{۲۹} = ۵/۳۶$$

فرض $H_۰$ در صورتی رد می‌شود که:

$$T > t_{۱-\alpha}(n-۱)$$

$$\alpha = ۰/۰۱ \quad \rightarrow \quad ۱-\alpha = ۰/۹۹$$

$$t_{۱-\alpha} = t_{۰/۹۹}(n-۱) = t_{۰/۹۹}(۹) = ۲/۸۲$$

مقدار آماره آزمون عبارتست از:

$$T = \frac{\overline{X}-\mu_۰}{\frac{S}{\sqrt{n}}} = \frac{۴/۴-۴}{\frac{۵/۳۶}{\sqrt{۱۰}}} = ۰/۲۳$$

از آنجا که مقدار آماره آزمون کمتر از ۲/۸۲ می‌باشد بنابراین فرض $H_۰$ را می‌پذیریم.

۲۵-۱۱ ۱۱ . ۹ آزمون فرض برای واریانس یک جامعه نرمال

در صورتی که بخواهیم ادعاهایی را در مورد واریانس یک جامعه نرمال بررسی کنیم می‌دانیم که آماره $\chi^۲ = \frac{(n-۱)\,S^۲}{\sigma^۲}$ دارای توزیع خی دو با $n-۱$ درجه آزادی است بنابراین می‌توان حالتهای زیر را برای هر حالت بدست آورد:

۱- در آزمون $\begin{cases} H_۰ : \sigma^۲ = \sigma_۰^۲ \text{ یا } \sigma^۲ \le \sigma_۰^۲ \\ H_۱ : \sigma^۲ > \sigma_۰^۲ \end{cases}$ $H_۰$ رد می‌شود اگر و فقط اگر: $\chi^۲ = \frac{(n-۱)\,S^۲}{\sigma_۰^۲} > \chi^۲_{۱-\alpha}(n-۱)$

۲- در آزمون فرض $\begin{cases} H_۰ : \sigma^۲ = \sigma_۰^۲ \text{ یا } \sigma^۲ \ge \sigma_۰^۲ \\ H_۱ : \sigma^۲ < \sigma_۰^۲ \end{cases}$ $H_۰$ رد می‌شود اگر و فقط اگر: $\chi^۲ = \frac{(n-۱)\,S^۲}{\sigma_۰^۲} < \chi^۲_{\alpha}(n-۱)$

۳- در آزمون فرض $\begin{cases} H_۰ : \sigma^۲ = \sigma_۰^۲ \\ H_۱ : \sigma^۲ \ne \sigma_۰^۲ \end{cases}$ $H_۰$ رد می‌شود اگر و فقط اگر:

$$\chi^۲ = \frac{(n-۱)\,S^۲}{\sigma_۰^۲} > \chi^۲_{۱-\frac{\alpha}{۲}}(n-۱) \quad \text{یا} \quad = \chi^۲ = \frac{(n-۱)\,S^۲}{\sigma_۰^۲} < \chi^۲_{\frac{\alpha}{۲}}(n-۱)$$

۲۶-۱۱ مثال ۹: یک کارخانه تولید نوشابه ماشین آلات جدیدی برای پرنمودن شیشه‌ها خریداری نموده است که ادعا شده است این ماشین‌ها با انحراف معیار ۱۰ میلی لیتر شیشه‌ها را پر می‌کنند. برای بررسی صحت ادعا یک نمونه تصادفی ۱۰ تایی از شیشه‌های پر شده را انتخاب می‌کنیم و نتایج $\overline{X} = ۲۵۵$ و $S^۲ = ۱۸۰$ بدست امده است. در سطح معنی‌دار $\alpha = ۰/۰۵$ آیا ادعای مطرح شده صحیح است؟

حل: فرضها عبارتند از:

$$\begin{cases} H_0 : \sigma^2 = 100 \\ H_1 : \sigma^2 \neq 100 \end{cases}$$

با توجه به آزمونها آماره آزمون و ناحیه بحرانی بصورت زیر خواهند بود:

$$\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1) < \chi^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} \quad \text{یا} \quad \chi^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} < \chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)$$

در سطح معنی‌دار ۰/۰۵ داریم:

$$\alpha = 0/05 \qquad \rightarrow \qquad 1-\frac{\alpha}{2} = 0/975 \qquad \frac{\alpha}{2} = 0/025$$

پس:

$$\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1) = \chi^2_{0/975}(9) = 19$$

$$\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1) = \chi^2_{0/025}(9) = 2/7$$

$$\chi^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} = \frac{9(180)}{100} = 16/2$$

از آنجا که آماره $\chi^2 = 16/2$ درون بازه $(2/7 \ , \ 19)$ قرار دارد بنابراین ادعای H_0 رد نمی‌شود و در نتیجه ادعا مطرح شده در سطح معنی‌دار ۰/۰۵ قابل قبول است.

۲۷-۱۱ ۱۱ . ۹ آزمون فرض برای تفاضل میانگین‌ها

یک نمونه تصادفی n_1 تایی از جامعه نرمال با میانگین μ_1 و واریانس σ_1^2 انتخاب می‌کنیم، همچنین یک نمونه n_2 تایی از جامعه نرمال دیگری با میانگین μ_2 و واریانس σ^2 انتخاب می‌کنیم بطوریکه دو نمونه از یکدیگر مستقل باشند در این حالت برای آزمون تفاضل میانگین‌های دو جامعه از آزمون‌های زیر می‌توانیم استفاده کنیم که در سه حالت اول واریانس دو جامعه معلوم و در سه حالت بعدی واریانس مجهول فرض شده است:

۱- در آزمون فرض $\begin{cases} H_0 : \mu_1 - \mu_2 = d_0 \ \text{یا} \ \mu_1 - \mu_2 \leq d_0 \\ H_1 : \mu_1 - \mu_2 > d_0 \end{cases}$ فرض H_0 رد می‌شود اگر و فقط اگر:

$$Z = \frac{(\overline{X}_1 - \overline{X}_2) - d_0}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} > Z_{1-\alpha}$$

۲- در آزمون فرض $\begin{cases} H_0 : \mu_1 - \mu_2 = d_0 \ \text{یا} \ \mu_1 - \mu_2 \geq d_0 \\ H_1 : \mu_1 - \mu_2 < d_0 \end{cases}$ فرض H_0 رد می‌شود اگر و فقط اگر:

$$Z = \frac{(\overline{X}_1 - \overline{X}_2) - d_0}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} < Z_{1-\alpha}$$

۳- در آزمون فرض $\begin{cases} H_0 : \mu_1 - \mu_2 = d_0 \\ H_1 : \mu_1 - \mu_2 \neq d_0 \end{cases}$ فرض H_0 رد می‌شود اگر و فقط اگر:

$$|Z| = \left| \frac{(\overline{X}_1 - \overline{X}_2) - d_0}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} \right| > Z_{1-\alpha}$$

۱۱-۲۸ در حالتی که واریانسهای دو جامعه نامعلوم اما برابر باشند $(\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2)$ روابط آزمونهای فرض بصورت زیر خواهند بود:

۱- در آزمون فرض $\begin{cases} H_0 : \mu_1-\mu_2 = d_0 \quad \text{یا} \quad \mu_1-\mu_2 \le d_0 \\ H_1 : \mu_1-\mu_2 > d_0 \end{cases}$ فرض H_0 رد می‌شود اگر و فقط اگر:

$$T = \frac{(\overline{X}_1-\overline{X}_2) - d_0}{S_P\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}} > t_{1-\alpha}(n_1+n_2-2)$$

که در آن $S_P^2 = \frac{(n_1-1)S_1^2 + (n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}$ می‌باشد.

۲- در آزمون فرض $\begin{cases} H_0 : \mu_1-\mu_2 = d_0 \quad \text{یا} \quad \mu_1-\mu_2 \ge d_0 \\ H_1 : \mu_1-\mu_2 < d_0 \end{cases}$ فرض H_0 رد می‌شود اگر و فقط اگر:

$$T = \frac{(\overline{X}_1-\overline{X}_2) - d_0}{S_P\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}} < t_{1-\alpha}(n_1+n_2-2)$$

۳- در آزمون فرض $\begin{cases} H_0 : \mu_1-\mu_2 = d_0 \\ H_1 : \mu_1-\mu_2 \ne d_0 \end{cases}$ فرض H_0 رد می‌شود اگر و فقط اگر:

$$|T| = \left|\frac{(\overline{X}_1-\overline{X}_2) - d_0}{S_P\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}}\right| > t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n_1+n_2-2)$$

۲۹-۱۱ مثال ۱۰: یک امتحان از دو کلاس A و B گرفته شده است. کلاس A شامل ۴۰ دانشجو و کلاس B شامل ۵۰ دانشجو می‌باشد. میانگین نمرات در کلاس A ۷۴ با انحراف معیار ۸ و در کلاس B ۷۸ با انحراف معیار ۷ می‌باشد آیا نمرات دانشجویان این دو کلاس متفاوت معنی‌داری در سطوح ۰/۰۵ و ۰/۰۱ با هم دارند؟

حل: هر یک از دو کلاس را دو جامعه با میانگین‌های μ_1 و μ_2 در نظر می‌گیریم داریم:

$\overline{X}_1 = 74 \qquad \sigma_1 = 8$

$\overline{X}_2 = 78 \qquad \sigma_2 = 7$

$n_1 = 40$

$n_2 = 50$

فرض‌های آزمون عبارتند از:

$H_0 : \mu_1 = \mu_2$ اختلاف تنها ناشی از شانس است.

$H_1 : \mu_1 \ne \mu_2$ بین دو کلاس اختلاف معنی‌داری وجود دارد.

در این حالت آماره آزمون و ناحیه بحرانی عبارتند از:

$$|Z| = \left|\frac{(\overline{X}_1-\overline{X}_2) - d_0}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}}\right| > Z_{1-\alpha}$$

که در این مثال مقدار $d_0 = 0$ می‌باشد.

۳۰-۱۱ الف) در سطح معنی‌دار ۰/۰۵ داریم:

$$\alpha = ۰/۰۵ \quad \rightarrow \quad ۱-\frac{\alpha}{۲} = ۰/۹۷۵$$

$$Z_{۱-\frac{\alpha}{۲}} = Z_{۰/۹۷۵} = ۱/۹۶$$

در این حالت فرض $H_۰$ رد می‌شود اگر $|Z| > ۱/۹۶$ حال داریم:

$$Z = \frac{(\overline{X}_۱ - \overline{X}_۲) - d_۰}{\sqrt{\frac{\sigma_۱^۲}{n_۱} + \frac{\sigma_۲^۲}{n_۲}}} = \frac{۷۴ - ۷۸}{\sqrt{\frac{۸۲}{۴۰} + \frac{۷۲}{۵۰}}} = \frac{-۴}{۱/۶۰۶} = -۲/۴۹$$

از آنجا که $Z = -۲/۴۹$ در بازه $(-۱/۹۶\ ,\ ۱/۹۶)$ قرار ندارد بنابراین در سطح معنی‌دار ۰/۰۵ اختلاف معنی‌داری بین دو کلاس A و B وجود دارد و فرض $H_۰$ رد می‌شود. به این ترتیب به احتمال بیشتر کلاس دوم دارای نتایج بهتری می‌باشد.

ب) برای سطح معنی‌دار ۰/۰۱ داریم:

$$\alpha = ۰/۰۱ \quad \rightarrow \quad ۱-\frac{\alpha}{۲} = ۰/۹۹۵$$

$$Z_{۱-\frac{\alpha}{۲}} = Z_{۰/۹۹۵} = ۲/۵۸$$

در این حالت مقدار آماره آزمون برابر با مقدار بدست آمده از بند الف می‌باشد که برابر $-۲/۴۹$ می‌باشد. و از آنجا که $-۲/۴۹$ در بازه $(-۲/۵۸\ ,\ ۲/۵۸)$ قرار دارد بنابراین در سطح معنی‌دار ۰/۰۱ اختلاف معنی‌داری بین دو کلاس وجود ندارد. توجه کنید که در حالت کلی نتایج حاصل از سطح معنی‌دار ۰/۰۵ را ملاک تصمیم‌گیری قرار می‌دهند. زیرا آماردانان نشان داده‌اند که تقریباً بهترین سطح برای ملاک بودن در تصمیم‌گیری‌ها، سطح معنی‌دار ۰/۰۵ می‌باشد.

۳۱-۱۱ مثال ۱۱: در کشاورز A و B در مزرعه‌های خود گندم می‌کارند، کشاورز A از نوعی ضد آفت جدید استفاده می‌کند. میانگین برداشت محصول در هر کیلومتر مربع از ۱۲ کیلومتر مربع از زمین کشاورز A برابر ۱۳۹ کیلو با انحراف معیار ۱۰ کیلو می‌باشد و در زمین کشاورز B برابر ۱۳۱ کیلو با انحراف معیار ۱۱ کیلو می‌باشد. آیا می‌توان ادعا کرد که در سطح معنی‌دار ۰/۰۵ و ۰/۰۱.

حل: فرض آزمون عبارتند از:

$H_۰ \ :\ \mu_۱ = \mu_۲$ اختلاف در تولید تنها ناشی از شانس است.

$H_۱ \ :\ \mu_۱ > \mu_۲$ ضد آفت در افزایش تولید موثر بوده است.

$\mu_۱$ میانگین تولید محصول کشاورز A و $\mu_۲$ میانگین تولید محصول کشاورز B می‌باشد.

آماره آزمون و ناحیه بحرانی در این حالت عبارتند از:

$$T = \frac{(\overline{X}_۱ - \overline{X}_۲) - d_۰}{S_P\sqrt{\frac{۱}{n_۱} + \frac{۱}{n_۲}}} > t_{۱-\alpha}(n_۱ + n_۲ - ۲)$$

الف) در سطح‌معنی‌دار ۰/۰۵ داریم:

$$\alpha = ۰/۰۵$$

$$۱-\alpha = ۰/۹۵ \qquad t_{۱-\alpha}(n_۱+n_۲-۲) = t_{۰/۹۵}\ (۱۲+۱۲-۲)$$

$$= t_{۰/۹۵}(۲۲) = ۱/۷۲$$

$$\overline{X}_۱ = ۱۳۹ \qquad S_۱ = ۱۰ \qquad n_۱ = ۱۲$$

$$\overline{X}_۲ = ۱۳۱ \qquad S_۲ = ۱۱ \qquad n_۲ = ۱۲$$

مقدار S_p برابر است با:

$$S_p = \sqrt{\frac{(n_۱-۱)\,S_۱^۲ + (n_۲-۱)\,S_۲^۲}{n_۱+n_۲-۲}} = \sqrt{\frac{۱۱(۱۰)^۲+۱۱(۱۱)^۲}{۱۲+۱۲-۲}} = ۱۰/۵۱$$

۱۱-۳۲ حال مقدار آماره آزمون برابر می‌شود با:

$$T = \frac{\overline{X}_۱-\overline{X}_۲}{S_p\sqrt{\frac{۱}{n_۱}+\frac{۱}{n_۲}}} = \frac{۱۳۹-۱۳۱}{۱۰/۵۱\sqrt{\frac{۱}{۱۲}+\frac{۱}{۱۲}}} = ۱/۸۵$$

با توجه به مقدار آماره آزمون $T = ۱/۸۵$ که از $t_{./۹۵}\,(۲۲) = ۱/۷۲$ بیشتر است می‌توان نتیجه گرفت که فرض $H_\circ$ در سطح معنی‌دار ۰/۰۵ رد می‌شود و به این ترتیب ضدآفت در تولید محصول بیشتر موثر بوده است.

ب) در سطح معنی‌دار ۰/۰۱ داریم:

$$\alpha = ۰/۰۱ \quad \rightarrow \quad ۱-\alpha = ۰/۹۹$$

$$t_{۱-\alpha}\,(n_۱+n_۲-۲) = t_{./۹۹}\,(۲۲) = ۲/۵۱$$

از آنجا که $T = ۱/۸۵ \not> ۲/۵۱$ بنابراین فرض $H_\circ$ رد نمی‌شود و تفاوت معنی‌داری در سطح ۰/۰۱ در تولید محصول وجود ندارد. اما از آنجا که ۰/۰۵ را ملاک تصمیم‌گیری می‌گیریم بنابراین در حالت کلی ضد آفت در تولید محصول بیشتر موثر بوده است.

۱۱-۳۳ ۱۱ . ۱۰ آزمون فرض برای واریانسهای دو جامعه

اگر دو جامعه نرمال داشته باشیم و $n_۱$ نمونه از جامعه اول با انحراف معیار $S_۱$ و $n_۲$ نمونه با انحراف معیار $S_۲$ از جامعه دوم انتخاب کنیم در این صورت برای انجام آزمونهایی در مورد واریانسهای دو جامعه می‌توانیم از آماره و ناحیه بحرانی زیر استفاده کنیم:

۱- در آزمون فرض $\begin{cases} H_\circ : \sigma_۱^۲ = \sigma_۲^۲ \text{ یا } \sigma_۱^۲ \le \sigma_۲^۲ \\ H_۱ : \sigma_۱^۲ > \sigma_۲^۲ \end{cases}$ فرض $H_\circ$ رد می‌شود اگر و فقط اگر:

$$F = \frac{S_۱^۲}{S_۲^۲} > F_{۱-\alpha}\,(n_۱-۱\,,\,n_۲-۱)$$

۲- در آزمون فرض $\begin{cases} H_\circ : \sigma_۱^۲ = \sigma_۲^۲ \text{ یا } \sigma_۱^۲ \ge \sigma_۲^۲ \\ H_۱ : \sigma_۱^۲ < \sigma_۲^۲ \end{cases}$ فرض $H_\circ$ رد می‌شود اگر و فقط اگر:

$$F = \frac{S_۱^۲}{S_۲^۲} < F_{\alpha}\,(n_۱-۱\,,\,n_۲-۱)$$

۳- در آزمون فرض $\begin{cases} H_\circ : \sigma_۱^۲ = \sigma_۲^۲ \\ H_۱ : \sigma_۱^۲ \ne \sigma_۲^۲ \end{cases}$ فرض $H_\circ$ رد می‌شود اگر و فقط اگر:

$$F = \frac{S_۱^۲}{S_۲^۲} < F_{\frac{\alpha}{۲}}\,(n_۱-۱\,,\,n_۲-۱) \text{ یا } F = \frac{S_۱^۲}{S_۲^۲} > F_{۱-\frac{\alpha}{۲}}\,(n_۱-۱\,,\,n_۲-۱)$$

۱۱-۳۴ مثال ۱۲: استادی یک درس را در دو کلاس A و B تدریس می‌کند. کلاس A تعداد ۱۶ دانشجو و کلاس B تعداد ۲۵ دانشجو دارد. استاد از هر دو کلاس یک امتحان را می‌گیرد. میانگین نمرات دانشجویان در هر کلاس تقریباً برابر است اما واریانس کلاس A برابر ۸۶/۴ و واریانس کلاس B برابر ۱۵۰ می‌باشد. (نمرات از ۱۰۰ واحد می‌باشند) آیا در دو سطح معنی‌دار ۰/۰۵ و ۰/۰۱ می‌توان نتیجه گرفت که واریانس کلاس B از واریانس کلاس A بیشتر می‌باشد؟

حل: فرضهای آزمون عبارتند از:

$H_\circ$: $\sigma_۱ = \sigma_۲$ اختلاف واریانس‌ها ناشی از شانس می‌باشد.

$H_۱ \ : \quad \sigma_۱ > \sigma_۲$ واریانس کلاس B از واریانس کلاس A بیشتر است.

داریم:

$$n_۱ = ۱۶ \qquad S_۱^۲ = ۸۶/۴$$
$$n_۲ = ۲۵ \qquad S_۲^۲ = ۱۵۰$$

آماره آزمون و ناحیه بحرانی عبارتند از:

$$F = \frac{S_۱^{\,۲}}{S_۲^{\,۲}} < F_\alpha (n_۱-۱ \, , \, n_۲-۱)$$

الف) در سطح معنی‌دار ۰/۰۵ داریم:

$$\alpha = ۰/۰۵$$

$$F_\alpha (n_۱-۱ \, , \, n_۲-۱) = \frac{۱}{F_{۱-\alpha} \, (n_۲-۱ \, , \, n_۱-۱)}$$

$$\Rightarrow F_{/۰۵} \, (۱۵ \, , \, ۲۴) = \frac{۱}{F_{/۹۵} \, (۲۴ \, , \, ۱۵)} = \frac{۱}{۲/۱۱} = ۰/۴۷۳$$

۱۱-۳۵ حال آماره آزمون را بدست می‌آوریم:

$$F = \frac{S_۱^{\,۲}}{S_۲^{\,۲}} = \frac{۸۶/۴}{۱۵۰} = ۰/۵۷۶$$

از آنجا که $f = ۰/۵۷۶ \not< ۰/۴۷۳$ بنابراین نمی‌توانیم فرض $H_۰$ را رد کنیم و در نتیجه می‌توان گفت که واریانس دو کلاس در سطح معنی‌دار ۰/۰۵ تفاوت معنی‌داری با یکدیگر ندارند.

ب) در سطح معنی‌دار ۰/۰۱ داریم:

$$\alpha = ۰/۰۱$$

$$F_\alpha (n_۱-۱ \, , \, n_۲-۱) = \frac{۱}{F_{۱-\alpha} \, (n_۲-۱ \, , \, n_۱-۱)}$$

$$\Rightarrow F_{/۰۱} \, (۱۵ \, , \, ۲۴) = \frac{۱}{F_{/۹۹} \, (۲۴ \, , \, ۱۵)} = \frac{۱}{۲/۸۹} = ۰/۳۴۶$$

باز هم $f = ۰/۵۷۶ \not< ۰/۳۴۶$ بنابراین در سطح معنی‌دار ۰/۰۱ هم می‌توانیم $H_۰$ را رد کنیم یعنی در این حالت هم تفاوت معنی‌داری میان واریانسهای دو کلاس وجود ندارد.