بسم الله الرحمن الرحیم

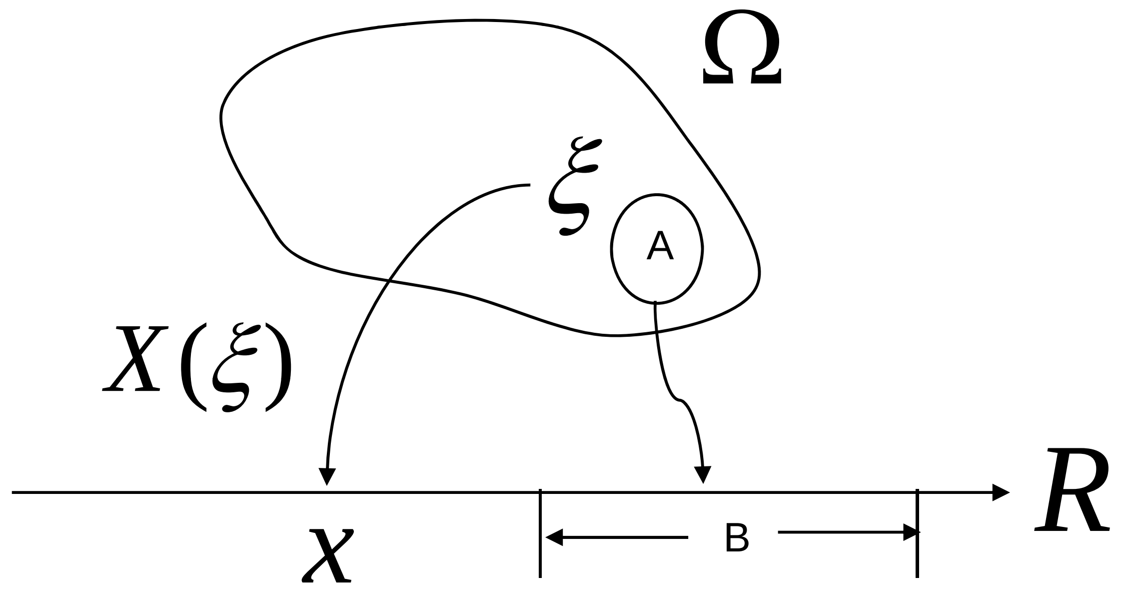
فرآیندهای تصادفی

مقدمه ای بر فرآیند های تصادفی
دکتر آقاجانی
دانشکده برق دانشگاه آزاد اسلامی واحد نجف آباد

۲- متغیر های تصادفی

تعریف

- تابعی مثل X که به هر نقطه از فضای نمونه $\xi \in \Omega,$ یک عددی حقیقی نسبت می دهد.



تابع توزیع احتمال CDF

- Cumulative Distribution Function
- در برخی کتاب ها PDF(Probability Distribution Function)

$$
\begin{aligned}
F_X(x) &= \Pr\{\xi \mid X(\xi) \le x\} \\
&= \Pr\{X(\xi) \le x\} = \Pr\{\mathrm{X} \le \mathrm{x}\}
\end{aligned}
$$

$$X(\xi) \equiv X$$

خواص CDF

- $F_X(+\infty) = P\{\xi \mid X(\xi) \le +\infty\} = P(\Omega) = 1$
- $F_X(-\infty) = P\{\xi \mid X(\xi) \le -\infty\} = P(\phi) = 0.$
- $F_X(x^+) = F_X(x),$ پیوستگی از راست
- $P\{x_1 < X(\xi) \le x_2\} = F_X(x_2) - F_X(x_1), \quad x_2 > x_1.$
- $0 \le F_X(x) \le 1$

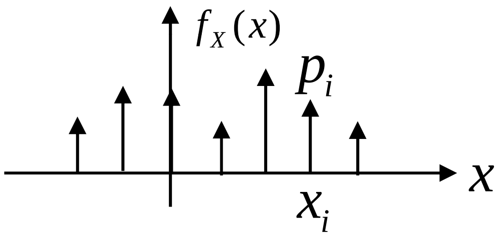
تابع چگالی احتمال pdf

- Probability <u>density</u> function

$$f_X(x) = \frac{dF_X(x)}{dx}.$$

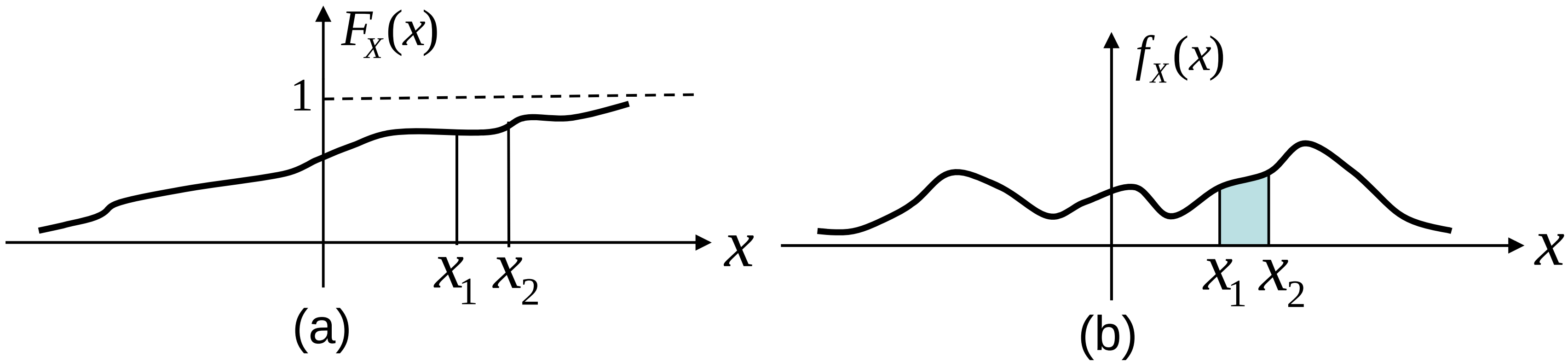
- تابع چگالی احتمال متغیر تصادفی گسسته

$$f_X(x) = \sum_i p_i \delta(x - x_i),$$



خواص تابع pdf

- $$f_X(x) \geq 0$$
- $$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_x(u)\,du\ .$$
- $$\int_{-\infty}^{+\infty} f_x(x)\,dx = 1,$$
- $$P\{x_1 < X(\xi) \leq x_2\} = F_X(x_2) - F_X(x_1) = \int_{x_1}^{x_2} f_X(x)\,dx\ .$$



تابع جرم احتمال pmf

$$P_X(x) = \Pr\{X = x\}$$

$$P_X(x) = \begin{cases} p_1, & X = x_1 \\ p_2, & X = x_2 \\ p_3, & X = x_3 \\ 0, & other \end{cases}$$

تابعی از یک متغیر تصادفی

- تابعی از یک متغیر تصادفی خود یک متغیر تصادفی است!

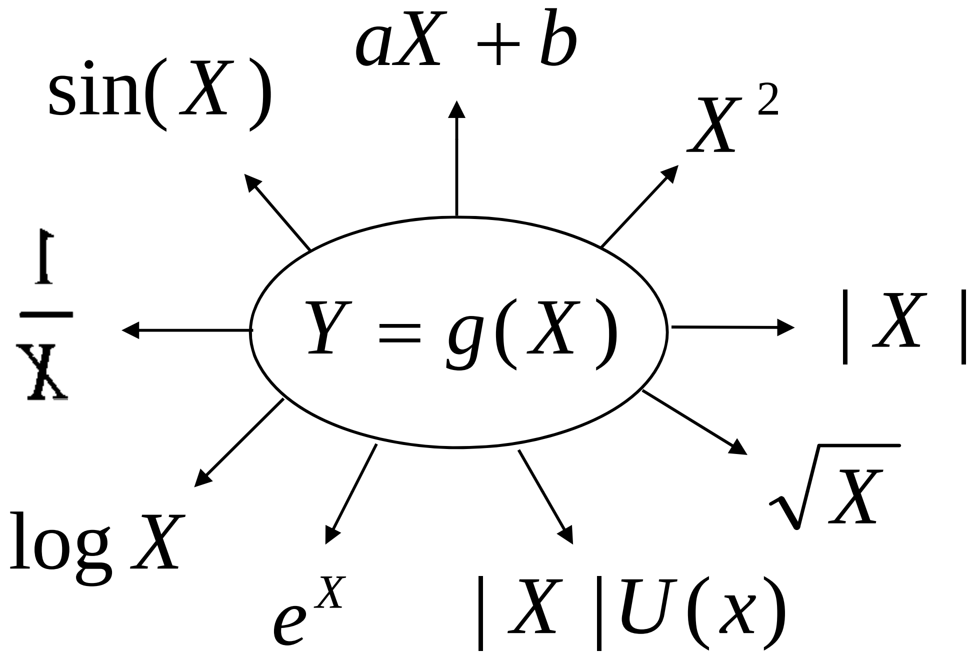
$$Y = g(X).$$

$$F_Y(y)? \qquad f_Y(y)?$$

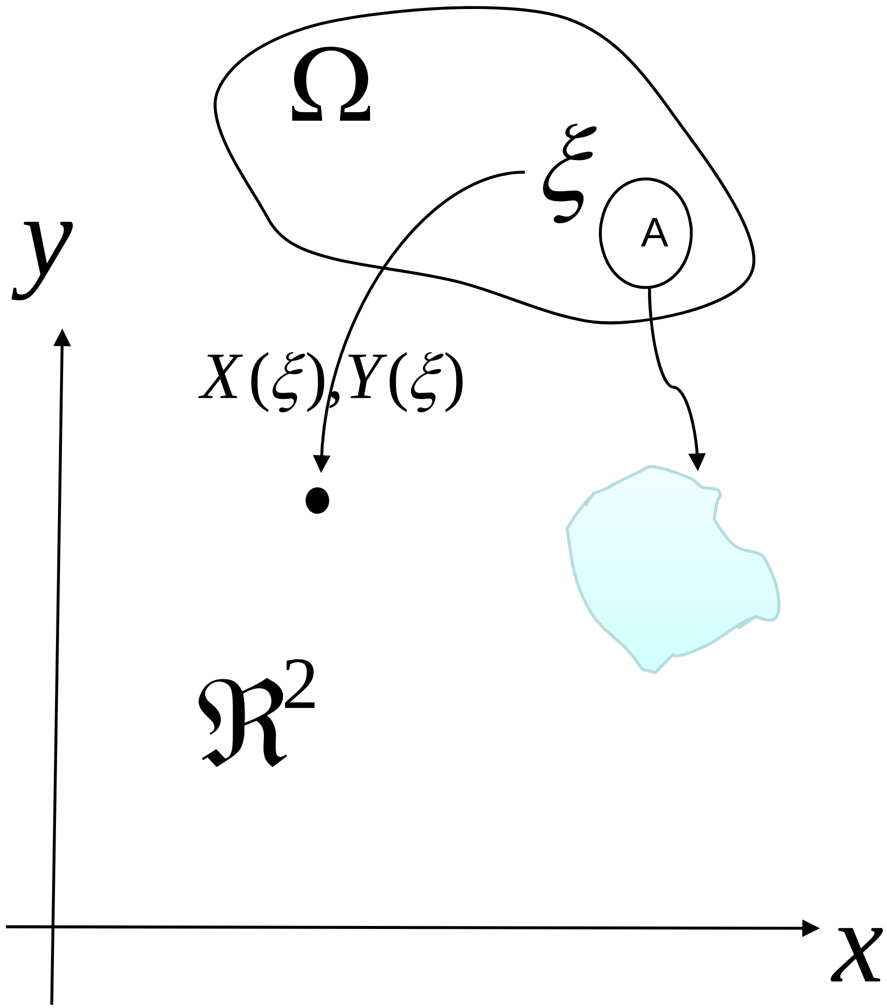
- روش محاسبه؟

$$\Pr(Y \in B) = \Pr(X \in g^{-1}(B)) = \int_{A = g^{-1}(B)} f_X(x)dx$$

$$F_Y(y) = P(Y(\xi) \le y) = P\big(g(X(\xi)) \le y\big) = P\big(X(\xi) \le g^{-1}(-\infty, y]\big).$$

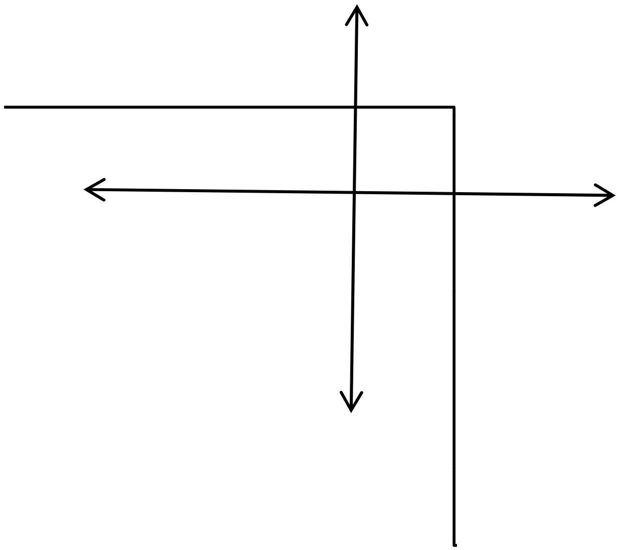

$Y = g(X)$
$aX + b$
X^2
$|X|$
$\sqrt{X}$
$|X|U(x)$
e^X
$\log X$
$\frac{1}{X}$
$\sin(X)$

دو متغیر تصادفی



تواُم CDF

$$F_{XY}(x, y) = P\left[(X(\xi) \le x) \cap (Y(\xi) \le y)\right]$$
$$= P(X \le x, Y \le y) \ge 0,$$



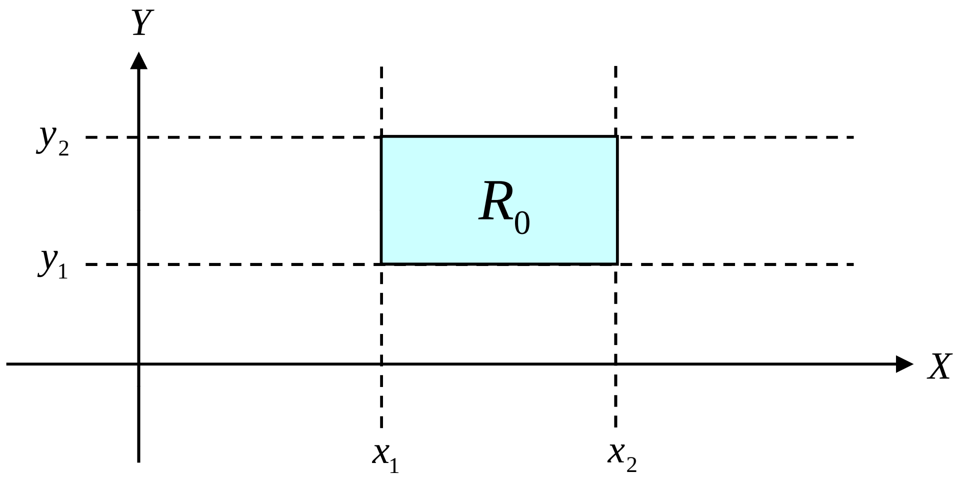
خواص CDF توأم

- $F_{XY}(-\infty, y) = F_{XY}(x, -\infty) = 0, \quad F_{XY}(+\infty, +\infty) = 1.$

- $F_X(x) = F_{XY}(x, \infty)$
- $F_Y(y) = F_{XY}(\infty, y)$

- $$P\big(x_1 < X(\xi) \le x_2, y_1 < Y(\xi) \le y_2\big) = F_{XY}(x_2, y_2) - F_{XY}(x_2, y_1) - F_{XY}(x_1, y_2) + F_{XY}(x_1, y_1).$$

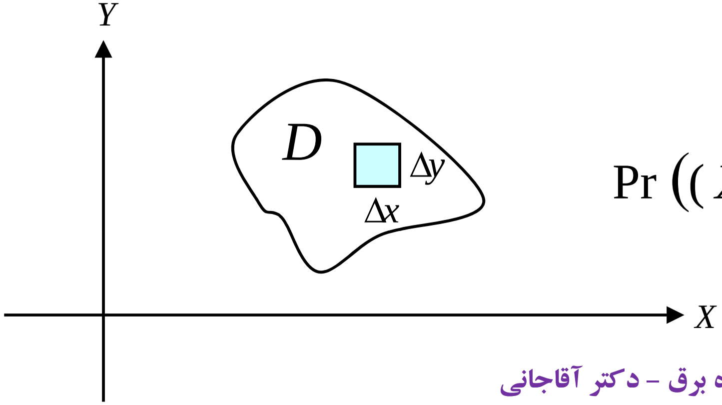
- برای محاسبه احتمالات چهارگوش استفاده می شود. بقیه احتمالات؟



pdf توأم

- برای محاسبه احتمالاتی که فضای آنها به فرم چهار گوش نیست!
- تعریف
- معادل رویه ای بالای صفحه XY است $f_{XY}(x,y) = \dfrac{\partial^2 F_{XY}(x,y)}{\partial x\, \partial y}.$
- برخی خواص

- $$F_{XY}(x,y) = \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f_{XY}(u,v)\, du dv .$$
- $$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f_{XY}(x,y)\, dx dy = 1.$$
- $$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{XY}(x,y) dy, \quad f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{XY}(x,y) dx.$$



$$\Pr\left((X,Y)\in D\right) = \int\int_{(x,y)\in D} f_{XY}(x,y) dx dy .$$

- به عبارتی حجم زیر رویه در ناحیه D

توابع احتمال شرطی

- برای هر شرط دلخواهی مثل $\{(x,y)\in A\}$ می توان CDF و pdf شرطی به صورت زیر تعریف کرد:

$$F_{XY}(x,y\,|\,A)=P\left(X\le x, Y\le y\,|\,A\right)=\frac{\Pr\left((X\le x, Y\le y), A\right)}{P(A)}$$

$$=\frac{1}{P(A)}\underset{(x,y)\in A}{\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y}} f_{XY}(x,y)dxdy$$

$$f_{XY}(x,y\,|\,A)=\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}F_{XY}(x,y\,|\,A)$$

رابطه ساده برای pdfشرطی

- اگر تعریف کنیم

$$g(x,y)=\begin{cases}1 & (x,y)\in A\\ 0 & (x,y)\notin A\end{cases}$$

$$F_{XY}(x,y\,|\,A)=\frac{1}{P(A)}\underset{(x,y)\in A}{\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y}} f_{XY}(x,y)dxdy$$

$$=\frac{1}{P(A)}\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} g(x,y)\,f_{XY}(x,y)dxdy$$

- در نتیجه بعد از مشتق گیری

$$f_{XY}(x,y\,|\,A)=\frac{1}{P(A)}\begin{cases}f_{XY}(x,y) & (x,y)\in A\\ 0 & (x,y)\notin A\end{cases}$$

دو تابع احتمال شرطی

$$F_X(x \mid Y \le y) = \Pr(X \le x \mid Y \le y)$$
$$= \frac{pr(X \le x, Y \le y)}{pr(Y \le y)}$$
$$= \frac{F_{XY}(x, y)}{F_Y(y)}$$
$$= F_X(x \mid y).$$

$$f_X(x \mid Y = y) = \frac{\partial}{\partial x} \lim F_X(x \mid Y = y)$$
$$= \frac{\partial}{\partial x} \lim \frac{pr(X \le x, Y \approx y)}{pr(Y \approx y)}$$
$$= \frac{f_{XY}(x, y)}{f_Y(y)}$$
$$= f_X(x \mid y).$$

تفاوت!!

- عدم تساوی شرط ها

$$f_X(x \mid y) \neq \frac{\partial}{\partial x} F_X(x \mid y)$$

استقلال دو متغیر تصادفی

- دو پیشامد مستقل $A \perp\!\!\!\perp B$

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B)$$

- قضیه:

- شرط لازم و کافی برای مستقل بودن دو متغیر تصادفی، استقلال پیشامدهایی به فرم $X \le x$ و $Y \le y$ می باشد.

$$F_{XY}(x, y) = F_X(x).F_Y(y)$$

$$f_{XY}(x, y) = f_X(x).f_Y(y)$$

$$F_X(x \mid y) = F_X(x) \qquad f_X(x \mid y) = f_X(x)$$

$$F_Y(y \mid x) = F_Y(y) \qquad f_Y(y \mid x) = f_Y(y)$$

نکته مهم

- اگر دو متغیر مستقل باشند هر تابعی دلخواه از دو متغیر نیز مستقل خواهند بود.

$$U = g(X) \qquad W = h(Y)$$

$$W \amalg U$$

۳– امید ریاضی

کلیات

- مفهوم:
- متوسط مقادیری که تابع g در طول آزمایش های مختلف اختیار خواهد کرد.

$$E\left(g(X)\right)=\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\, f_X(x)dx.$$

- متغیر گسسته

$$E(g(x)) = \sum_i g(x_i)P(X = x_i).$$

تابعی از دو متغیر تصادفی

$$E[g(X,Y)] = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} g(x,y)\, f_{XY}(x,y)\,dx\,dy.$$

$$E[g(X,Y)] = \sum_i \sum_j g(x_i, y_j) P(X = x_i, Y = y_j).$$

امید ریاضی شرطی

$$E\left(g(X,Y)\mid A\right)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} g(x,y)\, f_{XY}(x,y\mid A)\,dxdy\,.$$

- با توجه به تعریف تابع چگالی احتمال شرطی

$$f_{XY}(x,y\mid A)=\frac{1}{P(A)}\begin{cases} f_{XY}(x,y) & (x,y)\in A \\ 0 & (x,y)\notin A \end{cases}$$

- نتیجه می شود:

$$E\left(g(X,Y)\mid A\right)=\frac{1}{P(A)}\iint_A g(x,y)\, f_{XY}(x,y)\,dxdy$$

نکات امید ریاضی

- $$E[g(X)+h(Y)]=E[g(X)]+E[h(Y)]$$

- $$E[g(X,Y)]=E_Y(E_X[g(X,Y)\,|\,Y])$$

- اگر X و Y مستقل باشند

$$E[g(X)h(Y)]=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}g(x)h(y)f_X(x)f_Y(y)dxdy$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}g(x)f_X(x)dx\int_{-\infty}^{+\infty}h(y)f_Y(y)dy=E[g(X)]E[h(Y)].$$

ممان ها

- ممان مرتبه nام

$$m_n = \overline{X^n} = E(X^n), \quad n \geq 1$$

- ممان اول $m_x = E(X)$ را متوسط نیز می گویند.
- ممان دوم $P_x = E(X^2)$ را توان یا قدرت متغیر تصادفی گویند.

- ممان مرکزی مرتبه nام

$$E(\tilde{X}^n) = E[(X - m_X)^n] \qquad \tilde{X} = X - m_x$$:متغیر مرکزی

- ممان مرکزی مرتبه اول همواره صفر است.
- ممان مرکزی مرتبه دوم را واریانس σ^2 گویند و جذر آن را انحراف معیار گویند.

ممان متقابل

$$E[X^kY^m]=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}x^ky^m f_{XY}(x,y)dx\;dy,$$

- مهمترین ممان متقابل
  - همبستگی دو متغیر

$$r_{XY}=E[XY]$$

- ممان متقابل مرکزی مرتبه nام و mام

$$E[\tilde{X}^n\tilde{Y}^m]$$

- مهمترین ممان متقابل مرکزی(کوواریانس)

$$\sigma_{XY}=Cov(X,Y)=E[\tilde{X}\tilde{Y}]$$

- ضریب همبستگی (کوواریانس نرمالیزه)

$$\rho_{XY}=\frac{Cov(X,Y)}{\sigma_X\sigma_Y},\quad -1\le\rho_{XY}\le 1,$$

تعامد دو متغیر تصادفی

- دو متغیر متعامد $X \perp Y$ اند به شرط: $E[XY] = 0$

- اگر $X \perp Y$
  - آنگاه $P_{X+Y} = P_X + P_Y$

ناهمبستگی دو متغیر

- شرط ناهمبستگی $E[XY] = E[X]E[Y]$
- شرط فوق معادل با صفر بودن کواریانس یا تعامد متغیرهای مرکزی
- خاصیت ناهمبستگی
  - $\sigma_{X+Y}^2 = \sigma_X^2 + \sigma_Y^2$
  - *همیشه از استقلال می توان ناهمبستگی را نتیجه گرفت.*
  - *از ناهمبستگی، استقلال نتیجه گرفته نمی شود.*
    - از ناهمبستگی استقلال خطی نتیجه گرفته می شود.

❑ ناهمبستگی یعنی عدم وابستگی خطی ولی استقلال یعنی عدم هر نوع وابستگی