Math Econ

Introduction

Matrix Algebra

Economics and Math

- **مدلسازی**

1- فرضیات

2- مدل عموما بصورت سیستمی از معادلات جبری یا معادلات

3- دیفرانسیل و یا تحلیل یک بازی استراتژیک در می آید

برای حل مدل نیاز به استفاده از ریاضیات میباشد

- **فایده مدلسازی:**

تقریبا بدون ابهام میدانیم از چه فرضیاتی به چه نتایجی میرسیم

- **اشکال مدلسازی:**

ممکن است فرضیات زیادی ساده کننده باشد و نتوانند واقعیت را توضیح بدهند.

Math vs. Math Econon

- اقتصاد ریاضی بر مباحثی از ریاضی تکیه دارد که در اقتصاد کاربرد دارد ولی در ریاضیات عمومی به اندازه کافی مورد بررسی قرار نگرفته.

- همچنین بر کاربردهای اقتصادی مباحث ریاضی تکیه دارد

Math and Econ I

- **حسابان مقدماتی:** شامل مشتق انتگرال و مباحث مقدماتی ماتریسهاست که با کاربرد آنها در دروس اقتصادی آشنایی دارید.

- **حسابان پیشرفته:** شامل مباحث پیشرفته در حسابان چند متغیره - معادلات دیفرانسیل معمولی و با مشتقات جزیی - معادلات غیر خطی و پایداری و.... که در بخشهای مختلف اقتصاد خرد و کلان پیشرفته تر بکار میرود

- **آنالیز:** همان مباحث حسابان را مطالعه میکند ولی در حالات خیلی کلی تر مثلا در یک فضای نامتناهی البعد یا در فضایی که بعد در آن مطرح نیست. آنالیز هم در اقتصاد کاربردهای زیادی دارد مثلا یک فضای نامتناهی البعد میتواند تقریب خوبی به یک اقتصاد واقعی که تعداد بسیار زیادی کالا یا فرد در آن وجود دارد باشد

Math and Econ II

- **توپولوژی**: بخشی از ریاضیات است که اشکال - توابع و تبدیلات انها در فضاهای خیلی کلی را مطالعه میکند. در اقتصاد خرد کاربردهای زیادی پیدا کرده. مثلا برای اثبات وجود تعادل در یک اقتصاد یا اثبات قضایای اول و دوم رفاه مورد استفاده قرار میگیرد.

- **حسابان تصادفی**: حسابان عادی مسائلی را مطالعه می کند که در آن تغییرات یک تابع یا متغییرغیر تصادفیست. افرادی مانند انشتین روشهای ریاضی را توسعه دادند که میشود با آنها مسائلی که در آنها تغییرات یک تابع یا متغییر در هر زمان کاملا تصادفیست را مطالعه کرد. اقتصادانان از دهه 60 میلادی دریافتند که حسابان تصادفی ابزاری مناسب برای مطالعه پدیده هایی مثل تغییرات نرخ سهام یا نرخ بهره و از این قبیل است. این استفاده به حدی رسیده که الان بدون آشنایی با حسابان تصادفی مطالعه اقتصاد مالی تقریبا غیرممکن است

Math and Econ III

- **برنامه ریزی خطی و غیر خطی:** درخیلی از مطالعات کاربردی اقتصاددانان مجبورند مسائل بهینه سازی با متغییرها و محدودیتهای زیاد را حل کنند. مثلا یک اقتصاددان می خواهد الگوی بهینه کشت در یک منطقه کشاورزی را پیدا کند. ابزار مناسب برای حل چنین مسائلی برنامه ریزی خطی و یا نوع غیرخطی آنست. اقتصاددانان علاوه بر اینکه خودشان در توسعه این روشها نقش داشته اند آنها را طوری تعدیل کردند که برای حل مسائل اقتصادی مناسبتر بشود مثلا ریسک را در این مدلها دخالت دادند.

- **برنامه ریزی پویا و کنترل بهینه:** وقتی که بخواهیم مسائل بهینه سازی را بصورت پویا (یعنی در طول زمان) مطالعه کنیم استفاده از این ابزارها ضروریست. مطالعه اقتصاد منابع طبیعی و اقتصاد کلان پیشرفته بدون آشنایی با برنامه ریزی پویا و کنترل بهینه غیر ممکن است.

- **تئوری بازیها:** شاید مهمترین تحولی که در ارتباط ریاضیات و اقتصاد اتفاق افتاد بوجود آمدن تئوری بازیها باشد. خیلی از مسائل در اقتصاد بصورت مطالعه رفتار استراتژیک بازیگرها در یک بازی در می آید. در واقع بلحاظ تاریخی تلاش برای حل اینگونه مسائل اقتصادی یکی از عوامل اصلی در توسعه تئوری بازیها بوده است. امروزه بدون آشنایی با تئوری بازیها فهم بخش عمده ای از اقتصاد مثل سازماندهی صنعتی- انتخاب عمومی- اقتصاد سیاسی — تعادل عمومی — اقتصاد نهادی و ... غیرممکن است.

Why Do we Study Linear Systems?

- سیستمهای خطی بطور طبیعی برای حل بعضی از مسائل اقتصادی ظاهر می شوند. برای چند مثال اسلایدهای بعدی را ببینید

- حتی اگر سیستم معادلات مورد نظر غیرخطی باشد با مطالعه تقریب خطی آن میتوانیم اطلاعات زیادی راجع بجواب آن پیدا کنیم

Input-Output Model

1- فرض کنید که در یک اقتصاد سه صنعت وجود دارد که هر کدام فقط یک کالا تولید میکند مثلا X_1 و X_2 و X_3

2- فرض میشود که هر کدام از این ستاده ها بعنوان عامل تولید برای تولید همه کالاها بکار میرود

3- برای تولید هر کالا درصد ثابتی ازعوامل تولید بکار می رود. مثلا برای تولید هر واحد X_1 صفر واحد X_1 - 0.2 واحد X_2 و 0.5واحد X_3 بکار میرود

Input-Output Model II

- یک بخش دیگر هم وجود دارد (مثلا خانوارها) که تقاضای انها خارج از سیستم تعیین میشود

$$
\begin{aligned}
x_1 &= 0\ x_1 + 0.4\ x_2 + 0.3\ x_3 + 130 \\
x_2 &= 0.2x_1 + 0.12x_2 + 0.14x_3 + 74 \\
x_3 &= 0.5x_1 + 0.2\ x_2 + 0.05x_3 + 95,
\end{aligned}
$$

- سئوال: چه مقدار از هر کالا باید تولید شود که تمام تقاضاها با تمام عرضه ها برابر شود ؟

IS-LM

$\mathbf{Y}=\mathbf{C}+\mathbf{I}+G$

$\mathbf{C}=b_0+b\mathbf{Y}$

$\mathbf{I}=I_0-a\mathbf{r}$

$M=m\mathbf{Y}-h\mathbf{r}$

- برای مثالهای بیشتر به فصل ششم کتاب سیمون و بلوم مراجعه کنید

Linear System of Equations

سه سئوال

- آیا سیستم معادلات مورد نظر جواب دارد ؟
- در صورت داشتن جواب چه تعداد جواب دارد ؟
- چگونه میتوان جوابها را پیدا کرد ؟

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \quad + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases}$$

Alternative Methods of Solutions

1- روش جایگزینی

2 - روش حذفی گاوسی

3 - روش ماتریسی

مثال 1 (جایگزینی)

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = 7 \\ x_1 - x_2 = 1 \end{cases}$$

مثال 2 (حذفی)

$$\begin{cases} x_1 - 0.4\ x_2 - 0.3\ x_3 = 130 \\ -0.2x_1 + 0.88x_2 - 0.14x_3 = 74 \\ -0.5x_1\ 0.2\ x_2 + 0.95x_3 = 95. \end{cases}$$

Matrices

- تعریف

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

- m سطر و n ستون
- گاهی اوقات این ماتریس بصورت زیر نیز نشان داده میشود

$$A = \{a_{ij}\}$$

Addition and Multiplications

- Matrix Addition

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & a_{ij} & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & b_{ij} & \vdots \\ b_{k1} & \cdots & b_{kn} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & \cdots & a_{1n} + b_{1n} \\ \vdots & a_{ij} + b_{ij} & \vdots \\ a_{k1} + b_{k1} & \cdots & a_{kn} + b_{kn} \end{pmatrix}.$$

- Scalar Multiplication

$$r \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & a_{ij} & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ra_{11} & \cdots & ra_{1n} \\ \vdots & ra_{ij} & \vdots \\ ra_{k1} & \cdots & ra_{kn} \end{pmatrix}.$$

Matrix Products

number of columns of A = number of rows of B.

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aA + bC & aB + bD \\ cA + dC & cB + dD \\ eA + fC & eB + fD \end{pmatrix}.$$

If $\mathbf{A}_{km} = [a_{ih}]$ and $\mathbf{B}_{mn} = [b_{hj}]$

$$\mathbf{AB}_{kn} = \left[\sum_{h=1}^{m} a_{ih} b_{hj} \right]$$

Examples

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ 5 & 0 & 6 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} :$$

$$\begin{pmatrix} 2\times 2+3\times -1+1\times 0+4\times 1 & 2\times 3+3\times 0+1\times 1+4\times 1 \\ 0*2+(-1*-1)+2*0+1*1 & 0*3+(-1*0)+2*1+1*1 \\ 5*2+(0*-1)+6*0+0*1 & 5*3+0*0+6*1=0*1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 11 \\ 2 & 3 \\ 10 & 21 \end{pmatrix}$$

Zero Matrix

$$\underset{(2\times 2)}{0} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{and} \quad \underset{(2\times 3)}{0} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{0} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

$$\underset{(m\times n)}{A} + \underset{(m\times n)}{0} = \underset{(m\times n)}{0} + \underset{(m\times n)}{A} = \underset{(m\times n)}{A}$$

$$\underset{(m\times n)}{A}\ \underset{(n\times p)}{0} = \underset{(m\times p)}{0} \quad \text{and} \quad \underset{(q\times m)}{0}\ \underset{(m\times n)}{A} = \underset{(q\times n)}{0}$$

Identity Matrix

- Identity Matrix is defined as

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix},$$

- As we expect

$$IA = AI = A$$

$$\underset{(m\times n)}{A}\ \underset{(n\times n)}{I}\ \underset{(n\times p)}{B} = (AI)B = \underset{(m\times n)}{A}\ \underset{(n\times p)}{B}$$

Matrix Algebra

شرکت پذیری

$$(A + B) + C = A + (B + C),$$

$$(AB)C = A(BC),$$

جابجایی در جمع

$$A + B = B + A,$$

ولی نه در ضرب

$$AB \neq BA$$

پخشی

$$A(B + C) = AB + AC,$$

$$(A + B)C = AC + BC.$$

Transpose of a Matrix

- Transpose of a Matrix can be defined as

$$A = \{a_{ij}\} \Rightarrow A^T = \{a_{ij}\}^T = \{a_{ji}\}$$

- For example

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \\ a_{13} & a_{23} \end{pmatrix};$$

- Some Properties

$$(A + B)^T = A^T + B^T,$$

$$(A - B)^T = A^T - B^T,$$

$$(A^T)^T = A,$$

$$(rA)^T = rA^T,$$

Transpose II

- An important theorem

$$(AB)^T = B^T A^T$$

- First show that this is true for

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \text{ and } B = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 6 & 7 \end{bmatrix}$$

- Prove the theorem for general case

Linear Equations in Matrix Form

- Consider

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \quad\vdots \qquad\quad \vdots \qquad\qquad\quad \vdots \\ a_{k1}x_1 + \cdots + a_{kn}x_n = b_k. \end{cases}$$

- We can write

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b},$$

- where

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & a_{ij} & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kn} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad \text{and} \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_k \end{pmatrix}$$

Special Matrices I

Square Matrix. $k = n$, that is, equal number of rows and columns.

Column Matrix. $n = 1$, that is, one column. For example,

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \quad \text{and} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Row Matrix. $k = 1$, that is, one row. For example,

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{and} \quad \begin{pmatrix} 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Diagonal Matrix. $k = n$ and $a_{ij} = 0$ for $i \neq j$, that is, a square matrix in which all nondiagonal entries are 0. For example,

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \quad \text{and} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Special Matrices II

Upper-Triangular Matrix. $a_{ij} = 0$ if $i > j$, that is, a matrix (usually square) in which all entries below the diagonal are 0. For example,

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} \quad \text{and} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

Lower-Triangular Matrix. $a_{ij} = 0$ if $i < j$, that is, a matrix (usually square) in which all entries above the diagonal are 0. For example,

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ c & d \end{pmatrix} \quad \text{and} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}.$$

Special Matrices III

Symmetric Matrix. $A^T = A$, that is, $a_{ij} = a_{ji}$ for all i, j. These matrices are necessarily square. For example,

$$\begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix} \quad \text{and} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{pmatrix}.$$

Idempotent Matrix. A square matrix B for which $B \cdot B = B$, such as $B = I$ or

$$\begin{pmatrix} 5 & -5 \\ 4 & -4 \end{pmatrix}.$$

Inverse Matrix

$\mathbf{A}^{-1}$ is inverse of a square Matrix $\mathbf{A}$ if

$$\mathbf{AA}^{-1} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{I}$$

Theorem: There is at most one inverse for every square matrix:

Properties of Inverse Matrix

- Theorem

Let A and B be square invertible matrices. Then.

(a) $(A^{-1})^{-1} = A$,
(b) $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$,
(c) AB is invertible, and $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

- Theorem:

If A is invertible:

(a) A^m is invertible for any integer m and $(A^m)^{-1} = (A^{-1})^m = A^{-m}$
(b) for any integers r and s, $A^r A^s = A^{r+s}$, and
(c) for any scalar $r \neq 0$, rA is invertible and $(rA)^{-1} = (1/r)A^{-1}$.

Matrix Solution of Linear Equations

- Remember we can write:

$$\boldsymbol{Ax = b}$$

$$\boldsymbol{A^{-1}Ax = A^{-1}b}$$

$$\boldsymbol{(A^{-1}A)x = A^{-1}b}$$

$$\boldsymbol{Ix = A^{-1}b}$$

$$\boldsymbol{x = A^{-1}b}$$

How do we know if a matrix has an inverse and how to obtain it?

Determinants I

- Let ***a*** be 1×1 matrix

  a is invertible if $a \neq 0$

- If $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ is a 2×2

A is invertible if

$$a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0.$$

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11} \det(a_{22}) - a_{12} \det(a_{21}).$$

Determinants II

Definition Let A be an $n \times n$ matrix. Let A_{ij} be the $(n-1) \times (n-1)$ submatrix obtained by deleting row i and column j from A. Then, the scalar

$$M_{ij} \equiv \det A_{ij}$$

is called the (i, j)th **minor** of A and the scalar

$$C_{ij} \equiv (-1)^{i+j} M_{ij}$$

is called the (i, j)th **cofactor of** A

$$\begin{aligned}\det A &= a_{11}C_{11} + a_{12}C_{12} + \cdots + a_{1n}C_{1n} \\ &= a_{11}M_{11} - a_{12}M_{12} + \cdots + (-1)^{n+1} a_{1n}M_{1n}.\end{aligned}$$

Determinants III

$$\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = a_{11}C_{11} + a_{12}C_{12} + a_{13}C_{13}$$

$$= a_{11}M_{11} - a_{12}M_{12} + a_{13}M_{13}$$

$$= a_{11} \cdot \det\begin{pmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} - a_{12} \cdot \det\begin{pmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$$+ a_{13} \cdot \det\begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}.$$

Example

- دترمینان ماتریس زیر را محاسبه کنید

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 9 \\ 2 & 3 & 4 & 6 \\ 1 & 6 & 0 & -1 \\ 0 & -5 & 0 & 8 \end{vmatrix}$$

Properties of Determinants I

- **Theorem 1**: Determinant of a diagonal, upper and lower triangular matrix is the product of its diagonal entries.

$$\det\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = a_{11}C_{11} + 0 \cdot C_{12} + 0 \cdot C_{13}$$

$$= a_{11}\det\begin{pmatrix} a_{22} & 0 \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}.$$

- Corollary The determinant of the $n \times n$ identity matrix I is $+1$.

Properties of Determinants II

- 2 If one forms the matrix B by interchanging two rows (or two columns) then $\det B = -\det A$
- 3 If matrix A has an all-zero row (or column), then $\det A = 0$.
- 4 If two rows (or columns) of A are equal, $\det A = 0$.
- 5 Form matrix B by multiplying each entry in row (column) i of matrix A by the scalar r, then $\det B = r \cdot \det A$.

Properties of Determinants III

- 6 Let A and B be $n \times n$ matrices which differ only in their ith row. Let C be the matrix whose ith row is the matrix sum of the ith rows of A and of B and whose other rows are the same as those of A and B. Then,

$$\det C = \det A + \det B.$$

- 7 A square matrix A is nonsingular if and only if $\det A$ is nonzero

Properties of Determinants IV

- 8 For any $n \times n$ matrix A, $\det A = \det A^T$.
- 9 For arbitrary $n \times n$ matrices A and B,

$$\det AB = \det A \cdot \det B.$$

- 10 If A is invertible, $\det A^{-1} = 1/\det A$.

Adjoint Matrix

- Matrix Adj**A** is defined as

$$\mathrm{Adj}\mathbf{A} = \{C_{ij}\}^T = \{-1^{i+j} M_{ij}\}^T$$

- Theorem For any $n \times n$ matrix A, $A \cdot \mathrm{adj}\, A = \det A \cdot I$; that is

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & \cdots & A_{n1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \det A & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \det A & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \det A \end{pmatrix}$$

- Therefore If A is nonsingular, $A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \mathrm{adj}\, A$

Example

- ماتریس زیر را معکوس کنید

$$= \begin{bmatrix} 4 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 3 & 0 & 7 \end{bmatrix}.$$

Cramer Rule

(Cramer's rule) the unique solution $\mathbf{x} = (x_1, \cdots, x_n)$ of the $n \times n$ system $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ is

$$x_i = \frac{\det B_i}{\det A}, \qquad \text{for } i = 1, \ldots, n,$$

where B_i is the matrix A with the right-hand side $\mathbf{b}$ replacing the ith column of A.

Cramer Rule II

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 &= b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 &= b_2 \\
a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 &= b_3.
\end{aligned}
$$

$$
x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}, \quad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}, \quad x_3 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}.
$$

Examples

- سیستم معادلات زیر را با روش کرامر حل کنید

$$\begin{aligned} 7x_1 - x_2 - x_3 &= 0 \\ 10x_1 - 2x_2 + x_3 &= 8 \\ 6x_1 + 3x_2 - 2x_3 &= 7 \end{aligned}$$

Applications: Input-Output Model

- فرض کنید

$$\begin{cases} x_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots.. + a_{1n}x_n + b_1 \\ x_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots.. + a_{2n}x_n + b_2 \\ \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \\ \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \\ x_n = a_{n1}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots.. + a_{nn}x_n + b_n \end{cases}$$

- تعریف کنید

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix}, \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

Input-Output II

- We can write

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}$$

$$\mathbf{I}\mathbf{x} - \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} \Rightarrow (\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

$$\mathbf{x} = (\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{b}$$

- **Theorem** Let A be an $n \times n$ matrix with the properties that each entry is nonnegative and the sum of the entries in each column is less than 1. Then, $(I - A)^{-1}$ exists and contains only nonnegative entries.

Input-Output III

	Sector	Examples
FN,	Final nonmetal	Leather goods, furniture, foods
FM,	Final metal	Construction mach'ry, household appliances
BM,	Basic metal	Mining, machine shop products
BN,	Basic nonmetal	Glass, wood, textile, and livestock products
E,	Energy	Coal, petroleum, electricity, gas
S,	Services	Govt. services, transportation, real estate

	FN	FM	BM	BN	E	S	
FN	0.170	0.004	0.000	0.029	0.000	0.008	$ 99,640
FM	0.003	0.295	0.018	0.002	0.004	0.016	75,548
BM	0.025	0.173	0.460	0.007	0.011	0.007	14,444
BN	0.348	0.037	0.021	0.403	0.011	0.048	33,501
E	0.007	0.001	0.039	0.025	0.358	0.025	23,527
S	0.120	0.074	0.104	0.123	0.173	0.234	263,985

Input-Output IV

$$\mathbf{x = (I - A)^{-1}b}$$

$$\begin{pmatrix} 1.234 & 0.014 & 0.006 & 0.064 & 0.007 & 0.018 \\ 0.017 & 1.436 & 0.057 & 0.012 & 0.020 & 0.032 \\ 0.071 & 0.465 & 1.877 & 0.019 & 0.045 & 0.031 \\ 0.751 & 0.134 & 0.100 & 1.740 & 0.066 & 0.124 \\ 0.060 & 0.045 & 0.130 & 0.082 & 1.578 & 0.059 \\ 0.339 & 0.236 & 0.307 & 0.312 & 0.376 & 1.349 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 99{,}640 \\ 75{,}548 \\ 14{,}444 \\ 33{,}501 \\ 23{,}527 \\ 263{,}985 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 131{,}161 \\ 120{,}324 \\ 79{,}194 \\ 178{,}936 \\ 66{,}703 \\ 426{,}542 \end{pmatrix}.$$

Examples

- فرض کنید ماتریس تکنولوژی و تقاضا بصورت زیر باشد

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.2 & 0.3 & 0.2 \\ 0.4 & 0.1 & 0.2 \\ 0.1 & 0.3 & 0.2 \end{bmatrix}$$

$$b = \begin{bmatrix} 10 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}$$

Examples

What is the inverse of the $n \times n$ diagonal matrix

$$D = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & d_n \end{pmatrix}?$$

- میتوان نشان داد که

inverse of an $n \times n$ upper-triangular matrix U is upper-triangular.

Examples

- Suppose $\mathbf{X}$ is an **N by K** matrix and $(\mathbf{X}^T\mathbf{X})^{-1}$ exists. Define $\mathbf{M}=[\mathbf{I}-\mathbf{X}(\mathbf{X}^T\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}]$

- What should the Dimension of $\mathbf{M}$ be
- Show $\mathbf{MX}=\mathbf{0}$
- Show $\mathbf{M}$ is idempotent
- Suppose $\mathbf{e}=\mathbf{Y}-\mathbf{Xb}$ and $\mathbf{b}=(\mathbf{X}^T\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}^T\mathbf{Y}$ **then** $\mathbf{e}^T\mathbf{e}=\mathbf{Y}^T\mathbf{M}\mathbf{Y}=\mathbf{E}^T\mathbf{M}\mathbf{E}$ where $\mathbf{E}=\mathbf{Y}-\mathbf{XB}$

Examples

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$$

where A_{11} and A_{22} are square submatrices.

a) Show that

$$\det \begin{pmatrix} A_{11} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & A_{22} \end{pmatrix} = \det A_{11} \cdot \det A_{22}.$$

b) Show that

$$\det \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} A_{11} & \mathbf{0} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} = \det A_{11} \cdot \det A_{22}.$$

c) Suppose that A_{22} is nonsingular. Show that

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21} & A_{12} \\ \mathbf{0} & A_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} I & \mathbf{0} \\ A_{22}^{-1}A_{21} & I \end{pmatrix}.$$

d) Conclude that if A_{22} is nonsingular,

$$\det \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} = \det(A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21}) \cdot \det A_{22}.$$

Linear Dependence

- A set of vectors {**v**1,…,**v**m} are called linearly dependent if there is a set of numbers {x1,….,xm} such that

$$\sum_{i=1}^{m} x_i \mathbf{v}_i = \mathbf{0}$$

As an example see that

$$v_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 7 \end{bmatrix}, \; v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 8 \end{bmatrix}, \text{ and } v_3 = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$3v_1 - 2v_2 - v_3 = 0$$

Rank of a Matrix

- Maximum number of linear independent columns in a Matrix

or

Maximum order of a non-vanishing determinant that can be constructed from the rows and columns of a matrix. Rank is a unique number

Examples

- Find the rank of following matrix

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 2 & 6 \end{bmatrix}$$

Homogenous System of Equations

- Suppose **A** is a m by n matrix, **x** is n by 1 and **0** is m by 1 vector and we have following system of equations

$$\mathbf{Ax = 0}$$

- If m < n the system has infinitely many solution
- If m >= n or

  the system has solution [**x=0**] if Rank(A)=n

  infinitely many solution if Rank(A)<n

Examples

$$2x1-3x2=0$$

$$\left| \begin{array}{l} 2x1-3x2=0 \\ x1-x2=0 \end{array} \right.$$

$$\left| \begin{array}{l} 2x1-2x2=0 \\ x1-x2=0 \end{array} \right.$$

Non-Homogenous Systems

- Suppose **A** is a m by n matrix, **x** is n by 1 and **b** is m by 1 vector and we have following system of equations

$$\mathbf{Ax = b}$$

- If m < n

  and Rank (**A**)= Rank (**A|b**) the system has infinitely many solution

  and Rank (**A**) not equal Rank (**A|b**) the system has no solution

- If m >= n or

  one unique solution if Rank (**A**)= n

  infinitely many solution if Rank (A)< n and Rank (**A**)= Rank (**A|b**)

  No solution if Rank (**A**)< n and Rank (**A**) not equal Rank (**A|b**)

Examples

$$x1 - x2 = 2$$

$$\left| \begin{array}{l} x1 - x2 = 2 \\ x1 + x2 = 4 \end{array} \right.$$

$$\left| \begin{array}{l} x1 - x2 = 2 \\ x1 + x2 = 4 \\ x1 - x2 = 5 \end{array} \right.$$

Example: Portfolio Choice

- Suppose $\mathbf{x}=\{x_1,x_2,\ldots,x_A\}$ such that $x_1+x_2+\ldots+x_A=1$
- There are S states of nature
- R_{si} is the return of asset i if state S occurs
- The return to portfolio **x** in state S is

$$R_S = \sum_{i=1}^{A} R_{Si} x_i$$

- A portfolio $\mathbf{x}=\{x_1,x_2,\ldots,x_A\}$ is risk-less if

$$\sum_{i=1}^{A} R_{1i} x_i = \sum_{i=1}^{A} R_{2i} x_i = \cdots = \sum_{i=1}^{A} R_{Si} x_i$$

Portfolio Choice II

- A state S^* is insurable if there is a portfolio **x**$=\{x_1,x_2,\ldots,x_A\}$ has positive return if state S^* occurs and zero otherwise

$$\sum_{i=1}^{A} R_{s^*i} x_i > 0$$

$$\sum_{i=1}^{A} R_{si} x_i = 0 \qquad \text{for all } s \neq s^*$$

For portfolio x, the return to each state is given by

$$R_{11}\, x_1 + \cdots + R_{1A}\, x_A = R_1$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$R_{S1}\ x_1\ +\ +\ R_{SA}\ x_A\ =\ R_S.$$

Portfolio Choice III

Theorem 28.1 Consider an asset market with A assets, S states of nature, and state return matrix $\mathcal{R}$ as in (4).

(*a*) There is a riskless portfolio if and only if $\mathbf{1} = (1, \ldots, 1)$ is in the column space of $\mathcal{R}$, that is, if and only if $\mathcal{R}\mathbf{x} = \mathbf{1}$ has a solution. In particular, if rank $\mathcal{R} = S$, there is a riskless portfolio.

(*b*) State j is insurable if and only if $\mathbf{e}_j$ is in the column space of $\mathcal{R}$, that is, if and only if $\mathcal{R}\mathbf{x} = \mathbf{e}_j$ has a solution.

(*c*) Every state is insurable if and only if $\mathcal{R}$ has rank S.