جزوه کنترل موجودی

دکتر پور سعیدی

۱ـ تعاریف و مفاهیم کنترل موجودی

۱ـ۱ـ تعریف موجودی و کنترل موجودی

ـ **موجودی:** ذخیره‌ای از مواد و کالاست که برای مدت زمان مشخصی جهت جوابگویی تقاضا تحت کنترل سازمان به صورت ثابت نگهداری می‌شود.

نکته: همان‌طور که در تعریف موجودی نیز ذکر گردیده است موادی که به صورت ثابت نگهداری نمی‌شوند مانند نفت داخل لوله‌های پالایشگاه جزو موجودی به حساب نمی‌آیند ولی موادی مانند نفت داخل مخازن که بر طبق تعریف هستند، جزو موجودی به حساب می‌آیند.

ـ **کنترل موجودی:** بررسی و نگاه‌داری سطحی از موجودی که هزینه‌های سیستم موجودی را کمینه می‌کند.

۱ـ۲ـ عوامل موثر در مدل‌های موجودی

عوامل زیر سازنده فرضیات مدل‌های موجودی می‌باشند و با شناخت نوع آن‌ها در هر مدل می‌توان مدل‌های مختلف را از یکدیگر متمایز ساخت.

Demand

D

۱ـ **تقاضا:** مهم‌ترین عامل در کنترل موجودی است و به دو دسته قطعی و احتمالی که آن‌ها نیز به دو دسته ساکن و پویا تقسیم می‌گردند.

ـ تقاضای قطعی و ساکن: تقاضا قطعی است و مقدار آن در طول مدت برنامه‌ریزی تغییری نمی‌کند.

ـ تقاضای قطعی و پویا: تقاضا قطعی است و مقدار آن در طول زمان‌های مختلف به‌صورت مشخص تغییر می‌کند.

ـ تقاضای احتمالی و ساکن: تقاضا احتمالی است و توزیع آن در طول مدت برنامه‌ریزی تغییری نمی‌کند.

ـ تقاضای احتمالی و پویا: تقاضا احتمالی است و توزیع آن در زمان‌های مختلف تغییر می‌کند.

۲ـ **کمبود:** تقاضایی است که در زمان مقرر به آن جواب نمی‌دهیم. در مدل‌های موجودی می‌تواند کمبود مجاز باشد و یا مجاز نباشد در صورتی که کمبود مجاز باشد به دو نوع پس افت و فروش از دست رفته تقسیم می‌شوند. درکمبود پس افت به تقاضایی که به کمبود می‌خورد پاسخ می‌دهیم ولی در کمبود فروش از دست رفته به تقاضایی که به کمبود تبدیل شده دیگر جواب نمی‌دهیم.

۳ـ **محدودیت:** در مدل‌های موجودی ممکن است محدودیت‌های زیر وجود داشته باشد:

ـ محدودیت فضا

ـ محدودیت تعداد دفعات سفارش

ـ محدودیت سرمایه درگیر موجودی

۴ـ **سفارش:** مدل‌های موجودی با توجه به نرخ و چگونگی دریافت سفارش به دو نوع مدل‌های تولیدی و مدل‌های خرید تقسیم می‌شوند.

ـ مدل خرید: در مدل خرید کل سفارش در یک لحظه به انبار تحویل داده می‌شود بنابراین نرخ دریافت سفارش بی‌نهایت است.

ـ مدل تولید: در مدل تولید سفارش به تدریج به انبار تحویل می‌گردد و در واقع نرخ دریافت سفارش یک عدد است.

۵- مدت زمان تحویل سفارش (L): مدت زمان بین لحظه سفارش تا لحظه دریافت اولین قطعه سفارش است و می‌تواند قطعی و یا احتمالی باشد.

۶- قیمت کالا در طول مدت برنامه‌ریزی: قیمت کالا در طول مدت برنامه‌ریزی می‌تواند ثابت باشد و یا این‌که متغیر باشد مانند مدل‌های تورمی، حراج، تخفیف و ...

۷- برنامه‌ریزی: در مدل‌های موجودی می‌توان برای یک محصول و یا چند محصول به‌طور همزمان برنامه‌ریزی کرد.

۱-۳- متغیرهای حالت در یک سیستم موجودی

در یک سیستم موجودی، متغیرهای حالت، متغیرهایی هستند که در هر لحظه وضعیت یا حالت سیستم موجودی را مشخص می‌کنند. این متغیرها به شرح ذیل می‌باشند:

$I(t)$: موجودی در دست در زمان t

$b(t)$: مقدار کمبود در زمان t

$O(t)$: مقدار مواد در سفارش در زمان t یا مقدار سفارش در راه در زمان t

$I(t) \geq 0$
$b(t) \geq 0$
$O(t) \geq 0$
همگی غیرمنفی هستند

نکته 3 متغیر فوق همگی غیرمنفی و مستقل می‌باشند در حالی که 2 متغیری که در ادامه می‌آید وابسته به 3 متغیر فوق هستند و می‌توانند منفی یا مثبت باشند.

if $I(t)>0 \rightarrow b(t)=0$
if $b(t)>0 \rightarrow I(t)=0$ → ممکن است هر دو با هم صفر باشند
یعنی $I(t)=0$ و $b(t)=0$

نکته: در هر لحظه از زمان داریم:

$I(t)\cdot b(t)=0 \rightarrow$ اگر موجودی داشته باشیم پس کمبود نداریم و اگر کمبود داشته باشیم پس موجودی نداریم.

$NS(t)$: موجودی خالص در زمان t

$NS(t)=I(t)-b(t) \rightarrow$
$NS(t)>0 \rightarrow I(t)>0 , b(t)=0$
$NS(t)<0 \rightarrow I(t)=0$ و $b(t)>0$
$NS(t)=0 \rightarrow I(t)=0$ و $b(t)=0$

$Y(t)$: موقعیت موجودی در زمان t

$$Y(t)=Ns(t)+O(t)=O(t)+I(t)-b(t)$$

۱-۴- هزینه‌های سیستم موجودی

۱-۴-۱- هزینه تدارک مواد

هزینه‌ای است که از زمان سفارش دادن مواد تا رسیدن به درب انبار به سیستم شارژ می‌شود. هزینه تدارک مواد برای دو مدل خرید و تولید تعاریف جداگانه‌ای به شرح ذیل دارد.

هزینه تدارک مواد در مدل خرید به دو هزینه ثابت سفارش‌دهی و هزینه خرید مواد تقسیم می‌شود:

الف) هزینه ثابت سفارش‌دهی: (A = هزینه هر بار سفارش)

هزینه‌ای است که جهت سفارش مواد به سیستم موجودی شارژ می‌شود. این هزینه به مقدار سفارش بستگی ندارد. یعنی قابل بیان به ازای واحد محصول نیست. مانند: فکس، تلفن، پیگیری و ...

CQ

ب) هزینه خرید مواد: (CQ= کل هزینه هر بار خرید)

هزینه‌ای است که جهت خرید مواد به سیستم موجودی شارژ می‌شود و به مقدار هر بار سفارش (Q) و قیمت واحد محصول (C) بستگی دارد.

هزینه تدارک مواد در مدل تولیدی به دو هزینه آماده‌سازی و هزینه تولید محصول تقسیم می‌شود:

الف) هزینه آماده‌سازی: (A= هزینه هر بار آماده‌سازی)

هزینه‌ای است که جهت آماده‌سازی برای تولید تعدادی محصول بر سیستم شارژ می‌شود. این هزینه به مقدار سفارش تولید بستگی ندارد. مانند هزینه تعویض قالب‌ها، هزینه آموزش کارکنان و ...

ب) هزینه تولید محصول (CQ= کل هزینه هر بار تولید)

هزینه‌ای است که جهت تولید تعدادی محصول به سیستم شارژ می‌شود و به مقدار هر بار سفارش تولید (Q) و قیمت تمام شده (متغیر) محصول (C) بستگی دارد.

مثال: کدام‌یک از هزینه‌های زیر جزو هزینه‌های آماده‌سازی نیست.

۱) هزینه بازآموزی پرسنل جدید
۲) هزینه ضایعات ابتدای تولید
۳) هزینه کارآیی پایین ابتدایی تولید
۴) هزینه ضایعات مواد

حل: گزینه ۴ صحیح می‌باشد.

هزینه ضایعات مواد به ازای واحد محصول قابل بیان است، بنابراین جزو هزینه‌های آماده‌سازی نیست.

نکته: هزینه‌های حمل و نقل مواد سفارش داده شده و بازرسی جزو هزینه‌های تدارک مواد محسوب می‌شوند. این هزینه‌ها اگر قابل بیان به ازای واحد محصول باشند در قیمت محصول محاسبه شده و جزو هزینه‌های خرید مواد و یا هزینه‌های تولید محصول قرار می‌گیرند. در غیر این‌صورت در هزینه‌های سفارش‌دهی و یا هزینه‌های آماده‌سازی محاسبه می‌گردند.

مثال: کدام‌یک از عبارت‌های زیر در هزینه‌های سفارش‌دهی هر بار (A) مورد استفاده قرار نمی‌گیرد:

۱) هزینه بازرسی وقتی که برای کلیه واحدها انجام می‌شود.
۲) هزینه بازرسی وقتی که برای تعدادی از واحدها انجام می‌شود.
۳) هزینه حمل وقتی که به ازای واحد محصول پرداخت نمی‌شود.
۴) هزینه‌های تلکس و پیگیری

حل: گزینه ۱ صحیح می‌باشد.

همان‌طور که در نکته فوق ذکر شد هزینه بازرسی وقتی که برای کلیه واحدها انجام می‌شود در هزینه خرید محاسبه می‌گردد.

۱-۴-۲- هزینه نگهداری موجودی

هزینه‌ای است که به علت نگهداری موجودی به سیستم موجودی شارژ می‌شود. این هزینه‌ها در دسته‌بندی زیر قرار می‌گیرند:

الف) هزینه تسهیلات انبار شامل اجاره سالیانه انبار، هزینه آب، برق، گاز و ...
ب) هزینه انتقال و جابه‌جایی مانند هزینه حمل و نقل داخل انبار
ج) هزینه افت و یا از بین رفتن مانند فاسد شدن، شکستن چینی‌آلات
د) هزینه متروک شدن یا از مد افتادن مانند تغییر مد لباس و یا قدیمی شدن Chipsetهای کامپیوتری
هـ) هزینه‌های بیمه و مالیات
و) هزینه سرمایه درگیر موجودی (هزینه خواب سرمایه) بدین معنی که چقدر فرصت سود از دست داده‌ایم

برای محاسبه هزینه نگهداری پارامتر h به صورت زیر تعریف می‌گردد:

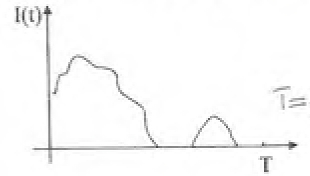
h : متوسط هزینه نگهداری هر واحد موجودی در واحد زمان

$h = i.c + \omega$

که در آن i نرخ هزینه نگهداری، c قیمت هر واحد محصول و ω هزینه نگهداری است که به قیمت کالا بستگی ندارد اما بر اساس واحد محصول بیان می‌شود.

نحوه محاسبه هزینه نگهداری از 0 تا T

هزینه نگهداری بر اساس منحنی موجودی در دست به صورت زیر محاسبه می‌گردد.



T دوره ماست. اگر دوره ماهانه باشد $T=\frac{1}{6}$

اگر هزینه سالیانه را بخواهیم $T=1$

$$\text{کل هزینه نگهداری از 0 تا T} = h \times (\text{مساحت زیرمنحنی موجودی در دست}) = h\int_0^T I(t)\,dt = h\bar{I}T$$

$$h\int_0^T I(t)dt = h\left(\frac{\int_0^T I(t)dt}{T}\right) \times T \quad \rightarrow \bar{I}$$

$$\bar{I}\ (\text{متوسط موجودی}) = \frac{\text{مساحت زیرمنحنی در دست}}{T} = \frac{\int_0^T I(t)\,dt}{T}$$

با استفاده از رابطه هزینه نگهداری، کل هزینه نگهداری سالیانه با قرار دادن $T = 1$ به‌دست می‌آید.

$$\text{کل هزینه نگهداری سالیانه} = h\bar{I}$$

نکته: تمامی هزینه‌های نگهداری موجودی عموماً به قیمت محصول بستگی دارد به جز هزینه تسهیلات انبار که از دو جهت با بقیهٔ متفاوت است:

۱ـ به قیمت واحد محصول (C) بستگی ندارد.

۲ـ تسهیلات انبار معمولاً بر اساس ماکزیمم موجودی در مدت زمان بررسی می‌شود، اما سایر هزینه‌های نگهداری بر اساس متوسط موجودی بیان می‌شود.

کل هزینه‌های سالیانه برای این حالت به صورت زیر محاسبه می‌گردد:

h_1 : هزینه‌هایی از نگهداری که به متوسط موجودی بستگی دارد.

h_2 : هزینه‌هایی از نگهداری که به ماکزیمم موجودی بستگی دارد.

$$\text{کل هزینه نگهداری سالیانه} = h_1\bar{I} + h_2 \times I_{max}$$

سوال مهم

$h_1\bar{I} + (h_2 I_{max}) \rightarrow$ چون ثابت است — هزینه ثابت — هزینه سالیانه

۱ـ۴ـ۳ـ هزینه کمبود

هزینه‌ای است که به صورت جریمه باعث عدم تامین به موقع تقاضا به سیستم شارژ می‌شود. این هزینه به دو دسته تقسیم می‌شود.

ـ هزینه کمبود وابسته به زمان $(\hat{\pi})$

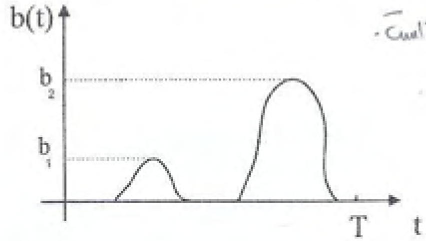
ـ هزینه کمبود مستقل از زمان (π)

$\hat{\pi}$ وابسته به زمان $\rightarrow \hat{TC} \rightarrow$ جریمه دیرکرد

π مستقل از زمان $\rightarrow TC \rightarrow$ هزینه‌های اداری و اصلاح

نحوه محاسبه کل هزینه کمبود از 0 تا T

هزینه کمبود بر اساس منحنی میزان کمبود بر حسب زمان محاسبه می‌گردد.



این هزینه‌های کمبود برای حالت پس‌افت است.

کل هزینه کمبود از 0 تا T = $\hat{\pi}$ (مساحت زیرمنحنی کمبود) +π (مقدار کمبود از 0 تا T)

$$=\hat{\pi}\int_0^T b(t)\,dt+\pi(b_1+b_2)=\hat{\pi}\bar{b}T+\pi(b_1+b_2)$$

$$\hat{\pi}\,\frac{\int_0^T b(t)\,dt}{T}\times T$$

(متوسط کمبود) $\bar{b}=\dfrac{\int_0^T b(t)\,dt}{T}$

مثال: منحنی موجودی خالص یک محصول در طی 10 ماه به صورت شکل زیر است. در صورتی که هزینه کمبود هر واحد تقاضا در سال 60 تومان باشد و همچنین هزینه کمبود هر واحد نیز برابر با 10 تومان باشد هزینه نگهداری هر واحد موجودی در ماه 20 تومان باشد موارد زیر را محاسبه کنید:

الف) کل هزینه نگهداری 10 ماهه

ب) کل هزینه کمبود 10 ماهه

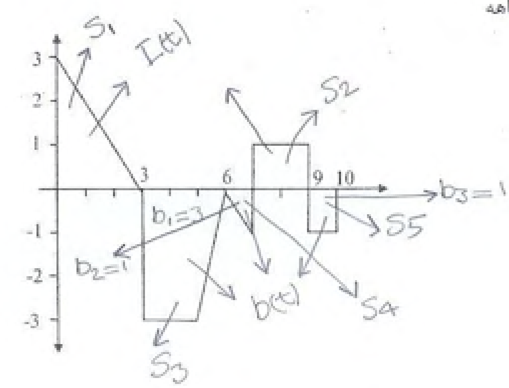
ج) متوسط موجودی طی 10 ماه

د) متوسط کمبود 10 ماهه

$\hat{\pi}=60$ تومان/سال $=5$ تومان/ماه

$\pi=10$ تومان/واحد موجودی

$h=20$ تومان/ماه-واحد موجودی



حل:

$h=20$ $\dfrac{\text{تومان}}{\text{عدد ماه}}$ $\pi=10$ $\dfrac{\text{تومان}}{\text{عدد}}$ $\hat{\pi}=60$ $\dfrac{\text{تومان}}{\text{عدد سال}}$ $=5$ $\dfrac{\text{تومان}}{\text{عدد ماه}}$

کل هزینه نگهداری 10 ماهه $=20\left(\frac{3\times3}{2}+1\times2\right)=130$ تومان $=20(S_1+S_2)=130$ تومان

$5(S_3+S_4+S_5)+10(b_1+b_2+b_3)=95$

کل هزینه کمبود 10 ماهه $=5\left(3\times2+\frac{3\times1}{2}+\frac{1\times1}{2}+1\times1\right)+10\left(3+1+1\right)=150+50=95$ تومان

متوسط موجودی = $\dfrac{\text{مساحت زیرمنحنی موجودی در دست}}{T}=\dfrac{\overset{S_1}{\frac{3\times3}{2}}+\overset{S_2}{1\times2}}{10}=0.65$

متوسط کمبود = $\dfrac{\text{مساحت زیر منحنی کمبود}}{T}=\dfrac{\overset{S_3}{3\times2+\frac{3\times1}{2}}+\overset{S_4}{\frac{1\times1}{2}}+\overset{S_5}{1\times1}}{10}=\frac{9}{10}=0.9$

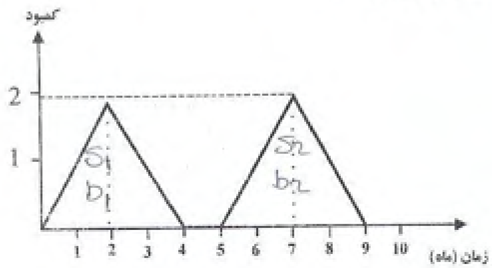
مثال: اگر هزینه کمبود یک واحد موجودی در ماه برابر 2 تومان باشد $(\hat{\pi}=2)$ و هزینه کمبود هر واحد موجودی یک تومان $(\pi=1)$ باشد. آن‌گاه هزینه کمبود در 9 ماه گذشته با توجه به منحنی کمبود زیر چقدر است؟

۱) 16 تومان

۲) 18 تومان

۳) 20 تومان

۴) 24 تومان



حل: گزینه ۳ صحیح می‌باشد.

هزینه کمبود وابسته به زمان + هزینه کمبود مستقل از زمان= کل هزینه کمبود

$=1(\underset{b_1}{2}+\underset{b_2}{2})+2\left(\overset{S_1}{\frac{2\times4}{2}}+\overset{S_2}{\frac{2\times4}{2}}\right)=4+16=20$

مثال: هزینه‌های حمل و نقل موجودی جزو کدام‌یک از هزینه‌های سیستم موجودی است؟

۱) هزینه خرید
۲) هزینه سفارش
۳) هزینه نگهداری
۴) می‌تواند جزو هر یک از هزینه‌های نگهداری، خرید یا سفارش باشد.

حل: گزینه ۴ صحیح می‌باشد.

هزینه‌های حمل و نقل در صورتی که در داخل انبار باشد و بر اساس واحد محصول قابل بیان باشد جزو هزینه‌های نگهداری است. در صورتی که خارج از انبار و از زمان سفارش تا درب انبار باشد، اگر به ازای واحد محصول قابل بیان باشد جزو هزینه‌های خرید و اگر قابل بیان به ازای واحد محصول نباشد جزو هزینه‌های سفارش است.

مثال: موجودی خالص محصولی در طی 10 ماه گذشته در شکل زیر داده شده است. اگر هزینه کمبود هر تن 100 تومان باشد، آن‌گاه کل هزینه کمبود در طی 10 ماه گذشته برابر است با:

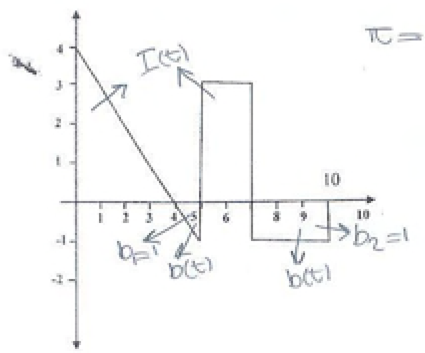
۱) 150

۲) 200

۳) 350

۴) 400

$\pi = 100$ تومان/تن



حل: گزینه ۲ صحیح می‌باشد.

در این مثال تنها هزینه کمبود مستقل از زمان موجود است.

$\pi=100$

هزینه کمبود = هزینه کمبود مستقل از زمان $=100(1+1)=200$

متوسط موجودی خالص : $\overline{NS} = \overline{I} - \overline{b}$

۲ـ مدل قطعی ساده یا ویلسون یا مقدار سفارش اقتصادی یا EOQ

فرضیات مدل به شرح ذیل است. این فرضیات همان‌طور که ذکر گردید بر اساس عوامل موثر در مدل‌های موجودی تعیین می‌گردند.

۱ـ تقاضا قطعی و ساکن است.

۲ـ کمبود جایز نیست.

۳ـ محدودیت وجود ندارد.

۴ـ سفارش یک‌جا دریافت می‌شود.

۵ـ مدت زمان تحویل سفارش قطعی و عددی است.

۶ـ قیمت کالا در طول مدت برنامه‌ریزی ثابت است.

۷ـ مدل تک محصولی است.

در این مدل هم نرخ سفارش دهی و هم نرخ تقاضا ثابت است.

پارامترهای مدل:

A: هزینه هر بار سفارش (هزینه سفارش‌دهی)

D نرخ تقاضا

h: هزینه نگهداری هر واحد کالا در واحد زمان

i: نرخ هزینه نگهداری در کالا

c: قیمت واحد کالا

ω: هزینه نگهداری که به قیمت کالا بستگی ندارد

$\pi, \hat{\pi}$: هزینه‌های کسری واحد کالا هزینه‌های کسری در مدل EOQ بسیار زیاد (∞) می‌باشند

P نرخ تولید، دریافت سفارش در مدل EOQ آنی و بنابراین نرخ تولید بسیار زیاد (∞) می‌باشد

L مدت زمان تحویل سفارش

متغیرهای مدل:

Q: مقدار هر بار سفارش

r: نقطه سفارش بر حسب موقعیت موجودی. بدین معنی که هر وقت در نمودار موقعیت موجودی، موجودی محصول برابر مقدار r شود زمان سفارش است. IP(t)

r_h: نقطه سفارش بر حسب موجودی خالص یا موجودی در دست. بدین‌معنی که هر وقت در نمودار موجودی خالص موجودی محصول برابر مقدار r_h شود، زمان سفارش است. NS(t)

متغیر دیگری که می‌توان آن را از طریق بقیه متغیرها به‌دست آورد T است.

T: فاصله بین دو سفارش متوالی یا فاصله بین رسیدن در سفارش متوالی یا مدت زمانی یک دوره

هدف مدل EOQ تعیین مقدار سفارش اقتصادی (Q^*) و تعیین r^*, r_h^* با کمینه کردن هزینه‌ها (هزینه نگهداری + هزینه سفارش‌دهی) است.

در این مدل Q^* را با Q_ω یا EOQ نیز نشان می‌دهند.

۲ـ۱ـ نحوه محاسبه مقدار سفارش اقتصادی (Q^*)

نمودار موجودی خالص در مدل EOQ مانند شکل زیر می‌باشد. در این نمودار زمان‌های t زمان دریافت سفارش و زمان‌های t' زمان صدور سفارش است که فاصله زمانی بین هر دو t و t' متوالی برابر زمان یک دوره T است.

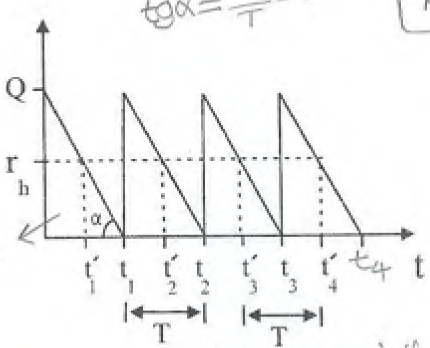
$tg\alpha = \frac{Q}{T} = D$ $\boxed{I_{max} = Q}$

در اینجا کمبود مجاز نمی‌باشد

$b(t) = 0$

$Ns(t) \geq 0$

$S = \frac{Q.T}{2}$



t_4 و t_3 و t_2 و t_1 زمان‌های دریافت سفارش

t'_4 و t'_3 و t'_2 و t'_1 زمان‌های صدور سفارش

فاصله بین دوبار دریافت سفارش = فاصله بین دوبار صدور سفارش = T

$b(t)=0$

$Ns(t)=I(t)-b(t)$

$D=tg\alpha$ نرخ کاهش یا مصرف کالا

$\boxed{D = \frac{Q}{T} \rightarrow T = \frac{Q}{D}}$

هزینه یک سیستم موجودی برابر است با جمع هزینه‌های نگهداری کمبود و تدارک مواد. از آن‌جا که در مدل EOQ کمبود جایز نیست هزینه‌های کسری برابر صفر می‌باشد. هزینه تدارک مواد نیز به دو قسمت هزینه سفارش‌دهی و هزینه خرید تقسیم می‌گردد بنابراین:

هزینه خرید + هزینه نگهداری + هزینه سفارش‌دهی = هزینه یک دوره

بر اساس آن‌چه در نمودار موجودی خالص مشاهده گردید، هزینه یک دوره به صورت زیر محاسبه می‌گردد.

$$\text{هزینه یک دوره} = A + \frac{hQT}{2} + CQ$$

n: متوسط تعداد دوره‌های در سال یامتوسط تعداد دفعات سفارش

$$n = \frac{1}{T} = \frac{D}{Q}$$

در صورتی که هزینه یک دوره در تعداد دوره‌ها در سال ضرب گردد، متوسط کل هزینه سالیانه سیستم موجودی به‌دست می‌آید.

$$\text{متوسط کل هزینه سالیانه سیستم موجودی} = n\ (\text{هزینه یک دوره}) = \frac{D}{Q}A + h\frac{Q}{2} + CD$$

NA $\quad N\frac{hQT}{2}$ $\quad NCQ$

کل هزینه نگهداری سالیانه $= h\frac{Q}{2}$

کل هزینه سفارشی طی سالیانه $= \frac{D}{Q}A$

کل هزینه خرید سالیانه $= CD$

$TC = \frac{h}{2}Q + \frac{D}{Q}A + CD$

← از رابطهٔ صفحهٔ قبل نسبت به Q مشتق گرفته تا TC آن مینیمم گردد

برای یافتن Q^* باید از رابطه فوق بر حسب Q مشتق گرفته شود. از آن‌جا که CD به مقدار Q بستگی ندارد بنابراین در مشتق‌گیری مقدارش برابر صفر قرار می‌گیرد. از این‌رو $k(Q)$ را به صورت زیر تعریف کرده و هزینه متغیر سالیانه می‌نامند.

$$TRC = K(Q)=\frac{DA}{Q}+\frac{hQ}{2}$$

در صورتی که مشتق تابع فوق بر حسب Q برابر صفر قرار دهیم، مقدار Q^* به‌دست می‌آید.

$$\frac{d\,(\text{کل هزینه سالیانه})}{dQ}=\frac{dK(Q)}{dQ}=0 \Rightarrow Q^*=Q_\omega=EOQ=\sqrt{\frac{2DA}{h}}$$

همچنین هزینه متغیر سالیانه بهینه $(K(Q^*))$ و زمان دوره بهینه (T^*) از روابط زیر محاسبه می‌گردد:

$$K(Q^*)=\frac{DA}{Q^*}+\frac{hQ^*}{2}=\sqrt{2DAh}$$

$$T^*=\frac{Q^*}{D}=\sqrt{\frac{2A}{Dh}}$$

$$\frac{DA}{Q^*}=\frac{hQ^*}{2}$$ ← در Q_w برابرند

$$\Downarrow$$

$$=\sqrt{\frac{DAh}{2}}$$

$$TRC^*=\frac{h}{2}Q^*+\frac{D}{Q^*}A = hQ^* = 2\frac{D}{Q^*}A = \sqrt{2DAh}$$

۲ـ۲ـ نحوه محاسبه نقطه سفارش بهینه r^*, r_h^*

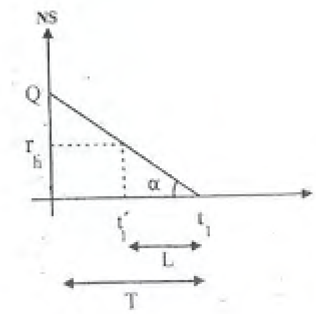
برای یافتن r_h^*, r^* دو حالت زیر را در نظر می‌گیریم.

$$\bar{I}^*=\frac{Q_w}{2}=\sqrt{\frac{DA}{2h}}$$

$$\bar{I}^*=\frac{\int_0^T I(t)dt}{T}=\frac{\frac{Q^*T}{2}}{T}=\frac{Q^*}{2}$$

حالت اول: $L < T$

سیکل یعنی یک سفارش T است تا که در مدت L سفارش در راه است و در مدت T مصرف می‌شود تا به آخر برسد



$$D=\frac{Q}{T}\xrightarrow{\text{نسبت}} D=\frac{r_h}{L}$$

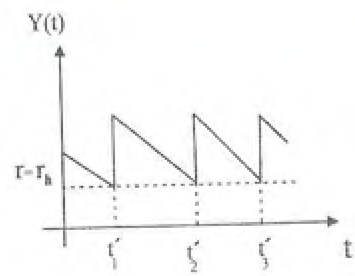
$$\to r_h^*=DL$$

$$tg\alpha = D = \frac{r_h}{L} \Rightarrow r_h^*=D.L$$

در این حالت تعداد سفارش در راه یک لحظه قبل از t'_1 (زمان سفارش) برابر صفر و لحظه‌ای بعد از آن برابر است. بنابراین نمودار موقعیت موجودی آن به صورت زیر خواهد بود.

Q^* ← منظور 1 است.

$$r^*=r_h^*+\overset{0}{m}Q^*=r_h^*$$



حالت دوم: $L \geq T$

در این حالت نمی‌توان مانند حالت قبل عمل کرد بنابراین L' را به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

L': فاصله زمانی بین انجام سفارش تا رسیدن اولین (نزدیک‌ترین) سفارش که از رابطه زیر به‌دست می‌آید:

سفارش جاری — سفارش قبلی

$L' = L - mT \quad , \quad m = \left[\frac{L}{T}\right]$

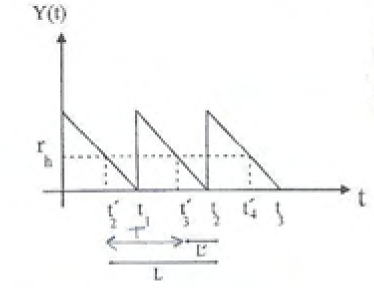
دو حالت داریم $L<T$ و $L \geq T$

$r^* = D.L$

$r_h^* = DL - mQ^*$

$\text{if } L<T: m=0 \rightarrow r_h^* = DL$

$\text{if } L \geq T: m = \left[\frac{L}{T}\right] \rightarrow r_h^* = DL - mQ^*$

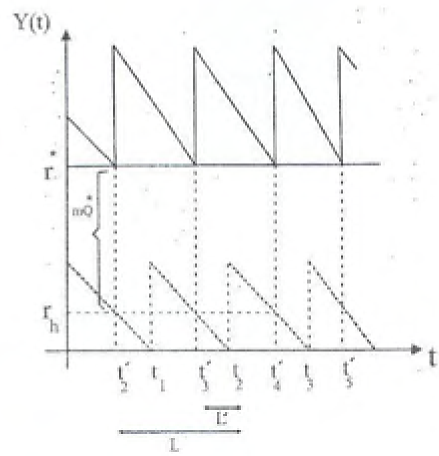


$T = \frac{Q}{D} \rightarrow Q = DT$

$$tg\alpha = D = \frac{r_h}{L'} \Rightarrow r_h^* = D.L' = D(L - mT) = D.L - mDT = DL - mQ^*$$

$$\Rightarrow r_h^* = D.L - mQ^*$$

در این حالت مقدار سفارش در راه لحظه‌ای قبل از t' برابر m و لحظه‌ای بعد از آن $(m+1)$ است. بنابراین نمودار موقعیت موجودی آن به صورت زیر خواهد بود.



$$r^* = r_h^* + mQ^* = D.L - mQ^* + mQ^* = D.L$$

بنابراین نقطه سفارش مجدد در مدل EOQ از رابطه‌های زیر محاسبه می‌گردد.

$$\begin{cases} r^* = D.L \\ r_h^* = D.L - mQ^* \end{cases}$$

$$m = \left[\frac{L}{T}\right]$$

۲ـ۳ـ نکات مدل EOQ

نکته ۱: روابط زیر برای موقعیت موجودی $(y(t))$ برقرار است.

$$r^* \le y(t) \le r^* + Q^*$$

$$D.L \le y(t) \le DL + DT^*$$

همچنین برای موجودی خالص $(I(t))$ داریم:

$$0 \le I(t) \le Q^* = DT^*$$

نکته ۲: در مدل‌های EOQ، r_h^* می‌تواند برابر صفر گردد ولی نمی‌تواند برابر Q^* شود.

$$0 \le r_h^* < Q^* = DT^*$$

اگر مدت زمان تحویل سفارش مضرب صحیحی از T باشد $(L = mT \quad , \quad L' = 0)$ آن‌گاه r_h^* برابر با صفر است $(r_h^* = D.L' = 0)$

نکته ۳: در مدل EOQ در زمان‌های قبل از زمان سفارش مقدار سفارش در راه معادل mQ^* و زمان‌های پس از سفارش، مقدار آن $(m+1)Q^*$ است. به‌طور متوسط مقدار سفارش در راه معادل $D.L$ است. همچنین متوسط تعداد محموله‌های در سفارش یا متوسط تعداد دفعات سفارشی که به دست ما نرسیده برابر با $\frac{L}{T^*} = \frac{DL}{Q^*}$ است.

مثال: در مدل ساده موجودی (که نرخ تقاضا ثابت معلوم و کمبود موجودی جایز نیست) فرض کنید مدت تحویل برابر 2.5 ماه، مقدار سفارش اقتصادی برابر 100 واحد و تقاضای سالیانه 1200 واحد است.
مقدار موجودی در دست در موقع سفارش در حالت سفارش اقتصادی: ← یعنی موقع سفارش را دهیم چقدر موجودی داریم که همان نقطه سفارش است.

۱) 150 واحد ۲) 100 واحد ۳) 50 واحد ۴) 25 واحد

حل: گزینه ۳ صحیح می‌باشد.

$L = 2.5$ ماه $= \frac{2.5}{12}$ سال

$Q^* = 100$, $D = 1200 \rightarrow T^* = \frac{Q^*}{D} = \frac{100}{1200} = \frac{1}{12}$

$m = \left[\frac{L}{T^*}\right] = \left[\frac{2.5}{\frac{Q^*}{D} = \frac{100}{1200/12}}\right] = [2.5] = 2$

$$\Rightarrow r_h^* = D.L - mQ^* = 1200 \times \frac{2.5}{12} - 2 \times 100 = 50$$

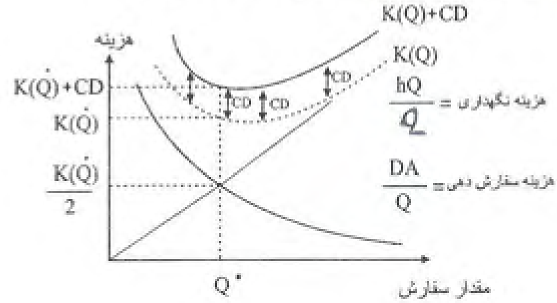
مثال: در مثال فوق مقدار متوسط مقدار مواد در سفارش (موادی که سفارش داده شده و هنوز دریافت نشده‌اند) برابر است با:

۱) 150 واحد ۲) 200 واحد ۳) 250 واحد ۴) 300 واحد

حل: گزینه ۳ صحیح می‌باشد.

متوسط مواد در سفارش $= D.L = 1200 \times \frac{2.5}{12} = 250$

نکته ۴: بررسی هزینه‌های سفارش‌دهی و نگهداری سالیانه با افزایش مقدار سفارش



همان‌طور که مشاهده می‌شود منحنی $k(Q)$ از جمع دو منحنی هزینه سفارش‌دهی و هزینه نگهداری به‌دست می‌آید. منحنی هزینه نگهداری روند صعودی و منحنی هزینه سفارش‌دهی روند نزولی دارد. منحنی کل هزینه‌های سالیانه $(k(Q)+CD)$ نیز با اضافه شدن مقدار ثابت CD به منحنی $K(Q)$ به‌دست آمده است.

نکته ۵: در نقطه بهینه هزینه سفارش‌دهی سالیانه با هزینه نگهداری سالیانه برابر است یعنی محل تلاقی منحنی‌های هزینه نگهداری سالیانه و هزینه سفارش‌دهی سالانه نقطه بهینه است.

$$\frac{DA}{Q^*}=\frac{hQ^*}{2}=\frac{\sqrt{2DAh}}{2}=\frac{K(Q^*)}{2}$$

$$\Rightarrow\quad K(Q^*)=\sqrt{2DAh}=hQ^*=\frac{2DA}{Q^*}=\frac{2A}{T}=2nA$$

نکته ۶: شیب منحنی هزینه‌ها در نقطه بهینه به‌ترتیب برای هزینه نگهداری و هزینه سفارش‌دهی سالانه معادل $\frac{-h}{2},\frac{h}{2}$ است.

نکته ۷: رابطه بین هزینه سفارش‌دهی سالانه و هزینه نگهداری سالانه در صورتی که بیشتر یا کمتر از سفارش اقتصادی سفارش دهیم به صورت زیر است.

اگر $Q>Q^*$ $\leftarrow$ هزینه نگهداری > هزینه سفارش‌دهی

اگر $Q=Q^*$ $\leftarrow$ هزینه نگهداری = هزینه سفارش‌دهی

اگر $Q<Q^*$ $\leftarrow$ هزینه نگهداری < هزینه سفارش‌دهی

نکته ۸: شیب منحنی هزینه‌ها در سمت راست نقطه بهینه نسبت به سمت چپ آن ملایم‌تر است.

$$K(Q^*-a)>K(Q^*+a)$$

نکته ۹: در صورتی که در محاسبه مقدار سفارش بهینه به اشتباه یا از روی تخمین به جای یکی از پارامترها مقداری را جایگزین کنیم، مقدار سفارش انجام شده با این پارامتر نابهینه خواهد بود و کل هزینه‌ها افزایش خواهد یافت. به طور کلی هنگامی که به جای Q^*، Q نابهینه سفارش دهیم، درصد این افزایش از رابطه زیر محاسبه می‌گردد.

$$\frac{K(Q)}{K(Q^*)}=\frac{1}{2}\left(\frac{Q^*}{Q}+\frac{Q}{Q^*}\right)$$

نکته ۱۰: برای مقایسه تغییرات کل هزینه سالیانه $(K(Q)+CD)$ نمی‌توان مانند هزینه متغیر سالیانه $K(Q)$ رابطه‌ای یافت، تنها می‌توان حدود تغییر آن را از نامساوی زیر به‌دست آورد.

$$1\le\frac{K(Q)+CD}{K(Q^*)+CD}<\frac{K(Q)}{K(Q^*)}$$

$$\frac{TRC}{TRC^*}=\boxed{\frac{1}{2}\left(\frac{Q}{Q_W}+\frac{Q_W}{Q}\right)}$$

$$TRC = (k)\, TRC^*$$

مثال: چنانچه بدانیم مقدار سفارش بهینه 500 واحد است و در سال بعد 2 برابر این مقدار و در سال دوم نصف این مقدار را سفارش دهیم، هزینه‌های نگهداری + سفارش‌دهی چند درصد افزایش می‌یابد.

حل:

$$Q_1 = 2Q^* \Rightarrow \frac{K_1}{K^*}=\frac{1}{2}\left(\frac{1000}{500}+\frac{500}{1000}\right)=1.25 \Rightarrow$$ 25% افزایش هزینه‌ها

$$Q_2 = \frac{Q^*}{2} \Rightarrow \frac{K_2}{K^*}=\frac{1}{2}\left(\frac{250}{500}+\frac{500}{250}\right)=1.25 \Rightarrow$$ 25% افزایش هزینه‌ها

در هر دو صورت 25% مجموع هزینه نگهداری و سفارش‌دهی افزایش پیدا خواهد کرد.

نکته ۱۱: در صورتی که یکی از پارامترهای مدل تغییر کند، آن‌گاه مطمئناً مقدار سفارش بهینه (Q^*) و هزینه بهینه متغیرسالیانه $(K(Q^*))$ تغییر می‌کند و نسبت این تغییرات به صورت زیر است.

$$\frac{Q_1^*}{Q_0^*}=\frac{\sqrt{\frac{2D_1A_1}{h_1}}}{\sqrt{\frac{2D_0A_0}{h_0}}}=\sqrt{\frac{D_1}{D_0}}\cdot\sqrt{\frac{A_1}{A_0}}\cdot\sqrt{\frac{h_0}{h_1}}$$

$$\frac{K(Q_1^*)}{K(Q_0^*)}=\frac{\sqrt{2D_1A_1h_1}}{\sqrt{2D_0A_0h_0}}=\sqrt{\frac{D_1}{D_0}}\cdot\sqrt{\frac{A_1}{A_0}}\cdot\sqrt{\frac{h_1}{h_0}}$$

نکته ۱۲: با افزایش پارامترهای مدل مقدار سفارش بهینه و هزینهٔ متغیر سالیانه به صورت زیر تغییر می‌کند.

	Q^*	$K(Q^*)$
افزایش A	افزایش	افزایش
افزایش D	افزایش	افزایش
افزایش h	کاهش	افزایش
افزایش i	تغییر نمی‌کند	افزایش
افزایش c	تغییر نمی‌کند	افزایش
افزایش w	تغییر نمی‌کند	افزایش
افزایش L	تغییر نمی‌کند	تغییر نمی‌کند

نکته ۱۳: اگر h_1، هزینه نگهداری هر واحد موجودی در سال بر اساس متوسط موجودی و h_2 هزینه نگهداری هر واحد در سال بر اساس ماکزیمم موجودی باشد. در محاسبهٔ فرمول‌های مدل EOQ به جای مقدار h، مقدار h_1+2h_2 جایگزین می‌گردد، در واقع هزینه نگهداری که بر اساس ماکزیمم موجودی باشد در 2 ضرب شده و با هزینه نگهداری متوسط موجودی جمع می‌گردد و جایگزین h می‌شود.

نکته ۱۴: هزینه نگهداری در سال که بر اساس واحد موجودی بیان نشود، تاثیری در مقدار بهینه سفارش ندارد.

مثال: شرکتی جهت نگهداری مواد اولیه اقدام به اجاره انبار با اجاره بهای ثابتی در سال نموده است، از سال آینده قرار است اجاره بهای این انبار افزایش یابد. مقدار سفارش اقتصادی این کالا در سال آینده نسبت به شرایط حاضر ...

۱) کاهش خواهد یافت. ۲) افزایش خواهد یافت.

۳) اطلاعات کافی نیست. ۴) ثابت باقی خواهد ماند.

حل: گزینه ۴ صحیح می‌باشد.

همان‌طور که در نکات بالا ذکر گردید، اجاره بهای ثابت سالیانه که بر اساس واحد موجودی بیان نمی‌شود تاثیری در مقدار سفارش اقتصادی ندارد.

مثال: در یک مدل مقدار سفارش اقتصادی بدون کمبود موجودی، کالایی هر 2 ماه‌یک بار سفارش داده می‌شود و هزینه ثابت هر بار سفارش

50 000 تومان است. هزینه نگهداری سالیانه در حالت بهینه چند تومان است؟

۱) 100000 ۲) 200000 ۳) 300000 ۴) 600000

حل: گزینه ۳ صحیح می‌باشد.

$$\frac{hQ^*}{2}=\frac{D}{Q^*}A \qquad NA=\frac{1}{T}A$$

$T=$ ماه 2 $=\frac{1}{6}$ سال

$A=50000$

در حالت بهینه هزینه نگهداری با هزینه سفارش‌دهی برابر است.

هزینه نگهداری بهینه = هزینه سفارش‌دهی بهینه $=\frac{A}{T}=\frac{50000}{\frac{1}{6}}=300000$

مثال: در یک مدل ساده قطعی اگر مقدار هر بار سفارش 50 درصد بیشتر یا 50 درصد کمتر از مقدار اقتصادی سفارش باشد به‌ترتیب هزینه متغیر چقدر افزایش خواهد کرد؟

۱) %50 و %50 ۲) %25 و %50 ۳) %250 و %25 ۴) %8 و %25

حل: گزینه ۴ صحیح می‌باشد.

$$Q_1=Q^*+\frac{Q^*}{2}=\frac{3Q^*}{2} \Rightarrow \frac{K_1}{K^*}=\frac{1}{2}\left(\frac{Q_1}{Q^*}+\frac{Q^*}{Q_1}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}+\frac{2}{3}\right)=1.08 \rightarrow$$ %8 افزایش

$$Q_2=Q^*-\frac{Q^*}{2}=\frac{Q^*}{2} \Rightarrow \frac{K_2}{K^*}=\frac{1}{2}\left(\frac{Q_2}{Q^*}+\frac{Q^*}{Q_2}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+2\right)=1.25 \rightarrow$$ %25 افزایش

مثال: مصرف سالیانه مواد اولیه در شرکت تولیدی 2000 تن و هزینه سفارش‌دهی آن برابر 2000 تومان قیمت هر تن از این مواد 100 تومان و هزینه نگهداری هر تن 0.5 تومان در ماه و هزینه بیمه آتش‌سوزی و ... برابر 2 درصد متوسط ارزش موجودی‌ها در سال می‌باشد کل هزینه‌های سفارش‌دهی این کالا در حالت اقتصادی برابر است با:

۱) 2236 ۲) 4000 تومان ۳) 8000 تومان ۴) 3464 تومان

حل: گزینه ۲ صحیح می‌باشد.

$D=2000$, $A=2000$, $C=100$, $i=0.02$

$$\left.\begin{array}{l} h_1=0.5\ \dfrac{\text{زمان}}{\text{ماه.تن}}=0.5\times 12\ \dfrac{\text{تومان}}{\text{سال تن}}=6 \\ h_2=i.c=0.02\times 100=2 \end{array}\right\} \Rightarrow h=h_1+h_2=8$$

هزینه سفارش‌دهی بهینه $=\frac{K(Q^*)}{2}=\frac{\sqrt{2DAh}}{2}=\frac{\sqrt{2\times 2000\times 2000\times 8}}{2}=4000$

مثال: برای مدل ساده موجودی (تقاضا ثابت و معلوم است و کمبود موجودی مجاز نیست) اگر هزینه نگهداری محصول چهار برابر شود آن‌گاه مقدار سفارش اقتصادی EOQ:

۱) نصف خواهد شد. ۲) دوبرابر خواهد شد. ۳) تغییر نخواهد کرد. ۴) هیچ‌کدام

حل: گزینه ۱ صحیح می‌باشد.

$$h_2 = 4h_1$$

$$\frac{Q_2^*}{Q_1^*} = \frac{\sqrt{\frac{2DA}{h_2}}}{\sqrt{\frac{2DA}{h_1}}} = \sqrt{\frac{h_1}{h_2}} = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$$

مثال: شرکتی برای یک نوع محصول هر بار 1500 واحد سفارش می‌دهد که این مقدار سفارش شرکت را برای شش ماه کفایت می‌نماید. هزینه خرید هر واحد این محصول 10 تومان و هزینه هر بار سفارش 25 تومان می‌باشد. اگر درصد هزینه نگهداری سالیانه این محصول 25 درصد در سال و زمان انتظار تحویل کالا (Lead Time) برابر 14 هفته باشد. هزینه سیستم کنترل موجودی جاری شرکت بدون توجه به هزینه خرید برابر است با:

۱) 1235 ۲) 433 ۳) 1925 ۴) 613

حل: گزینه ۳ صحیح می‌باشد.

$$Q = 1500 \quad , \quad T = 6 \text{ ماه} = \frac{1}{2} \text{ سال} \quad \Rightarrow \quad D = \frac{Q}{T} = 3000$$

$$C = 10 \quad , \quad A = 25 \quad , \quad i = 0.25 \quad , \quad L = 14 \text{ هفته}$$

$$h = i.cs = 0.25 \times 10 = 2.5$$

$$K(Q) = \frac{DA}{Q} + \frac{hQ}{2} = \frac{3000 \times 25}{1500} + 2.5 \times \frac{1500}{2} = 50 + 1875 = 1925$$

مثال: در مثال فوق اگر سفارش این محصول به صورت بهینه انجام گیرد مقدار صرفه‌جویی هزینه‌ها در سال برابر است با:

۱) 1925 ۲) 1313 ۳) 613 ۴) 547

حل: گزینه ۲ صحیح می‌باشد.

$$K(Q^*) = \sqrt{2DAh} = \sqrt{2 \times 300 \times 25 \times 2.5} = 612$$

$$\Rightarrow \quad K - K^* = 1925 - 612 = 1313$$

مثال: در مثال فوق نقطه سفارش مجدد بر حسب موجودی در دست برابر است با (سال 52 هفته در نظر بگیرید):

۱) 43 واحد ۲) 67 واحد ۳) 73 واحد ۴) 47 واحد

حل: گزینه ۳ صحیح می‌باشد.

$$Q = \sqrt{\frac{2DA}{h}} = \sqrt{\frac{2 \times 3000 \times 25}{2.5}} = 245$$

$$T = \frac{Q}{D} = \frac{245}{3000} = 0.082$$

$$\Rightarrow \quad r_h^* = D.L - mQ^* = 3000 \times \frac{14}{52} - \left[\frac{\frac{14}{52}}{0.082}\right].245 = 73$$

۳ـ مدل‌های کمبود

۳ـ۱ـ مدل کمبود پس افت

فرضیات این مدل مانند مدل EOQ است با این تفاوت که کمبود به صورت سفارشات عقب افتاده جایز است هدف مدل تعیین مقدار سفارش بهینه (Q^*) و مقدار کمبود بهینه در هر دوره (b^*) همین‌طور r^*, r_h^* همراه با کمینه کردن هزینه‌ها می‌باشد.

۳ـ۱ـ۱ـ نحوه محاسبه روابط مقدار سفارش اقتصادی

در این مدل $\pi, \hat{\pi}$ برابر مقدار ثابتی می‌باشند و بقیه پارامترها مانند مدل EOQ است.

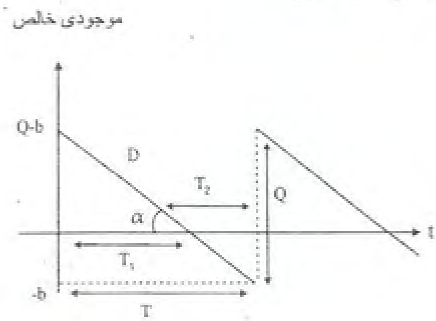
T_2 : مدت زمانی از یک دوره که کمبود رخ می‌دهد.

T_1 : مدت زمان یک دوره که در حالت کمبود نیستیم.

b : مقدار هر بار کمبود یا همان مقدار ثابت کمبود در هر سیکل

T_1 مدت زمانی که از سیستم موجودی داریم
T_2 مدت زمانی که از سیستم کمبود داریم
$T=T_1+T_2$

π هزینه ثابت کمبود هر واحد
$\hat{\pi}$ هزینه کمبود هر واحد در سال



$$D = tg\alpha = \frac{Q-b}{T_1} \Rightarrow T_1 = \frac{Q-b}{D}$$

$$T_2 = \frac{b}{D}$$

$$\Rightarrow \quad T = T_1 + T_2 = \frac{Q}{D}$$

مستقل از زمان   وابسته به زمان

هزینه خرید + هزینه کمبود + هزینه نگهداری + هزینه سفارش‌دهی = هزینه یک دوره

$$= A + h\frac{(Q-b)T_1}{2} + \hat{\pi}\frac{bT_2}{2} + \pi b + CQ$$

$$A + h\bar{I}T_1 + \hat{\pi}\bar{b}T_2 + \pi b + CQ \qquad \bar{I}=\frac{Q-b}{2} \qquad \bar{b}=\frac{b}{2}$$

متوسط مقدار دوره‌ها در سال $= n = \frac{D}{Q} = \frac{1}{T}$

(متوسط کل هزینه سالیانه سیستم موجودی) $K(Q,b) = n$ (هزینه یک دوره) $= \frac{DA}{Q} + \frac{h(Q-b)^2}{2Q} + \frac{\hat{\pi}b^2}{2Q} + \pi\frac{D}{Q}b + CD \xrightarrow{b=0} TRC_{Q_w}$ همان

برای به‌دست آوردن Q^*, b^* باید از تابع هزینه متغیر $K(Q,b)$ نسبت به Q و b مشتق گرفته و برابر صفر قرار دهیم و معادلات مربوطه را حل کنیم.

$$K(Q,b)=\frac{DA}{Q}+\frac{h(Q-b)^2}{2Q}+\frac{\hat{\pi}b^2}{2Q}+\pi\frac{D}{Q}b$$

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{\delta K(Q,b)}{\delta b}=0\\[2ex]\dfrac{\delta K(Q,b)}{\delta Q}=0\end{array}\right\}\overset{\hat{\pi}\neq 0}{\Rightarrow}\begin{cases}Q^*=\sqrt{\dfrac{2DA}{h}-\dfrac{(\pi D)^2}{h(\hat{\pi}+h)}}\cdot\sqrt{\dfrac{\hat{\pi}+h}{\hat{\pi}}}\\[3ex] b^*=\dfrac{\sqrt{2DAh\left(1+\dfrac{h}{\hat{\pi}}\right)-\dfrac{h}{\hat{\pi}}(\pi D)^2}-\pi D}{\hat{\pi}+h}=\dfrac{hQ^*-\pi D}{\hat{\pi}+h}\end{cases}$$

از تابع هزینه به سادگی می‌توان روابط زیر را به دست آورد:

متوسط موجودی در یک‌سال $=\dfrac{(Q-b)^2}{2Q}$ در هر دوره $\dfrac{(Q-b)}{2}T_1$ در طول سال $\rightarrow N\dfrac{(Q-b)}{2}T_1=\dfrac{D}{Q}\dfrac{(Q-b)}{2}\dfrac{(Q-b)}{D}=\dfrac{(Q-b)^2}{2Q}$

متوسط کمبود در سال $=\dfrac{b^2}{2Q}$ در هر دوره $\rightarrow \dfrac{b}{2}T_2$ در طول سال $\rightarrow N\dfrac{b}{2}T_2=\dfrac{D}{Q}\dfrac{b}{2}\dfrac{b}{D}=\dfrac{b^2}{2Q}$

تعداد کمبود در سال $=\dfrac{D}{Q}b$ در هر دوره $\rightarrow b$ در طول سال $\rightarrow Nb=\dfrac{D}{Q}b$

۳-۱-۲- الگوریتم حل مدل

الگوریم حل مسایل کمبود پس افت با توجه به مقایسه دو هزینه $\sqrt{2DAh}$ ، πD و به صورت زیر می‌باشد:

اگر $\pi D\geq\sqrt{2DAh}$ باشد به مدل EOQ بر می‌گردیم یعنی به سیستم موجودی بدون کمبود که در آن

$$Q=Q_\omega \quad , \quad K(Q^*)=K(Q_\omega) \quad , \quad b^*=0$$

اگر $\pi D<\sqrt{2DAh}$ باشد دو حالت زیر وجود دارد:

- اگر $\hat{\pi}=0$ باشد در این حالت سیستم موجودی وجود نخواهد داشت.
- اگر $\hat{\pi}>0$ باشد به روابطی خواهیم رسید که در قسمت قبل به‌دست آوردیم یعنی:

$$Q^*=\sqrt{\frac{2DA}{h}-\frac{(\pi D)^2}{h(\hat{\pi}+h)}}\cdot\sqrt{\frac{\hat{\pi}+h}{\hat{\pi}}}$$

$$b^*=\frac{hQ^*-\pi D}{\hat{\pi}+h}$$

۳-۱-۳- حالت خاص مدل کمبود پس افت

مدل کمبود پس افت حالت خاصی دارد که مسایل موجودی عموماً بر اساس این حالت مورد بررسی و مقایسه قرار می‌گیرند. در این حالت $\pi=0$ ، $\hat{\pi}>0$ است و بنابراین حالت خاصی از قسمت دوم $\pi D<\sqrt{2DAh}$ است. روابط زیر در این حالت برقرار است.

* $$Q^*=\sqrt{\frac{2DA}{h}}\cdot\sqrt{\frac{\hat{\pi}+h}{\hat{\pi}}}=Q_\omega\sqrt{\frac{\hat{\pi}+h}{\hat{\pi}}}$$

* $$b^*=\frac{hQ^*}{\hat{\pi}+h}=\sqrt{\frac{2DAh}{\hat{\pi}(\hat{\pi}+h)}}=\frac{hQ_\omega}{\sqrt{\hat{\pi}(\hat{\pi}+h)}}$$

* $$I^*_{max}=Q^*-b^*=\sqrt{\frac{2DA}{h}}\cdot\sqrt{\frac{\hat{\pi}}{\hat{\pi}+h}}=Q_\omega\sqrt{\frac{\hat{\pi}}{\hat{\pi}+h}}$$

* $$K(Q^*)=\sqrt{2DAh}\sqrt{\frac{\hat{\pi}}{\hat{\pi}+h}}=hI^*_{max}=\hat{\pi}b^*$$

$$I^*_{max}=Q_w\sqrt{\frac{\hat{\pi}+h}{\hat{\pi}}}-\frac{hQ_w}{\sqrt{\hat{\pi}(\hat{\pi}+h)}}=Q_w\left(\sqrt{\frac{\hat{\pi}+h}{\hat{\pi}}}-\frac{h}{\sqrt{\hat{\pi}(\hat{\pi}+h)}}\right)=Q_w\sqrt{\frac{\hat{\pi}}{\hat{\pi}+h}}$$

$$Q^*=I_{max}\left[\frac{\hat{\pi}+h}{\hat{\pi}}\right]$$

روابط r^* و r_h^* مانند مدل EOQ است تنها مقدار b^* از آن کسر می‌شود.

$r^* = DL - b^*$

$r_h^* = DL - mQ^* - b^*$, $m = \left[\frac{L}{T}\right]$

نکته: مقایسه مدل کمبود پس افت (حالت خاص) با مدل EOQ

- مقدار سفارش بهینه در مدل پس‌افت بیشتر از مدل EOQ است.
- حداکثر موجودی در مدل EOQ بیشتر از مدل پس‌افت است.
- هزینه‌های متغیر در مدل EOQ بیشتر از مدل پس‌افت است.

$Q: \quad Q^* > Q_w \rightarrow Q_w\sqrt{\frac{\hat{\pi}+h}{\hat{\pi}}} > Q_w \quad (>1)$

$I_{max} \quad Q_w > Q_w\sqrt{\frac{\hat{\pi}}{\hat{\pi}+h}} \quad (<1)$

مثال: تقاضای سالانه قطعه‌ای 8000 واحد، هزینه سفارش 30 واحد پولی، هزینه نگهداری سالانه هر قطعه برابر 3 واحد پولی می‌باشد. اگر کمبود مجاز باشد و هزینه هر قطعه‌ای که با تاخیر تحویل می‌شود برابر 1 واحد پولی در سال محاسبه شود، معین کنید هزینه متغیر سالانه این قطعه (هزینه نگهداری + هزینه سفارش‌دهی + هزینه کمبود) به کدام مقدار زیر نزدیک‌تر است؟

۱) 600 واحد پولی ۲) 800 واحد پولی ۳) 900 واحد پولی ۴) 700 واحد پولی

حل: گزینه ۱ صحیح می‌باشد.

$D = 8000$, $A = 30$, $h = 3$, $\hat{\pi} = 1$

$$K(Q^*) = \sqrt{2DAh}\cdot\sqrt{\frac{\hat{\pi}}{\hat{\pi}+h}} = \sqrt{2\times 8000\times 30\times 3}\cdot\sqrt{\frac{1}{1+3}} = 600$$

مثال: مدل مقدار سفارش اقتصادی (EOQ) را در نظر بگیرید. حال فرض کنید کمبود کالا مجاز و قابل جبران باشد و هزینه کمبود تنها به صورت متغیر (وابسته به زمان) محاسبه شود. در این صورت به ترتیب مقدار بهینه (سفارش اقتصادی، حداکثر فضای انبار موردنیاز، متوسط هزینه کل سالانه) نسبت به زمانی که کمبود مجاز نباشد: Sh

۱) به‌ترتیب (بیشتر، کمتر، کمتر) است. ۲) به‌ترتیب (کمتر، بیشتر، بیشتر) است.

۳) به‌ترتیب (بیشتر، بیشتر، کمتر) است. ۴) به‌ترتیب (بیشتر، کمتر، بیشتر) است.

حل: گزینه ۱ صحیح می‌باشد.

مثال: مصرف سالیانه مواد اولیه در شرکت تولیدی 2000 تن و هزینه سفارش‌دهی آن برابر 2000 تومان و قیمت هر تن از این مواد 100 تومان و هزینه نگهداری هر تن 0.5 تومان در ماه و هزینه بیمه و آتش‌سوزی و ...برابر 2 درصد متوسط موجودی‌ها در سال می‌باشد، اگر هزینه کمبود هر تن از این مواد 4 تومان باشد مقدار سفارش اقتصادی این کالا برابر است با:

۱) 1000 تن ۲) 2000 تن ۳) $1000\sqrt{3}$ تن ۴) $2000\sqrt{3}$ تن

حل: گزینه ۱ صحیح می‌باشد.

$D = 2000$, $A = 2000$, $C = 100$, $i = 0.02$, $\pi = 4$

$h_1 = 0.5 \frac{\text{تومان}}{\text{تن.ماه}} = 0.5\times 12 \frac{\text{تومان}}{\text{سال.ماه}} = 6 \frac{\text{تومان}}{\text{سال ماه}}$

$h_2 = ic = 0.02\times 100 = 2$

$\Rightarrow h = h_1 + h_2 = 8$

$$\left.\begin{array}{l}\sqrt{2DAh}=\sqrt{2\times2000\times2000\times8}=8000\\ \pi D=8000\end{array}\right\} \Rightarrow \pi D=\sqrt{2DAh} \Rightarrow \text{EOQ مدل}$$

چون $\pi D \geq \sqrt{2DAh}$ مدل EOQ

نکته اصلی مثلا

$$\Rightarrow Q^*=Q_{\infty}=\sqrt{\frac{2DA}{h}}=\sqrt{\frac{2\times2000\times200}{8}}=1000$$

۳ـ۲ـ مدل کمبود در حالت فروش از دست رفته

فرضیات این مدل مانند مدل EOQ است با این تفاوت که کمبود جایز است و جبران نمی‌شود.

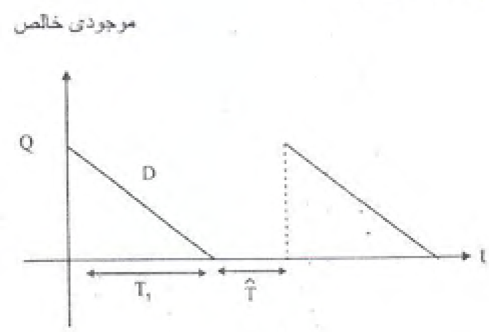
هدف مدل تعیین مقدار اقتصادی سفارش (Q^*) و فاصله زمانی بهینه کمبود در هر دوره $(\hat{T}^*)$ و نقطه سفارش مجدد (r_h^*, r^*) با کمینه کردن هزینه‌هاست.

۳ـ۲ـ۱ـ نحوه محاسبه روابط مقدار سفارش اقتصادی

در این مدل π برابر مقدار ثابتی می‌باشند و سایر پارامترها مانند مدل EOQ است.

$\hat{T}$: مدت زمانی از یک دوره که دارای کمبود هستیم.

T_1 : مدت زمانی از یک دوره که دارای کمبود نیستیم.



$$\left.\begin{array}{l}T=T_1+\hat{T}\\ T_1=\dfrac{Q}{D}\end{array}\right\} \rightarrow T=\frac{Q}{D}+\hat{T}=\frac{Q+D\hat{T}}{D}$$

متوسط مقدار دوره‌ها در سال $=\dfrac{1}{T}=\dfrac{D}{Q+D\hat{T}}$

(کل هزینه متغیر سالیانه) $K(Q,\hat{T})=\dfrac{DA}{Q+D\hat{T}}+\dfrac{hQ^2}{2(Q+D\hat{T})}+\dfrac{\pi D^2\hat{T}}{Q+D\hat{T}}+CQ\dfrac{D}{Q+D\hat{T}}$

همان‌طور که مشاهده می‌شود، در این مدل هزینه خرید هم جزو هزینه‌های متغیر است، زیرا به برخی از تقاضاها اصلاً جواب نخواهیم داد.

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{\delta K(Q,\hat{T})}{\delta Q}=0\\ \dfrac{\delta K(Q,\hat{T})}{\delta \hat{T}}=0\end{array}\right\} \Rightarrow Q=\frac{\pi D}{h}\pm\sqrt{\left(\frac{\pi D}{h}\right)^2-\frac{2DA}{h}}$$

۳-۲-۲- الگوریتم حل مدل

الگوریتم حل مسایل در حالت فروش از دسته رفته مانند الگوریتم حل مسایل کمبود پس افت با مقایسه $\sqrt{2DAh}$ و πD با هم شکل می‌گیرد و به صورت زیر است:

اگر $\pi D \geq \sqrt{2DAh}$ باشد به مدل EOQ بر می‌گردیم یعنی به سیستم موجودی بدون کمبود و بنابراین داریم:

$$Q^* = Q_{\omega} \quad , \quad K(Q^*) = K(Q_{\omega}) \quad , \quad \hat{T}^* = 0$$

اگر $\pi D < \sqrt{2DAh}$ باشد سیستم موجودی وجود نخواهد داشت یعنی:

$$\hat{T}^* = \infty$$

حالت فروش از دست رفته

مثال: مدل مقدار سفارش اقتصادی (EOQ) را در نظر بگیرید. فرض کنید کمبود کالا مجاز ولی قابل جبران نباشد، در این صورت به ترتیب مقدار بهینه (سفارش اقتصادی، حداکثر فضای انبار، متوسط هزینه کل سالانه) نسبت به زمانی که کمبود مجاز نباشد:

۱) به ترتیب (بیشتر، کمتر، کمتر) است.

۲) به‌ترتیب (کمتر، بیشتر، بیشتر) است.

۳) به‌ترتیب (بیشتر، کمتر، بیشتر) است.

۴) در صورت داشتن سیستم موجودی، برابر زمانی خواهد بود که کمبود مجاز نباشد.

حل: گزینه ۴ صحیح می‌باشد.

مثال: کمبود کالایی مجاز و قابل جبران است. با افزایش هزینه‌های کمبود، مقدار سفارش اقتصادی این کالا:

۱) ثابت باقی می‌ماند.   ۲) افزایش می‌یابد.

۳) کاهش می‌یابد.   ۴) قابل پیش‌بینی نیست.

حل: گزینه ۳ صحیح می‌باشد.

$$Q^* = \sqrt{\frac{2DA}{h}} \cdot \sqrt{\frac{\hat{\pi}+h}{\hat{\pi}}} = \sqrt{\frac{2DA}{h}} \cdot \sqrt{1+\frac{h}{\hat{\pi}}}$$

در صورتی که هزینه کمبود کاسته شود مقدار $\sqrt{1+\frac{h}{\hat{\pi}}}$ کاهش یافته و بنابراین Q^* کاهش خواهد یافت.

مثال: یک قطعه خریداری شده دارای نرخ تقاضای سالیانه 4000 واحد است. هزینه ثابت سفارش 60 تومان بوده و هزینه هر واحد 4 تومان است. نرخ هزینه نگهداری موجودی سالیانه 0.15 است. کمبود موجودی مجاز بوده و به‌صورت سفارشات تاخیر شده در می‌آیند. هزینه سالیانه هر واحدی که به تاخیر می‌افتد 1 تومان است. اندازه انباشته اقتصادی چند واحد است؟

۱) 1081   ۲) 1131   ۳) 1252   ۴) 1304

حل: گزینه ۲ صحیح می‌باشد.

$$D = 4000 \quad , \quad A = 60 \quad , \quad C = 4 \quad , \quad i = 0.15 \quad , \quad \hat{\pi} = 1$$

$$h = i.c = 0.15 \times 4 = 0.6$$

$$Q^* = \sqrt{\frac{2DA}{h}} \cdot \sqrt{\frac{\hat{\pi}+h}{\hat{\pi}}} = \sqrt{\frac{2 \times 4000 \times 60}{0.6} \times \frac{1.6}{1}} = 1131$$

مثال: اگر تقاضای سالیانه محصولی R، هزینه نگهداری سالیانه هر واحد H هزینه هر بار سفارش‌دهی C باشد و ضمناً کمبود مجاز و هزینه سالیانه هر واحد کمبود برابر K باشد، اگر بخواهیم مقدار سفارش اقتصادی 2 برابر حداکثر موجودی باشد، چه رابطه‌ای باید بین هزینه نگهداری سالیانه (H) و هزینه کمبود سالیانه (K) برقرار باشد؟

۱) $H=\frac{1}{2}K$ ۲) $H=K$ ۳) $H=\frac{3}{2}K$ ۴) $H=2K$

حل: گزینه ۲ صحیح می‌باشد.

$$\left.\begin{array}{l} Q=Q_{\omega}\times\sqrt{\dfrac{\hat{\pi}+h}{\hat{\pi}}} \\ I_{max}=Q_{\omega}\times\sqrt{\dfrac{\hat{\pi}}{\hat{\pi}+h}} \end{array}\right\} \Rightarrow Q=\left(\frac{\hat{\pi}+h}{\hat{\pi}}\right).I_{max}$$

می‌خواهیم $Q=2I_{max}$ باشد بنابراین

$$\frac{\hat{\pi}+h}{\hat{\pi}}=2 \Rightarrow \hat{\pi}+h=2\hat{\pi} \Rightarrow h=\hat{\pi}$$

یا با توجه به صورت سوال $H=K$

مثال: در یک سیستم موجودی با نرخ ثابت، و در حالتی‌که کمبود موجودی مجاز نمی‌باشد، میزان سفارش اقتصادی کالایی برابر 2814.2 تن و نقطه سفارش مجدد (بر مبنای موجودی در دست و سفارش در راه) برابر 6346.15 تن محاسبه شده است. چنانچه کمبود مجاز باشد و هزینه مربوط بر مبنای هزینه کمبود واحد کالا در سال در محاسبات منظور شود، میزان سفارش اقتصادی 3476.8 تن محاسبه می‌شود. برای این حالت نقطه سفارش مجدد (بر مبنای موجودی در دست و سفارش در راه) را محاسبه و مشخص کنید کدام پاسخ به جواب نزدیک‌تر است؟

۱) 5150 ۲) 5650 ۳) 6150 ۴) 6346

حل: گزینه ۱ صحیح می‌باشد.

برای حالت EOQ:

$$Q^*_{\omega}=2814.2 \quad , \quad r^*=6346.15$$

برای حالت کمبود:

$$Q^*_{\text{کمبود}}=3476.8 \quad , \quad r^*=?$$

برای به‌دست آوردن مقدار b^* دو راه وجود دارد:

راه اول:

$$Q^*_{\text{کمبود}}=Q^*_{EOQ}\sqrt{\frac{\hat{\pi}+h}{\hat{\pi}}} \Rightarrow \sqrt{\frac{\hat{\pi}+h}{\hat{\pi}}}=\frac{3476.8}{2814.2} \Rightarrow 1+\frac{h}{\hat{\pi}}=1.526$$

$$\Rightarrow \frac{h}{\hat{\pi}}=0.526$$

$$b^*=\frac{hQ_{\omega}}{\sqrt{\hat{\pi}(\hat{\pi}+h)}}=\frac{h}{\hat{\pi}}\frac{Q_{\omega}}{\sqrt{\frac{\hat{\pi}+h}{\hat{\pi}}}}=0.526\times\frac{2814.2}{1.235}=1198$$

راه دوم:

$$Q^*_{\text{کمبود}}=Q^*_{EOQ}\sqrt{\frac{\hat{\pi}+h}{\hat{\pi}}} \Rightarrow \sqrt{\frac{\hat{\pi}+h}{\hat{\pi}}}=\frac{3476.8}{2814.2}=1.235$$

$$I_{max\ \text{کمبود}} = Q_{\omega}\sqrt{\frac{\hat{\pi}}{\hat{\pi}+h}} = \frac{2814.2}{1.235} = 2278.7$$

$$b^* = Q^*_{\text{کمبود}} - I^*_{max\ \text{کمبود}} = 3476.8 - 2278.7 = 1198.1$$

مقدار $r^*_{\text{کمبود}}$ به‌صورت زیر به‌دست می‌آید.

$$r^*_{\text{کمبود}} = r^*_{EOQ} - b^* = 6346.15 - 1198 = 5148.15$$

که به گزینه ۱ یعنی 5150 نزدیک‌تر است.

r^* را که داریم می‌توانیم $b^* = Q^*_{\text{کمبود}} - I_{max\ \text{کمبود}}$
را بدست آورده و r^* را از b^* کم می‌کنیم

۴ـ مدل تولیدی ساده یا مدل مقدار تولید اقتصادی یا مدل EPQ

فرضیات مدل مانند مدل EOQ است با این تفاوت که سفارش یک‌جا دریافت نمی‌شود بلکه با نرخ ثابت P و به تدریج دریافت می‌شود.

هدف مدل تعیین مقدار هر بار تولید اقتصادی (Q^*) و نقطه سفارش مجدد (r^*, r_h^*) با کمینه کردن هزینه‌ها است.

۴ـ۱ـ نحوه محاسبه روابط مدل

موجودی در مدل EOQ یک دفعه وارد می‌شود ولی در مدل EPQ به تدریج وارد می‌شود.

پارامترهای مدل EOQ است با تغییرات زیر:

A : هزینه هر بار آماده‌سازی

C : هزینه متغیر با قیمت تمام شده هر واحد

P : نرخ دریافت سفارش یا نرخ تولید

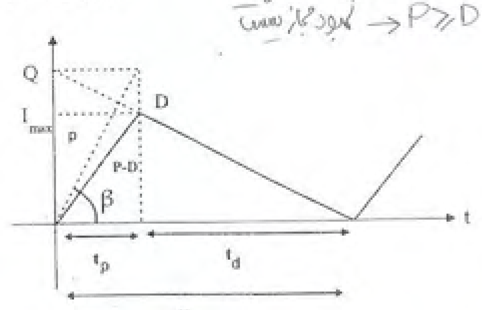
بخشی از هر سیکل که سیستم در حال تولید است

$T = T_p + T_d$

بخشی از هر سیکل که سیستم در حال تولید نیست

موجودی خالص

کمبود مجاز نیست $\rightarrow P \geq D$



نکته: همواره $P \geq D$ است زیرا همان‌طور که از شکل مشخص است اگر $P < D$ باشد به کمبود بر می‌خوریم.

$$\operatorname{tg}\beta = P = \frac{Q}{t_p} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} t_p = \dfrac{Q}{P} \\ T = \dfrac{Q}{D} \end{array}\right\} \Rightarrow t_d = T - t_p = \frac{Q}{P} - \frac{Q}{D} = \frac{Q}{D}\left(1 - \frac{D}{P}\right) = T\left(1 - \frac{D}{P}\right)$$

$$I_{max} = (P - D)t_p = Dt_d = Q\left(1 - \frac{D}{P}\right)$$

$$\bar{I} = \frac{I_{max}}{2} = \frac{Q}{2}\left(1 - \frac{D}{P}\right)$$

$$\text{متوسط تعداد دوره‌ها در سال} = \frac{D}{Q} = \frac{1}{T}$$

$$\text{کل هزینه سالیانه} = \underbrace{\frac{DA}{Q} + h\frac{Q}{2}\left(1 - \frac{D}{P}\right)}_{K(Q)} + CD$$

$$\frac{dK(Q)}{dQ} = 0 \Rightarrow Q^* = \sqrt{\frac{2DA}{h\left(1 - \frac{D}{P}\right)}} = \frac{Q_\omega}{\sqrt{1 - \frac{D}{P}}}$$

$$I_{max} = Q^*\left(1-\frac{D}{P}\right) = Q_\omega\sqrt{1-\frac{D}{P}}$$

$$\bar{I} = \frac{Q^*}{2}\left(1-\frac{D}{P}\right) = \frac{Q_\omega}{2}\sqrt{1-\frac{D}{P}}$$

$$K(Q^*) = \sqrt{2DAh\left(1-\frac{D}{P}\right)}$$

$$\text{کل هزینه بهینه سالیانه} = K(Q^*) + CD = \sqrt{2DAh\left(1-\frac{D}{P}\right)} + CD$$

نقطه سفارش مجدد بر حسب موجودی در دست در مدل EPQ با توجه به این‌که لحظه صدور سفارش در قسمت صعودی نمودار یا نزولی آن بیافتد دو حالت مختلف دارد و این دو حالت از مقایسه بین $L' = L - mT$ و t_d (مدت زمانی که فقط در حال مصرف هستیم) به‌دست می‌آید.

$r^* = D.L$

$$\begin{cases} r_h^* = DL' = D(L-mT) = DL - mQ^* & \text{اگر } L' = L - mT < t_d \\ r_h^* = (P-D)(T-L') = DL - PL + (m+1)\left(\frac{P}{D}-1\right)Q^* & \text{اگر } L' = L - mT \geq t_d \end{cases}$$

۴-۲- نکات مدل EPQ

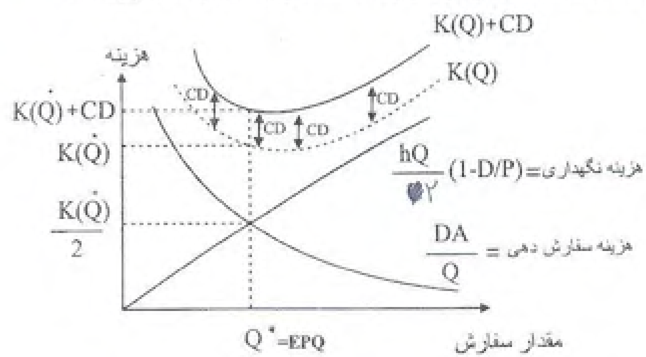
نکته ۱: مقایسه مدل EPQ و مدل EOQ

- مقدار سفارش بهینه در مدل EPQ بیشتر از مدل EOQ است.
- حداکثر موجودی در مدل EOQ بیشتر از مدل EPQ است.
- هزینه بهینه سالیانه در مدل EOQ بیشتر از مدل EPQ است.

نکته ۲: نمودار موقعیت موجودی مدل EPQ کاملاً مشابه مدل EOQ و به همان شکل است.

$D.L \leq y(t) \leq DL + Q^*$

نکته ۳: نمودار هزینه‌ها بر حسب مقدار سفارش در مدل EPQ مانند مدل EOQ و به شکل زیر است:



نکته ۴: محل تلاقی منحنی هزینه نگهداری و هزینه سفارش‌دهی سالیانه نقطه بهینه است.

$$K(Q^*)=\frac{2DA}{Q^*}=hQ^*\left(1-\frac{D}{P}\right)=2nA=\frac{2A}{T^*}\sqrt{DAh\left(1-\frac{D}{P}\right)}=hI^*_{max}$$

نکته ۵:

اگر $Q>EPQ$ باشد آن‌گاه هزینه نگهداری > هزینه سفارش‌دهی

اگر $Q=EPQ$ باشد آن‌گاه هزینه نگهداری = هزینه سفارش‌دهی

اگر $Q<EPQ$ باشد آن‌گاه هزینه نگهداری < هزینه سفارش‌دهی

نکته ۶: شیب منحنی هزینه‌ها در نقطه بهینه برای هزینه نگهداری و هزینه سفارش‌دهی به ترتیب برابر $\frac{h}{2}\left(1-\frac{D}{P}\right)$ و $-\frac{h}{2}\left(1-\frac{D}{P}\right)$ است.

نکته ۷: در صورتی که به جای مقدار Q^* مقدار نابهینه Q سفارش دهیم، درصد افزایش هزینه متغیر میانه از رابطه زیر به‌دست می‌آید.

$$\frac{K(Q)}{K(Q^*)}=\frac{1}{2}\left(\frac{Q}{Q^*}+\frac{Q^*}{Q}\right)$$

نکته ۸: مانند مدل EOQ شیب منحنی هزینه‌ها در سمت راست نقطه بهینه نسبت به سمت چپ آن ملایم‌تر است یعنی:

$$K(Q^*-a)>K(Q^*+a)$$

نکته ۹: در صورتی که یکی از پارامترهای مدل تغییر کند، برای مقایسه و یافتن مقدار سفارش بهینه و هزینه بهینه متغیر سالیانه باید از روابط زیر استفاده کرد:

$$\frac{Q_1^*}{Q_0^*}=\frac{\sqrt{\dfrac{2D_1A_1}{h_1\left(1-\dfrac{D_1}{P_1}\right)}}}{\sqrt{\dfrac{2D_0A_0}{h_0\left(1-\dfrac{D_0}{P_0}\right)}}}=\sqrt{\frac{A_1}{A_0}}\cdot\sqrt{\frac{h_0}{h_1}}\cdot\sqrt{\frac{D_1\cdot\left(1-\dfrac{D_0}{P_0}\right)}{D_0\cdot\left(1-\dfrac{D_1}{P_1}\right)}}$$

$$\frac{K(Q_1^*)}{K(Q_0^*)}=\sqrt{\frac{2D_1A_1h_1\left(1-\dfrac{D_1}{P_1}\right)}{2D_0A_0h_0\left(1-\dfrac{D_0}{P_0}\right)}}=\sqrt{\frac{h_1}{h_0}}\cdot\sqrt{\frac{A_1}{A_0}}\cdot\sqrt{\frac{D_1\left(1-\dfrac{D_1}{P_1}\right)}{D_0\left(1-\dfrac{D_0}{P_0}\right)}}$$

نکته ۱۰: با افزایش پارامترهای مدل مقدار سفارش بهینه و هزینه بهینه سالیانه به صورت زیر تغییر می‌کند.

	Q^*	$K(Q^*)$
افزایش A	افزایش	افزایش
افزایش D	افزایش	تغییرات مشخص نیست
افزایش h	کاهش	افزایش
افزایش i	تغییری نمی‌کند	افزایش
افزایش c	تغییری نمی‌کند	افزایش
افزایش w	تغییری نمی‌کند	افزایش
افزایش p	تغییری نمی‌کند	افزایش
افزایش L	تغییری نمی‌کند	تغییری نمی‌کند

نکته ۱۰ اشتباه دارد

نکته: مقایسه بین مدل EOQ، EPQ و مدل EOQ در حالت کمبود پس افت (حالت خاص)

	مدل EOQ در حالت کمبود پس افت		مدل EOQ		مدل EPQ
مقدار سفارش بهینه (Q^*)	$Q_\omega\sqrt{\frac{\hat{\pi}+h}{\hat{\pi}}}$	$<$	Q_ω	$>$	$\frac{Q_\omega}{\sqrt{1-\frac{D}{P}}}$
حداکثر موجودی بهینه (I_{max})	$Q_\omega\sqrt{\frac{\hat{\pi}}{\hat{\pi}+h}}$	$>$	Q_ω	$<$	$Q_\omega\sqrt{1-\frac{D}{P}}$
متوسط موجودی بهینه $(\bar{I})$	$\frac{(Q^*-b^*)}{2Q^*}$	$>$	$\frac{Q_\omega}{2}$	$<$	$\frac{Q_\omega\sqrt{1-\frac{D}{P}}}{2}$
هزینه نگهداری	$h\bar{I}$	$>$	$h\bar{I}$	$<$	$h\bar{I}$
کل هزینه متغیر سالیانه $K(Q^*)$	$\sqrt{2DAh}\sqrt{\frac{\hat{\pi}}{\hat{\pi}+h}}$	$>$	$\sqrt{2DAh}$	$<$	$\sqrt{2DAh\left(1-\frac{D}{P}\right)}$

مثال: مدیر یک سیستم موجودی اغلب با این تصمیم روبرو است که آیا قطعه مورد لزوم را بخرد یا در کارخانه تولید نماید. فرض کنید که اگر قطعه از خارج خریداری شود، هر واحد 25 تومان تمام می‌شود در حالی‌که اگر در کارخانه تولید شود، هر واحد 22 تومان خواهد بود، بهرحال اگر قطعه خریداری شود، هزینه هر بار سفارش 5 تومان است، در حالی‌که اگر قطعه در کارخانه تولید شود، هزینه هر بار راه‌اندازی ماشین‌آلات 50 تومان است. ماشین‌آلات تنها می‌توانند در سال 10000 قطعه تولید نمایند، تقاضای سالیانه این قطعه 2500 واحد بوده و نرخ نگهداری قطعه به‌طور موجودی 10% است.

با توجه اطلاعات فوق به سوالات زیر جواب دهید:

الف) متوسط هزینه سالیانه بهینه برای سیاست خرید عبارت است از:

۱) 62500 تومان ۲) 62750 تومان ۳) 60000 تومان ۴) 63550 تومان

حل: گزینه ۲ صحیح می‌باشد.

مدل خرید: $C=25$, $A=5$, $D=2500$, $i=0.1$

$h=i.c=0.1\times 25=2.5$

کل هزینه بهینه سالیانه $=\sqrt{2DAh}+CD=\sqrt{2\times 2500\times 5\times 2.5}+25\times 2500=62750$

ب) متوسط هزینه سالیانه بهینه برای سیاست تولید عبارت است از (اعداد روند شده است).

۱) 55000 تومان ۲) 55742 تومان ۳) 55642 تومان ۴) 65324 تومان

حل: گزینه ۳ صحیح می‌باشد.

مدل تولید: $C = 22 \quad , \quad P = 10000 \quad , \quad D = 2500 \quad , \quad A = 50 \quad , \quad i = 0.1$

$h = i.c = 0.1 \times 22 = 2.2$

$$\text{کل هزینه بهینه سالیانه} = \sqrt{2DAh\left(1-\frac{D}{P}\right)} + CD = \sqrt{2\times2500\times50\times2.2\left(1-\frac{2500}{10000}\right)} + 22\times2500 = 55642$$

ج) اندازه انباشته بهینه برای سیاست خرید عبارت است از:

۱) 100 واحد ۲) 250 واحد ۳) 200 واحد ۴) 300 واحد

حل: گزینه ۱ صحیح می‌باشد.

$$Q^* = \sqrt{\frac{2DA}{h}} = \sqrt{\frac{2\times2500\times5}{2.5}} = 100$$

د) اندازه انباشته بهینه برای سیاست تولید عبارت است از (اعداد روند شده است):

۱) 377 واحد ۲) 389 واحد ۳) 674 واحد ۴) 730 واحد

حل: گزینه ۲ صحیح می‌باشد.

$$Q^* = \sqrt{\frac{2DA}{h\left(1-\frac{D}{P}\right)}} = \sqrt{\frac{2\times2500\times5}{2.5\left(1-\frac{2500}{10000}\right)}} \simeq 389$$

مثال: در یک سیستم سفارشات، دریافت به صورت آنی (لحظه‌ای) بوده و در این شرایط مقدار اقتصادی سفارش (EOQ) برابر 800 است. اخیراً دریافت حالت تدریجی دارد. در شرایط جدید سایر پارامتر مانند قبل است، مقدار اقتصادی سفارش به 1600 رسیده است. در شرایط جدید سرعت مصرف به سرعت دریافت کالا برابر است با:

۱) 0.25 ۲) صفر ۳) 0.75 ۴) ∞

حل: گزینه ۳ صحیح می‌باشد.

$Q_{EOQ} = 800$

$Q_{EPQ} = 1600$

$$Q_{EPQ} = \frac{Q_{EOQ}}{\sqrt{1-\frac{D}{P}}} \Rightarrow \sqrt{1-\frac{D}{P}} = \frac{1}{2} \Rightarrow 1-\frac{D}{P} = \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{D}{P} = \frac{3}{4}$$

$\frac{\text{سرعت مصرف}}{\text{سرعت تولید}} = \frac{D}{P}$

مثال: یک کارخانه که دارای سیستم تولیدی دسته‌ای (Batch Produation) می‌باشد، در هر بار که به تولید محصول X می‌پردازد این محصول را در حجمی بیشتر از مقدار اقتصادی (EPQ) تولید می‌کند.

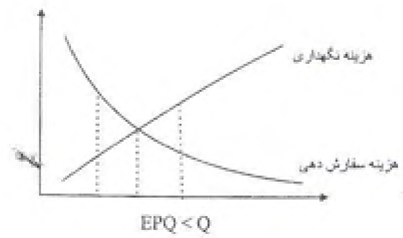
جمع هزینه‌های نگهداری (انبارداری) کالای x را در سال THC می‌نامیم. جمع هزینه‌های آمادگی سیستم برای تولید محصول x در سال را TOC می‌نامیم. در این شرایط کدام‌یک از گزاره‌های زیر می‌تواند صحیح باشد.

۱) $TOC = 700 \quad , \quad THC = 1000$ ۲) $\frac{1}{2}TOC \le THC \le 2TOC$

۳) $TOC = 1000 \quad , \quad THC = 1000$ ۴) $TOC = 1000 \quad , \quad THC = 700$

حل: گزینه ۱ صحیح می‌باشد.

با توجه به منحنی هزینه‌ها بر حسب مقدار سفارش مشخص است که هنگامی که $EPQ<Q$ باشد. هزینه نگهداری THC از هزینه سفارش‌دهی TOC به صورت اکید بیشتر خواهد بود بنابراین تنها گزینه (۱) می‌تواند صحیح باشد.



مثال: موقعیت موجودی بر حسب مجموع موجودی در دست و در راه در یک مدل کنترل موجودی قطعی در مقایسه با مدل با دریافت تدریجی به چه صورتی است؟ ($y(t)$: موقعیت موجودی در لحظه E)

۱) $DL \le y(t) \le DL + Q\left(1-\frac{D}{P}\right)$

۲) $DL + Q\left(1-\frac{D}{P}\right) \le y(t) \le DL + Q\left(1-\frac{D}{P}\right)$

۳) $DL + Q\left(1-\frac{D}{P}\right) \le y(t) \le DL + Q$

۴) مانند موقعیت موجودی در مدل ساده قطعی است.

حل: گزینه ۴ صحیح می‌باشد.

همان‌طور که در نکات مدل EPQ ذکر شد نمودار موقعیت موجودی مدل EPQ مشابه نمودار موقعیت موجودی مدل EOQ است و محدوده تغییرات آن به صورت زیر است:

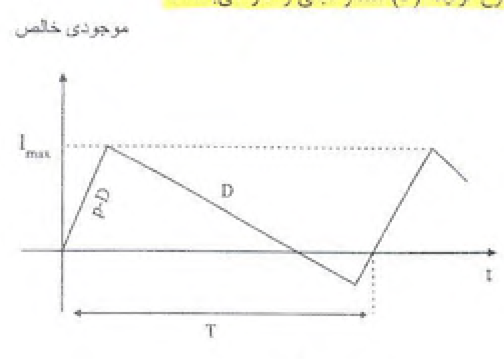
$$DL \le y(t) \le DL + Q$$

۴-۳- مدل EPQ در حالت کمبود پس افت

فرضیات مدل مانند مدل EPQ است با این تفاوت که کمبود به صورت سفارشات عقب افتاده مجاز می‌باشد.

هدف مدل تعیین مقدار سفارش اقتصادی بهینه (Q^*) و مقدار کمبود بهینه (b^*) و همین‌طور r_h^*, r^* با کمینه کردن هزینه‌ها است.

پارامترهای هزینه کمبود $(\pi, \hat{\pi})$ و نرخ تولید (P) مقدار ثابتی را دارا می‌باشند.



الگوریتم حل مدل:

اگر $\pi D \ge \sqrt{2DAh\left(1-\frac{D}{P}\right)}$ باشد به مدل EPQ بر می‌گردیم:

$$Q^* = EPQ \quad , \quad K(Q^*) = \sqrt{2DAh\left(1-\frac{D}{P}\right)} \quad , \quad b^* = 0$$

اگر $\pi D < \sqrt{2DAh\left(1-\frac{D}{P}\right)}$ باشد، دو حالت می‌تواند رخ دهد.

- اگر $\hat{\pi}=0$ باشد سیستم موجودی وجود ندارد.
- اگر $\hat{\pi} > 0$ باشد، مقدار بهینه از مدل EPQ کمبود به‌دست می‌آید.

مانند مدل EOQ با کمبود پس‌افت، مدل EPQ با کمبود پس افت نیز حالت خاصی دارد که از این حالت برای مقایسه حل مسایل این مدل استفاده می‌گردد. در این حالت $\pi=0$, $\hat{\pi}>0$ است. روابط بهینه این حالت به صورت زیر است:

$$Q^* = \sqrt{\frac{2DA}{h\left(1-\frac{D}{P}\right)}} \cdot \sqrt{\frac{\hat{\pi}+h}{\hat{\pi}}}$$

حداکثر موجودی بهینه $I^*_{max} = \sqrt{\frac{2DA}{h}} \cdot \sqrt{1-\frac{D}{P}} \cdot \sqrt{\frac{\hat{\pi}}{\hat{\pi}+h}}$

کل هزینه متغیر سالیانه $K(Q^*) = \sqrt{2DAh}\sqrt{1-\frac{D}{P}}\sqrt{\frac{\hat{\pi}}{\hat{\pi}+h}}$

برای نقطه سفارش مجدد بر حسب موجودی درست در این مدل مانند مدل EPQ دو حالت وجود دارد. در ادامه روابط نقطه سفارش مجدد ذکر می‌گردد.

$$r^* = D.L - b^*$$

$$\begin{cases} r_h^* = D.L' - b^* = DL - mQ^* - b^* & \text{اگر } L' = L - mT \le t_d \\ r_h^* = (P-D)(T-L') - b^* & \\ \quad = DL - PL + (m+1)\left(\frac{P}{D}-1\right)Q^* - b^* & \text{اگر } L' = L - mT > t_d \end{cases}$$

مثال: تقاضای کالایی 24000 واحد در سال است و می‌توان این کالا را با نرخ 48000 واحد در سال تولید کرد. کسری به صورت تقاضای عقب افتاده مجاز است و مقدار بهینه هر بار سفارش‌دهی و کسری در هر دوره سفارش به ترتیب 1200 و 420 واحد محاسبه شده است اگر مدت زمان تحویل یک ماه باشد، نقطه سفارش مجدد چقدر است؟

۱) 20- واحد کالا ۲) 380 واحد کالا ۳) 410 واحد کالا ۴) 790 واحد کالا

حل: گزینه ۱ صحیح می‌باشد.

$$D = 24000 \quad , \quad P = 48000 \quad , \quad Q^* = 1200 \quad , \quad b^* = 420 \quad , \quad L = \frac{1}{12}$$

$$T = \frac{Q^*}{D} = \frac{1200}{24000} = \frac{1}{20}$$

$u = L - mT = T_d$
$\downarrow$
$ROP = I_{max}$

$$m=\left[\frac{L}{T}\right]=\left[\frac{\frac{1}{12}}{\frac{1}{20}}\right]=1$$

$$\left.\begin{array}{l} L'=L-mT=\frac{1}{12}-1\times\frac{1}{20}=\frac{1}{30} \\ t_d=T\left(1-\frac{D}{P}\right)=\frac{1}{20}\left(1-\frac{24000}{48000}\right)=\frac{1}{40} \end{array}\right\} \Rightarrow L'>t_d$$

$$r_h^*=(P-D)(T-L')-b^*=(48000-24000)\left(\frac{1}{20}-\frac{1}{30}\right)-420=4000-420=-20$$

مثال: شرکتی می‌خواهد به جای یکی از قطعات موردنیاز خود اقدام به تولید آن کند. هزینه آماده‌سازی تولید درست برابر هزینه سفارش‌دهی در حال خرید است. نرخ (سرعت) تولید 2 برابر نرخ (سرعت) تقاضا است، کدام‌یک از عبارات زیر درست است؟

۱) مقدار اقتصادی هر بار تولید برابر تولید مقدار اقتصادی هر بار خرید است.

۲) مقدار اقتصادی هر بار تولید تقریباً 20% بزرگتر از مقدار اقتصادی هر بار خرید است.

۳) مقدار اقتصادی هر بار تولید تقریباً 20% کوچکتر از مقدار اقتصادی هر بار خرید است.

۴) مقدار اقتصادی هر بار تولید تقریباً 40% بزرگتر از مقدار اقتصادی هر بار خرید است.

حل: گزینه ۴ صحیح می‌باشد.

$A_{\text{تولید}}=A_{\text{خرید}}$

$P=2D \Rightarrow 1-\frac{D}{P}=\frac{1}{2}$

$$Q_{\text{تولید}}=\frac{Q_{\text{خرید}}}{\sqrt{1-\frac{D}{P}}}=\sqrt{2}\;Q_{\text{خرید}}=1.4Q_{\omega}$$

بنابراین مقدار اقتصادی هر بار تولید 40% بزرگتر از مقدار اقتصادی هر بار خرید است.

مثال: در سوال فوق حداکثر موجودی در حالت تولید نسبت به حداکثر موجودی در حالت خرید:

۱) تقریباً 70% بیشتر است.	۲) تقریباً 70% کمتر است.

۳) تقریباً 30% بیشتر است.	۴) تقریباً 30% کمتر است.

حل: گزینه ۴ صحیح می‌باشد.

$$\frac{I_{max\,\text{تولید}}}{I_{max\,\text{خرید}}}=\frac{Q_{\omega}\sqrt{1-\frac{Q}{P}}}{Q_{\omega}}=\sqrt{1-\frac{D}{P}}=\frac{\sqrt{2}}{2}=0.7$$

حداکثر موجودی در حالت تولید 30% کمتر از حالت خرید است.

۵ـ مدل‌های چند محصولی و محدودیت‌دار

۵ـ۱ـ مدل چندمحصولی ساده

فرضیات این مدل مانند مدل EOQ است با این تفاوت که برنامه‌ریزی برای چند محصول انجام می‌پذیرد.

هدف مدل تعیین مقدار سفارش بهینه برای هر محصول $\left(Q_j^*\right)$ و نقطه سفارش بهینه $\left(r_{h_j}^*, r_j^*\right)$ با کمینه کردن هزینه‌هاست. این هدف به صورت زیر قابل بیان است.

$$\min = \sum_j \left(\frac{D_j A_j}{Q_j} + \frac{h_j Q_j}{2} + C_j D_j\right)$$

برای یافتن می‌نیمم Z از تابع فوق بر حسب Q_j مشتق گرفته و Q_j^* را می‌یابیم.

$$\frac{\delta z}{\delta Q_j} = 0 \Rightarrow Q_j^* = Q_{\omega j} = \sqrt{\frac{2 D_j A_j}{h_j}}$$

با توجه به Q_j^*های به‌دست آمده کل هزینه متغیر سالیانه برابر جمع هزینه‌های متغیر سالیانه هر کدام از محصولات است.

$$\text{کل هزینه متغیر سالیانه} = \sum_j \sqrt{2 D_j A_j h_j}$$

همان‌طور که مشاهده می‌شود، در این مدل چون هیچ‌گونه محدودیتی وجود ندارد و مانند این است که چند محصول را جداگانه برنامه‌ریزی کنیم.

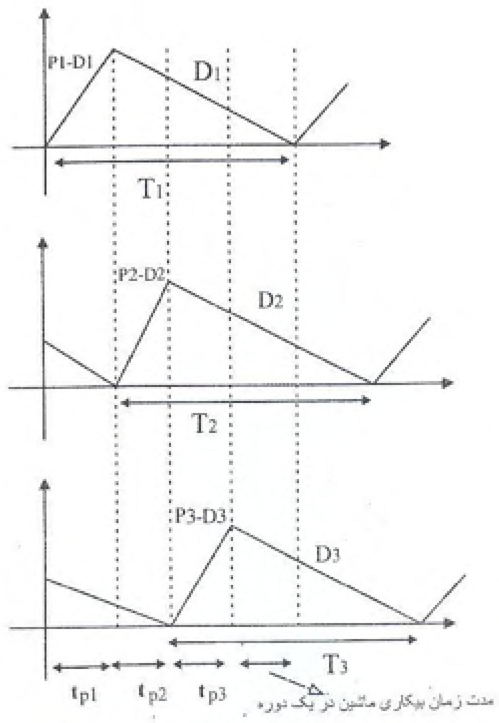
۵ـ۲ـ مدل چندمحصولی تولیدی

فرضیات این مدل مانند مدل چند محصولی ساده است با این تفاوت که:

۱ـ سفارش به تدریج به انبار تحویل می‌شود. $P = ctc$

۲ـ کلیه محصولات توسط یک ماشین یا یک خط تولید، تولید می‌شوند.

هدف مدل تعیین مقدار تولید بهینه برای هر محصول $\left(Q_j^*\right)$ و نقطه سفارش بهینه $\left(r_{h_j}^*, r_j^*\right)$ با کمینه کردن هزینه‌هاست.



برای سادگی این مدل طوری برنامه‌ریزی می‌شود که مدت زمان دوره هر محصول برابر با یکدیگر باشد. یعنی فرض می‌کنیم،
$\forall_j : T_j = T$

T_j: سیکل تولیدی محصول jام (زمان تولید زمان مصرف)

$$T_j = \frac{Q_j}{D_j}$$

کل هزینه متغیر سالیانه $K(T) = \sum_j \left(\frac{D_j A_j}{Q_j} + \frac{h_j Q_j}{2}\right)\left(1 - \frac{D_j}{P_j}\right)$

$$\Rightarrow \quad K(T) = \frac{\Sigma A_j}{T} + \frac{T}{2}\sum h_j D_j \left(1 - \frac{D_j}{P_j}\right)$$

در این مدل ابتدا باید T^* را محاسبه کرده و سپس از طریق آن Q_j^* را محاسبه می‌کنیم.

$$\frac{dK(T)}{dT} = 0 \quad \Rightarrow \quad T^* = \sqrt{\frac{2\sum A_j}{\sum h_j D_j \left(1 - \frac{D_j}{P_j}\right)}}$$

Q_j^* توسط رابطه زیر محاسبه می‌گردد.

$$Q_j^* = T^* D_j$$

هزینه متغیر سالیانه بهینه را نیز می‌توان از روابط زیر به‌دست آورد:

$$K(T^*)=\sqrt{2\sum A_j \sum h_j D_j\left(1-\frac{D_j}{P_j}\right)}=\frac{2\sum A_j}{T^*}=T^*\sum h_j D_j\left(1-\frac{D_j}{P_j}\right)$$

۵-۲-۱- شرط لازم برای جواب‌دار بودن

$\frac{D_j}{P_j}$: درصد زمانی از سال که ماشین مشغول تولید محصول jام است.

$\frac{t_{p_j}}{T_j}$: درصد زمانی از یک دوره که ماشین مشغول تولید محصول jام است.

کسرهای فوق چون از جنس درصد هستند بنابراین واحد نداشته و در دوره یا سال بودن آن‌ها تفاوتی نمی‌کند و با هم برابرند.

$$\frac{t_{p_j}}{T_j}=\frac{\frac{Q_j}{P_j}}{\frac{Q_j}{D_j}}=\frac{D_j}{P_j}$$

درصد زمان کار ماشین (در سال یا دوره) = $\sum_j \frac{D_j}{P_j}$

درصد زمان بیکاری ماشین (در سال یا دوره)= $1-\sum_j \frac{D_j}{P_j}$

شرط جواب‌دار بودن مسئله این است که درصد زمان کار ماشین از یک کمتر باشد و یا به عبارتی درصد زمانی بیکاری ماشین از صفر بیشتر باشد.

$$1-\sum \frac{D_j}{P_j}\geq 0 \quad \Rightarrow \quad \sum \frac{D_j}{P_j}\leq 1$$

مدت زمان بیکاری ماشین در سال = $1-\sum_j \frac{D_j}{P_j}$

مدت زمان بیکاری در دوره= $\left(1-\sum_j \frac{D_j}{P_j}\right)T$

۵-۲-۲- الگوریتم حل مدل

ابتدا شرط جواب‌دار بودن مدل را چک می‌کنیم:

$$\sum \frac{D_j}{P_j}\leq 1$$

اگر شرط فوق برقرار نباشد مدل جواب ندارد بنابراین امکان تولید این محصولات با ماشین داده شده وجود ندارد.

در صورتی که شرط فوق برقرار باشد، T^* از روابط به‌دست آمده محاسبه شده و سپس Q_j^* را به‌دست می‌آوریم.

مثال: در یک کارگاه صنعتی سه نوع محصول به‌وسیله یک ماشین تولید می‌شود. ظرفیت تولیدی ماشین برای محصول یک برابر 27000 واحد در سال، برای محصول 2 برابر 36000 واحد در سال، و برای محصول 3 برابر 9000 واحد در سال است. سایر ارقام مربوط به جدول در زیر آمده است:

محصول	1	2	3
مصرف سالیانه به واحد	9000	18000	6000
هزینه نگهداری هر واحد در سال به تومان	5	6	8
هزینه هر بار سفارش به تومان	800	700	500

مقدار اقتصادی هر بار تولید برای هر یک از محصولات چه‌مقدار است؟ (رقم سمت راست مربوط به محصول اول است و رقم سمت چپ مربوط به محصول سوم است.)

۱) 1900 ،3200 ،2000

۲) 17000 ،4200 ،1600

۳) 1200 ،3600 ،1800

۴) تولید این محصولات با ماشین داده شده امکان‌پذیر نیست.

حل: گزینه ۴ صحیح می‌باشد.

$D_1 = 9000 \;,\; P_1 = 27000 \;,\; h_1 = 5 \;,\; A_1 = 800$

$D_2 = 18000 \;,\; P_2 = 26000 \;,\; h_2 = 6 \;,\; A_2 = 700$

$D_3 = 6000 \;,\; P_3 = 9000 \;,\; h_3 = 8 \;,\; A_3 = 500$

اگر $\sum \frac{D_j}{P_j} \le 1$ باشد مسئله جواب دارد

$$\sum \frac{D_j}{P_j} = \frac{9000}{27000} + \frac{18000}{36000} + \frac{6000}{9000} = 1.5 \le 1$$ مسئله جواب ندارد

حال اگر بدون توجه به شرط جواب‌دار بودن مسئله به حل آن می‌پرداختیم گزینه 3 به صورت زیر به‌دست می‌آمد که گزینه درستی نمی‌باشد.

$$T^* = \sqrt{\frac{\sum A_j}{\sum h_j D_j \left(1 - \frac{D_j}{P_j}\right)}}$$

$$= \sqrt{\frac{2 \times (800 + 700 + 500)}{5 \times 9000\left(1 - \frac{9000}{27000}\right) + 6 \times 18000\left(1 - \frac{18000}{36000}\right) + 8 \times 6000\left(1 - \frac{6000}{9000}\right)}} = 0.2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} Q_1^* = T^* D_1 = 1800 \\ Q_2^* = T^* D_2 = 3600 \\ Q_3^* = T^* D_3 = 1200 \end{cases}$$

۵-۳- مدل چندمحصولی تولیدی با زمان آماده‌سازی

در این حالت مدل چندمحصولی تولیدی را در حالتی که هر محصول برای هر بار تولید خود نیاز به زمان آماده‌سازی برابر با S_j دارد مورد بررسی قرار می‌دهیم.

S_j: زمان هر بار آماده‌سازی محصول jام

این زمان‌های آماده‌سازی در مدت زمان بیکاری ماشین در هر دوره جای می‌گیرد و در صورتی که از این زمان بیشتر گردد باید T^* را طوری تغییر داد که این زمان را در بر گیرد.

در صورتی که T_0 را T^* به‌دست آمده از رابطه مدل چند محصولی تولیدی یعنی: $\sqrt{\dfrac{2\sum A_j}{\sum h_j D_j\left(1-\frac{D_j}{P_j}\right)}}$ بنامیم نکته ذکر شده را می‌توان به صورت زیر نیز بیان کرد.

$$\text{اگر } \sum S_j \le \left(1-\frac{D_j}{P_j}\right)T_0 \;\Rightarrow\; T^*=T_0=\sqrt{\frac{2\sum A_j}{\sum h_j D_j\left(1-\frac{D_j}{P_j}\right)}}$$

$$\text{اگر } \sum S_j > \left(1-\sum\frac{D_j}{P_j}\right)T_0 \;\Rightarrow\; T^*=T_{min}=\frac{\sum S_j}{1-\sum\frac{D_j}{P_j}}$$

بنابراین الگوریتم حل مدل به‌صورت زیر خواهد بود:

T_0، T_{min} از روابط مربوطه به‌دست آورید، T^* ماکزیمم این دو مقدار خواهد بود.

$$T^*=\max\{T_0, T_{min}\}$$

مقدار سفارش بهینه برای هر محصول از فرمول روبرو محاسبه می‌گردد:

$$Q^*=T^*D_j$$

هزینه مدل از رابطه زیر به‌دست خواهد آمد

$$\text{اگر } T^*=T_0 \text{ باشد } \quad K=\sqrt{2\sum A_j \sum h_j D_j\left(1-\frac{D_j}{P_j}\right)}$$

$$\text{اگر } T^*=T_{min} \text{ باشد } \quad K=\frac{\sum A_j}{T}+\frac{T}{2}\sum h_j D_j\left(1-\frac{D_j}{P_j}\right)$$

مثال: سیکل تولید بهینه 3 محصول که توسط یک ماشین تولید می‌شوند، برابر با 2 سال است. مدت زمان بیکاری این محصولات در سال برابر با 0.1 سال است، اگر زمان آماده‌سازی هر محصول برابر با 0.05 سال باشد، آن‌گاه در حالت جدید (با در نظر گرفتن زمان آماده‌سازی) سیکل بهینه چقدر خواهد بود؟

$T_0=2$ سال

$$\text{زمان بیکاری}=0.1=1-\sum\frac{D_j}{P_j}$$

$\sum S_j = 3\times 0.05 = 0.15$

$0.15 > 0.1$

$S_j = 0.05$

$$\Rightarrow \begin{Bmatrix} T_0 = 2 \\ T_{min} = \dfrac{\sum S_j}{1-\sum \dfrac{D_j}{P_j}} = \dfrac{3\times 0.05}{0.1} = 1.5 \end{Bmatrix} \Rightarrow \quad T^* = \text{mam}\{2, 1.5\} = 2 = T_0$$

بنابراین سیکل بهینه تغییری نخواهد کرد.

۵-۴- مدل چندمحصولی با محدودیت فضا

فرضیات مدل مانند مدل چندمحصولی ساده است با این تفاوت که حداکثر فضای موجود در انبار برابر با F می‌باشد.

F: حداکثر فضای موجود در انبار

f_j: فضای اشغالی متوسط هر واحد محصول jام

در این صورت حداکثر فضای اشغالی محصول jام از رابطه زیر به‌دست می‌آید:

حداکثر فضای اشغالی محصول jام = (حداکثر موجودی محصول jام) $f_j \times$

و محدودیت فضای انبار به صورت زیر خواهد بود:

$$\sum_j f_j \text{ (حداکثر موجودی محصول jام)} \le F \quad \Rightarrow \quad \sum_j f_j I_{max} \le F$$

باید توجه کرد که برای هر مدل باید I_{max} مربوطه را قرار داد، به عنوان مثال برای مدل تولیدی $I_{max} = Q\left(1-\frac{D}{P}\right)$ و برای مدل ساده قطعی، $I_{max} = Q$ است.

در ادامه مدل را برای مدل چندمحصولی ساده با $I_{max} = Q$ بررسی می‌کنیم و بنابراین مدل به دنبال یافتن جواب مسئله زیر است

$$\text{Min } Z = \frac{D_j A_j}{Q_j} + \frac{h_j Q_j}{2}$$

$$\sum f_j Q_j \le F$$

برای ارضای محدودیت فضا تابع هدف را با استفاده از ضریب لاگرانژ و تکنیک مربوط به آن به صورت زیر تغییر می‌دهیم.

$$\text{Min } J = Z + Q\left(F - \sum f_j Q_j\right)$$

و به روش زیر جواب‌های منحصر به فرد مسئله را به‌دست خواهیم آورد:

$$\begin{Bmatrix} \dfrac{\partial J}{\partial \theta} = 0 \\ \dfrac{\partial \delta}{\partial Q_j} = 0 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \sum f_j \sqrt{\dfrac{2D_j A_j}{h_j + 2\theta^* f_j}} = F & \text{(I)} \\ Q_j^* = \sqrt{\dfrac{2D_j A_j}{h_j + 2\theta^* f_i}} & \text{(II)} \end{cases}$$

بنابراین الگوریتم حل مدل به‌صورت زیر است:

ابتدا از محدودیت فضا صرف‌نظر می‌کنیم، و جواب مسئله $Q_{\omega j} = \sqrt{\dfrac{2D_j A_j}{Q_j}}$ خواهد بود. در صورتی که این جواب محدودیت فضا $\left(\sum F_j Q_j \le F\right)$ را راضی کند، جواب‌های به‌دست آمده جواب‌های مدل هستند و در غیر این صورت مقدار θ^* را با استفاده از روش لاگرانژ از معادله (I) به‌دست آورده و در معادله (II)ن جایگزین می‌کنیم و جواب مسئله را به‌دست می‌آوریم.

تذکر: از آن‌جا که روش به‌دست آوردن θ^* از روابط فوق به‌صورت سعی و خطاست روش فوق زمان حل زیادی را می‌طلبد بنابراین روش حل مسائل فوق به صورت تستی، این است که در صورتی که بعد از محاسبات متوجه می‌شویم که $Q_{\omega j}$ محدودیت را رعایت نمی‌کنند، گزینه‌ای جواب مسئله است که محدودیت فضا را مساوی می‌کند.

نکته: در صورتی که $Q_{\omega j}$ محدودیت را ارضا نکند، جواب‌های بهینه به‌دست آمده الزاماً از $Q_{\omega j}$ها کمتر خواهد بود $\left(Q_j^* < Q_{\omega j}\right)$

مثال: کارخانه‌ای سه نوع کالای سفارشی 1، 2 و 3 دارد. این کارخانه در حدود 700 متر مربع جهت انبار کردن دارد. با توجه به اطلاعاتی که در جدول زیر آمده است:

اول Q_{wj} ها را بدست می‌آوریم
اگر محدودیت صدق کرد که جواب
اگر صدق نکرد جواب‌ها کوچکتر
از Q_{wj} ها انتخاب می‌شود

	کالای 1	کالای 2	کالای 3
تقاضای سالیانه (واحد)	5000	2000	10000
هزینه سفارش (تومان)	100	200	75
هزینه خرید (تومان)	10	15	5
مساحت اشغال شده توسط هر واحد (مترمربع)	0.7	0.8	0.4
نرخ هزینه نگهداری	0.2	0.2	0.2

مقدار سفارش بهینه کالای 1، 2 و 3 به‌ترتیب با توجه به محدودیت ذکر شده عبارت است از:

۱) 707، 516، 1224
۲) 707، 280، 1224
۳) 348، 280، 571
۴) 348، 516، 571

حل: گزینه ۳ صحیح می‌باشد.

$$F = 700\,m^2$$

$$\sum f_j Q_j \le F \quad \Rightarrow \quad 0.7Q_1 + 0.8Q_2 + 0.4Q_3 \le 700$$

$$Q_{\omega_1} = \sqrt{\frac{2D_1A_1}{h_1}} = 707$$

$$Q_{\omega_2} = 516$$

$$Q_{gw_3} = 1224$$

Q_{ω_j} را در محدودیت می‌گذاریم:

$$0.7\times707 + 0.8\times516 + 0.4\times1224 = 495 + 413 + 490 = 1398 \not\le 700$$

مشاهده می‌گردد که محدودیت را ارضا نمی‌کند بنابراین باید از میان گزینه‌هایی به دنبال جواب گشت که از $Q_{\omega j}$ ها کمتر است تنها گزینه، گزینه 3 است که هر 3، Q_j آن از $Q_{\omega j}$ ها کمتر می‌باشد.

$$0.7\times348 + 0.8\times280 + 0.4\times571 = 244 + 224 + 228 = 696$$

۵-۵- مدل چندمحصولی با محدودیت سرمایه درگیر موجودی

فرضیات مدل مانند مدل چندمحصولی ساده است با این تفاوت که حداکثر سرمایه موجود برای موجودی برابر با X می‌باشد.

X : حداکثر سرمایه درگیر موجودی

محدودیت سرمایه درگیر موجودی به صورت زیر است:

$$\sum C_j \text{ (حداکثر موجودی محصول } j\text{ام)} \le X \Rightarrow \sum_j C_j I_{\max j} \le X$$

برای مدل قطعی ساده $I_{\max} = Q$ است و محدودیت به صورت $\sum_j C_j Q_j \le X$ است. حل مدل مانند مدل محدودیت فضا است با این تفاوت که مقدار β^* از رابطه (I) در زیر محاسبه شده و در رابطه‌های (II) جایگزین می‌گردد.

$$\sum C_j \sqrt{\frac{2A_jD_j}{h_j + 2\beta^* C_j}} = X \qquad \text{(I)}$$

$$Q_j^* = \sqrt{\frac{2A_jD_j}{h_j + 2\beta^* C_j}} \qquad \text{(II)}$$

تذکر: مانند مدل محدودیت فضا در صورتی که بعد از محاسبات متوجه شویم که $Q_{\omega j}$ها محدودیت را ارضا نمی‌کنند، گزینه‌ای جواب مسئله است که محدودیت سرمایه درگیر موجودی را مساوی کند.

نکته: در صورتی که $Q_{\omega j}$ها محدودیت را ارضا نکنند، جواب‌های بهینه به‌دست آمده مانند مدل محدودیت فضا، الزاماً از $Q_{\omega j}$ها کمتر خواهند بود. $\left(Q_j^* < Q_{\omega j}\right)$

۵-۶- مدل چندمحصولی با محدودیت تعداد دفعات سفارش در سال

فرضیات مدل مانند مدل چندمحصولی ساده است با این تفاوت که تعداد دفعات سفارش در سال حداکثر می‌توان برابر ℓ گردد.

ℓ : حداکثر تعداد دفعات سفارش در سال برای کلیه محصولات

$\frac{D_j}{Q_j}$: تعداد دفعات سفارش در سال

محدودیت تعداد دفعات سفارش در سال به صورت زیر است:

$$\sum \frac{D_j}{Q_j} \le \ell$$

روش حل مدل مانند مدل محدودیت فضا است، با این تفاوت که از رابطه (I) مقدار α^* را به‌دست آورده و در رابطه‌های (II) جایگزین می‌کنیم.

$$\sum \sqrt{\frac{h_jD_j}{2\left(A_j + \alpha^*\right)}} = \ell \qquad \text{(I)}$$

$$Q_j^* = \sqrt{\frac{2D_j\left(A_j + \alpha^*\right)}{h_j}} \qquad \text{(II)}$$

تذکر: مانند مدل‌های محدودیت‌دار ذکر شده، در صورتی که بعد ازمحاسبات متوجه شویم که $Q_{\omega j}$ ها محدودیت را ارضا نمی‌کنند، گزینه‌ای جواب مسئله است که محدودیت را مساوی می‌کند.

نکته: برخلاف دو مدل گذشته در صورتی که $Q_{\omega j}$ها محدودیت را ارضا نکنند، جواب‌های بهینه به‌دست آمده الزاماً از $Q_{\omega j}$ ها بزرگتر خواهند بود $\left(Q_j^* > Q_{\omega j}\right)$

۵ـ۷ـ مدل چند محصولی در حالت الزام سفارش همزمان محصولات

فرضیات مدل مانند مدل چندمحصولی ساده است با این تفاوت که محصولات باید با هم سفارش داده شوند. در این صورت مساله شرط یکسان بودن سیکل بهینه تمامی محصولات به مساله تحمیل خواهد شد.

$$\forall_j \quad T_j = T = \frac{Q_j}{T_j}$$

بنابراین تابع هدف مدل به صورت زیر است:

$$\min Z = \sum \left(\frac{D_j A_j}{Q_j} + \frac{h_j Q_j}{2} \right)$$

$$\Rightarrow \quad K(T) = \frac{\sum A_j}{T} + \frac{T}{2} \sum h_j D_j$$

و T^* از رابطه زیر به‌دست می‌آید.

$$\frac{dK(t)}{dT} = 0 \quad \Rightarrow \quad T^* = \sqrt{\frac{2\sum A_j}{\sum h_j D_j}}$$

و Q_j^* از رابطه زیر محاسبه می‌گردد.

$$Q_j^* = T^* D_j$$

و در انتها هزینه‌ها را محاسبه می‌نماییم.

$$k(T^*) = \sqrt{2 \sum A_j \sum h_j D_j}$$

مثال: دو محصول a و b از یک فروشنده خریداری می‌شوند. این دو محصول همیشه با هم سفارش داده می‌شوند و هزینه ثابت سفارش‌دهی (دو محصول با هم) 2500 تومان است. تقاضای محصول a برابر 10000 تن در سال و تقاضای محصول b برابر 20000 تن در سال است. کمبود موجودی برای هیچ یک از این دو محصول جایز نیست. هزینه نگهداری به غیر از هزینه فضای انبار برای هر واحد محصول a برابر 10 تومان و برای هر واحد محصول b برابر 20 تومان در سال است.

الف:در سه سوال زیر فرض کنید هزینه فضای انبار صفر است.

- مقدار سفارش اقتصادی محصول a برابر است با:

۱) $500\sqrt{20}$ تن
۲) $500\sqrt{10}$ تن
۳) 15000 تن
۴) هیچ‌کدام از ارقام فوق نیست.

حل: گزینه ۴ صحیح می‌باشد.

$$\sum A_j = 2500$$
$$D_a = 10000 \quad , \quad h_{1a} = 10$$
$$D_b = 20000 \quad , \quad h_{1b} = 20$$
$$T^* = \sqrt{\frac{2\sum A_j}{\sum h_j D_j}} = \sqrt{\frac{2\times 2500}{10\times 10000+20\times 20000}} = 0.1$$
$$\Rightarrow \quad Q_a^* = T^* D_a = 0.1\times 10000 = 1000$$

• تعداد سفارش اقتصادی محصول b برابر است با:

۱) $500\sqrt{20}$ تن
۲) $500\sqrt{10}$ تن
۳) 2000 تن
۴) هیچ‌کدام از ارقام فوق نیست.

حل: گزینه ۳ صحیح می‌باشد.

$$Q_b^* = T^* D_b = 0.1\times 20000 = 2000$$

• متوسط مجموع هزینه‌های نگهداری و سفارش‌دهی دو محصول در سال در حالت بهینه برابر است با:

۱) $10000\sqrt{20}$
۲) $10000\sqrt{20}$
۳) 50000
۴) هیچ‌کدام از ارقام فوق نیست.

حل: گزینه ۳ صحیح می‌باشد.

$$K^* = \sqrt{2\sum A_j \sum h_j D_j} = \frac{2\sum A_j}{T^*} = \frac{2\times 2500}{0.1} = 50000$$

ب: در سه سوال زیر فرض کنید هزینه فضای انبار که بر اساس حداکثر موجودی محاسبه می‌گردد برای هر واحد محصول بدون توجه به نوع محصول برابر 10 تومان در سال است.

• تعداد سفارش اقتصادی محصول a برابر است با:

۱) $\frac{5000}{\sqrt{55}}$
۲) $5000\sqrt{\frac{2}{15}}$
۳) $5000\sqrt{\frac{1}{10}}$
۴) هیچ‌کدام از ارقام فوق نیست.

حل: گزینه ۱ صحیح می‌باشد.

$h_2 = 10$ (بر حسب حداکثر موجودی)

$$\Rightarrow \quad h_a = h_{1a} + 2h_2 = 10 + 2\times 10 = 30$$
$$h_b = h_{1b} + 2h_2 = 20 + 2\times 10 = 40$$
$$T^* = \sqrt{\frac{2\sum A_j}{\sum h_j D_j}} = \sqrt{\frac{2\times 2500}{30\times 10000 + 40\times 20000}} = \frac{1}{\sqrt{220}}$$
$$Q_a^* = T^* D_a = \sqrt{\frac{1}{220}}\times 10000 = \frac{5000}{\sqrt{55}}$$

• تعداد سفارش اقتصادی محصول b برابر است با:

۱) $1000\sqrt{10}$ ۲) $\frac{1000}{\sqrt{30}}$ ۳) $\frac{500}{\sqrt{15}}$ ۴) هیچ‌کدام

حل: گزینه ۴ صحیح می‌باشد.

$$Q_b^* = T^* D_b = \sqrt{\frac{1}{220}} \times 20000 = \frac{10000}{\sqrt{55}}$$

• متوسط مجموع هزینه‌های نگهداری و سفارش‌دهی دو محصول در سال برابر است با:

۱) $10000\left(\sqrt{15+4\sqrt{10}}\right)$ ۲) $100000\left(\sqrt{10+30}\right)$

۳) $5000\sqrt{220}$ ۴) هیچ‌کدام

حل: گزینه ۴ صحیح می‌باشد.

$$K^* = \frac{2\sum A_j}{T^*} = 5000\sqrt{220}$$

۵ـ۸ـ مدل چندمحصولی در حالت الزام سفارش همزمان و محدودیت تعداد دفعات سفارش در سال

فرضیات مدل مانند مدل چندمحصولی در حالت الزام سفارش همزمان با اضافه کردن این محدودیت که حداکثر تعداد دفعات سفارش در سال برابر ℓ است.

ℓ: حداکثر تعداد دفعات سفارش در سال

مانند مدل قبل شرط یکسان بودن سیکل بهینه تمامی محصولات را خواهیم داشت.

$$\forall_j \;\; T_j = T = \frac{Q_j}{T_j}$$

و محدودیت به صورت زیر خواهد بود.

$$\frac{D_j}{Q_j} = \frac{1}{T_j} = \frac{1}{T} \le \ell$$

الگوریتم حل مدل به صورت زیر خواهد بود:

مقدار T_0 و T_{min} از رابطه‌های زیر حساب می‌کنیم:

$$T_0 = \sqrt{\frac{2\sum A_j}{\sum h_j D_j}}$$

$$T_{min} = \frac{1}{\ell}$$

و T^* حداکثر دو مقدار فوق خواهد بود

$$T^* = \max\left\{T_0, T_{min}\right\}$$

و Q_j^* از رابطه زیر محاسبه می‌گردد:

$$Q_j^* = T^* D_j$$

مثال: مصرف سالیانه دو کالا به ترتیب 10000 و 12000 واحد و هزینه نگهداری هر واحد هر یک از دو کا لا 2 تومان در سال می‌باشد. این دوکالا الزاماً باید با همدیگر سفارش داده شوند. هزینه سفارش‌دهی این دو کالا مجموعاً 1000 تومان است. بیش از 5 بار سفارش‌دهی در سال مجاز نیست. مقدار سفارش اقتصادی هر یک از این دو کالا برابر است با:

۱) 2132 و 2559 ۲) 3162 و 3464 ۳) 2000 و 2400 ۴) 2236 و 2449

حل: گزینه ۱ صحیح می‌باشد.

$$D_1=10000 \quad , \quad D_2=12000 \quad , \quad h_1=h_2=2 \quad , \quad \sum A_j=1000 \quad , \quad \ell=5$$

$$T_0=\sqrt{\frac{2\sum A_j}{\sum h_j D_j}}=\sqrt{\frac{2\times1000}{2\times10000+2\times12000}}=0.2132$$

$$T_{min}=\frac{1}{\ell}=\frac{1}{5}=0.2$$

$$T^0=\max\{0.2, 0.2132\}=0.2132=T_0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} Q_1^*=T^*D_1=0.2132\times10000=2132 \\ Q_2^*=T^*D_2=0.2132\times12000=2559 \end{cases}$$

مثال: در مدل تولید چندمحصولی توسط یک منبع تولید همراه با زمان آماده‌سازی برای هر بار تولید محصول، مسئله وقتی جواب دارد که:

۱) کسر بیکاری ماشین بزرگتر یا مساوی صفر باشد.

۲) زمان بیکاری ماشین بزرگتر از مجموع زمان‌های آماده‌سازی می‌باشد.

۳) نسبت مجموع زمان‌های آماده‌سازی به کسر بیکاری ماشین بزرگتر از یک باشد.

۴) نسبت مجموع زمان‌های آماده‌سازی به کسر بیکاری کوچکتر از یک باشد.

حل: گزینه ۱ صحیح می‌باشد.

همان‌طور که در مدل چندمحصولی تولیدی ذکر گردید تنها شرط جواب‌دار بودن مسئله این است که $\sum \frac{D_j}{P_j}\leq1$ باشد یا $1-\sum\frac{D_j}{P_j}\geq0$ باشد که همان کسر بیکاری ماشین است.

نکته: در صورتی که در یک مدل چند محصولی بیش از یک محدودیت ارایه گردد برای حل مدل باید یک محدودیت را در نظر بگیریم و جواب‌های مدل را به‌دست آوریم، چنان‌چه جواب حاصل محدودیت حذف شده را ارضا کند جواب مدل است. در غیر این صورت گزینه‌ای جواب مدل است که محدودیت در نظر گرفته شده را مساوی کند.

مثال: در فروشگاهی حداکثر مساحت قابل استفاده برای انبار کردن دو محصول a و b برابر 150 متر مربع است. به‌علاوه این دو محصول در یک زمان و با یکدیگر سفارش داده می‌شوند و زمان تحویل برای هر دو یکی است. ارقام مربوط به این دو محصول در جدول زیر آمده است.

محصول	a	b
مصرف سالیانه به واحد	10000	12000
هزینه هر بار سفارش به تومان	150	350
هزینه نگهداری هر واحد در سال به تومان	4	5
سطح هر واحد محصول به متر مربع	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{12}$

مقدار اقتصادی هر بار سفارش از محصول a و محصول b به‌ترتیب کدام یک از موارد زیر است؟

۱) 900 و 750 ۲) 1250 و 900 ۳) 1450 و 1150 ۴) 1600 و 1200

حل: گزینه ۱ صحیح می‌باشد.

$$\sum f_i Q_i = \frac{1}{10}Q_1 + \frac{1}{12}Q_2 \not> 150$$

$$\forall_j = T_j = T \text{ یا } \frac{Q_1}{D_1} = \frac{Q_2}{D_2}$$

ابتدا تنها محدودیت الزام سفارش همزمان را در نظر می‌گیریم.

$$T^* = \sqrt{\frac{2\sum A_i}{\sum h_j D_i}} = \sqrt{\frac{2(150+350)}{4\times10000+5\times12000}} = \sqrt{\frac{1000}{100\times1000}} = 0.1$$

$$\Rightarrow \begin{cases} Q_1 = 0.1\times1000 = 1000 \\ Q_2 = 0.1\times12000 = 1200 \end{cases}$$

سپس محدودیت فضا را چک می‌کنیم:

$$\frac{1}{10}\times1000 + \frac{1}{12}\times12000 = 200 \not< 150$$

پس گزینه‌ای جواب مسئله است که محدودیت فضا را مساوی کند.

$$\text{گزینه ۴}: \frac{1}{10}\times1600 + \frac{1}{12}\times1200 = 260 \neq 150$$

$$\text{گزینه ۳}: \frac{1}{10}\times1450 + \frac{1}{12}\times1150 = 241 \neq 150$$

$$\text{گزینه ۲}: \frac{1}{10}\times1250 + \frac{1}{12}\times900 = 200 \neq 150$$

$$\text{گزینه ۱}: \frac{1}{10}\times900 + \frac{1}{12}\times750 = 152.5 \simeq 150$$

پس گزینه صحیح، گزینه ۱ می‌باشد.

نکته: در صورتی که در مدلی محدودیت‌دار، محدودیتی غیر از مدل‌های عنوان شده برای مدلی تک‌محصولی ارایه گردد، ابتدا محدودیت را بر اساس متغیر خواسته شده توسط مسئله می‌نویسیم و بدون در نظر گرفتن محدودیت مقدار بهینه متغیر را به‌دست می‌آوریم. در صورتی که محدودیت را رعایت کرد، جواب مسئله است. در غیر این صورت مقداری که محدودیت را مساوی کند جواب مساله می‌باشد.

مثال: تولیدکننده‌ای محصولی تولید می‌کند که از این نقطه‌نظر که محصول در انبار تحت تاثیر فاسد شدن بوده برای شرکت گران می‌باشد. او احساس می‌کند که ماکزیمم زمانی که می‌تواند هر واحد از محصول را به‌صورت موجودی نگه‌دارد، دو هفته می‌باشد. او محصول را به‌صورت انباشته تولید می‌کند و فرآیند تولیدی به نحوی است که کل انباشته در یک لحظه تکمیل شده و به موجودی اضافه می‌شود نرخ تقاضای سالیانه 5200 واحد، هزینه راه‌اندازی تولید 400 تومان، نرخ هزینه نگهداری موجودی 20% هزینه متغیر هر واحد محصول 100 تومان بوده و هیچ کمبود موجودی مجاز نیست. اندازه انباشته اقتصادی را به توجه به محدودیت عمر نگهداری محصولات در انبار محاسبه کنید. سال را 50 هفته در نظر بگیرید.

۱) 258 واحد ۲) 235 واحد ۳) 244 واحد ۴) 208 واحد

حل: گزینه ۴ صحیح می‌باشد.

$D=5200 \quad , \quad i=0.2 \quad , \quad A=400 \quad , \quad C=100$

محدودیت موردنظر هفته $T\leq 2$ می‌باشد ابتدا محدودیت را بر اساس متغیر خواسته شده یعنی Q می‌نویسیم:

$$T\leq 2\ \text{هفته} \Rightarrow T\leq \frac{2}{50}\ \text{سال} \Rightarrow \frac{Q}{D}\leq\frac{2}{50} \Rightarrow Q\leq 208$$

مشاهده می‌شود تنها گزینه ۴ می‌تواند صحیح باشد.

مثال: با دستگاهی می‌توان محصول را با نرخ (سرعت) سالیانه 10000 واحد در سال تولید کرد. سرعت تقاضای سالیانه برای این محصول 5000 واحد است. هزینه آماده‌سازی هر بار این دستگاه برای تولید برابر 200 تومان، هزینه نگهداری هر واحد این محصول در سال 100 تومان و هزینه مواد برای هر واحد محصول 50 تومان است. اگر قرار باشد حداکثر سرمایه درگیر در موجودی این محصول برابر 2000 تومان باشد، آن‌گاه مقدار تولید بهینه این محصول به کدام‌یک از مقادیر زیر نزدیک‌تر است؟

۱) 40 واحد ۲) 80 واحد ۳) 100 واحد ۴) 200 واحد

حل: گزینه ۲ صحیح می‌باشد.

$P=10000 \quad , \quad D=5000 \quad , \quad A=200 \quad , \quad h=100 \quad , \quad C=50 \quad , \quad X=2000$

$$CI_{max}\leq 2000 \Rightarrow CQ\left(1-\frac{D}{P}\right)\leq 2000 \Rightarrow 50\times Q\left(1-\frac{5000}{10000}\right)\leq 2000$$

$$\Rightarrow Q\leq 80$$

$$Q^*=\sqrt{\frac{2DA}{h\left(1-\frac{D}{P}\right)}}=\sqrt{\frac{2\times 500\times 200}{100\left(1-\frac{5000}{10000}\right)}}=200\not\leq 80$$

بنابراین $Q^*=80$ می‌باشد.

مثال: دو محصول A و B با هم سفارش داده می‌شوند (فروشنده هر دو محصول یکی است) و مقدار تقاضای سالیانه برای محصول A برابر 500 واحد و محصول B برابر 1500 واحد است. اگر هزینه نگهداری هر واحد محصول A و B سالیانه 10 تومان و هزینه هر بار سفارش‌دهی 100 تومان باشد. تعداد دفعات بهینه سفارش در سال چقدر است؟

۱) 6 ۲) 8 ۳) 10 ۴) 12

حل: گزینه ۳ صحیح می‌باشد.

$D_A=500 \quad , \quad D_B=1500 \quad , \quad h_A=10 \quad , \quad h_B=10 \quad , \quad \sum A_j=100$

$$T^*=\sqrt{\frac{2\sum A_j}{\sum h_j D_j}}=\sqrt{\frac{2\times 100}{10\times 2000}}=0.1 \Rightarrow n=\frac{1}{T^*}=\frac{1}{0.1}=10$$

مثال: اطلاعات مربوط به دو نوع مواد اولیه در یک شرکت طبق جدول زیر می‌باشد. این شرکت جهت تولید این مواد از یک ماشین استفاده می‌نماید. مقدار تولید اقتصادی هر یک از مواد I و II برابر است با:

	I	II
مصرف سالیانه	6000	1800
تولید سالیانه	40000	36000
هزینه آماده‌سازی ماشین	500	700
هزینه نگهداری هر واحد در سال	8	6

۱) 960 و 2880 ۲) 866 و 2050 ۳) 1000 و 3000 ۴) 1500 و 1500

حل: گزینه ۱ صحیح می‌باشد.

$$T^* = \sqrt{\frac{2\sum A_j}{\sum h_j D_j\left(1-\frac{D_j}{P_j}\right)}} = \sqrt{\frac{2(500+700)}{8\times 6000\left(1-\frac{6000}{40000}\right)+6\times 18000\left(1-\frac{18000}{36000}\right)}} = \sqrt{\frac{2400}{14800}} \simeq 0.16$$

$$\Rightarrow \begin{cases} Q_1^* = T^* D_1 = 0.16\times 6000 = 960 \\ Q_2^* = T^* D_2 = 0.16\times 18000 = 2880 \end{cases}$$

مثال: مصرف سالیانه ماده اولیه شرکتی 4000 واحد در سال است. قیمت خرید هر واحد این ماده اولیه 50 تومان و نرخ هزینه نگهداری در این شرکت 20 درصد در سال است. هزینه هر بار سفارش دهی این ماده اولیه 200 تومان است. اگر حداکثر مقدار سرمایه درگیر در موجودی این ماده اولیه نبایستی از 10000 تومان تجاوز کند، آنگاه مقدار سفارش اقتصادی چقدر است؟

۱) 400 واحد ۲) 300 واحد ۳) 200 واحد ۴) 100 واحد

حل: گزینه ۳ صحیح می‌باشد.

$D = 4000 \quad , \quad C = 50 \quad , \quad i = 0.2 \quad , \quad A = 200$

$h = i.c = 0.2 \times 5 = 10$

$CQ \le 10000 \Rightarrow 50Q \le 10\,000 \Rightarrow Q \le 200$

$$Q_\omega = \sqrt{\frac{2\times 4000\times 200}{10}} = 400 \not\le 200$$

بنابراین $Q^* = 200$ واحد می‌باشد.

مثال: دریک سیستم کنترل موجودی، دو قطعه A و B از یک فروشنده تامین و لذا با هم سفارش داده می‌شوند و فقط یک هزینه سفارش برای هر دو آنها تعلق می‌گیرد (C) برای قطعه A محدودیت تعداد سفارش در هر سال (n) وجود دارد ولی برای قطعه B محدودیتی مطرح نیست. در حالی‌که این دو نقطه همواره با هم سفارش داده شود، با توجه به داده‌های زیر مقدار کل هزینه متغیر سالانه (هزینه موجودی‌ها) را برای این سیستم موجودی محاسبه نموده و مشخص کنید که به کدام گزینه نزدیک‌تر است؟

($n = 10$ / واحد پولی $C = 1000$ / $H_A = H_B = 200$ هزینه نگهداری/واحد در سال $R_A = 6000$ تقاضا/ واحد در سال $R_B = 4000$ تقاضا)

۱) 100000 ۲) 110000 ۳) 120000 ۴) 200000

حل : گزینه ۲ صحیح می‌باشد.

هنگامی که دو قطعه الزام سفارش هم زمان دارند و یکی از آنها محدودیت تعداد سفارش دارد بنابراین برای هر دو آنها محدودیت تعداد سفارش وجود دارد.

$$T_{min} = 0.1$$

$$T_o = \sqrt{\frac{2\Sigma A_j}{\Sigma h_j D_j}} = \sqrt{\frac{2 \times 1000}{200 \times 6000 + 200 \times 4000}} = 0.032$$

$$T^* = \max\{0.1 , 0.032\} = 0.1 = T_{min} \Rightarrow \begin{cases} Q_a = 0.1 \times 6000 = 600 \\ Q_b = 0.1 \times 4000 = 400 \end{cases}$$

$$k = \frac{\Sigma A_j}{T} + \frac{\Sigma h_j Q_j}{2} = \frac{1000}{0.1} + \frac{200 \times 600}{2} + \frac{200 \times 400}{2} = 110000$$

۶ـ مدل‌های تخفیف

تخفیف یعنی قیمت هر واحد کالا (C) با افزایش مقدار سفارش کاهش می‌یابد.
تخفیف دو نوع کلی و نموی (افزایشی) دارد:

- **تخفیف کلی:** در این حالت تخفیف بر کل کالاها به صورت یکسان اعمال می‌شود. به عبارت دیگر در این حالت تمام واحدهای خریداری شده با یک قیمت واحد محصول خریداری می‌شوند.
- **تخفیف نموی یا افزایشی:** در این حالت تخفیف بر هر محدوده به صورت جداگانه اعمال می‌شود به عبارت دیگر در این حالت تمامی واحدهای خریداری شده با یک قیمت واحد محصول خریداری نمی‌شوند و تخفیف بر اساس مقادیر داخل محدوده تخفیف برای هر واحد محصول تعریف می‌شود.

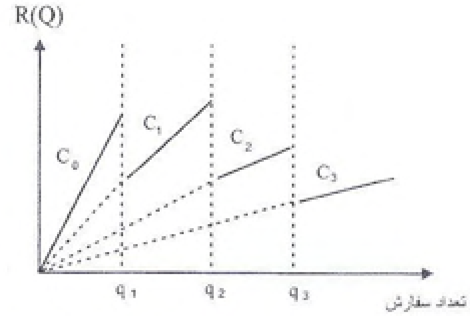
کل هزینه خرید دو نوع تخفیف به صورت جدول زیر می‌باشد:

شماره محدوده	محدوده تخفیف	قیمت واحد کالا	کل هزینه خرید (تخفیف کلی)	کل هزینه خرید (تخفیف نموی)
0	$q_0 \le Q < q_1$	C_0	C_0Q	CoQ
1	$q_1 \le Q \le q_2$	C_1	C_1Q	$Co(q_1-q_0)+C_1(Q-q_1)$
2	$q_2 \le Q < q_3$	C_2	C_2Q	$Co(q_1-q_0)+C_1(q_2-q_1)+C_2(Q-q_2)$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
j	$q_j \le Q < q_{j+1}$	C_j	C_jQ	$\sum_{i=1}^{j} C_{i-1}(q_i-q_{i-1})+C_j(Q-q_j)$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
n	$q_n \le Q$	C_n	C_nQ	$\sum_{i=1}^{n} C_{i-1}(q_i-q_{i-1})+C_n(Q-q_n)$

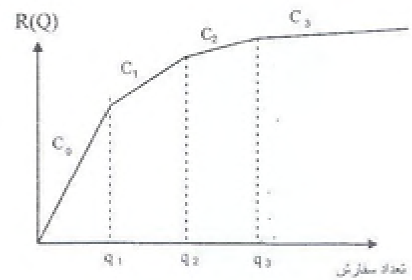
همان‌طور که ذکر شد در تخفیف با افزایش مقدار سفارش با قیمت هر واحد کالا کاهش می‌یابد یعنی:

$C_0 > C_1 > \dots > C_n$

کل هزینه خریدارا با $R(Q)$ نشان می‌دهند. و به q_j ها نقاط تخفیف یا نقاط شکست یا نقاط تغییر قیمت می‌گویند.
نمودار هزینه خرید برای تخفیف کلی به شکل زیر است. این نمودار به صورت گسسته می‌باشد و امتداد تمام خطوط از مبدأ مختصات می‌گذرد. شیب خطوط نیز برای قیمت خرید است.



نمودار هزینه خرید تخفیف نموی به صورت پیوسته است. این نمودار در شکل زیر مشخص گشته است. شیب خطوط برابر قیمت خرید است.



نکته: اگر قیمت‌ها یکسان باشد، به ازای یک Q مشخص، هزینه خرید در تخفیف نموی بیشتر از تخفیف کلی است.

۶ـ ۱ـ مدل تخفیف کل

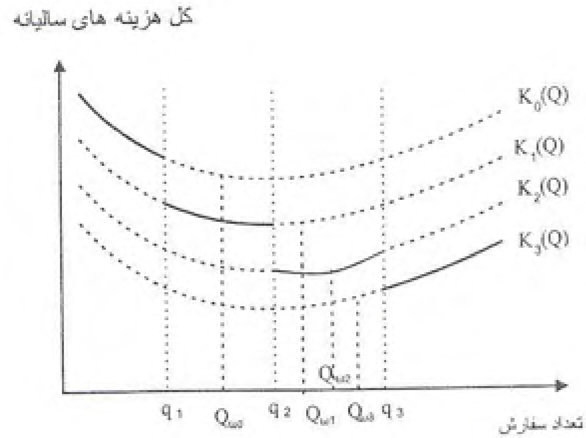
فرضیات مدل مانند مدل EOQ است، با این تفاوت که تخفیف از نوع کلی وجود دارد.

هدف مدل تعیین مقدار سفارش بهینه (Q^*) و نقطه سفارش بهینه با کمینه کردن هزینه‌هاست.

همان‌طور که هزینه خرید در هر محدوده متفاوت است، تابع کل هزینه‌ی سالیانه نیز برای هر محدوده متفاوت و به صورت زیر است.

$$k_j(Q) = \frac{DA}{Q} + \frac{h_j Q}{2} + C_j D \,,\ h_j = iC_j + \omega \qquad q_i \le q_{j+1}$$

بنابراین مانند هزینه خرید نمودار کل هزینه‌ی سالیانه سیستم برای مدل تخفیف کلی نیز گسسته می‌باشد.



بهترین نقطه تابع محدوده jام با مشتق‌گیری از k به دست می‌آید و به صورت زیر است:

$$Q_{\omega j} = \sqrt{\frac{2QA}{h_j}}$$

اما ممکن است این نقطه داخل محدوده خود نباشد بنابراین بهترین نقطه قابل قبول محدوده jام به صورت زیر تعیین می‌گردد.

- اگر $Q_{\omega j}$ از نقطه تخفیف انتهایی محدوده $\left(q_{j+1}\right)$ بیشتر باشد، بهترین نقطه قابل قبول محدودهٔ jام $\left(Q_j^*\right)$ برابر q_{j+1} می‌باشد.

$$q_{j+1} < Q_{\omega j} \Rightarrow Q_j^* = q_{j+1}$$

- اگر $Q_{\omega j}$ بین نقاط تخفیف ابتدایی و انتهایی محدوده خود باشد، بهترین نقطه قابل قبول محدوده برای $Q_{\omega j}$ می‌باشد.

$$q_j \le Q_{\omega j} < q_{j+1} \Rightarrow Q_j^* = Q_{\omega j}$$

- اگر $Q_{\omega j}$ از نقطه تخفیف ابتدایی محدوده $\left(q_j\right)$ کمتر باشد، بهترین نقطه قابل قبول محدوده jام $\left(Q_j^*\right)$ برابر q_j می‌باشد.

$$Q_{\omega j} < q_j \Rightarrow Q_j^* = q_j$$

بنابراین الگوریتم حل مدل به صورت زیر خواهد بود.

از محدوده nام (محدوده آخر) ابتدا $Q_{\omega j}$ و سپس Q_j^* را برای محدوده محاسبه می‌کنیم. این کار را تا زمانی ادامه می‌دهیم که برای اولین بار $Q_{\omega j}$ داخل محدوده قابل قبول تخفیف بیافتد $\left(Q_j^* = Q_{\omega j}\right)$ در این جا متوقف می‌شویم و برای نقاط قابل قبول بهینه بدست آمده، $k_j\left(Q_j^*\right)$ را محاسبه می‌کنیم، کمترین هزینه، هزینه بهینه سالیانه و نقطه متناظر با آن نقطه بهینه مدل است.

$$K\left(Q^*\right) = \min K_j\left(Q_j^*\right)$$

تذکر : علت متوقف شدن در آنجا که برای اولین بار $Q_{\omega j}$ داخل محدوده قابل قبول تخفیف خود می‌افتد این است که طی قضیه‌ای ثابت می‌گردد که هزینه سالیانه زمانی که $Q_j^* = Q_{\omega j}$ از تمام هزینه‌های Q_i^*های سمت چپ خود (محدوده‌ها با نقاط شکست کوچک‌تر) کمتر است و نیازی به محاسبه هزینه آنها نمی‌باشد.

بنابراین نقطه بهینه در مدل تخفیف کلی تنها می‌تواند نقطه ویلسون و نقاط تغییر قیمت درست است نقطه ویلسون باشد.

نکته: روابط زیر برای $Q_{\omega j}$ و $K(Q_{\omega j})$ های تمام محدوده‌ها برقرار است.

$$Q_{\omega_0} \le Q_{\omega_1} \le Q_{\omega_2} \le \dots \le Q_{\omega_n}$$

$$K_0(Q_{\omega_0}) > K_1(Q_{\omega_1}) > K_2(Q_{\omega_2}) > \dots > K_n(Q_{\omega_n})$$

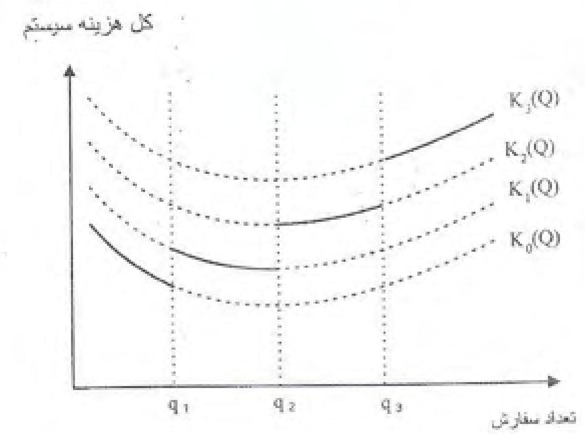
نکته: همان‌طور که ذکر گردید، مجموعه قابل بررسی نقاط بهینه برای به دست آوردن Q^* نقطه ویلسون و نقاط تغییر قیمت بعد از آن است یعنی:

$$Q^* = \{Q_{\omega_2}, q_3, q_4 \dots\}$$

نکته: اگر کل هزینه نگهداری سالیانه را TCH و کل هزینه سفارش‌دهی سالیانه را TCS بنامیم، در نقطه Q_{ω_2}، $TCS = TCH$ و در نقاط $q_2, q_3, \dots$ از آنجا که بزرگتر از $Q_{\omega i}$ مربوط به خود هستند $TCH > TCS$ است پس می‌توان گفت در نقطه بهینه مدل تخفیف رابطه بین هزینه نگهداری و هزینه سفارش‌دهی به صورت زیر است:

$$TCH \ge TCS$$

نکته: در یک مدل خلاف تخفیف کلی اگر به ازای افزایش مقدار سفارش، قیمت واحد کالا نیز افزایش یابد یعنی $C_0 < C_1 < C_2 < \dots < C_n$ روش حل مدل مشابه تخفیف کلی است، با این تفاوت که از محدوده اول شروع می‌کنیم و Q_j^* را تا آنجا که $Q_j^* = Q_{\omega j}$ شود ادامه می‌دهیم و... در این حالت ترتیب نمودارها برعکس می‌گردد یعنی نمودار هزینه کل به صورت زیر خواهد بود:



در این حالت مجموعه نقاط بهینه قابل بررسی، نقطه ویلسون و نقاط تغیر قیمت در سمت چپ نقطه ویلسون است یعنی

$$Q^* = \{Q_{\omega_2}, q_2, q_1\}$$

همچنین رابطه بین هزینه نگهداری و هزینه سفارش‌دهی سالیانه به صورت زیر است.

$$TCH \le TCS$$

نکته: در صورتی که تخفیف کلی برای سایر پارامترهای مدل مثل $h, A, \dots$ باشد، دقیقاً مانند روش حل مدل تخفیف کلی عمل می‌کنیم با این تفاوت که Q_{ω_j}, k_j را بر اساس پارامتر تغییر یافته محاسبه می‌کنیم.

مثال: قیمت خرید هر واحد کالایی برابر 2 تومان و میزان تقاضای سالیانه آن 1000 واحد می‌باشد. هزینه نگهداری سالیانه هر واحد کالا 2 تومان بوده و هزینه انجام یک سفارش وابسته به مقدار سفارش و چنین است:

10 تومان اگر کمتر از 110 واحد سفارش داده شود و 8 تومان اگر بیش از 110 واحد سفارش شود. اندازه بهینه سفارش‌دهی چند واحد خواهد بود؟

۱) 110 ۲) 100 ۳) 90 ۴) 89

حل: گزینه ۱ صحیح می‌باشد.

$C = 2$, $D = 1000$, $h = 2$

شماره محدوده	محدوده	A
0	$Q < 110$	10
1	$Q > 110$	8

$$Q_{\omega_1} = \sqrt{\frac{2 \times 1000 \times 8}{2}} = 89.5 \not> 110 \quad \Rightarrow \quad Q_1^* = 110$$

$$Q_{\omega_0} = \sqrt{\frac{2 \times 1000 \times 10}{2}} = 100 < 110 \quad \Rightarrow \quad Q_0^* = 100$$

$$k\left(Q_1^*\right) = \frac{DA_1}{Q} + h\frac{Q_1}{C} = \frac{1000 \times 8}{110} + \frac{2 \times 110}{2} = 182$$

$$K\left(Q_0^*\right) = \sqrt{2DA_0 h} = \sqrt{2 \times 100 \times 10 \times 2} = 200$$

از آنجا اگر شروع می‌کنیم تا به اولین Qw ممکن برسیم
Q ها که از خود Qw می‌توانند در محاسبات
مقدار بهینه Q ها که بدست آمده تا این
موجود را در تابع هزینه قرار داده و کمترین
TC را بدست می‌آوریم.

بنابراین $Q^* = 110$ می‌باشد که کمترین هزینه را داراست.

مثال: برای خرید یک کالا، فروشنده در مقابل مقادیر هر بار سفارش (q)، قیمت هر واحد را به شرح زیر اعلام نموده است.

قیمت واحد	q
510	$0 \le q \le 100$
400	$100 \le q \le 300$
390	$300 \le q$

با توجه به نرخ تقاضای کالا و هزینه سفارش آن، نقطه ویلسون معتبر منحنی هزینه کل موجودی‌ها برابر با 250 واحد کالا محاسبه شده است. مقدار بهینه (اقتصادی EOQ) برای سفارش این کالا مطابق با کدام گزینه می‌باشد؟

۱) 250 یا 300
۲) دقیقاً 250
۳) 250 یا 200 یا 100
۴) هر مقداری از 250 به پایین

حل: گزینه ۱ صحیح می‌باشد.

از آنجا که $Q_\omega = 250$ در محدوده دوم قرار دارد بر اساس الگوریتم حل ذکر شده، مجموعه نقاط بهینه قابل بررسی 250 و 300 است و از آنجا که اطلاعات کافی برای محاسبه هزینه این دو نقطه در دست نیست تنها می‌توان گفت که نقطه بهینه 250 یا 300 می‌باشد.

مثال: برای خرید یک نوع کالا، فروشنده به ازا مقادیر مختلف سفارش تخفیفی قائل نمی‌شود، ولی شرکت حمل و نقل هزینه‌های حمل کالا را به صورت زیر پیشنهاد نموده است:

واحد هزینه حمل $\left(\frac{\text{ریال}}{\text{کیلو}}\right)$	مقدار
2.5	$0 < Q < 10000$
1.5	$Q \geq 10000$

هزینه هر بار سفارش کالا 400 ریال و واحد هزینه نگهداری (انبارداری) کالا $= 0.1 \frac{\text{ریال}}{\text{کیلو - سال}}$ و مصرف سالیانه کالا 500 کیلو است. در این شرایط مقدار اقتصادی هر بار سفارش کالا برابر است با:

۱) 2000 ۲) 1000 ۳) 12000 ۴) 500

حل : گزینه ۲ صحیح می‌باشد.

$$D = 500\ ,\ A = 400\ ,\ h = 0.1$$

$$Q_{\omega} = \sqrt{\frac{2 \times D \times A}{h}} = \sqrt{\frac{2 \times 500 \times 400}{0.1}} = 2000$$

Q_{ω} در محدوده اول است بنابراین

$$Q_1^* = 2000$$

$$Q_2^* = 10000$$

$$K\left(Q_2^*\right) = \frac{DA}{Q_2} + \frac{hQ_2}{2} + C_2D = \frac{500 \times 400}{2000} + \frac{0.1 \times 2000}{2} + 1.5 \times 500 = 1275$$

$$K\left(Q_1^*\right) = \sqrt{2DAh} + C_1D = \sqrt{2 \times 500 \times 4 \times 0.1} + 2.5 \times 500 = 1450$$

$1450 > 1275$ است بنابراین $Q_2^* = 10000$ که کمترین هزینه را دارد، به عنوان مقدار اقتصادی هر بار سفارش در نظر گرفته می‌شود.

۶ـ۲ـ مدل تخفیف نموی یا افزایشی

فرضیات مدل مانند مدل EOQ است با این تفاوت که تخفیف از نوع نموی وجود دارد.

هدف مدل تعیین مقدار سفارش بهینه (Q^*) و نقطه سفارش بهینه با کمینه کردن هزینه‌هاست.

همان‌طور که ذکر شد تابع کل هزینه سالیانه در مدل‌های تخفیف برای هر محدوده متفاوت است و در مدل تخفیف نموی به صورت زیر است.

$$k_j(Q) = \frac{DA}{Q} + h_j\frac{Q}{2} + \bar{C}D\ ,\ h_j = i\bar{C} \qquad q_j \leq A < q_{j+1}$$

که در آن $\bar{C} = \frac{R(Q)}{Q}$ متوسط قیمت خرید است و

$$R(Q) = \sum_{i=1}^{j} C_{i-1}\left(q_i - q_{i-1}\right) + C_j\left(Q - q_j\right)$$

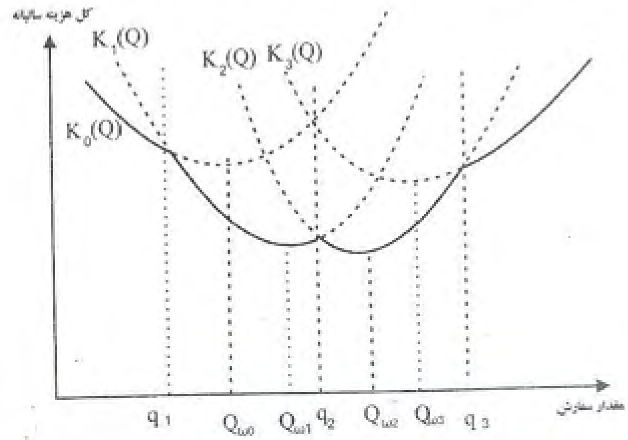
برابر کل هزینه خرید Q کالاست. به همین صورت می‌توان کل هزینه خرید تا نقطهٔ شکست q_j را به صورت $R(q_j)$ را به صورت $R(q_j)$ و با استفاده از رابطه بالا محاسبه کرد. بنابراین رابطه کل هزینه سالیانه برای محدوده jام به صورت زیر بدست خواهد آمد:

$$K_j(Q)=\frac{D}{Q}\left(A+R(q_j)-C_jq_j\right)+iC_j\frac{Q}{2}+C_jD+\frac{iR(q_j)}{2}-\frac{iC_jq_j}{2}$$

بر اساس این تابع و با مشتق‌گیری از آن مقدار بهینه هر محدوده به صورت زیر خواهد بود:

$$Q_{\omega j}=\sqrt{\frac{2D\left(A+R(q_j)-C_jq_j\right)}{iC_j}}$$

نمودار هزینه کل سالیانه مدل تخفیف نموی باشد نمودار هزینه خرید آن پیوسته است و به صورت شکل زیر خواهد بود.



نکته: ثابت می‌گردد که نقاط تخفیف هیچ‌گاه نمی‌توانند نقطه بهینه باشند بنابراین بهینه از بین $Q_{\omega j}$ هایی خواهد بود که در محدوده خود قرار گیرند.

بدین اساس الگوریتم حل مدل به صورت زیر خواهد بود:

برای تمامی محدوده‌ها Q_{ω_j} را بدست می‌آوریم. هر محدوده‌ای که Q_{ω_j} آن داخل محدوده تخفیف افتد، آن $Q_j^*=Q_{\omega_j}$ می‌گردد. سایر محدوده‌ها نقاط بهینه قابل قبول ندارند. نقاط بهینه قابل قبول بدست آمده را در تابع هزینه مرتبط گذاشته و $k_j(Q_j^*)$ را بدست می‌آوریم. کمترین هزینه، هزینه بهینه سالیانه Q_j^* متناظر با آن، Q_j^* بهینه است.

مثال: در یک مدل تخفیف نموی (Incerememtal Discount) اگر مقدار خرید مساوی و یا کمتر از q_1 باشد هزینه هر واحد C_0 و اگر مقدار خرید بیشتر از q_1 باشد، هزینه هر واحد برای واحدهای اضافه بر q_1 برابر C_1 $(C_1<C_0)$ است. مقدار بهینه سفارش را با Q_0 نشان دهید. در این صورت به نظر شما کدام‌یک از عبارات زیر صحیح است؟

۱) Q_0 همیشه کوچک‌تر از q_1 است.

۲) Q_0 بزرگتر از q_1 است.

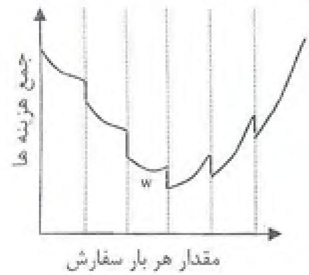
۳) Q_0 نمی‌تواند برابر q_1 باشد.

۴) برای تعیین Q_0 باید هزینه سیستم در نقطه q_1 محاسبه شود.

حل : گزینه ۳ صحیح می‌باشد.

همان‌طور که ذکر شد نقطه بهینه تخفیف نموی (Q_0) نمی‌تواند برابر نقاط تخفیف (مانند q_1) گردد.

مثال: در صورتی‌که فروشنده حاضر باشد با زیاد شدن مقدار هر بار سفارش، تخفیفی در قیمت واحد کالا قائل شود، آنگاه منحنی جمع هزینه موجودی‌ها در سال (شامل هزینه سفارشات + هزینه نگهداری + هزینه خرید) مطابق نمودار خواهد بود. نقطه W را نقطه ویلسون می‌نماییم. برای یافتن مقدار اقتصادی هر بار سفارش (EOQ) باید مقدار جمع هزینه موجودی‌ها را در نقاط زیر حساب نموده و با یکدیگر مقایسه نمود: مهم



۱) فقط نقطه ویلسون

۲) نقطه ویلسون و نقاط تغییر قیمت در سمت چپ نقطه ویلسون

۳) نقطه ویلسون و نقاط تغییر قیمت در سمت راست نقطه ویلسون

۴) نقطه ویلسون و نقاط تغییر قیمت در سمت راست و چپ نقطه ویلسون

حل : گزینه ۳ صحیح می‌باشد.

از نمودار مشخص است که تخفیف به صورت کلی می‌باشد. بنابراین همان‌طور که ذکر شد نقطه بهینه یکی از نقاط ویلسون و یا نقاط تغییر قیمت در سمت راست نقطه ویلسون است.

مثال: جهت جلوگیری از احتکار، قیمت کالایی طبق جدول زیر پیشنهاد شده است به طوری‌که $C_1 < C_2 < C_3$ می‌باشد. هزینه نگهداری این کالا مستقل از قیمت است، اگر کل هزینه‌های نگهداری سالیانه را با TC_h کل و هزینه‌های سفارش‌دهی سالیانه را با TC_s نشان دهیم، کدام رابطه را خواهیم داشت: مهم

مقدار سفارش	قیمت هر واحد
$0 - q_1$	C_1
$q_1 - q_2$	C_2
$q_2 - q_3$	C_3

۱) $TC_h = TC_s$ ۲) $TC_h > TC_s$

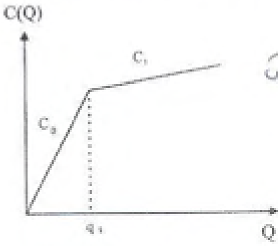
۳) $TC_h \neq TC_s$ ۴) $TC_h \leq TC_s$

۱۸ $C_1 > C_2 > C_3 \rightarrow TC_h \geq TC_s$

حل : گزینه ۴ صحیح می‌باشد.

این مدل، خلاف مدل تخفیف کلی است یعنی $C_1 < C_2 < C_3$ می‌باشد. بنابراین مجموعه نقاط بهینه نقطه ویلسون و نقاط تخفیف سمت چپ آن (کوچک‌تر از نقطه ویلسون) است پس $TC_h \leq TC_s$ می‌باشد.

مثال: در یک مسأله تخفیف اگر مقدار هر بار خرید برای Q باشد، آنگاه مقدار هزینه مواد در هر بار $C(Q)$ در شکل رسم شده است. اگر قیمت هر واحد مواد را با C نمایش دهیم، و مقدار EOQ را به ازای $C = C_0$ با $Q_\omega(0)$ و به ازای $C = C_1$ با $Q_\omega(1)$ نشان دهیم. فرض کنید $Q_\omega(0) < q_1$ و نیز $q_1 < Q_\omega(1)$ است. با توجه به این اطلاعات کدام عبارت صحیح است؟



چون $Q_\omega(1)$ تنها نقطه مورد نظر ماست
پس همان نقطه بهینه است پس نیازی به
محاسبه هزینه سالیانه نیست

۱) برای پیدا کردن مقدار سفارش بهینه به هیچ‌گونه محاسبه هزینه سالیانه نیاز نیست.

۲) برای پیدا کردن مقدار سفارش بهینه باید هزینه سالیانه سیستم در نقطه q_1 محاسبه شود.

۳) برای پیدا کردن مقدار سفارش بهینه باید هزینه سالیانه سیستم در نقطه $Q_\omega(1)$ محاسبه شود.

۴) برای پیدا کردن مقدار سفارش بهینه باید هزینه سالیانه سیستم در نقطه $Q_\omega(0)$ محاسبه شود.

حل: گزینه ۱ صحیح می‌باشد.

شکل نمودار هزینه خرید بیان‌گر این مطلب است که تخفیف از نوع نموی است. بنابراین نقاط بهینه، نقاط ویلسونی هستند که در محدوده تخفیف خود قرار گیرند. $Q_\omega(0) < q_1$ است بنابراین در محدوده تخفیف خود $(Q < q_1)$ قرار ندارد. $q_1 < Q_\omega(1)$ است یعنی در محدوده تخفیف خود $(Q > q_1)$ قرار دارد و از آنجا که تنها $Q_\omega(1)$ در محدوده تخفیف خود قرار دارد نیازی به محاسبه هزینه سالیانه‌ای نیست و $Q_\omega(1)$ نقطه بهینه مدل است.

newsboy problem

۷ـ مدل احتمالی یک دوره‌ای

این مدل تنها برای یک دوره است بنابراین به مدل درخت کریسمس یا پسرک روزنامه فروش نیز معروف است.

فرضیات مدل:

۱ـ تقاضا احتمالی و ساکن است.

۲ـ سفارش صرفاً یکبار در ابتدای دوره به موجودی اضافه می‌گردد.

۳ـ برنامه‌ریزی صرفاً برای یک دوره انجام می‌پذیرد و موجودی باقیمانده در انتهای دوره حراج شده یا از بین می‌رود.

۴ـ کمبود جایز است.

۵ـ هزینه نگهداری صرفاً برای واحدهای باقی‌مانده در انتهای دوره (که حراج می‌شوند یا از بین می‌روند) محاسبه می‌گردد.

۶ـ در ابتدای دوره موجودی برابر با I به عنوان موجودی ابتدای دوره وجود دارد.

پارامترهای مدل:

D: متغیر تصادفی تقاضا در یک دوره

$f_D(x)$: تابع چگالی تقاضا در مدت زمان یک دوره

H=h−L

$F_D(x)$: تابع توزیع تجمعی تقاضا در مدت زمان یک دوره

C: قیمت خرید هر واحد

V: قیمت فروش هر واحد

π: هزینه کمبود هر واحد

L: قیمت حراج هر واحد

A: هزینه هر بار سفارش

h: هزینه نگهداری هر واحد در مدت زمان یک دوره

H: ترکیب هزینه‌های هر واحد باقیمانده در انتهای دوره

$H = h +$ هزینه انتقال جهت حراج یا فروش برحسب هر واحد $-L$

I: موجودی ابتدای دوره (یک لحظه قبل از سفارش)

متغیرهای مدل:

R^*: موجودی بهینه ابتدای دوره (یک لحظه بعد از سفارش)

Q^*: مقدار سفارش بهینه

$Q^* = R^* - I$

همان‌طور که در فرضیات مدل ذکر شد موجودی به دوره‌ی بعد منتقل نمی‌گردد و در آخر دوره باید تصمیم بگیریم که آن را از بین ببریم یا با قیمتی کمتر از C آن را بفروشیم.

مدل‌های احتمالی تک دوره‌ای می‌توانند با تقاضای پیوسته و یا گسسته باشند و همین‌طور هزینه هر بار سفارش دهی (A) ممکن است صفر باشد بنابراین مدل‌های احتمالی تک دوره‌ای به 4 نوع تقسیم می‌گردند:

- تقاضا پیوسته و $A = 0$
- تقاضا پیوسته و $A \neq 0$
- تقاضا گسسته و $A = 0$
- تقاضا گسسته و $A \neq 0$

در اینجا مدل‌هایی که در آن $A = 0$ را بررسی خواهیم کرد، روش حل مدل‌هایی که در آن $A \neq 0$ است به صورت سعی و خطاست

الگوریتم حل مدل در حالتی که تقاضا پیوسته و $A = 0$ باشد به صورت زیر است:

مقدار R را از فرمول زیر محاسبه می‌کنیم:

$$F_D(R^*) = \frac{V + \pi - C}{V + \pi + H}$$

بدین معنی که به دنبال نقطه‌ای می‌گردیم که تابع توزیع تجمعی در آن نقطه برابر $\frac{V + \pi - C}{V + \pi + H}$ شود، آن نقطه برابر R^* می‌باشد.

- اگر $R^* \le I$ باشد نیازی به سفارش نمی‌باشد.
- اگر $R^* > I$ باشد باید به میزان $Q^* = R^* - I$ سفارش دهیم.

در حالت گسسته ممکن است تابع توزیع تجمعی در هیچ نقطه‌ای دقیقاً برابر $\frac{V + \pi - C}{V + \pi + H}$ نشود بنابراین برای حالاتی که تقاضا گسسته و $A = 0$ است به صورت زیر عمل می‌کنیم.

در حالت گسسته، کوچک‌ترین مقداری از تقاضا در مدت زمان یک دوره که تابع توزیع تجمعی تقاضا را مساوی و یا بزرگتر می‌کند را به عنوان R^* انتخاب می‌کنیم، یعنی کوچک‌ترین مقداری که به ازای آن

$$F_D(R^*) \ge \frac{V + \pi - C}{V + \pi + H}$$

- اگر $R^* \le I$ باشد نیازی به سفارش نمی‌باشد.
- اگر $R^* > I$ باشد به میزان $Q^* = R^* - I$ سفارش می‌دهیم.

تذکر: متوسط هزینه نگهداری، متوسط هزینه کمبود، متوسط موجودی باقیمانده و متوسط مقدار کمبود از روابط زیر بدست می‌آید.

تقاضا پیوسته: $\int_0^R (R - x) f_D(x)dx =$ متوسط موجودی باقیمانده در انتهای دوره

تقاضا گسسته: $\sum_{x=0}^{R} (R - x) p\{D = x\} =$ متوسط موجودی باقیمانده در انتهای دوره

(متوسط موجودی باقیمانده در انتهای دوره) $h =$ متوسط هزینه نگهداری برای واحدهای باقیمانده در انتهای دوره

تقاضا پیوسته: $\int_R^{\infty} (x - R) f_D(x)dx =$ متوسط تعداد کمبود در یک دوره

تقاضا گسسته: $\sum_{x=R}^{\infty} (x - R) p\{D = x\} =$ متوسط تعداد کمبود در یک دوره

(متوسط تعداد کمبود در یک دوره) $\pi =$ متوسط هزینه کمبود در یک دوره

مثال: کارگاهی قرار است محصولی را که در ایام عید به فروش می‌رسد، تولید کند. تابع توزیع تصادفی تقاضا برای این محصول به صورت زیر است. اگر هزینه تولید هر واحد برابر با 3000 تومان و قیمت فروش هر واحد برابر با 5000 تومان و قیمت حراج هر واحد باقی مانده در انتهای دوره برابر با 2000 تومان باشد.

الف) میزان تولید بهینه برای این محصول چقدر خواهد بود.

ب) متوسط موجودی باقیمانده در انتهای دوره چقدر خواهد بود.

ج) متوسط تعداد کمبود در یک دوره چقدر خواهد بود

x	≤5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
$p\{D = x\}$	0	0.05	0.05	0.1	0.2	0.2	0.2	0.1	0.05	0.05

حل :

تومان / عدد $2000 = L$ و تومان / عدد$5000 = V$ و تومان / عدد $C = 3000$

$A = 0 , I = 0 , h = 0 , \pi = 0$

$H = (h + 0 - L) = 0 - 2000 = -2000$

ابتدا باید تابع توزیع تجمعی را بدست آوریم:

x	≤ 5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
$p_D(x)$	0	0.05	0.1	0.2	0.4	0.6	0.8	0.9	0.95	1

$$\frac{V + \pi - C}{V + \pi + H} = \frac{500 + 0 - 3000}{5000 + 0 + (-2000)} = 0.66$$

$$\Rightarrow \quad R^* = 11 \quad \Rightarrow \quad Q^* = R^* - I = 11 - 0 = 11$$

به اندازه 11 واحد سفارش می‌دهیم.

$$\text{متوسط موجودی باقیمانده در انتهای دوره} = \sum_{i=0}^{11} (11 - i)\, p\{D = i\}$$

$$= (11 - 6) \times 0.05 + (11 - 7) \times 0.05 + (11 - 8) \times 0.1 + (11 - 9) \times 0.2 + (11 - 10) \times 0.2 + (11 - 11) \times 0.2 = 1.35$$

$$\text{متوسط کمبود در یک دوره} = \sum_{i=11}^{14} (i - 11) P\{D = i\}$$

$$=(14 - 11) \times 0.05 + (13 - 11) \times 0.05 + (12 - 1) \times 0.1 + (11 - 11) \times 0.2 = 0.35$$

مثال: در یک مدل کنترل موجودی احتمالی یک دوره‌ای، هزینه واحد کسری 20 واحد پول است. اگر توزیع تقاضا یکنواخت در فاصله $(0 , 10)$ باشد، هزینه کسری مورد انتظار وقتی که در ابتدای دوره دو واحد کالا وجود داشته باشد و چهار واحد نیز تهیه شود چقدر است؟

۱) صفر واحد پولی ۲) 12 واحد پولی ۳) 16 واحد پولی ۴) 20 واحد پولی

حل : گزینه ۳ صحیح می‌باشد.

$I = 2 , Q = 4 , \pi = 20$

$D \sim U(0 , 10) \quad \Rightarrow \quad f(x) = \frac{1}{10}$

$R = Q + I = 6$

$$\text{متوسط کسری یک دوره} = \int_6^{10} (x - 6)\, \frac{1}{10} dx = \left(\frac{x^2}{20} - \frac{6x}{10}\right)\Bigg]_6^{10} = 0.8$$

$$\text{هزینه کسری مورد انتظار} = \pi\ (\text{متوسط کسری در یک دوره}) = 20 \times 0.8 = 16$$

۸ـ خط‌مشی سیستم موجودی/ خط‌مشی دور سیستم موجودی/ خط‌مشی‌های سفارش دهی

در خط‌مشی سیستم موجودی چگونگی کسب اطلاع در موجودی و هم چنین نوع و نحوه سفارش‌دهی مشخص می‌گردد.

دو نوع خط‌مشی اصلی وجود دارد:

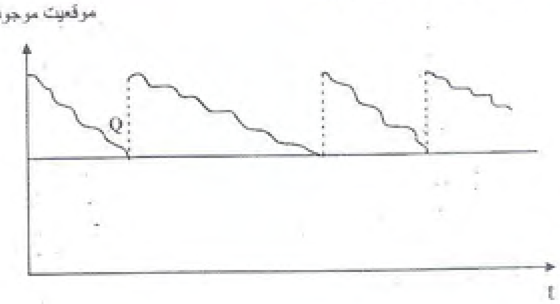
- خط مشی مرور دائم
- خط مشی مرور دوره‌ای

۸ ـ ۱ ـ خط‌مشی مرور دائم

در این خط‌مشی وضعیت موجودی در هر لحظه از زمان بررسی می‌گردد. به محض آنکه مقدار موجودی برابر یا کمتر از نقطه سفارش (r) شود، به اندازه ثابت Q سفارش می‌دهیم.

حالت معروف این خط مشی FOS، (r , Q)، نقطه سفارش، کنترل موجودی مقداری و مقدار سفارش ثابت نامیده می‌شود. در این حالت وضعیت موجودی در هر لحظه مرور می‌شود، به محض اینکه به مقدار نقطه سفارش (r) رسید به اندازه ثابت Q سفارش می‌دهیم و این کار به طور مرتب تکرار می‌شود، در این خط‌مشی فاصله بین دو سفارش متوالی لزوماً یکسان نیست.

نمودار موقعیت موجودی این خط مشی می‌تواند به صورت زیر باشد.

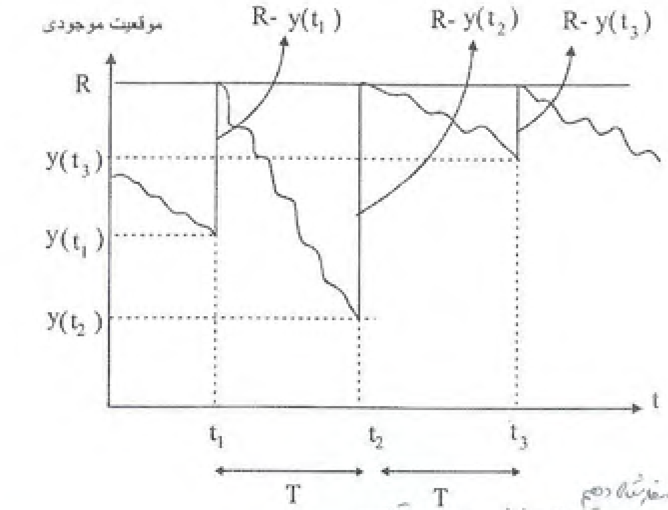


۸ـ ۲ـ خط‌مشی مرور دوره‌ای

در این خط مشی در فواصل زمانی مشخص و یکسان موقعیت موجودی مرور می‌گردد.

حالت معروف این خط مشی FOI، (R , T)، سقف موجودی و فاصله سفارش ثابت نامیده می‌شود. در این حالت زمان‌های t_1 و t_2 و t_3 و ... که فاصله‌ای برابر T دارند، موقعیت موجودی مرور می‌گردد و تا سقف موجودی (R) سفارش داده می‌شود. در این خط مشی مقدار سفارش لزوماً یکسان نیست.

نمودار موقعیت موجودی این خط مشی می‌تواند به صورت زیر باشد.



چون هر ۵۰۰ تا که به ... رسید به اندازه Q سفارش دهیم
ولی در FOI در زمان مشخص به اندازه رسیدن به ... سفارش دهیم

۸-۳- مقایسه بین FOS و FOI

۱ـ احتمال مواجهه با کمبود به علت مرور دائم در FOS از FOI کمتر است بنابراین ذخیره اطمینان (SS) کمتری دارد.

۲ـ هم گروه کردن اقلام سفارش (سفارش هم زمان) در FOI امکان‌پذیر است اما در FOS امکان‌پذیر نیست.

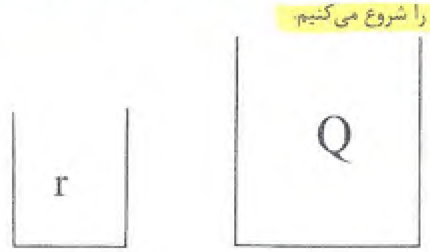
۳ـ هزینه‌های حمل و نقل سفارش در FOI به علت هم‌گروه کردن اقلام سفارش کمتر از FOS است. لذا فروشنده بیشتر تمایل به خط مشی FOI برای خریدار دارد.

۴ـ هزینه‌های مرور سیستم موجودی که جزو هزینه‌های سفارش‌دهی است در FOI نسبت به FOS کمتر است.

۸ـ ۴ ـ خط مشی سفارش‌دهی دو ظرفی، دو قفسه‌ای، مینیمم ماکزیمم، Two - Bin

این خط مشی که حالت کاربردی از خط مشی FOS است (مرور دائم) انبار را به دو قسمت ظرف بزرگتر یا ظرف اول (Q) و ظرف کوچک‌تر یا ظرف دوم (r) تقسیم می‌کند.

ابتدا از ظرف بزرگتر مصرف می‌کنیم و به محض اینکه بخواهیم از ظرف کوچک‌تر (r) مصرف کنیم سفارش می‌دهیم و تا زمان رسیدن سفارش از ظرف کوچک‌تر مصرف می‌کنیم. بعد از رسیدن سفارش ابتدا ظرف کوچک‌تر را تکمیل کرده و هر چه باقی بماند در ظرف بزرگ‌تر خواهیم ریخت و دوباره مصرف را شروع می‌کنیم.



ظرف اول یا ظرف بزرگتر   ظرف دوم یا ظرف کوچکتر

مثال: سیستم معروف موجودی دو قفسه‌ای Two Bin system

۱) حالت خاصی از سیستم موجودی مقدار سفارش ثابت محسوب می‌شود.

۲) جزء سیستم دوره ثابت محسوب می‌شود.

۳) ترکیبی از در سیستم فوق است.

۴) جزء هیچ‌کدام از در سیستم فوق نیست.

حل : گزینه ۱ صحیح می‌باشد.

همان‌طور که ذکر گردیده سیستم Two Bin حالت خاصی از خط مشی FOS یا همان مقدار سفارش ثابت است.

۹ـ مدل‌های احتمالی

۹ ـ ۱ـ مدل احتمالی ساده با خط مشی سفارش دهی FOS و (r , Q)

فرضیات مدل مانند مدل EOQ است با تفاوت‌های زیر:

۱ـ تقاضا احتمالی و ساکن است.

۲ـ کمبود جایز است.

۳ـ خط مشی سفارش‌دهی FOS است.

هدف مدل تعیین مقدار سفارش بهینه (Q) و نقطه سفارش (r^*) با کمینه کردن هزینه‌هاست.

پارامترهای مدل:

D : متغیر تصادفی تقاضا در سال

μ_D: میانگین تقاضا در سال

σ_D : انحراف معیار تقاضا در سال

D_L : متغیر تصادفی تقاضا در مدت زمان تحویل

μ_{D_L} : میانگین تقاضا در مدت زمان تحویل

σ_{D_L}: انحراف معیار تقاضا در مدت زمان تحویل

p: سطح خدمت، سطح اطمینان

متغیرهای مدل:

Q : مقدار سفارش

r: نقطه سفارش، حداقل موقعیت موجودی

SS: موجودی اطمینان (ذخیره ایمنی): موجودی اطمینان در مدل‌های احتمال جهت جواب‌گویی به تغییرات تقاضا در مدت زمان تحویل تعریف می‌گردد و مقدار آن در تعاملی بین کل هزینه‌های کمبود نگهداری تعیین می‌شود.

نکته: در صورتی که SS افزایش یابد، کل هزینه‌های نگهداری افزایش و کل هزینه‌های کمبود کاهش می‌یابد.

$r = \mu_{D_L} + SS$

بدین اساس نقطه سفارش مجدد از رابطه زیر محاسبه می‌گردد.

تعریف سطح خدمت

سطح خدمت برابر است با احتمال اینکه در یک دوره با کمبود مواجه نشویم یعنی احتمال اینکه تقاضا در مدت زمان تحویل کوچک‌تر یا مساوی باشد.

$P_r\{D_L \le r\} =$ سطح خدمت $\Rightarrow F_{D_L}(r) = p$

سطح ریسک یا سطح خطر برابر است با احتمال اینکه در یک دوره با کمبود مواجه شویم: $(1 - P)$

نحوه محاسبه سطح خدمت (p)

الف) توسط مدیر سیستم موجودی مشخص گردد.

ب) از روی مقادیر N_b , T_b توسط رابطه زیر مشخص گردد.

N_b: متوسط تعداد دوره‌های دارای کمبود در سال

T_b : متوسط فاصله زمانی بین دو دوره کمبود متوالی یا فاصله انتظاری مواجه شدن با یک دوره دارای کمبود

$$1-p=\frac{\text{متوسط تعداد دوره‌های دارای کمبود به سال}}{\text{متوسط تعداد دوره‌ها در سال}}=\frac{N_b}{\frac{\mu_D}{Q}}=N_b\times\frac{Q}{D}$$

در مدل‌های احتمالی گاها به جای μ_D از D استفاده می‌کنند.

$$T_b=\frac{1}{N_b}$$

الگوریتم حل مدل احتمالی ساده FOS

برای حل مدل احتمالی ساده FOS دو روش وجود دارد:

۱) با استفاده از مقادیر π و $\hat{\pi}$: در این روش تابع ϕ هزینه‌ها را نوشته و نسبت به Q و r مشتق می‌گیریم و روابط محاسبه Q و r بدست می‌آید.

۲) با استفاده از مفهوم سطح خدمت که جایگزین پارامترهای π و $\hat{\pi}$ می‌گردد. الگوریتم این روش به شرح ذیل است.

الف) Q^* از رابطه روبرو محاسبه می‌گردد. در این رابطه منظور از D، میانگین توزیع تقاضا در سال یعنی μ_D است.

$$Q^*=\sqrt{\frac{2DA}{h}}$$

ب) مقدار سطح خدمت (p) از روش‌های عنوان شده بدست می‌آید.

$$1-p=N_b\times\frac{Q}{D}$$

ج) مقدار نقطه سفارش (r) از رابطه زیر محاسبه می‌گردد.

اگر تقاضا پیوسته باشد مقداری از تقاضا در مدت زمان تحویل برابر با r می‌باشد که به ازای آن تابع توزیع تجمعی برابر با سطح خدمت (p) شود.

$$F_{D_L}(r)=p$$

اگر تقاضا گسسته باشد کوچک‌ترین مقداری از تقاضا در مدت زمان تحویل که رابطه زیر را برقرار می‌کند برابر r می‌گردد.

$$F_{D_L}(r)\ge p$$

د) مقدار ذخیره اطمینان از رابطه زیر بدست می‌آید.

$$r=\mu_{D_L}+SS \quad\Rightarrow\quad SS=r-\mu_{D_L}$$

هـ) متوسط مقدار کمبود در دوره $(\bar{b}(r))$، متوسط مقدار کمبود در سال $(B(r))$ و درصد تقاضایی (مشتریانی) که با کمبود مواجه می‌شوند (در دوره یا سال) از روابط زیر محاسبه می‌گردد.

تقاضا پیوسته

$$\bar{b}(r)=\int_r^{\infty}(x-r)f_{D_L}(x)dx$$

تقاضا گسسته

$$\bar{b}(r) = \sum_{x=r}^{\infty} (x-r)p\{D_L = x\}$$

$$B(r) = \frac{D}{Q}\bar{b}(r)$$

$$\text{درصد تقاضایی که با کمبود مواجه می‌شوند} = \frac{B(r)}{D} = \frac{\bar{b}(r)}{Q}$$

و) متوسط موجودی در دست از رابطه زیر محاسبه می‌گردد

$$\text{متوسط موجودی در دست } \bar{I} = \frac{Q}{2} + SS$$

مثال، میانگین تقاضا در مدت زمان تحویل محصول 90 واحد و توزیع احتمالی تقاضای محصول در طی مدت زمان تحویل آن در جدول زیر داده شده است. متوسط تقاضای سالیانه این محصول 500 واحد و مقدار هر بار سفارش آن ثابت و برابر 50 واحد است.

X	80	85	90	95	100	105
$p(X=x)$	0.3	0.2	0.05	0.2	0.15	0.1

قرار است سطح خدمت (میزان اطمینان از موجودی) طوری انتخاب شود که احتمال کمبود و موقع دریافت هر بار سفارش 0.25 (25 درصد) باشد در این ارتباط به سوال‌های زیر پاسخ دهید.

ـ موجودی اطمینان این محصول برابر است با:

۱) 5 واحد ۲) 10 درصد ۳) 5 تا 10 واحد ۴) از 10 واحد بیشتر

حل : گزینه ۱ صحیح می‌باشد.

X	80	85	90	95	100	105
$F(x)$	0.2	0.5	0.55	0.75	0.9	1

$$1-p = 0.25 \Rightarrow p = 0.75$$

به دنبال کوچک‌ترین عدد صحیحی می‌گردیم که $F_X(r) \geq 0.75$ باشد.

$$\Rightarrow r = 95$$

$$\mu_{D_L} = \sum x p\{X=x\} = 80\times 0.3 + 85\times 0.2 + 90\times 0.05 + 100\times 0.15 + 105\times 0.1 = 90$$

$$SS = r - \mu_{D_L} = 95 - 90 = 5$$

ـ به طور متوسط چه مدت زمان طول می‌کشد تا در یکی از دوره‌های سفارش کمبود رخ دهد؟

۱) 2.5 سال ۲) 1.6 سال ۳) 0.4 سال ۴) 1.4 سال

حل : گزینه ۳ صحیح می‌باشد.

$$1-p = N_b \times \frac{Q}{D} \Rightarrow N_b = \frac{D}{Q}(1-p) = \frac{500}{50}\times 0.25 = 2.5$$

$$T_b = \frac{1}{N_b} = \frac{1}{2.5} = 0.4$$

ـ مقدار متوسط کل کمبود در سال چقدر است؟

۱) 15 واحد ۲) 17.5 واحد ۳) 1.5 واحد ۴) 1.75 واحد

حل : گزینه ۲ صحیح می‌باشد.

$$\bar{b}(r)=\sum_{95}^{100}(x-r)p\{D_L=x\}=(105-95)\times 0.1+(100-95)\times 0.15+(95-9)\times 0.2=1.75$$

$$B(r)=\frac{D}{Q}\bar{b}(r)=\frac{500}{50}\times 1.75=17.5$$

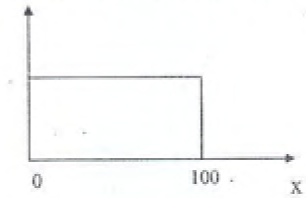
ـ درصد مشتریانی که با کمبود موجودی روبرو می‌شوند چقدر است؟

۱) 14.5 درصد ۲) 15 درصد ۳) 25 درصد ۴) 3.5 درصد

حل : گزینه ۴ صحیح می‌باشد.

$\frac{B(r)}{D}=\frac{17.5}{500}=0.035 \Rightarrow \%3.5$ درصد مشتریانی که به کمبود موجودی روبه‌رو می‌شوند.

مثال: توزیع احتمالی تقاضای محصولی در طی مدت زمان تحویل یکنواخت بوده و چگالی آن به شکل زیر است



روش سفارش‌دهی این محصول روش مقدار سفارش ثابت بوده، مقدار سفارش در هر بار 40 واحد و متوسط مصرف سالیانه این محصول 400 واحد است. اگر قرار باشد در هر دور سفارش احتمالی کمبود (کسری) مواد برابر 10 درصد باشد به سوال‌های زیر پاسخ دهید.

ـ مقدار موجودی اطمینان برابر است با:

۱) 90 واحد ۲) 50 واحد ۳) 40 واحد ۴) 30 واحد

حل : گزینه ۳ صحیح می‌باشد.

$$f(x)=\frac{1}{100}$$

$$Q=40\ ,\ D=400 \quad ,\quad 1-p=0.1 \Rightarrow p=0.9$$

$$F_{D_L}(r)=p \Rightarrow \int_0^r f(x)dx=0.9 \Rightarrow \frac{r-0}{100-0}=0.9 \Rightarrow r=90$$

$$\mu_{D_L}=\frac{100+0}{2}=50 \Rightarrow SS=r-\mu_{D_L}=90-50=40$$

ـ حداقل موقعیت موجودی (Inventory Position) این محصول برابر است با:

۱) 40 واحد ۲) 50 واحد

۳) 90 واحد ۴) مقداری بین 50 تا 90 واحد

حل: گزینه ۳ صحیح می‌باشد.

حداقل موقعیت موجودی $=r=90$

ـ درصد مشتریانی که با کمبود روبرو می‌شوند برابر است با:

۱) 10 درصد ۲) 5 درصد ۳) 2.5 درصد ۴) 1.25 درصد

حل : گزینه ۴ صحیح می‌باشد.

$$\bar{b}(r) = \int_r^{100} (x-90)\frac{1}{100}dx = \left(\frac{x^2}{20} - \frac{90x}{100}\right)\Bigg]_{90}^{100} = 0.5$$

$$\frac{\bar{b}(r)}{Q} = \frac{0.5}{40} = 0.0125 \quad \Rightarrow \quad \%1.125$$ = درصد مشتریانی که با کمبود روبرو می‌شوند.

ـ میانگین تعداد دوره‌های سفارش که در یک سال در آنها کمبود رخ می‌دهد برابر است با:

۱) عددی بین 0 تا 0.5 ۲) عددی بین 0.5 تا 1.5

۳) عددی بین 1.5 تا 2.5 ۴) عددی بین 2.5 تا 10

حل : گزینه ۲ صحیح می‌باشد.

$$1-p = \frac{N_b}{\frac{D}{Q}} \quad \Rightarrow \quad N_b = \frac{D}{Q}(1-p) = \frac{400}{40}\times 0.1 = 1$$

که عددی است بین 0.5 تا 1.5

۹-۲ـ مدل احتمالی ساده با خط‌مشی FOS در حالتی که تقاضا در مدت زمان تحویل دارای توزیع نرمال باشد.

در این مدل تقاضا در مدت زمان تحویل دارای توزیع نرمال با میانگین μ_{D_L} و واریانس $\sigma^2_{D_L}$ است. توزیع نرمال از این جهت با دیگر توزیع‌ها متمایز است که می‌توان به راحتی با استانداردسازی احتمال‌های مورد نظر را محاسبه و رابطه صریحی برای r پیدا نمود.

k_p: ضریب اطمینان $D_L \sim N\left(\mu_{D_L}, \sigma^2_{D_L}\right)$

$$p = p\{D_L \le r\} = p\left\{\overbrace{\frac{D_L - \mu_{D_L}}{\sigma_{D_L}}}^{Z\sim N(0,1)} \le \overbrace{\frac{r-\mu_{D_L}}{\sigma_{D_L}}}^{K_p}\right\}$$

$$\frac{r-\mu_{D_L}}{\sigma_{D_L}} = K_p \quad \Rightarrow \quad r = \mu_{D_L} + k_p\sigma_{D_L}$$

$$SS = k_p\sigma_{D_L}$$

در صورتی که مدت زمان تحویل نیز احتمالی باشد روابط زیر برای تبدیل میانگین و واریانس به کار می‌رود.

D: متغیر تصادفی تقاضا در سال با میانگین μ_D و واریانس σ^2_D

L: متغیر تصادفی مدت زمان تحویل با میانگین μ_L و واریانس σ^2_L

D_L: متغیر تصادفی در مدت زمان تحویل با میانگین μ_{D_L} و واریانس $\sigma^2_{D_L}$

$$\mu_{D_L} = \mu_D \times \mu_L$$

$$\sigma_{D_L} = \sqrt{\mu_D^2 \times \sigma_L^2 + \mu_L\sigma_D^2}$$

بدین اساس حالت‌های زیر برای مدل قابل تصور است.

حالت ۱: D متغیر تصادفی با توزیع نرمال با میانگین μ_D و واریانس σ_D^2 و L ثابت و قطعی باشد.

$$\mu_{D_L} = L\mu_D$$
$$\sigma_{D_L} = \sqrt{L}\,\sigma_D \;\Rightarrow\; r = L\mu_D + k_p\sqrt{L}\,\sigma_D$$
$$SS = k_p\sqrt{L}\,\sigma_D$$

حالت ۲: D ثابت و قطعی و L متغیر تصادفی با توزیع نرمال به میانگین μ_L و وایانس σ_L^2 باشد.

$$\mu_{D_L} = D\mu_L$$
$$\sigma_{D_L} = D\sigma_L \;\Rightarrow\; r = D\mu_L + k_p\,D\sigma_L$$
$$SS = k_p\,D\sigma_L$$

حالت ۳: D متغیر تصادفی با توزیع نرمال به میانگین μ_D و واریانس σ_L^2 و L متغیر تصادفی با توزیع نرمال به میانگین μ_L و واریانس σ_L^2 باشد.

$$\mu_{D_L} = \mu_D \times \mu_L$$
$$\sigma_{D_L} = \sqrt{\mu_D^2 \times \sigma_L^2 + \mu_L \times \sigma_D^2} \;\Rightarrow\; r = \mu_D \times \mu_L + kp\sqrt{\mu_D^2 \times \sigma_L^2 + \mu_L \times \sigma_D^2}$$
$$SS = k_p\sqrt{\sigma_D^2 \times \sigma_L^2 + \mu_L \times \sigma_D^2}$$

مثال: تعداد هر بار سفارش محصولی ثابت است مدت تحویل تصادفی و دارای توزیع نرمال با میانگین 40 روز و انحراف معیار 2 روز است. نرخ تقاضای این محصول ثابت و برابر 20 واحد در روز است. اگر سطح خدمت (احتمال نداشتن کمبود در هر دور سفارش) مورد نظر برای این محصول 90 درصد باشد (اگر X دارای توزیع نرمال استاندارد باشد $p\{X < 1.28\} = 0.9$) آنگاه موجودی اطمینان این محصول برابر است با:

۱) 51.2 ۲) 25.6 ۳) 42.56 ۴) 12.8

حل : گزینه ۱ صحیح می‌باشد.

$$L \sim N\left(40\,,\,2^2\right),\; D = 20\,,\; p = 0.9$$
$$\sigma_{D_L} = D\sigma_L = 20 \times 2 = 40$$
$$SS = k_p\,\sigma_{D_L} = 1.28 \times 40 = 51.2$$

مثال: تقاضای سالیانه کالایی به صورت تابع نرمال با میانگین 8000 واحد و انحراف معیار 1000 واحد است. زمان انتظار تحویل کالا (Lead Time) به صورت ثابت و نیم ماه می‌باشد. اگر سطح سرویس این کالا 0.95 باشد، نقطه سفارش مجدد برابر است با:

$p(z \le 1.64) = 0.95$

۱) 697 ۲) 333 ۳) 806 ۴) 669

حل : گزینه ۴ صحیح می‌باشد.

$$D \sim N\left(8000\,,\,1000^2\right)$$
$$L = 0.5 \text{ ماه} = \frac{1}{24} \text{ سال}$$
$$p = 0.95 \;\Rightarrow\; k_p = 1.64$$

$$r=\mu_{DL}+SS=L\times\mu_D+k_p\times\sqrt{L}\times\sigma_D$$
$$=\frac{1}{24}\times 8000+1.64\times\sqrt{\frac{1}{24}}\times 1000=669$$

مثال: مصرف روزانه کالایی ثابت و برابر 5 واحد، اما مدت تحویل این کالا دارای توزیع نرمال با متوسط 2 و واریانس 0.57 هفته است. نقطه سفارش مجدد این کالا جهت سطح خدمت‌دهی 90 درصد برابر است با: (هر هفته 6 روز و $0.9 = (p(z \le 1.28)$)

۱) 31 واحد ۲) 89 واحد ۳) 65 واحد ۴) 275 واحد

حل: گزینه ۲ صحیح می‌باشد. $\sigma_{DL}=\sqrt{\mu_D^2\times\sigma_L^2+\mu_L\times\sigma_D^2}\rightarrow\sigma_{DL}=\sqrt{30^2\times0.57^2+2\times0^2}=30\times0.57$

$L \sim N(2\,,0.57)$ هفته $\quad D=5\ \frac{\text{عدد}}{\text{روز}}=5\times6\ \frac{\text{عدد}}{\text{هفته}}=30\ \frac{\text{عدد}}{\text{هفته}}$

$p=0.9 \Rightarrow k_p=12.8$

$r=D\mu_L+k_p\,D_{\sigma_L}=30\times2+1.28\times30\times\ 0.57=\ 81.88$

۹-۳- مدل احتمالی ساده با خط‌مشی سفارش‌دهی FOI $(R\,,T)$

فرضیات مدل مانند EOQ است با تفاوت‌های زیر:

۱- تقاضا احتمالی و ساکن است.

۲- کمبود جایز است.

۳- خط مشی سفارش‌دهی FOI می‌باشد.

هدف مدل تعیین مقدار سقف موجودی بهینه (R^*) و فاصله زمانی بهینه بین دو سفارش متوالی (T^*) با کمینه کردن هزینه‌هاست.

پارامترهای مدل:

D: متغیر تصادفی تقاضا در سال

μ_D: میانگین تصادفی تقاضا در سال

σ_D: انحراف معیار تقاضا در سال

D_{L+T}: متغیر تصادفی تقاضا در مدت زمان تحویل به‌علاوه زمان یک دوره

$\mu_{D_{L+T}}$: میانگین تصادفی تقاضا در مدت زمان تحول به علاوه زمان یک دوره

$\sigma_{D_{L+T}}$: انحراف معیار تصادفی تقاضا در مدت زمان تحول به علاوه زمان یک دوره

p: سطح خدمت، سطح ریسک، سطح اطمینان

متغیرهای مدل:

R: سقف موجودی، حداکثر موقعیت موجودی

T: فاصله زمانی بین دو سفارش متوالی

SS: موجودی اطمینان (ذخیره ایمنی):

موجودی اطمینان در مدل احتمالی ساده با خط‌مشی FOI برابر است با مقداری از موجودی که جهت جواب‌گویی به تغییرات تقاضا در مدت زمان تحویل بعلاوه زمان یک دوره سفارش تعریف می‌شود و مقدار آن در تعاملی بین هزینه‌های کمبود و هزینه نگهداری بدست می‌آید.

تعریف سطح خدمت

سطح خدمت برابر است با احتمال اینکه در یک دوره سفارش با کمبود مواجه نشویم و برابر است با احتمال اینکه تقاضا در مدت زمان تحویل به علاوه زمان یک دوره سفارش از حداکثر موقعیت موجودی (R^*) کوچک‌تر یا مساوی باشد.

$$p = p\{D_{L+T} \le R\} = F_{D_{L+T}}(R)$$

$1-p$: سطح ریسک یا سطح خطر برابر است با احتمال اینکه در یک دوره با کمبود مواجه شویم.

$$1-p = p\{D_{L+T} > R\} = 1 - F_{D_{L+T}}(R)$$

نحوه محاسبه سطح خدمت (p)

الف) توسط مدیر سیستم موجودی مشخص گردد.

ب) از روی مقادیر N_b و T_b توسط روابط زیر مشخص گردد.

$$1-p = \frac{N_b}{\frac{1}{T}} = N_b.T$$

$$T_b = \frac{1}{N_b}$$

الگوریتم حل مدل احتمال ساده FOI

مدل احتمالی FOI از دو روش زیر قابل حل است.

۱) با استفاده از پارامترهای π و $\hat{\pi}$: در این روش تابع هزینه‌ها را بر اساس متغیرها و پارامترها نوشته و نسبت به دو متغیر T و R مشتق می‌گیریم و روابط محاسبه T و R بدست می‌آید.

۲) با استفاده از مفهوم جایگزین سطح خدمت. الگوریتم این روش به شرح ذیل است.

الف) مقدار T^* از رابطه زیر محاسبه می‌گردد.

$$T^* = \sqrt{\frac{2A}{Dh}}$$

ب) مقدار سطح خدمت از روش‌های عنوان شده محاسبه می‌گردد.

$$1-p = TN_b$$

ج) مقدار سقف موجودی (R) از رابطه زیر محاسبه می‌گردد.

اگر تقاضا پیوسته باشد، مقداری از تقاضا در مدت زمان تحویل به علاوه، یک دوره سفارش برابر با R می‌باشد که به ازای آن تابع توزیع تجمعی برابر با سطح خدمت (p) گردد.

$$F_{D_{L+T}}(R) = p$$

اگر تقاضا گسسته باشد کوچک‌ترین مقداری از تقاضا در مدت زمان تحویل بعلاوه یک دوره سفارش که رابطه زیر را برقرار کند برابر R می‌گردد.

$$F_{D_{L+T}}(R) \ge p$$

د) مقدار ذخیره اطمینان از رابطه زیر محاسبه می‌گردد.

$$R = \mu_{D_{L+T}} + SS \quad \Rightarrow \quad SS = R - \mu_{D_{L+T}}$$

هـ) متوسط مقدار کمبود در یک دوره $(\bar{b}(R))$، متوسط مقدار کمبود در یک سال $(B(R))$ و درصد تقاضایی (مشتریانی) که با کمبود مواجه می‌شوند (در دوره یا سال) از فرمول‌های زیر محاسبه می‌گردد.

تقاضا پیوسته: $\bar{b}(R) = \int_R^\infty (x-R)f_{D_{L+T}}(x)dx$

تقاضا گسسته: $\bar{b}(R) = \sum_{x=R}^{\infty} (x-R)p\{D_{L+T} = x\}$

$$B(R) = \frac{\bar{b}(R)}{T}$$

درصد تقاضایی که کمبود مواجه می‌شود. $= \frac{B(R)}{D} = \frac{\bar{b}(R)}{D.T}$

و) متوسط موجودی در دست از رابطه زیر محاسبه می‌گردد.

متوسط موجودی در دست $(\bar{I}) = \frac{D.T}{2} + SS$

مثال: در سیستم مرور دوره‌ای (دوره ثابت سفارش) میزان حداکثر موجودی در شرایطی که موجودی ذخیره صفر باشد برابر است با:

۱) میزان تقاضا در زمان دوره سفارش منهای تقاضا در طی زمان تحویل

۲) میزان تقاضا در طول زمان تحویل

۳) میزان تقاضا در طول زمان تحویل + تقاضا در طول دوره سفارش

۴) میزان تقاضا در طول دوره سفارش

حل: گزینه ۳ صحیح می‌باشد.

همان‌طور که ذکر گردید در سیستم FOI، میزان حداکثر موجودی (R) برابر است با میزان تقاضا در طول زمان تحویل بعلاوه یک دوره سفارش + ذخیره اطمینان. از آن‌جا که ذخیره اطمینان برابر صفر فرض گردیده است بنابراین گزینه ۳ صحیح می‌باشد.

مثال: از کالایی هر Tماه به اندازه‌ای سفارش می‌دهیم که به حداکثر سطح موجودی خود (E) برسد، اگر نرخ تقاضای، ماهیانه این کالا (D) به صورت یک متغیر تصادفی و زمان انتظار تحویل آن L به صورت ثابت باشد در این صورت میانگین موجودی در طول دوره برابر است با:

۱) $E - \frac{D.T}{2} - D.L$ ۲) $E - \frac{D.T + D.L}{2}$ ۳) $\frac{D.T + D.L}{2}$ ۴) $E - \frac{D.L}{2} + D.L$

حل: گزینه ۱ صحیح می‌باشد.

$$SS = E - \mu_{D_{L+T}} = E - D.(L+T)$$

$$\bar{I} = \frac{D.T}{2} + SS = \frac{D.T}{2} + E - D.L - D.T = E - D.L - \frac{D.T}{2}$$

۹ـ ۴ـ مدل احتمالی ساده با خط‌مشی FOI در حالتی که تقاضا در مدت زمان تحویل بعلاوه یک دوره سفارش دارای توزیع نرمال باشد.

در این مدل تقاضا در مدت زمان تحویل بعلاوه یک دوره سفارش دارای توزیع نرمال با میانگین $\mu_{D_{L+T}}$ و واریانس $\sigma^2_{D_{L+T}}$ است.

$$D_{L+T} \sim N\left(\mu_{D_{L+T}} \ , \ \sigma^2_{D_{L+T}}\right)$$

رابطه سقف موجودی به صورت زیر به‌دست می‌آید.

$$p = p\{D_{L+T} \le R\} = p\left\{\frac{D_{L+T} - \mu_{D_{L+T}}}{\sigma_{D_{L+T}}} \le \frac{R - \mu_{D_{L+T}}}{\sigma_{D_{L+T}}}\right\} \Rightarrow R = \mu_{D_{L+T}} + k_p \sigma_{D_{L+T}}$$

$$SS = k_p \sigma_{L+T}$$

در صورتی که مدت زمان تحویل نیز احتمالی باشد، روابط زیر برای تبدیل میانگین و واریانس به کار می‌رود.

D: متغیر تصادفی تقاضا در سال با میانگین μ_D و واریانس σ^2_D

L: متغیر تصادفی مدت زمان تحویل با میانگین μ_L و واریانس σ^2_L

D_{L+T}: متغیر تصادفی تقاضا در مدت زمان تحویل به علاوهٔ زمان یک و سفارش با میانگین $\mu_{D_{L+T}}$ واریانس $\sigma^2_{D_{L+T}}$

$$\mu_{D_{L+T}} = \mu_D \times \mu_{L+T}$$

$$\sigma_{D_{L+T}} = \sqrt{\mu^2_D \sigma^2_{L+T} + \mu_{L+T} \sigma^2_D}$$

T ثابت است

قابل ذکر است که از آنجا T ثابت است، داریم:

$$\mu_{L+T} = \mu_L + T$$

$$\sigma_{L+T} = \sigma_L$$

بنابراین حالت‌های زیر برای مدل قابل ذکر است.

حالت ۱: D متغیر تصادفی با توزیع نرمال $\left(\mu_D \ , \ \sigma^2_D\right)$ و L ثابت و قطعی است.

$$\mu_{D_{L+T}} = (L+T)\mu_D$$

$$\sigma_{D_{L+T}} = \sqrt{L+T}\, \sigma_D$$

$$\Rightarrow \ R = (L+T)\mu_D + k_p \sqrt{L+T}\, \sigma_D$$

$$SS = k_p \sqrt{L+T}\, \sigma_D$$

حالت ۲: D ثابت و قطعی و L متغیر تصادفی با توزیع نرمال $\left(\mu_L \ , \ \sigma^2_L\right)$ باشد.

$\mu_L + T$

$$\mu_{D_{L+T}} = D\mu_{L+T} = D\left(\mu_{L+T}\right)$$

$$\sigma_{D_{L+T}} = D\sigma_{L+T} = D\sigma_L$$

$$\Rightarrow \ R = D(\mu_L + T) + k_p D \sigma_L$$

$$SS = k_p D\sigma_L$$

حالت ۳: D و L هر دو متغیر تصادفی با توزیع نرمال باشند.

$$\mu_{D_{L+T}} = \mu_D \times \mu_{L+T} = \mu_D\left(\mu_L + T\right)$$

$$\sigma_{D_{L+T}} = \sqrt{\mu^2_D \sigma^1_{L+T} + \mu_{L+T}\sigma^2_D} = \sqrt{\mu^2_D \sigma^2_L + \left(\mu_L + T\right)\sigma^2_D}$$

مثال: محصولی هر سه ماه یکبار سفارش داده می‌شود، مدت تحویل این محصول یک ماه است. توزیع تقاضای این محصول در طی مدت t (به ماه) نرمال با میانگین $100t$ و انحراف معیار $10\sqrt{t}$ است. اگر سطح خدمت و احتمال نبودن کمبود در هر دوره سفارش این محصول 90% باشد، آنگاه حداکثر موقعیت موجودی این محصول عبارت است از: (اگر X دارای توزیع نرمال استاندارد باشد،آنگاه $p(X \le 1.28) = 0.9$ است.)

۱) 125.6　　۲) 425.6　　۳) 112.8　　۴) 312.8

حل: گزینه ۲ صحیح می‌باشد.

$$T = 3 , L = 1 , D_t \sim N\left(100t , \left(10\sqrt{t}\right)^2\right)$$
$$p = 0.9 \Rightarrow k_p = 1.28$$
$$L + T = 3 + 1 = 4$$
$$\mu_{D_t} = 100t \Rightarrow \mu_{D_{L+T}} = \mu_{D_4} = 100 \times 4 = 400$$
$$\sigma_{D_t} = 10\sqrt{t} \Rightarrow \sigma_{D_{L+T}} = \sigma_{D_4} = 10\sqrt{4} = 20$$
$$R = \mu_{D_{L+T}} + k_p \sigma_{D_{L+T}} = 400 + 1.28 \times 20 = 425.6$$

مثال: طول دوره سفارش T (فاصله زمانی بین دو سفارش متوالی) برای محصولی ثابت و برابر 1 ماه انتخاب شده است. مدت تحویل این محصول 3 ماه است. توزیع تقاضای این محصول در طی هر ماه متغیر تصادفی با توزیع نرمال با میانگین 100 واحد و انحراف معیار 20 واحداست. قرار است سطح خدمت این محصول طوری انتخاب شود که احتمال کمبود در موقع دریافت سفارش ۵ درصد باشد. (برای متغیر تصادفی نرمال واحد (استاندارد) U داریم: $P(U < 1.65) = 0.95$). متوسط موجودی این محصول به کدام‌یک از تصاویر زیر نزدیک‌تر است؟

۱) 175　　۲) 265　　۳) 125　　۴) 116

حل: گزینه ۴ صحیح می‌باشد.

$$T = 1 , L = 3 , D \sim N\left(100 , (20)^2\right)$$
$$1 - p = 0.05 \Rightarrow p = 0.95 \Rightarrow k_p = 1.65$$
$$SS = k_p \sigma_{D_{L+T}} = k_p\sqrt{(\mu + T)}\sigma_D = 1.65 \times \sqrt{(3+1)} \times 20 = 66$$
$$\bar{I} = \frac{D.T}{2} + SS = \frac{100 \times 1}{2} + 66 = 116$$

۹ـ ۵ـ مقایسه بین مدل احتمالی FOS و مدل احتمالی FOI

معلوم نمی‌باشد

	FOS		FOI
حداکثر موقعیت موجودی	$r+Q$		R
حداقل موقعیت موجودی	r		معلوم نمی‌باشد
متوسط موجودی در دست	$\frac{Q}{2}+SS_{FOS}$	$<$	$\frac{D.T}{2}+SS_{FOI}$
موجودی اطمینان	SS_{FOS}	$<$	SS_{FOI}
موجودی اطمینان در حالت نرمال	$k_p\ \sigma_{D_L}$	$<$	$k_p\ D_{L+T}$
کل هزینه نگهداری سالیانه	h (متوسط موجودی در دست)	$<$	h (متوسط موجودی در دست)
کل هزینه کمبود سالیانه	$\pi\ B(r)$	$<$	$\pi\ B(R)$

شرط مقایسه موارد فوق برابر بودن تمامی پارامتر ها من جمله سطح خدمت (p) است (شرایط یکسان است).

مثال: دو سیستم سفارش دهی $(r\ ,\ Q)$ یا FOS و (R,T) یا FOI را در نظر بگیرید.

۱) برای یک سطح خدمت مشخص در دو سیستم موجودی اطمینان یکسان است.

۲) برای یک سطح خدمت مشخص، متوسط مقدار کسری سالیانه دو سیستم برابر است.

۳) برای یک سطح خدمت مشخص، کل هزینه نگهداری سیستم $(r\ ,Q)$ بیشتر از سیستم $(R\ ,\ T)$ است.

۴) برای یک سطح خدمت مشخص، متوسط کسری در یک دوره سفارش برای سیستم $(r\ ,\ Q)$ کمتر از سیستم $(R\ ,\ T)$ است.

حل : گزینه ۴ صحیح می‌باشد.

همان‌طور که در مقایسه دو سیستم ذکر گردید، برای یک سطح خدمت مشخص موجودی اطمینان سیستم FOI بیشتر از FOS است $\left(SS_{FOS} < SS_{FOI}\right)$، متوسط کسری سالیانه سیستم FOI نیز از سیستم FOS بیشتر است $\left(B(r) < B(R)\right)$، کل هزینه نگهداری سیستم FOS کمتر از سیستم FOI است و نیز متوسط کسری در یک دور سفارش سیستم FOS کمتر از سیستم FOI است $\left(\bar{b}(r) < \bar{b}\ (R)\right)$بنابراین گزینه ۴ صحیح است.

مثال: مصرف روزانه کالایی ثابت و برابر 10 واحد اما پیش زمان تامین این کالا (Lead Time) متغیر و بر اساس جدول زیر می‌باشد، مقدار سفارش این کالا ثابت و برابر 400 واحد است، در صورتی‌که هزینه نگهداری هر واحد 2 تومان در سال و کل هزینه‌های نگهداری برابر 480 تومان در سال باشد. نقطه سفارش مجدد این کالا برابر است با:

پیش زمان	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
احتمال	0.05	0.07	0.15	0.2	0.15	0. 12	0.1	0.08	0.05	0.03

۱) 40 واحد ۲) 120 واحد ۳) 110 واحد ۴) 80 واحد

حل : گزینه ۲ صحیح می‌باشد.

$$D = 10\ \frac{\text{عدد}}{\text{روز}}\ ,\ Q = 400\ ,\ h = 2$$

$$h\bar{I} = 480 \Rightarrow h\left(\frac{Q}{2} + SS\right) = 480 \Rightarrow 2\left(\frac{400}{2} + SS\right) = 480 \Rightarrow SS = 40$$

$$\mu_L = 4 \times 0.05 + 5 \times 0.07 + 6 \times 0.15 + 7 \times 0.2 + 8 \times 0.15 + 9 \times 0.12 + 10 \times 0.1 + 11 \times 0.08 + 12 \times 0.05 + 13 \times 0.03 = 8$$

$$\mu_{D_L} = D\mu_L = 10 \times 8 = 80$$

$$r = \mu_{D_L} + SS = 80 + 40 = 120$$

مثال: در سیستم نقطه سفارش (سفارشات مستمر یا کنترل موجودی مقداری) با افزایش یافتن هزینه‌های سفارش، در صورتی که سطح خدمت‌دهی (سطح اطمینان از موجودی) ثابت باشد، مقدار کمبود این کالا در سال:

۱) کاهش می‌یابد. ۲) افزایش می‌یابد. ۳) ثابت باقی می‌ماند. ۴) قابل پیش‌بینی نیست.

حل: گزینه ۱ صحیح می‌باشد.

هزینه سفارش‌دهی (A) بر هیچ‌کدام از موارد μ_{D_L} ، σ_{Q_L} ، SS ، r ، $\bar{b}(r)$ تأثیری ندارد و تنها بر $Q = \sqrt{\frac{2DA}{h}}$ تأثیر گذار است.

بنابراین با افزایش A، Q افزایش می‌یابد و $\frac{D}{Q}$ کاهش خواهد یافت و $B(r) = \frac{D}{Q}b(r)$ نیز کاهش می‌یابد.

مثال: یک واحد صنعتی هر هفته نیاز ثابت به 6 واحد از کالایی دارد. سوابق توزیع زمان تحویل کالا در جدول زیر نشان داده شده است. اگر بخواهیم با احتمال 95% یا بیشتر دچار کمبود نشویم میزان موجودی اطمیان چقدر خواهد بود؟

مدت زمان تحویل (هفته)	تکرار
4	14
5	18
6	12
7	6

۱) 6.2
۲) 8.4
۳) 10.8
۴) 12.6

حل: گزینه ۳ صحیح می‌باشد.

ابتدا باید تکرارهای فوق را به احتمال تبدیل کرده و سپس توزیع تجمعی را بیابیم. بنابراین تکرارها را بر مجموع تکرارها یعنی 50 باید تقسیم کرد.

از طرفی باید توزیع D_L را بدست آوریم یعنی باید مدت زمان تحویل را در مقدار ثابت D ضرب نماییم یعنی $D_{LS} = D \times L$

L	4	5	6	7
D_L	4×6	5×6	6×6	7×6
توزیع احتمال	$\frac{14}{50} = 0.28$	$\frac{18}{50} = 0.36$	$\frac{12}{50} = 0.24$	$\frac{6}{50} = 0.12$
توزیع تجمعی	0.28	0.64	0.88	1

$$p = 0.95 \Rightarrow r = 7 \times 6 = 42$$

$$\mu_{D_L} = 24 \times 0.28 + 30 \times 0.36 + 36 \times 0.24 + 42 \times 0.12 = 31.2$$

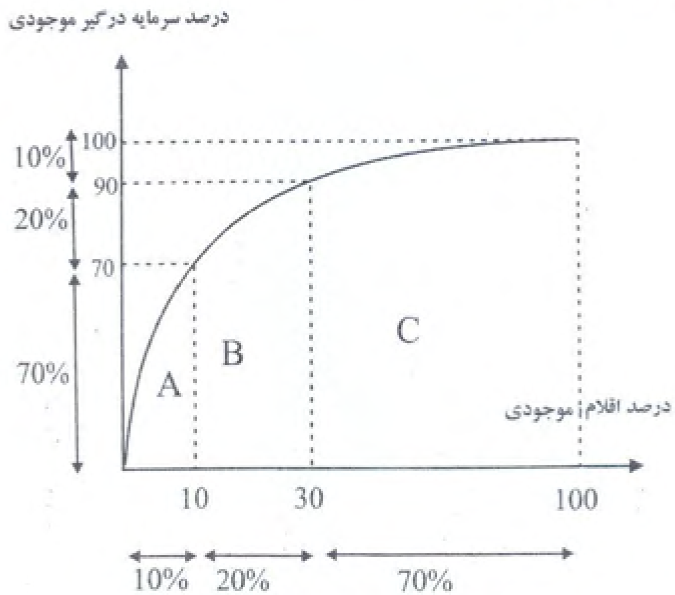
$$\Rightarrow SS = r - \mu_{D_L} = 42 - 31.2 = 10.8$$

۱۰ـ آنالیز ABC

آنالیز ABC که حالتی از نمودارهای پارتو است، اقلام موجودی را به سه طبقه A و B و C به شرح ذیل تقسیم می‌کند:

طبقه	درصد اقلام موجودی	درصد سرمایه دریگر موجودی
A	کمترین (حدود 10%)	بیشترین (حدود 70%)
B	متوسط (حدود 20%)	متوسط (حدود 20%)
C	بیشترین (حدود 70%)	کمترین (حدود 10%)

نمودار درصد سرمایه دیگر موجودی به صورت زیر است.



در این روش حجم سرمایه در گیر موجودی هر کالا به صورت زیر محاسبه می‌گردد.

حجم سرمایه درگیر موجودی محصول i ام $= C_i \times D_i$

سپس اقلام را بر اساس حجم سرمایه درگیر موجودی به صورت نزولی مرتب می‌کنیم و سپس درصد حجم سرمایه درگیر موجودی برای هر محصول را محاسبه می‌کنیم که برابر است با حجم سرمایه درگیر موجودی محصول i ام تقسیم بر مجموع حجم سرمایه درگیر موجودی محصولات. حدود 10% کالاهای اول که 70% حجم سرمایه درگیر موجودی را دارا می‌باشند گروه A، 20% دوم که حدود 20% حجم سرمایه درگیر موجودی را دارا می‌باشند گروه B و 70% باقی مانده که 10% حجم سرمایه درگیر موجودی را دارا می‌باشند گروه C را در برخواهند داشت.

مثال: کدام‌یک از اقلام زیر جزو گروه A در آنالیز ABC قرار می‌گیرد.

۱) قلم کالایی که بیشترین تقاضای سالیانه را دارد.
۲) قلم کالایی که کمترین سرمایه درگیر موجودی را دارد.
۳) قلم کالایی که بیشترین تقاضا برحسب ریال را دارد.
۴) قلم کالایی که بیشترین قیمت واحد را دارد.

حل : گزینه ۳ صحیح می‌باشد.

همان‌طور که ذکر گردید. آنالیز ABC براساس حجم سرمایه درگیر موجودی، کالاها را گروه‌بندی می‌نماید و تنها قیمت ملاک طبقه‌بندی نسبت بلکه قیمت در تقاضا یا همان تقاضا برحسب ریال ملاک طبقه‌بندی است بنابراین گروه A بیشترین حجم سرمایه درگیر موجودی یا تقاضا برحسب ریال را دارد.

مثال: در آنالیز ABC اقلام موجودی، گروه اقلامی که شامل بیشترین درصد اقلام بوده ولی کمترین درصد حجم پولی را دارا هستند عبارت است از:

۱) گروه Z　　۲) گروه A　　۳) گروه C　　۴) گروه B

حل : گزینه ۳ صحیح می‌باشد.

۱۱ـ مدل های قطعی و پویا

در این مدل‌ها تقاضا به صورت قطعی (غیراحتمالی) است ولی در طول مدت برنامه‌ریزی تغییر می‌کند یعنی در هر دوره با دوره بعد می‌تواند متفاوت باشد.

فرضیات مدل مانند مدل EOQ است با این تفاوت که:

۱ـ تقاضا قطعی و پویا است.

۲ـ کمبود جایز نیست (همان‌طور که ذکر گردید،مانند مدل EOQ)

۳ـ سفارش صرفاً در ابتدای هر دوره می‌رسد.

۴ـ هزینه نگهداری صرفا برای واحدهایی محاسبه می‌گردد که از یک دوره به دوره دیگر منتقل می‌شوند.

دوره: فاصله زمانی تعیین شده که تقاضا در آن مشخص بوده (قطعی بوده) ولی با تقاضا در دوره‌های دیگر متفاوت است. دوره می‌تواند روز، هفته، ماه، سال و یا هر بازه زمانی ثابتی باشد.

هدف این مدل‌ها این است که به چه میزان و برای چند دوره سفارش داده شود. قابل ذکر است که نقاط مشخص شده محل دریافت سفارش است و سفارش L زمان قبل صادر می‌شود.

در این مدل‌ها هزینه هر بار سفارش دهی A و هزینه نگهداری هر واحد در دروه h است.

روش‌های حل مدل

این روش‌ها اکثراً به صورت هیوریستیک (ابتکاری) بوده و جواب‌های بهینه برای تمامی تابع‌های هدف ارائه نمی‌دهند. بنابراین برحسب شرایط مدل برخی از روش‌ها جواب‌های بهتری ارائه می‌دهند. این روش‌ها به شرح ذیل می‌باشند.

۱ـ روش دسته به دسته Lot for Lot LFL Method

در این روش در هر دوره به اندازه تقاضای آن دوره سفارش داده می‌شود. در این روش، هزینه‌های نگهداری صفر است و از آنجا که در هر دوره سفارش می‌دهیم، هزینه سفارش‌دهی، حداکثر است.

مثال: تقاضای محصولی به صورت زیر است. برنامه سفارش بر اساس روش؟؟؟ LFL مشخص شده و نقطه سفارش به صورت فلش مشخص گشته است.

هزینه سفارش‌دهی حداکثر است چون برای هر دوره یک سفارش می‌دهیم پس به ازای دوره‌ها هزینه سفارش‌دهی داریم

40	50	30	70	10	90	30	40
↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑
40	50	30	70	10	90	30	40

چون هزینه نگهداری که فقط برای موجودی‌های انتقالی است در اینجا از دوره به دوره
بعد ۰ است چون ما به اندازه مصرف هر دوره سفارش می‌دهیم پس
در انتهای دوره موجودی صفر است پس هزینه نگهداری صفر است

۲ـ روش FOS با Q دلخواه

در این روش مقدار سفارش‌دهی ثابت (Q) است ولی مقدار Q به صورت دلخواه خواهد بود. یعنی هر بار برای دوره‌هایی سفارش می‌دهیم که مجموع تقاضای آنها برابر Q گردد.

مثلاً مقدار سفارش‌دهی ما Q=100 است
ممکن است یک دوره را جواب دهد
ممکن است چند دوره

مثال: $Q = 80$

30	50	40	30	10	25	55	80

↑ ↑ ↑ ↑

80 80 80 80

همان است

مجموع نیازهامان با Q نمی‌خواند

پس مقداری برای دوره‌های بعد داریم پس هزینه نگهداری داریم

۳ـ روش FOS با $Q = \sqrt{\dfrac{2DA}{h}}$

این روش مانند روش قبل است با این تفاوت که $Q = \sqrt{\dfrac{2DA}{h}}$ است. لازم به ذکر است که در این رابطهٔ D برابر میانگین تقاضا در دوره‌ها می‌باشد.

مثال:

$$D = \frac{60 + 30 + 15 + 15 + 20 + 40 + 25 + 35}{8} = 30$$

$$Q = \sqrt{\frac{2DA}{n}} = \sqrt{\frac{2 \times 30 \times 30}{0.5}} = 60$$

60	30	15	15	20	40	25	35

↑ ↑ ↑ ↑

60 60 60 60

۴ـ روش FOI با T دلخواه

در این روش تعداد دوره‌های سفارش‌دهی ثابت است، یعنی سفارش در بازه‌هایی زمانی یکسان دریافت می‌گردد. این بازه زمانی به صورت دلخواه مشخص می‌گردد و در طول برنامه‌ریزی ثابت است. مقدار سفارش در هر بار برابر مجموع تقاضای دوره‌های داخل بازه می‌باشد.

مثال:

$T = 2$

25	15	10	40	55	90	30	20

↑ ↑ ↑ ↑

40 50 145 50

دوره‌ها برای هزینه نگهداری

چون به اندازه ۲ دوره سفارش می‌دهم

برای سفارش اول اینجوری محاسبه می‌شود

۴۰ تا می‌خواهم سفارش می‌دهم. ۲۵ تا برای دوره اول و ۱۵ تا می‌خواهم برای دوره دوم. پس برای اینها ۱۵ تای اول که می‌خواهم دوره دوم مصرف بشود به اندازه 15h هزینه نگهداری داریم

۵ـ روش FOI با $T = \sqrt{\dfrac{2A}{Dh}}$

این روش مانند روش قبل است با این تفاوت که بازه زمانی با توجه به رابطه $T = \sqrt{\dfrac{2A}{Dn}}$ مشخص می‌گردد. در این رابطهٔ D برابر میانگین تقاضا در دوره‌ها می‌باشد.

مثال:

$$D = \frac{15 + 25 + 10 + 60 + 20 + 25 + 45 + 40}{8} = 30 \quad , \quad h = 0.15 \, , \, A = 30$$

$$T = \sqrt{\frac{2A}{Dh}} = \sqrt{\frac{2 \times 30}{30 \times 0.15}} = 2$$

15	25	10	60	20	25	45	40

↑ ↑ ↑ ↑

40 70 45 80

۶ـ روش حداقل هزینه واحد (LUC)

در این روش هدف می‌نیمم کردن هزینه سفارش‌دهی و نگهداری به ازای هر واحد سفارش است

$$UC = \frac{\text{هزینه نگهداری + هزینه سفارش‌دهی}}{\sum_{i=1}^{j} D_i} = \frac{A + h\sum_{i=1}^{j}(i-1)D_i}{\sum_{i=1}^{j} D_i}$$

که در آن j تعداد دوره، A هزینه سفارش‌دهی برای یک دوره، h هزینه نگهداری به ازای هر واحد در دوره و D_i تقاضای دوره i ام می‌باشد.

تا زمانی ادامه می‌دهیم که $\begin{cases} UC(j) < UC(j-1) \\ UC(j) < UC(j+1) \end{cases}$

تا کجا ادامه دهیم که UC(j) کمتر از UC قبل از خودش و از UC بعد از خود کمتر باشد

و در این صورت برای بار اول باید به تعداد دوره سفارش دهیم و محاسبات را برای بارهای دیگر تکرار کنیم.

D_1	D_2	D_3	D_4	D_5	D_6	D_7	D_8
10	25	15	40	30	0	5	10
↑ 50			↑ 70			↑ 15	

روش مهم است
چون هدف min کردن
هزینه هر واحد است

مثال: $A = 100$ و $h = 2$

$$UC(1) = \frac{A+0}{D_1} = \frac{100}{10} = 10$$

$$UC(2) = \frac{A + hD_2}{D_1 + D_2} = \frac{100 + 2 \times 25}{10 + 25} = \frac{150}{35} = 4.28$$

$$UC(3) = \frac{A + h(D_2 + 2D_3)}{D_1 + D_2 + D_3} = \frac{100 + 2 \times 25 + 2 \times 2 \times 15}{10 + 25 + 15} = \frac{210}{50} = 4.2$$

$$UC(4) = \frac{A + h(D_2 + 2D_3 + 3D_4)}{D_1 + D_2 + D_3 + D_4} = \frac{100 + 2 \times 25 + 2 \times 2 \times 15 + 2 \times 3 \times 40}{D_1 + D_2 + D_3 + D_4} = \frac{450}{90} = 5$$

پس برای بار اول برای 3 پریود $(1, 2, 3)$ یعنی $15 + 25 + 10 = 50$ واحد سفارش می‌دهیم.

حال برای بار دوم

$$UC(1) = \frac{A+0}{D_4} = \frac{100}{40} = 2.5$$

$$UC(2) = \frac{A + hD_5}{D_4 + D_5} = \frac{100 + 2 \times 30}{40 + 30} = \frac{160}{70} = 2.29$$

$$UC(3) = \frac{A + h(D_5 + 2D_6)}{D_4 + D_5 + D_6} = \frac{100 + 2 \times 30 + 2 \times 2 \times 0}{40 + 30 + 0} = \frac{160}{70} = 2.29$$

$$UC(4) = \frac{A + h(D_5 + 2D_6 + 2D_7)}{D_4 + D_5 + D_6 + D_7} = \frac{100 + 2 \times 30 + 2 \times 2 \times 0 + 2 \times 2 \times 5}{40 + 30 + 0 + 5} = \frac{80}{75} = 2.4$$

برای بار دوم باز هم به میزان 3 دوره $(4, 5, 6)$ یعنی $0 + 30 + 40 = 70$ واحد سفارش می‌دهیم.

و برای بار سوم:

$$UC(1)=\frac{A+0}{D_7}=\frac{100}{5}=20$$

$$UC(2)=\frac{A+hD_8}{D_7+D_8}=\frac{100+2\times 10}{5+10}=\frac{120}{15}=8$$

برای بار آخر هم 2 دوره یعنی $5+10=15$ واحد سفارش می‌دهیم.

۷ـ روش سیلور ـ میل

در این روش به اندازه تعداد دوره‌ای سفارش می‌دهیم که هزینه نگهداری و سفارش‌دهی هر دوره را می‌نیمم کند. بنابراین تنها تفاوت این روش با روش قبل در این است که مجموع هزینه‌های سفارش‌دهی و نگهداری بر تعداد دوره تقسیم می‌گردد، یعنی:

$$SC(j)=\frac{\text{هزینه نگهداری + هزینه سفارش دهی}}{j}=\frac{A+h\sum_{i=1}^{j}(i-1)D_i}{j}$$

در اینجا هم تا زمانی ادامه می‌دهیم که $\left.\begin{matrix}SC(j)<SC(j-1)\\ SC(j)<SC(j+1)\end{matrix}\right\}$ مانند حالت قبلی

و در این صورت برای بار اول به تعداد j دوره سفارش می‌دهیم و برای بارهای بعد محاسبات را از اول تکرار می‌کنیم.

مثال: $h=2\ ,\ A=100$

10	25	15	40	30	0	5	10
↑			↑			↑	
50			75			10	

$$SC(1)=\frac{A+0}{1}=\frac{100}{1}=100$$

$$SC(2)=\frac{A+hD_2}{2}=\frac{100+2\times 25}{2}=\frac{150}{2}=75$$

$$SC(3)=\frac{A+h\left(D_2+2D_3\right)}{3}=\frac{100+2\times 25+2\times 2\times 15}{3}=\frac{210}{3}=70$$

$$SC(4)=\frac{A+h\left(D_2+2D_3+3D_4\right)}{4}=\frac{100+2\times 25+2\times 3\times 15+2\times 3\times 40}{4}=\frac{450}{4}=112.5$$

برای بار اول به میزان سه دوره یعنی 50 واحد سفارش می‌دهیم. برای بار دوم:

$$S(1)=\frac{A+0}{1}=\frac{100}{1}=100$$

$$SC(2)=\frac{A+hD_5}{2}=\frac{100+2\times 35}{2}=\frac{160}{2}=80$$

$$SC(3)=\frac{A+h\left(D_5+2D_6\right)}{3}=\frac{100+2\times 30+2\times 2\times 0}{3}=\frac{160}{3}=53.3$$

$$SC(4)=\frac{A+h\left(D_5+2D_6+3D_6\right)}{4}=\frac{100*2\times 30+2\times 2\times 0+2\times 3\times 5}{4}=\frac{190}{4}=47.51$$

$$SC(5)=\frac{A+h\left(D_5+2D_6+3D_7+4D_8\right)}{5}=\frac{100+2\times 30+2\times 2\times 0+2\times 3\times 5+2\times 4\times 10}{5}=\frac{270}{5}=54$$

پس برای بار دوم به اندازه 4 دوره یعنی 75 واحد سفارش می‌دهیم.

و برای بار آخر نیز مشخص است که باید برای 1 دوره یعنی 10 واحد سفارش داد.

۸ـ روش حداقل هزینه کل (LTC)

در این روش ملاک تعیین تعداد دوره بهینه، نزدیکی هزینه نگهداری و سفارش‌دهی می‌باشد. یعنی به اندازه تعداد دوره‌ای سفارش می‌دهیم که قدرمطلق فاصله هزینه نگهداری از هزینه سفارش‌دهی از بقیه کمتر باشد. روابط این دو هزینه به صورت زیر است:

$$\text{هزینه نگهداری} = h\sum_{i=1}^{j} D_j(i-1)$$

$$\text{هزینه سفارش‌دهی} = A$$

تا آنجایی ادامه می‌دهیم که قدرمطلق فاصله هزینه نگهداری از هزینه سفارش‌دهی یک دوره از دوره‌ی بعد مطلوبه چون اینجا کمتر باشه

مثال: $h = 2 , A = 100$

10	25	15	40	30	0	5	10
↑		↑				↑	
50		75				10	

دوره	هزینه سفارش‌دهی	هزینه نگهداری	فاصله دو هزینه
J	A	$h\sum_{i=1}^{j} D_i(i-1)$	$\left\|A - h\sum D_i(i-1)\right\|$
1	100	0	100
2	100	$2 \times 25 = 50$	50
3	100	$2 \times 25 + 2 \times 2 \times 15 = 110$	10
4	100	$2 \times 25 + 2 \times 2 \times 15 + 2 \times 3 \times 40 = 350$	250

بنابراین برای بار اول برای 3 دوره و به میزان 50 واحد سفارش داده می‌شود.

دوره	هزینه سفارش‌دهی	هزینه نگهداری	فاصله در هزینه
4	100	0	100
5	100	$2 \times 30 = 60$	40
6	100	$2 \times 30 + 2 \times 2 \times 0 = 60$	40
7	100	$2 \times 30 + 2 \times 2 \times 0 + 2 \times 3 \times 5 = 80$	20
8	100	$2 \times 30 + 2 \times 2 \times 0 + 2 \times 3 \times 5 + 2 \times 4 \times 10 = 160$	60

برای بار دوم برای چهار دوره و به میزان 75 واحد سفارش می‌دهیم و برای آخرین بار برای یک دوره و میزان 10 واحد سفارش خواهیم داد.

۹ـ مدل واگنر ـ وی‌تین

در این مدل، از روش‌های برنامه‌ریزی پویا برای حل مدل استفاده می‌گردد.

مهم

مثال: مقادیر تقاضای کالایی در 10 ماه آینده در جدول زیر نشان داده شده است. اگر هزینه نگهداری هر واحد کالا در هر ماه برابر 2 واحد پولی و هزینه هر بار سفارش‌دهی برابر جدول زیر باشد، چنانچه هر بار به اندازه تقاضای 2 ماه سفارش داده شود، هزینه کل (هزینه نگهداری + هزینه سفارش‌دهی) چقدر خواهد بود؟

هزینه سفارش‌دهی	تعداد سفارش
50 واحد پولی	1–100
80 واحد پولی	101 و بیشتر

ماه	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
تقاضا	40	30	70	40	60	40	50	70	80	60

۱) 1040 واحد پولی ۲) 940 واحد پولی ۳) 820 واحد پولی ۴) 760 واحد پولی

حل: گزینه ۳ صحیح می‌باشد.

از آنجا که هر بار به اندازه تقاضای دو ماه سفارش داده می‌شود، تنها کافی است در هر بار هزینه سفارش‌دهی را از جدول مربوط (جدول هزینه سفارش‌دهی) یافته و با هزینه نگهداری جمع کنیم و هزینه کل را از جمع هزینه‌های هر بار بدست آوریم.

دوره	تعداد سفارش	هزینه سفارش‌دهی	هزینه نگهداری	مجموع هزینه‌ها
1 و 2	$40 + 30 = 70$	50	$30 \times 2 = 60$	110
3 و 4	$70 + 40 = 110$	80	$40 \times 2 = 80$	160
5 و 6	$60 + 40 = 100$	50	$40 \times 2 = 80$	130
7 و 8	$50 + 70 = 120$	80	$70 \times 2 = 140$	220
9 و 10	$80 + 60 = 140$	80	$60 \times 20 = 120$	200
هزینه کل				820

مثال: مقادیر تقاضای محصولی در 10 دوره آینده در جدول زیر آورده شده است:

این سوال مهم

دوره	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
تقاضا	30	60	80	60	50	30	70	100	60	40

اگر هزینه نگهداری هر واحد محصول در هر دوره برابر دو واحد پولی و هزینه هر بار سفارش‌دهی برابر 80 واحد پولی باشد، اولین و دومین سفارش با استفاده از روش حداقل هزینه هر واحد (LUC) چقدر خواهد بود؟

۱) به ترتیب 90 و 80 ۲) به ترتیب 90 و 140 ۳) به ترتیب 30 و 140 ۴) ترتیب 170 و 140

حل: گزینه ۱ صحیح می‌باشد.

$h = 2\,,\ A = 80$

$$UC(j) = \frac{A + h\sum_{i=1}^{j} D_i(i-1)}{\sum_{i=1}^{j} D_i}$$

$$UC(1) = \frac{80 + 0}{30} = \frac{80}{30} = 2.66$$

چون سفارش اول را ما دهیم در حالت بعدی داریم UC(1) برابر با ... و UC(2) برابر با ۲٫۴۲
پس از بعدی خود کم‌تر است پس به اندازهٔ
همان دورهٔ سوم سفارش را دهیم.

$$U(2) = \frac{80 + 2 \times 60}{40 + 60} = \frac{200}{90} = 2.2$$

$$U(3) = \frac{80 + 2 \times 60 + 2 \times 2 \times 80}{30 + 60 + 80} = \frac{520}{170} = 3.06$$

برای بار اول به میزان دوره‌های او ل و دوم یعنی $60 + 30 = 90$ واحد سفارش می‌دهیم.

$$UC(1) = \frac{80 + 0}{80} = 1$$

$$UC(2) = \frac{80 + 2 \times 60}{80 + 60} = \frac{200}{140} = 1.4$$

پس برای بار دوم به میزان یک دوره (دوره ۳) یعنی 80 واحد سفارش می‌دهیم.

مثال: تقاضای محصولی طی پریودهای مختلف (هفتگی) به صورت زیر است. در صورتی‌که هزینه هر بار سفارش 200 تومان و هزینه نگهداری هر واحد محصول در هفته 2 واحد پولی باشد، مقدار اولین سفارش بر طبق روش سیلور ـ میل (Silver – Meal) به چه میزان خواهد بود؟

پریود (هفته)	1	2	3	4	5	6	7	8
مقدار تقاضا	100	50	40	90	150	150	200	100

۱) 100 واحد ۲) 150 واحد ۳) 190 واحد ۴) 280 واحد

حل: گزینه ۲ صحیح می‌باشد.

$$h = 2 , A = 200$$

$$SC(j) = \frac{A + h\sum_{i=1}^{j} D_i(i-1)}{j}$$

$$SC(1) = \frac{200 + 0}{1} = 200$$

$$SC(2) = \frac{200 + 2 \times 50}{2} = \frac{300}{2} = 150$$

$$SC(3) = \frac{200 + 2 \times 50 + 2 \times 2 \times 40}{3} = \frac{460}{3} = 153.3$$

بنابراین سفارش، برای دو هفته و به میزان $50 + 100 = 150$ واحد خواهد بود.

۱۲- پیش‌بینی

یکی از قدم‌های ابتدایی در کنترل موجودی، پیش‌بینی تقاضا در آینده است. پیش‌بینی یک تخمین از میزان تقاضا برای یک یا چند محصول در یک پریود زمانی در آینده است.

روش‌های متنوعی برای پیش‌بینی موجود است که با توجه به حساسیت و دقت مورد نیاز جهت کالای مصرفی باید تکنیک مورد نظر را انتخاب نمود. برخی از این روش‌ها به صورت زیر است.

در این روش‌ها X_i معرف تقاضای واقعی سال i ام و $\hat{X}_i$ معرف پیش‌بینی سال i ام می‌باشد.

۱- روش معدل (میانگین) ساده

در این روش کلیه داده‌های سال‌های گذشته با هم جمع شده و بر مقدار آن تقسیم می‌گردد. مقدار به دست آمده برای پیش‌بینی سال آینده و سال‌های آینده مورد استفاده قرار می‌گیرد.

$$\hat{X}_{t+\ell} = \hat{X}_{t+1} = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_t}{t}$$

این روش صرفا برای داده‌هایی مناسب است که دارای میانگین ثابتی بوده و پیرامون آن میانگین نوسان دارند.

مثال: تقاضا محصولی در 4 ماه اخیر به صورت زیر بوده است. با استفاده از روش میانگین ساده مقدار پیش‌بینی تقاضا برای ماه 9 ام برابر است با:

ماه	1	2	3	4
تقاضا	10	30	20	50

$$\hat{X}_9 = \hat{X}_5 = \frac{10 + 30 + 20 + 50}{4} = \frac{110}{4} = 27.5$$

۲- روش معدل متحرک ساده

در این روش N داده آخر با هم جمع شده و بر تعداد آن تقسیم می‌گردد. این روش برای پیش‌بینی سال بعد و سال‌های بعد مورد استفاده قرار می‌گیرد. اگر در سال جدید داده‌ای اضافه گردد، قدیمی‌ترین داده مورد استفاده حذف می‌گردد. این روش تمام خصوصیات روش قبلی را داراست، یعنی برای داده‌هایی که نوسانات زیاد دارند مناسب نمی‌باشد.

مثال: در مثال فوق در صورتی که $N = 3$ باشد، پیش‌بینی تقاضای ماه 9 ام برابر است با:

$$\hat{X}_9 = \hat{X}_5 = \frac{50 + 20 + 30}{3} = \frac{100}{3} = 33.3$$

یعنی پیش بینی از میزان معدل 3 دورهٔ آخر تخمین زده می‌شود.

۳- روش معدل متحرک تصحیح شده

این روش مانند روش قبل است تنها با برخی اصلاحات در آن روند صعودی و نزولی بودن تقاضا را در نظر می‌گیرد و مقدار عقب افتادگی از روند را به پیش‌بینی اضافه می‌کند.

مهم — بیشتر سوال‌های کنکور از این روش‌ها و روش‌ها است.

۴ـ روش هموار سازی نمایی

در این روش تخمین جدید برابر است با تخمین قدیم به علاوه درصدی از اختلاف بین تخمین قدیم و مقدار واقعی

$$\boxed{\hat{X}_{t+1} = \hat{X}_t + \alpha\left(X_t - \hat{X}_t\right)} \qquad 0 \le \alpha \le 1$$

رابطه فوق را می‌توان به صورت زیر نیز نوشت:

$$\hat{X}_{t+1} = \alpha X_t + (1-\alpha)\hat{X}_t$$

به ضریب α در این روابط ضریب هموارسازی یا ضریب در نظر گرفتن خطا می‌گویند.

ممکن است که پیش‌بینی سال‌های گذشته نیز بر اساس هموارسازی نمایی باشد یعنی:

$$\hat{X}_{t+1} = \alpha X_t + (1-\alpha)\hat{X}_t$$

$$\hat{X}_t = \alpha X_{t-1} + (1-\alpha)\hat{X}_{t-1}$$

$$\hat{X}_{t-1} = \alpha X_{t-2} + (1-\alpha)\hat{X}_{t-2}$$

در این صورت رابطه پیش‌بینی تقاضای سال آینده بر اساس تقاضای سال‌های گذشته به صورت زیر خواهد بود.

$$\hat{X}_{t+1} = \alpha X_t + \alpha(1-\alpha)X_{t-1} + \alpha(1-\alpha)^2 X_{t-2} + \dots + \alpha(1-\alpha)^{t-1}X_1 + (1-\alpha)^t\hat{X}_1$$

مجموع ضریب‌های رابطه فوق برابر 1 می‌باشد یعنی:

$$\alpha + \alpha(1-\alpha) + \dots + \alpha(1-\alpha)^{t-1} + (1-\alpha)^t = 1 \qquad Sum = \frac{\alpha}{1-(1-\alpha)} = 1$$

تصاعد هندسی

همان‌طور که مشاهده می‌شود در این روش هر پیش‌بینی بر اساس پیش‌بینی دوره قبل آن انجام می‌گردد. ممکن است پیش‌بینی دوره قبل نیز بر اساس پیش‌بینی دوره‌های قبل انجام شده باشد. اگر بخواهیم از روش هموار سازی نمایی ساده استفاده کنیم باید یک پیش‌بینی (اولیه) داشته باشیم که بر اساس روشی غیر از روش هموارسازی نمایی محاسبه شده باشد $(\hat{X}_1)$ این پیش‌بینی ممکن است بر اساس N داده قبلی محاسبه شده باشد. هر چه N بیشتر باشد، ضریب هموارسازی (α) کمتر است. برای محاسبه α می‌توان از رابطه زیر استفاده کرد:

$$\alpha = \frac{2}{N+1}$$

در نظر گرفتن خطا یا هموارسازی از پیش‌بینی پایه شروع شده و تا پیش‌بینی سال $t+1$ $(\hat{X}_{t+1})$ ادامه می‌یابد.

لازم به ذکر است که این روش روند صعودی یا نزولی تقاضا را به خوبی در نظر نمی‌گیرد یعنی در صورتی که تقاضا روند صعودی داشته باشد پیش‌بینی انجام شده از این روش همیشه از مقدار واقعی کمتر است و در صورتی که تقاضا روند نزولی داشته باشد این پیش‌بینی بزرگتر از مقدار واقعی خواهد بود.

نکته: هر چه α بیشتر باشد به داده‌های نزدیک (سال‌های اخیر) اهمیت بیشتری داده می‌شود و بالعکس، به عنوان مثال اگر $\alpha = 0.9$ باشد جمع ضریب سه سال اخیر $\alpha + \alpha(1-\alpha) + \alpha(1-\alpha)^2 = 0.999$ خواهد بود و بنابراین به تمام داده‌های بعد از آن تنها به میزان 0.001 اهمیت داده خواهد شد.

مثال: مقدار واقعی تقاضا برای چهار ماه گذشته به صورت جدول زیر است. اگر پیش‌بینی تقاضا برای ماه سوم برابر با 32 باشد و این مقدار بر اساس سه داده قبلی محاسبه شده باشد. پیش‌بینی تقاضای ماه پنجم و ششم بر اساس روش هموارسازی نمایی ساده چقدر می‌باشد.

ماه	1	2	3	4
تقاضا واقعی	20	25	40	42
پیش‌بینی			32	

$$\alpha = \frac{2}{N+1} = \frac{2}{3+1} = \frac{1}{2} = 0.5$$

$$\hat{X}_{t+1} = \alpha X_t + (1-\alpha)\hat{X}_{t-1}$$

$$\hat{X}_4 = 0.5 \times 40 + 0.5 \times 32 = 36$$

$$\hat{X}_5 = 0.5 \times 42 + 0.5 \times 36 = 39$$

بنابراین پیش‌بینی تقاضای ماه پنجم برابر 39 عدد می‌باشد.

$$\hat{X}_6 = 0.5 \times X_5 + 0.5 \times 39$$

همان‌طور که مشاهده می‌شود در آنجا که تقاضای واقعی ماه پنجم مشخص نمی‌باشد بنابراین در روش هموارسازی نمایی نمی‌توان برای دوره‌ای به جز اولین دوره بعدی پیش‌بینی تقاضا نمود.

۵ـ روش هموارسازی نمایی تصحیح شده

این روش مانند روش قبلی است تنها با تصحیح آن روند صعودی و نزولی تقاضا در نظر گرفته می‌شود.

مثال: در کدام‌یک از حالات زیر روش نمو هموار (هموارسازی نمایی) با تصحیح روند استفاده می‌شود؟

۱) مصرف کالا دارای روند افزایش باشد.
۲) مصرف کالا دارای روند کاهش باشد.
۳) مصرف کالا دارای نوسانات زیاد باشد.
۴) هر سه مورد فوق

حل: گزینه ۴ صحیح می‌باشد.

همان‌طور که ذکر گردید، روش همواره سازی نمایی با تصحیح روند برای حالاتی استفاده می‌شود که تقاضا دارای روند افزایشی یا کاهشی یا دارای نوسانات زیاد باشد.

مثال: پیش‌بینی تقاضای کالایی در دوره t با استفاده از روش نمو هموار (هموارسازی نمائی) با ضریب ثابت $\alpha = 0.2$ و $\alpha = 0.3$ برابر است با:

$\alpha = 0.2$		$\alpha = 0.3$	
پیش‌بینی	خطا	پیش‌بینی	خطا
80	5	91	6

پیش‌بینی مصرف دوره $t + 1$ عبارتست از:

۱) 81 واحد
۲) 93 واحد
۳) 96 واحد
۴) 87 واحد

حل: گزینه ۱ صحیح می‌باشد.

ابتدا باید مقدار واقعی تقاضای دوره t را محاسبه کنیم. با توجه به پیش‌بینی و مقدار خطاهای داده شده می‌توان مقدار تقاضای واقعی دوره t را محاسبه کرد.

$\alpha = 0.2 \rightarrow$ مقدار واقعی $\begin{cases} 80 - 5 = 75 \\ 80 + 5 = 85 \end{cases}$

$\alpha = 0.3 \rightarrow$ مقدار واقعی $= \begin{cases} 91 - 6 = 85 \\ 91 + 6 = 97 \end{cases}$

از اعداد فوق برمی‌آید که $X_t = 85$ است. حال باید $\hat{X}_{t+1}$ را با $\alpha = 0.2$ و $\alpha = 0.3$ محاسبه کنیم.

$$\hat{X}_{t+1} = \hat{X}_t + \alpha\left(X_t - \hat{X}_t\right)$$

$$\alpha = 0.2 \Rightarrow \hat{X}_{t+1} = 80 + 0.2(85 - 80) = 81$$

$$\alpha = 0.3 \Rightarrow \hat{x}_{t+1} = 91 + 0.3(85 - 91) = 89.2$$

که تنها 81 در گزینه‌ها موجود است.

مثال: تقاضای واقعی ماهیانه برای 12 ماه قبل محصولی به صورت زیر است اگر پیش‌بینی تقاضا بر اساس متحرک 9 ماهه برای ماه بیست و دوم برابر 190 واحد باشد پیش‌بینی تقاضا را برای ماه بعد (24) بر اساس روش پیش‌بینی هموار سازی نمایی چقدر است؟

ماه	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23
تقاضا	160	180	170	150	180	205	170	160	180	200	195	171

۱) 169　　۲) 176　　۳) 187　　۴) 198

حل : گزینه ۳ صحیح می‌باشد.

$$\alpha = \frac{2}{N+1} = \frac{2}{9+1} = 0.2$$

$$\hat{X}_{t+1} = \hat{X}_t + \alpha\left(X_t - \hat{X}_t\right)$$

$$\hat{X}_{23} = 190 + 0.2(195 - 190) = 191$$

$$\hat{X}_{24} = 191 + 0.2(171 - 191) = 187$$

مثال: مقدار مصرفی واقعی و پیش‌بینی مصرف بر اساس دو روش معدل متحرک و نمو همواره (هموارسازی نمائی) برای دو دوره گذشته طبق جدول می‌باشد. پیش‌بینی مصرف دوره بعد (دوره سوم) چقدر است؟ مهم

دوره	مصرف واقعی	مقدار پیش‌بینی	
		نمو هموار	معدل متحرک
1	30	28	29
2	28	28.4	26

۱) 29.5　　۲) 29　　۳) 28.3　　۴) 27.5

حل : گزینه ۳ صحیح می‌باشد.

از آنجا که N مشخص نمی‌باشد نمی‌توان از روش معدل متحرک برای پیش‌بینی استفاده کرد. برای پیش‌بینی از روش نمو هموار نیز باید α را از روش زیر بدست آوریم:

$$\hat{X}_{t+1} = X_t + \alpha\left(X_t - \hat{X}_t\right)$$

$$\hat{X}_2 = \hat{X}_1 + \alpha\left(X_1 - \hat{X}_1\right) \Rightarrow 28.4 = 28 + \alpha(30 - 28) \Rightarrow \alpha = 0.2$$

$$\hat{X}_3 = \hat{X}_2 + \alpha\left(X_2 - \hat{X}_2\right) = 28.4 + 0.2(28 - 28.4) = 28.32$$

مثال: در پیش‌بینی مصرف قطعات یدکی در یک انبار از روش هموارسازی نمایی (Exponential Smoothing) استفاده شده است. برای کالای B,A مقدار ضریب ثابت هموارسازی نمایی (α) به ترتیب 0.2 و 0.3 منظور شده است. در پیش‌بینی مصرف کدام‌یک از دو کالا به مصارف دوره‌های قبل اهمیت بیشتری داده شده است؟

۱) کالای A ۲) کالای B

۳) جواب بستگی به تغییرات α ندارد. ۴) اطلاعات کافی نیست.

حل : گزینه ۱ صحیح می‌باشد.

هر چه α کمتر باشد به مصارف دوره‌های قبل اهمیت بیشتری داده می‌شود.