دینامیک سیالات محاسباتی (Computational Fluid Dynamic):

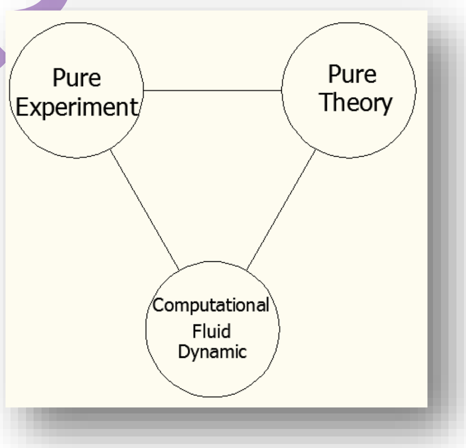
واژگان کلیدی:

دینامیک سیالات محاسباتی،پیوستگی،ممنتوم،انرژی،حجم محدود

مقدمه:

دینامیک سیالات محاسباتی چرا؟

زمان:قرن بیست و یکم،مکان :یک فرودگاه بزرگ در هر جای دنیا.موضوع:یک هواپیما بزرگ و تمیز وارد یک باند می شود،از زمین بلند شده و بسرعت اوج می گیرد و از نظرها دور می شود.این هواپیما درطول چند دقیقه شتاب گرفته و سرعتش به بیش از 5 برابر سرعت صوت می رسد و در حالیکه هنوز در اتمسفر زمین قرار دارد موتورهای رم جت قوی احتراقی مافوق صوت هماپیما را چنان پیش می برند تا اینکه سرعت آن به حدود 26000 فوت بر ثانیه یعنی معادل سرعت الکترون در حین گردش به دور هسته برساند.اینها آیا تنها یک رویا هستند؟نه،در واقع این اساس یک هواپیمای ماورا جو است که موضوع تحقیق آن در دهه 1980 و 1990 در چندین کشور بوده است.در نتیجه در طول قرن بیستم مطالعه و کاربرد دینامیک سیالات از یک طرف شامل کاربرد تئوری محض و از طرف دیگر آزمایش محض می گردید.اگر ما مثلا در سال 1960 دینامیک سیالات یاد می گرفتیم در دنیای دو بعدی تئوری و آزمایش سیر می کردیم.در حالی که پیدایش کامپیوترهای دیجتال با سرعت زیاد توام با تکامل الگوریتم های دقیق عددی برای حل مسائل فیزیکی بوسیله کامپیوتر سبک و مطالعه و کاربرد دینامیک سیالات را در امروز دگرگون کرده است.



شکل 3-1(نیاز مندی های محاسبات)

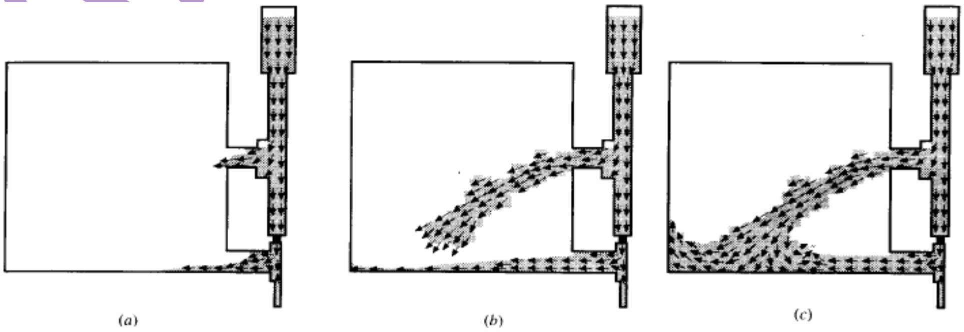
از لحاظ سلسه مراتب،دینامیک سیالات محاسباتی بُعد سومی را ارائه می کند و نه بیش از آن.CFD با ظرافت و هم آهنگی دو تئوری محض و آزمایش محض را بهم نزدیک میکند ولی هرگز جایگزین یکی از آن دو بعد نمی شود.تئوری و آزمایش همیشه مورد نیاز است.پیشرفت آینده دینامیک سیالات بستگی به موازنه ی صحیح این سه عامل خواهد داشت،بطوریکه CFD به تفسیر و تفهیم نتیج تئوری و آزمایش کمک می کند و همچنین در مورد دو عامل دیگر.

CFD وسیله ای برای تحقیق :

نتایج CFD مستقیما با نتایج تونل باد حاصله در آزمایشگاه قابل مقایسه است.CFD و تونل باد هر دو یک سری اطلاعات برای ترکیب خاصی از جریان در عدد ماخ مختلف،عدد رینولدز مختلف و یا ...ارائه می دهند.اما بر خلاف تونل باد که معمولا یک وسیله سنگین و دست وپا گیر است یک برنامه کامپیوتری مثلا در قالب یک دیسک براحتی قابل حمل است.

کاربرد CFD در حوزه طراحی چیست؟

- **کاربرد CFD در اتومبیل سازی:**برای بهتر کردن عملکرد اتومبیل ها و کامیون ها از لحاظ کیفیت محیطی،مصرف سوخت و غیره صنعت اتومبیل سازی استفاده از ابزارهای طراحی و تحقیقات پیشرفته تکنولوژیکی را افزایش داده است.چه در مطالعه جریان خارجی همچون بررسی آیرودینامیک و چه در بررسی جریان داخلی همچون جریان موتور احتراق ماشین CFD به مهندسین اتومبیل سازی کمک می کند که تحولهای فیزیکی جریان سیال را بهتر درک کنند و اتومبیلهای بهتری طراحی نمایند.
- **کاربرد CFD در تولید صنعتی** :در اینجا فقط به دو نمونه از کاربرد های بیشمار CFD در تولید صنعتی اشاره می شود.شکل زیر قالبی را نشان می دهد که در حال پر شدن توسط آهن مذاب می باشد.میدان جریان برای آهن مذاب

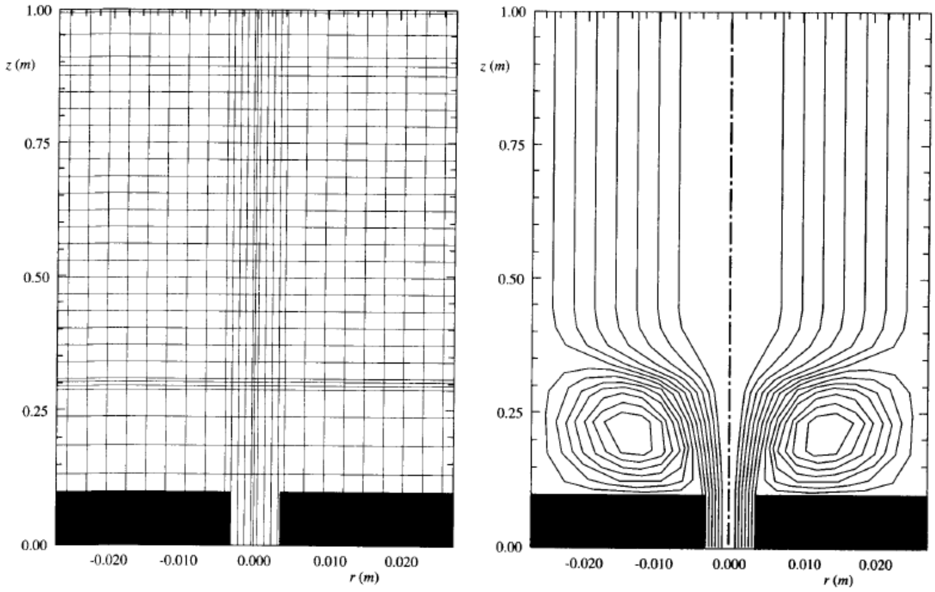


شکل 3-2(کاربرد CFD در دیگر حوزه ها)

برای آهن مذاب بصورت تابعب از زمان محاسبه شده است.آهن مذاب از طریق دو مجرای جانبی در سمت راست وارد حفره می شود،یکی از مجاری در مرکز و دیگری در پایین دیواره حفره می باشد.آنچه در

شکل بالا می بینیم نتایج CFD برای میدان سرعت است که براساس الگوریتم حجم محدود محابه شده است.

مثال دیگری از CFD در عملیات صنعتی به تولید مواد مرکب سرامیک مربوط می شود.یکی از روش های تولید شامل تکنیک نفوذ بخار شیمیایی است که در آن یک ماده گازی از یک متخلخل می گذرد و بر روی فیبرهای محیط رسوب می کند و سرانجام یک شبکه پیوسته از ماده مرکب را تشکیل می دهد.بطور اخص در مورد ترکیبات سیلیکان کارباید SiC سرعت و روشی که این ماده در فضاهای خالی موجود در اطراف فیبرها رسوب می کند بسیار مهم است.اخیرا با استفاده از CFD رسوب SiC را دریک شیمیایی رسوب بخار مدل سازی کرده اند.توزیع شبکه محاسباتی را در شکل زیر مشخص است.همچنین تصویر دیگر مربوط به الگوی خطوط جریان محاسبه شده است. محاسبات انجام شده بر مبنای حل معادلات جریان از روش حجم محدود به دست آمده است.این محاسبات تاکیدی بر کاربرد CFD به عنوان یک ابزار برای تحقیق بوده و نشان می دهد چگونه داده های حاصل از CFD مستقیما می تواند در کاربردهای صنعتی موثر باشد.

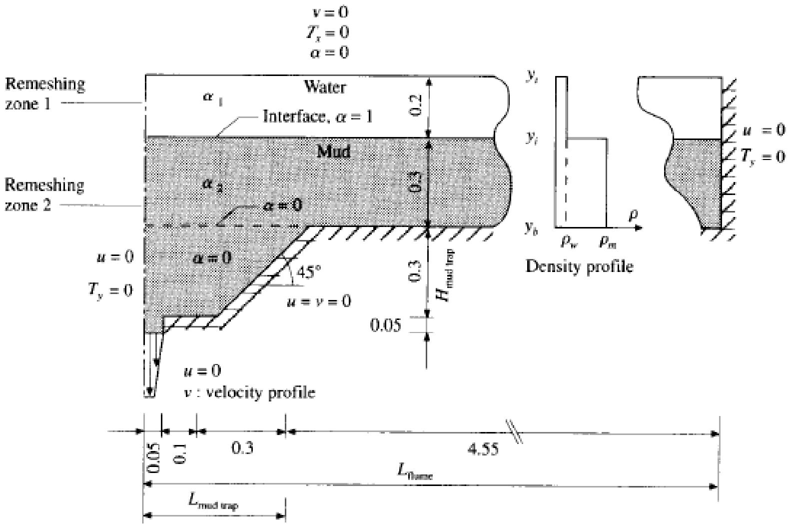


شکل3-3(مش ها بر روی صفحه سرامیک و نحوه ی جریان مواد)

- **کاربرد CFD در مهندسی شهرسازی:**

مسائل مربوط به جریان رودخانه ها،دریاچه ها،خلیج های باریک و غیره موضوع تحقیقات CFD می باشد.به طور مثال می توان پمپ کردن گِل از یک منبع زیر آب را به گونه ای که در شکل زیر مشخص است مطرح نمود.در اینجا یک لایه آب روی یک لایه گِل نشسته است،قسمتی از گل گرفته می شود و از قسمت پایین سمت چپ به بیرون مکیده

میشود.این تنها نصف تصویر است.نصفه دیگر متقارن نصفه اول است که در مجموع منبع گِل را نشان می دهد.

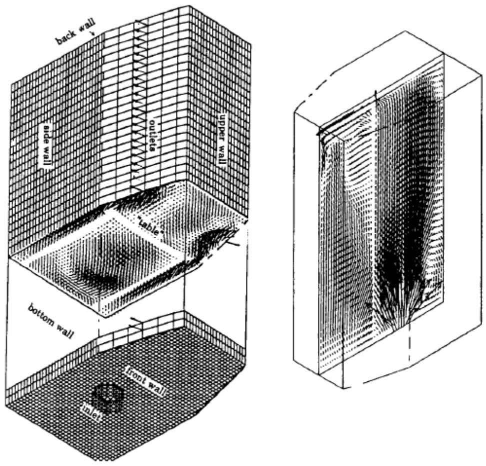


شکل 3-4 (حوزه های مختلف در ارتباط با CFD)

بموازات مکیده شدن گِل از پایین و سمت چپ منبع یک حفره خالی در لایه گِل تشکیل می شود که توسط آب پر میگردد.تنها حرکت آب بر اثر پر شدن این حفره ایجاد میشود.میدان سرعت محاسبه شده توسط CFD برای گِل و آب در یک لحظه معین از زمان دیده می شود.

- **کاربرد CFD در مهندسی محیط زیست :**

عملیات گرمایش،تهویه مطبوع و گردش عمومی هوا در ساختمانها همگی در حوزه عملکرد CFD می باشند.بعنوان مثال کوره نشان داده شده در شکل زیر را در نظر بگیرید.که از سوخت پروپان استفاده می کند.میدان سرعت محاسبه شده در این کوره همینطور در تصویر کناری مشخص است.بردارهای سرعت منشا گرفته از نقاط شبکه در یک صفحه قائم دیده می شوند.این نتایج از محاسبات اختلاف محدود است.چنین کاربردهایی از CFD اطلاعاتی برای طراحی کوره ها با راندمان حرارتی بیشتر و آلودگی کمتر در اختیار طراح قرار می دهد.



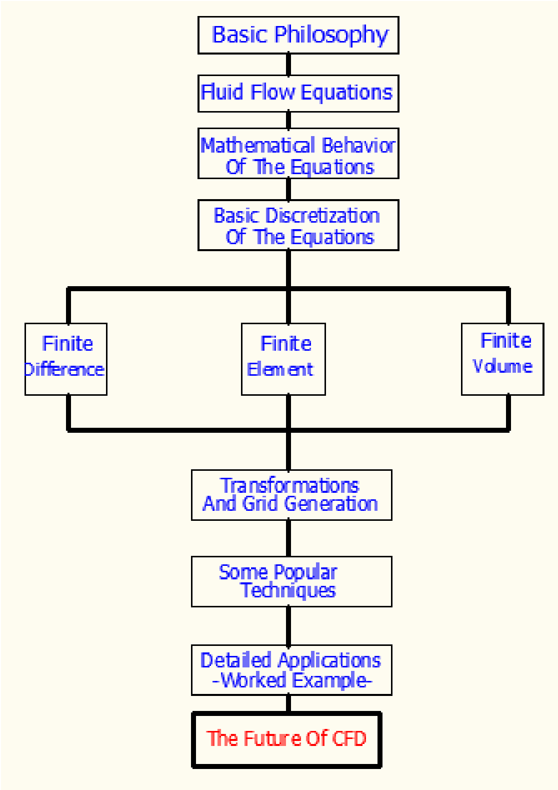
شکل 3-5 (کاربرد CFD)

برخی دیگر از کاربردهای CFD عبارت است از:

- **هوافضا**
- **هواشناسی**
- **دریانوردی**

CFD چیست؟

برای پاسخ دادن به این سوال می دانیم خصوصیات فیزیکی جریان یک سیال به وسیله 3 اصل اساسی کنترل می شود:
1.اصل بقای جرم2.قانون دوم نیوتن3.بقای انرژی.این سه اصل فیزیکی را می توان برحسب معادلات بر پایه ی ریاضی بیان نمود که در عمومی ترین حالت معادلات فرم انتگرالی و دیفرانسیلی دارند.CFD هنر جایگزین کردن انتگرالها و مشتقات جزیی با عبارات ساده جبری است.این معادلات در فرم جدید قابل حل بوده و جوابهای عددی برای مشخصه های میدان جریان در نقاط مشخص از زمان و فضا ارائه می دهند.محصول نهایی CFD مجموعه ای از اعداد است در حالی که راه حل های تحلیلی به فرم بسته ای منجبر می شود.البته آنچه که رشد CFD را هموار ساخته پیشرفت در ساخت کامپیوترها با سرعت های بالا پردازنده ها است.راه حل های CFD معمولا مستلزم دستکاری مکرر چندین هزار حتی چندین میلیون عدد است،کاری که با دست و بدون کامپیوتر امکان پذیر نیست.بنابر این پیشرفت CFD و کاربردهای آن در مورد مسائلی با جزییات و پیچیدگی ها بیشتر نهایتا به پیشرفت در سخت افزار کامپیوتر مربوط می شود مخصوصا به ظرفیت حافظه و سرعت عملیات.از این روست بیشتر نیرو برای بهتر ساختن سوپر کامپیوتر ها توسط جامعه CFD اعمال می شود.



شکل 3-6 (روش سی اف دی)

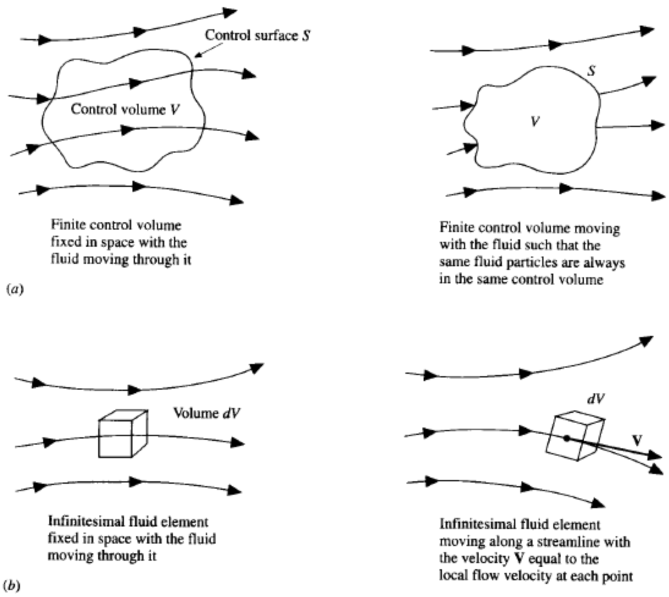
معادلات مشخصه دینامیک سیالات :

CFD بر پایه معادلات مشخصه دینامیک سیالات استوار است،این معادلات شامل بقای جرم،ممنتوم و انرژی است.همچنین در قبل تر بیان شده CFD جای گذاری عبارت جبری جای معادلات انتگرالی و دیفرانسیلی معادلات نام برده است.

مفهوم حجم کنترل محدود:

یک میدان جریان در حالت کلی، در نظر می گیریم مانند شکل زیر(قسمتa) بوسیله خطوط جریان مشخص شده باشد.فرض می کنیم یک حجم بسته به داخل ناحیه محدودی از جریان کشیده می شود.این حجم بسته حجم کنترل نامیده می شود و با حرف v مشخص می گردد.سطح بسته ای که این حجم را محدود می کند سطح کنترل نامیده می شود و با حرف S مشخص می گردد.حجم کنترل ممکن است در فضا ثابت شده باشد و سیال از داخل آن عبور می کند مانند تصویر سمت چپ. سوی دیگر حجم کنترل ممکن است با سیال حرکت کند به قسمی که ذرات سیال در داخل آن همواره یکسان باشند،مانند

تصویر سمت راست.در هر حالت حجم کنترل یک ناحیه نسبتا بزرگ و محدود از جریان است.اصول اساسی فیزیک بر روی سیال داخل حجم کنترل اعمال می شود و اگر حجم کنترل در فضا ثابت باشد این اصول بر روی سیال در حال عبور از سطح کنترل اعمال می شود.بنابراین بجای اینکه تمام میدان جریان را تحت مطالعه قرار دهیم با مدل حجم کنترل توجه ما فقط به قسمتی از سیال در ناحیه ی محدودی از میدان جریان محدود می شود.معادلات جریان سیال که مستقیما از اعمال اصول اساسی فیزیک بر روی حجم کنترل بدست می آید به فرم انتگرالی هستند. معادلات مشخصه به فرم انتگرالی را می توان به طور غیر مستقیم به معادلات دیفرانسیل جزیی تبدیل کرد.معادلات بدست آمده برای حجم کنترل محدود ثابت در فضا (سمت چپ)به شکل انتگرالی یا دیفرانسیلی اصطلاحا معادلات بقایی نامیده می شوند.معادلات بدست آمده برای حجم کنترل محدوده متحرک با سیال (سمت راست شکل)به شکل انتگرالی یا دیفرانسیلی اصطلاحا غیر بقایی نامیده می شوند.



شکل 7-3 (المان محدود از حجم)

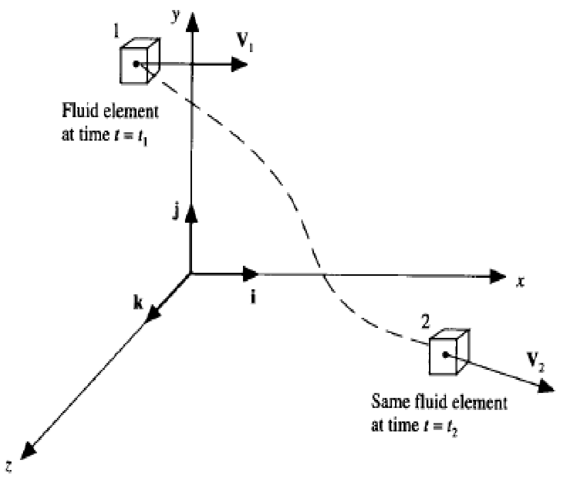
المان بی نهایت کوچک سیال :

یک میدان جریان در حالت کلی در نظر می گیریم که مانند شکل بالا قسمت b بوسیله خطوط جریان مشخص شده باشد.یک المان بی نهایت کوچک سیال با حجم $\partial\vartheta$ در میدان جریان در نظر می گیریم.المان سیال بی نهایت کوچک است،به عبارت دیگر $\partial\vartheta$ همان دیفرانسیل حجم است که در ریاضی عمومی تعریف میشود.در عین حال این المان به اندازه کافی بزرگ است که تعداد زیادی مولکول را در خود جای دهد به قسمتی که بتوان به آن **محیط پیوسته** اطلاق کرد.المان سیال ممکن است در فضا ثابت شده باشد و سیال از داخل آن عبور نماید مانند شکل چپ قسمت b در بالا.از سوی دیگر المان سیال ممکن است با بردار سرعت V که سرعت در هر نقطه از سیال است در امتداد خط جریان در حال حرکت باشد.در اینجا نیز به جای اینکه تمام میدان جریان را مورد مطالعه قرار دهیم،اصول اساسی فیزیک بر روی المان

بی نهایت کوچک سیال اعمال می گردد و مستقیما به معادلات اساسی جریان به شکل معادلات دیفرانسیل جزیی منجبر می شود.بعلاوه معادلات دیفرانسیل جزیی که مستقیما بر اساس المان سیال ثابت شده در فضا بدست آمده باشد معادلات بقایی نامیده می شوند.معادلات دیفرانسیل جزیی که مستقیما بر اساس المان سیال متحرک بدست آمده باشند معادلات غیر بقایی خوانده می شوند.

مشتق مادی(شدت تغییر آنی نسبت به زمان):

قبل از بدست آوردن معادلات مشخصه لازم است یک واژه نامه درست کنیم که متقابلا در آیرودینامیک کاربرد داشته باشد.تصویر نشان داده شده در سمت راست شکل مذکور در قسمت b یعنی المان بی نهایت کوچک سیال که همراه جریان سیال حرکت می کند به عنوان مدل جریان انتخاب می شود.حرکت این المان سیال با جزییات بیشتر در شکل زیر تصویر شده است.در اینجا المان سیال در فضای دکارتی حرکت می کند.بردارهای یکه در امتداد x وy وz به ترتیب i،j وk نامیده می شود.بردار میدان سرعت در این فضای دکارتی بصورت زیر تعریف:



شکل3-8

$$V = u_i + v_j + w_k$$

$$u = u(x, y, z, t)$$

$$v = v(x, y, z, t)$$

$$w = w(x, y, z, t)$$

که در آن مولفه های x وy وz سرعت است.

در اینجا جریان کاملا یکنواخت است که در آن u و v و w تابع مکان و زمان می باشند.بعلاوه میدان دانسیته بصورت زیر تعریف خواهد شد:

$$\rho = \rho(x, y, z, t)$$

در لحظه t_1 المان سیال در نقطه 1 قرار دارد،در این نقطه دانسیته المان سیال برابر زیر است:

$$\boldsymbol{\rho_1} = \rho(x_1, y_1, z_1, t_1)$$

در یک زمان بعد یعنی t_2،همین سیال به نقطه 2 منتقل شده است،و دانسیته المان سیال به شکل زیر خواهد بود:

$$\boldsymbol{\rho_2} = \rho(x_2, y_2, z_2, t_2)$$

می توان این تابع را در یک بسط تیلور حول نقطه 1 بسط داد،در نتیجه خواهیم داشت:

$$\rho_2 = \rho_1 + \left(\frac{\partial\rho}{\partial x}\right)_1 (x_2 - x_1) + \left(\frac{\partial\rho}{\partial y}\right)_1 (y_2 - y_1) + \left(\frac{\partial\rho}{\partial z}\right)_1 (z_2 - z_1) + \left(\frac{\partial\rho}{\partial t}\right)_1 (t_2 - t_1) + (\text{higher} - \text{order terms})$$

با تقسیم بر t_1 و t_2 و اغماض از جملات با توان بیشتر خواهیم داشت:

$$\frac{\rho_2-\rho_1}{t_2-t_1} = \left(\frac{\partial\rho}{\partial x}\right)_1 \frac{x_2-x_1}{t_2-t_1} + \left(\frac{\partial\rho}{\partial y}\right)_1 \frac{y_2-y_1}{t_2-t_1} + \left(\frac{\partial\rho}{\partial z}\right)_1 \frac{z_2-z_1}{t_2-t_1} + \left(\frac{\partial\rho}{\partial t}\right)_1$$

سمت چپ معادله در واقع شدت متوسط تغییر دانسیته المان سیال نسبت به زمان وقتی که از نقطه 1 به نقطه 2 می رود است.در حالت حدی وقتی t_2 به t_1 میل می کند این جمله می شود:

$$\lim_{t_2 \to t_1} \frac{\rho_2 - \rho_1}{t_2 - t_1} \equiv \frac{D\rho}{Dt}$$

$\frac{D\rho}{Dt}$ علامتی است برای شدت آنی تغییر دانسیته المان سیال نسبت به زمان.بنا به تعریف علامت $\frac{D}{Dt}$ را مشتق مادی می نامند. بنابراین $\frac{D\rho}{Dt}$ عبارت است از تغییر دانسیته یک المان دلخواه از سیال در حین حرکت در فضا نسبت به زمان.در اینجا چشم ما در تعقیب المان است که دارد حرکت می کند و ما داریم می بینیم که دانسیته المان از سیال از لحظه ی 1 شروع به حرکت می کند و تغییر می کند.در حالیکه $\left(\frac{\partial\rho}{\partial t}\right)_1$ از لحاظ فیزیکی تغییر دانسیته در نقطه ثابت 1 می باشد.اگر از معادله فوق از t_2 به t_1 حد بگیریم.

$$\frac{D\rho}{Dt} = u\frac{\partial\rho}{\partial x} + v\frac{\partial\rho}{\partial y} + w\frac{\partial\rho}{\partial z} + \frac{\partial\rho}{\partial t}$$

اگر به معادله بالا بنگریم می توانیم رابطه ی برای مشتق کلی نسبت به زمان در مختصات دکارتی ایجاد کنیم:

$$\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{Dt}}=u\frac{\partial}{\partial x}+v\frac{\partial}{\partial y}+w\frac{\partial}{\partial z}+\frac{\partial}{\partial t}$$

ضمنا در مختصات دکارتی می توانیم اپراتور برداری∇ را بصورت زیر تعریف کرد:

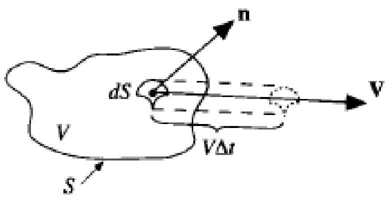
$$\nabla=\boldsymbol{i}\frac{\partial}{\partial x}+\boldsymbol{j}\frac{\partial}{\partial y}+\boldsymbol{k}\frac{\partial}{\partial z}$$

بنابراین معادله مذکور را میتوان بصورت زیر تعریف کرد:

$$\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{Dt}}\equiv\frac{\partial}{\partial t}+(V.\nabla)$$

دیورژانس سرعت و مفهوم فیزیکی آن:

در قسمت قبل مشتق مادی را تعریف کردیم،زیرا معادلات مشخصه جریان غالبا بر حسب مشتق مادی بیان می شوند و لازم است درک فیزیک درستی از آن داشته باشیم.یک حجم کنترل در نظر میگیریم که با جریان حرکت کند،این حجم کنترل وقتی که با جریان سیال حرکت می کند همواره از ذرات سیال یکسانی تشکیل شده است.بنابراین جرم ثابت است یعنی بر حسب زمان تغییر نمی کند. اما وقتی که حجم کنترل به نواحی مختلف جریان با ρ های مختلف حرکت می کند،حجم آنϑ و سطح آن S بر حسب زمان تغییر خواهد کرد.بعبارت دیگر این حجم کنترل متحرک با جرم ثابت مرتبا در حال افزایش و کاهش است.و شکل آن بر حسب زمان مدام تغییر میکند.



یک المان بی نهایت کوچک از سطح مانندds را در نظر می گیریم که با سرعت موضعیV مطابق شکل روبرو در حال حرکت است.

تغییر حجم این حجم کنترل $\Delta\vartheta$ بر اثر تغییر المان ds در فاصله زمانی Δt برابر است با حجم استوانه ای که سطح قاعده ی آن ds و ارتفاع آن $(V\Delta t).n$ است که در آن n بردار واحدی است عمود بر سطح کنترل در جایی که ds انتخاب شده است.

$$\iint(\mathrm{V}\Delta\mathrm{t}).\mathrm{d}\boldsymbol{s}$$

اگر این انتگرال را بر Δt تقسیم کنیم حاصل تقسیم عبارت است از شدت تغییر حجم داخل حجم کنترل نسبت به زمان که با علامت $\frac{D\vartheta}{Dt}$ مشخص می شود،بعبارت دیگر:

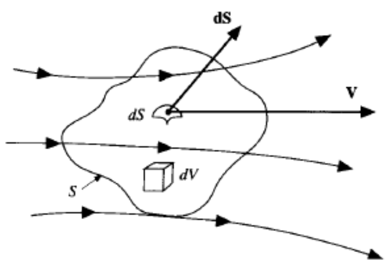
$$\frac{D\vartheta}{Dt}=\frac{1}{\Delta t}\iint(V\Delta t).d\boldsymbol{s}=\iint V.d\boldsymbol{s}$$

معادله پیوستگی:

در اینجا فلسفه تشریح معادله پیوستگی را دنبال می کنیم.یعنی یک اصل فیزیکی را بیان می کند و دو آن را در مورد مدل مناسبی از جریان بکار می بریم و معادله ای بدست می آوریم که بیان کننده اصل فیزیکی مورد نظر باشد.این معادله را معادله پیوستگی می نامند.می خواهیم پرده از نکات مبهم بدست آوردن معادله مشخصه جریان ممکن است پیش آید برداریم.بعبارت دیگر معادله پیوستگی را از چهار روش مختلف بدست می آوریم و مستقیما چهار شکل مختلف از معادله را پیدا می کنیم.سپس این چهار شکل مختلف معادله را بطور غیر مستقیم دستکاری می کنیم و نشان می دهیم که همه ی آنها در واقع یک معادله هستند.به علاوه معادلات بقایی و غیر بقایی را تشخیص داده و سعی می کنیم مفهوم فیزیکی آنها را بیان نماییم.

مدل حجم کنترل محدود ثابت شده در فضا:

مدل جریان نشان داده شده در فضا که در بالا نشان داده شد را در نظر می گیریم،این مدل شامل یک حجم کنترل با شکل دلخواه و اندازه محدود میباشد.حجم کنترل در فضا ثابت شده است.سطحی که این حجم کنترل را احاطه می کند سطح کنترل نامیده می شود.سیال از داخل حجم کنترل عبور می کند و سطح کنترل را قطع می نماید.این مدل جریان با جزییات بیشتر در شکل روبرو مشخص است.در یک نقطه روی سطح کنترل در شکل،سرعت جریان V و بردار المان سطح dS می باشد.همچنین فرض می کنیم dv یک المان حجم در داخل حجم کنترل می باشد.اصل بقا جرم در مورد این حجم کنترل عبارت است از :



شدت زمانی کاهش جرم داخل حجم=جریان جرم خالص خروجی از حجم کنترل

B=C

که در آن B و C به ترتیب علائم ساده ای برای عبارات سمت چپ و راست معادله نام برده است.نخست برای B بر حسب کمیتهای نشان داده شده در شکل بالا پیدا می کنیم.جریان جرمی یک سیال متحرک در حال عبور از یک سطح ثابت برابر است با حاصلضرب دانسیته سیال در مساحت سطح در مولفه ی سرعت عمود بر سطح.بنابراین المان جرمی جاری از سطح ds می شود:

$$\rho V_n dS = \rho V dS$$

با عنایت به شکل بالا و بر حسب قرار داد dS همواره در جهت خارج شدن از حجم کنترل می باشد.بنابراین وقتی V نیز به سمت خارج شدن از سطح کنترل باشد،حاصلضرب ρVdS مثبت است.ضمنا وقتی V در جهت خارج شدن از حجم کنترل است جریان جرم از لحاظ فیزیکی در حال خارج شدن از حجم کنترل بوده که اصطلاحا جریان خروجی نامیده می شود.بنابراین ρVdS مثبت یعنی جریان خروجی از سوی دیگر وقتی V در جهت وارد شدن به حجم کنترل است،ρVdSمنفی است.هنگامیکه V نیز در جهت وارد شدن به حجم کنترل باشد جریان جرم از لحاظ فیزیکی در جهت وارد شدن به حجم کنترل خواهد بود،که اصطلاحا جریان ورودی نامیده میشود.بنابراین ρVdS منفی نشانگر جریان ورودی خواهد بود.جریان خالص جرم خروجی از تمام حجم کنترل از طریق سطح کنترل S برابر است با حاصلجمع المان های جریان جرم بر روی تمامی سطح S به قسمی که در معادله بالا تعریف شده.در حالت حدی این حاصلجمع به یک انتگرال روی سطح تبدیل میشود که از لحاظ فیزیکی با عبارت بکار رفته در سمت چپ معادله یعنی**B**برابر است:

$$B = \iint \rho V . dS$$

حال سمت راست معادله یعنی C را در نظر می گیریم. جرم کل داخل حجم کنترل برابر است با :

$$\iiint_{\vartheta} \rho d\vartheta$$

شدت زمانی افزایش جرم داخل ϑ برابر است با :

$$\frac{\partial}{\partial t} \iiint_{\vartheta} \rho d\vartheta$$

شدت زمانی کاهش جرم داخل ϑ قرینه مقدار فوق است :

$$-\frac{\partial}{\partial t} \iiint_{\vartheta} \rho d\vartheta = \mathbf{C}$$

حال از معادلات بالا براحتی می توان نتیجه گرفت :

$$\iint_{s} \rho V . dS = -\frac{\partial}{\partial t} \iiint \rho d\vartheta$$

یا :

$$\frac{\partial}{\partial t}\iiint_{\vartheta}\rho d\vartheta+\iint_{s}\rho V.dS=0$$

معادله فوق را شکل انتگرالی معادله **پیوستگی** است.این معادله بر اساس یک حجم کنترل محدود و ثابت شده در فضا بدست آمده است.فرض محدود بودن حجم کنترل باعث شد که معادله مستقیما به شکل انتگرالی بدست آید.این حقیقت که حجم کنترل در فضا ثابت است به این نتیجه منجبر می گرددکه معادله به شکل انتگرالی خاص که به آن معادله بقایی گفته می شود به دست می آید.شکلهایی از معادلات مشخصه جریان که مستقیما از مدل جریان در فضا بدست آمده باشند طبق تعریف معادله بقایی نامیده می شود.

مدل حجم کنترل محدود و متحرک با سیال :

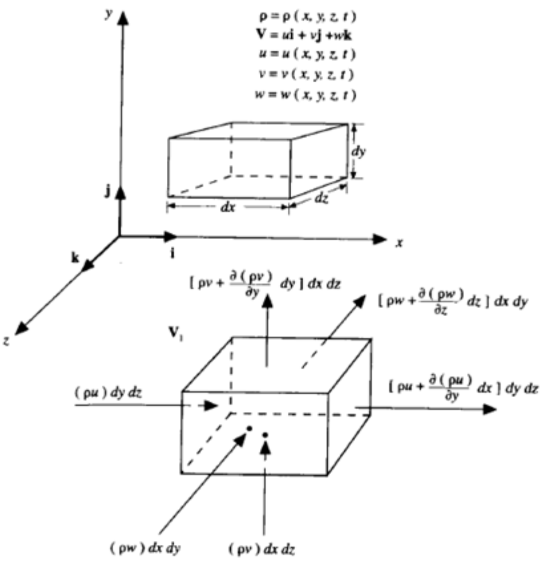
مدل جریان روی سطح کنترل را با دیگر در نظر بگیرید.این حجم کنترل ضمن اینکه همراه با سیال حرکت می کند همواره از یک سری المانهای جرم قابل تشخیص و ثابت تشکیل شده است،بعبارت دیگر حجم کنترل متحرک دارای جرم ثابت است.از سوی دیگر وقتی این جرم ثابت به سمت پایین جریان حرکت می کند،شکل و حجم کنترل در حالت کلی ممکن است تغییر کند.یک المان بینهایت کوچک حجم $d\vartheta$ در داخل این حجم کنترل محدود در نظر می گیریم.جرم این المان بینهایت کوچک برابر $\rho V d\vartheta$ می باشد که در آن ρ دانسیته موضعی سیال است.بنابراین جرم کل حجم کنترل عبارت است از:

$$Mass=\iiint_{\vartheta}\rho d\vartheta$$

در معادله ی بالا از تمام حجم داخل حجم کنترل ϑ انتگرال گرفته شده است.در ضمن باید توجه داشت که وقتی حجم کنترل به سمت پایین جریان حرکت می کند ϑ تغییر می کند.از سوی دیگر اصل بقا جرم در مورد این مدل جریان می گوید در معادله اخیر جرم ثابت است هر چند که حجم کنترل همراه جریان حرکت نماید.حال معنی فیزیکی مشتق مادی را که در قبل بحث کردیم به یاد می آوریم:شدت تغییر زمانی هر خاصیتی از یک المان سیال وقتی که این المان بهمراه جریان حرکت می کند.چون حجم کنترل محدود از تعداد نامحدودی المان بینهایت کوچک سیال تشکیل شده است که همگی دارای جرم ثابت و بدون تغییر هستند و چون تمام مشتقات واقعی مربوط به این جرمهای ثابت برابر صفر است،معادله اخیر در مورد این حجم کنترل بصورت زیر بیان می شود؛

$$\frac{D}{Dt}\iiint_{\vartheta}\rho d\vartheta=0$$

معادله ی بالا فرم انتگرالی معادله ی پیوستگی است.که معادلات اخیر پیوستگی که بیان شد اندکی متفاوت است.این معادله بر مبنای یک حجم کنترل محدود و متحرک با سیال به دست آمده.فرض محدود بودن حجم کنترل باعث شد که معادله مستقیما به شکل انتگرالی بدست آید.این حقیقت که حجم کنترل همراه با سیال حرکت می کند باین نتیجه منجبر می گردد که معادله بالا به شکل انتگرالی خاص که به آن معادله ی غیر بقایی گفته می شود به دست آید.معادلات مشخصه جریان که مستقیما از مدل جریان متحرک با جریان بدست آمده باشند طبق تعریف معادلات غیر بقایی نامیده می شدند.



مدل جریان نشان داده شده برای یک المان بینهایت کوچک سیال ثابت شده در فضا مطابق شکل زیر در نظر میگیریم.در اینجا برای سهولت یک سیستم مختصات دکارتی در نظر میگیریم که در آن سرعت و دانسیته تابعی از x،y،zوt می باشند.در فضای (x,y,z) یک المان بی نهایت کوچک با ابعاد dx، dyو dz ثابت شده است،جریان جرم از داخل این المان عبور میکند.وجوه چپ و راست این المان را که عمود بر محور x هستند در نظر می گیریم.سطح این وجوه dydz میباشد.جریان جرم از وجه سمت چپ $\rho udydz$ می باشد.چون سرعت ودانسیته تابع موقعیت هستند مقادیر فلوی جرم در وجوه چپ و راست المان متفاوت خواهد بود.در واقع اختلاف در فلوی جرم بین این دو وجه عبارت است از $\left[\frac{\partial(\rho u)}{\partial x}\right]dx$.بنابراین جریان جرم از وجه سمت راست را می توان بصورت زیر بیان نمود:

$$\left\{\rho u+\left[\frac{\partial(\rho u)}{\partial x}\right]dx\right\}dydz$$

جریان از وجوه سمت چپ و راست در قسمت پایین شکل بالا نشان داده شده است.با پروسه مشابهی جریان جرم از وجه پایینی و بالایی که عمود بر محور y به ترتیب عبارت است از $\left\{\rho v+\left[\frac{\partial(\rho v)}{\partial y}\right]dy\right\}dxdz$ و $(\rho v)dxdz$.به همین ترتیب جریان از وجوه جلو و عقب که عمود بر محور z هستند بترتیب عبارتند از $\left\{\rho w+\left[\frac{\partial(\rho w)}{\partial z}\right]dz\right\}dxdy$ و $(\rho w)dxd$. باید بدانیم u،v وw طبق قرار داد به ترتیب در جهت مثبت x،yوz مثبت هستند.بنابراین جهت های نشان داده شده در شکل جریانهای جرم ورودی و خروجی از حجم کنترل را نشان می دهند.اگر جریان جرم خالص خروجی از حجم کنترل را مثبت در نظر بگیریم،برای جریان خالص خروجی در جهت x خواهیم داشت :

$$\left[\rho u+\frac{\partial(\rho u)}{\partial x}\right]dydz-(\rho u)dydz=\frac{\partial(\rho u)}{\partial x}dxdydz$$

جریان خالص خروجی در جهت y:

$$\left[\rho v+\frac{\partial(\rho v)}{\partial y}\right]dxdz-(\rho v)dxdz=\frac{\partial(\rho v)}{\partial y}dxdydz$$

جریان خالص خروجی در جهت z:

$$\left[\rho w+\frac{\partial(\rho w)}{\partial z}\right]dxdy-(\rho w)dxdy=\frac{\partial(\rho w)}{\partial z}dxdydz$$

لذا جریان خالص جرم خروجی از المان بصورت زیر تعریف می شود:

$$\text{جرم خالص جریان}=[\frac{\partial(\rho u)}{\partial x}+\frac{\partial(\rho v)}{\partial y}+\frac{\partial(\rho w)}{\partial z}]dxdydz$$

مقدار کل جرم سیال در داخل المان بی نهایت کوچک سیال برابر با $\rho dxdydz$.پس شدت زمانی افزایش جرم داخل المان برابر $\frac{\partial\rho}{\partial t}(dxdydz)$ است.اصل بقاء انرژی در مورد المان ثابت شکل بالا در قالب کلمات بدین گونه تفسیر می شود:**جریان خالص جرم خروجی از المان باید با شدت زمانی کاهش جرم داخل المان برابر باشد.**اگر شدت کاهش جرم را با علامت منفی نمایش دهیم،این بیان در قالب دو معادله ی بالا بصورت زیر بیان می شود:

$$\left[\frac{\partial(\rho u)}{\partial x}+\frac{\partial(\rho v)}{\partial y}+\frac{\partial(\rho w)}{\partial z}\right]dxdydz=-\frac{\partial\rho}{\partial t}(dxdydz)$$

یا:

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\left[\frac{\partial(\rho u)}{\partial x}+\frac{\partial(\rho v)}{\partial y}+\frac{\partial(\rho w)}{\partial z}\right]=0$$

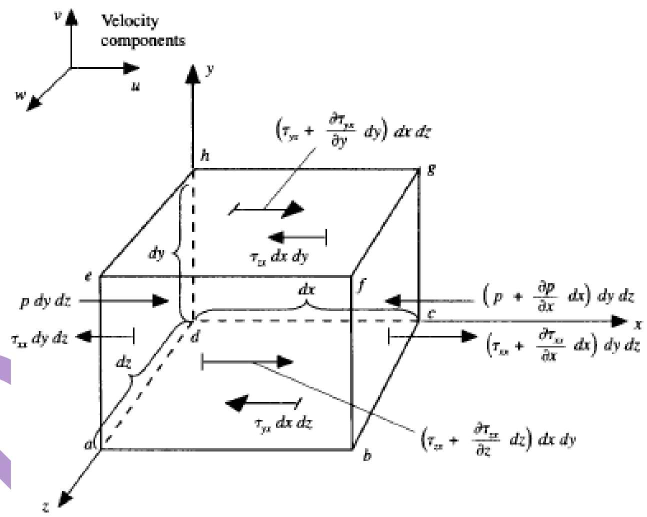
عبارت داخل کروشه در معادله بالا همان $\nabla.(\rho V)$ است.بنابراین معادله را می توان به شکل زیر نوشت:

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\nabla.(\rho V)=0$$

این معادله همان معادله پیوستگی است که به شکل دیفرانسیلی جزیی نوشته شده است.که بر اساس یک المان بینهایت کوچک ثابت شده در فضا بدست آمده است.انتخاب المان بینهایت کوچک بعنوان مدل جریان باعث شد که معادله پیوستگی مستقیما به شکل یک معادله ی دیفرانسیل جزیی بدست آید.که به آن معادله بقایی می گویند.

معادله ممنتوم:

در این قسمت اصل فیزیکی مهم دیگری در مورد جریان بکار می بریم،یعنی قانون دوم نیوتن.معادله حاصل از کاربرد قانون دوم نیوتن در مورد جریان را معادله ممنتوم می نامند.بر خلاف پیوستگی در قسمت قبل که کاربرد مدل های مختلف سیال با جزییات کامل مطرح گردید و بر شکلهای مختلف معادله تاکید شد،در این قسمت خودمان را محدود می کنیم و تنها یک مدل جریان را انتخاب می نماییم.بطور اخص مدل المان متحرک سیال نشان داده در شکل زیر را در نظر می گیریم.زیرا در این مدل بطور اخص برای بدست آوردن معادله ممنتوم و همچنین معادله انرژی آسانتر است.مدل المان متحرک سیال با جزییات بیشتر در شکل کاملا مشخص است.البته باید تذکر داد که معادلات ممنتوم و انرژی را می توان با استفاده از هر یک از سه مدل دیگر بدست آورد.قانون دوم نیوتن در مورد المان متحرک سیال در این شکل می گوید که **نیروی خالص وارد بر سیال برابر است با جرم المان سیال ضرب در شتاب آن.** این یک رابطه برداری است و در نتیجه می توان آن را به سه معادله اسکالر در جهت محورهای x،y و z نوشت.



شکل 3-9(نیروهای وارده بر المان سیال)

حال مولفه ی x قانون دوم نیوتن را می نویسیم:

$$F_x = ma_x$$

که در آن F_x و a_x به تریب مولفه های اسکالر نیرو و شتاب در امتداد محورx می باشند.در سمت چپ معادله منشا نیرو چیست؟

1.نیروهای داخلی که مستقیما بر روی جرم حجمی المان سیال وارد می شوند.این نیروها "در فاصله ای عمل می کنند".نیروهای ثقلی،برقی و مغناطیسی از این قبیل اند.

2.نیروهای سطحی که مستقیما بر روی سطح المان سیال وارد می شوند.این نیروها از دو منبع ناشی می شوند:(الف)فشار وارد بر سطح سیال،توسط سیال خارجی که المان مورد نظر را احاطه کرده است.و(ب)تنش برشی و عمودی وارد بر سطح سیال،توسط سیال خارجی که بر اثر اصطکاک بر روی سطح سیال کشیده و یا فشرده می شود.

نیروهای داخلی وارد بر واحد جرم المان سیال را f و مولفه x آنرا f_x می نامیم.حجم المان سیال برابر با dxdydz است و در نتیجه :

نیروی داخلی بر المان سیال در جهت x=$\rho f_x(dxdydz)$

تنش های برشی و عمودی در یک سیال مربوط به شدت زمانی تغییر شکل المان ها هستند.این تغییر شکل برای صفحه ی xy در شکل زیر دیده می شود.تنش برشی یا τ_{xy} در قسمت a به شدت زمانی تغییر شکل برشی المان سیال مربوط است،در حالیکه تنش عمودی τ_{xx} در قسمت b به شدت زمانی تغییر حجم المان سیال مربوط می شود.در نتیجه تنش های برشی و عمودی بستگی به گرادیان سرع در جریان دارند که بعدا نشان خواهد شد.در اغلب جریان های لزج تنش های عمودی بسیار کوچکتر از تنشهای برشی بوده واکثر مواقع از آنها صرف نظر می کنیم.تنش های عمودی زمانی اهمیت پیدا میکنند که گرادیان عمودی سرعت $\frac{\partial u}{\partial x}$ خیلی بزرگ است.با توجه به شکل برای المان متحرک سیال می توان نوشت :

نیروی سطحی خالص در جهت x = $\left[p-\left(p+\frac{\partial p}{\partial x}dx\right)\right]dydz+\left[\tau_{xx}+\left(\tau_{xx}+\frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x}dx\right)-\tau_{xx}\right]dydz+\cdots$

برایند نیروها در جهت x از حاصلجمع معادلات ذکر شده و ساده کردن آن:

$$F_x=\left[-\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x}+\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y}+\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z}\right]dxdydz+\rho f_x dxdydz$$

می دانیم که جرم المان سیال ثابت و برابر است با:

$$m=\rho dxdydz$$

همچنین می دانیم که شتاب المان سیال عبارت است از شدت زمانی تغییر سرعت.در نتیجه مولفه شتاب در جهت x، (a_x) عبارت است از شدت تغییر زمانی u.از آنجا که المان متحرک سیال مورد نظر است این تغییر شدت زمانی بصورت مشتق مادی بیان می شود.لذا:

$$a_x={Du}/{Dt}$$

از تلفیق معادلات گفته شده خواهیم داشت:

$$\rho\frac{Du}{Dt}=\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{xx}}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{yx}}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{zx}}{\partial z}+\rho f_x$$

که عبارت است از مولفه x معادله ممنتوم برای سیال لزج.به همین ترتیب مولفه های y و z را می توان بصورت های زیر بیان کرد:

$$\rho\frac{Dv}{Dt}=\frac{\partial p}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{yy}}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{zy}}{\partial z}+\rho f_y$$

$$\rho\frac{Dw}{Dt}=\frac{\partial p}{\partial z}+\frac{\partial\tau_{xz}}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{yz}}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{zz}}{\partial z}+\rho f_z$$

معادلات بالا به ترتیب مولفه های x و y و z معادله ممنتوم است.این معادلات،اسکالر هستند و معادلات ناویر-استوکز نامیده می شوند.این نام گذاری به افتخار دانشمند فرانسوی **ناویر** و دانشمند انگلیسی **استوکز** نامیده می شوند.به دلیل اینکه المان همراه با جریان در حرکت است معادلات از نوع غیر بقایی هستند،معادلات ناویر و استوکز را می توان به شکل بقایی نیز بیان کرد:

$$\rho\left({}^{Du}/_{Dt}\right)=\rho\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)+\rho\boldsymbol{V}.\nabla u$$

همچنین اگر حاصلضرب ρu را بسط دهیم خواهیم داشت :

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial t}=\rho\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial\rho}{\partial t}$$

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial t}=\rho\frac{\partial u}{\partial t}-u\frac{\partial\rho}{\partial t}$$

معادله برداری برای دیورژانس حاصلضرب یک اسکالر در یک بردار را به یاد می آوریم:

$$\nabla.(\rho u\boldsymbol{V})=u\nabla.(\rho\boldsymbol{V})+(\rho\boldsymbol{V}).\nabla u$$

$$\rho\boldsymbol{V}.\nabla u=\nabla.(\rho u\boldsymbol{V})-u\nabla.(\rho\boldsymbol{V})$$

دو معادله گذشته را در معادله بقایی تاویر استوکز جایگزین می کنیم:

$$\rho\frac{Du}{Dt}=\frac{\partial(\rho u)}{\partial t}-u\frac{\partial\rho}{\partial t}-u\nabla.(\rho\boldsymbol{V})+\nabla.(\rho u\boldsymbol{V})=\frac{\partial(\rho u)}{\partial t}-u\left[\frac{\partial\rho}{\partial t}+\nabla.(\rho\boldsymbol{V})\right]+\nabla.(\rho u\boldsymbol{V})$$

عبارت داخل کروشه در معادله بالا در واقع عبارت سمت چپ معادله پیوستگی می باشد و بنابراین برابر صفر است.لذا معادله به شکل زیر تبدیل می شود:

$$\rho\frac{Du}{Dt}+\frac{\partial(\partial u)}{\partial t}+\nabla.(\rho u\boldsymbol{V})$$

این معادله در معادله ممنتوم جای گزین می کنیم:

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial t}+\nabla.(\rho uV)=-\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x}+\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y}+\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z}+\rho f_x$$

$$\frac{\partial(\rho v)}{\partial t}+\nabla.(\rho vV)=-\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial \tau_{xx}}{\partial y}+\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z}+\rho f_y$$

$$\frac{\partial(\rho w)}{\partial t}+\nabla.(\rho wV)=-\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x}+\frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y}+\frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z}+\rho f_z$$

سه معادله بالا را معادلات بقایی ناویر استوکز می نامند.

در اواخر قرن هفدهم نیوتن اعلام کرد که تنش برشی در یک سیال متناسب است با شدت زمانی تغییر طول نسبی یا گرادیان سرعت.چنین سیالاتی را سیالات نیوتنی می نامیم.سیالی که در آن τ متناسب با گرادیان سرعت نباشد سیال غیر نیوتنی نامیده می شود،جریان خون در بدن نمونه ی یک سیال غیر نیوتنی است.عملا در تمام مسایل کاربردی آیرودینامیک سیال را می توان نیوتنی فرض کرد.استوکز در سال 1845 برای سیال نیوتنی روابط زیر را بدست آورد:

$$\tau_{xx}=\lambda(\nabla.V)+2\mu\,{}^{\partial u}/_{\partial x}$$

$$\tau_{yy}=\lambda(\nabla.V)+2\mu\,{}^{\partial v}/_{\partial y}$$

$$\tau_{zz}=\lambda(\nabla.V)+2\mu\,{}^{\partial w}/_{\partial z}$$

$$\tau_{xy}=\tau_{yx}=\lambda({}^{\partial v}/_{\partial x}+{}^{\partial u}/_{\partial y})$$

$$\tau_{xz}=\tau_{zx}=\lambda({}^{\partial u}/_{\partial z}+{}^{\partial w}/_{\partial x})$$

$$\tau_{yz}=\tau_{zy}=\lambda({}^{\partial w}/_{\partial y}+{}^{\partial v}/_{\partial z})$$

که در آن μ ضریب ویسکوزیته مولکولی و λ ضریب ویسکوزیته دوم می باشند.استوکز فرضیه زیر را بیان کرد:

$$\lambda=-\frac{2}{3}\mu$$

که غالبا مورد استفاده قرار می گیرددر حالی که تا امروز به طور قطعی ثابت نشده است.معادله کلی و کامل ناویر واستوکز به شکل بقایی بصورت زیر بدست می آید:

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial t}+\frac{\partial(\rho u^2)}{\partial x}+\frac{\partial(\rho uv)}{\partial y}+\frac{\partial(\rho uw)}{\partial z}=-\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda\nabla.V+2\mu\frac{\partial u}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left[\mu\left(\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\right)\right]+\frac{\partial}{\partial z}\left[\mu\left(\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x}\right)\right]+\rho f_x$$

$$\frac{\partial(\rho v)}{\partial t}+\frac{\partial(\rho uv)}{\partial x}+\frac{\partial(\rho v^2)}{\partial y}+\frac{\partial(\rho vw)}{\partial z}=-\frac{\partial p}{\partial y}+\frac{\partial}{\partial x}\left[\mu\left(\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\right)\right]+\frac{\partial}{\partial y}\left(\lambda\nabla.V+2\mu\frac{\partial v}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left[\mu\left(\frac{\partial w}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial z}\right)\right]+\rho f_y$$

$$\frac{\partial(\rho w)}{\partial t}+\frac{\partial(\rho uw)}{\partial x}+\frac{\partial(\rho vw)}{\partial y}+\frac{\partial(\rho w^2)}{\partial z}=-\frac{\partial p}{\partial z}+\frac{\partial}{\partial x}\left[\mu\left(\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x}\right)\right]+\frac{\partial}{\partial y}\left(\mu\left(\frac{\partial w}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial z}\right)\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\lambda\nabla.V+2\mu\frac{\partial w}{\partial z}\right)+\rho f_z$$

معادله انرژی :

در این قسمت سومین اصل فیزیکی یعنی اصل بقای انرژی را مورد بحث قرار می دهیم.برای هماهنگی با معادلات ناویر و استوکز(معادله ممنتوم) مدل جریان بکار رفته در قسمت قبل یعنی المان بی نهایت کوچک سیال را در نظر میگیریم. اصل بقا انرژی چیزی غیر از قانون اول ترمودینامیک نیست.وقتی این قانون را در مورد یک المان سیال که همراه جریان حرکت می کند اعمال می کنیم بصورت زیر بیان می کنیم:

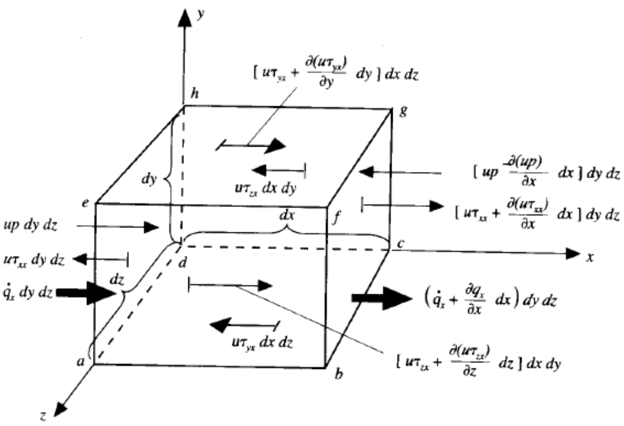
شدت کار انجام شده بر روی المان ناشی از نیرو داخلی و سطحی +فلوی خالص گرما بداخل المان=شدت تغییر انرژی داخل المان سیال

A B + C

که در آن مفهوم فیزیکی A،B و C در قالب عبارات فوق بیان شده است.ابتدا می خواهیم مقدارC یعنی شدت کار انجام شده بر روی المان سیال ناشی از نیروهای داخلی و سطحی را بدست آوریم.می توان نشان داد که شدت انجام کار توسط نیروی وارد بر یک جسم متحرک برابر است با حاصلضرب نیرو در مولفه ی سرعت در جهت نیرو.بنابراین شدت کار انجام شده توسط نیروی داخلی وارد بر المان متحرک سیال به سرعت V برابر است با:

$$\rho f V(dxdydz)$$

برای مطالعه ی نیروهای سطحی(فشار،تنش برشی و تنش عمودی)نیروهای وارد در جهت x همواره در شکل زیر نشان داده شده در نظر میگیریم شدت کار انجام شده بر روی المان متحرک سیال توسط نیروهای فشاری و برشی در جهت x برابر است با مولفه ی x سرعت یعنی u ضربدر نیروهای مربوطه.به عبارت دیگر شدت کار انجام شده توسط نیروی برشی $\tau_{yx}dxdz$ در صفحه abcd برابر $u\tau_{yx}dxdz$ است



عبارات مشابهی برای وجه دیگر به همین ترتیب میتوان بدست آورد.برای تاکید بر جریان های انرژی،المان متحرک سیال مجددا در شکل دیده می شود.که در آن

شدت کار انجام شده بر روی هر وجه توسط نیروهای سطحی در جهت x بطور واضح نشان داده شده است.برای بدست آوردن شدت خالص کار انجام شده بر روی المان سیال توسط نیروهای سطحی،توجه داریم که نیروهای عامل در جهت مثبت x کار مثبت انجام می دهند و نیروهای عامل در جهت منفی x کار منفی انجام می دهند.بنابراین با مقایسه نیروهای فشاری بر سطوح برابر adhe و bcgf در شکل،شدت خالص کار انجام شده توسط نیروهای فشاری در جهت x برابر است با :

$$\left[up-\left(up+\frac{\partial (up)}{\partial x}dx\right)\right]dydz=-\frac{\partial (up)}{\partial x}dxdydz$$

به همین ترتیب شدت خالص کار انجام شده توسط تنشهای برشی در جهت x بر وجه abcd و efgh برابر است با :

$$\left[\left(u\tau_{yx}+\frac{\partial (u\tau_{yx})}{\partial y}dy\right)-u\tau_{yx}\right]dxdz=\frac{\partial (u\tau_{yx})}{\partial y}dxdydz$$

با در نظر گرفتن تمام نیروهای سطحی نشان داده شده در شکل،شدت خالص کار انجام شده بر روی المان متحرک سیال ناشی از نیروها خواهد شد:

$$[-\frac{\partial (up)}{\partial x}+\frac{\partial (u\tau_{xx})}{\partial x}+\frac{\partial (u\tau_{yx})}{\partial y}+\frac{\partial (u\tau_{zx})}{\partial z}]dxdydz$$

عبارت فوق تنها شامل نیروهای سطحی در جهت x است،اگر نیروهای سطحی در جهات y و z را نیز حساب کنیم عبارت های مشابهی بدست خواهد آمد.حاصلجمع شدت خالص کار انجام شده بر روی المان متحرک سیال برابر است با مجموع عبارت های بدست آمده مربوط به جهات x، y, و z. این حاصل جمع که با علامت C نشان داده شده برابر است با

$$C=\left[\frac{\partial (up)}{\partial x}+\frac{\partial (vp)}{\partial y}+\frac{\partial (wp)}{\partial z}+\frac{\partial (u\tau_{xx})}{\partial x}+\frac{\partial (u\tau_{yx})}{\partial y}+\frac{\partial (u\tau_{zx})}{\partial z}+\frac{\partial (v\tau_{xy})}{\partial x}+\frac{\partial (v\tau_{yy})}{\partial y}+\frac{\partial (u\tau_{zy})}{\partial z}+\frac{\partial (w\tau_{xz})}{\partial x}+\frac{\partial (w\tau_{yz})}{\partial y}+\frac{\partial (w\tau_{zz})}{\partial z}\right]dxdydz+\rho f.Vdxdydz$$

در معادله بالا سه جمله اول سمت راست $\nabla.(\rho \boldsymbol{V})$ می باشند.حال توجه خود را به مقدار B در معادله ذکر شده معطوف می کنیم.فلوی خالص گرما بداخل المان ممکن است ناشی از عوامل زیر باشد:

- ✓ حرارت حجمی از قبیل گرم شدن و سرد شدن بر اثر تابش
- ✓ انتقال حرارت از یک طرف سطح به طرف دیگر آن بر اثر هدایت حجمی بازا واحد جرم را با $\dot{q}$ نشان میدهیم.با توجه به اینکه

جرم المان متحرک سیال در شکل برابر با $\rho dxdydz$ است و بنابراین گرمای حجمی المان برابر$\dot{q}\rho dxdydz$است.

در شکل بالا حرارت منتقل شده از راه هدایت حرارتی به داخل المان متحرک سیال از طریق وجه adhe برابر است با $\dot{q}_x dydz$ که در آن $\dot{q}_x$ حرارت منتقل شده در جهت x در واحد زمان از واحد سطح از راه هدایت حرارتی می باشد.حرارت منتقل شده در یک جهت معلوم وقتی مه بر حسب انرژی در واحد زمان از واحد سطح بیان شود اصطلاحا فلوی حرارت در آن جهت نامیده می شود.بنابراین $\dot{q}_x$ فلوی حرارت در جهت x است.حرارت منتقل شده به خارج از المان از طریق وجه bcgf برابر است با :

$$[\dot{q}_x + (\partial \dot{q}_x/\partial x)dx]dydz$$

بنابراین مقدار خالص حرارت منتقل شده در جهت x به داخل المان سیال از طریق هدایت حرارتی برابر است با :

$$[\dot{q}_x - (\dot{q}_x + \partial \dot{q}_x/\partial x)]dydz = -{}^{\partial \dot{q}_x}/_{\partial x}\, dxdydz$$

با در نظر گرفتن انتقال حرارت در جهات y و z از وجوه دیگر شکل خواهیم داشت :

$$\text{گرمای المان سیال بر اثر هدایت حرارتی} = -(\frac{\partial \dot{q}_x}{\partial x} + \frac{\partial \dot{q}_y}{\partial y} + \frac{\partial \dot{q}_z}{\partial z})$$

عبارت B در معادله ذکر شده در ابتدا برابر مجمع دو معادله بالا است :

$$B = \left[\rho \dot{q} - \left({}^{\partial \dot{q}_x}/_{\partial x} + {}^{\partial \dot{q}_y}/_{\partial y} + {}^{\partial \dot{q}_z}/_{\partial z}\right)\right] dxdydz$$

فلوی حرارت بر اثر هدایت حرارتی طبق قانون هدایت فوریه متناسب است با گرادیان درجه حرارت در جهت مورد نظر.

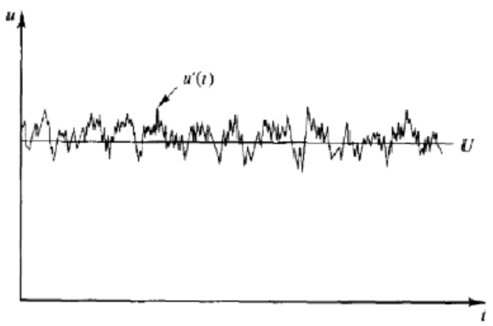
توربولانس (Turbulence):

واژگان کلیدی:

رینولدز،مدل کا اپسیلون،مدل RSM،جریانات آشفته

مقدمه:

تمام جریانهایی که در مهندسی عملی به حساب می آیند،اعم از موارد ساده نظیر فواره های دو بعدی،دنباله ها،جریان های لایه مرزی لوله و صفحه تخت و یا موارد خیلی پیچیده سه بعدی از یک عدد رینولدز معین (ul/v) بالاتر ناپایدار می باشد.در اعداد رینولدز پایین جریان آرام است.در اعداد رینولدز بالا مشاهده می شود که جریان آشفته می شود،بطوریکه یک حالت تصادفی از حرکت در جایی که سرعت و فشار بطور پیوسته درون بخشهای مهمی از جریان نسبت به زمان تغییر می کند گسترش می یابد.



شکل 1-4

در موارد ساده معادلات پیوستگی و ناویر-استوکز را می توان بصورت تحلیلی حل کرد.جریان های پیچیده تر را می توان از طریق عددی با روش های CFD نظیر روش حجم محدود و بدون استفاده از تقریب های اضافی حل کرد.

اغلب جریان های با اهمیت مهندسی آشفته هستند،لذا منطقه جریان آشفته فقط از نظر تئوری مهم نیست.مهندس سیالات احتیاج به ابزار قابلی دارد که بیانگر اثرات آشفتگی باشد.

آشفتگی چیست؟

در اینجا نگاه سریع به مشخصه اصلی جریان های آشفته می اندازیم.عدد رینولدز یک جریان نسبت اندازه ی نیروی اینرسی به نیروی لزجت را می دهد. در آزمایش های روی سیستم های سیال مشاهده شده است که در عدد رینولدز پایین تر از به اصطلاح بحرانی جریان صاف و لایه های هم جوار سیال روی یکدیگر میلغزند. اگر شرایط مرزی با زمان تغییر نکند جریان دائمی است این منطقه جریان آرام نامیده می شود.

در مقادیر عدد رینولدز بالاتر از بحرانی یکسری حوادث اتفاق می افتد که نهایتا سبب تغییرات جدی در رفتار جریان می شود. در نهایت رفتار جریان تصادفی و نامنظم شده و حتی باشرایط مرزی ثابت حرکت کاملا غیردائمی می شود. سرعت و سایر خواص جریان به صورت تصادفی و نامنظم تغییر می کند. این منطقه ناحیه جریان آشفته نامیده می شود.

طبیعت تصادفی جریان آشفته مانع از محاسبات و بررسی کامل حرکت همه ذرات سیال می شود. در عوض می توان سرعت را به دو بخش مقدار متوسط دائمی U و مولفه نوسانی $\acute{U}(t)$ که با آن جمع می شود، تقسیم کرد.

$$u = U + \acute{U}(t)$$

حتی در جریان هایی که سرعت های متوسط و فشارها فقط در یک یا دو بعد از فضا تغییر می کنند نواسانات آشفته همواره دارای رفتار سه بعدی هستند.علاوه بر این، مشاهده ی جریان های آشفته ی یک ساختار جریان چرخشی را که ادی آشفته نامیده می شود با محدوده ی وسیعی از طول مقیاس را نشان می دهد.

ذرات سیال که در ابتدا در فاصله های زیادی گسترده شده اند، می توانند با حرکت های چرخشی ادی ها بهم نزدیک گردند در نتیجه حرارت،جرم و اندازه حرکت بصورت موثری تغییر می کند.ادیهای آشفته بزرگتر بوسیله ی تحولی که کشش گردابه نامیده میشود انرژی

گرفته و یا می دهند.حضورگرادینهای سرعت متوسط در جریان های برشی،سبب ادیهای آشفته چرخشی می شوند.در امتداد جریان ادیها به طور مناسبی کشیده می شوند،ادیهای کوچک به طور قوی توسط ادیهای بزرگتر کشیده شده و توسط جریان متوسط ضعیفتر می شود.در این مسیر انرژی جنبشی از ادیهای بزرگ به ادیهای کوچک و کوچکتر منتقل میشود که به آن آبشار انرژی می گویند.کوچکترین مقیاس حرکت که می تواند در جریان آشفته رخ بدهد توسط لزجت ناشی میشود.عدد رینولدز کوچکترین ادیها بر اساس سرعت مشخصه آنها v و طول مشخصه η است.در این مقیاس ها اثرات لزجت مهم است.در مقابل عمل تنش های لزجی کار سرعت می گیرد،بطوریکه انرژی جمع شده با حرکت های ادی از بین میرود و به انرژی حرارتی داخلی تبدیل می شود.

ساختمان ادی های بزرگتر کاملا نا همگن است و بواسطه واکنش قوی بین آنها با جریان متوسط وابسته به جریان می باشد.عمل نفوذ لزجی تمایل دارد که در مقیاس کوچک مستقل از جهت،جریان را پوشش می دهد بنابراین،ادی های کوچکتر در جریان آشفته همگن هستند.

اثر آشفتگی روی معادلات میانگین زمانی ناویر-استوکز:

اختلاف اساسی بین مشاهدات جریانهای آرام و آشفته حضور حرکت ادی ها در محدوده وسیعی از مقیاس طول در جریان آشفته است.یک نمونه از میدان جریان 0.1 متر در 0.1 متر با یک جریان آشفته با عدد رینولدز بالا،باید شامل ادی هایی با اندازه ی بین 10 تا 100 میکرومتر باشد،ما احتیاج به شبکه ایی با 10^{9} تا 10^{12} نقطه داریم تا بتوانیم تحول را در تمام مقیاس های طول توضیح دهیم.سریعترین نتایج با فرکانسی از مرتبه 10 کیلو هرتز صورت می گیرد،لذا لازم است که زمان را به قدمهای حدود 100 میکرو ثانیه تقسیم کنیم.شبیه سازی مستقیم جریان آشفته لوله در رینولدز 500000 کامپیوتری می خواهد که 10000000 مرتبه سریعتر از تولید فعلی ابر کامپیوتر Cray باشد.

امروزه توان محاسباتی فقط جهت پیگیری مسیر حرکت ادی های جریان های ساده بکار گرفته می شود محاسبات مورد نیاز برای حل مستقیم معادلات ناویر-استوکز وابسته به زمان برای جریان های کاملا آشفته در عدد رینولدز بالا بسیار مشکل است و باید منتظر گسترش اساسی در سخت افزار رایانه ها بود.

معادلات رینولدز :

ابتدا متوسط Ø مربوط به خاصیت جریان φ را بصورت زیر تعریف می کنیم :

$$\overline{\emptyset} = \frac{1}{\Delta t}\int_0^{\Delta t} \varphi(t)dt$$

که در آن Δt آنقدر بزرگ انتخاب میشود که برای مقادیر زمانی بزرگتر از Δt تغییری در اندازه ی انتگرال مزبور مشاهده نشود.به عبارت دیگر $\emptyset$ مستقل از زمان انتخاب شده دربیاید.علامت بار بیانگر کمیت متوسط زمانی می باشد.خاصیت جریان φ وابسته به زمان است و می توان آنرا بصورت مجموع مولفه متوسط دائمی $\overline{\emptyset}$ و مولفه نوسانی متغییر با زمان $\acute{\varphi}(t)$ که مقدار متوسط آن صفر است در نظر گرفت.در نتیجه $\varphi(t) = \acute{\varphi}(t) + \overline{\emptyset}$ میانگین زمانی نوسانات $\acute{\varphi}$ طبق تعریف صفر بدست می آید:

$$\overline{\acute{\varphi}} = \frac{1}{\Delta t}\int_0^{\Delta t} \acute{\varphi}\,(t)dt = 0$$

اطلاعات مربوط به نوسان بخشی از جریان می تواند از جذر متوسط مربه نوسانات بدست آید:

$$\varphi_{rms} = \sqrt{\overline{(\acute{\varphi})^2}} = [\frac{1}{\Delta t}\int_0^{\Delta t} (\acute{\varphi})^2 dt]^{0.5}$$

جذر متوسط مربع مقادیر مولفه های سرعت از اهمیت ویژه ای برخوردارند،چرا که آنها را می توان به آسانی با یک وسیله حساس به سرعت نوسانات آشفته و یک مدار ساده الکتریکی اندازه گرفت.انرژی جنبشی k مربوط به آشفتگی از رابطه زیر تعیین میشود.

$$k = \frac{1}{2}(\overline{\acute{u}^2} + \overline{\acute{v}^2} + \overline{\acute{w}^2})$$

شدت آشفتگی TI به انرژی و سرعت جریان متوسط مرجع U_{ref} بصورت رابطه زیر مرتبط میشود:

$$TI = \frac{[\frac{1}{3}(\overline{\acute{u}^2} + \overline{\acute{v}^2} + \overline{\acute{w}^2})]^{0.5}}{U_{ref}} = [(2/3)\ k]^{0.5}/U_{ref}$$

برای نمایش اثر نوسانات آشفته روی جریان متوسط،معادلات پیوستگی و ناویر-استوکز را برای جریان همزمان تراکم ناپذیر با لزجت ثابت بررسی می کنیم. این کار در حد زیادی روابط پیچیده را بدون کاستن از بخش های اصلی ساده می کند.طبق معمول مختصات کارتزین را نظر می گیریم.

معادلات حرکت در جریانات آشفته :

حال می خواهیم معادلات حرکت در جریانات آشفته را مورد بررسی قرار دهیم.روش بکار رفته در اینجا،در سایر مسائل نیز قابل استفاده می باشد.ابتدا معادلات را برای کمیت های لحظه ای یعنی کمیت های متوسط به علاوه کمیت های نوسانی می نویسیم.آنگاه از طرفین هر معادله متوسط گیری زمانی به عمل می آوریم.البته در این بین بایستی به این نکته توجه نمود که چنانچه تساوی برای معادلات لحظه ای بر قرار باشد،این تساوی برای متوسط زمانی آن برای دامنه ی مشخصی از زمان نیز برقرار خواهد بود.در نهایت معادلات را ساده سازی نموده تا جایی که کمیت های متوسط زمانی ظاهر گردند.

معادله ی پیوستگی برای جریان آشفته :

فرم دیفرانسیلی معادله پیوستگی به فرم زیر می باشد:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x_i}(\rho u_i)=0$$

معادله بالا برای مقادیر لحظه ای جریان آشفته نیز برقرار است.چنانچه متوسط گیری زمانی از معادله ی بالا نماییم معادله ی حاصله به صورت رابطه ی زیر در خواهد آمد:

$$\overline{\frac{\partial \rho}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x_\iota}(\rho u_\iota)}=0$$

با جای گذاری کمیت های لحظه ای با مقادیر متوسط زمانی به علاوه مقادیر نوسانی،و نیز استفاده از قوانین متوسط گیری رینولدز،خواهیم دید که

$$\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x_i}(\overline{\rho u_\iota})+\frac{\partial}{\partial x_i}\overline{(\rho \acute{u_\iota})}=0$$

برای یک جریان تراکم ناپذیر از آنجا که $\acute{\rho}=0$ می باشد معادله بالا بصورت زیر در خواهد آمد.

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i}=0$$

معادله ممنتوم برای جریان آشفته :

همانطور که می دانیم معادلات ممنتوم برای یک جریان تراکم ناپذیر با ویسکوزیته ثابت بصورت زیر می باشد:

$$\rho\left(\frac{\partial u_i}{\partial t}+u_j\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right)=B_i-\frac{\partial p}{\partial x_i}+\propto\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j\partial x_j}$$

معادله بالا هم برای جریانات آرام و هم برای جریانات آشفته معتبر می باشد.لیکن برای یک جریان آشفته،متغیرهای وابسته ی نظیر سرعت و فشار تماما وابسته به زمان می باشد.

حال میخواهیم معادله ممنتوم فوق را بر حسب کمیت های متوسط زمانی بیان نمایم.باقرار دادن:

$$p=\bar{p}+\acute{p}$$

$$u_i=\bar{u}_i+\acute{u}_\iota$$

با قرار دادن مقادیر بالا در معادله ی قبل داریم:

$$\rho\left[\frac{\partial(\bar{u}_i+\acute{u}_\iota)}{\partial t}+\left(\bar{u}_j+\acute{u}_j\right)\frac{\partial(\bar{u}_i+\acute{u}_\iota)}{\partial x_j}\right]=B_i-\frac{\partial(\bar{p}+\acute{p})}{\partial x_i}+\propto\frac{\partial^2(\bar{u}_i+\acute{u}_\iota)}{\partial x_j\partial x_j}$$

با ساده سازی معادله ی بالا و نیز اعمال متوسط گیری زمانی بر طرفین معادله خواهیم دید که:

$$\rho\left[\frac{\partial\bar{u}_i}{\partial t}+\bar{u}_j\frac{\partial\bar{u}_i}{\partial x_j}+\overline{u_J\frac{\partial u_\iota}{\partial x_J}}\right]=B_i-\frac{\partial\bar{p}}{\partial x_i}+\propto\frac{\partial^2\bar{u}_\iota}{\partial x_j\partial x_j}$$

ترم سوم در سمت چپ معادله بالا معمولا به شکل مختلف بیان می گردد.از معادله ی پیوستگی جریانات تراکم ناپذیر $\frac{\partial\acute{u}_j}{\partial x_j}$ برابر صفر می باشد.بنابراین:

$$\overline{\acute{u}_\iota\frac{\partial\acute{u}_J}{\partial x_J}+\acute{u}_J\frac{\partial\acute{u}_\iota}{\partial x_J}}=\frac{\partial}{\partial x_j}\overline{\acute{u}_\iota\acute{u}_J}$$

با اضافه و کم نمودن ترم $\overline{\acute{u}_\iota\frac{\partial\acute{u}_J}{\partial x_J}}$ که مساوی صفر می باشد به طرفین معادله ی قبل به دست آمده برای ممنتوم،و از آنجا که:

$$\overline{\acute{u}_\iota\frac{\partial\acute{u}_J}{\partial x_J}+\acute{u}_J\frac{\partial\acute{u}_\iota}{\partial x_J}}=\frac{\partial}{\partial x_j}\overline{\acute{u}_\iota\acute{u}_J}$$

معادله ممنتوم برای جریان آشفته بصورت زیر تعریف می گردد:

$$\rho\left[\frac{\partial\bar{u}_\iota}{\partial t}+\bar{u}_j\frac{\partial\bar{u}_i}{\partial x_j}\right]=B_i-\frac{\partial\bar{p}}{\partial x_i}+\frac{\partial}{\partial x_j}\left[\propto\frac{\partial\bar{u}_\iota}{\partial x_j}-\rho\overline{\bar{u}_\iota\bar{u}_J}\right]$$

تنها تفاوت معادله معادله ی ممنتوم بالا با معادله ی ممنتوم با کمیت های لحظه ای،اضافه شدن ترم آخر در سمت راست معادله یعنی

$\rho\overline{u_i}\overline{u_j}$ می باشد، این ترم را اصطلاحا تنش آشفتگی یا تنش رینولدز می نامند. تنها تفاوت معادلات جریان آرام با آشفته نیز فقط حضور همین ترم می باشد. به طور کلی این ترم، از لحاظ فیزیکی یک تنش نمی باشد، بلکه بیانگر اثر تبادل اینرسی (ممنتوم) می باشد، فراموش نکنیم که این ترم از سمت راست معادله ی ممنتوم (جایی که با ترم های اینرسی سر و کار داریم) به سمت چپ منتقل شده است. بنابراین ریشه و بنیاد این ترم از جنس ممنتوم می باشد.

در حالت کلی، معادلات بقا حاکم بر جریان سیالات آشفته (یعنی بقای ممنتوم، جرم و انرژی) بصورت زیر بیان می شوند:

$$\rho\left[\frac{\partial\overline{u_i}}{\partial t}+\bar{u}_j\frac{\partial\overline{u_i}}{\partial x_j}\right]=B_i-x_i\frac{\partial\bar{p}}{\partial x_i}+\frac{\partial}{\partial x_j}[\propto\frac{\partial\overline{u_i}}{\partial x_j}-\rho\overline{u_i}\overline{u_j}]$$ بقای ممنتوم

$$\frac{\partial\overline{u_i}}{\partial x_j}=0$$ بقای جرم

$$\rho C_p\left(\frac{\partial T}{\partial t}+u_j\frac{\partial T}{\partial x_j}\right)=\frac{\partial}{\partial x_j}(\lambda\frac{\partial T}{\partial x_j}-\rho C_p\overline{u_j\acute{T}})$$ بقای انرژی

پارامتر λ بیان کننده ی هدایت حرارت است. بدین سبب از این شکل استفاده شد تا با انرژی جنبشی آشفتگی که با K نمایش می دهیم، اشتباه گرفته نشود. معادلات فوق را اصطلاحا معادلات RANS نامیده و در ضمن معادلات سریع بوده و هیچ فرضی در بدست آمدن و احیانا ساده سازی آنها نشده است. ولیکن این معادلات تشکیل یک دستگاه بسته را نمی دهد. (یعنی تعداد مجهولات بیش از تعداد معادلات است.) به واسطه ی غیر خطی بودن این معادلات، پس از فرآیند متوسط گیری، دو بسته ی جدید مطرح شده است.

تنش برشی در جریانات آشفته :

آشفتگی نوعی ناپایداری جریان است که بواسطه ی تنشهای برشی (یا گرادیانهای سرعت) ایجاد می گردد، هر چه تنش برشی قوی تر باشد، اشفتگی جریان نیز شدیدتر خواهد بود. تعیین تنش برشی برای جریانات آشفته بسیار حیاتی و در عین حال از دیدگاه محاسباتی کمی پیچیده میباشد، از طرفی بدون داشتن رابطه ای برای تنش برشی نمی توان با نوشتن بالانس نیروهای وارد بر یک المان سیال، توزیع سرعت را در درون جریان بدست آورد. تانسور تنش برشی τ_{ij} بصورت زیر بیان می گردد:

$$\tau_{ij}=\tau_{ij\,laminar}+\tau_{ij\,turbulent}=\propto\left(\frac{\partial\bar{u}_i}{\partial x_j}+\frac{\partial\bar{u}_j}{\partial x_i}\right)-\rho\overline{u_i}\overline{u_j}$$

امید اندکی برای تعیین اندازه ی تنش رینولدز $\rho\bar{u_i}\bar{u_j}$ بصورت سریع وجود دارد.روش پیشنهاد شده مرتبط نمودن این تنش آشفته به میدان سرعت متوسط می باشد.روشهای مختلفی برای بدست آوردن تنش برشی جریانات آشفته ارائه شده است که در ادامه آن را تشریح خواهیم کرد.

مدلسازی جریانات آشفته و مدل های آشفتگی :

تا کنون صدها مدل توربولانسی ارائه شده اند که هریک برای رژیم های خاص جریانی و حتی در ناحیه ای خاص از میدان جریان متغیر و دقیق می باشد،هدف نهایی تمام مدل های توربولانسی،محاسبه ی اندازه ی تنش $\rho\bar{u_i}\bar{u_j}$ در نقاط مختلف جریان میباشد.

رابطه ی اساسی Boussinesq Eddy-viscosity:

رابطه ی بوزینسک بر پایه ی این اصل بنا هناده شده است که مولفه ی تنشهای رینولدز متناسب با گرادیانهای سرعت متوسط میباشند:

$$\rho\bar{u_i}\bar{u_j} = 2 \propto_t S_{ij} - \frac{2}{3}\rho k\delta_{ij}$$

که در آن S_{ij} تانسور نرخ کرنش متوسط رابطه ی زیر تعریف می شود:

$$S_{ij} = \frac{1}{2}(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i})$$

البته بایستی توجه داشت که رابطه ی بوزینسک برای جریان تراکم ناپذیر است،لیکن شکل کامل این معادله که شامل اثرات تراکم پذیری جریان می باشد بصورت زیر تعریف میشود:

$$\rho\bar{u_i}\bar{u_j} = 2 \propto_t S_{ij} - \frac{2}{3}\rho k\delta_{ij} - \frac{2}{3}\delta_{ij}\frac{\partial u_k}{\partial x_k}$$

بر خلاف ویسکوزیته مولکولی μ که خاصیت از سیال است μ_t رابطه ی مستقیم و وابستگی شدیدی به میزان آشفتگی جریان و میدان سرعت دارد و لذا تابعیتی از جریان و موقعیت دارد.در اعداد رینولدز بالا،در تمام و یا بخش عمده ای از جریان $\mu \le \mu_t$ است.

مدل های Eddy-Viscosity:

هدف هر مدل توصیف رابطه ی بین کمیتها قابل اندازه گیری فیزیکی جریان و یا کمیتهای محاسبه شده ی میدان جریان است.بطور کلی این مدل ها را می توان به سه دسته تقسیم کرد:

- مدل صفر معادله ای
- مدل یک معادله ای
- مدل دو معادله ای

مدل صفر معادله ای،تنها از روابط و معادلات جبری جهت توصیف رابطه ی بین خواص محاسبه شده و یا قابل اندازه گیری استفاده می کنند.مدلهای یک معادله ای از یک معادله ی انتقال اضافی نیز در این بین استفاده می کنند،مدل های دو معادله ای شامل دو عدد PDE اضافی هستند.

واضح است که هیچ مدل آشفتگی وجود ندارد که برای تمامی مسائل مهندسی جوابگو باشد.انتخاب مدل از بین مدل های موجود بستگی به :

- فیزیک جریانی که با آن در مسله مورد نظر درگیر هستیم.
- وجود یا عدم وجود همزمان چند رژیم متفاوت جریانی در کنار یکدیگر
- میزان دقت مورد نیاز
- امکانات محاسباتی موجود از قبیل Ram و یا Cpu در دسترس
- میزان زمان مورد نیاز برای رسیدن جوابی معقول دارد

مدلهای صفر معادله ای(مدلهای طول اختلافی):

نظریه ی طول اختلافی،فقط برای جریانات نسبتا ساده نظیر جریانات برشی نازک و جریانات جت و جریانات لایه مرزی تشکیل شده بر روی دیواره خوب می کند،چرا که تنها برای این جریانات است که می توان I_m را با روابط تجربی ساده بیان نمود.اما این مدل اثرات انتقالی آشفته و نیز history effects نظیر جریانات آشفته را در نظر نمیگیرد.در روش صفر معادله ای،خواص همگرایی فرآیند حل به پارامترهای ذیل حساس نمیباشد:

- تغییرات جزیی در چگالی و توزیع مکانی المان ها
- تغییرات در شکل دامنه ی محاسباتی
- حدس اولیه ی آغازین

لازم به ذکر است که این مدل در جاهای که فرآیند جابجایی و یا دیفیوژن کمیتهای آشفتگی مهم است نظیر:

- جریاناتی که دارای نرخ تشکیل بالایی میباشند.
- انتقال حرارت در عرض صفحات بدون گرادیان جریانی
- جریاناتی دوباره چرخشی

مدل های یک معادله ای :

در مدل های یک معادله ای،یکی از دو مقیاس مهم در جریانات آشفته،یعنی از میان زمان مقیاس جریانات آشفته و طول مقیاس جریانات آشفته و یا ترکیبی از آن دو،با استفاده از یک معادله ی انتقالی به دست می آید معمولا این انرژی جنبشی آشفته k است که برای آن از یک معادله ی انتقالی استفاده می شود.مدل Spalart-Allmaras یک مدل تک معادله ای ساده بوده که یک معادله انتقالی را برای بدست آوردن α_t حل میکند.مدل مزبور برای کاربردهای هوا-فضا ارائه شده است و همچنین نتایج خوبی برای لایه های مرزی ای که در معرض گرادیان فشار معکوس قرار دارند،ارائه داده است.همچنین این مدل،یک مدل عمومی برای کاربردهای توربوماشین است.در شکل اصلی خود،مدل Spalart-Allmaras مدلی موثر برای اعداد رینولدز پایین محسوب می گردد یعنی استفاده ی موثر از این مدل تنها محدود به نواحی متاثر از لزجت در داخل لایه مرزی و نواحی مشابه می باشد.

مدل های دو معادله ای :

مدل های دو معادله ای به عنوان زیر بنای بسیاری از تحقیقات مربوط به مدلسازی جریانات آشفته،بالاخص در سالیان اخیر بسیار مورد توجه قرار گرفته اند.ساده ترین مدل کامل اشفتگی مدل های دو معادله ای هستند که در آنها،حل دو معادله ی انتقال جداگانه باعث تعیین شدن مستقلانه ی مقیاس سرعت آشفتگی و مقیاس طول آشفتگی می شوند.مهمترین اختلاف بین مدلهای دو معادله ای و سایر مدلهای Eddy-viscosity آن است که مدلهای دو معادله ای مدلهای کاملی می باشند یعنی از آنها می توان برای پیش بینی خواص یک جریان آشفته بدون آگاهی قبلی از ساختار جریان و یا هندسه جریان استفاده نمود.در حالیکه دو مدل قبلی،طول مقیاسهایی وجود دارد که برای تعیین انها،نیاز به دانستن از قبل رژیم جریان و شکل آن میباشد و این امر مدلسازی جریانات آشفته قبل از حل آن کمی پیچیده می کند.

مدل k-ε :

مدل k-ε معروفترین مدل دو معادله ای میباشد چرا که فهم آن ساده و استفاده از آن در برنامه نویسی ساده می باشد.در مدل های k-ε میدان آشفته بر حسب دو متغیرر بیان می شود:

1. انرژی جنبشی جریان آشفته
2. نرخ اضمحلال ویسکوز انرژی جنبشی آشفته

انرژی جنبشی لحظه ای جریان آشفته k(t)،عبارت است از مجموع انرژی جنبشی متوسط $k=1/2(U^2+V^2+W^2)$و انرژی جنبشی آشفته $k=1/2(\overline{\acute{U}^2}+\overline{\acute{V}^2}+\overline{\acute{W}^2})$ در بسط های زیر شدیدا لازم است که نرخ تغییر شکل و تنش های آشفته را استفاده کنیم.برای تسهیل در محاسبات بعدی معمول است.که مولفه ی نرخ تغییر شکل :

$$e_{ij}=\begin{bmatrix} e_{11} & e_{12} & e_{13} \\ e_{21} & e_{22} & e_{23} \\ e_{31} & e_{32} & e_{33} \end{bmatrix}$$

و تنش ها :

$$\tau_{ij}=\begin{bmatrix} \tau_{11} & \tau_{12} & \tau_{13} \\ \tau_{21} & \tau_{22} & \tau_{23} \\ \tau_{31} & \tau_{32} & \tau_{33} \end{bmatrix}$$

را بصورت تانسور(ماتریس)می نویسند.

تجزیه نرخ تغییر شکل المان سیال در جریان آشفته به یک مولفه ی متوسط و یک مولفه ی نوسانی به شکل زیر خواهد بود:

$$e_{ij}=E_{ij}+\acute{e}_{ij}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j}+\frac{\partial U_j}{\partial x_i}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial \acute{u}_i}{\partial x_j}+\frac{\partial \acute{u}_j}{\partial x_i}\right)$$

معادله حاکم برای انرژی جنبشی جریان متوسط k :

یک معادله برای انرژی جنبشی متوسط k را می توان با ضرب کردن مولفه ی X معادله رینولدز در U و مولفه ی Y معادله در V مولفه ی Z در W،بدست آورد.پس از جمع نتایج با هم و مقداری عملیات جبری می توان نشان داد که معادله میانگین زمانی انرژی جنبشی متوسط حاکم بر جریان بصورت زیر خواهد بود :

$$\frac{\partial(\rho K)}{\partial t}+div(\rho K\vec{U})=div\left(-p\vec{U}+2\propto\vec{U}E_{ij}-\rho\vec{U}\overline{\acute{u}_i\acute{u}_j}\right)-2\propto E_{ij}.E_{ij}-\rho\overline{\acute{u}_i\acute{u}_j}E_{ij}$$

معادله حاکم برای انرژی جنبشی جریان آشفته k :

با ضرب هر کدام از معادلات زمانی ناویر استوکز در مولفه های سرعت نوسانی مربوطه و جمع همه نتایج ناشی از تکرار این عمل روی معادلات رینولدز و کم کردن دو معادله حاصل و بازنویسی خیلی اساسی معادله انرژی جنبشی k،رابطه زیر را نتیجه می دهد.

$$\frac{\partial(\rho K)}{\partial t} + div(\rho K\vec{U}) = div\left(-p\vec{u} + 2 \propto \overline{\vec{u}E_{ij}} - \rho\tfrac{1}{2}\acute{u}_i.\acute{u}_i\acute{u}_j\right) - 2 \propto \overline{\acute{e}_{ij}\acute{e}_{ij}} - \rho\overline{\acute{u}_i\acute{u}_j}E_{ij}$$

معادلات مدل k-ε :

امکان توسعه معادلات انتقال مشابه برای کمیت های آشفتگی که شامل نرخ اضمحلال لزجی **ε** می باشد وجود دارد.معادله ی دقیق **ε**، بهر حال شامل تعداد زیادی عبارات مجهول و غیر قابل اندازه گیری میباشد.مدل k-ε استاندارد دو معادله ی مدل دارد،یکی برای k ویکی برای **ε** که بر روی بهترین درک از فرآیندهای مناسبی که سبب تغییرات این متغیرها میشوند،بنا شده اند. Kوε را برای تعریف مقیاس سرعت v و مقیاس طول **l** استفاده می کنیم که بصورت معرف مقیاس بزرگ آشفتگی می باشند:

$$v = \sqrt{k}$$

$$l = \frac{k^{3/2}}{\boldsymbol{\varepsilon}}$$

سوالی ممکن است پیش بیاید،اعتبار استفاده از متغیر **ε** برای تعریف مقیاس **l** میباشد.ما مجاز به انجام اینکار هستیم زیرا در اعداد رینولدز بالا نرخی که در ادی های بررزگ از جریان متوسط انرژی میگیرند دقیقا مطابق نرخ انتقال انرژی به ادیهای کوچک و مستهلک کننده است.اگر چنین نبود انرژی در بعضی مقیاس های آشفتگی میتوانست بدون محدودیت رشد کند و یا کاهش یابد.در عمل این اتفاق نمی افتد و ما را قانع می کند که در تعریف **l** از **ε** استفاده می کنیم.می توان به کمک آنالیز ابعادی نشان داد که ویسکوزیته آشفته ی را می توان به طول مقیاس ادی های مقیاس ادی های بزرگ جریان آشفته مرتبط ساخت.

$$\propto_t = C\rho v l$$

که در آن **v** و **l** به ترتیب سرعت مقیاس و طول مقیاس بزرگترین ادی ها در میدان جریان آشفته می باشند.با مقایسه ی دو معادله اخیر به نتیجه زیر میرسیم:

$$\propto_t = C\rho v l = \rho C_{\propto}\frac{k^2}{\varepsilon}$$

مدل استاندارد،معادلات انتقال که برای مدل k-ε بصورت زیر بیان میشود.

$$\frac{\partial(\rho k)}{\partial t} + div(\rho k\vec{U}) = div\left[\frac{\propto_t}{\sigma_k}grad(k)\right] + 2\propto_t E_{ij}E_{ij} - \rho\varepsilon$$

$$\frac{\partial(\rho\varepsilon)}{\partial t} + div(\rho\varepsilon\vec{U}) = div\left[\frac{\propto_t}{\sigma_\varepsilon}grad(\varepsilon)\right] + C_{1\varepsilon}\frac{\varepsilon}{k}2\propto_t E_{ij}E_{ij} - C_{2\varepsilon}\rho\frac{\varepsilon^2}{k}$$

معادله های انتقال k-ε در نرم افزار Fluent و نرم افزار CFx:

مدل **k-ε** استاندارد،معادلات انتقالی که در این مدل در نرم افزار فلوئنت استفاده می شود به شرح زیر است:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho k) + \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho k u_i) = \frac{\partial}{\partial x_j}\left[(\propto + \frac{\propto_t}{\sigma_k})\frac{\partial k}{\partial x_j}\right] + G_k + G_b$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\varepsilon) + \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho\varepsilon u_i) = \frac{\partial}{\partial x_j}\left[\left(\propto + \frac{\propto_t}{\sigma_\varepsilon}\right)\frac{\partial\varepsilon}{\partial x_j}\right] + C_{1\varepsilon}\frac{\varepsilon}{k}(G_k + C_{3\varepsilon}G_b) - C_{2\varepsilon}\rho\frac{\varepsilon^2}{k}$$

معادلات شامل پنج قسمت قابل تنظیم C_μ ، σ_k ، σ_ε ، $C_{1\varepsilon}$ و $C_{2\varepsilon}$ هستند که مقادیر آن در بخش قبل ذکر گردید و :

G_k=ترم نولید انرژی جنبشی آشفته به دلیل گرادیان سرعت متوسط.

G_b=ترم نولید انرژی جنبشی آشفته به دلیل نیروی بویانسی است.

ترم $\boldsymbol{G_k}$ در معادله بیانگر میزان تولید انرژی جنبشی آشفتگی ناشی از اندرکش بین جریان متوسط و میدان جریان آشفته میباشد و از همین رو به آن اصطلاحا ترم تولید برشی گفته میشود. و ترم $\boldsymbol{G_b}$ نیز بیانگر تولید اتلاف بویانسی ناشی از میدان چگالی نوسان کننده ی جریان میباشد. روابط صریح برای G_k بصورت زیر میباشد:

$$G_k = -\rho\overline{\acute{u}_i\acute{u}_j}\frac{\partial u_i}{\partial x_j}$$

با توجه به توصیفات فوق،ضعف مدل استاندارد **k-ε** از کجا ناشی میشود؟

چندین عامل متفاوت دست به دست یکدیگر داده و کارایی مدلی همچون مدل استاندارد **k-ε** را به مسائل ساده محدود نموده اند:

1. در فرآیند طی شده برای تعیین مقدار ضریب C_μ که در بالا به تفسیل بیان گردید، از آنجا که مبنای محاسبات بر مبنای قانون لگاریتمی قرار داشته است،لذا در خارج از ناحیه ی قانون لگاریتمی بایستی مجددا این فرآیند از ابتدا طی شده و مقدار جدید ضریب C_μ تعیین گردد.
2. قانون لگاریتمی به کار رفته در تعیین مقدار C_μ از پروفیل سرعت تعادلی توابع دیواره برای صفحه ی تخت استفاده شده است.بنابراین اندازه بدست آمده تنها برای این شرایط معتبر است و برای شرایط دور از نقطه ی تعادل،مثلا در نزدیکی نقاط جدایش جریان و یا نقاط اتصال مجدد جریان و یا در نقاطی که انحراف زیادی از جریان بر روی صفحات تخت وجود دارد.
3. از آنجا که قانون لگاریتمی برای محدوده ی جریان تمام آشفته ارائه شده است،لذا مبنای استفاده شده در به بدست اوردن ضرائب نظیر معادله استاندارد k-ε مبنای جریان آشفته است و لذا مدل استاندارد k-ε در نزدیکی دیواره که جریان آرام میباشد با ضرائب فعلی خود با مشکلات جدی روبرو است مگر آنکه از فرم های اصلاح شده ی مدل k-ε که اثرات آرام بودن جریان در نزدیک دیواره در ان مد نظر قرار گرفته است استفاده شود
4. راه حلی که می توان برای رفع چنین مشکلی پیشنهاد نمود،استفاده از یک معادله ی جدید برای تعیین C_μ علاوه بر دیگر معادلات می باشد،بطوری که مقدار C_μ در هر نقطه در داخا میدان برحسب متغیرهای محلی جریان تعین گردد.یعنی علاوه بر دو معادله انتقالی برای k-ε می توان از یک نقطه ی معادله انتقالی کمکی برای تعیین توزیع C_μ در درون میدان جریان استفاده نمود،یعنی یک مدل سه معادله ای جدید!

ویژگی های مدل استاندارد k-ε :

مدل استاندارد k-ε وقتی در کنار رابطه ی **Boussinesq Eddy Viscosity** بکار برده میشود،برای طیف وسیعی از مسائل نسبتا مشکل به خوبی کار می کند. اما برای مسائلی که شامل غیر ایزوتروپهای شدید جریان و نیز اثرات غیر تعادلی هستند،این مدل در نهایت به جواب هایی خواهد رسید که تا حدی فوق دیفیوز است،یعنی مغایر با μ_t که توسط این مدل پیش بینی میشود تا حدی بزرگ خواهند بود.

بعنوان یک نتیجه ی مهم از این عیب موجود در مدل،می توان گفت این مدل تمایل به پیش بینی پروفیل های کشیده تر برای جریانات Swirling و نیز ناحیه ی Recirculating کوتاهتر در جریانات جدایش یافته دارد.گاه دیده شده است که این مدل،در پیش بینی هسته های جدایش تشکیل شده بر روی سطوح با انحنای ملایم،نتایج غلطی را در بر

داشته است.بر خلاف بسیاری از موفقیتهای مدل استاندارد k-ε این مدل دارای جوابهای نه چندان قوی در بحث جریانات غیر محصور است برخی دیگر از این گونه نقایص عبارت است از :

- مدلسازی لایه های برشی ضعیف
- مدلسازی جریانات پیچشی
- جریانات با کرنشهای بسیار بزرگ و وسیع
- لایه های مرزی بسیار منحنی وار و مسیر های واگرا
- جریانات دورانی و چرخشی
- جریان ثانویه در کانالهای طویل با مقاطع غیر گرد
- جریانات کاملا توسعه یافته در کانالهای با مقاطع غیر گرد

به منظور اصلاح این عیوب،تلاش های زیادی بر روی اصلاح مدل دو معادله ای k-ε صورت گرفته که به ظهور نسل های جدیدی از مدل k-ε و نیز تولد مدلهای جدید تر منجبر شد.

ارزیابی عملکرد مدل :

مدل k-ε مدل آشفتگی معتبر و با کاربرد وسیع میباشد.این مدل در محاسبه ی مجموعه گسترده ای از جریان های لایه برشی نازک و چرخش مجدد،بدون اینکه احتیاجی به تنظیم مورد به مورد ثابت های مدل باشد ،موفقیت چشم گیری داشته است.عملکردهای مدل،بویژه برای جریان هایی که در آن تنش های برشی رینولدز اهمیت بیشتری دارد،خوب بوده است.این موضوع شامل محدوده ی وسیعی از جریان ها با کاربرد های مهندسی صنعتی هم میشود که این مسله عمومیت آن را نشان می دهد.با وجود موفقیت های زیاد، مدل استاندارد k-ε فقط برای جریان های غیر محصور خوب عمل می کند.بر اساس گزارش ها این مدل برای لایه های برشی ضعیف (دور از دنباله و لایه های مخلوط)عملکرد خوبی نداشته و برای بخش وسیعی از این جریانها نرخ تولید انرژی جنبشی آشفته خیلی کمتر از نرخ اضمحلال است و برای غلبه بر مشکلات از تعدیل ثابت های مدل،یعنی C،صورت می گیرد.

این مدل همچنین مشکلاتی با جریانهای چرخشی و جریان های همراه با کرنش های بزرگ و سریع و اضافی(مثلا لایه های مرزی قوس دار و یا گذرگاهای واگرا)دارد.چون این مدل شامل اثرات خطوط جریان خمیده در آشفتگی نیست.جریان های ثانویه در کانالهای غیر دایره ای طولانی که با تنش های رینولدز عمودی غیر منظم به حرکت در می اید را نیز نمی توان بدلیل عملکرد ضعیف تنش های عمودی،با مدل k-ε پیش بینی کرد.بالاخره این مدل نسبت به نیروی بدنه به دلیل چرخش چارچوب مرجع حساس است.

مدل های معادله ی تنش رینولدز :

پیچیده ترین مدل کلاسیک آشفتگی مدل معادله تنش رینولدز (RSM) است که مدل مرتبه دوم نیز نامیده می شود.منابع زیادی در مدل k-$\boldsymbol{\varepsilon}$،هنگامیکه پیش بینی جریان های با میدان کرنش پیچیده یا نیروی حجمی چشمگیری مورد نظر است ،وجود دارد.تحت این شرایط تنش های منفرد رینولدز به سختی توسط رابطه بوزینسک بیان می شود حتی اگر انرژی جنبشی آشفته با دقت مناسبی محاسبه شود.از طرف دیگر ،معادله ی انتقال تنش رینولدز دقیق را می توان برای اثرات جهتی میدان تنش رینولدزی استفاده کرد.پیش از این در مدل های آشفتگی دیده شد که با استفاده از رابطه ی اساسی **Eddy Viscosity** می توان مولفه های تنش رینولدزی را به گرادیانهای سرعت میدان جریان متوسط مرتبط نمود.در مدل **RSM** برای محاسبه ی هریک از ترم های تنش رینولدز از یک معادله ی انتقالی کمک گرفته می شود.چنانچه به تانسور تنش رینولدزی برای یک مسله سه بعدی توجه شود تعداد تنشهای رینولدز مستقلی که بایستی برای یک مسله ی سه بعدی حل شود ، شش عدد میباشد.بنابراین برای تعیین دقیق توزیع تنشهای رینولدز در یک مسله سه بعدی به شش معادله ی انتقالی نیاز میباشد.در حالیکه در یک مسله سه بعدی ،چنانچه بخواهیم از مدلی مانند مدل دو معادله k-$\boldsymbol{\varepsilon}$ استفاده نماییم،در این صورت از بین شش تنش رینولدز مجهول مورد نظر تنها می توان مطمن بود که تنها دو تنش بصورت دقیق محاسبه و مابقی بطورت غیر دقیق محاسبه شده اند.

$$\boldsymbol{R_{ij}} = -\frac{\tau_{ij}}{\rho} = \overline{\acute{u}_i \acute{u}_j} = \begin{bmatrix} \overline{\acute{u}^2} & \overline{\acute{u}\acute{v}} & \overline{\acute{u}\acute{w}} \\ \overline{\acute{v}\acute{u}} & \overline{\acute{v}^2} & \overline{\acute{v}\acute{w}} \\ \overline{\acute{w}\acute{u}} & \overline{\acute{w}\acute{v}} & \overline{\acute{w}^2} \end{bmatrix}$$

مدلهای توربولانس دو معادله ای (مانند مدلهای k-$\boldsymbol{\varepsilon}$)پیش بینی نسبتا خوبی از مشخصات و فیزیک که بیشتر جریانهایی که در صنعت کاربرد دارند،ارائه می نماید.درجریان های سیال در جایی که انتقال آشفتگی یا اثرات غیر تعادلی بودن مهم می شوند،فرض لزجت گردابه ای اعتبار خود را از دست میدهد و لذا مدلهایی که براساس لزجت گردابه ای هستند قادر به پیش بینی درست جریان نخواهند بود.مدلهای تنش رینولدز به طور ذاتی شامل اثرات انحنای خطوط جریان میباشند.در نظر داشته باشیم برای مدلسازی جریانهای زیر بهتر است از مدلهای تنش رینولدز استفاده گردد:

- جریانهای برشی آزاد سخت غیر ایزوتروپ،مانند مولفه های چرخشی در جریانهای چرخشی
- جریانهای با تغییرات ناگهانی در نرخ متوسط کرنش
- جریانهای با میدان کرنش پیچیده
- جریانهای با انحنای خطوط جریان شدید

- جریان ثانویه
- جریان های شامل اثرات جاذبه

دلایل استفاده از مدل RSM:

مدلهای Eddy Viscosity در جریانات لایه ی مرزی متصله،تا جایی که تنها یک مولفه از تانسور تنش رینولدز از اهمیت برخوردار است،خوب جواب میدهند.در چنین جریاناتی،مدل Eddy Viscosity معیاری از مولفه ی غالب تنش رینولدز می باشد. اما چنانچه جریان از این حالت بسیار ساده فرضی کمی انحراف پیدا نماید و یا به اصطلاح اندکی پیچیده تر گردد،دیگر فرض استفاده Eddy Viscosity صادق نمیباشد و لذا دیگر نمی توان به اعتبار مدلهای Eddy Viscosity دل بست.توسعه مدلهای دیفرانسیلی RSM ابتدا از سال 1968 با سخنرانی **دونالدسون** در دانشگاه استنفورد و تاکید وی مبنی بر اهمیت مدلسازی تنشهای رینولدز آغاز شد.این مدل تحت عناوین دیگری همچون Second Order Closure و یا Second moment Closure ویا Second Order Modeling شناخته می شود.از آن زمان به بعد بود که اندک اندک مدل های Eddy Viscosity کنار گذاشته شده و در عوض مولفه های مجهول تنش رینولدز مستقیما از حل معادلات انتقال دیفرانسیلی بدست آمدند.همانطور که در معادله ی پایین نشان داده شده،تانسور تنش رینولدز یک تانسور متقارن میباشد و این بدین معناست که در حالت دو بعدی تنها به حل سه معادله ی انتقال و در حالت سه بعدی تنها به حل شش معادله ی انتقال برای تعیین توزیع تنش رینولدز درون میدان جریان نیاز میباشد.

$$\boldsymbol{R_{ij}} = -\frac{\tau_{ij}}{\rho} = \overline{\acute{u}_i\acute{u}_j} = \begin{bmatrix} \overline{\acute{u}^2} & \overline{\acute{u}\acute{v}} & \overline{\acute{u}\acute{w}} \\ \overline{\acute{v}\acute{u}} & \overline{\acute{v}^2} & \overline{\acute{v}\acute{w}} \\ \overline{\acute{w}\acute{u}} & \overline{\acute{w}\acute{v}} & \overline{\acute{w}^2} \end{bmatrix}$$ تانسور تنش رینولدز برای یک جریان سه بعدی

$$\boldsymbol{R_{ij}} = -\frac{\tau_{ij}}{\rho} = \overline{\acute{u}_i\acute{u}_j} = \begin{bmatrix} \overline{\acute{u}^2} & \overline{\acute{u}\acute{v}} \\ \overline{\acute{v}\acute{u}} & \overline{\acute{v}^2} \end{bmatrix}$$ تانسور تنش رینولدز برای یک جریان دو بعدی

البته هنوز هم برای تعیین طول مقیاس هم در حالت دو بعدی و هم در حالت سه بعدی،علاوه بر معادلات مذکور نیاز به حل یک معادله ی اضافی دیگر نیز میباشد.لذا مدل RSM از مدلهای رایج Eddy Viscosity پیچیده تر میباشد،لیکن با وجود پیچیدگی این مدل،این مدل هنوز جالب توجه میباشند چرا که توصیف به مراتب دقیق تری از آشفتگی را ارائه داده و برای طیف بسیار وسیع و متنوعی از جریانات مهندسی معتبر می باشند.این مدل می تواند بسیاری از اثرات پیچیده ی جریانات در طبیعت و مهندسی را در بر گیرند،از آن جمله

میتوان به جریاناتی نظیر جریانات دارای خطوط جریانی منحنی و یا جریانات دارای چرخش و دوران و یا جریانات جابجایی آزاد یا جریانات بویانت اشاره نمود که این مدل در مدلسازی آنها از قابلیت خوبی برخوردار است.

دیسکریتیزاسیون یا منفصل سازی یا اختلاف محدود(Finite Difference):

واژگان کلیدی:

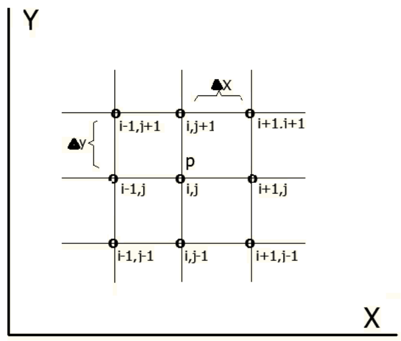
اختلاف محدود،بسط تیلور

مقدمه :

تا به حال در مورد CFD بحث گردیده است و معادلات مشخصه ی حرکت را برای دینامیک سیالات را بدست آوردیم.و آنان را با دقت بررسی کردیم و رفتار ریاضی انواع مختلف معادلات دیفرانسیل جزیی را مقایسه کردیم،داشتن چنین پشتوانه ای برای CFD لازم است.در این بخش پاره ای از ابعاد اصلی منفصل سازی یعنی چگونگی جایگزین کردن مشتقات جزیی(یا انتگرالی) در معادلات مشخصه حرکت با اعداد مجزا ارائه خواهد شد.منفصل سازی معادلات دیفرانسیل جزیی(اختلاف محدودFinite Differece) نامیده می شود ومنفصل سازی فرم های انتگرالی معادلات(حجم محدود Finite Volume) نامیده می گردد.

ابعاد اصلی تبدیل معادلات :

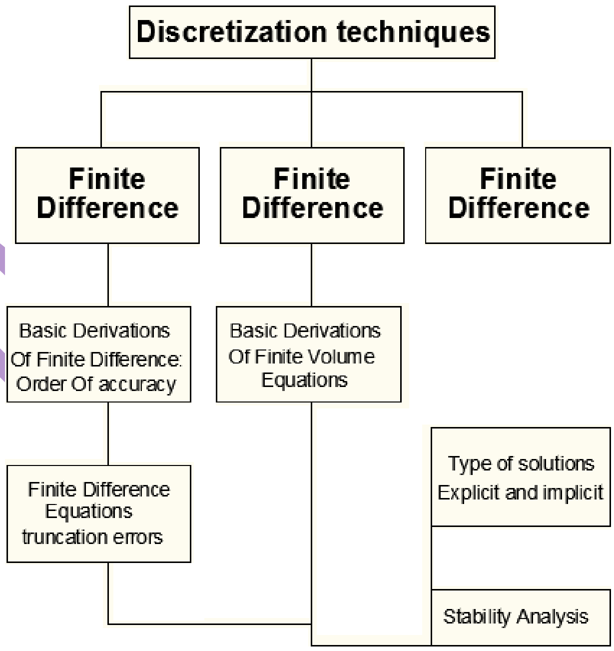
کلمه دیسکراتیزاسیون احتیاج به قدری توضیح دارد،طبعا از کلمه دیسکریت مشتق می شود.در فرهنگ لغات AHDEL به معنی ساختن یک چیز جداگانه،انفرادی،مجزا،متشکل از اجزا جداگانه آمده است.در هر حال کلمه منفصل سازی را نمی توان در فرهنگ لغات WNWD پیدا کرد.این کلمه ی مزبور در معروف ترین فرهنگ های لغت امروز پیدا نمی شود.که این بیانگر این واقعیت است که کلمه ی فوق یک کلمه نسبتا جدید و تخصص است و ما آنرا منفصل سازی ترجمه می کنیم.در وواقع این لغت در فرهنگ آنالیز عددی بی مانند است.نخستین بار در 1955 توسط **واسو** در زبان آلمانی معرفی شد وسپس در 1965 در کتاب کلاسیک **ایمز** در مورد معادلات دیفرانسیل جزیی(مرجع 24) بکار رفت واخیرا توسط جامعه ی CFD پذیرفته شد.بطور خلاصه منفصل سازی جریانی است که طی آن یک عبارت ریاضی به شکل بسته توسط عبارت های مشابه تخمین زده میشود.این عبارت های مشابه فقط مقادیری برای تعداد معدودی از نقاط یا حجم های مجزا در فضا معین می کند.یک عبارت ریاضی به شکل بسته ممکن است یک تابع یا معادله ی دیفرانسیل یا یک معادله ی انتگرالی شامل توابعی باشد که تمامی آنها دارای یک محیط پیوسته نا محدود از اعداد در داخل یک فضا می باشد.این تعریف اندکی مبهم به نظر می رسد.بنابراین برای روشن شدن مطلب وارد جزییات آن می شویم.حل تحلیلی معادلات دیفرانسیل جزیی شامل عبارات به شکل بسته می باشد که تغییرات متغیر های غیر مستقل را به طور پیوسته در داخل فضا ارائه می دهد.بر خلاف حل های تحلیلی،حل های عددی جواب را فقط در نقاط مجزا در فضا که نقاط شبکه (mesh) نامیده می شوند ارائه می دهد.شکل روبرو در نظر می گیریم که قسمتی از شبکه ی مجزا در صفحه XY را نشان می دهد.



برای راحتی فرض می کنیم که فاصله نقاط شبکه در جهت X ثابت و برابر ΔX است و همچنین فاصله ی نقاط شبکه ی در جهت Y ثابت و برابر ΔY است.توجه ΔX و ΔY ضرورتا نباید ثابت باشند،بلکه ممکن است فواصل در هر دو جهت کاملا نامساوی باشد.یعنیΔX و ΔY بین هر دو نقطه متوالی ممکن است متفاوت باشد.اما اکثر کاربردهای CFD شامل حل های عددی بر روی شبکه ای است که شامل فواصل مساوی در هر دو جهت میباشد،زیرا این انتخاب تا حد زیادی برنامه ریزی مساله را آسان می کند،فضای حافظه را تقلیل می دهد و دقت بیشتری دارد.لازم به یادآوری است که تحقیقات اخیر CFD بر روی شبکه های غیر سازمان یافته متمرکز است که در آن نقاط شبکه بطور نامرتب در میدان جریان قرار دارند.

با مراجعه به شکل بالا نقاط شبکه با اندیس i در جهت x و اندیس j در جهت y مشخص میشوند.بنابراین اگر(i,j) اندیس نقطه p در شکل بالا

باشد،نقطه ای که بلافاصله در سمت راست p قرار گرفته با اندیس (i+1,j) ،نقطه ای که بلافاصله در سمت چپ آن قرار گرفته است با اندیس (i,j-1)،نقطه ای که بلافاصله در بالای آن قرار گرفته با اندیس (i,j+1) و نقطه ای که در پایین آن قرار گرفته باشد با اندیس (i,j-1) مشخص خواهد شد.حال می خواهیم کلمه ی منفصل سازی را با جزییات بیشتر تشریح کنیم.فرض می کنیم یک میدان جریان دو بعدی که از معادلات ناویر-استوکز یا معادلات اولر پیروی می کند داشته باشیم.اینها معادلات دیفرانسیل جزیی هستند که در فصل های دیگر این پایان نامه به تشریح آن پرداختیم.حل تحلیلی این معادلات عبارتهای بسته ای برای u ، v ،p وρ و غیره بر حسب x و y ارائه میدهد.این عبارتها ممکن است مقادیر متغیرهای جریان را در هر نقطه دلخواه جریان یعنی در هر یک از بینهایت نقطه واقع در صفحه ی (x,y) در فضا ارائه دهد.از سوی دیگر خارج از قسمتهای تقریبی اختلاف مقادیر جبری را جایگزین مشتقات جزئی در معادلات مشخصه نماییمفمعادلات دیفرانسیل جزیی تبدیل یک سیستم معادلات جبری خواهد شد که از حل آنها می توان مقادیر متغیرهای میدان جریان را فقط در نقاط مجزای شبکه بدست آورد.خارج قسمتهای اختلاف مقادیر جبری صرفا بر حسب متغیرهای میدان در دو یا بیش از دو نقطه بیان می شوند،به این ترتیب معادلات دیفرانسیل جزئی اولیه منفصل شده اند.بعلاوه این روش منفصل سازی را روش اختلافات محدود می نامند.حلهای اختلاف محدود بطور وسیعی در CFD بکار می روند.



معرفی اختلافهای محدود:

در این روش خارج قسمتهای اختلاف مقادیر جبری مناسب یا اختلاف محدود را با مشتقات جزیی جایگزین می کنیم.متداول ترین نمایش مشتقات بصورت اختلاف محدود مبتنی بر بسط سری تیلور می باشد.به عنوان مثال با مراجعه به شکل بالا اگر $u_{i,j}$ معرف مولفه ی x سرعت در نقطه ی (i,j) باشد،در اینصورت سرعت $u_{i+1,j}$ در نقطه ی (i+1,j) را می توان بر حسب سری تیلور در نقطه ی (i,j) بصورت زیر بسط داد :

$$u_{i+1,j} = u_{i,j} + (\frac{\partial u}{\partial x})_{i,j}\Delta x + (\frac{\partial^2 u}{\partial x^2})_{i,j}\frac{(\Delta x)^2}{2} + (\frac{\partial^3 u}{\partial x^3})_{i,j}\frac{(\Delta x)^3}{6} + \cdots$$

معادله ی بالا از لحاظ ریاضی یک عبارت دقیق برای $u_{i+1,j}$ در صورتیکه (اولا)تعداد جمله های نامحدود و سری همگرا باشد و (ثانیا) Δx به سمت صفر میل نماید.اگر معادله ی بالا را برای $(\frac{\partial u}{\partial x})_{i,j}$ حل کنیم خواهیم داشت :

$$(\frac{\partial u}{\partial x})_{i,j} = \frac{u_{i+1,j} - u_{i,j}}{\Delta x} - (\frac{\partial^2 u}{\partial x^2})_{i,j}\frac{(\Delta x)}{2} + (\frac{\partial^3 u}{\partial x^3})_{i,j}\frac{(\Delta x)^2}{6} + \cdots$$

در معادله ی بالا مشتق جزیی واقعی محاسبه شده در نقطه (i,j) در سمت چپ داده شده است.اولین جمله ی سمت راست $\frac{u_{i+1,j}-u_{i,j}}{\Delta x}$ یک اختلاف محدود است که مشتق جزیی را معرفی می کند.بقیه ی جملات سمت راست خطای ناشی از حذف این جملات را تشکیل می دهند.به عبارت دیگر اگر مشتق جزیی در نقطه ی (i,j) را در معادله مقدار جبری اختلاف محدود در نظر بگیریم خواهیم داشت :

$$(\frac{\partial u}{\partial x})_{i,j} \approx \frac{u_{i+1,j} - u_{i,j}}{\Delta x}$$

در اینصورت مقدار خطا در مدله بالا به ما می گوید که چه جملاتی در این مقدار تقریبی نا دیده گرفته شده اند.در معادله ی بالا جمله ای که کمترین درجه را در عبارت خطا ارد شامل توان اول Δx میباشد از این رو عبارت اختلاف محدود در معادله ی بالا با دقت درجه ی اول خوانده می شود.به طور رسمی تر معادله ی بالا را می توان به شکل زیر بنویسیم:

$$(\frac{\partial u}{\partial x})_{i,j} = \frac{u_{i+1,j} - u_{i,j}}{\Delta x} + O(\Delta x)$$

که $O(\Delta x)$ علامت رسمی ریاضی است که جملات شامل توانهای Δx را معرفی میکنند.این معادله دقیق تر از معادله ی قبل است.در این معادله درجه ی بزرگی خطای ناشی از حذف جملات بطور صریح نشان داده شده است با مراجعه به شکل ملاحظه می کنیم که عبارت اختلاف محدود در معادله ی بالا بر حسب خواص نقطه *(i,j)* و همچنین نقطه واقع در سمت راست آن *(i,j+1)* بیان میشود.خواص نقطه واقع در سمت چپ *(i,j)* مورد استفاده قرار نگرفته است.از این رو اختلاف محدود در معادله بالا

اختلاف به جلو نامیده می شود.به این دلیل اختلاف نشان داده شده برای $(\frac{\partial u}{\partial x})_{i,j}$ در معادله ی بالا که یک اختلاف با دقت درجه اول میباشد به عنوان اختلاف به جلو از درجه اول شناخته شود.

حال اگر سری تیلور را برای$u_{i-1,j}$بر حسب $u_{i,j}$ بسط خواهیم داشت :

$$u_{i-1,j} = u_{i,j} + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{i,j}(-\Delta x) + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_{i,j}\frac{(-\Delta x)^2}{2} + \left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\right)_{i,j}\frac{(-\Delta x)^3}{6} + \cdots$$

$$u_{i-1,j} = u_{i,j} - \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{i,j}(-\Delta x) + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_{i,j}\frac{(-\Delta x)^2}{2} - \left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\right)_{i,j}\frac{(-\Delta x)^3}{6} + \cdots$$

معادله بالا را برای $\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{i,j}$ حل می کنیم:

$$(\frac{\partial u}{\partial x})_{i,j} = \frac{u_{i+1,j} - u_{i,j}}{\Delta x} + O(\Delta x)$$

اختلاف محدود در معادله بالا بر حسب خواص نقطه (i,j) و همچنین نقطه واقع در سمت چپ آن (i-1,j) بیان شده است.خواص نقطه واقع در سمت راست (i,j) مورد استفاده قرار گرفته نشده است.از این رو اختلاف محدود در معادله ی بالا را اختلاف به عقب می نامیم.در اغلب کاربردهای CFD دقت درجه اول کافی نمیباشد.یک اختلاف محدود با دقت درجه دوم بصورت زیر بیان می شود:

$$u_{i+1,j} - u_{i-1,j} = 2(\frac{\partial u}{\partial x})_{i,j}\Delta x + 2(\frac{\partial^3 u}{\partial x^3})_{i,j}\frac{(\Delta x)^3}{6} + \cdots$$

معادله را میتوان بصورت زیر بیان کرد:

$$(\frac{\partial u}{\partial x})_{i,j} = \frac{u_{i+1,j} - u_{i-1,j}}{2\Delta x} + O(\Delta x)^2$$

خواص بکار رفته برای تشکیل اختلاف محدود نوشته شده در معادله بالا مربوط به نقاط واقع در طرفین نقطه (i,j) میباشد.نقطه (i,j) در واقع بین (i-1,j) و (i+1,j) قرار گرفته است.عبارات اختلافات برای مشتقات y با روشی مشابه آنچه در مورد X گفته بدست می آید.نتایج حاصله مستقیما مشابه به معادلات قبلی برای مشتقات x میباشد.این نتایج به شرح زیر است:

$$(\frac{\partial u}{\partial y})_{i,j} = \begin{cases} \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{\Delta y} + O(\Delta y) \\ \frac{u_{i,j} - u_{i,j-1}}{\Delta y} + O(\Delta y) \\ \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j-1}}{2\Delta y} + O(\Delta y)^2 \end{cases}$$

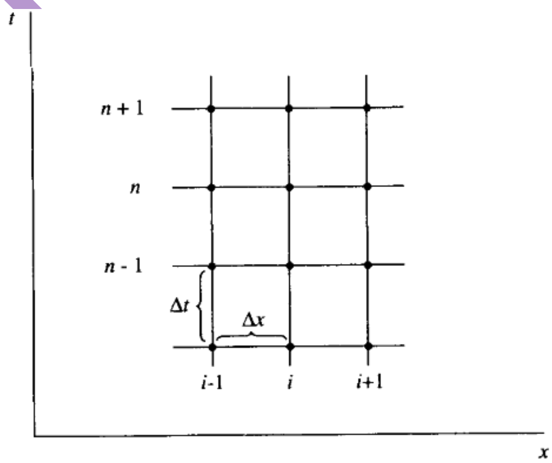
معادلات اختلاف محدود:

در قسمت قبل در مورد تبدیل مشتقات جزیی به عبارتهای اختلاف محدود جبری بحث کردیم. اغلب معادلات دفرانسیل جزیی شامل تعدادی جملات مشتق جزیی میباشند. وقتی که در یک معادله دیفرانسیل جزیی تمام مشتقات جزیی را با عبارت اختلاف محدود جایگزین کنیم، معادله جبری حاصل یک معادله اختلاف نامیده میشود. معادله ی اختلاف نمایش جبری معادلات دیفرانسیل جزیی میباشد. اساس حل های CFD عبارت است از استفاده از عبارات اختلاف که در قسمت قبل بدست آوردیم و جایگزین کردن آنها بجای مشتقات جزئی در معادله ی مشخصه ی جریان. حاصل کار یک سیستم معادلات اختلاف جبری برای متغیرهای مستقل در هر نقطه از شبکه خواهد بود.

برای سهولت یک معادله دیفرانسیل جزئی را در نظر میگیریم که از معادلات مشخصه جریان ساده تر باشد. بعنوان مثال زیر که یک معادله ی هدایت حرارتی یک بعدی و غیر یکنواخت با ضریب انتشار حرارتی ثابت میباشد در نظر میگیریم.

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial t^2}$$

این معادله را صرفا به لحاظ سادگی انتخاب کردیم. در این مرحله نیازی به استفاده از معادلات پیچیده تر جریان نداریم. نکات اصلی معادلات اختلاف محدود را که در این قسمت مورد بحث قرار خواهد گرفت می توان با استفاده از معادله بالا به دست آورد. معادله بالا یک معادله دیفرانسیل جزئی سهموی میباشد. حال عبارتهای اختلاف محدود را جایگزین مشتقات جزئی می کنیم. این معادله شامل دو متغیر مستقل است، x و t. شبکه ی نشان داده شده در شکل زیر را درنظر می گیریم.



وقتی که یکی از متغیرهای مستقل در یک معادله دیفرانسیل جزیی یک متغیر پیماشی باشد در CFD رسم بر این است که اندیس بکار رفته

برای این متغیر را با n نمایش دهیم و آنرا در بالای متغیر مورد نظر قرار دهیم.در این ارتباط مشتق زمانی در معادله بالا را می توان با الهام از معادله اختلاف محدود اختلاف به جلو که قبلا توضیح داده شد بصورت زیر نمایش دهیم :

$$(\frac{\partial T}{\partial t})_i^n = \frac{T_i^{n+1} - T_i^n}{\Delta t} - (\frac{\partial^2 T}{\partial t^2})_i^n \frac{\Delta t}{2} + \cdots$$

که در آن خطای ناشی از حذف جملات مانند معادلات گذشته است.به همین ترتیب مشتق نسبت به x در معادله ی هدایت حرارت را می توان با الهام از معادله اختلاف محدود اختلاف مرکزی که قبلا بیان شده است به شکل زیر نمایش داد:

$$(\frac{\partial^2 T}{\partial t^2})_i^n = \frac{T_{i+1}^n - 2T_i^n + T_{i-1}^n}{(\Delta x)^2} - (\frac{\partial^4 T}{\partial t^4})_i^n \frac{(\Delta x)^2}{12} + \cdots$$

که در آن خطای ناشی از حذف جملات مانند است.حال معادله را به شکل زیر می نویسیم :

$$\frac{\partial T}{\partial t} - \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial t^2} = 0$$

خواهیم داشت :

$$\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial \mathrm{t}} - \alpha \frac{\partial^2 \mathrm{T}}{\partial \mathrm{x}^2} = 0$$

$$= \frac{\mathrm{T}_i^{n+1} - \mathrm{T}_i^n}{\Delta \mathrm{t}} - \alpha \frac{\mathrm{T}_{i+1}^n - 2\mathrm{T}_i^n + \mathrm{T}_{i-1}^n}{(\Delta \mathrm{x})^2} + \left[-(\frac{\partial^2 \mathrm{T}}{\partial \mathrm{t}^2})_i^n \frac{\Delta \mathrm{t}}{2} + \alpha \left(\frac{\partial^4 \mathrm{T}}{\partial \mathrm{x}^4}\right)_i^n \left(\frac{\Delta \mathrm{x}^2}{12}\right) + \cdots \right]$$