فیزیک مدرن

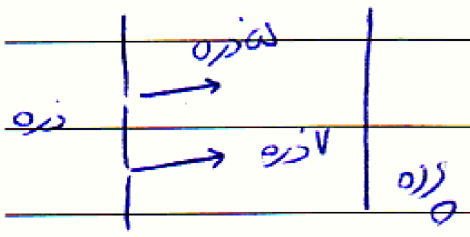
(بخش دوم)

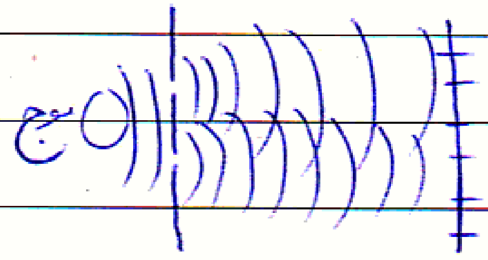
استاد لاله موسوی

تهیه و تنظیم :

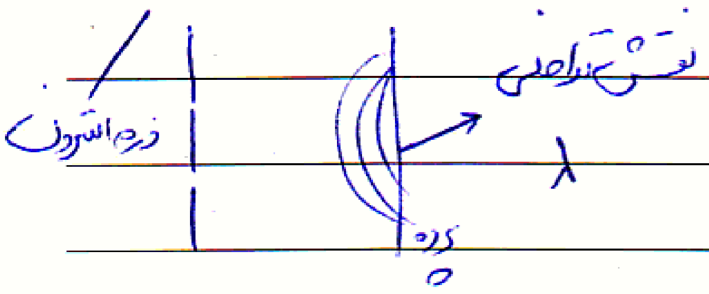
WWW.DEZ-BARGH-88.BLOGFA.COM

فصل ۴) خواص موج‌گونه ذرات

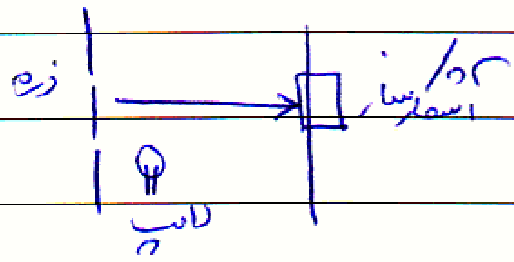




در کلاسیک:



در مکانیک کوانتوم:



نقش تداخلی که در وسیله‌ی نور (لامپ) از بین می‌رود.

اصل عدم قطعیت برای امواج کلاسیک؟

$y = y_1 \sin k_1 x$ $\lambda = \frac{2\pi}{k_1}$

$y = y_1 \sin k_1 x + y_2 \sin k_2 x$ → دو موج را با هم جمع

در فیزیک کلاسیک: $\Delta x \cdot \Delta k \approx 1$ از مرتبه‌ی یک است.

Δk خطا در اندازه‌گیری k

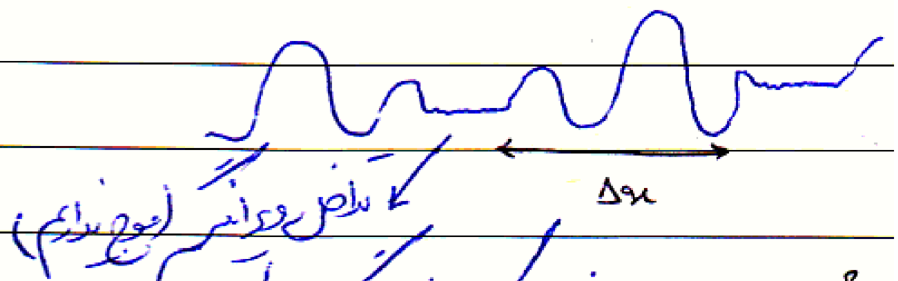
Δ خطا

اگر بتوانیم مکانی را با دقت اندازه بگیریم، نسبت دیگر را نمی‌توانیم اندازه بگیریم:

$\Delta x \to \infty$

$\Delta k \approx \frac{1}{\infty} \to \Delta k = 0$

$\Delta \omega \cdot \Delta t \approx 1$ انرژی و زمان



مثال) در جریان یک اندازه‌گیری که طول موج ... ، ۱۰ طول موج در مسافت $200\ cm$، شمرده می‌شوند.

حداقل عدم قطعیت در طول موج را، به شکلی است از این قیاس به دست آید، برآورد کنید؟

$\Delta x \cdot \Delta k \sim 1$ $\qquad k = \frac{2\pi}{\lambda} \rightarrow dk = -\frac{2\pi}{\lambda^2} d\lambda$

یعنی اضافه کردن تعداد بسیار زیادی موج‌ها

$\Delta k = \frac{2\pi}{\lambda^2} \Delta\lambda \qquad \Delta x \cdot \frac{2\pi}{\lambda^2} \Delta\lambda \sim 1 \Rightarrow \Delta\lambda \sim \frac{\lambda^2}{2\pi \Delta x}$

$\lambda = 20\,cm \qquad \Delta\lambda \sim \frac{(20)^2}{2\pi(200)} \rightarrow \Delta\lambda \sim 0.3\,cm$

$\Delta x = 200\,cm \qquad \pi \to 3.14$

روابط عدم قطعیت هایزنبرگ:

ثابت پلانک

$\Delta x \cdot \Delta k \sim 1 \qquad$ تکانه $p = \frac{h}{\lambda} = \frac{hk}{2\pi}$

$\lambda = \frac{2\pi}{k} \qquad p = \hbar k \Rightarrow k = \frac{p}{\hbar}$

$\frac{h}{2\pi} = \hbar$

$\Delta k = \frac{\Delta p}{\hbar} \Rightarrow \Delta x \cdot \frac{\Delta p}{\hbar} \sim 1 \Rightarrow$

p اندازه حرکت خطی (تکانه خطی)

$\Delta x \cdot \Delta p \sim \hbar$

$\Delta x \cdot \Delta k \sim 1$

$\Delta \omega \cdot \Delta t \sim 1$

$E = h\nu = \frac{h\omega}{2\pi} = \hbar\omega \Rightarrow \omega = \frac{E}{\hbar} \Rightarrow \Delta\omega = \frac{\Delta E}{\hbar}$

$\omega = 2\pi\nu \Rightarrow \nu = \frac{\omega}{2\pi} \qquad \frac{\Delta E}{\hbar} \cdot \Delta t \sim 1 \Rightarrow \Delta E \cdot \Delta t \sim \hbar$

مثال) الکترونی با سرعت $3.6 \times 10^6\ m/s$ در جهت x حرکت می‌کند. می‌توانیم سرعت آن را با دقت ۰٫۰۱٪ اندازه بگیریم.

الف) با چه دقتی می‌توانیم بطور همزمان مکان آن را هم تعیین کنیم؟ $(\hbar = 1.05 \times 10^{-34}\ J.s)$

ب) در مورد مکان آن در جهت y چه می‌توانیم بگوییم؟

$V = 3.6 \times 10^6\ m/s$

جرم الکترون $m = 9.11 \times 10^{-31}\ kg$

$P_x = mV_x = 9{,}11\times10^{-31}\times 3{,}6\times10^{6} = 3{,}3\times10^{-24}\ kgm/s$

$\Delta P_x = \%1\ P_x = 3{,}3\times10^{-26}\ kgm/s$

$\Delta x\cdot\Delta P_x \sim \hbar \Rightarrow \Delta x \sim \dfrac{\hbar}{\Delta P_x}$ $\qquad \Delta x \sim \dfrac{1{,}05\times10^{-34}}{3{,}3\times10^{-26}} = 3{,}2\ nm$

ب) چون در جهت x حرکت می‌کند پس در جهت y مولفه‌ای ندارد دیگر $V_y = 0 ,\ \Delta P_y = 0 \Rightarrow \Delta y = \infty$

$P_y = mV_y = 0$

$\Delta y\cdot\Delta P_y \sim \hbar \Rightarrow \Delta y \sim \dfrac{\hbar}{0} \Rightarrow \Delta y = \infty$

پس در مورد حرکت آن هیچ اطلاعی نداریم

$\Delta x = \infty \qquad \Delta x = L \qquad P$ میانگین

$\Delta P_x = 0 \qquad \Delta P_x \sim \dfrac{\hbar}{L} \qquad \langle P\rangle = 0$

$\Delta x\cdot\Delta P_x \sim \hbar \Rightarrow \Delta P_x \sim \dfrac{\hbar}{\infty} = 0$

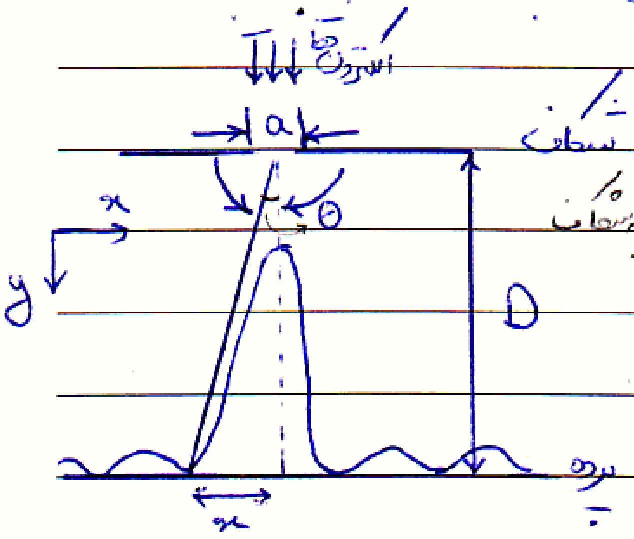
$$\boxed{\sigma_A = \sqrt{(A^2)_{\text{میانگین}} - (A_{\text{میانگین}})^2}}$$

اول به توان ۲ بعد میانگین — اول میانگین بعد به توان ۲

$\Delta P_x = \sqrt{\langle P_x^2\rangle - (\langle P\rangle)^2} \Rightarrow$

$$\boxed{\Delta P_x = \sqrt{\langle P_x^2\rangle}}$$

مثال) باریکه‌ای از الکترون‌های با انرژی یکسان که در جهت y حرکت می‌کنند از شکافی به پهنای a می‌گذرند. عدم قطعیت در مولفه x تکانه یکی از الکترون‌ها را پس از عبور از شکاف بیابید.



قبل از ورود به شکاف $\quad P_x = 0 \quad \Delta P_x = 0 \Rightarrow \Delta x = \infty$

بعد از ورود به شکاف $\quad \Delta x = a \qquad \Delta P_x \sim \dfrac{\hbar}{a}$

$\Delta P_y = \hbar k \qquad k = \dfrac{2\pi}{\lambda} \qquad P_y = \hbar k$

$\sin\theta \sim tg\,\theta = \dfrac{P_x}{P_y} = \dfrac{\hbar/a}{\hbar k} = \dfrac{1}{ak} = \dfrac{\lambda}{2\pi a}$

چون θ زاویه کوچکی است

$a\sin\theta = \dfrac{\lambda}{2\pi} \longrightarrow$ برای اولین کمینه روی پرده

مثال) در واپاشی بتازا الکترون‌ها از هسته‌ی اتم خارج می‌شوند. فرض می‌کنیم الکترون‌های پرانرژی در هسته مدام ایجاد شوند

وگاهی یکی از آن‌ها در مرز دور از جایگاه مشاهده می‌شود. قطر هسته را تقریباً $1\times10^{-14}\,m$ بگیرید و با استفاده از

فمتومتر

$\hbar c = 197\ MeV.fm$ اصل عدم قطعیت گستره‌ی انرژی جنبشی این الکترون را برآورد کنید؟

$1\,fm = 10^{-15}\,m$

$E_0 = 0.511\ MeV$ $\Delta x = 1\times10^{-14}\,m = 10\,fm$

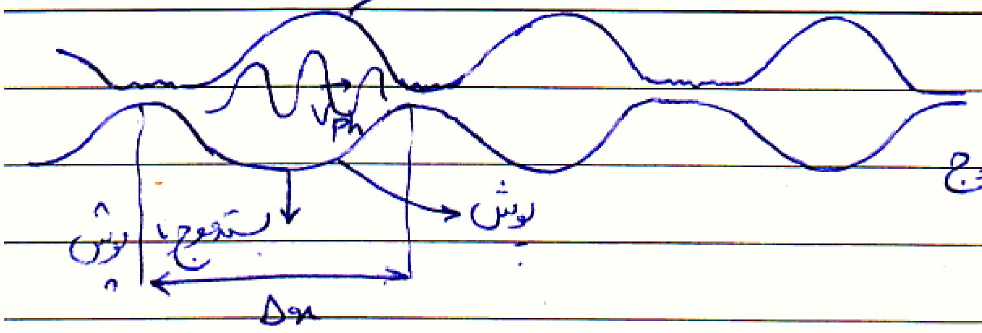
$$\Delta p_x \cdot \Delta x \sim \hbar \Rightarrow \Delta p_x \sim \frac{\hbar}{\Delta x} = \frac{\hbar c}{c\Delta x} \qquad \Delta p_x \sim \frac{\hbar}{\Delta x} \Rightarrow c\Delta p_x \sim \frac{\hbar c}{\Delta x}$$

$$c\Delta p_x \sim \frac{197}{10} = 19.7\ MeV \qquad K = \sqrt{(pc)^2 + E_0^2} - E_0$$

$$K = \sqrt{(19.7)^2 + (0.511)^2} - (0.511) = 19\ MeV \qquad c\Delta p_x = cp_x$$

Subject: سرعت گروه یا پوش یا بسته موج

Year. Month. Date.



سرعت فاز: سرعت تک تک امواج

داخل بسته موج V_{ph}

V_{gr}: سرعت بسته موج

برای اینکه یک موج ثابت بوجود بیاید باید برحسب زمان ثابت باشد؛ $y = A\cos(kx - \omega t)$

$y = A\cos kx \longrightarrow$ ثابت برحسب زمان

دامنه موج

بسته های موج:

$$\begin{cases} y_1 = A\cos k_1 x \\ y_2 = A\cos k_2 x \end{cases} \qquad \Delta k = k_2 - k_1 \qquad k_2 = \Delta k + k_1$$

تداخل

$$y = y_1 + y_2 = A\cos k_1 x + A\cos k_2 x$$

$$y = A(\cos k_1 x + \cos k_2 x)$$

$$y = 2A\left(\cos\left(\frac{k_1+k_2}{2}\right)x \cdot \cos\left(\frac{k_1-k_2}{2}\right)x\right)$$

$$y = 2A\left(\cos\left(\frac{k_1+k_2}{2}\right)x \cdot \cos\left(\frac{\Delta k}{2}\right)x\right)$$

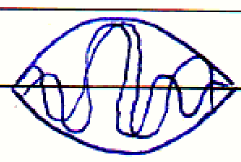
$$\cos a + \cos b = 2\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{a-b}{2}\right) \qquad y = A\cos(kx - \omega t)$$

موج پیش رونده:

$$y(x,t) = 2A\cos\left(\frac{\Delta k}{2}x - \frac{\Delta\omega}{2}t\right)\cos\left(\left(\frac{k_1+k_2}{2}\right)x - \frac{\omega_1+\omega_2}{2}t\right)$$

$$V_{گروه} = \frac{\Delta\omega}{\Delta k} \qquad \frac{\Delta k}{2}\left(x - \frac{\Delta\omega}{\Delta k}t\right)$$

$$V_1 = \frac{\omega_1}{k_1} \qquad V_2 = \frac{\omega_2}{k_2} \qquad V_g = \frac{d\omega}{dk} \qquad V_{ph} = \frac{\omega}{k}$$



تمرینات ۲، ۵، ۶، ۷، ۱۱، ۱۴، ۱۵، ۱۷، ۱۸، ۱۹، ۲۲، ۳۱، ۳۲، ۳۳

Subject:

Year. Month. Date.

دوبروی $p=\frac{h}{\lambda}$

انرژی $\boxed{E=\hbar\omega}$ $\boxed{\text{تکانه } p=\hbar k}$

$$v_g=\frac{d\omega}{dk}=\frac{d\omega}{dE}\times\frac{dE}{dp}\times\frac{dp}{dk}=\frac{1}{\hbar}\times\frac{dE}{dp}\times\hbar=\frac{dE}{dp}$$ $$\boxed{v_g=\frac{dE}{dp}}$$

$$E=\hbar\omega\longrightarrow\frac{dE}{d\omega}=\hbar\qquad p=\hbar k\Longrightarrow\frac{dp}{dk}=\hbar$$

$$E=\frac{p^2}{2m}\longrightarrow\frac{dE}{dp}=\frac{2p}{2m}=\frac{p}{m}\qquad E=\frac{p^2}{2m}\Longrightarrow dE=\frac{2p\,dp}{2m}=\frac{p}{m}dp$$

سرعت گروه $v_g=\frac{dE}{dp}=\frac{p}{m}=\frac{mv}{m}=v$ سرعت ذره

فصل ۵

معادله شرودینگر

در مرز تابع موج پیوستگی دارد

* ویژگی ها:

۱- در معادله ی شرودینگر، اصل پایستگی انرژی باید صادق باشد. (منظور از انرژی، انرژی مکانیکی است.) نسبیتی نیست

$E=K+U$

انرژی مکانیکی، انرژی جنبشی، انرژی پتانسیل

۲- این معادله باید با فرض دوبروی سازگار باشد.

$$p=\frac{h}{\lambda}\Longrightarrow\lambda=\frac{h}{p}$$

$$p=\hbar k\xrightarrow[\text{موج دوبروی ذره ی آزاد}]{\text{انرژی جنبشی مربوط}}E=\frac{p^2}{2m}=\frac{\hbar^2k^2}{2m}\qquad \text{انرژی جنبشی } K=\frac{\hbar^2k^2}{2m} \text{ عدد موج}$$

$U=0$ $\boxed{E=K}$

۳- باید خطی باشد یعنی تابع موج در مرزها پیوسته باشد.

تابع موج سینوسی

$$\psi(x,t)=A\sin(kx-\omega t)$$

$$k=\frac{2\pi}{\lambda}\qquad\omega=2\pi\nu$$

k انرژی جنبشی $\qquad$ k عدد موج

$$t=0 \rightarrow \psi(x,0) = \psi(x) = A\sin kx$$

$$\frac{d\psi(x)}{dx} = Ak\cos kx \qquad \frac{d^2\psi(x)}{dx^2} = -Ak^2\sin kx = -k^2(A\sin kx)$$

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} = -k^2\psi(x) = -\frac{2mK}{\hbar^2}\psi(x)$$

انرژی جنبشی $K = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} \Rightarrow k^2 = \frac{2mK}{\hbar^2}$

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} = K\psi(x) = (E-U)\psi(x)$$

$$E = K + U \Rightarrow K = E - U$$

$$\boxed{-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} + U\psi(x) = E\psi(x)}$$ فرم روشن معادله شرودینگر

معادله‌ی موج که معادله‌ی یک بعدی مستقل از زمان شرودینگر

که جوابش فقط برحسب x است.

احتمال و بهنجارش:

چگالی احتمال $p(x) = |\psi(x)|^2$

$$\text{احتمال} = \int p(x)\,dx = \int |\psi(x)|^2\,dx \qquad \psi(x) = A\sin kx$$

شرط بهنجارش $\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} |\psi(x)|^2\,dx = 1}$

همیشه $-\infty$ تا $+\infty$ نیست اگر در مورد ذره آزاد بپرسد همین

$-\infty$ تا $+\infty$ است چون ذره هر جایی می‌تواند حرکت کند.

مقدار میانگین $$\langle x\rangle = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} p(x)\,x\,dx}{\int_{-\infty}^{+\infty} p(x)\,dx}$$

اگر عبارت مورد نظر همان x باشد ⇐ خودش را می‌شود

$$\langle x\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} p(x)\, x\, dx$$

با هم برابرند

$$\langle f(x)\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} p(x) f(x)\, dx$$

ذره آزاد در یک بعد :

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} + U\psi(x) = E\psi(x)$$

ذره‌ی آزاد تحت تأثیر هیچ پتانسیلی نیست.

برای ذره آزاد $U = 0$

ذره‌ی مقید تحت تأثیر پتانسیل است

پس پتانسیل یعنی تعیین نیروهای خارجی وارده

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} - E\psi(x) = 0$$

$E>0$ آزاد

$E=0$

$E<0$ هسته

$$\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} + \underbrace{\frac{2mE}{\hbar^2}}_{K^2}\psi(x) = 0$$

$$K = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$$

$$k^2 = \frac{2mE}{\hbar^2} \Rightarrow k = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}} \qquad E = \cancel{U}_0 + K \Rightarrow E = K$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} + k^2\psi(x) = 0}$$

عدد موج

$$\psi_1(x) = A\sin(kx)$$

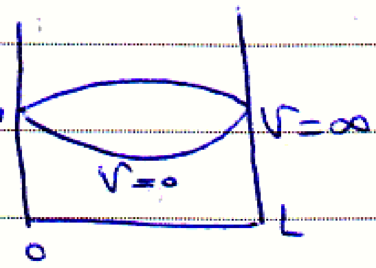
$$\psi_2(x) = B\cos(kx)$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} + U\psi(x) = E\psi(x) \Longrightarrow \psi(x) = \psi_1(x) + \psi_2(x) =$$

$U = 0 \quad E > 0$ $\qquad A\sin kx + B\cos kx$

ذره در جعبه ۱ بعدی :

$$U(x) = \begin{cases} 0 & 0 < x < L \\ \infty & x > L ,\ x < 0 \end{cases}$$



$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi}{dx^2} + U\psi(x) = E\psi(x) \Rightarrow -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} = E\psi(x)$$

$$\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} + \frac{2mE}{\hbar^2}\psi(x) = 0 \Rightarrow K^2 = \frac{2mE}{\hbar^2} \Rightarrow E = \frac{\hbar^2 K^2}{2m} = \frac{n^2\pi^2\hbar^2}{2mL^2}$$

$$\begin{cases} \psi_1(x) = A\sin Kx \longrightarrow x=0 \Rightarrow \psi(0) = 0 \\ \psi_2(x) = B\cos Kx \longrightarrow x=0 \Rightarrow \psi(0) = B \end{cases}$$ غ ق ق

$$\psi(x) = A\sin Kx \xrightarrow[\psi(L)=0]{x=L} \sin KL = 0 = \sin n\pi \quad (n=1,2,\dots)$$

$$KL = n\pi \Rightarrow K = \frac{n\pi}{L}$$

$$\int_0^L |\psi(x)|^2 dx = 1 \Rightarrow A^2\int_0^L \sin^2 Kx\, dx = 1$$

$$\frac{A^2}{2}\int_0^L (1-\cos 2Kx)\,dx = 1 \longrightarrow A^2\Big(L - \frac{1}{2K}\sin 2KL - 0\Big) = 1$$

$$\frac{A^2}{2}L = 1 \longrightarrow A^2 = \frac{2}{L} \Rightarrow A = \sqrt{\frac{2}{L}}$$

$$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{L}}\sin\frac{n\pi}{L}x$$

$$\Rightarrow E = \frac{n^2\pi^2\hbar^2}{2mL^2} \qquad \psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{L}}\sin\frac{n\pi}{L}x$$

$n = 1, 2, 3, \dots$

$$n=1 \longrightarrow E_1 = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2mL^2} = E_0$$ انرژی حالت پایه

$$n=2 \longrightarrow E_2 = \frac{4\pi^2\hbar^2}{2mL^2} = 4E_0$$

$$n=3 \longrightarrow E_3 = 9E_0$$ حالت‌های برانگیخته

$$\psi_1(x) = \sqrt{\frac{2}{L}}\,\sin\frac{\pi}{L}x$$

$$\psi_2(x) = \sqrt{\frac{2}{L}}\,\sin\frac{2\pi}{L}x$$

$$\psi_3(x) = \sqrt{\frac{2}{L}}\,\sin\frac{3\pi}{L}x$$

احتمال حضور ذره در اولین حالت برانگیخته در بازه‌ی ($0 < x < L/4$)

$$\int_0^{L/4} |\psi_2(x)|^2 dx = \int_0^{L/4} \frac{2}{L}\sin^2\frac{2\pi x}{L}\,dx$$

$$= \frac{2}{L}\times\frac{1}{2}\int_0^{L/4}\left(1-\cos\frac{4\pi x}{L}\right)dx =$$

مثال) الکترونی در یک ناحیه‌ی یک بعدی به طول $1\times10^{-10}\,m$ به دام افتاده است.

الف) برای برانگیختن الکترون از حالت پایه به نخستین حالت برانگیخته چه مقدار انرژی باید به آن بدهیم؟

ب) در حالت پایه، احتمال یافتن الکترون در ناحیه‌ی $x = 0.09\times10^{-10}\,m$ تا $x = 0.11\times10^{-10}\,m$ چیست؟

ج) در نخستین حالت برانگیخته، احتمال یافتن الکترون بین $x=0$ و $x = 0.25\times10^{-10}\,m$ چقدر است؟

$L = 1\times10^{-10}\ m$

$n=1$

$n=2$

$E_0 = \dfrac{\pi^2\hbar^2}{2mL^2} = 37\,eV$

$m = 9{,}11\times10^{-31}\ kg$

$\hbar = 1{,}05\times10^{-34}\ J.s$

الف) $\begin{cases} E_1 = E_0 \\ E_2 = 4E_0 \end{cases} \Rightarrow E_2 - E_1 = 4E_0 - E_0$

$\Delta E = 3E_0$

$\Delta E_{1,2} = 3\times37$

$\Delta E_{12} = 111\ eV$

ب) $P = \displaystyle\int_{x=0/09\times10^{-10}}^{x=0/11\times10^{-10}} |\psi_1(x)|^2\,dx = \frac{2}{L}\int_{0/09\times10^{-10}}^{0/11\times10^{-10}} \sin^2\frac{\pi}{L}x\,dx = 0/38\ \%$

ج) $P = \displaystyle\int_{x=0}^{x=0/25\times10^{-10}} |\psi_2(x)|^2\,dx = \frac{2}{L}\int_0^{0/25\times10^{-10}} \sin^2\frac{2\pi}{L}x\,dx = 0/25\ \%$

مثال) نشان دهید که مقدار میانگین x در مسأله ذره در جعبه بدون توجه به حالتهای کوانتومی عبارت است از: $L/2$

$\langle x\rangle = \displaystyle\int_0^L |\psi_n(x)|^2\,x\,dx \qquad \psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{L}}\sin\frac{n\pi}{L}x$

$\langle x\rangle = \dfrac{2}{L}\displaystyle\int_0^L \left(\sin^2\frac{n\pi}{L}x\right)x\,dx = \frac{1}{L}\int_0^L \left(1-\cos 2\frac{n\pi}{L}x\right)x\,dx$

$\sin^2 x = \dfrac{1-\cos 2x}{2} \qquad \langle x\rangle = \dfrac{1}{L}\displaystyle\int_0^L \left[x\,dx - x\cos\frac{2n\pi}{L}x\,dx\right]$

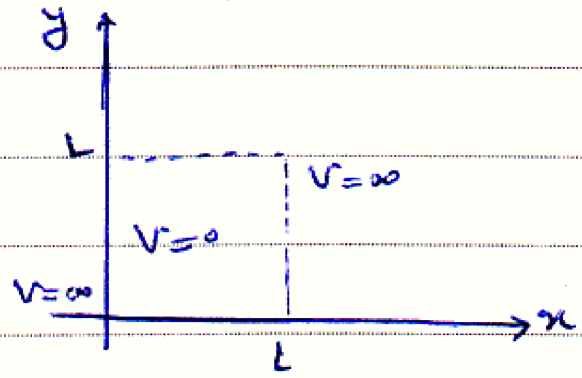
$\langle x\rangle = \dfrac{1}{L}\,\dfrac{x^2}{2}\Big|_0^L - \displaystyle\int_0^L x\cos\frac{2n\pi}{L}x\,dx$

$\langle x\rangle = \dfrac{1}{L}\,\dfrac{L^2}{2} - \displaystyle\int_0^L x\cos\frac{2n\pi}{L}x\,dx = \frac{L}{2}$

با توجه به مراحل صفحه قبل صفر می‌شود

$$\int_0^L x\cos\frac{2n\pi}{L}x\,dx \quad \begin{cases} x=u \longrightarrow dx=du \\ \cos\frac{2n\pi}{L}x\,dx=dv \Rightarrow \frac{1}{2n\pi}\sin\frac{2n\pi}{L}x=v \end{cases}$$

$$=\cancel{\frac{xL}{2n\pi}\sin\frac{n\pi L}{x}}\Big|_0^L-\frac{L}{2n\pi}\int\sin\frac{2n\pi}{L}x\,dx-\cos\frac{2n\pi}{L}x\Big|_0^L=0$$



ذره در جعبه دو بعدی:

$$U(x,y)=\begin{cases} 0 & 0\leq x\leq L\ ,\ 0\leq y\leq L \\ \infty & \text{در جاهای دیگر} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \psi(x=0)=\psi(x=L)=0 \\ \psi(y=0)=\psi(y=L)=0 \end{cases}$$ شرایط مرزی

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi(\nabla)-\overset{u}{\cancel{V}}\psi(\nabla)=E\psi \qquad \nabla^2=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\underbrace{\overset{f(x)g(y)}{\psi(x,y)}}-\underbrace{\overset{u}{\cancel{V}}(x,y)\psi(x,y)}_{0}=E\psi(x,y)$$

$$\psi(x,y)=f(x)g(y) \quad , \quad E=E_x+E_y$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\left[\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x^2}\cdot g(y)+\frac{\partial^2 g(y)}{\partial y^2}\cdot f(x)\right]=E\,f(x)g(y)$$

فرض تقسیم بر $f(x)g(y)$

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\left[\frac{1}{f(x)}\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x^2}+\frac{1}{g(y)}\frac{\partial^2 g(y)}{\partial y^2}\right]=E_x+E_y$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2 f(x)}{dx^2}=E_x f(x) \quad , \quad -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2 g(y)}{dy^2}=g(y)E(y)$$

$$f(x)=A_1\sin k_1x+B_1\cos k_1x \longrightarrow f(x)=A_1\sin k_1x$$

$$g(y) = A_2 \sin k_2 y + B_2 \cos k_2 y \longrightarrow g(y) = A_2 \sin k_2 y$$

$$f(x=L) = 0 \longrightarrow A_1 \sin k_1 L = 0 \longrightarrow \sin n_x \pi \qquad k_1 L = n_x \pi$$

$$k_1 L = n_x \pi \longrightarrow k_1 = n_x \frac{\pi}{L}$$

$$f(x) = A_1 \sin \frac{n_x \pi x}{L} \xrightarrow{A_1 = \sqrt{\frac{2}{L}}} f(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin \frac{n_x \pi x}{L}$$

$$g(y) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin \frac{n_y \pi y}{L} \qquad \psi(x,y) = f(x)\,g(y) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin \frac{n_x \pi x}{L} \cdot \sqrt{\frac{2}{L}} \sin \frac{n_y \pi y}{L}$$

$$\psi(x,y) = \frac{2}{L} \sin \frac{n_x \pi x}{L} \sin \frac{n_y \pi y}{L}$$

$$E_x = \frac{n_x^2 \pi^2 \hbar^2}{2mL^2}, \quad E_y = \frac{n_y^2 \pi^2 \hbar^2}{2mL^2} \Longrightarrow E = E_x + E_y$$

$$\boxed{E = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2mL^2} (n_x^2 + n_y^2) \qquad n_x, n_y = 1, 2, 3, \ldots}$$

$$\boxed{\psi(x,y) = \frac{2}{L} \sin \frac{n_x \pi x}{L} \sin \frac{n_y \pi y}{L}}$$

$$n_x = 1,\ n_y = 1 \longrightarrow \begin{cases} \psi(x,y) = \dfrac{2}{L} \sin \dfrac{\pi x}{L} \sin \dfrac{\pi y}{L} \\[2ex] E = \dfrac{\pi^2 \hbar^2}{2mL^2}(1+1) = \dfrac{\pi^2 \hbar^2}{mL^2} \end{cases}$$

$$\begin{array}{ll} n_x = 1,\ n_y = 2 & \left\{ \begin{array}{l} \psi_{1,2}(x,y) = \dfrac{2}{L} \sin \dfrac{\pi x}{L} \sin \dfrac{2\pi y}{L}, \quad E = \dfrac{5\pi^2 \hbar^2}{2mL^2} \\[2ex] \psi_{2,1}(x,y) = \dfrac{2}{L} \sin \dfrac{2\pi x}{L} \sin \dfrac{\pi y}{L}, \quad E = \dfrac{5\pi^2 \hbar^2}{2mL^2} \end{array} \right. \\ n_x = 2,\ n_y = 1 & \end{array}$$

حالت واگنی

* حالت واگنی (تبهگنی): به حالتی گفته می‌شود که به ازای یک مقدار انرژی چند تابع موج وجود داشته باشد.

حالت واگنی فقط برای سیستم‌های متقارن است. ←

$$E=\frac{\pi^2\hbar^2}{2m}\left(\frac{n_x^2}{L^2}+\frac{n_y^2}{L'^2}\right)$$

مثال) انرژی حالت پایه یک ذره در یک چاه یک بعدی نامتناهی $2,4\ eV$ است. اگر پهنای چاه ۲ برابر شود انرژی حالت پایه چه مقدار می‌شود؟

$$E=\frac{n^2\pi^2\hbar^2}{2mL^2}$$

$$n=1 \longrightarrow E_1=\frac{\pi^2\hbar^2}{2mL^2}$$

$$L'\longrightarrow 2L \qquad E'=\frac{\pi^2\hbar^2}{2m(2L)^2}=\frac{1}{4}E_1$$

مثال) ذره‌ای در یک جعبه دو بعدی به طول L و پهنای 2L محدود است. مقادیر انرژی عبارت اند از

$$E=\overset{K}{\frac{\pi^2\hbar^2}{2mL^2}}\left(n_x^2+\frac{n_y^2}{4}\right)$$

۲ تا از پایین‌ترین ترازهای واگن را بیابید؟

حالت نامتقارن است. باید nها را طوری انتخاب کنیم که سیستم متقارن شود.

$$\psi(x,y)=\sqrt{\frac{2}{L}}\sqrt{\frac{2}{L'}}\sin\frac{n_x\pi x}{L}\sin\frac{n_y\pi y}{L'}$$

$$\psi(x,y)=\sqrt{\frac{2}{L}}\sin\frac{n_x\pi x}{L}\sqrt{\frac{2}{2L}}\sin\frac{n_y\pi y}{2L}$$

$$\begin{cases} n_x=1,\ n_y=4 \longrightarrow 1+4=5K & E=5E_0 \\ n_x=2,\ n_y=2 \longrightarrow 4+1=5K & E=5E_0 \end{cases}$$

فصل ۵ - نوسانگر هماهنگ ساده (یک بعدی)

$$F = -Kx \longrightarrow U = -\int F\,dx = \frac{1}{2}Kx^2$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{1}{2}Kx^2\psi = E\psi$$

$$\psi(x) = Ae^{-ax^2} \qquad \frac{d\psi(x)}{dx} = -2Aaxe^{-ax^2}$$

$$\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} = -2Aae^{-ax^2} + (-2Aax)(-2ax)e^{-ax^2}$$

$$\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} = -2Aae^{-ax^2} + 4Aa^2x^2e^{-ax^2}$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m}(-2a + 4a^2x^2)\cancel{Ae^{-ax^2}} + \frac{1}{2}kx^2\cancel{Ae^{-ax^2}} = E\cancel{Ae^{-ax^2}} \Rightarrow \frac{\hbar^2 a}{m} - \frac{2\hbar^2a^2x^2}{m} + \frac{1}{2}kx^2 = E$$

$$\frac{\hbar^2 a}{m} + \underbrace{\left(\frac{1}{2}k - \frac{2\hbar^2a^2}{m}\right)}_{0}x^2 = E + 0 \times x^2$$

$$\frac{1}{2}k - \frac{2\hbar^2a^2}{m} = 0$$

$$\frac{1}{2}k = \frac{2\hbar^2a^2}{m} \longrightarrow a^2 = \frac{mk}{4\hbar^2}$$

$$a = \frac{\sqrt{mk}}{2\hbar}$$

$$E = \frac{\hbar^2 a}{m}$$

$$E = \frac{\cancel{\hbar^2}}{m}\frac{\sqrt{mk}}{2\cancel{\hbar}}$$

$$E = \frac{\hbar}{2}\sqrt{\frac{k}{m}} = \frac{1}{2}\hbar\omega_0$$ انرژی پایه نوسانگر

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \qquad E_n = \left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega \quad (n = 0, 1, \ldots, \ldots)$$

فقط برای نوسانگر ساده می‌توان $n=0$ گذاشت.

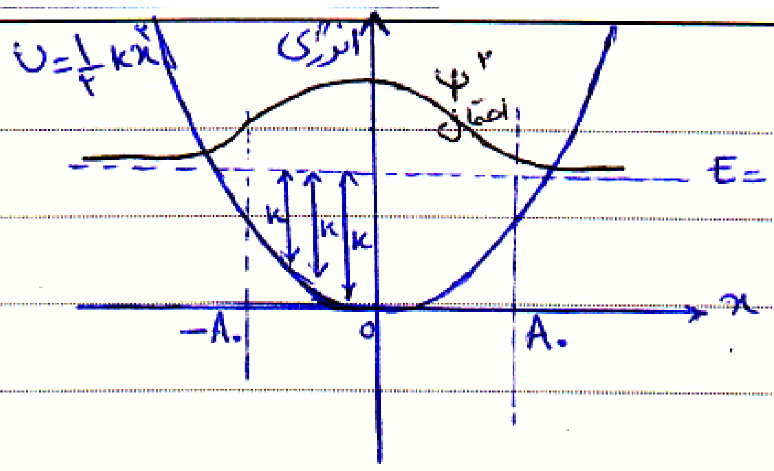
$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \qquad \omega = 2\pi\nu$$

$$\nu = \frac{\omega}{2\pi}$$

$$T = \frac{1}{\nu} = \frac{2\pi}{\omega}$$

$$\psi(x) = Ae^{-ax^2} \qquad \boxed{a = \frac{\sqrt{mk}}{2\hbar}}$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$



$$\int|\psi(x)|^{۲}dx=1$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}|\psi(x)|^{۲}dx=1 \Rightarrow A^{۲}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-۲ax^{۲}}dx=1 \qquad \int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\alpha x^{۲}}dx=\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \;*$$

$$A^{۲}\sqrt{\frac{\pi}{۲a}}=1 \Rightarrow A^{۲}=\sqrt{\frac{۲a}{\pi}} \Rightarrow A=\left(\frac{۲a}{\pi}\right)^{1/۴}$$

$$a=\frac{\sqrt{mk}}{۲\hbar} \Rightarrow A=\left(\frac{\cancel{۴}\sqrt{mk}}{\cancel{۴}\hbar\pi}\right)^{1/۴}$$

$$\omega_0=\sqrt{\frac{k}{m}} \Rightarrow \omega_0^{۲}=\frac{k}{m} \qquad A=\left(\frac{\sqrt{mk}}{\pi\hbar}\right)^{1/۴}=\left(\frac{\sqrt{m^{۲}\omega_0^{۲}}}{\pi\hbar}\right)^{1/۴}=\left(\frac{m\omega_0}{\pi\hbar}\right)^{1/۴}$$

$$k=m\omega_0^{۲}$$

$$A=\left(\frac{m\omega_0}{\pi\hbar}\right)^{1/۴}$$

$$\psi(x)=\left(\frac{m\omega_0}{\pi\hbar}\right)^{1/۴}e^{-\frac{\sqrt{mk}}{۲\hbar}x^{۲}}$$

$$\psi(x,t)=\psi(x)e^{-i\omega t}$$

$$\psi(x,t)=\left(A'e^{ikx}+B'e^{-ikx}\right)e^{-i\omega t}$$

$$\psi(x,t)=A'e^{i(kx-\omega t)}+B'e^{-i(kx+\omega t)}$$

ورودی $\xrightarrow{A'}$

$\xrightarrow{A'}$ $\xleftarrow{B'}$ $\xrightarrow{C'}$

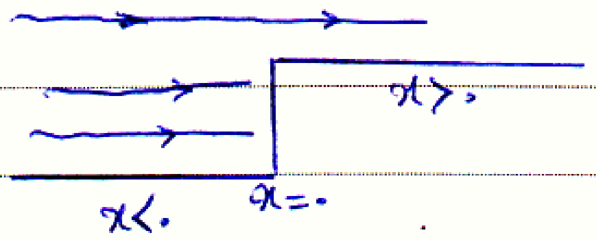
بازتاب $B' \longleftarrow$

توان عبور $=\left|\frac{C'}{A'}\right|^{۲} \longleftarrow$

توان بازتاب $=\left|\frac{B'}{A'}\right|^{۲}$

پله‌ها و سدها:

پله $E > U_0$



$$\begin{cases} x<0 & \psi_1(x) = \underbrace{Ae^{ik_1x}}_{\text{ورودی}} + \underbrace{Be^{-ik_1x}}_{\text{بازتابی}} \\ x>0 & \psi_2(x) = \underbrace{Ce^{ik_2x}}_{\text{عبوری}} + De^{-ik_2x} \end{cases}$$

$D=0 \Longleftarrow$ چون مانعی وجود ندارد که امواج بازتاب شوند.

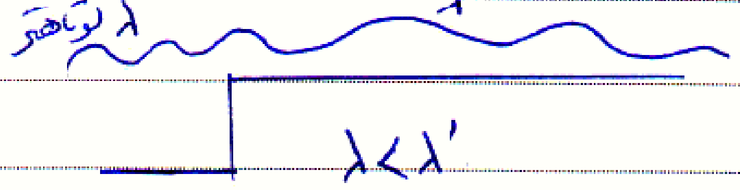
$$K_1 = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar} \quad , \quad k_2 = \frac{\sqrt{2m(E-U_0)}}{\hbar}$$

$$\text{توان بازتاب} = \left|\frac{B}{A}\right|^2 \qquad \text{توان عبور} = \left|\frac{C}{A}\right|^2$$

$$K = \frac{P^2}{2m} \longrightarrow P = \sqrt{2mK}$$

چون موج‌های کوتاه‌تر انرژی بیشتری دارند.

$$P = \frac{h}{\lambda}$$



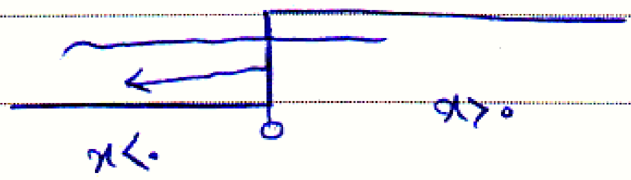
λ کوتاه‌تر

$\lambda < \lambda'$

پله $E < U_0$

از نظر کلاسیک عبور نمی‌کند اما از نظر کوانتوم عبور می‌کند.

کلاسیک می‌گوید هیچ عبور نمی‌کند ولی کوانتوم می‌گوید یک ذره عبور می‌کند.



$$\begin{cases} x<0 & \psi_1(x) = Ae^{ik_1x} + Be^{-ik_1x} \\ x>0 & \psi_2(x) = Ce^{k_2x} + De^{-k_2x} \end{cases} \qquad C=0$$

$$k_1 = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar} \qquad k_2 = \frac{\sqrt{2m(U_0-E)}}{\hbar}$$

چون توانش مثبت است (e^{k_2x}) در حالیکه وقتی موج به پله می‌رسد نزول پیدا می‌کند در حالیکه Ce^{k_2x} یک تابع صعودی است.

فرض کنیم در ناحیه‌ای Δx احتمال به $\frac{1}{e}$ مقدار اولیه‌اش می‌رسد.

$$e^{-2k_2 \Delta x} = e^{-1}$$

$$2k_2 \Delta x = 1 \Longrightarrow \Delta x = \frac{1}{2k_2}$$

میزان نفوذ در این سد $\Delta x = \dfrac{\hbar}{2\sqrt{2m(U_0-E)}}$

اگر قرار باشد ذره در ناحیه $x>0$ وارد شود باید انرژی حداقل $U_0 - E$ باشد.

$$\Delta E \cdot \Delta t \sim \hbar \Longrightarrow \Delta t \sim \frac{\hbar}{\Delta E}$$

$$\Delta E = U_0 - E + K \qquad \Delta t \sim \frac{\hbar}{U_0 - E + K}$$

سرعت حرکت ذره $V = \sqrt{\frac{2K}{m}}$ ←

میانگین $\Delta x = \frac{1}{2} v \Delta t = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2K}{m}} \times \frac{\hbar}{U_0 - E + K}$

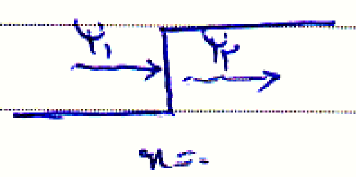
$$K \to 0 \Longrightarrow \Delta x \to 0 \quad , \quad K \to \infty \Longrightarrow \Delta x \to 0$$

$$\Delta x_{max} = \frac{1}{2}\frac{\hbar}{\sqrt{2m(U_0-E)}} \qquad \Delta x = \frac{\hbar}{2\sqrt{2m(U_0-E)}}$$

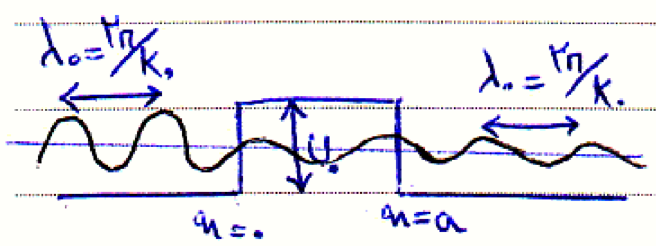
شرایط مرزی: خود تابع موج و مشتقش در مرز باید پیوسته باشد.

مفهوم پیوستگی: اگر موج از سد برگشت باید از سد پدیدار بشود (از آن رد شود)

$$\psi_1(x=0) = \psi_2(x=0)$$
$$\psi_1'(x=0) = \psi_2'(x=0)$$



سد انرژی پتانسیل:



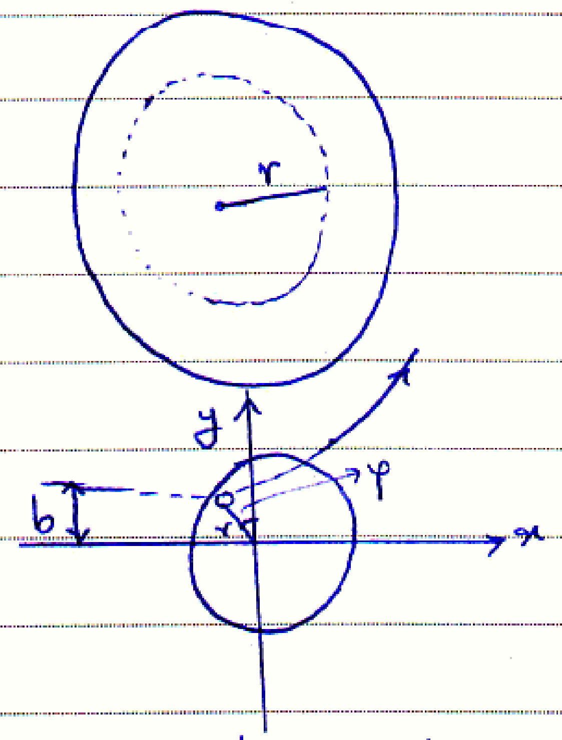
فصل ۵: ۲ ـ ۴ ـ ۵ ـ ۷ ـ ۹ ـ ۱۶ ـ ۲۱ ـ ۲۵ ـ ۳۲

Subject:
Year. Month. Date. ( )

$$U(x)=\begin{cases} 0 & x<0 \\ U_0 & 0<x<a \\ 0 & x>a \end{cases}$$

$$\psi(x)=\begin{cases} \psi_1(x)=Ae^{ik_1x}+Be^{-ik_1x} & x<0 \\ \psi_2(x)=Ce^{k_2x}+De^{-k_2x} & 0\leqslant x\leqslant a \\ \psi_3(x)=Ee^{ik_1x}+\cancel{Fe^{-ik_1x}}_{0} & x>a \end{cases} \qquad E<U_0$$

فصل ۶: مدل اتمی



$$F=\frac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0 R^2}=kr$$

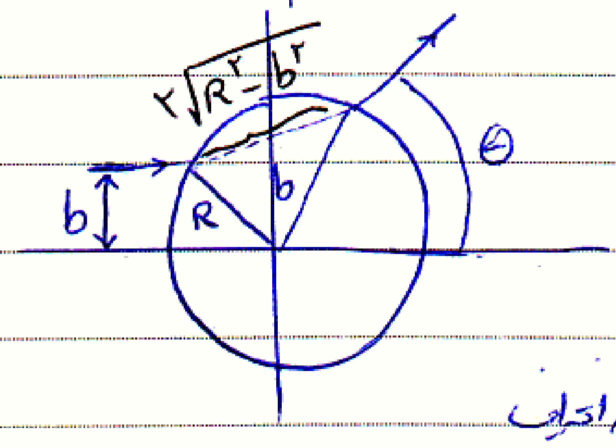
فقط توضیح مدلهای اتمی خوانده شود.

ضربه $\Delta P_y=\int F_y\,dt$

$$F_y=F\cos\phi$$

$$q=ZE$$

$$F=\frac{zZe^2}{4\pi\varepsilon_0 R^3}r=kr \qquad \cos\phi=\frac{b}{r}$$



$$\Delta P_y\simeq\int zkr_0\frac{b}{r}\,dt=\boxed{zkb\,j}$$

زاویه انحراف $\Theta=\frac{2zkb}{mv^2}\sqrt{R^2-b^2}$

مدل اتمی تامسون :

در مدل اتمی تامسون فرض شد Z الکترون در داخل کره‌ی یکنواختی با بار مثبت Ze و شعاع r قرار گرفته‌اند. بارهای الکتریکی نوسان کننده امواج الکترومغناطیسی تابش می‌کنند که بسامد آن با بسامد این نوسان یکسان است. بر اساس مدل تامسون انتظار داریم که تابش گسیل شده از اتم‌ها دارای این بسامد مشخص باشد اما تجربه نشان داده که چنین نیست. بسامدهای مختلف به جز همین بسامد تابش گسیل شده از اتم‌ها هستند. جدی‌ترین نارسایی مدل تامسون در پراکندگی ذرات باردار از اتم‌ها نمایان می‌شود. آزمایش نشان داده که (توسط رادرفورد) پراکندگی اتم تامسون در زاویه‌های بزرگ حدود 10^8 برابر از واقعیت کمتر است.

مدل اتمی رادرفورد ـ بوهر :

در این مدل بارهای مثبت را در هسته در نظر گرفتند و الکترون‌ها را متحرک در ترازهای اطراف هسته. در ترازهای پایا، الکترون اطراف هسته می‌چرخد ولی تابش نمی‌کند فقط زمانیکه به آن مقداری انرژی داده شود و از یک تراز به تراز دیگر گسیل شود آن گاه تابش انجام می‌شود. این مدل فقط برای اتم‌های هیدروژن گونه برقرار است. (یعنی اتم‌هایی که در لایه‌ی آخرشان فقط یک الکترون دارد.)

+ تعریف نوترون

در سایه سار اندیشه ، بی هیچ چشم داشت زمینی

عهد بسته ایم آسمانی باشیم

در این محفل با ما همراه باشید

زمان :

همین حالا تا همیشه

مکان :

بچه های مهندسی برق الکترونیک و قدرت *88*

www.dez-bargh-88.blogfa.com