شیرین سلطانی

۱) مفاهیم اساسی فیزیک اساسی؛

۲) ساختار هسته

مبانی مکانیک کوانتوم (امواج دوبروی - معادله شرودینگر و ......)

انرژی بستگی هسته و مشخصات آن

مدل قطره‌ای - فرمول نیمه‌تجربی جرم؛

مدل لایه‌ای و اساس تجربی این مدل

ترازهای انرژی هسته

تعادل و استقلال از بار نیروهای هسته‌ای

midterm 20-25%

final 70-65%

تکالیف 5-10%

۳) واکنش‌های تابش‌های هسته‌ای با ماده

- برهم کنش ذرات باردار با ماده ($\alpha$ و $\beta$)

- برهم کنش نوترون با ماده ← (فیزیک نوترون)

برهم کنش تابش گاما با ماده (اثر کامپتون - اثر فوتوالکتریک

تولید زوج - تضعیف پرتوهای گاما)

برهم کنش پوزیترون با ماده

آشکارسازی تابش‌های هسته‌ای

۱) مبانی فیزیک هسته‌ای (واتر کاپرهوف)

* ۲) آشنایی با فیزیک هسته‌ای (کنت کرین)

۳) مبانی فیزیک هسته‌ای (کاپلان)

۴) واپاشی‌های پرتوزا

پرتوزایی

پهنای حالت‌های واپاشنده

واپاشی گاما و سینماتیک آن

واپاشی آلفا و سینماتیک آن

واپاشی بتا و سینماتیک آن (فرضیه نوترینو)

۵) واکنش‌های هسته‌ای

کاربرد قوانین پایستگی

انواع واکنش‌های هسته‌ای

سطح مقطع cross section ← بحث کیفی در سطح مقطع نوترون

مکانیک

[illegible]

فیزیک هسته‌ای

دکتر ابدی

نماد نوکلوئید: $^{A}_{Z}X_{N}$ — A عدد جرمی، Z عدد اتمی، N عدد نوترون

ایزوتوپ: نوکلوئیدهایی هستند با Z یکسان و N متفاوت $^{16}_{8}O$ $^{17}_{8}O$ $^{18}_{8}O$

رادیوایزوتوپ: به ایزوتوپ‌های رادیواکتیو اطلاق می‌شود

ایزوتون: نوکلوئیدهایی با N یکسان و Z متفاوت $^{15}_{8}O$ $^{14}_{7}N$ $N=7$ $N=7$ $A=Z+N$

ایزوبار: نوکلوئیدهایی با A یکسان

ایزومر: یک هسته در حالت برانگیخته با نیمه عمر نسبتاً طولانی و قابل اندازه‌گیری $10^{-9}(s)$

$$^{235}_{92}U + {}^{1}_{0}n \longrightarrow {}^{236}_{92}U^{*} \longrightarrow FF_1 + FF_2 + \nu_n + Q \leftarrow \text{انرژی}$$

ایزومر نیست زیرا نیمه عمر آن بسیار کوتاه است

مزون‌ها: ذراتی که جرم آن‌ها بین جرم الکترون و پروتون است $m_e < m_{\text{مزون}} < m_p$

(پی) $m_\pi = 270\, m_e$ در نیروهای هسته‌ای

(مو) $m_\mu = 207\, m_e$ در پرتوهای کیهانی

پوزیترون: الکترون با بار مثبت ($m_{+} = m_e$)

فوتون: کوانتوم تابش الکترومغناطیسی که معمولاً به صورت پرتوی نور و یا X ظاهر می‌شود (بدون جرم و بدون بار)

$$\begin{cases} m_p \cong 2000\, m_e \\ m_p \cong m_N \end{cases}$$

واحد طول در مقیاس هسته‌ای

در ذرات زیراتمی در مقیاس ابعاد اتم و هسته از واحدی به نام فرمی استفاده می‌شود

$1f = 1(fm)$ ← ابعاد هسته

$10^{5}f = 10^{5}(fm)$ ← ابعاد اتم

$1fm = 1f$ (فرمی) $= 10^{-15}(m) = 10^{-13}(cm)$

واحد زمان: (s)

واحد زمان در مقیاس‌های هسته‌ای از نانو تا سال متفاوت است

$10^{-9}(s) \longrightarrow 10^{9}$ (سال) واپاشی‌های هسته‌ای

واحد انرژی: eV

معمولاً انرژی را برحسب ولت اندازه‌گیری می‌کنند زیرا در مورد ذرات زیراتمی به سبب انرژی بسیار پایین ذرات

* در واحد الکترون ولت استفاده می شود.

$1(ev) = 1.6\times10^{-19}(J)$

انرژی های هسته ای $\begin{cases} kev = 10^{3} ev \\ Mev = 10^{6} ev \end{cases}$

$2 < V < 3\ ev$

$^{235}_{92}U + ^{1}_{0}n \longrightarrow ^{236}_{92}U^{*} \longrightarrow FF_1 + FF_2 + \nu n + 200\,(Mev)$

انرژی آزاد شده از هر شکافت

$\dfrac{erg}{\dfrac{MKS}{CGS}}$ $\left.\begin{array}{l} 1Mev = 1.6\times10^{-19}\times10^{6}(J) = 1.6\times10^{-13} J \\ 1(J) = 10^{7} erg \end{array}\right\} \Longrightarrow 1Mev = 1.6\times10^{-13}\times10^{7} erg$

* $\boxed{1Mev = 1.6\times10^{-6} erg}$ حفظ باشیم

واحد الکتریکی

$e = 1.6\times10^{-19}(c) = -4.8\times10^{-10} esu$

$p = +1.6\times10^{-19}(c) \longrightarrow = +4.8\times10^{-10} esu$ حفظ باشیم

$1(c) = 3\times10^{9}(esu)$

واحد جرم

معمولاً واحد جرم کیلوگرم یا گرم می باشد ولی در ذرات زیر اتمی به سبب جرم بسیار کم از واحد amu یا u استفاده می شود.

جرم سکون الکترون $m_0 = 9.1\times10^{-31}kg = 5.48\times10^{-4}(amu)$

جرم سکون پروتون $m_p = 1.672\times10^{-27}kg = 1.00727\ (amu)$

جرم سکون نوترون $m_n = 1.674\times10^{-27}kg = 1.00866\ (amu)$

(کربن ۱۲) $^{12}_{6}C_6$ $\quad amu = u = \frac{1}{12}\left[\text{جرم}\ ^{12}_{6}C_6\right] \simeq 1.66\times10^{-24}g = 1.66\times10^{-27}kg$

بسیار بزرگ

$m = \dfrac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \longrightarrow \infty$ وقتی $v \longrightarrow c$

نکته!! معمولاً در ذرات زیر اتمی می توان به جای جرم از انرژی معادل جرم استفاده نمود جهت انجام این

حال می‌توان از رابطهٔ اینشتین استفاده کرد: رابطهٔ هم‌ارزی جرم و انرژی $E_0 = m_0c^2$ که جرم سکون

انرژی معادل جرم سکون الکترون را برحسب eV و میلیون الکترون‌ولت (MeV) به دست می‌آوریم:

$E_0(e) = mc^2 = 9.31\times10^{-31}\times9\times10^{16} = \frac{819\times10^{-16}(J)}{1.6\times10^{-19}} = 511.1\times10^{3}\,eV = 511\,keV = \boxed{0.511\,MeV}$

$E_0(p) = m_pc^2 = 1.672\times10^{-27}\times9\times10^{16} = \frac{15.03\times10^{-11}(J)}{1.6\times10^{-19}\times10^{6}} = \boxed{931.5\,MeV}$

$E_0 = mc^2 \quad \left\{ c^2 = 931.5\left(\frac{MeV}{u}\right) \right.$ ضریب تبدیل جرم به انرژی

برای تبدیل جرم u به MeV کافیست آن را در ضریب تبدیل ۹۳۱٫۵ ضرب نماییم.

$(Mc^2)_p = 1.00728\times931.5 \simeq 938.254\,MeV$

$(M_0c^2)_n = 1.00866\times931.5 \simeq 939.550\,MeV$

این روابط بسیار دقیق و به طور کلی 931.5 MeV

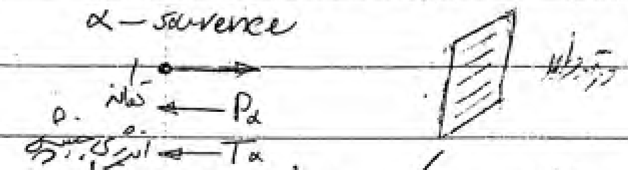
معمولاً جرم نوترون و پروتون را یکسان و برابر 1(u) فرض می‌کنیم (به جز در محاسبات انرژی بستگی هسته) و بنابراین انرژی معادل جرم سکون آنها برابر با ۹۳۱٫۵ MeV می‌باشد.

رخنه به درون هسته

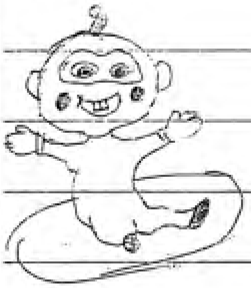
آزمایش رادرفورد: ذرات آلفا توسط رادرفورد با هدف ورقهٔ نازک طلا برای اولین بار به دست آمد. این اندازه‌گیری برای موارد زیر صادق نیست:

۱) انرژی جنبشی ذرات آلفا بسیار زیاد باشد.

۲) عدد اتمی مادهٔ هدف بسیار کم باشد.




در یک برخورد رو در رو ذرهٔ آلفا با یک هستهٔ اورانیوم در حالی که از پس‌زنی هسته صرف نظر شود خواهیم داشت:



$\alpha$ → $T_\alpha , P_\alpha$ $\qquad T_\alpha = 0$ هسته اتم اورانیوم $^{235}_{92}U$

انرژی پتانسیل کولنی دو هسته هدف = انرژی جنبشی اولیه ذره α

$q_1 \quad q_2 \qquad U = k\frac{q_1 q_2}{r^2}$

$T_\alpha = \frac{(2e)(Ze)}{D}$ $\qquad$ فرض: $T_\alpha = 25(MeV)$ ⇒

$$D = \frac{2Ze^2}{T_\alpha} = \frac{2\times 92\times(4.8\times10^{-10})^2\, esu}{25(MeV)(1.6\times10^{-6})\, erg/MeV} \simeq 10^{-12}(cm) = 10^{-14}(m) = 10f$$

بار esu ؛ erg ← تا

ابعاد بزرگترین هسته‌ها از ۷f تا ۸f می‌باشد

⇐ نزدیکترین فاصله مجاورت ذره α با هسته هدف

مثال: یک ذره α با $T_\alpha$ با یک هسته به عدد اتمی Z و عدد جرمی A برخورد شاخ به شاخ انجام می‌دهد. با در نظر گرفتن پس‌زنی هسته نزدیکترین فاصله مجاورت را محاسبه نمائید.

$P_\alpha$, $T_\alpha$ → $\alpha$ $\quad$ A $\qquad$ سیستم تک ذره‌ای

(2) $\{T_{1\alpha} = T_2 + U\}$ ⇐ انرژی پتانسیل سیستم

انرژی ذره α در حالت اولیه

کل سیستم یعنی ذره α و هسته هدف

اصل بقای اندازه حرکت:

$m_1 v_1 = m_2 v_2 \qquad \frac{1}{2} m_1^2 v_1^2 = \frac{1}{2} m_2^2 v_2^2$ (1)

$\frac{1}{2} m_1 v_1^2 \times m_1 = \frac{1}{2} m_2 v_2^2 \times m_2 \qquad \boxed{T_1 m_1 = T_2 m_2}$

(1) ⇒ $T_{1\alpha} m_\alpha = T_2 M \Longrightarrow T_2 = \frac{m_\alpha T_{1\alpha}}{M_{کل}} = \frac{4T_\alpha}{4+A} \qquad \boxed{T_2 = \frac{4T_\alpha}{4+A}}$

انرژی جنبشی کل سیستم

جرم کل سیستم

(2) $U = T_{1\alpha} - T_2 = T_\alpha - \frac{4T_\alpha}{4+A} = T_\alpha\left(1 - \frac{4}{4+A}\right) = \boxed{\frac{AT_\alpha}{4+A}} = u$

جواب نهایی

$U = \frac{(2e)(Ze)}{D} = \frac{2Ze^2}{D} \Rightarrow \frac{2e^2 Z}{D} = \frac{AT_\alpha}{4+A} \Rightarrow \left\{ D = \frac{2Ze^2}{T_\alpha}\left(\frac{4+A}{A}\right) \right\}$

جرم هسته هدف

$\overset{\alpha}{\circ} \xrightarrow[P_\alpha]{T_\alpha}$ (هسته) $A$      سیستم دو ذره‌ای

$P_\alpha' \longleftarrow$ (هسته) $\longrightarrow P_A$

انرژی پتانسیل میان هدف و ذره

اصل بقای انرژی: $T_\alpha = T_\alpha' + \underbrace{U}_{} + T_A \quad (1)$

اصل بقای اندازه حرکت: $\vec{P}_\alpha = \vec{P}_{\alpha'} + \vec{P}_A \equiv P_\alpha = -P_{\alpha'} + P_A \quad (2)$

نزدیک‌ترین فاصله محادثه پرتابه به هسته هدف: $D = \dfrac{2Ze^2}{T_\alpha}\left(\dfrac{4+A}{A}\right)$

ب) یک پروتون ۰٫۲ MeV با یک α در حال سکون برخورد شاخ به شاخ انجام می‌دهد نزدیک‌ترین فاصله آن با هسته α چقدر است؟

$(2e)(Ze)$ پرتابه هدف

$$D = \frac{2Ze^2}{T_\alpha}\left(\frac{4+\underset{\text{هدف}}{A}}{A}\right) \to D = \frac{(2e)(1e)}{(0{,}2\,MeV)\,1{,}6\times10^{-6}\,\frac{erg}{MeV}}\left(\frac{1+4}{4}\right)$$

$T_p = 0{,}2\,MeV$, $Z_p = 1$ پرتابه

$$D = \frac{2(4{,}8\times10^{-10})\,esu}{2\times1{,}6\times10^{-6}\,\frac{erg}{MeV}} \times \frac{5}{4}$$

$Z_\alpha = 2$, $A_\alpha = 4$ هدف

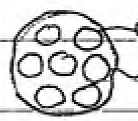
$$D = 14{,}4 \times \frac{5}{4} = 18\,f$$

مسئله ج در خانه حل شود

ج) هنگامیکه ذره α با پروتون در حال سکون برخورد شاخ به شاخ انجام دهد انرژی جنبشی آن چقدر باشد تا نزدیک‌ترین فاصله محادثه با حالت قبل یکسان شود

$T_\alpha = ?$    $D = 18\,f$

رابطه تقریبی حجم ـ شعاع هسته (و این رابطه برای هسته‌های سنگین و [illegible] صادق است)



نوکلئون: پروتون، نوترون

$V \propto A$ حجم هسته $\Longrightarrow \dfrac{A}{V} = cte \longrightarrow \dfrac{A}{\frac{4}{3}\pi R^3} = cte \longrightarrow A \propto R^3 \longrightarrow R \propto A^{1/3}$

$\boxed{R = R_0 A^{1/3}}$

$V = \frac{4}{3}\pi R^3$

هسته بصورت کره [illegible]

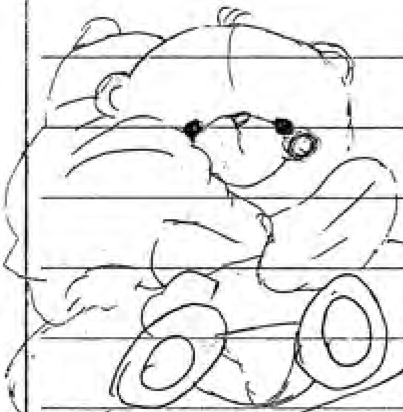
۴) در صورتی که شعاع یک هسته توسط رابطه $R=R_0A^{1/3}$ ، $R_0=1.2f$ بدست آید چگالی ماده ی هسته ای چقدر است؟

چگالی $\rho = \frac{m}{V}$ ماده ی هسته ای

الف) ... $\frac{1}{f^3}$ نوکلئون

(۴)

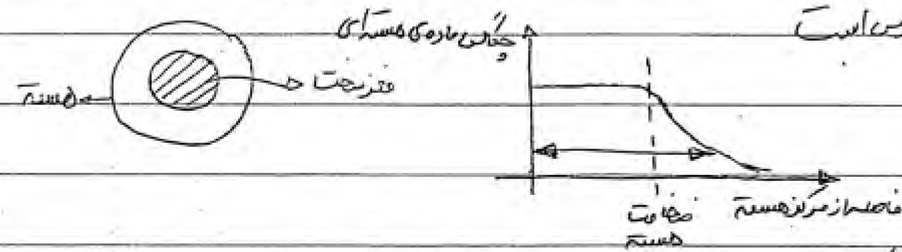
$$R_0 = \begin{cases} 1.4f & \text{پراکندگی ذرات هسته ای} \\ 1.2f & \text{پراکندگی الکترون ها} \end{cases}$$



اما علت تفاوت میان $R$ در دو حالت پراکندگی آن است که در پراکندگی الکترون توزیع بارهای مثبت وابسته به پروتون های هسته را حس می کنیم ولی در حالتی که در پراکندگی ذرات هسته ای اندازه ای که مربوط به فاصله ی اثر کننده ی نیروهای هسته ای که بر ذره ی فرودی اثر می گذارد را حس می کنیم این مطلب می رساند که نیروهای هسته ای از نیروهای الکترومغناطیسی متفاوت است قابل توجه است که برد نیروهای هسته ای در حدود $1f$ است

ضخامت پوسته: عبارت است از فاصله ای که در طی آن چگالی جرم هسته ای از ٪۹۰ مقدار مرکزی به ٪۱۰ کاهش می یابد و مستقل از عدد جرمی است

مثل سؤال ۳




«اصل عدم قطعیت هایزنبرگ»

در فیزیک کوانتوم هر اندازه گیری دقیق کمیت های وابسته به دو کوانتوم پارامتری را به طور همزمان نمی توان انجام داد ... تعریف عملیاتی که برای هر نوع آزمایش است در صورتی ... این بیان معنی است که اندازه گیری وابسته به یک دو کوانتوم از یک آزمایش به آزمایش دیگر می تواند متفاوت باشد. این تعریف عملیاتی ناشی از اصل عدم قطعیت است.

اصل عدم قطعیت در مکان

$\Delta x\,\Delta p \geq \hbar/2$ $\qquad \hbar = \frac{h}{2\pi}$ ثابت پلانک

عدم قطعیت در زمان

$\Delta E\,\Delta T \geq \frac{\hbar}{2}$ $\qquad \Delta L_z\,\Delta\phi \geq \hbar/2$

سؤال ۵: چرا الکترون نمی تواند در داخل هسته وجود داشته باشد؟

فرض می کنیم الکترون در درون هسته وجود دارد: $\Delta x\,\Delta p \geq \hbar/2$

$2R\Delta p \geq \hbar/2 \qquad 2Rm_eV \geq \hbar/2$


$$V \geq \frac{\hbar = h/2\pi}{2\times 2R\times m_e} = \frac{6.62\times10^{-34}/2\pi}{4\times10^{-15}\times 9\times10^{-31}\,kg} = 2.75\times10^{10}\,\frac{m}{s} \simeq 92.5\,C$$

$1f$

چون از $c$ بیشتر است تناقض شده

نظریه دوبروی (امواج مادی)

نظریه پلانک در مورد کوانتوم انرژی که باعث انتشار امواج الکترومغناطیسی و تابش مادی در حال تعادل مربوط است. پلانک معتقد بود که تابش جسم سیاه توسط نوسانگرهای الکتریکی بسیار کوچک تولید می‌شود و این نوسانگرها انرژی گسسته دارند.

پلانک به پرتوهای نوری ماهیت ذره‌ای

$E = nh\nu = nh\frac{c}{\lambda}$ شده

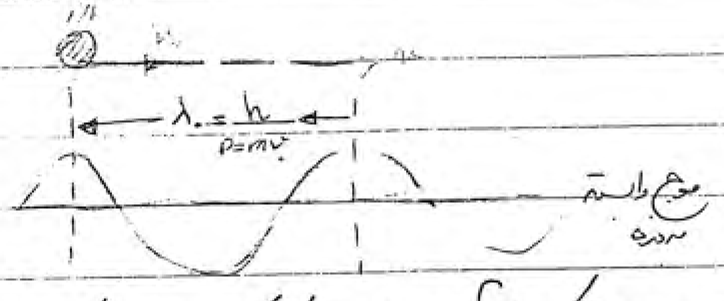
ثابت پلانک $h = 6{,}62\times10^{-34}\,J.s = 4{,}15\times10^{-15}\,eV.s$

مشخص شد

اثر فوتوالکتریک نشان داد که جسم سیاه ماهیت ذره‌ای پرتوهای نوری که اصطلاحاً به این ذرات فوتون اطلاق می‌شود. حال که امواجی نظیر نور خاصیت ذره‌ای از خود نشان می‌دهند می‌توان برای ذرات نیز خاصیت موجی تعریف نمود. موج وابسته به یک ذره به نام موج دوبروی نامگذاری شده است.

ذرات وابسته به موج
$$\begin{cases} E = h\nu = h\frac{c}{\lambda} \\ p = \frac{h}{\lambda} \end{cases}$$
$$\left(p = mv = mc \times \frac{c}{c} = \frac{mc^2}{c} = \frac{E}{c} = \frac{h\nu}{c} = \frac{h}{\lambda}\right)$$

موج وابسته به ذرات دوبروی
$$\begin{cases} \nu_D = \frac{E}{h} \\ \lambda_D = \frac{h}{p} \end{cases}$$




مثال: (۲-۴)

طول موج دوبروی وابسته به یک الکترون 10 eV، یک ذره آلفای 10 MeV و یک گلوله‌ی 10 g که با سرعت $1000\,\frac{m}{s}$ حرکت می‌کند را محاسبه کنید؟

$\lambda_{D(e)} = \frac{h}{p} \Rightarrow$

$T_e = 10\,(eV) \qquad T_e = \frac{P_e^2}{2m_0} \Rightarrow P_e = \sqrt{2m_0 T_e} =$

$\sqrt{2\times 9{,}1\times10^{-31}\times \underbrace{1{,}6\times10^{-18}}_{10\,eV}} = 1{,}7\times10^{-24}\,kg.\frac{m}{s}$

$$\frac{h}{p} = \frac{6.62\times10^{-34}}{17\times10^{-24}} = 3.9\times10^{-10}\,m = 3.9\times10^{-8}\,cm$$

$$\lambda_{D(\alpha)} = \frac{h}{p} = \frac{6.62\times10^{-34}}{14.41\times10^{-20}} = 4.5\times10^{-13}\,cm$$

$$P_\alpha = \sqrt{2m_\alpha T_\alpha} = \sqrt{2\times(4\times1.67\times10^{-27})\times\underbrace{1.6\times10^{-12}}_{10\,MeV}} = 14.41\times10^{-20}\,kg\,m/s$$

$$: m_\alpha = 2m_p + 2m_N$$

$$\underset{(گلوله)}{\lambda_D} = \frac{h}{p=mv} = \frac{6.62\times10^{-34}}{10^{-2}\times1000} = 6.62\times10^{-33}\,cm$$

...«روابط نسبیتی»...

$E_0 = m_0c^2$ انرژی حالت سکون $\qquad$ $E = mc^2$ انرژی نسبیتی

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \qquad \boxed{E^2 = p^2c^2 + E_0^2} \xrightarrow{\text{فوتون}} E^2 = p^2c^2$$

$$E = pc = \frac{hc}{\lambda} = h\nu$$

جرم حالت سکون فوتون برابر صفر است.

اثبات: $\left[\frac{m_0^2c^2}{1-\frac{v^2}{c^2}} = \frac{m_0^2}{1-\frac{v^2}{c^2}}v^2 + m_0^2c^2\right]\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)$

$$m_0^2c^2 = m_0^2v^2 + m_0^2c^2\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)$$

$$c^2 = v^2 + c^2 - v^2 \checkmark$$

...«انرژی جنبشی»...

$T = E_k = \frac{1}{2}m_0v^2$ درمکانیک کلاسیک

$$T = E_k = E - E_0 = mc^2 - m_0c^2 = (m-m_0)c^2 = \left(\frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} - m_0\right)c^2 = m_0c^2\left(\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}} - 1\right)$$

$$= m_0c^2\left[\cancel{1} + \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2} + \cdots - \cancel{1}\right] = m_0c^2\left(\frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2}\right) = \frac{1}{2}m_0v^2$$

$\frac{v}{c} \ll 1$ درحد غیرنسبیتی

یا $\frac{v^2}{c^2} \simeq 0 \rightarrow \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} \simeq 1 - \frac{v^2}{c^2}$

مثال: ثابت کنید ذره‌ای با جرم سکون $m_0$ دارای انرژی جنبشی $T$ صرف‌نظر از مقدار $T$ دارای تکانه‌ای بیشتری از یک فوتون با انرژی $T=h\nu$

$E^2 = p^2c^2 + E_0^2$

برای ذره
$$\begin{cases} E^2 = p^2c^2 + m_0^2c^4 & (1) \\ E = T + m_0c^2 & (2) \end{cases}$$

$T = E - E_0$

$$(1),(2) \Rightarrow T^2 + m_0^2c^4 + 2Tm_0c^2 = p^2c^2 + m_0^2c^4$$

$$\Rightarrow p^2 = \frac{T^2}{c^2} + \frac{2Tm_0c^2}{c^2} = \frac{T^2}{c^2}\left(1 + \frac{2m_0c^2}{T}\right)$$

ذره
$$\boxed{p = \frac{T}{c}\sqrt{1 + \frac{2m_0c^2}{T}}}$$

فرض: $T = h\nu$ ؛ برای فوتون: $p = \frac{h}{\lambda} = \frac{h}{c/\nu} = \frac{h\nu}{c} = \boxed{T/c}$ فوتون

$p_{\text{فوتون}} < p_{\text{ذره}}$

مثال: سرعت ذره‌ای که انرژی جنبشی آن با انرژی سکونش برابر است چقدر می‌باشد؟

فرض $T = E_0 \Rightarrow T = E - E_0 \Rightarrow E = 2E_0 \Rightarrow mc^2 = 2m_0c^2$

$$\frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = 2m_0 \Rightarrow 4c^2 - 4v^2 = c^2 \quad 4v^2 = 3c^2 \quad v = \frac{\sqrt{3}}{2}c$$

تکلیف: می‌خواهیم عبارت غیرنسبیتی انرژی جنبشی را برای محاسبه سرعت ذره‌ای به جرم $m_0$ به کار ببریم. در صورتی بخواهیم سرعت محاسبه‌شده تا ۱٪ صحیح باشد، بالاترین انرژی مجاز ذره برحسب $m_0c^2$ چقدر است؟

کلاسیک غیرنسبیتی $T = \frac{1}{2}m_0v_0^2$ $\quad T = E - E_0 = (m - m_0)c^2$ $\quad \frac{v_0 - v}{v_0} = \frac{1}{100}$

$T = \boxed{?}\, m_0c^2$

((معادلات شرودینگر))...

... با شرایط مکانیک کوانتومی ...

موج دوبروی را می‌توان به عنوان یک موج ریاضی در نظر گرفت که حرکت ذره را توصیف می‌کند. تابع موج نشان‌دهنده‌ی امواج مادی را با $\Psi(x,y,z,t)$ نشان می‌دهند. این مفهوم با احتمال پیدا شدن ذره در یک لحظه معین در حجم کوچکی از فضا مربوط است

$\psi(x,y,z,t)$ (دامنه احتمال ذره یا تابع موج وابسته به ذره)

مکان — زمان

$\psi = a + ib$

$\psi^* = a - ib$

$\psi^*\psi = |\psi|^2$ شدت موج یا احتمال پیدا شدن ذره در لحظه $t$ در واحد حجم فضا است.

نکته: احتمال پیدا شدن یک ذره در بازه‌ی بی‌نهایت کوچک $dx$ در اطراف نقطه‌ی $x$ به صورت $P(x)dx$ نشان داده می‌شود. که تابع احتمال

$$P(x)dx = |\psi(x,t)|^2 dx \quad \text{یک بعدی}$$

که تابع احتمال

یعنی اگر چه مکان یک ذره را نمی‌توان با قطعیت تعیین کرد ولی برای مشاهده آن در هر نقطه می‌توان یک احتمال خاص در نظر گرفت. باید توجه کرد که $\psi$ به خودی خود قابل اندازه‌گیری نیست اما $|\psi|^2$ قابل اندازه‌گیری است و احتمال در واحد طول (یک بعدی) سطح (دو بعدی) و حجم (سه بعدی) برای پیدا شدن ذره در نقطه خاص در لحظه $t$ برابر است

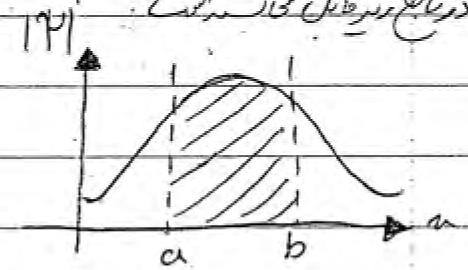
$|\psi|^2 = \psi\psi^*$ احتمال حضور ذره

چون ذره باید در جایی در محدوده حضور داشته باشد مجموع احتمال‌ها برای تمام مقادیر $x$ باید برابر یک باشد

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\psi(x,t)|^2 dx = 1 \quad (A)$$

$\psi(x,y,z,t)$

هر تابع موج که در رابطه $A$ صدق کند بهنجار شده است به این معنی که ذره در تمام لحظات در نقطه‌ای حضور دارد. بنابراین احتمال پیدا شدن ذره در بازه مشخص $a$ تا $b$ در تابع زیر قابل محاسبه است




$$P_{ab} = \int_a^b |\psi(x,t)|^2 dx$$

تابع موج اولیه — ثابت — $t=0$

مثال: تابع موج وابسته به یک ذره در یک بعد داده شده به صورت $\psi(x,0) = A\exp\left(-\frac{|x|}{x_0}\right)$ داده شده که در آن $A$، $x_0$ مقادیر ثابت هستند. مقدار $A$ را به گونه‌ای بدست آورید که $\psi(x,0)$ بهنجار شود؟

توضیح مسأله:

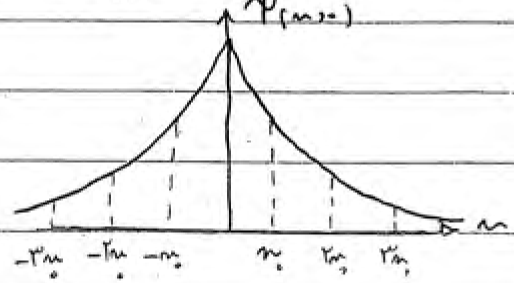
مسأله اساسی مکانیک کوانتومی آن است که تابع موج در لحظه‌ای از زمان $t$ معلوم است و می‌خواهیم تابع آن را بدست آوریم

لحظه‌ی بعد $t$ به دست آید — تابع موج

$\psi(x,0) \longrightarrow \psi(x,t)$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\psi(x,0)|^2 dx = 1 \Longrightarrow c^2 \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{-2|x|}{x_0}} dx = 1$$

$$1 = 2c^2 \int_0^{+\infty} e^{\frac{-2x}{x_0}} dx = 2c^2 \left( \frac{-x_0}{2} e^{-\frac{2x}{x_0}} \right)_0^{+\infty} = 2c^2 \left( \frac{x_0}{2} \right) = 1 \to c = \frac{1}{\sqrt{x_0}}$$




a

این شکل صحیح ؟

## معادله‌ی موج شرودینگر

این معادله یک فرمول مهم در علم فیزیک است از معادلات بنیادی است. صورت کلی آن به صورت زیر است

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi + V\psi = +i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t}$$

$\psi = \psi(x,y,z,t)$ تابع موج وابسته به زمان

$V = V(x,y,z,t)$ پتانسیلی که ذره در آن قرار دارد

$m$ جرم ذره

$i = \sqrt{-1}$ $\qquad \hbar = \frac{h}{2\pi}$ $\qquad \nabla^2 \psi = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2}$

اگر بتوان این معادله را حل نمود و $\psi$ را به دست آورد محاسبه انرژی‌ها و دیگر خواص ذره امکان‌پذیر است.

اگر پتانسیل وابسته به زمان نباشد جهت حل معادله می‌توان از جداسازی متغیرهای زمانی و مکانی استفاده نمود.

جداسازی مکانی و زمانی

$$\psi(x,y,z,t) = \psi(x,y,z)\,\tau(t) = \psi\tau$$

زمانی مکانی

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi(x,y,z) \times \tau(t) + V\psi \times \tau = i\hbar \psi(x,y,z) \frac{\partial \tau}{\partial t}$$

در معادله‌ی شرودینگر بالا قرار می‌دهیم

دو طرف معادله را بر $\psi\tau$ تقسیم می‌کنیم

$$\underbrace{-\frac{\hbar^2}{2m} \times \frac{\nabla^2 \psi}{\psi} + V}_{\text{مکانی}} = \underbrace{\frac{i\hbar}{\tau} \cdot \frac{d\tau}{dt}}_{\text{زمانی}} = \text{مقدار ثابت} = E \quad \text{انرژی}$$

$$\psi\left(\frac{-\hbar^2}{2m}\times\frac{\nabla^2\psi}{\psi}+V=E\right) \quad \boxed{\frac{-\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi+V(x,y,z)\psi=E\psi}$$

(معادله شرودینگر) معادله مستقل از زمان شرودینگر ← پس از حل $\psi(x,y,z)=?$

معادله شرودینگر مستقل از زمان

$$\frac{i\hbar}{\tau}\frac{d\tau}{dt}=E \rightsquigarrow i\hbar\frac{d\tau}{dt}=E\tau$$

$$\tau(t)=Ae^{\frac{-iE}{\hbar}t} \rightsquigarrow \boxed{\tau(t)=Ae^{-i\omega t}}$$

$$\frac{E}{\hbar}=\frac{h\nu}{h/2\pi}=2\pi\nu=\omega$$

صفحه بعد

حل معادله معادله شرودینگر

$$\frac{-\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi+V(x,y,z)\psi=E\psi \rightsquigarrow dv=dx\,dy\,dz$$

$$\frac{-\hbar^2}{2m}\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}\right)+V(x,y,z)\psi(x,y,z)=E\psi(x,y,z)$$

اگر بخواهیم معادله را در حالت ۳ بعدی که حل نماییم بهتر است از لاپلاسین در مختصات کروی - قطبی استفاده کنیم

$(r,\theta,\phi)$

$$\frac{-\hbar^2}{2m}\left[\frac{\partial^2\psi}{\partial r^2}+\frac{2}{r}\frac{\partial\psi}{\partial r}+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2\psi}{\partial\phi^2}\right]$$

$$+V(r,\theta,\phi)\psi(r,\theta,\phi)=E\psi(r,\theta,\phi) \rightsquigarrow dv=r^2\sin\theta\,dr\,d\theta\,d\phi$$

برای سادگی معادله شرودینگر مستقل از زمان را در حالت یک بعدی حل میکنیم

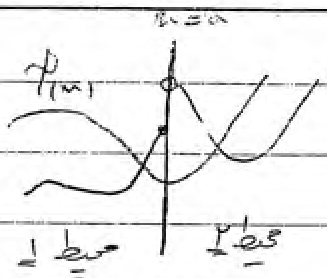
۱- نکته: معادله موج بالا با استفاده از شرایط مرزی بدست می آید

۲- با توجه به اینکه معادله موج یک ذره را توصیف میکند جوابهای آن باید از شرایط خاصی برخوردار باشند

$$\frac{-\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+V\psi(x)=E\psi(x) \qquad \psi=\psi(x)$$

صفحه ۲ حل

شرایط مرزی:




a) شرط پیوستگی تابع موج روی مرز $x=a$

$$\lim_{x\to a^+}\psi(x)=\lim_{x\to a^-}\psi(x)$$

b) شرط پیوستگی مشتق تابع روی هر مرز فیزیکی

$$\lim\left(\frac{d\psi}{dx}\right)_{x=a^+}=\lim\left(\frac{d\psi}{dx}\right)_{x=a^-}$$

c) شرط پیوستگی مشتق دوم تابع

d) تابع موج همواره باید یک مقدار حقیقی و معین باشد

$V\psi \to 0$ (منظور این است که مقدار موج معین باقی بماند) $V\to\infty \xrightarrow{\text{باید}} \psi\to 0$

حل معادله شرودینگر بصورت یک بعدی:

$$\frac{-\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi}{dx^2}+V\psi=E\psi \qquad \text{(یک بعدی)} \qquad \frac{-\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi}{dx^2}=(E-V)\psi \Big/ \frac{-\hbar^2}{2m}$$

$$\Longrightarrow \frac{d^2\psi}{dx^2}=\frac{-2m(E-V)\psi}{\hbar^2}$$

حوزه مختلط

اگر: $k^2=\dfrac{2m(E-V)}{\hbar^2} \longrightarrow \dfrac{d^2\psi}{dx^2}=-k^2\psi \xrightarrow{\text{حل}} \boxed{\psi(x)=A_1e^{ikx}+B_1e^{-ikx}}$

اگر پتانسیل مقداری ثابت باشد می توان رابطه را اینصورت معرفی کرد

$$\boxed{\psi(x)=A_2\sin kx+B_2\cos kx}$$

حوزه پریودیک

می خواهیم ثابت کنیم $k$ همان عدد موج است:

$XX$ $\quad k=\dfrac{2\pi}{\lambda}=\dfrac{\omega}{v}$ $k$ موجود در معادله همان عدد موج است.

$$k^2=\frac{2m(E-V)}{\hbar^2} \qquad k=\sqrt{\frac{2m(E-V)}{\hbar^2}} \xrightarrow{V=0} \begin{cases} k=\sqrt{\dfrac{2mE}{\hbar^2}} \\ E=\dfrac{p^2}{2m} \end{cases} \Longrightarrow k=\sqrt{\frac{p^2}{\hbar^2}}=\frac{p}{\hbar}$$

$$= \frac{h/\lambda}{h/2\pi} = \frac{2\pi}{\lambda}$$

در حالت ترکیب دو موج های فضایی زمانی معادله شرودینگر خواهیم داشت

$$\psi(x,t) = (Ae^{ikx} + Be^{-ikx})\, e^{-i\omega t}$$ فرم نمایی | معادله فضایی - زمانی

$$\psi(x,t) = [A\sin kx + B\cos kx]\sin\omega t$$ فرم پریودیک | شرودینگر در ابعاد مکان

نکته: ذره آزاد همواره پتانسیل صفر را دارد $V_x = 0$ ، $k = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}$

پس از تعیین تابع موج می‌توانیم پارامترهای احتمالی (چشم داشتی) در حالت تعیین کنیم که با این را داشته باشیم در این حالت برای به دست آوردن مقادیر چشم داشتی مربوط به ذره با کمک عملگر آن، این $\psi$ و $\psi^*$ را در بازه مورد نظر در فاصله انتگرال بگیریم.

مقدار چشم داشتی $\langle f \rangle = \int \psi^* f \psi \, dx$

$f_{x} = 1$ (عملگر مکان) — $f_E = i\hbar \frac{\partial}{\partial t}$ (عملگر انرژی)

$$\begin{cases} f_{p_x} = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x} \\ f_{p_y} = -i\hbar \frac{\partial}{\partial y} \\ f_{p_z} = -i\hbar \frac{\partial}{\partial z} \end{cases}$$ (عملگر تکانه)

احتمال حضور ذره در فاصله $x_1$ تا $x_2$ $\langle x \rangle = \int_{x_1}^{x_2} \psi^*_{(x)} \psi_{(x)} \, dx = \int_{x_1}^{x_2} (\psi_{(x)})^2 dx$

normalization $\rightarrow$ بهنجارش $\int_{-\infty}^{+\infty} \psi^*_{(x)} \psi_{(x)} \, dx = 1$

$$\langle r \rangle = \int \psi^* \psi \, dr = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \psi^*_{(x,y,z)} \psi_{(x,y,z)} \, dx\, dy\, dz = 1$$

شرط بهنجارش: نرمالیزاسیون

((می‌خواهیم نشان دهیم که عملگر انرژی به صورت $i\hbar \frac{\partial}{\partial t}$ نشان داده می‌شود))

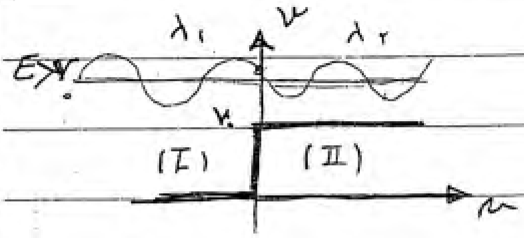
$$E\psi = i\hbar \frac{\partial}{\partial t}\psi(x,y,z,t) = i\hbar \frac{\partial}{\partial t}\psi(x,y,z)\,T(t)$$

$$= i\hbar\,\psi(x,y,z)\frac{\partial T(t)}{\partial t} = i\hbar\,\psi(x,y,z)\frac{\partial\left[e^{-i\omega t}\right]}{\partial t}$$

$$= \hbar\omega\,\psi(x,y,z)\,e^{-i\omega t} = \hbar\omega\,\psi(x,y,z,t) = \frac{h}{2\pi}\times 2\pi\nu\,\psi = E\psi$$

تکانه‌ی ثابت است $-i\hbar \frac{\partial}{\partial x}$ عملگر تکانه در راستای محور $x$ است

**حل معادله شرودینگر در پتانسیل‌های مختلف**




۱) پتانسیل پله‌ای

$$V(x) = \begin{cases} 0 & x<0 \\ V_0 & x>0 \end{cases}$$

الف) $E > V_0$

اگر سرعت ثابت باشد: $\lambda_2 > \lambda_1 \rightarrow \nu_1 > \nu_2$

$\rightarrow E_1 > E_2 \rightarrow E_2 < E_1$

یعنی یک مقدار انرژی به موج در محیط I یا جا مانده یا بازتاب شده است

$$\text{I}\begin{cases} \psi_I = Ae^{ik_1x} + Be^{-ik_1x} \\ k_1 = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}} = \frac{2\pi}{\lambda_1} \end{cases}$$

در ناحیه ① بدون پتانسیل (ذره آزاد)

$$\text{II}\begin{cases} \frac{d^2\psi_{II}}{dx^2} = -\frac{2m}{\hbar^2}(E-V_0)\psi_{II} \\ k_2 = \sqrt{\frac{2m(E-V_0)}{\hbar^2}} = \frac{2\pi}{\lambda_2} \end{cases} \qquad \boxed{\psi_{II} = Ce^{ik_2x} + De^{-ik_2x}}$$

$$k_1 > k_2 \rightarrow \frac{2\pi}{\lambda_1} > \frac{2\pi}{\lambda_2} \rightarrow \boxed{\lambda_2 > \lambda_1} \rightarrow \boxed{\nu_2 < \nu_1} \rightarrow \boxed{E_2 < E_1}$$

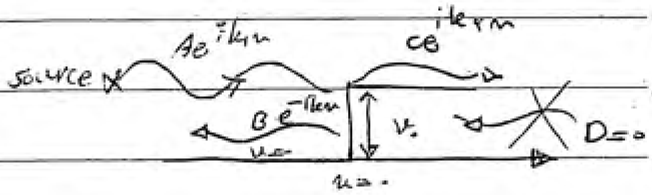
در عبور از پله پتانسیل انرژی موج کاهش می‌یابد به این معنا که طول موج افزایش یافته و کاهش فرکانس آن خواهد شد

$$\text{I},\ \text{II} \Rightarrow \psi_I\big|_{x=0} = \psi_{II}\big|_{x=0} \Longrightarrow \underbrace{A+B=C+D}_{(1)}$$

$$\frac{d\psi_I}{dx}\bigg|_{x=0} = \frac{d\psi_{II}}{dx}\bigg|_{x=0} \longrightarrow \underbrace{k_1(A-B)=k_2(C-D)}_{(2)}$$

$$\psi_I = \underbrace{Ae^{ik_1x}}_{\text{پیش رونده}} + \underbrace{Be^{-ik_1x}}_{\text{منعکس شده}}$$

$$\psi_{II} = \underbrace{Ce^{ik_2x}}_{\text{پیش رونده}} + \underbrace{De^{-ik_2x}}_{\text{منعکس شده}}$$




در سمت بالای پله دیگر منعکس نداریم در محیط II که چیزی برنمی‌گردد پس D صفر است و موج منعکس شده نداریم.

$A^2$: معرف تعداد ذراتی است که چشمه ساطع می‌کند ($A$: دامنه موج ورودی)

$B^2$: معرف تعداد ذراتی است که از پله پتانسیل منعکس شده‌اند ($B$: دامنه موج انعکاسی)

$C^2$: معرف تعداد ذراتی است که از پله پتانسیل عبور کرده‌اند ($C$: دامنه موج عبوری)

$D$: توجیهی ندارد ($D=0$)

بدست آوردن پارامترهای $A, B, C$

$$\left.\begin{aligned} C-B&=A \\ \frac{k_2}{k_1}C+B&=A \end{aligned}\right\} \Rightarrow C\left(1+\frac{k_2}{k_1}\right)=2A \to C=\frac{2}{1+\frac{k_2}{k_1}}A \to \boxed{B=A\,\frac{1-k_2/k_1}{1+k_2/k_1}}$$

چگالی جریان: در اینجا موج وابسته به ذره $\psi$ چگالی جریان به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$J=\frac{\hbar}{2mi}\left[\psi^*\frac{d\psi}{dx}-\psi\frac{d\psi^*}{dx}\right]$$

این تعریف را برای یک ذره آزاد در پتانسیل صفر و برای موج در پتانسیل محدود در مسیر اعمال می‌کنیم

$$\psi=Ae^{ik x}+Be^{-ikx}=Ae^{ikx} \to \psi^*=Ae^{-ikx}$$

$$J = \frac{\hbar}{2mi}\left[(Ae^{-ikx})(Aike^{ikx}) - (Ae^{ikx})(-Aike^{-ikx})\right]$$

$$= \frac{\hbar}{2mi}\left[kA^2 i + kA^2 i\right] = \boxed{\frac{\hbar k}{m}|A|^2} \quad , \quad J = \frac{\hbar k}{m}A^2 \quad \boxed{J \propto A^2}$$

ضریب بازتابش reflection coefficient :

$$R = \frac{J_{\text{بازتابی}}}{J_{\text{فرودی}}} = \frac{\frac{\hbar k_1}{m}B^2}{\frac{\hbar k_1}{m}A^2} = \frac{B^2}{A^2} = \left(\frac{1-\frac{k_2}{k_1}}{1+\frac{k_2}{k_1}}\right)^2$$

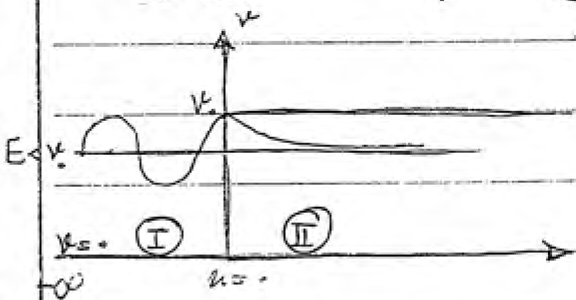
ضریب عبوری (Transfer coefficient) ضریب عبوری

$$T_{\text{در محیط II}} = \frac{J_{\text{عبوری}}}{J_{\text{تابشی}}} = \frac{\frac{\hbar k_2}{m}C^2}{\frac{\hbar k_1}{m}A^2} = \frac{k_2 C^2}{k_1 A^2} = \frac{k_2}{k_1}\left(\frac{2}{1+\frac{k_2}{k_1}}\right)^2 = \frac{4\,k_2/k_1}{\left(1+\frac{k_2}{k_1}\right)^2}$$

$$T + R = 1$$

حالت ب $E < V_0$

در مورد این که انرژی موج وابسته به ذره از پتانسیل کمتر باشد در این حالت موج پیش رونده در محیط دوم دارای شخصیت غایی به صورت میرا خواهد بود




$\psi_I = Ae^{ik_1x} + Be^{-ik_1x}$ در ناحیه I جواب مشابه حالت قبلی در ناحیه I است

$$k_1 = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}$$

$$\boxed{\psi_{II} = Ce^{k_2x} + De^{-k_2x}}$$

در ناحیه II

$$\frac{d^2\psi_{II}}{dx^2} = -\frac{2m}{\hbar^2}(E-V_0)\psi = \frac{2m}{\hbar^2}(V_0-E)\psi = k^2\psi$$

$$k = \sqrt{\frac{2m(V_0-E)}{\hbar^2}}$$

$\psi_I$ : موج وابسته به ذره در ناحیه I ، $(V=0)$

$\psi_{II}$ : موج وابسته به ذره در ناحیه II ، $(V=V_0)$

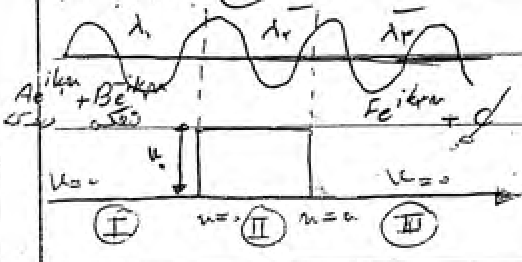
ملاحظه می‌شود که در اینجا بر خلاف حالت $E>V_0$ که جوابها به صورت مختلط یا پریودیک است جوابها به صورت نمایی است.

$$x \to +\infty \Rightarrow \psi_{II} \to \infty \ , \ \psi_{II} = Ce^{k_2 x} + De^{-k_2 x} \overset{\text{بنابراین}}{\Longrightarrow} \boxed{C=0}$$

$$\Rightarrow \psi_{II} = De^{-k_2 x}$$

## سد پتانسیل

تصور کنید موج وابسته به یک ذره از پتانسیل صفر وارد پتانسیل $V_0$ شود در این حالت این موج با توجه به معادله انرژی خود به صورت های زیر تغییر شکل خواهد داد.




$$V(x) = \begin{cases} 0 & x<0 \\ V_0 & 0 \leq x \leq a \\ 0 & x>a \end{cases}$$

سد پتانسیل

در مرحله سوم داریم G=0 بازتابش نداریم.

$$\begin{cases} \psi_I = Ae^{ik_1 x} + Be^{-ik_1 x} \longrightarrow k_1 = \sqrt{\dfrac{2mE}{\hbar^2}} = \dfrac{2\pi}{\lambda_1} \\ \psi_{II} = Ce^{ik_2 x} + De^{-ik_2 x} \longrightarrow k_2 = \sqrt{\dfrac{2m(E-V_0)}{\hbar^2}} = \dfrac{2\pi}{\lambda_2} \\ \psi_{III} = Fe^{ik_3 x} + \underbrace{Ge^{-ik_3 x}}_{0} \longrightarrow k_3 = \sqrt{\dfrac{2mE}{\hbar^2}} = \dfrac{2\pi}{\lambda_3} \end{cases}$$

پس نتیجه می‌گیریم طول موج عبوری از سد پتانسیل طول موجش افزایش یافته.

$$\Rightarrow \lambda_2 > \lambda_1 , \lambda_3 \qquad E = \tfrac{1}{2} m A^2 \omega^2 \Rightarrow 2\pi\nu \downarrow \Rightarrow \lambda \uparrow$$

ثابت کنید که چرا $\lambda_2 > \lambda_1, \lambda_3$ یا $\lambda_2 > (\lambda_1 = \lambda_3)$ ؟

$E>V_0$

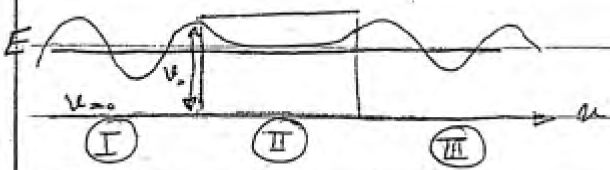
$$\boxed{T_{\text{عبور}} = \frac{(F)^2}{(A)^2}} = \frac{J_{\text{عبوری}}}{J_{\text{ورودی}}} = \frac{\frac{\hbar k_3}{m}(F)^2}{\frac{\hbar k_1}{m}(A)^2} \Rightarrow \frac{\cancel{k_3} F^2}{\cancel{k_1} A^2}$$

چون $T+R=1$ و $k_1=k_3$

تمرین: ثابت کنید $t$ عبور در حالتی که $E>V_0$ برابر است با:

$$T_{\text{عبور}} = \frac{1}{1 + \frac{1}{4}\frac{V_0^2}{E(E-V_0)}\sin^2 k_2 a}$$

ب-۲) موانع پتانسیل به حالتی که $V > E$ است.




$E<V$
$$\begin{cases} \psi_I = Ae^{ik_1x} + Be^{-ik_1x} \\ \psi_{II} = Ce^{k_2x} + De^{-k_2x} \\ \psi_{III} = Ee^{ik_3x} + \cancel{Fe^{-ik_3x}} \end{cases}$$

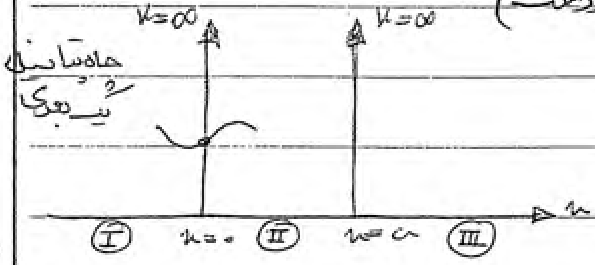
نه D و نه C صفر نمی‌شود $(x \not\to \infty)$

صفر

ضریب عبور ثابت کسر شده ✱
$$T_{\text{عبور}} = \frac{J_{\text{عبوری}}}{J_{\text{فرودی}}} = \frac{1}{1-\frac{1}{4}\frac{V_0^2}{E(V-E)}\sinh^2(k_2a)}$$

نکته: در فیزیک کلاسیک انتظار بیان می‌شود که اگر انرژی موج از پتانسیل کمتر باشد در این حالت T عبور برابر با صفر است و ضریب عبور ثابت خروج از سد را نخواهد داشت ولی از نظر تئوری کوانتوم پدیده تونل زنی tunneling (مخصوصاً که عرض دیوار باریک شود) به وجود خواهد داشت.

چاه پتانسیل




موج خارج از چاه پتانسیل (در پتانسیل ∞) نمی‌تواند وجود داشته باشد

$$\begin{cases} x<0 \\ \text{یا} \\ x>a \end{cases} \Longrightarrow \psi_I, \psi_{III} = 0$$

دیواره‌های محدود بسته جواب‌های به صورت برونویک بهتر جواب می‌دهند.

$\psi_{\text{داخل چاه}} = \psi_{\text{ذره آزاد}} = Ae^{ikx} + Be^{-ikx}$

فرم برونویک $\psi = A'\sin kx + B'\cos kx$

$\psi(x)_{\text{داخل}}\Big|_{x=0} = \psi(x)_{\text{خارج}}\Big|_{x=0} = 0 \qquad \psi = A\sin kx + B\cos kx\Big|_{x=0} = 0$

$A\sin 0 + B\cos 0 = 0 \rightarrow \boxed{B=0} \qquad \boxed{\psi(x) = A\sin kx}$

$$\to x=a \quad \psi(a)=0 \to A\sin ka=0 \to ka=n\pi \to \boxed{k=\frac{n\pi}{a}} \quad n=1,2,3,\dots$$

$$k=\sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}} \to \boxed{E=\frac{\hbar^2k^2}{2m}} \qquad \boxed{E=\frac{\hbar^2\pi^2n^2}{2ma^2}} \quad n=1,2,3$$

نکته: دیده می‌شود که انرژی ذره در چاه پتانسیل محدود می‌شود، کوانتیده خواهد شد بنابراین خواهیم داشت:

$$\begin{cases} n=1 \to E_0=\dfrac{\hbar^2\pi^2}{2ma^2} \\ n=2 \to E_1=\dfrac{4\hbar^2\pi^2}{2ma^2}=4E_0 \\ n=3 \to E_2=\dfrac{9\hbar^2\pi^2}{2ma^2}=9E_0 \\ \vdots \end{cases}$$

نکته: اگر چاه پتانسیل به صورت ۳ بعدی (مکعبی به ضلع a) فرض شود سه دسته جواب $n_x$ و $n_y$ و $n_z$ در هر راستای مختصات خواهیم داشت.

$$\psi(x,y,z)=X(x)\,Y(y)\,Z(z) \to \frac{1}{X}\frac{d^2X}{dx^2}+\frac{1}{Y}\frac{d^2Y}{dy^2}+\frac{1}{Z}\frac{d^2Z}{dz^2}=-k^2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} k_x=\dfrac{n_x\pi}{a} \\ k_y=\dfrac{n_y\pi}{a} \\ k_z=\dfrac{n_z\pi}{a} \end{cases} \Rightarrow k^2=k_x^2+k_y^2+k_z^2$$

$$\boxed{E=(n_x^2+n_y^2+n_z^2)\frac{\pi^2\hbar^2}{2ma^2}}$$

| $n_x$ | $n_y$ | $n_z$ | ضریب $\times \frac{\pi^2\hbar^2}{2ma^2}$ (انرژی پایه $E$) | حالت‌های ممکن |
|---|---|---|---|---|
| ۱ | ۱ | ۱ | ۳ | ۱ |
| ۱ | ۱ | ۲ | ۶ | ۳ |
| ۱ | ۲ | ۲ | ۹ | ۳ |
| ۱ | ۱ | ۳ | ۱۱ | ۳ |
| ۲ | ۲ | ۲ | ۱۲ | ۱ |
| ۱ | ۲ | ۳ | ۱۴ | ۶ |
| ۲ | ۲ | ۳ | ۱۷ | ۳ |

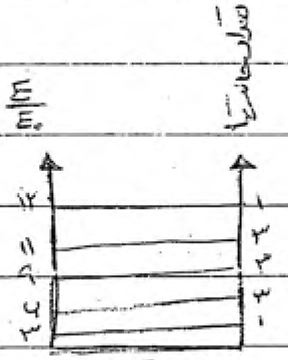
۳ حالت با انرژی‌های یکسان

ترازهای تبهگنی (دژنره)

ترازهای تبهگن و (دژنره)

# اصل طرد پاولی

هیچ دو ذره مشابهی نمی‌توانند در یک سیستم دارای اعداد کوانتومی یکسان باشند




چاه پتانسیل

ترازهای انرژی یکسان = تعداد تبهگنی (واگنی ترازها)

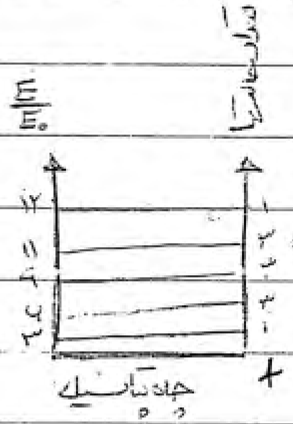
ذرات در هسته‌ی اتم با توجه به تعداد واگنی ترازها می‌توان فرض کرد که در هر تراز این چند نوکلئون جای می‌گیرد و وجود اعداد کوانتومی $s$, $m$, $l$, $n$ اصل طرد پاولی را رعایت می‌کنند

$n$ : عدد کوانتومی مداری $= 1, 2, 3, \ldots$

$l$ : عدد کوانتومی اندازه حرکت زاویه‌ای $= 0, \ldots, n$

$m$ : عدد کوانتومی مولفه z اندازه حرکت زاویه‌ای $= -l, \ldots, +l$

$s$ : اسپین $= \pm 1/2$




## اصل طرد پائولی

جمع دو ذره مشابه نمی‌توانند در یک سیستم دارای اعداد کوانتومی یکسان باشند

تراز با انرژی یکسان = تعداد ترکیب‌های (...) ترازها

اگر هر ذره در هسته‌ای با انرژی پتانسیل چاه ... ترازها می‌توان فرض کرد که در هر تراز ... چند نوکلئون جای می‌گیرد و وجود اعداد کوانتومی $s$، $m$، $l$، $n$ اصل طرد پائولی را هدایت می‌کند.

$n = 1, 2, 3, \dots$ ؛ عدد کوانتومی اصلی

$l = 0, \dots, n$ ؛ عدد کوانتومی اندازه حرکت زاویه‌ای

$m = -l, \dots, +l$ ؛ عدد کوانتومی مولفه $z$ اندازه حرکت زاویه‌ای

$s = \pm \frac{1}{2}$ ؛ اسپین

جلسه ۶ (اشتباه وارد کردیم)

انرژی جداسازی $n$ ؛ ($S_n$) انرژی لازم برای جدا کردن یک نوترون از هسته می‌باشد

$${}^{A}_{Z}X \longrightarrow \underbrace{{}^{A-1}_{Z}X + {}^{1}_{0}n}_{} \longrightarrow \text{انرژی اتصال هسته}$$

$$S_n = [\underbrace{m(A-1, Z) + m_N}_{\text{جرم حالت نهایی}} - \underbrace{m(A, Z)}_{\text{جرم حالت اول}}] c^2$$

انرژی جدایی یک نوترون برحسب جرم‌های دو طرف معادله ...

$$B_t = [N m_N + Z m_p - m(A, Z)] c^2 \Longrightarrow$$
$$M(A, Z) = Z m_p + N m_N - \frac{B_t}{c^2}$$

$$\frac{S_n}{c^2} = \underbrace{(N-1) m_N + Z m_p - \frac{B_t(A-1, Z)}{c^2}}_{M(A-1, Z)} + m_N - \underbrace{N m_N - \dots}_{M(A, Z)}$$
$$+ B_t(A, Z)$$

$$\frac{S_n}{c^2} = \frac{1}{c^2}\left[B_t(A,Z) - B_t(A-1,Z)\right]$$

$$S_n = \left[B_t(A,Z) - B_t(A-1,Z)\right] *$$

انرژی جداسازی نوترون بر حسب انرژی بستگی کل هسته اولیه و ثانویه

مثال: مقدار انرژی جداسازی p ($S_P$) را بر حسب انرژی های بستگی کل هسته های اولیه و ثانویه بدست آورید

$${}^{A}_{Z}X \longrightarrow {}^{A-1}_{Z-1}X + {}^{1}_{1}P$$

$$S_P = \left[M(A-1,Z-1) + M_P - M(A,Z)\right] c^2$$

$$\frac{S_P}{c^2} = N m_n + (Z-1) m_p - \frac{B_t(A-1,Z-1)}{c^2} + M_P - N m_n - Z m_p + \frac{B_t(A,Z)}{c^2}$$

$$= \cancel{N m_n} + Z \cancel{m_p} - \cancel{M_P} - \frac{B_t(A-1,Z-1)}{c^2} + \cancel{M_P} - \cancel{N m_n} - Z \cancel{m_p} + \frac{B_t(A,Z)}{c^2}$$

$$\frac{S_P}{c^2} = \frac{1}{c^2}\left[B_t(A,Z) - B_t(A-1,Z-1)\right]$$

$$S_P = \left[B_t(A,Z) - B_t(A-1,Z-1)\right]$$

مثال: انرژی جداسازی α را بر حسب انرژی های بستگی کل هسته های اولیه و ثانویه بدست آورید.

$${}^{A}_{Z}X \longrightarrow {}^{A-4}_{Z-2}X + {}^{4}_{2}\alpha \qquad S_\alpha = ?$$

$$S_\alpha = \left[M(A-4,Z-2) + M(4,2) - M(A,Z)\right] c^2$$

$$\frac{S_\alpha}{c^2}=\Big[(N-2)m_N+(Z-2)m_p-\frac{B_t(A-4,Z-2)}{c^2}+2m_N+2m_p$$

$$-Nm_N-Zm_p+\frac{B_t(A,Z)}{c^2}\Big]$$

$$\frac{S_\alpha}{c^2}=\frac{1}{c^2}\Big[B_t(A,Z)-B_t(A-4,Z-2)-B_t(4,2)\Big]$$

$$S_\alpha=\Big[B_t(A,Z)-B_t(A-4,Z-2)-B_t(4,2)\Big]$$

چون ۴ تا با هم کنده می‌شوند هنوز به هم کوپل هستند .

## پاریته

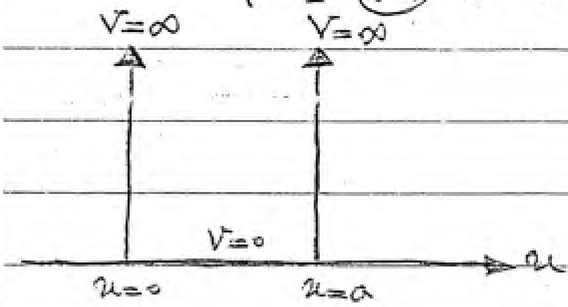
اگر در تابع $r \to -r$ تبدیل شود پاریتی تابع بدست خواهد آمد

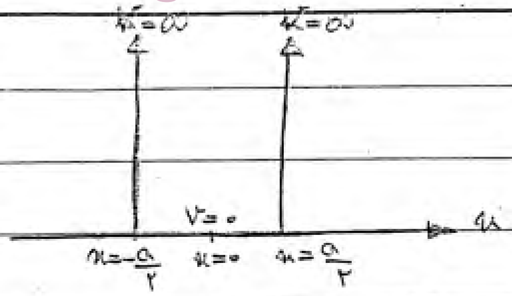
$$\begin{cases} y(r)=y(-r) & \text{پاریتی زوج} \quad (\text{ناوردا}) \\ y(r)=-y(-r) & \text{پاریتی فرد} \quad (\text{وردا}) \end{cases}$$

ناوردا ← بدون تغییر

اصل بقای پاریته یعنی چه؟

ثابت می‌شود که اگر پتانسیل تحت تبدیل پاریته ناوردا باشد (تغییر نکند) به عبارت دیگر $V(r)=V(-r)$ آنگاه تابع موج وابسته به ذره، یا زوج است یا فرد. این بدان معنیست که اگر موج حاصل از دو ذره را داخل یا حاصل کرده و موج مرکبی بسازند موج حاصل به طور قطع زوج یا فرد خواهد بود (در این حالت پتانسیل تحت تبدیل پاریته ناوردا می‌باشد یعنی زوج است)






سه بعدی $V(r) = V(-r)$

یک بعدی $V(x) = V(-x)$

پتانسیل ناوردا است

نکته: با تغییر مختصات به صورت $\boxed{x \to x'+a/2}$ تابع موج وابسته به یک ذره در یک پتانسیل ناوردا قرار می‌گیرد و دیده می‌شود که پس از اعمال این تغییر مختصات مقدار تابع موج به دست آمده به طور قطع یا زوج یا فرد است.

$$\text{یک بعدی} = \begin{cases} \psi = A\sin kx = \sqrt{\frac{2}{a}}\,\sin\frac{n_x \pi x}{a} \\ \int_{-\infty}^{+\infty} \psi\,\psi^*\,dx = 1 \end{cases}$$

$$\text{سه بعدی} = \begin{cases} \psi\left(\sqrt{\frac{2}{a}}\right)^3 \sin\frac{n_x \pi x}{a}\,\sin\frac{n_y \pi y}{a}\,\sin\frac{n_z \pi z}{a} \\ \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(r)\,\psi^*(r)\,dx\,dy\,dz = 1 \end{cases}$$

$x \longrightarrow x'+\frac{a}{2}$ این تبدیل را اعمال کنید

$$\longrightarrow \psi = \left(\frac{2}{a}\right)^{3/2} \sin\left(\frac{n_x \pi}{a}\left(x'+\frac{a}{2}\right)\right) \sin(\quad) \sin(\quad)$$

$$\boxed{\psi = \left(\frac{2}{a}\right)^{3/2} \sin\left(\frac{n_x \pi x'}{a} + \frac{n_x \pi}{2}\right) \sin(\quad) \sin(\quad)}$$

به ازای n های فرد تابع موج خواهد بود $(\cos(\quad))$

مثلاً $n=1$ $\cos(\quad)\ \cos(\quad)\ .....$ ($\cos$ تابع زوج است)

به ازای n های زوج تابع سینوسی خواهد بود $(\sin(\quad))$ ← فرد است

نکته: در مکانیک کوانتومی ثابت می‌شود که پاریته تابع موج توسط عدد کوانتومی $l$ تعیین می‌گردد

$$\boxed{\Pi = (-1)^l}$$

برای تعیین پاریته:
- $l$ زوج ← پاریته زوج
- $l$ فرد ← پاریته فرد

## مدل های هسته ای :

ساختار هسته دیده شد که هسته ها و نیروهای هسته ای دارای مشخصاتی به صورت زیر می باشند:

1- برد نیروهای هسته ای بسیار کم است.

2- در هسته ها مرکز جاذبه وجود ندارد.

3- اصل طرد پائولی تعداد نوکلئون های هر تراز را محدود می کند. $s=\pm\frac{1}{2}$

4- در اتم فقط با یک نوع ذره (الکترون) برخورد می کنیم ولی در هسته ها دو نوع ذره (پروتون ها و نوترون ها) وجود دارد که به سبب تنوع قرارگیری نوترون ها و پروتون ها حدود ۲۰۰۰ ایزوتوپ متفاوت وجود خواهد داشت.

5- نیروهای کولنی در اتم در حدود eV (الکترون ولت) ولی نیروهای هسته ای در حدود MeV می باشند که این امر منجر به تفاوت های زیادی در بین هسته ها و اتم ها می گردد.

### انرژی بستگی هسته : (Binding Energi)

مفهوم آن است که در پی به وجود آمدن هسته مقداری از جرم آن به انرژی تبدیل شده است تا بتواند انرژی لازم برای تبدیل کردن نوکلئون ها را فراهم کند. حال اگر بخواهیم یک اتم را به اجزای تشکیل دهنده آن یعنی نوکلئون ها تبدیل کنیم نیاز به صرف همین مقدار انرژی خواهیم بود.

پروتون $m_p$ ← $Z$

نوترون $m_N$ ← $N$

($Zm_p + Nm_N$) جرمی که انتظار داریم هسته داشته باشد

($m(A,Z)$) جرم هسته که از طریق آزمایشگاهی به دست آمده است

$$\boxed{B=\left[Zm_p+Nm_N-M(A,Z)\right]c^2} = E=mc^2$$ انرژی بستگی هسته

مثال: انرژی بستگی هسته ی هلیم را به دست آورید. ($\alpha$)

$m_n$ = ۱٫۰۰۸۶۶۵ u — ۱۰³ ($M_{He}$ − A) = ۲٫۶۰۳۴۱

$m_p$ = ۱٫۰۰۷۸۲۵ u — ۱۰³ (M − ۴) = ۲٫۶۰۳۴۱

$m_{He}$ = ۴٫۰۰۲۶۳۴۱ — $M_{He}$ = ۴٫۰۰۲۶...

$B_t$ = [ ۲ × ۱٫۰۰۸۶۶۵ + ۲ × ۱٫۰۰۷۸۲۵ − ۴٫۰۰۲۶۳۴۱ u ] ۹۳۱٫۵ MeV/u = ۲۸٫۲ MeV

انرژی بستگی متوسط = $\frac{B_t}{A}$

انرژی بستگی به ازای هر نوکلئون را انرژی بستگی متوسط می‌نامند.

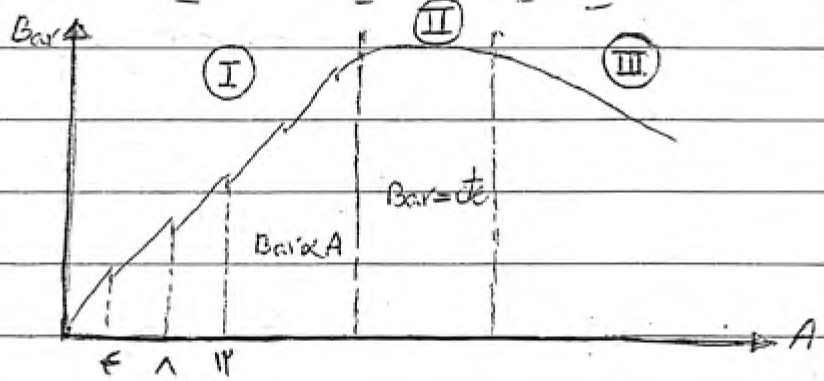
باید توجه کرد که به ازای هسته‌ها انرژی متوسط انرژی بستگی متوسط Bar تعریف می‌کنند. نشان می‌دهد

که هر چه مقدار آن بزرگتر باشد نوکلئون‌ها با انرژی بستگی بیشتری یکدیگر را کوپل می‌نمایند.

(۱) $\begin{cases} B_{ar} = ۵ \text{ MeV} \\ A = ۵۰ \longrightarrow B_t = ۲۵۰ \text{ MeV} \end{cases}$

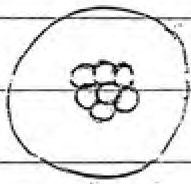
(۲) $\begin{cases} B_{ar} = ۷ \text{ MeV} \\ A = ۳۰ \longrightarrow B_t = ۲۱۰ \text{ MeV} \end{cases}$

شکافتن این هسته سخت‌تر است و کوپلینگ بین نوکلئون‌ها بیشتر است پایدارتر است هسته




$\begin{cases} \text{I} & ۱ < A < ۳۰ \\ \text{II} & ۳۰ < A < ۱۵۰ \\ \text{III} & A > ۱۵۰ \end{cases}$

I) در این ناحیه هسته‌هایی که تعداد نوکلئون‌های آنها مضرب صحیحی از تعداد نوکلئون‌های ذره $\alpha$ باشد از پایداری خاصی برخوردار می‌باشند که این خود ناشی از پایداری ذره $\alpha$ است.



$$\begin{cases} \text{تعداد پیوندها} = \dfrac{n(n-1)}{2} \\ \text{انرژی هر پیوند} = C = Bar \\ B_{tot} = C\,\dfrac{A(A-1)}{2} \\ B_{tot} \propto A^2 \longrightarrow \boxed{Bar = \dfrac{B_{tot}}{A} \propto A} \end{cases}$$ ×غ

II) در ناحیه ۲، Bar مستقل از A است و تقریباً ثابت است بنابراین فرض اینکه تمام A نوکلئون هسته دوبه‌دو با یکدیگر پیوند داشته باشند غلط است علت آن این است که به سبب برد کوتاه نیروهای هسته‌ای هر نوکلئون فقط با نوکلئون‌های مجاورش پیوند خواهد داشت (حدود ۱۲ نوکلئون)

III) در ناحیه ۳ به سبب غلبه نیروهای کولنی با برد بسیار زیاد بر نیروهای هسته‌ای که کوتاه برد می‌باشند مقدار انرژی بستگی متوسط شروع به کاهش می‌نماید.

## نیروهای هسته‌ای

برای بعضی تعداد نوکلئون‌ها در هسته انرژی‌های بستگی [illegible] بیشتر می‌شود.

۱) انرژی زوجیت ($\delta$) هسته‌های زوج-زوج بسیار پایدارند $^{4}_{2}He$ $Z=2$ و $N=2$

هسته‌های زوج-فرد پایداری کمتری دارند

هسته‌های فرد-فرد دارای مقدار کمی پایداری می‌باشند

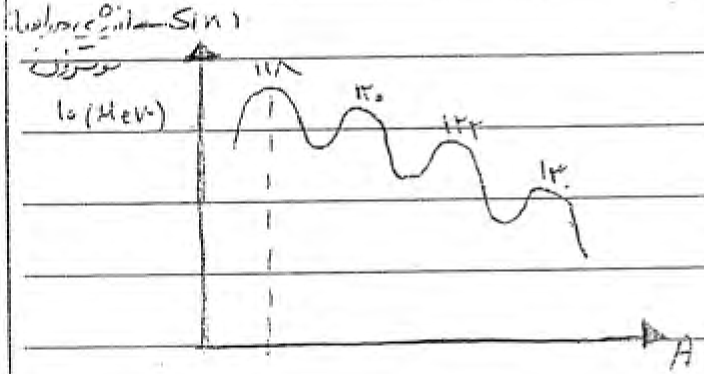
۲) [illegible] ($\eta$) ۲، ۸، ۲۸ و ۵۰، ۸۲، ۱۲۶ (magic number)

Z یا N مساوی با این اعداد باشند بسیار پایدار خواهند شد به همین سبب است که انرژی‌های بسیار زیادی

با $Z=29$ یا $N=82$ وجود دارد. علت این امر نیروهای حاصل شده کوانتومی است.

نکته ۶: طبیعت دائماً سعی می‌کند با افزایش تعداد نوترون‌ها در هسته‌های سنگین، هسته را پایدار تا بتواند بر نیروهای کولنی غلبه کند.

نکته ۷: از هسته‌های با N زوج سخت‌تر می‌توان نوترون جدا نمود تا هسته‌های با N فرد. علت این مسئله در شکل زیر ناشی از انرژی زوجیت می‌باشد.




* فرمول نیمه‌تجربی جرم: (مدل قطره مایع)

اهمیت این مدل در آن است که جرم‌های عملی داده‌های جرم هسته‌ای را مشخص می‌کند. این امر مؤید آن است که جمله انرژی بستگی اصلی متناسب با A باید صحیح باشد.

این فرمول براساس ۶ اصل زیر استوار است

۱- نیروهای هسته‌ای بسیار کم‌برد است (در حدود ۲ فرمی)

۲- اشباع‌پذیر است (همه نوکلئون‌ها با یکدیگر برهم‌کنش ندارند)

۳- جاذبه دافعه دارد (در فاصله کمتر از ۰/۵ فرمی نیروی بین نوکلئون‌ها تبدیل به دافعه خواهد شد)

۴- نیروهای کولنی از شدت نیروی هسته‌ای می‌کاهد

۵- انرژی زوجیت برحسب آنکه هسته زوج-زوج یا فرد-فرد یا زوج-فرد باشد بر مقدار انرژی بستگی کل تأثیر دارد

۶- انرژی مربوط به اینکه سری اعداد خاص (اعداد جادویی) سبب افزایش انرژی بستگی خواهد شد

$$B_T(A,Z) = a_v A - a_s A^{2/3} - a_c \frac{Z(Z-1)}{A^{1/3}} - a_a \frac{(A-2Z)^2}{A} \pm \delta + \eta$$

حجمی — سطحی — کولنی — تقارن — زوجیت — ترموزیت

مدل قطره مایعی — مدل‌های ذره‌ای و الایه‌ای

جمله حجمی: (حجم هسته) $V \propto A \longrightarrow \boxed{B_t \propto a_v A}$

$B \propto A$ ضریب حجمی

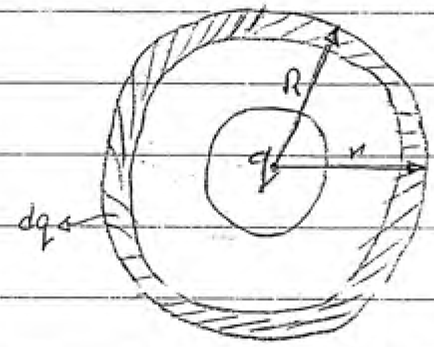
جمله سطحی: نیرویی که توسط نوکلئون‌های درونی دریافت می‌شود توسط نوکلئون‌های سطحی دریافت نمی‌گردد

جمله سطحی: سطح هسته $\propto R^2$

$R \propto A^{1/3} \Longrightarrow R^{2/3} \longrightarrow \boxed{B_t \propto a_s A^{2/3}}$

ضریب سطحی

بدست آوردن کل کار لازم برای کنار هم قرار دادن Z پروتون در هسته زیرا این پروتون‌ها با نیروی دافعه کولنی سبب ناپایداری هسته می‌شوند به همین سبب جمله کولنی به صورت یک ترم منفی در مدل ظاهر خواهد شد.




$\rho$ چگالی حجمی بار $= \dfrac{\text{بار کل}}{\text{حجم کل}} = \dfrac{Ze}{\frac{4}{3}\pi R^3}$

$W = k\dfrac{q_1 q_2}{r} \longrightarrow dw = k\dfrac{q\,dq}{r}$

$$\begin{cases} dq = \rho\, dv = \left(\dfrac{Ze}{\frac{4}{3}\pi R^3}\right)(4\pi r^2)\,dr \\ v = \frac{4}{3}\pi r^3 \longrightarrow dv = 4\pi r^2 dr \end{cases}$$

$$dw = k\frac{q\cdot dq}{r} \longrightarrow w = \int dw = \int_0^R \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r}\left(\frac{4}{3}\pi r^3 \rho\right)\left(\frac{Ze}{\frac{4}{3}\pi R^3}\times 4\pi r^2\right)dr$$

$\rho = \dfrac{q}{v} \longrightarrow q = \rho\cdot v$

$$W=\int_0^R \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r}\left(\tfrac{4}{3}\pi r^3 \rho\right)\left(\frac{3Ze\,r^2dr}{R^3 A}\right)$$

$$W=\frac{\rho Ze}{\varepsilon_0 R^3 A}\int_0^R r^4dr \longrightarrow W=\frac{\dfrac{Z^2e^2}{\frac{4}{3}\pi R^3}}{\varepsilon_0 R^3 A}\times\frac{1}{5}R^5$$

$$W=\frac{Z^2e^2}{\frac{4}{3}\pi R^3\varepsilon_0 R^3 A}\times\frac{1}{5}R^5=\frac{3Z^2e^2}{4\pi\varepsilon_0 R^3 A\times R}\times\frac{1}{5}R^2\times R$$

$$\boxed{W=\frac{3}{5}\frac{Z^2e^2}{4\pi\varepsilon_0 R}}$$ که یا انرژی لازم برای کنار هم قرار دادن Z پروتون در هسته

$Z=1 \longrightarrow W'=\frac{3}{5}\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 R}$ انرژی لازم برای تشکیل یک پروتون مجزا

$$\Delta W=W-ZW'=\frac{3}{5}\frac{Z^2e^2}{4\pi\varepsilon_0 R}-\frac{3}{5}\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 R}\times Z$$

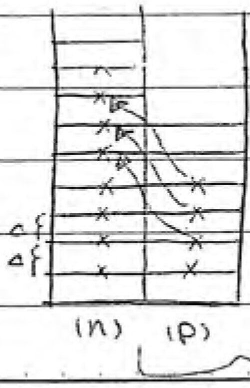
$$\frac{3}{5}\frac{e^2}{\underbrace{4\pi\varepsilon_0 R}_{RA^{1/3}}}(Z^2-Z)=\underbrace{\frac{3}{5}\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 R}}_{a_c}Z(Z-1)A^{-1/3}=a_c\frac{Z(Z-1)}{A^{1/3}}$$ ترم کولنی

عدم تقارن سبب می‌شود که هسته ناپایدار بشود.

جمله عدم تقارن: طبیعت می‌خواهد تعداد پروتون‌ها و نوترون‌ها در هسته یکسان باشد تا بر پایداری آن بیفزاید.

$$N=Z \longrightarrow A=2Z$$

اگر به هر ترتیبی این تقارن به هم خورد باید از انرژی بستگی هسته کاسته شود. فرض کنید $\nu$ پروتون به ترازهای نوترونی بروند و فاصله ترازها هم برابر $\Delta$ فرض شود خواهیم داشت.




$$W=3(3\Delta)=3^2\Delta \qquad W=\nu^2\Delta$$

چاه پتانسیل دو هسته ایزوبار $(N,Z)$

$N=Z=\frac{A}{2}$ هسته متقارن

$N=\frac{A}{2}-\nu$
$Z=\frac{A}{2}-\nu$ هسته نامتقارن

$\nu=\frac{1}{2}(N-Z)\ ,\quad W=\nu^2\Delta$

$$\boxed{W=\frac{1}{4}(N-Z)^2\Delta}$$

ثابت می‌شود که هرچه A بزرگتر باشد فاصله ترازها کمتر است

$\Delta \propto \frac{1}{A} \qquad W \propto \frac{(N-Z)^2}{A} \propto \frac{(A-2Z)^2}{A} \quad a_a\frac{(A-2Z)^2}{A}$

نکته: اگر هسته متقارن نباشد $(N-Z)$ جمله تقارنی حذف نمی‌شود و هرچه N بیشتر از Z گردد هسته نامتقارن‌تر یا ناپایدارتر می‌شود

انرژی زوجیت:

$\delta>0$ هسته زوج زوج
$\delta<0$ هسته فرد فرد
$\delta=0$ هسته فرد-زوج

انرژی جفت‌شدگی برای هسته‌هایی که N یا Z یکی از اعداد ۲۸ و ۵۰ و ۸۲ و ... باشد انرژی اضافی انرژی پوسته سبب پایداری هسته خواهد شد

| | | |
|---|---|---|
| $a_v=14$ | ۱۶ | ۱۵٫۵ |
| $a_s=13$ | ۱۸ | ۱۶٫۸ |
| $a_c=0.6$ | ۰٫۷۲ | ۰٫۷۲ |
| $a_a=19$ | ۲۳٫۵ | ۲۳ |
| $\delta=\frac{34}{A^{3/4}}$ | $\frac{11}{A^{1/2}}$ | $\frac{34}{A^{3/4}}$ (...) |

مثال: جرم اورانیوم ۲۳۸ را با استفاده از فرمول نیمه تجربی جرم به دست آورده و با جرم طیف سنجی مقایسه کنیم

$$B(238,92)=a_vA-a_sA^{2/3}-a_cZ(Z-1)A^{-1/3}-a_a\left(\frac{A-2Z}{A}\right)^2\pm\delta+\eta$$

$$=15.5\times238-16.8\times238^{2/3}-0.72(92)(91)(238)^{-1/3}-23\frac{(238-184)^2}{238}+\frac{34}{(238)}$$

$=1823.42$ MeV

$$M(A,Z) = N m_n + Z m_p - \frac{B_T}{c^2}$$

$$= 146 \times 1.008665 + 92 \times 1.007277 - \frac{1823.41}{931.5} = 237.97$$

از صفحه $10^3 (M - A) = 50.777$ ← ۲۳۸ → $\boxed{M = 238.0507}$

مثال ۶: در رابطه جداسازی نوترون از سرب ۲۰۸ مقدار این انرژی را با استفاده از رابطه فرمول نیمه تجربی جرم محاسبه نمایید

$$B_T(\quad) = a_v A - a_s A^{2/3} - a_c Z(Z-1) A^{-1/3} - a_a \frac{(A-2Z)^2}{A} \pm \delta + \eta$$

$${}^{208}_{82}Pb \longrightarrow {}^{207}_{82}X + {}^{1}_{0}n$$

$$S_n = B_T(A,Z) - B_T(A-1,Z) = B_T(208, 82) - B_T(207, 82)$$

$$S_n = \Big(15.56 \times 208 - 17.8 \times 208^{2/3} - 0.72 \frac{(82)(81)}{208^{1/3}} - 23 \frac{(208-164)^2}{208}$$

$$\boxed{+0.42} \Big) - \Big(15.5 \times 207 - 17.8 \times 207^{2/3} - 0.72 \frac{(82)(81)}{207^{1/3}} -$$

$$23 \frac{(207-164)^2}{207} + 0.92\Big) = 14.23 \text{ MeV}$$

مثال ۷: با استفاده از فرمول نیمه تجربی جرم درصد سهم انرژی حجمی انرژی سطحی انرژی کولنی و انرژی عدم تقارن انرژی بستگی متوسط نوکلئون برای $A=60$ محاسبه نمایید

$$B_T(A,Z) = a_v A - a_s A^{2/3} - a_c \frac{Z(Z-1)}{A^{1/3}} - a_a \frac{(A-2Z)^2}{A} \pm \delta + \eta$$

$$\boxed{B_{av} = \frac{B_T}{A} \longrightarrow B_T = B_{av} A} \qquad \boxed{B_{av}(A=60) = 8.8 \text{ (MeV)}}$$

سهم انرژی حجمی $= \dfrac{a_v A}{B_T} = \dfrac{a_v A}{B_{av} A} = \dfrac{14}{8.8} \times 100\% = 159\%$

$a_v=14 \qquad a_s=13 \qquad a_c=0.6 \qquad a_a=19$ ۱

سهم انرژی سطحی $= \dfrac{-a_s A^{2/3}}{B_{av} A} = \dfrac{-13\times A^{-1/3}}{8.8}\times 100 = -38\%$

〃 〃 کولنی $= \dfrac{-a_c Z(Z-1) A^{-1/3}}{B_{av}\cdot A} = \dfrac{-0.6(28)(27)}{8.8\times(60)^{4/3}}\times 100 = -22\%$

〃 〃 عدم تقارن $= \dfrac{-a_a\frac{(A-2Z)^2}{A}}{B_{av}\cdot A} = \dfrac{19(60-56)^2}{8.8\times 60^2}\times 100 \simeq -0.15\% = -1\%$

مثال ۵

الف) انرژی واپاشی در واپاشی α که در مدل نیمه‌تجربی جرم حساب کنید واپاشی α برابر است با تغییرات انرژی جدایی (سهم)

ب) مقدار حاصل از واپاشی $^{212}_{84}Po$ و $^{208}_{82}Pb$ را با استفاده از مدل بس‌ذره‌ای پارامترهای انرژی درآورید

انرژی واپاشی $S_\alpha$ = — حداکثر $S_\alpha$ $\Longrightarrow$ $\boxed{S_\alpha=-Q_\alpha}$

$S_\alpha = B_t(A,Z) - \underbrace{B_t(A-4,\,Z-2) - B_t(4,2)}_{\to\ 28.3\ MeV}$

$S_\alpha = \left(\underline{\underline{a_v A}}_{1} - \underline{a_s A^{2/3}}_{2} - \underline{a_c Z(Z-1)A^{-1/3}}_{3} - a_a \dfrac{(A-2Z)^2}{A}\right) -$

$\left(\underline{\underline{a_v(A-4)}}_{1} - \underline{a_s(A-4)^{2/3}} - a_c(Z-2)(Z-3)(A-4)^{-1/3} - a_a\dfrac{(A-4-2Z)}{A-4}\right.$

$-28.3\ MeV$

$\boxed{a_v A - a_v A + 4a_v = 4a_v} \qquad a_s(A-4)^{2/3} - a_s A^{2/3} =$

$a_s\left[\cancel{A^{2/3}} - 2/3\,A^{-1/3}(4) - \cancel{A^{2/3}}\right] = a_s\left(\dfrac{-8a_s}{3A^{1/3}}\right)$

$$a_c(Z-2)(Z-3)(A-4)^{-1/3} - a_c Z(Z-1)A^{-1/3} =$$

$$a_c(Z-2)(Z-3)\left(A^{-1/3} + 1/3\, A^{-4/3}(4)\right) - a_c Z(Z-1)A^{-1/3} =$$

$$a_c A^{-1/3}\Big[\underbrace{(Z-2)(Z-3) - Z(Z-1)}_{-4Z+\cancel{6}}\Big] - 4/3\,(Z-2)(Z-3)A^{-4/3}a_c =$$

$$\frac{a_c}{A^{1/3}}(-4Z) - \frac{4a_c}{3A^{4/3}}(Z^2 \cancel{-5Z} + \cancel{6}) = \frac{-4a_c Z}{A^{1/3}} - \frac{4a_c Z^2}{3A^{4/3}}$$

$$\boxed{= \frac{-4a_c Z}{A^{1/3}}\left(1 + \frac{Z}{3A}\right)}$$

$$\frac{a_a(A-2Z)^2}{A-4} - a_a\frac{(A-2Z)^2}{A} = a_a\left[\frac{A(A-2Z)^2 - (A-4)(A-2Z)^2}{A(A-4)}\right]$$

$$= a_a\frac{(A-2Z)^2(A-A+4)}{A^2-4A} = 4a_a\left(\frac{A-2Z}{A}\right)^2$$

ii) $Q_\alpha = B_T(4,2) - 4a_v + \frac{8a_s}{3A^{1/3}} + \frac{4a_c Z}{A^{1/3}}\left(1+\frac{Z}{3A}\right) - 4a_a\left(\frac{A-2Z}{A}\right)^2$

iii) $^{212}_{84}Po \longrightarrow {}^{208}_{82}Pb + {}^{4}_{2}\alpha + Q$ $\qquad \boxed{Q_\alpha = 3{,}424\ \text{MeV}}$

سهمی‌های جرم

اگر $B_{Tot}$ برحسب نوترون بنویسیم جرم و انرژی بستگی بدست آوریم سهمی‌هایی بدست خواهند آمد

$M(A,Z)$ را برحسب $Z$ نمایش می‌دهند.

$$B_T(A,Z) = a_v A - a_s A^{2/3} - a_c\frac{Z(Z-1)}{A^{1/3}} - a_a\frac{(A-2Z)^2}{A} \pm \delta + \eta$$

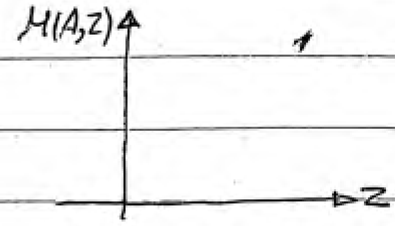
$$M(A,Z) = Nm_N + Zm_p - \frac{B_t}{c^2} \longrightarrow M(A,Z)c^2 = Nm_n c^2 + Zm_p c^2 - B_t$$

$$M(A,Z) = xA + yZ + zZ^2 \pm \delta + \eta$$

$\hookrightarrow y = ax^2 + bx + c$

 سهمی های جرم را متوجه نشدم!!

$$\begin{cases} x = m_n c^2 - a_v + a_a + \dfrac{a_s}{A^{1/3}} \\ y = -4a_a - (M_n + M_p)c^2 \simeq -4a_a \\ Z = \dfrac{4a_a}{A} + \dfrac{a_c}{A^{1/3}} \end{cases}$$




اگر $A$ مقداری ثابت فرض شود معادله سهمی جرم بیانگر یک سهمی است که Min جرم آن به ازای $Z=Z_A$ بدست خواهد آمد اگر از $M(A,Z)$ برحسب $Z$ مشتق گرفته برابر صفر قرار دهیم هسته مربوط به بیشترین پایداری را بدست خواهیم آورد علت آن است که همواره در کمترین جرم بزرگترین انرژی بستگی هسته وجود داشته و هسته پایدارتر است

$$\frac{\partial M(A,Z)}{\partial Z} = 0 \longrightarrow Z_{min} = \frac{(m_N - m_P)c^2 - a_c A^{-1/3} + 4a_a}{2a_c A^{-1/3} + 8a_a A^{-1}}$$

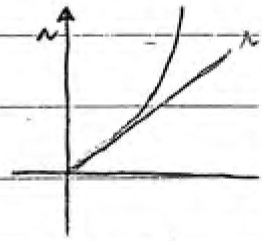
اگر $\begin{cases} a_c = 0.72 \text{ MeV} \\ a_a = 23 \text{ MeV} \end{cases}$

$$\boxed{Z_{min} \sim \frac{A}{2}\,\frac{1}{1 + (1/4)A^{2/3}\dfrac{a_c}{a_a}}}$$

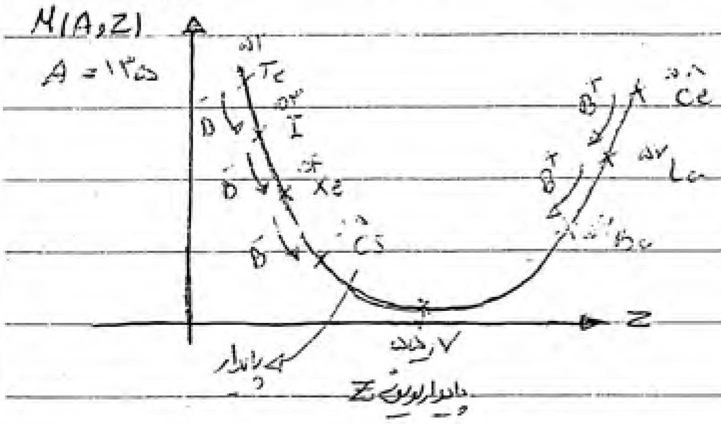
$\dfrac{a_c}{a_a}$ بسیار کوچک

بسیار کوچک $A \longrightarrow Z_{min} \simeq \dfrac{A}{2}$

بسیار بزرگ $A \longrightarrow Z_{min} < \dfrac{A}{2}$

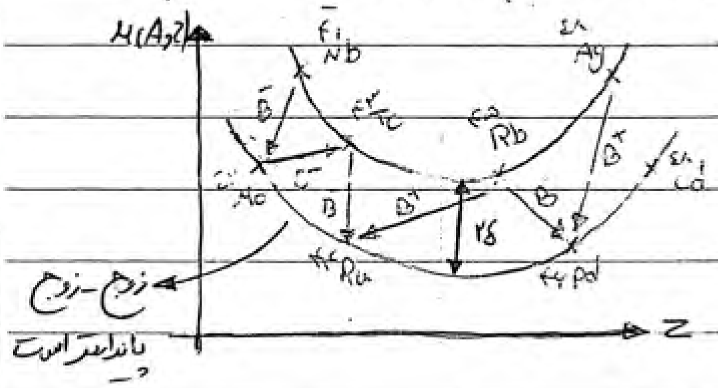



در $A$ های بزرگ به سبب غلبه نیروهای کولنی بر نیروی هسته ای منحنی پایداری از خط $\frac{Z}{A} = 1/2$ دور خواهد شد




عناصر زوج شامل جمله انرژی زوجیت بوده و به ازای هر عدد جرمی دو منحنی داریم و هرچه تبدیل بیشتر شود تعداد حالت پایداری آن افزایش یابد

نکته: در مورد A زوج دو سهمی به صورت فرد-فرد و زوج-زوج وجود دارد که سهمی بالایی فرد-فرد ناپایدارتر، پایین‌تر زوج-زوج می‌باشد و فاصله این دو سهمی دو برابر انرژی زوجیت ($2\delta$) می‌باشد.




تمام واپاشی‌های $\beta^-$ و $\beta^+$ جهت رسیدن اتم به حالت پایدارتر انجام می‌پذیرند.

شرایط واپاشی

جهت انجام واپاشی‌های $\beta^-$ و $\beta^+$ لازم است شرایط زیر برقرار باشد

شرط لازم و کافی برای واپاشی $\beta^-$

واپاشی $\beta^-$: $n \to p^+ + e^- + \bar{\nu}$ $\quad Z \to Z+1 \quad M(A,Z) > M(A,Z+1)$

در همه یک نوترون به صورت مقابل تجزیه می‌شود.

تا هسته پایدار شود

شرط لازم برای واپاشی $\beta^+$

واپاشی $\beta^+$: $p \to n + e^+ + \nu$ $\quad Z \to Z-1 \quad M(A,Z) > M(A,Z-1)$

گیراندازی الکترون (electron capture)

$E.C: p^+ + e^- \to n$ اتم همچنان خنثی است ولی از عدد اتمی یک واحد کاسته $\quad Z \to Z-1$

k L M خواهد شد | شرط کافی $M(A,Z) > M(A,Z-1) + 2m_e$

دو عنصر در جدول یک واحد عقب انتقال می‌یابند.

شرط کافی برای واپاشی $\beta^+$ بزرگتر از دو جرم الکترون

... شواهد تجربی مدل ارایه ...

قابل توجه است به همه‌ی شواهد به نظر می‌رسد مدل قطره‌ای برای مدل هسته درست است ولی مواردی وجود دارند که نشان می‌دهند مدل قطره‌ای برای هسته ... در این حالت مدل قطره مایع ... این رفتار را نمی‌تواند توصیف کند و نمی‌باشد.

شواهد:

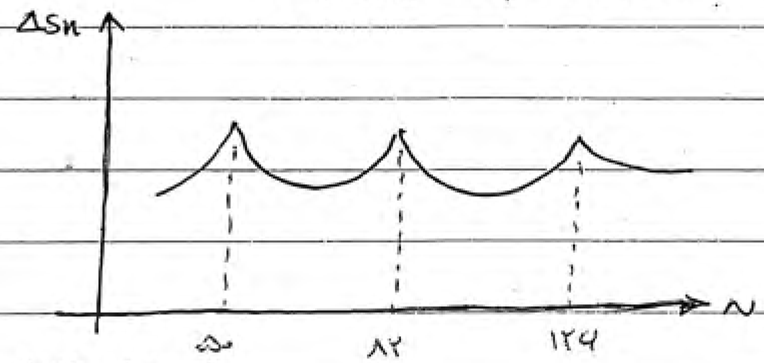
1. اختلاف بین انرژی جداسازی نوترون در حالت تجربی و محاسباتی در اعداد جادویی

$$S_n = \left[ M(A-1,Z) + m_n - M(A,Z) \right] c^2$$

$$\boxed{S_n \text{ تجربی} - S_n \text{ محاسباتی}\; S_n(cal) = \Delta S_n}$$

$$\Delta S_n = S_n(A,Z)_{exp} - S_n(A,Z)_{cal} \simeq \underline{\eta(A,Z) - \eta(A-1,Z)}$$

اختلاف ناشی از انرژی هم‌زوجیت می‌باشد که در مدل محاسباتی منظور نشده است.

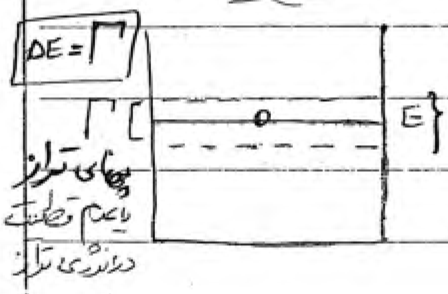



اعداد magic

در نتیجه درون هسته تمایل بالایی وجود دارد که با رسیدن لایه‌ها به حالت کامل نوترون به اعدادی مانند ۱۲۶ و ۵۲ ... هسته پایداری فوق‌العاده‌ای خواهد داشت

در همین سبب جدا سازی نوترون از آن مشکل‌تر خواهد بود.

۲- پهن شدگی ترازهای انرژی در درون هسته با اصل عدم قطعیت در تناقض می‌باشد




$$\Delta P \cdot \Delta x \simeq \hbar$$

$$\boxed{\Delta E \cdot \Delta t \approx \hbar} \longrightarrow \boxed{\Gamma \cdot \Delta t = \hbar}$$

زمان متوسط برهم‌کنش میان نوکلئون‌ها

$t \sim \dfrac{R}{v}$ اگر سرعت نوکلئون‌ها در هسته: $v$

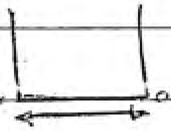
$v = \dfrac{P}{m} = \dfrac{k\hbar}{m}$ (۱) $\quad k_{min} = \dfrac{2\pi}{\lambda} = \dfrac{2\pi}{2R} \sim \dfrac{\pi}{R}$ (۲) $\quad R$ شعاع هسته:

حداکثر مسافت درون هسته

$k = \dfrac{2\pi}{\lambda} \qquad P = \dfrac{h}{\lambda} = \dfrac{h}{2\pi} \times \dfrac{2\pi}{\lambda} = \boxed{\hbar \cdot k}$

$$①,② \Longrightarrow \boxed{v_{min} = \frac{n\hbar}{mR}} \longrightarrow \boxed{T_{max} \sim \frac{mR^2}{n\hbar}}$$ حداکثر زمان واکنش بین نوکلئون‌ها

$$\Gamma = \frac{\hbar}{t_{max}} = \frac{\hbar}{\frac{mR^2}{n\hbar}} = \boxed{\frac{n\hbar^2}{mR^2}}$$ حداقل عدم قطعیت در انرژی ترازها

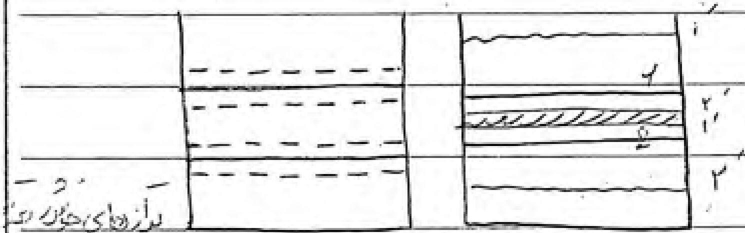


از یک

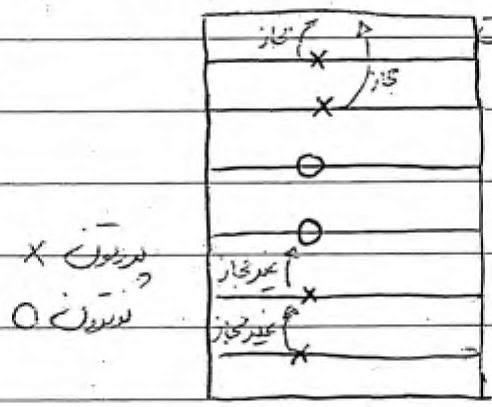
در داخل پتانسیل

$$\boxed{E = (n_x^2 + n_y^2 + n_z^2)\frac{\pi^2\hbar^2}{2ma^2}}$$

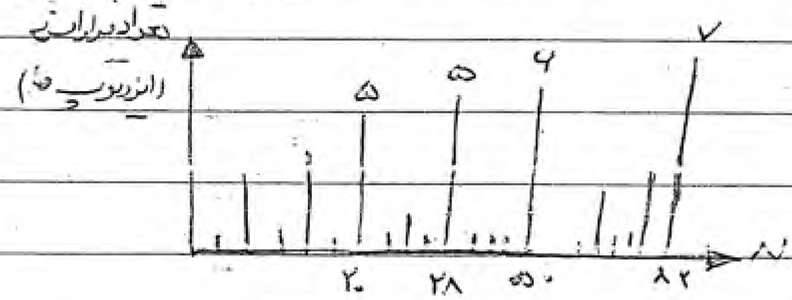
دیده می‌شود عدم قطعیت در ترازهای انرژی کوچک هستند با انرژی خود ترازها از یک مرتبه می‌باشند و این بدان معنی است که ترازها با یکدیگر هم‌پوشانی می‌کنند



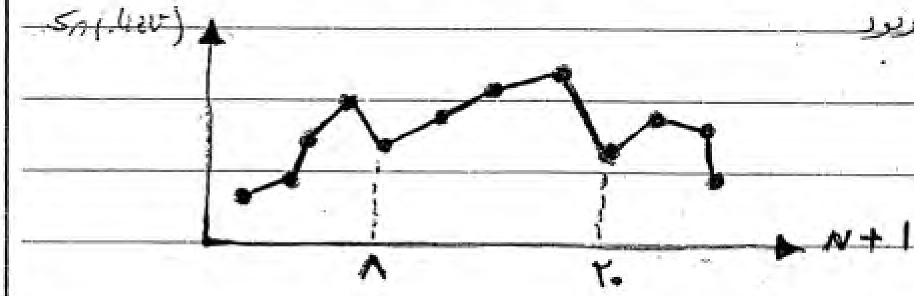

طبق اصل طرد پاولی نمی‌توان نوکلئون‌ها را به ترازهای از قبل اشغال شده برد فقط جابجایی به ترازهای خالی مجاز می‌باشد. بنابراین بر طبق اصل وایسکوپف تعداد برهم‌کنش‌های مجاز بسیار کمتر از تعداد تصور شده است. در نتیجه زمان برهم‌کنش‌ها بسیار بزرگتر از $T_{max}$ و در نتیجه مقدار عدم قطعیت انرژی ($\Gamma$) نیز خیلی کمتر خواهد بود. در نتیجه ترازها با یکدیگر هم‌پوشانی ندارند



۱ـ دیده می‌شود هنگامی که تعداد نوترون‌های هسته با اعداد جادویی برابر باشند تعداد ایزوتوپ‌ها افزایش می‌یابد و فراوانی معرف پایداری هسته است




۴ـ میانگین انرژی جداسازی نوترون در هسته‌های جادویی بسیار زیاد است و این ناشی از فاصله ترازهای انرژی در این هسته‌ها است. قابل توجه است هنگامی که از یک هسته‌ی جادویی یک نوترون جدا نماییم انرژی جداسازی نوترون بعدی بسیار کمتر خواهد بود



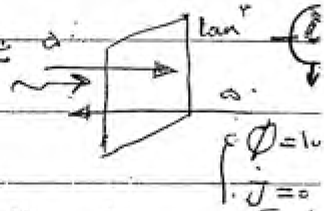

نرخ واکنش $R = \Sigma \phi$ جهت شار $= N\sigma\phi$ شار نوترون

سطح مقطع ماکروسکوپیک

سطح مقطع میکروسکوپیک

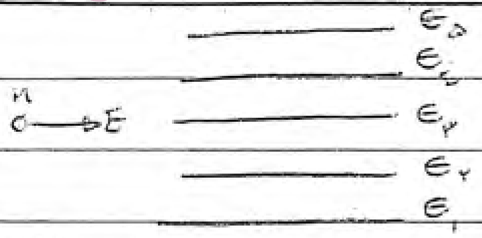
$\phi\left(\frac{n}{cm^2.s}\right)$ جهت شار نوترون

$J\left(\frac{n}{cm^2.s}\right)$ جهت جریان نوترون

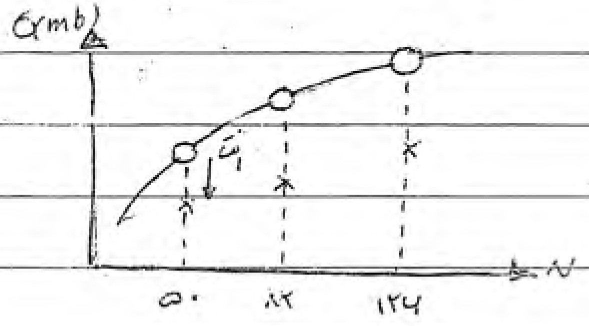



احتمال واکنش ← سطح مقطع

هنگامی که یک نوترون به سمت یک هسته با ترازهای انرژی خاص پرتاب می‌شود هنگامی گیراندازی نوترون انجام خواهد شد که انرژی نوترون پرتاب شده با انرژی یکی از ترازهای هسته یکسان باشد. قابل توجه است که سطح مقطع‌های گیراندازی نوترون با انرژی‌های معین برای هسته‌های جادویی از بقیه هسته‌ها کمتر است و این ناشی از فاصله ترازهای انرژی است. زیرا هر چه فاصله ترازها بیشتر باشد احتمال گیراندازی نوترون‌ها کمتر خواهد شد و هر چه ترازها به هم نزدیک‌تر باشند احتمال آن که نوترون تابیده شده تراز هم انرژی خود را پیدا کند بیشتر است




* دیده می‌شود که در اعداد مرموز سطح مقطع نوترون
* کاهش چشمگیری می‌یابد. و این به مفهوم عدم تمایل هسته
با اعداد مرموز به واکنش می‌باشد.




احتمال واکنش $\propto$ $\dfrac{1}{\text{سطح مقطع}}$

از جنس احتمال

«مدل لایه‌ای تک ذره‌ای» ... sing : particle shell model

**فرض اساسی** ← تصور می‌کنیم در هسته هم مثل اتم لایه‌هایی وجود داشته باشد یعنی هر نوکلئون اعم از پروتون یا نوترون در پتانسیل میانگین چاه پتانسیل کروی که سایرین به وجود آورده‌اند قرار دارد برای چاه پتانسیل یک سری اعداد کوانتومی تعریف می‌شود

اعداد کوانتومی:
- $n$ : عدد کوانتومی مداری
- $l$ : عدد کوانتومی اندازه حرکت (تکانه) زاویه‌ای
- $m$ : عدد کوانتومی مؤلفه z اندازه حرکت زاویه‌ای
- $s$ : عدد کوانتومی اسپین $\quad s = \pm \frac{1}{2}\hbar$

$n \leftarrow 2p_{3/2}$, $\quad l = 1$

$l = 0, 1, 2, 3, 4, 5, \ldots$

$s \quad p \quad d \quad f \quad g \quad h \ldots$

$m = -l, \ldots, 0, \ldots, +l$

$n=1 \quad 1p \rightarrow$ ($l=1$):
- $m = -1 \quad \uparrow\downarrow$
- $m = 0 \quad \uparrow\downarrow$
- $m = +1 \quad \uparrow\downarrow$

$2 \times 3 = 6$ حالت ← عدد کوانتوم اسپین (حرکت چرخشی)

تعداد نوکلئون‌های هم‌تراز $= 2(2l+1)$

تعداد $= 2(2+1) = 6$

| | | |
|---|---|---|
| 2s | ۲ | ۴۰ |
| 1d | ۱۰ | ۱۸ |
| 1p | ۶ | ۸ |
| 1s | ۲ | ۲ |

$$L=2\begin{cases} j=2+\frac{1}{2}=\frac{5}{2} \\ j=2-\frac{1}{2}=\frac{3}{2}\end{cases}$$

۲۱

$$L=1\begin{cases} j=\frac{3}{2} \\ j=\frac{1}{2}\end{cases}$$

دو زیر تراز

نکته: هر کدام از ترازها حداکثر به دو تراز j تبدیل می‌شوند

$1p$ — ۶ → ۲ → $1p_{1/2}=j$ ؛ ۴ → $1p_{3/2}=j$

$\ell=1$

۶ نوکلئون

$$\boxed{\vec{J}=\vec{\ell}+\vec{S}}$$

$$J=\ell\pm\tfrac{1}{2}\ \begin{cases}\rightarrow 3/2\\ \rightarrow 1/2\end{cases}$$

$\boxed{2J+1=\text{تعداد زیرترازها}}$ یا تعداد نوکلئون‌های هر تراز فرعی

ترازهای مربوط به j بزرگتر زیر ترازهای انرژی j کوچکتر قرار می‌گیرند. بطور مثال در شکل بالا انرژی $1p_{1/2}$ بیشتر از $1p_{3/2}$ است. نوع جفت‌شدگی جای‌جای برای پروتون‌ها و نوترون‌ها بطور مستقل به صورت زیر می‌باشد و جداگانه پر می‌شوند

$$n \leftarrow 2p_{3/2} \quad p\rightarrow L=1,\quad \tfrac{3}{2}\rightarrow j=\tfrac{3}{2}$$

$3s$ — ۲

$2d$ — ۱۰ → ۴ $2d_{3/2}$ ؛ ۶ $2d_{5/2}$

$1g$ — ۱۸ → ۸ $1g_{7/2}$ ؛ ۱۰ $1g_{9/2}$

$2p$ — ۶ → ۲ $2p_{1/2}$ ؛ ۴ $2p_{3/2}$

$1f$ — ۱۴ → ۶ $1f_{5/2}$ ؛ ۸ $1f_{7/2}$

$2s$ — ۲

$1d$ — ۱۰ → ۴ $1d_{3/2}$ ؛ ۶ $1d_{5/2}$

$1p$ — ۶ → ۲ $1p_{1/2}$ ؛ ۴ $1p_{3/2}$

$1s$ — ۲

اصطلاحاً آخرین تراز پرشده را تراز ظرفیت و نوکلئون های واقع در آن را نوکلئون ظرفیت می نامند برای تعیین اسپین کل هسته ابتدا چاه پتانسیل پروتون ها و نوترون ها را چیده و سپس بر اساس آخرین نوکلئون منفرد اسپین کل هسته را مشخص می نماییم

$$(1s_{1/2})^2 \to 2 \quad (1p_{3/2})^4 (1p_{1/2})^2 \to 8 \quad (1d_{5/2})^6 (2s_{1/2})^2 (1d_{3/2})^4 \to 20 \quad (1f_{7/2})^8 \to 28$$

$$(2p_{3/2})^4 (1f_{5/2})^6 (2p_{1/2})^2 (1g_{9/2})^{10} \to 50 \quad (1g_{7/2})^8 (2d_{5/2})^6 (2d_{3/2})^4 (3s_{1/2})^2 (1h_{11/2})^{12} \to 82$$

$$(1h_{9/2})^{10} (2f_{7/2})^8 (2f_{5/2})^6 (3p_{3/2})^4 (3p_{1/2})^2 (1i_{13/2})^{14} \to 126 \ \ldots$$

$\boxed{I^{(\pi)} \text{ اسپین پاریته } \quad \pi = (-1)^l}$

مربوط به آخرین نوکلئون منفرد هسته

از آخرین نوکلئون منفرد ← $l$

نکته: باید توجه کرد برای تعیین اسپین پاریته در هسته فقط چاه پتانسیل مربوط به نوکلئون منفرد را تعیین می کنیم و نوکلئون زوج تاثیری در تعیین اسپین هسته نخواهد داشت.

$Z = 20 \quad {}^{41}X_{21} = N$

$$(1s_{1/2})^2 (1p_{3/2})^4 (1p_{1/2})^2 (1d_{5/2})^6 (2s_{1/2})^2 (1d_{3/2})^4 (1f_{7/2})^1 \to 21$$

$$I^{(\pi)} = \left(\tfrac{7}{2}\right)$$

$$f \to l = 3 \to \pi = (-1)^3 = -$$

$\boxed{\text{اسپین} = I^{(\pi)} = \left(\tfrac{7}{2}\right)^-}$

پروتون چون زوج بوده اسپین آن صفر بوده و دخالتی در تعیین وضعیت ندارد.

نکته: اسپین پاریته ی هسته های زوج - زوج صفر مثبت است.

نکته: اسپین پاریته ی هسته های فرد - فرد به دلیل آن که هم پروتون و هم نوترون منفرد وجود دارد توسط قاعده ی نوردهایم تعیین خواهد شد.

$^{A}_{Z}X_{N}$ — Z فرد — N فرد

$Z \begin{cases} l_1 \\ J_1 \end{cases}$ عبارت زیر را تعیین می‌کنیم

$N \begin{cases} l_2 \\ J_2 \end{cases}$

$J_1 + J_2 + l_1 + l_2 \begin{cases} \text{فرد} \to I = J_1 + J_2 \\ \text{زوج} \to I = |J_1 - J_2| \end{cases}$ انتظار داریم

$\pi = (-1)^{l_1 + l_2}$

مثال: $^{16}_{7}N_{9}$

$P: (1s_{1/2})^2 (1p_{3/2})^4 (1p_{1/2})^1 \longrightarrow \begin{cases} l_1 = 1 \\ J_1 = 1/2 \end{cases}$

$N: (1s_{1/2})^2 (1p_{3/2})^4 (1p_{1/2})^2 (1d_{5/2})^1 \longrightarrow \begin{cases} l_2 = 2 \\ J_2 = \frac{5}{2} \end{cases}$

$J_1 + J_2 + l_1 + l_2 = 1/2 + 5/2 + 1 + 1 = \boxed{6}$ زوج

$I = |J_1 - J_2| = |1/2 - 5/2| = \boxed{2}$ $\qquad \pi = (-1)^{l_1 + l_2} = (-1)^{1+2} = -$

$I^{\pi} = (2)^-$

نکته: یک برهمکنش نوکلئون نوکلئون وجود دارد که در l های بزرگ سبب می‌شود زوج کردن نوکلئون‌ها با l بزرگتر می‌شود (مثلاً یک $h_{11/2}$ که بالای $3s$ است از $3s$ ۲ تا نوکلئون بالا می‌کشد و خود را زوج می‌کنند. علت این امر آن است که انرژی زوجیت با افزایش l زیاد خواهد شد.

$^{75}_{33}As_{42}$ $\quad P: (1s_{1/2})^2 (1p_{3/2})^4 (1p_{1/2})^2 (1d_{5/2})^6 (2s_{1/2})^2 (1d_{3/2})^4 (1\ldots$

$(2p_{3/2})^{4} (1f_{5/2})^{1}$

$l = 3 \longrightarrow \pi = (-1)^3 = - \qquad \boxed{I^{\pi} = (5/2)^-}$ ✗ انتظار داریم

$\boxed{I^{\pi} = (3/2)^-}$ ✓ دیده می‌شود

$I^{\pi} = (3/2)^- \qquad \pi = (-1)^1 = -$

$^{45}_{21}Sc_{24}$ — سوال ۲۴-۲

$p: (1s_{1/2})^2 (1p_{3/2})^4 (1p_{1/2})^2 (1d_{5/2})^6 (2s_{1/2})^2 (1d_{3/2})^4 (1f_{7/2})^1$ ۲۰

$L=3$

$\longrightarrow I^{(\pi)} = (7/2)^- \qquad l=3 \longrightarrow \pi = (-1)^3 = -$

$^{203}_{81}Tl_{122}$

$p: \ldots\ldots (1g_{7/2})^8 (2d_{5/2})^6 (2d_{3/2})^4 (3s_{1/2})^1 (1h_{11/2})^{12}$

$(1h_{11/2})\begin{cases} L=5 \\ I^{\pi} = (11/2)^- \qquad \pi = (-1)^5 = - \end{cases}$ انتظار داریم

$3s_{1/2}\ (۸۱)\begin{cases} L=0 \\ I^{\pi} = (1/2)^+ \qquad \pi = (-1)^0 = + \end{cases}$

$^{181}_{73}Ta_{108} \longrightarrow (7/2)^+$ — از تجربی $7/2$

$p: \ldots\ldots (1g_{9/2})^{10} (1g_{7/2})^8 (2d_{5/2})^6 (2d_{3/2})^4 (3s_{1/2})^2 (1h_{11/2})^4$ ۵۰ ۷۰

$\{L=4 \rightarrow \pi\ p=+ \qquad I^{(\pi)} = (7/2)^+$ ✓

انتظار داریم $I^{\pi} = (11/2)^- \qquad I^{\pi} = (7/2)^+ \qquad$ ~~+ میس g=4~~

$\begin{cases} L=5 \rightarrow \pi = - \\ I^{\pi} = (11/2)^- \end{cases}$ ✗

$^{38}_{17}Cl_{21}$ — تجربه ۲- میباشد

$p: (1s_{1/2})^2 (1p_{3/2})^4 (1p_{1/2})^2 (1d_{5/2})^6 (2s_{1/2})^2 (1d_{3/2})^1 \longrightarrow \begin{cases} l_1 = 2 \\ J_1 = 3/2 \end{cases}$

$N: \ldots\ldots (1d_{3/2})^4 (1f_{7/2})^1 \longrightarrow \begin{cases} l_2 = 3 \\ J_2 = 7/2 \end{cases}$

$l_1 + l_2 + J_1 + J_2 = 2+3+3/2+7/2 = \boxed{10}$ زوج $\qquad I^{\pi} = (2)^-$

$I = |J_1 - J_2| = |7/2 - 3/2| = 2 \qquad \pi = (-1)^{l_1+l_2} = (-1)^5 = -$

۹۱/۹/۲۶

پرسش ۲

$^{90}_{39}Y_{51} \rightarrow (2)^-$

$P: \ldots\ldots (1f_{7/2})^8 (2p_{3/2})^4 (1f_{5/2})^{6\,5} (2p_{1/2})^{0\,1} \longrightarrow \begin{cases} l_1 = 1 \\ J_1 = 1/2 \end{cases}$

$N: \ldots\ldots (1g_{9/2})^{10\,9} (1g_{7/2})^{0\,1} \longrightarrow \begin{cases} l_2 = 4 \\ J_2 = 7/2 \end{cases}$

$l_1 + l_2 + J_1 + J_2 = 1 + 4 + 1/2 + 7/2 = 9$

$I = J_1 + J_2 = 1/2 + 7/2 = 4 \qquad \Pi = (-1)^{l_1 + l_2} = - \qquad \boxed{I^{\Pi} = (4)^-}$

$\begin{cases} l_1' = 3 \\ J_1' = 5/2 \end{cases} \qquad \begin{cases} l_2' = 4 \\ J_2' = 9/2 \end{cases}$

$l_1' + l_2' + J_1' + J_2' = 3 + 4 + 5/2 + 9/2 = 14$

$I = |J_1 - J_2| = |5/2 - 9/2| = 2$

$\Pi = (-1)^{l_1 + l_2} = (-1)^7 = - \rightarrow I^{\Pi} = (2)^-$

۲۲_۲ $\quad {}^{109}In \quad {}^{75}As \quad {}^{73}_{32}Ge_{41} \quad {}^{209}Bi$

$N: (1s_{1/2})^2 (1p_{3/2})^4 (1p_{1/2})^2 (1d_{5/2})^6 (2s_{1/2})^2 (1d_{3/2})^4 (1f_{7/2})^8 (2p_{3/2})^4 (1f_{5/2})^6 (2p_{1/2})^2 (1g_{9/2})^1$

$L = 4 \rightarrow \Pi = (-1)^4 = +$

$I^{(\Pi)} = 9/2^+$

برهم کنش‌های تابش‌های هسته‌ای با ماده:

اغلب اندازه‌گیری‌های شدت پرتوهای تابشی مبتنی بر برهم‌کنش حاصل از عبور تابش‌ها در ماده است. اندازه‌گیری انرژی یا شامل برهم‌کنش با الکترون‌های اتمی است و یا شامل انحراف ذرات باردار در میدان‌های الکتریکی و مغناطیسی است. در این بخش سازوکارهای برهم‌کنش که باعث کندکننده و جذب‌کننده از دست دادن انرژی آن هنگام حرکت در ماده می‌شوند مورد بحث قرار می‌گیرد. زیرا آشکارسازی تابش بر پایه‌ی برهم‌کنش‌های آن ...

و انرژی ذخیره شده درباره است.

تابش یونیزه به ۲ دسته تقسیم‌بندی می‌شود

۱- ذرات باردار: الکترون ($e^-$) - پوزیترون ($e^+$) - پروتون ($p$) - دوترون ($d$) - آلفا ($\alpha$) - یون‌های سنگین ($A>4$)

۲- فوتون‌ها: پرتوهای گاما ($\gamma$) - اشعه X

۳- نوترون‌ها

این تقسیم‌بندی از این نظر مناسب است که هر گروه دارای ویژگی‌های خاص خود است. مثلاً یک ذره باردار به هنگام حرکت در ماده از طریق نیروهای کولنی با الکترون‌های منفی و هسته‌های مثبت اتم‌هایی که ماده را تشکیل می‌دهند برهم‌کنش کرده و مرتباً انرژی از دست می‌دهد و سرانجام پس از پیمودن مسافت معینی موسوم به برد (R) متوقف می‌شود. برد یک ذره وابسته به نوع و انرژی ذره و نیز ماده‌ای که ذره در آن حرکت می‌کند می‌باشد. این در حالی است که نوترون‌ها و فوتون‌ها بدون بار هستند و برهم‌کنش‌های متفاوتی با ماده خواهند داشت.

«سازوکارهای اتلاف انرژی ذرات باردار»...

ذرات بارداری که از ماده عبور می‌کنند در اثر عوامل زیر انرژی از دست می‌دهند

۱) برهم‌کنش‌های کولنی با الکترون‌های مداری هسته‌ها

۲) گسیل تابش الکترومغناطیسی (تابش ترمزی)

۳) برهم‌کنش‌های هسته‌ای (سهم بسیار ناچیز)
۴) گسیل تابش چرنکوف (سهم بسیار ناچیز)
می‌توان چشم‌پوشی کرد.

گسیل تابش چرنکوف: پدیده تابش الکترومغناطیسی ضعیفی است که وقتی ذرات باردار در یک محیط با سرعتی بزرگ‌تر از سرعت نور حرکت کنند گسیل خواهد شد.

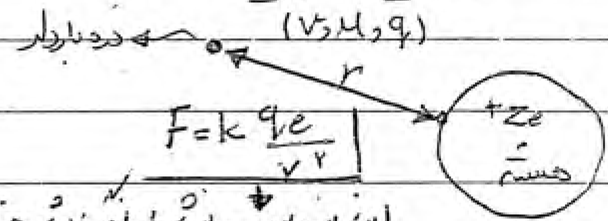
برهم‌کنش‌های کولنی: در مورد ذرات باردار سریع ممکن است با الکترون‌های اتمی یا هسته‌های اتم برهم‌کنش کنند. غالباً تعداد برهم‌کنش با الکترون‌ها تقریباً $10^8$ برابر تعداد برهم‌کنش‌ها با هسته‌های اتم است.

شعاع هسته $\simeq 10^{-14}$ (m)
شعاع اتم $\simeq 10^{-10}$ (m)

$$\frac{\text{تعداد برهم کنش‌ها با الکترون}}{\text{تعداد برهم کنش‌ها با هسته‌ها}} = \frac{R^2_{\text{اتم}}}{R^2_{\text{هسته}}} = \frac{(10^{-10})^2}{(10^{-14})^2} \sim 1$$

این محاسبه دلالت بر این دارد که برخورد با الکترون‌های اتمی بسیار مهم‌تر از برخورد با هسته‌هاست بنابراین می‌توان با تقریب خوب برخوردهای هسته‌ای را در نظر نگرفت.

انتقال انرژی به الکترون از طرف ذره باردار ممکن است سبب یونش یا برانگیزش شود




$$F = k\frac{qe}{r^2}$$

این نیرو سبب یونش یا برانگیزش خواهد شد.

یونش:

یعنی رخ می‌دهد که الکترون انرژی کافی برای ترک اتم و تبدیل شدن به یک ذره آزاد با انرژی جنبشی خاص بدست آورد

$(KE_e)$ = (انرژی داده شده توسط ذره) − (پتانسیل یونش)

که انرژی لازم برای کنده شدن الکترون و تبدیل به الکترون آزاد

یونیده شده خوب

این احتمال وجود دارد که این الکترون نیز سبب یونش اتم دیگری شود.

برانگیزش:

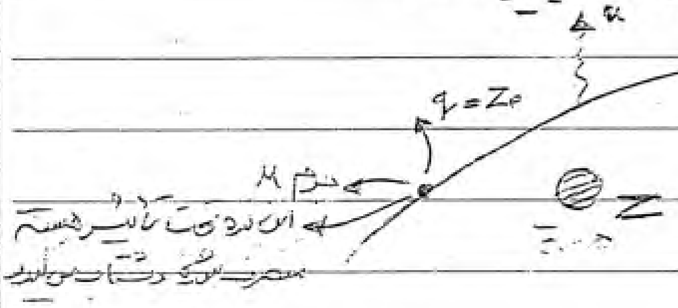
هنگامی رخ می‌دهد که الکترون انرژی کافی برای انتقال به یک مدار با انرژی بالاتر را بدست آورد در این ترتیب اتم برانگیخته تولید می‌کند قابل توجه است که برخوردهایی که منجر به یونش یا برانگیزش می‌شود برخوردهای ناکشسان هستند. در این مورد ذره فرودی که آن مقدار انرژی از دست می‌دهد قانون پایستگی اندازه حرکت خطی ضروری است باید توجه کرد که فقط برخوردهای ناکشسان در اتلاف انرژی و آشکارسازی ذره باردار اهمیت دارد.

$E$ (انرژی داده شده از طریق ذره باردار)


$$\frac{1}{\lambda} = R_H\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{n'^2}\right)$$

## تابش ترمزی

هر ذره باردار که شتاب بگیرد یا شتاب خود را از دست بدهد بخشی از انرژی جنبشی اش را به شکل تابش الکترومغناطیسی از دست خواهد داد. این تابش تک انرژی نیست بلکه به شکل از طیف پیوسته‌ای است که انرژی آن از صفر تا بیشینه انرژی جنبشی ذره متغیر است.




$$I \sim \frac{z^2 Z^2}{M^2}$$

۱- برای ذرات سبکتر تابش ترمزی بیشتر است

۲- برای ذره‌ای که در محیطی با عدد اتمی Z بالاتر حرکت می‌کند تابش ترمزی گسیل شده بیشتر خواهد بود

اثر تابش ترمزی بیشتر برای الکترون و در مواردی که در محیطی با Z بالا در حرکت (Z>۸۲) است اهمیت دارد.

جنبشی

اتلاف انرژی ذرات باردار در اثر برخورد با ذرات محیط (برانگیزش و یونش اتم‌ها)

اگر فرض کنیم ذره باردار سنگین است و با یک الکترون آزاد برخورد می‌کند در این حال با اتلاف انرژی ذره باردار برابر انرژی جنبشی اخذ شده توسط الکترون باشد. مقدار اتلاف انرژی ذره در واحد طول مسیر توسط ذره باردار در یک محیط خاص از رابطه زیر قابل محاسبه است (می‌توان)

اتلاف انرژی ذره در واحد طول مسیر

$$\boxed{-\frac{dT}{dx} = \frac{4\pi e^4 z^2 \overbrace{n Z}^{\text{محیط}}}{\underbrace{m_0 v^2}_{\text{پرتاب}}} \ln\left(\frac{2m_0 v^2}{I_{av}}\right)} - \underbrace{\ln\left[\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)\right] - \frac{v^2}{c^2}}_{\text{معمولاً صرف نظر می‌شود}}$$

$n = \rho \frac{A_0}{M}$ : تعداد اتم‌ها در واحد حجم

$\boxed{ze}$ : بار ذره سنگین

$\boxed{nZ}$ : تعداد الکترون‌های موجود در واحد حجم ماده متوقف کننده

$\boxed{m_0}$ : جرم الکترون

$\boxed{v}$ : تندی ذره سنگین

$\boxed{I_{av}}$ : پتانسیل متوسط یونش یا برانگیزش اتم‌های ماده متوقف کننده است که در آزمایشگاه تعیین می‌شود

نتیجه می‌شود که اتلاف انرژی:

- مستقل از جرم ذره است.
- بستگی به $z^2$ ذره دارد.
- بستگی به سرعت ذره دارد.
- متناسب با چگالی الکترونهای ماده (n) است.

نکته: پاره‌های شکافت به سبب انرژی زیاد بدست آمده در عمل شکافت و همچنین Z بسیار بالا که دارند دارای $\frac{dT}{dx}$ بسیار بالا می‌باشند پس برد آنها بسیار کم است.

$$^{235}U + {}^1_0n \longrightarrow \underbrace{FF_1 + FF_2}_{\text{دارای } \frac{dT}{dx} \text{ بالا و برد کم}} + \nu n + Q$$

190 MeV ← قابل برداشت

نکته: معمولاً اتلاف انرژی از روی تعداد زوج یونهایی که در طول مسیر ذره تشکیل می‌شوند تعیین می‌کنند. منظور از زوج یون اجزای منفی و مثبتی است که در یک برخورد یونیزه تشکیل می‌شوند. اگر برای ایجاد یک زوج یون ذره به طور متوسط انرژی $\omega$ از دست بدهد تعداد زوج یونهای $i$ در واحد طول مسیر به صورت زیر قابل محاسبه است

$$|10\,(eV)| = 4 \times 2.5\,(eV)$$

$$-\frac{dT}{dx} = i\omega$$

$\omega$: انرژی لازم برای تولید هر زوج یون

$i$: تعداد زوج یونهایی در واحد طول مسیر

$\omega$ مستقل از ذره فرودی است و فقط وابسته به محیط است

W: انرژی متوسط لازم برای تولید هر زوج یون

$i$: تعداد زوج یونهای ایجاد شده

$$\boxed{\omega_{هوا} = 35\,eV}$$

قابل ذکر است W برای محیطهای مختلف متفاوت می‌باشد.

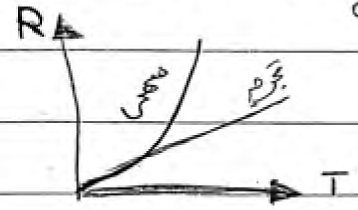
$\omega_{هوا}$
(1) 35 (eV) الکترونهای 0.5 keV وارد شود
(2) 35.2 (eV) " " 0.3 keV ذرات α
(3) 33.2 (eV) اگر پروتونهای 2 MeV وارد شود

برد ذره (R): مسافت متوسطی است که ذره طی می‌کند قبل از اینکه کاملاً انرژی جنبشی خود را از دست بدهد.

$$\bar{R} = \int_0^R dx = \int_{T_0}^0 \frac{dx}{dT}\, dT = \int_0^{T_0} \left(-\frac{dT}{dx}\right)^{-1} dT$$

اگر از جمله لگاریتمی $-\frac{dT}{dx}$ صرف نظر شود ⟵ $-\frac{dT}{dx} \propto \frac{1}{T}$

$$R = \int_0^{T_0} T\,dT = \frac{1}{2} T_0^2$$




ولی تجربه نشان داده است که منحنی برد بر حسب انرژی جنبشی تقریباً خطی است

$$R \propto T \Longrightarrow \boxed{\frac{R_2}{R_1} = \frac{T_2}{T_1} \times \frac{m_1}{m_2}}$$ رابطه [illegible]

**سؤال (۲-۳)**

با حذف جملات تصحیحی در عبارت اتلاف انرژی، متوسط اتلاف انرژی یک ذره α با ۱۰ MeV را در Al در حالی که $\underbrace{150\,eV = I_{av}}_{\text{پتانسیل متوسط یونش}}$ محاسبه کنید.

$T_\alpha = 10\,MeV$

ذره باردار $Z_\alpha = 2$

محیط $Z_{Al} = 13$

$I = 150\,eV$

$$-\frac{dT}{dx} = \frac{4\pi e^4 z^2 n}{m_0 v^2} \ln \frac{2 m_0 v^2}{I}$$

$$T_\alpha = \frac{1}{2} m_\alpha V_\alpha^2 \to V_\alpha^2 = \frac{2T_\alpha}{m_\alpha} \to m_0 V_\alpha^2 = \frac{m_0}{m_\alpha} \times 2T_\alpha = \frac{1}{7350} \times 2 \times 10\,MeV = 2.72\times10^{-3}\,MeV$$

$$\frac{m_0(u)}{m_\alpha(u)} = \frac{5.4858\times10^{-4}}{2\times1.00728 + 2\times1.00866} = \frac{1}{7350}$$

$$n = \frac{\rho A_0}{M} = \frac{2.702 \times 6.02\times10^{23}}{27} = 0.602\times10^{23}\ \left(\frac{\#}{cm^3}\right)$$

$$\frac{4\times3.14\times(4.8\times10^{-10})^4\times(2)^2\times(0.602\times10^{23})(13)}{2.72\times10^{-3}\times1.6\times10^{-6}\ \left(\frac{erg}{MeV}\right)} \times \ln\frac{2\times2.721\times10^{-3}}{150\times10^{-6}}$$

$$= 7.494\times10^{-4}\times3.591 = \frac{26.91\times10^{-4}\ \left(\frac{erg}{cm}\right)}{1.6\times10^{-6}} = 1076\ \left(\frac{MeV}{cm}\right)$$

$$26.91\times10^{-4}\ \frac{erg}{cm}$$

- اگر سرعت های دو ذره در محیط یکسان باشد اتلاف انرژی آن دو ذره در یک محیط یکسان دارای یک نسبت ثابت خواهد بود. (دارای رابطه ی خطی است)



۳- فصل ۴

اگر اتلاف انرژی $T_p = 10\,MeV$ در هوا $\left(-\frac{dT}{dx}\right)_p = 50\frac{keV}{cm}$ اتلاف انرژی یک ذره α چقدر است؟

اتلاف انرژی ذره α با 40MeV چقدر است؟

اتلاف انرژی دو ذره مختلف در یک محیط یکسان فقط و فقط در صورتی یک نسبت ثابت است (رابطه خطی دارد) که سرعت های دو ذره یکسان باشند.

$$T_p = 10(MeV) \longrightarrow \left(\frac{-dT}{dx}\right)_p = 50\frac{keV}{cm}$$

$$T_\alpha = 40(MeV) \longrightarrow \left(\frac{-dT}{dx}\right)_\alpha = ?$$

$$\frac{T_p}{T_\alpha} = \frac{\frac{1}{2}m_p v_p^2}{\frac{1}{2}m_\alpha v_\alpha^2} = \frac{1}{4}\frac{v_p^2}{v_\alpha^2} = \frac{10}{40} \rightarrow \boxed{v_p = v_\alpha}$$

$$\frac{\left(\frac{dT}{dx}\right)_p}{\left(\frac{dT}{dx}\right)_\alpha} = \frac{Z_p^2}{Z_\alpha^2} \Rightarrow \frac{50}{\left(\frac{dT}{dx}\right)_\alpha} = \frac{1}{4} \quad \left(\frac{dT}{dx}\right)_\alpha = 200\frac{keV}{cm}$$

فرض کنید محاسبات اتلاف انرژی برای پروتون ها را به الکترون های غیر نسبیتی تعمیم دهیم برای چه انرژی الکترون دارای همان اتلاف انرژی یک پروتون 10MeV است.

$$\left(\frac{dT}{dx}\right)_p = \left(\frac{dT}{dx}\right)_e \qquad \frac{T_e}{T_p} = \frac{\frac{1}{2}m_e v_e^2}{\frac{1}{2}m_p v_p^2} \qquad \frac{T_e}{10} = \frac{1}{1840}$$

$$T_e = 5.4(keV)$$

$\boxed{v_p = v_e}$ در غیر این صورت ثابت نیست تعمیم نمی شود

برهم کنش پرتوهای گاما با ماده

معمولاً جنس پرتوهای γ با پرتوهای x هم جنس پرتوهای الکترومغناطیسی در نظر می گیرند اگر پرتوهای γ به صورت ذره فرض شوند (فوتون) با سرعت نور حرکت می کنند جرم سکون و بار آن ها صفر فرض می شود. باید توجه کرد تمایزی میان پرتوهای x و γ از نظر ماهیت وجود ندارد و معمولاً فوتون با $E < 1\,MeV$ را پرتو x می نامیم هنگامی که γ وارد ماده می شود می تواند به صورت های زیر با

الکترون‌ها یا حتی نوکلئون‌های ماده ایجاد واکنش می‌کنند

۱) فوتوالکتریک (جذب)

۲) پراکندگی کامپتون (پراکندگی)

۳) تولید زوج (جذب)

۴) واکنش‌های فوتونوکلئر: برای انرژی‌های خیلی بالا در حد ۱۰ MeV با احتمال [illegible] پذیرایی کمتر از هسته نوترون جدا می‌کند

اثر فوتوالکتریک:

اتم مقید

برهم‌کنشی است بین یک فوتون و یک الکترون اتمی مقید. در اثر این برهم‌کنش فوتون ناپدید می‌شود و یکی از الکترون‌های اتم به صورت الکترون آزاد یا فوتوالکترون بیرون رانده خواهد شد. انرژی جنبشی این الکترون از طریق زیر قابل محاسبه است

$E_k = 5\,eV$ انرژی فوتون

$B_e = 2\,eV$ $\quad$ $T = 3\,eV$

$E_k \xrightarrow{\text{فوتون}} + \text{اتم (خنثی)} \longrightarrow \text{یون}(+) + e^-$

$E_B$: انرژی بستگی الکترون

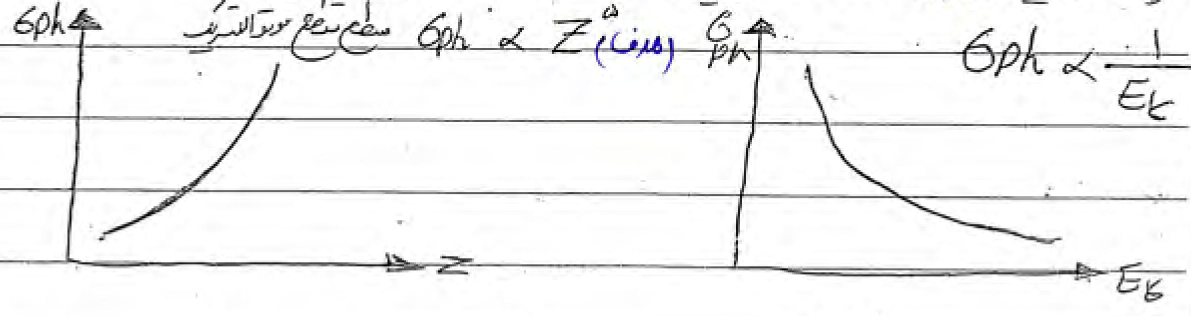
$E_k > BE_e$ (انرژی الکترون مقید به هسته [illegible])

$\boxed{T_e = E_k - BE_e}$

انرژی فوتون اولیه

احتمال رخداد این برهم‌کنش را سطح مقطع فوتوالکتریک یا ضریب فوتوالکتریک می‌نامند. این ضریب به پارامترهایی مثل (انرژی فوتون تابیده $E_k$) و Z ماده بستگی دارد

$\sigma_{ph} \propto Z^5$ (هدف) $\qquad \sigma_{ph} \propto \frac{1}{E_k}$




بنابراین دیده می‌شود اثر فوتوالکتریک با مواد با Z بالاتر در جذب فوتون‌های با انرژی کمتر چشمگیرتر خواهد بود

man

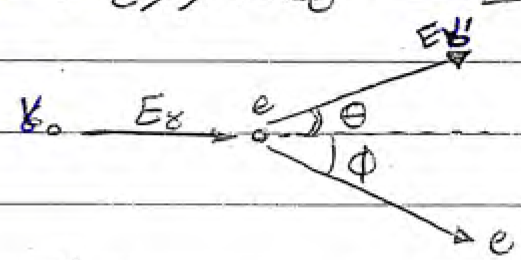
برخوردی است بین یک فوتون و الکترون آزاد. در یک پراکندگی کامپتون، فوتون ناپدید نمی‌شود و فقط راستای حرکت یا انرژی آن تغییر می‌کند. قابل توجه است که انرژی فوتون به مقداری کاهش می‌یابد که به الکترون داده شده است. بنابراین با استفاده از پایستگی انرژی اگر الکترون پیش از برخورد ساکن باشد انرژی جنبشی آن پس از برخورد از رابطه زیر قابل محاسبه است

$$T_e = E_\gamma - E_{\gamma'}$$

انرژی گاما قبل از برخورد با الکترون ← $E_\gamma$

انرژی گاما پس از برخورد با الکترون ← $E_{\gamma'}$

اگر $E_\gamma >> \underbrace{E_B}_{E_\beta}$ ← می‌توان الکترون را آزاد فرض کرد




$E_\gamma = h\nu \qquad E_\gamma = pc \qquad T = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{p^2}{2m}$

$E_e^2 = p^2c^2 + m_0^2c^4 \qquad E = T_e + E_0 \qquad \equiv T_e = E - E_0$

$$\begin{cases} \text{انرژی:} & E_\gamma = E_{\gamma'} + T_e \\ \text{اندازه حرکت:} & \vec{P}_\gamma = \vec{P}_e + \vec{P}_{\gamma'} \end{cases} \xrightarrow{\text{تجزیه روی دو محور}} \begin{cases} x: & P_\gamma = P_{\gamma'}\cos\theta + P_e\cos\phi \\ y: & 0 = P_{\gamma'}\sin\theta - P_e\sin\phi \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{array}{l} P_\gamma - P_{\gamma'}\cos\theta = P_e\cos\phi \\ P_{\gamma'}\sin\theta = P_e\sin\phi \end{array} \xrightarrow[\text{و سپس جمع}]{\text{طرفین به توان ۲}} \left(P_\gamma^2 + P_{\gamma'}^2 - 2P_\gamma P_{\gamma'}\cos\theta = P_e^2\right)$$

$$P_e^2c^2 = P_\gamma^2c^2 + P_{\gamma'}^2c^2 - 2P_\gamma P_{\gamma'}\cos\theta\, c^2$$

$$\boxed{P_e^2c^2 = (h\nu)^2 + (h\nu')^2 - 2h^2\nu\nu'\cos\theta} \qquad (۱)$$

اصل بقای انرژی $T_e = E_\gamma - E_{\gamma'}$ $\xrightarrow{\text{به توان ۲}}$ $E_\gamma^2 + E_{\gamma'}^2 - 2E_\gamma E_{\gamma'} = T_e^2$

$$(h\nu)^2 + (h\nu')^2 - 2h\nu\nu' = T_e^2$$

$(T_e = E - E_0)^2 \quad T_e^2 = E^2 + E_0^2 - 2E_e E_0 \quad T_e^2 = (p_e^2c^2 + E_0^2) + E_0^2 - 2E_e E_0$

$= p^2c^2 + 2E_0^2 - 2EE_0$

$$\boxed{(h\nu)^2 + (h\nu')^2 - 2h^2\nu\nu' = p^2c^2 + 2E_0^2 - 2EE_0} \quad (2)$$

$$(1)-(2) \Rightarrow \cancel{2}h^2\nu\nu'(1-\cos\Theta) = \cancel{2}E_e E_0 - \cancel{2}E_0^2 \qquad E_0 = m_0c^2$$

$$\boxed{h^2\nu\nu'(1-\cos\Theta) = m_0c^2(E_e - m_0c^2)} \quad (3)$$

$T = E - E_0 \qquad E_e - m_0c^2 = T_e \qquad \boxed{T_e = E_\gamma - E_{\gamma'} = h\nu - h\nu'} \quad (4)$

$$(3),(4) \Longrightarrow h^2\nu\nu'(1-\cos\Theta) = m_0c^2(h\nu - h\nu')$$

$$\frac{h\nu - h\nu'}{\nu\nu'} = \frac{h^2}{m_0c^2}(1-\cos\Theta)$$

$$\frac{1}{\nu'} - \frac{1}{\nu} = \frac{h}{m_0c^2}(1-\cos\Theta) \qquad \frac{\lambda'}{c} - \frac{\lambda}{c} = \frac{h}{m_0c^2}(1-\cos\Theta)$$

$$\boxed{\Delta\lambda = \lambda' - \lambda = \frac{h}{m_0c}(1-\cos\Theta)} \rightarrow \text{زاویه پراکندگی}$$

تغییرات طول موج

طول موج کامپتون الکترون $\leftarrow$

بطور حتم $\lambda < \lambda'$ می باشد زیرا انرژی فوتون پراکنده شده از انرژی فوتون ورودی کمتر است.

$$\boxed{E_{\gamma'} = \frac{E_\gamma}{1+(1-\cos\theta)\frac{E_\gamma}{m_0c^2}}}$$

انرژی گامای پراکنده

$$T_e = E_{\gamma'} - E_\gamma = \frac{(1-\cos\theta)\frac{E_\gamma}{m_0c^2}}{1+(1-\cos\theta)\frac{E_\gamma}{m_0c^2}}\,E_\gamma$$

انرژی الکترون پراکنده

نکته: انرژی Min برای فوتون پراکنده زمانی حاصل می‌شود که برخورد روبه‌رو باشد ($\theta=\pi$) که در این حالت انرژی انتقال داده شده به الکترون Max خواهد بود.

$$\theta=180 \longrightarrow E_{\gamma'}(Min) = \frac{E_\gamma}{1+\frac{2E_\gamma}{m_0c^2}} \qquad P_\gamma c = E_\gamma = h\nu$$

$$T_e(Max) = \frac{\frac{2E_\gamma}{m_0c^2}}{1+\frac{2E_\gamma}{m_0c^2}}\,E_\gamma$$

نکته: اگر الکترون آزاد فرض نشود و به اتم وابسته باشد در این حالت پراکندگی کامپتون به جای الکترون با کل اتم صورت می‌پذیرد که در این شرایط لازم است در مخرج به جای جرم الکترون جرم کل اتم را قرار دهیم

$$\Delta\lambda = \lambda - \lambda' = \frac{h}{M c}(1-\cos\theta) \rightarrow \boxed{\lambda'=\lambda}$$

جرم کل اتم

$$\rightarrow \nu'=\nu \longrightarrow \boxed{E_\gamma = E_{\gamma'}}$$

برخورد کاملاً الاستیک

نکته: اگر انرژی گاما بسیار زیاد باشد طول موج آن بسیار کوچک خواهد بود.

$$\lambda - \lambda' = \frac{h}{m_0c}(1-\cos\theta)$$

بسیار زیاد $E_\gamma \longrightarrow \lambda$ بسیار کوچک $\longrightarrow \lambda \ll \frac{h}{m_0c}$ به λ نقض

$$\Delta\lambda = \lambda' - \lambda = \boxed{\lambda' = \frac{h}{m_0c}(1-\cos\theta)}$$

$$E_{\gamma'} = \frac{hc}{\lambda'} = \frac{hc}{\frac{h}{m_0 c}(1-\cos\theta)} \Rightarrow \boxed{E_{\gamma'} = \frac{m_0 c^2}{1-\cos\theta}}$$

مثال: یک فوتون با ۳ Mev دستخوش پراکندگی کامپتون می‌شود (با یک الکترون آزاد) اگر زاویه پراکندگی ۹۰ درجه باشد انرژی فوتون و الکترون پراکنده را بدست آورید

ب) اگر زاویه پراکندگی ۱۸۰ باشد پاسخ‌ها چه خواهند شد (برخورد به صورت روبه‌رو) انرژی‌ها چه مقادیری خواهند داشت

$\theta = 90$

$$E_{\gamma}' = \frac{E_\gamma}{1+\frac{(1-\cos\theta)E_\gamma}{m_0c^2}} = \frac{3}{1+(1-0)\frac{3}{0/511}} = 0/437\ (Mev)$$

$$T_e = E_\gamma - E_\gamma' = 3 - 0/437 = 2/563\ (Mev)$$

$$E_{\gamma'}(min) = \frac{E_\gamma}{1+\frac{2E_\gamma}{m_0c^2}}$$

ب) $\theta = 180 \longrightarrow \cos\theta = -1$ $\qquad E_\gamma'(Min) = \frac{3}{1+\frac{2(3)}{0/511}} = 0/235\ (Mev)$

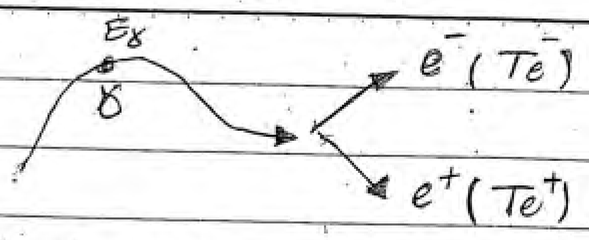
$$T_e(Max) = 3 - 0/235 = 2/765\ (Mev)$$

نکته: سطح مقطع پراکندگی کامپتون تقریباً متناسب با عدد اتمی ماده است $\qquad \sigma_{Compton} \propto Z$

## pair production (تولید زوج)

این واکنش برهم‌کنشی است که بین یک فوتون پرانرژی و میدان یک هسته انجام می‌شود در اثر این برهم‌کنش فوتون ناپدید می‌شود و یک زوج الکترون - پوزیترون ایجاد می‌شود در حالی که در اثر این برهم‌کنش هسته دستخوش هیچ تغییری نمی‌شود و پس حداقل انرژی جهت تولید زوج ضروری است این برابر مجموع جرم سکون که در مقابل تبدیل باید شدن ذره تا یک زوج الکترون - پوزیترون ایجاد خواهد شد انرژی آستانه لازم برای این واکنش برابر می‌باشد با

$$0/511\ Mev + 0/511\ Mev = 1/022\ Mev$$

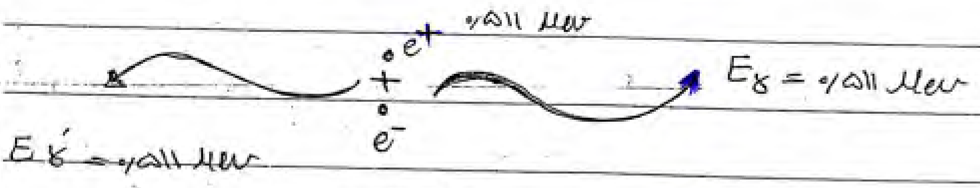



$$(T_{e^-}) + T_{e^+} = E_\gamma - \underbrace{(m_0c^2)_{e^-}}_{0.5} - \underbrace{(m_0c^2)_{e^+}}_{0.5} = E_\gamma - 1.022\ MeV$$

$$\boxed{T_{e^-} = T_{e^+} = \tfrac{1}{2}(E_\gamma - 1.022)}$$

تولید زوج: فوتون انرژی را صرف می‌کند اما وقتی پوزیترون نابود می‌گردد مجدداً یک فوتون آفریده خواهد شد. اصول کار به این ترتیب است که اگر پوزیترون در یک محیط حرکت کند پوزیترون در اثر برخورد با الکترون‌های اتمی به‌تدریج انرژی‌اش را از دست خواهد داد و در نهایت این پوزیترون نزدیک به پایان مسیرش با یک الکترون اتمی ترکیب شده و هر دو نابود می‌شوند و دو فوتون جانشین با انرژی کل $2m_0c^2$ آفریده می‌شوند. برای برقراری اصل پایستگی انرژی و اندازه حرکت لازم است حداقل دو فوتون گسیل شود.

$$2m_0c^2 = 1.022\ MeV$$




$0.511\ MeV$

$\downarrow$

نابودی کامل زوج الکترون – پوزیترون

نکته: احتمال رخداد یا سطح مقطع تولید زوج متناسب است با: $\sigma_{pp} \propto Z^2$

مثال: یک باریکه پرتوی گاما ۴ MeV را به یک ورقه طلا برخورد می‌دهیم و الکترون‌هایی با انرژی جنبشی ۱٫۷۸۸ MeV خارج می‌شود. با فرض اینکه الکترون‌ها دوباره برانگیخته نشوند و به‌وسیله برخورد چند برابری هیچ انرژی‌ای از دست ندهند آیا نوع واکنش از جهت فوتوالکتریک یا کامپتون یا تولید زوج قابل تشخیص است؟ آیا این الکترون‌ها با چه زاویه‌ای نسبت

iman

... گاما ... که منتشر می شود

حل

$E_\gamma = 1.6\ MeV$ — $T_e = 0.7\ MeV$

۱) با توجه به اینکه انرژی الکترون تولید شده $1.6 > E'_\gamma$ نمی باشد این پدیده نمی تواند اثر کامپتون باشد

۲) این پدیده فوتوالکتریک نیز می تواند باشد $T_e = E_\gamma - E_\beta$

۳) تولید زوج نیز می تواند باشد زیرا انرژی اشعه گامای اولیه از ۱٫۰۲۲ بیشتر است.

$E_\gamma > 1.022\ MeV$

(حین تولید زوج) $E_\gamma - \underbrace{T_e}_{\text{مجموع انرژی الکترون - پوزیترون ها}} = 2m_0c^2$

$1.6 - T_e = 1.02 \longrightarrow T_e \cong 0.58\ (MeV)$

چون انرژی الکترون ۰٫۵۸ و < ۰٫۷ پس حین تولید زوج اشتباه است.

(حین فوتوالکتریک) $T_e = E_\gamma - E_\beta - \underbrace{T_a}_{\text{پس زنی هسته}} \Longrightarrow 0.7 = 1.6 - 0 - T_a$

$T_a \cong 0.9\ MeV$ این مقدار انرژی سبب سرعت بسیار زیاد هسته خواهد شد و عمل نمی کند X

$E_\beta = 13.6(Z-1)^2 eV \cong 0$ بسیار کوچک

? پس سوم ؟

حین کامپتون:

$\Delta\lambda = \frac{h}{m_0c}(1-\cos\theta)$

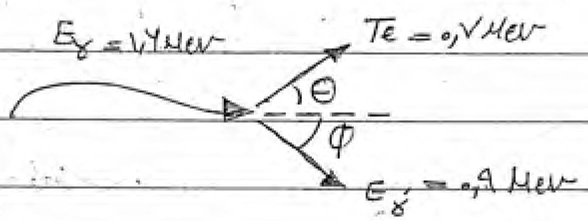
iman

۸۵ λ

$$\boxed{\frac{hc}{E_\gamma'} - \frac{hc}{E_\gamma} = \frac{h}{m_0 c}(1-\cos\theta)}$$

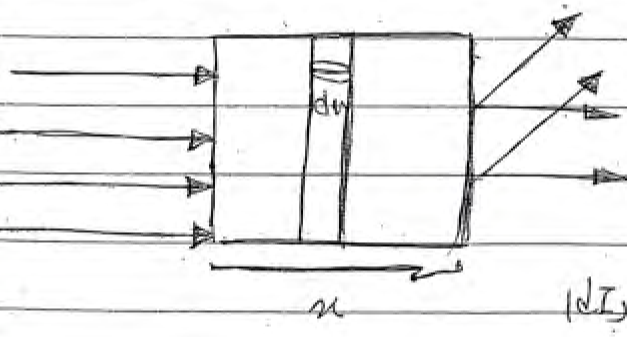
$$T_e = E_\gamma - E_\gamma' \longrightarrow E_\gamma' = 1.6 - 0.7 = 0.9\ \text{MeV}$$

$$E_\gamma' = \frac{E_\gamma}{1+\frac{(1-\cos\theta)E_\gamma}{m_0c^2}} \longrightarrow 0.9 = \frac{1.6}{1+\frac{(1-\cos\theta)\times 1.6}{0.511}} \rightsquigarrow \theta \cong 61.27^\circ$$




## تضعیف پرتوهای گاما

تضعیف یک باریکه از پرتوهای گاما در عبور از یک جاذب اساساً با جذب یک باریکه از ذرات باردار شکل متفاوت است زیرا ذرات باردار شتاب‌دار در هنگام عبور دستخوش برهمکنش زیاد که خیلی می‌شوند که به تدریج در یک حجم از ماده تاثیر می‌گذارند. اگر پرتوهای گاما از ماده عبور کنند در حالت اتفاق وقوع دارند. با این پرتوها آن نرم گسترش با ادامه انجام برخی رویداد پایه آسانی از سمت دیگر حفاظ عبور می‌کنند یا فقط جذب و یا پراکندگی کامپتون، فوتوالکتریک، p.p سبب تضعیف نمایی شدت خواهد شد.



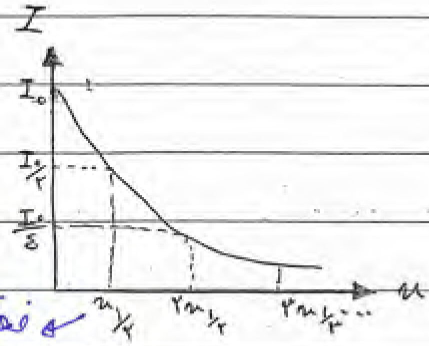

$$I < I_0$$

کسری از پرتوهای گاما که از باریکه جدا شده است $(dI)$ متناسب با $dx$ می‌باشد.

$$dI \propto dx \cdot I \longrightarrow \boxed{dI = -\mu\, dx\, I} \longrightarrow \frac{dI}{I} = -\mu\, dx \longrightarrow$$

$$\boxed{I = I_0 e^{-\mu x}}$$

$\mu (cm^{-1})$ : ضریب تضعیف خطی ماده
(وابسته به جنس حفاظ)




ضخامت نیم لایه ←

نکته: چون تضعیف توسط سه فرآیند مستقل کامپتون، فوتوالکتریک و تولید زوج صورت می‌پذیرد می‌توان فرض کرد که هر تضعیف جزئی متناسب با احتمال آن فرآیند خاص است.

$$\underbrace{\mu_t}_{\text{ضریب تضعیف کل}} = \underbrace{\mu_c}_{\text{کامپتون}} + \underbrace{\mu_{pe}}_{\text{فوتوالکتریک}} + \underbrace{\mu_{p.p}}_{\text{تولید زوج}}$$

$$\boxed{\underset{(cm^{-1})}{\mu_t} = N\sigma_t = \Sigma_t \ (cm^{-1})}$$

$\sigma_t$ ← سطح مقطع کل

ضخامت نیم لایه: ضخامتی است که شدت پرتوهای فرودی را به نصف مقدار اولیه کاهش می‌دهد. (دلیل آن که شدت را به صفر نمی‌رسانیم از لحاظ ریاضی ضخامت بی‌نهایت لازم است ولی از لحاظ فیزیکی معمولاً ۵ نیم ضخامت کفایت می‌کند.

$$I = I_0 e^{-\mu x}$$

$$I = \frac{I_0}{2} \longrightarrow \frac{I_0}{2} = I_0 e^{-\mu x} \longrightarrow \boxed{x_{1/2} = \frac{\ln 2}{\mu}}$$

مثلاً $E_\gamma = 3\ MeV \xrightarrow[\text{سرب}]{\text{جاذب}} x_{1/2} = 0.5\ inch$

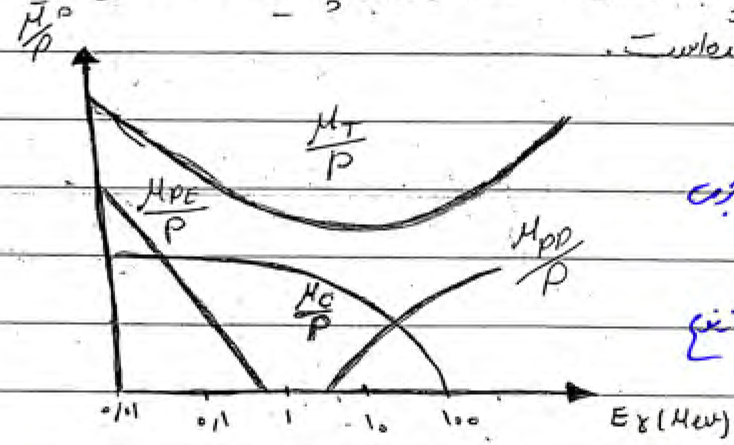
نکته: هر ضریب تضعیف جزئی ($\mu_c$ یا $\mu_{pE}$ یا $\mu_{pp}$) متناسب با تعداد اتم‌ها در واحد حجم ماده جاذب است. از این رو جهت مستقل شدن از ماده به جای استفاده از ضریب خطی تضعیف $\mu$ از ضریب جرمی تضعیف $\frac{\mu}{\rho}$ استفاده کرده که واحد آن $(\frac{cm^2}{g})$ می‌باشد. لازم به ذکر است که ضریب تضعیف جرمی ماده خود تابعی است که بر حسب انرژی گامای ورودی و ماده است.

$$I = I_0 e^{(-\mu/\rho)(\rho x)}$$

ضریب تضعیف جرمی

$$\frac{\mu}{\rho}\left(\frac{cm^2}{g}\right)$$

* نمودار ضریب تضعیف جرمی به ازای انرژی گاماهای ورودی برای پدیده‌های مختلف و همچنین مقدار کل آن در $\mu/\rho$ عدد اتمی متوسط در شکل زیر رسم شده است.

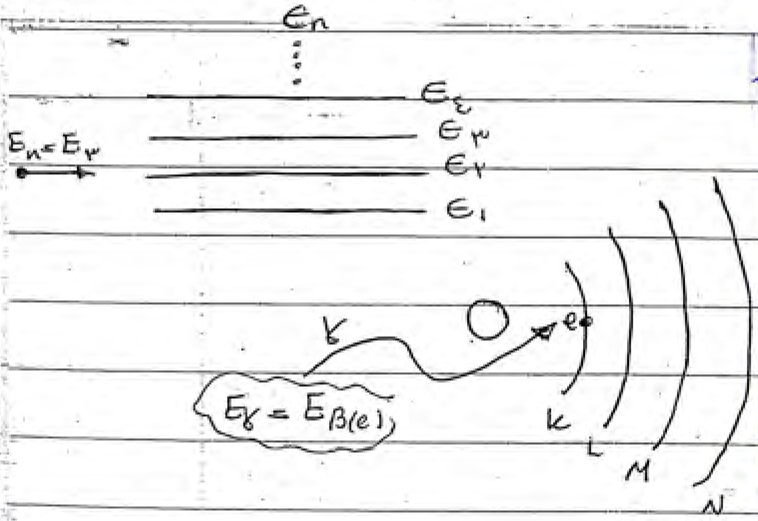



این نمودار ضریب تضعیف جرمی را بر حسب $E_\gamma$ (MeV) مستقل از نوع ماده بدست می‌دهد.

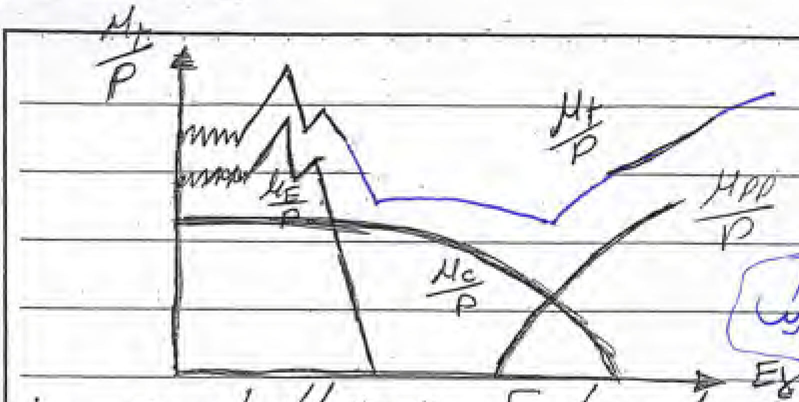
$$\boxed{\frac{\mu_T}{\rho} = \frac{\mu_{PE}}{\rho} + \frac{\mu_{PP}}{\rho} + \frac{\mu_C}{\rho}}$$

پدیده فوتوالکتریک

نکته: اگر انرژی گامای ورودی دقیقاً با الکترون مداری یکی باشد احتمال کنده شدن آن الکترون بیشتر خواهد شد یک تشدید یا رزونانس میان پرتو گاما و انرژی الکترون مداری رخ خواهد داد معمولاً این تشدید مربوط به مدار K الکترون خواهد شد.




* برای بدست آوردن ضریب تضعیف خطی کافیست عدد خوانده شده از نمودار را در چگالی عنصر مورد نظر ضرب نماییم.




این پدیده در مورد سرب (Pb)

بیشتر مورد توجه است.

$\tau \propto Z^5$ فوتوالکتریک

Z های بالا

شدت نسبی پرتوهای گامای جذب شده از باریکه توسط یک فرآیند خاص مثلاً پراکندگی کامپتون توسط رابطه زیر بدست می‌آید

$$\frac{\Delta I}{I_0} = \frac{\mu_c}{\mu_t}$$ یعنی نسبی شدت پرتو جذب شده در اثر پدیده کامپتون

$$= \frac{\mu_c}{\mu_t}\,\frac{I_0 - I}{I_0} = \frac{\mu_c}{\mu_t}\,\frac{I_0 - I_0 e^{-\mu x}}{I_0} = \frac{\mu_c}{\mu_t}\left(1 - e^{-\mu x}\right)$$ افت نسبی شدت در اثر پدیده کامپتون

$I_0 - I$ = افت پرتوها در داخل ماده

$\frac{I_0 - I}{I_0}$ = افت نسبی پرتو در ماده

3-17

مثال: یک باریکه از پرتوهای گاما از ضخامت 2 cm سرب عبور می‌کند. باریکه شامل ۳۰٪ فوتون ۰٫۴ MeV و ۷۰٪ فوتون ۱٫۵ MeV است. شدت نسبی باریکه عبور کرده چقدر است؟

حل:

$\frac{I}{I_0} = ?$ شدت نسبی عبوری

حفاظ pb
$$\begin{cases} x = 2\,cm \\ E_{\gamma_1} = 0.4\,MeV \quad 30\%\ (I_{01}) \\ E_{\gamma_2} = 1.5\,MeV \quad 70\%\ (I_{02}) \end{cases}$$

با استفاده از شکل ۳-۲۶ می‌توان ضریب تضعیف جرمی و سپس ضریب تضعیف خطی را بدست آورد.

دیده می‌شود که هرچه انرژی پرتوها بیشتر باشد سطح مقطع کمتر و احتمال عبور بیشتر است.

$I_0 \rightarrow$ Pb $\rightarrow I_1$, $I_2$

$$\begin{cases} I_{01} = 30\%\, I_0 \\ I_{02} = 70\%\, I_0 \end{cases}$$

$E_\gamma = 0.4\,(MeV) \xrightarrow{\text{شکل } 3-26} \frac{\mu}{\rho}\left(\frac{cm^2}{g}\right) = 0.18$

$\rho_{Pb} = 11.35\,(g/cm^3) \rightarrow \mu_{t_1} = 0.18 \times 11.35\ cm^{-1}$

$E_\gamma = 1.5\,(MeV) \xrightarrow{\text{شکل } 3-26} \frac{\mu}{\rho}\left(\frac{cm^2}{g}\right) = 0.05$

$\rho_{Pb} = 11.35 \longrightarrow \mu_{t_2} = 0.05 \times 11.35\ cm^{-1}$

$$\frac{I}{I_0} = \frac{I_1 + I_2}{I_0} = \frac{I_{01} e^{-\mu_{t_1} x} + I_{02} e^{-\mu_{t_2} x}}{I_0} =$$

$$\frac{0.3 I_0 e^{-0.18 \times 11.35 \times 2cm} + 0.7 I_0 e^{-0.05 \times 11.35 \times 2cm}}{I_0} = 0.23$$

$$\frac{I_0 - I}{I_0} = \frac{I_0 - I_0 e^{-\mu x}}{I_0} = 1 - e^{-\mu x}$$ (قبل از تست‌ها) *

نکته: ضریب تضعیف جرمی یک ترکیب یا مخلوط از رابطه زیر قابل محاسبه است:

وزن نسبی عنصر i ام ترکیب

$$\left(\frac{\mu}{\rho}\right)_{مخلوط}\left(\frac{m^2}{kg}\right) = \sum w_i \left(\frac{\mu}{\rho}\right)_i \left(\frac{m^2}{kg}\right)$$

ضریب تضعیف جرمی کل مخلوط — ضریب تضعیف جرمی عنصر i ام

مثال ۶: ضریب تضعیف جرمی را با محاسبه NaI در حالت انرژی گاماهای ورودی که برابر ۱,۲۵ MeV است را محاسبه کنید؟

$E_\gamma = 1/25\,(MeV)$ $\quad$ $Na: \left(\frac{\mu}{\rho}\right)_{Na} = 0/00544\left(\frac{m^2}{kg}\right)$ $\quad$ $^{23}Na\,^{127}I$

$W_{Na} = \frac{23}{150} = 0/153$

$I: \left(\frac{\mu}{\rho}\right)_I = 0/00502\left(\frac{m^2}{kg}\right) \longrightarrow w_I = \frac{127}{150} = 0/847$ $\quad$ $\mu = \frac{\mu}{\rho}\times\rho$

$$\Rightarrow \left(\frac{\mu}{\rho}\right)_{NaI} = 0/00544(0/153) + (0/00502)(0/847) = 0/00509\ \frac{m^2}{kg}$$

$\rho_{NaI} = 3/67\times10^3\ \frac{kg}{m^3}$ $\quad$ $\mu(m^{-1}) = 0/00509\left(\frac{m^2}{kg}\right)\left(3/67\times10^3\ \frac{kg}{m^3}\right) = 0/187\,(m^{-1})$

## واپاشی رادیواکتیو (decay)

تغییر خود به خود یک هسته را واپاشی رادیواکتیو یا واپاشی پرتوزا می‌نامند. این تغییر ممکن است منجر به تولید یک هسته جدید شده یا صرفاً انرژی هسته را تغییر دهد. دلیل اصلی واپاشی آن است که هسته‌های ناپایدار برای رسیدن به پایداری این عمل را با تابش یک ذره α و β و γ انجام می‌دهند که سبب کاهش جرم و افزایش انرژی بستگی هسته و در نهایت افزایش پایداری می‌شود.

$^A_ZX \longrightarrow {}^4_2\alpha + {}^{A-4}_{Z-2}Y$ $\quad$ واپاشی α

$^A_ZX \longrightarrow {}^A_{Z+1}Y + {}^0_{-1}\beta$

$^A_ZX^* \longrightarrow \gamma + {}^A_ZX$

$(M_0c^2)^*$

$\rightsquigarrow E_{\gamma_1}$

$\rightsquigarrow E_{\gamma_0}$

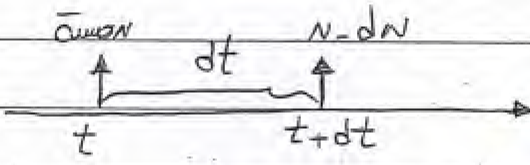
$M_0c^2$

تمرین: فصل ۳، سوال ۱۵

سوال ۲۵ فقط قسمت الف و ب

## قوانین واپاشی رادیواکتیو

فرض کنید در زمان $t$ به تعداد $N$ هسته از هسته‌های پرتوزا وجود داشته باشد. این هسته‌ها در اثر واپاشی به هسته‌های دیگر تبدیل می‌شوند. فرض کنید $dN$ هسته در فاصله زمانی $dt$ کوچک واپاشی می‌کنند.




$dN$: تعداد هسته‌هایی است که واپاشی حاصل کرده‌اند

$\lambda$: ثابت واپاشی، احتمال واپاشی یک هسته در واحد زمان $\left(\frac{1}{s}\right)$

معکوس بعد زمان

* از جنس احتمال است

* برای هر هسته این مقدار معین است و به فشار و دما و ... وابسته نمی‌باشد

* بر واحد زمان است

$\lambda dt$: احتمال واپاشی یک هسته در زمان $dt$

$N$: تعداد هسته در زمان $t$

$|dN| = N\lambda dt$: تعداد هسته‌هایی که در زمان $dt$ واپاشی می‌کنند

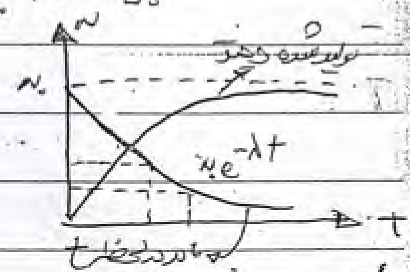
$$dN = -N\lambda dt \Rightarrow \frac{dN}{N} = -\lambda dt \longrightarrow \int_{N_0}^{N}\frac{dN}{N} = \int_0^t -\lambda dt$$

ثابت واپاشی

$$\boxed{N(t) = N_0 e^{-\lambda t}}$$

$t=0$ تعداد هسته‌ها در لحظه

(تعداد هسته‌ها در زمان $t$ (مادر




اگر هسته‌های نوع دوم (دختر) پایدار باشند آنگاه تعداد هسته‌های دختر تولید شده تا زمان $t$ از رابطه زیر بدست می‌آید

(هسته مادر) $N_1 \longrightarrow N_2$ (هسته دختر)

$$N(t)_{\text{دختر}} = N_0 - N(t)_{\text{مادر}} = N_0 - N_0 e^{-\lambda t} = N_0(1-e^{-\lambda t})$$

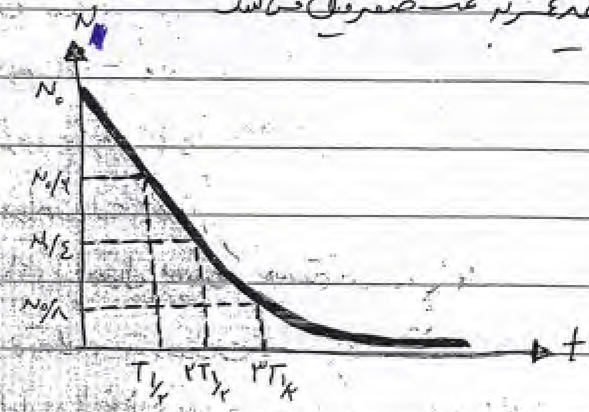
## نیمه عمر

مدت زمانی است که تعداد هسته‌ها به نصف کاهش می‌یابد

$$N(t) = N_0 e^{-\lambda t} \qquad \frac{N_0}{2} = N_0 e^{-\lambda t} \longrightarrow \ln 2 = \lambda T_{1/2}$$

$$\boxed{T_{1/2} = \frac{\ln 2}{\lambda} = \frac{0{,}693}{\lambda}} \qquad \boxed{\lambda = \frac{0{,}693}{T_{1/2}}}$$

* دیده می‌شود که تعداد هسته‌های مادر پس از ۴ تا ۵ نیمه عمر به سمت صفر میل می‌کند




## $\tau$ (عمر متوسط هسته‌ها)

مدت زمانی است که هسته‌ها به طور متوسط عمر می‌کنند به عبارت دیگر $\tau$ میانگین مدت زمانی است که هسته قبل از واپاشی باقی می‌مانند.

$$\tau = \frac{dN_1 t_1 + dN_2 t_2 + \dots dN_n t_n}{dN_1 + dN_2 + \dots + dN_n}$$

$$\tau = \frac{\int_0^{N_0} t\, dN}{\int_0^{N_0} dN} = \frac{\int_0^{\infty} N \lambda t\, dt}{N_0} = \frac{\int_0^{\infty} (\cancel{N_0} e^{-\lambda t}) \lambda t\, dt}{\cancel{N_0}}$$

$$= \underbrace{\int_0^{\infty} \lambda e^{-\lambda t} t\, dt}_{\text{به صورت جزء به جزء}} = \frac{1}{\lambda} \qquad \tau = \frac{1}{\lambda} = \frac{\frac{1}{\ln 2}}{T_{1/2}} = \frac{T_{1/2}}{\ln 2} = 1{,}44\, T_{1/2}$$

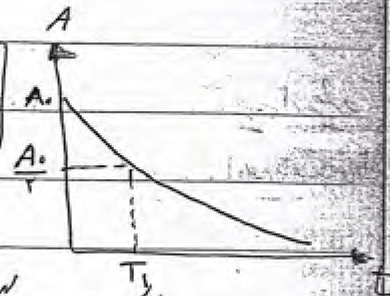
## فعالیت (اکتیویته) A

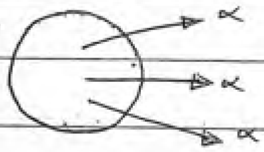
عبارت است از تعداد ذرات واپاشی شده در واحد زمان

$dN = N\lambda dt$ $\quad \boxed{A = \frac{dN}{dt} = \lambda N}$ ۱

$A(t) = \lambda N(t) = \lambda(N_0 e^{-\lambda t}) = (\lambda N_0) e^{-\lambda t} = \boxed{A_0 e^{-\lambda t}}$

که $A_0$ اکتیویته نمونه در لحظه $t=0$)




اگر در مدت 1s، ۳ عدد واپاشی داشتیم

۲) $\boxed{A = ۳\left(\frac{\#}{s}\right) = ۳\ \frac{dis}{s}}$

واحدهای اکتیویته:

الف) بکرل (Bq) مقدار واپاشی‌ها در ثانیه

$1Bq = 1\ \frac{dis}{s} = 1\ \frac{\#}{s}$

ب) کوری (Ci) = اکتیویته یک گرم رادیوم ۲۲۶

$1Ci = ۳,۷ \times ۱۰^{۱۰}\ (Bq)$

$A = \lambda N$ $\quad T_{1/2}(^{۲۲۶}Ra) = ۱۶۰۲$ سال $\longrightarrow \lambda = \frac{\ln ۲}{T_{1/2}}$

$\frac{۰,۶۹۳}{۱۶۰۲ \times ۳۶۵ \times ۸۶۴۰۰} \longrightarrow N = \frac{mA}{M}$

جرم نمونه — عدد آووگادرو — جرم مولکولی

$A = \lambda N = ۳,۷ \times ۱۰^{-۱۳} \times ۱۰^{۲۳} = ۳,۷ \times ۱۰^{۱۰}\ (Bq)$

نکته: اگر یک عنصر دارای ۲ مد واپاشی باشد یعنی به طور مثال هم α و هم β واپاشی نماید خواهیم داشت:

$-dN = dN_\alpha + dN_\beta$

$-dN = N\lambda_\alpha dt + N\lambda_\beta dt$

$-dN = N(\lambda_\alpha + \lambda_\beta)dt \longrightarrow \begin{cases} N = N_0 e^{-(\lambda_\alpha+\lambda_\beta)t} = N_0 e^{-\lambda_t t} \\ \lambda_\alpha + \lambda_\beta = \lambda_t \end{cases}$

$A_\alpha = \frac{dN_\alpha}{dt} = \lambda_\alpha N = \lambda_\alpha N_0 e^{-(\lambda_\alpha + \lambda_\beta)t}$

$$A_B = \frac{dN_B}{dt} = \lambda_B N = \lambda_B N_0 e^{-(\lambda_a+\lambda_B)t}$$

یک منبع پرتوزا شامل مخلوطی از دو هسته پرتوزا است. که فعالیت اولیه آنها مساوی است. یکی از دو هسته دارای نیمه عمر ۱/۲ سال و دیگری ۱/۳ سال می باشد بعد از یک سال چه کسری از فعالیت اولیه باقی می ماند؟

فعالیت اولیه کل

$(T_{1/2})_1 = \frac{1}{2}(y)$ $\quad A_{01} = A_{02}$ $\quad \boxed{1 \mid 2}$ $\quad \boxed{A_{0\,کل} = 2A_{01}}$

$(T_{1/2})_2 = \frac{1}{3}(y)$

$$A = A_0 e^{-\lambda t} \qquad A_{کل} = A_1 + A_2 = A_{01}e^{-\lambda_1 t} + A_{02}e^{-\lambda_2 t}$$

$$= A_{01} e^{-\frac{\ln 2}{\frac{1}{2}سال}\times 1} + A_{02} e^{-\frac{\ln 2}{\frac{1}{3}سال}\times 1}$$

$$= A_{01} e^{-2\ln 2} + A_{02} e^{-3\ln 2} = A_{01}\left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3}\right)$$

$A_{ثانویه} = A_{01}\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{8}\right) = \boxed{\frac{3}{8} A_{01}}$ فعالیت ثانویه کل

$$\frac{A_{ثانویه}}{A_{اولیه}} = \frac{\frac{3}{8}A_{01}}{2A_{01}} = \frac{3}{16}$$

مثال ۵: فراوانی طبیعی اورانیوم ۲۳۵ برابر ۰٫۷۲٪ و فراوانی طبیعی اورانیوم ۲۳۸ ، ۹۹٫۳ درصد می باشد. با فرض آنکه در هنگام تشکیل ماده فراوانی هر دو ایزوتوپ یکسان بوده باشد زمان پیدایش عناصر را حدس بزنید.

حل: $(N_0)_{235} = (N_0)_{238}$

$(T_{1/2})_{235U} = 6.8\times 10^{8}(y)$ $\qquad (T_{1/2})_{U^{238}} = 4.9\times 10^{9}(y)$

$$\lambda_{U^{235}} = 0.15\times 10^{-9}(y)^{-1}$$

$$\lambda_{U^{238}} = 1.02\times 10^{-9}(y)^{-1}$$

(1) $N_{235} = (N_0)_{235}\, e^{-\lambda_{235} t}$

(2) $N_{238} = (N_0)_{238}\, e^{-\lambda_{238} t}$

Iman

$$\frac{②}{①} = \frac{9930}{72} = e^{(\lambda_{238} - \lambda_{235})t}$$

$$137/91 = e^{(1{,}02\times 10^{-9} - 0{,}15\times 10^{-9})t}$$

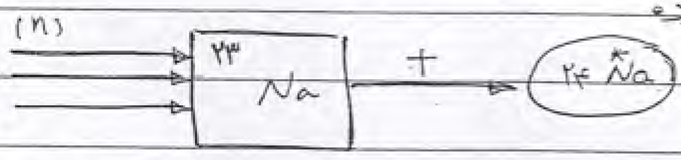
$$t = 5{,}47\times 10^{9}\,(y)$$

از زمان پیدایش اورانیم روی زمین ۵٫۵ میلیارد سال گذشته است

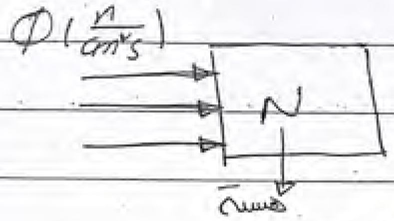
(پایان سیستم) * /

تولید چشمه رادیواکتیو

یک ماده هدف را که شامل هسته های پایدار است در یک راکتور با یک شار معین قرار می دهیم و آن را با نوترون ها در زمان مشخص بمباران می کنیم ماده هدف با جذب نوترون تبدیل به یک هسته رادیواکتیو می شود و با ثابت واپاشی $\lambda$ شروع به واپاشی می کند فرض کنید رادیوایزوتوپ با آهنگ ثابت $Q\ (\frac{\#}{s})$ تولید شود




$Q\times t$ = تعداد تولیدی عنصر رادیوایزوتوپ




شار نوترونی

$$\boxed{Q = N\cdot\sigma_0\cdot\phi = \Sigma\phi}$$

هسته ماده هدف

سطح مقطع نوترونی

$$\text{(در رادیوایزوتوپ)}\quad \int_0^N \frac{dN}{dt} = \int_0^t (Q - \lambda N)$$

$$-\lambda\int_0^N \frac{dN}{dt} = -\lambda\int_0^t (Q - \lambda N)$$

$$\frac{-\lambda dN}{Q-\lambda N} = \int_0^t -\lambda dt \rightarrow \boxed{\int_0^N \frac{d(Q-\lambda N)}{Q} = -\lambda t}$$

$$\longrightarrow \ln(Q-\lambda N)\Big|_0^N = -\lambda t$$

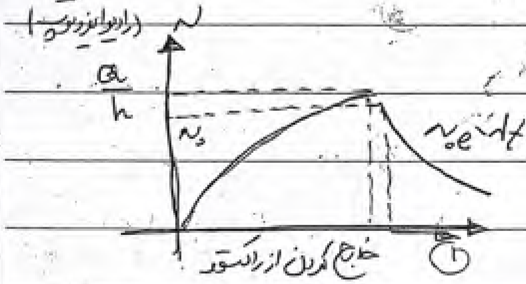
$$\longrightarrow Q - \lambda N = Qe^{-\lambda t}$$

$$\lambda N = Q(1-e^{-\lambda t})$$

تعداد هسته‌های رادیوایزوتوپ پس از زمان $t$

$$N(t) = \frac{Q}{\lambda}(1-e^{(-\lambda t)}) \quad *$$

$$\begin{cases} N(t) = \frac{Q}{\lambda}(1-e^{-\lambda t}) \\ t \to \infty \longrightarrow N = \frac{Q}{\lambda} \end{cases}$$




قرار دادن مدت زمان زیاد در راکتور برای افزایش اکتیویته بی‌فایده است. (اشباع)

① $\longrightarrow$ لحظه‌ی سرد شدن

در این لحظات دیگر ایزوتوپ تولید نمی‌شود ($\cancel{Q}$) و فقط واپاشی با ثابت واپاشی $\lambda$ وجود خواهد داشت

$$* \longrightarrow \lambda N = Q(1-e^{-\lambda t})$$

$$A = Q(1-e^{-\lambda t}) \longrightarrow$$ اکتیویته یا فعالیت رادیوایزوتوپ

مثال ۵: ویژه هسته‌ی رادیوتوپ $Na^{24}$ با نیمه عمر $14.8\,(h)$ از عبارات $Na^{23}$ و فقط نوترون بدست می‌آید اگر $Na$ آهنگ تولید $Na^{24}$ برابر $10^{8}/(s)$ بوده و عبارات با نوترون تازه $Na^{23}$ انجام شود مطلوب است
الف) Max فعالیت $Na^{24}$ (بر حسب کوری) ب) زمان عبارات لازم جهت ایجاد ۹۰ درصد فعالیت Max
ج) تعداد اتم‌های رادیوتوپ $Na^{24}$ سه ساعت پس از توقف عبارات (ب).

iman

$^{۲۳}Na + {}^{۱}_{۰}n \longrightarrow {}^{۲٤}Na \; (T_{۱/۲} = ۱۴٫۸h)$

$Q = ۱۰^{۸} (\#/s)$

$A = \lambda N = Q(1 - e^{-\lambda t}) \xrightarrow{t \to \infty} A_{max} = Q = ۱۰^{۸} (Bq)$

$A(Ci) = \dfrac{۱۰^{۸}}{۳٫۷ \times ۱۰^{۱۰}} = ۲٫۷ \times ۱۰^{-۳} Ci$

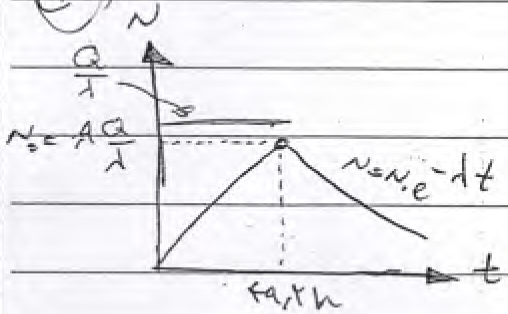
ب) $t = ? \longrightarrow A = ۹۰\% \; A_{max} = ۰٫۹Q$

$A = Q(1 - e^{-\lambda t}) = ۰٫۹ Q$

$e^{-\lambda t} = ۰٫۱ \longrightarrow -\lambda t = \ln(۰٫۱) \longrightarrow t = -\dfrac{\ln(۰٫۱)}{\lambda} = ۴۹٫۲h$

$\lambda = \dfrac{۰٫۶۹۳}{T_{۱/۲}} = \dfrac{۰٫۶۹۳}{۱۴٫۸(h)} = ۰٫۰۴۶$

ج)




$N(t) = N_0 e^{-\lambda t} \longrightarrow N(۳h) =$

$= \dfrac{۰٫۹ \times ۱۰^{۸}}{\dfrac{\ln ۲}{۱۴٫۸ \times ۳۶۰۰}} e^{-\frac{۰٫۶۹۳}{۱۴٫۸}}$

$N_0 = ۰٫۹ \dfrac{Q}{\lambda} = \dfrac{۰٫۹ \times ۱۰^{۸}}{\dfrac{\ln ۲}{۱۴٫۸ \times ۳۶۰۰}}$

$\boxed{\times ۳} = ۶ \times ۱۰^{۱۲}$ اتم

فیزیک هسته‌ای (هسته ۲، ...)

Subject: Data:

واپاشی‌های زنجیره‌ای:

تصور کنید عنصر ۱ با ضریب واپاشی $\lambda_1$ شروع به واپاشی کرده و عنصر دختر ۲ را تولید کند عنصر ۲ به نوبه خود واپاشی نموده و عنصر ۳ را تولید کند اگر فرض کنیم هسته دختر ۳ پایدار باشد یا ناپایدار است

$$(1) \xrightarrow{\lambda_1} (2) \xrightarrow{\lambda_2} (3)$$ (پایدار)

$$\begin{cases} (1)\quad \dfrac{dN_1(t)}{dt} = -N_1\lambda_1 \\ (2)\quad \dfrac{dN_2(t)}{dt} = N_1\lambda_1 - N_2\lambda_2 \\ (3)\quad \dfrac{dN_3(t)}{dt} = N_2\lambda_2 \end{cases}$$

$N_1(t)$: تعداد هسته‌های در زمان $t$

$\boxed{\text{مجهول‌ها: } N_1(t)\text{، } N_2(t)\text{، } N_3(t)}$

$$(1) \Rightarrow \frac{dN_1(t)}{dt} = -N_1\lambda_1 \Rightarrow \boxed{N_1(t) = (N_1)_0\, e^{-\lambda_1 t}} \quad *$$

$(N_1)_0$: تعداد هسته‌های عنصر ۱ در لحظه $t=0$

$$(2)\quad \frac{dN_2(t)}{dt} = N_1\lambda_1 - N_2\lambda_2 \Rightarrow$$

*

$$\left[\frac{dN_2(t)}{dt} + \lambda_2 N_2 = \lambda_1 (N_1)_0 \, e^{-\lambda_1 t}\right] \times e^{\lambda_2 t}$$

$$e^{\lambda_2 t}\frac{dN_2(t)}{dt} + e^{\lambda_2 t}\lambda_2 N_2 = \lambda_1 (N_1)_0 \, e^{(\lambda_2-\lambda_1)t}$$

$$\int \frac{d}{dt}\left[N_2 e^{\lambda_2 t}\right] = \int \lambda_1 (N_1)_0 \, e^{(\lambda_2-\lambda_1)t}$$

$$N_2 e^{\lambda_2 t} = \lambda_1 (N_1)_0 \times \frac{1}{\lambda_2-\lambda_1} e^{(\lambda_2-\lambda_1)t} + C$$

$$t=0 \longrightarrow N_2(0)=0 \qquad C = \frac{-\lambda_2 (N_1)_0}{\lambda_2-\lambda_1}$$

$$\boxed{N_2(t) = \frac{\lambda_1 (N_1)_0}{\lambda_2-\lambda_1}\left(e^{-\lambda_1 t} - e^{-\lambda_2 t}\right)}$$

$$\frac{dN_c(t)}{dt} = \frac{\lambda_1\lambda_2 (N_1)_0}{\lambda_2-\lambda_1}\left[e^{-\lambda_1 t} - e^{-\lambda_2 t}\right]$$

$$N_c(t) = \frac{\lambda_1\lambda_2 (N_1)_0}{\lambda_2-\lambda_1}\left[\frac{e^{-\lambda_1 t}}{-\lambda_1} - \frac{e^{-\lambda_2 t}}{-\lambda_2}\right] + C'$$

$$t=0 \longrightarrow N_c(0)=0 \longrightarrow \boxed{C' = \frac{\lambda_1\lambda_2 (N_1)_0}{\lambda_2-\lambda_1}\left(\frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_2}\right)}$$

۳۷

Subject: Data:

$$\boxed{N_2(t) = \frac{\lambda_1 \lambda_2 (N_1)_0}{\lambda_2-\lambda_1}\left[\frac{1-e^{-\lambda_1 t}}{\lambda_1} - \frac{1-e^{-\lambda_2 t}}{\lambda_2}\right]}$$

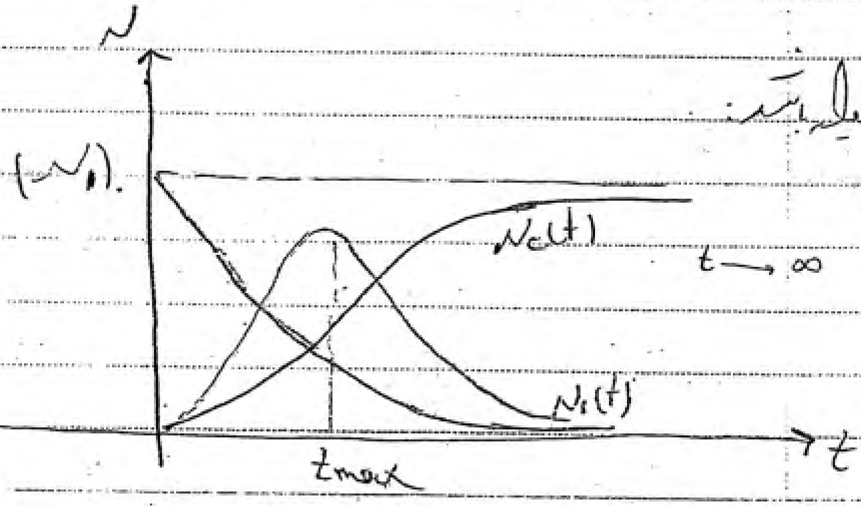
$$1 \xrightarrow{\lambda_1} 2 \xrightarrow{\lambda_2} 3 \xrightarrow{\lambda_3} 4 \quad \cdots \quad n-1 \xrightarrow{\lambda_{n-1}} n \xrightarrow{\lambda_n}$$

حالتی مناسب صفر

$$\boxed{\frac{dN_n}{dt} = \lambda_{n-1} N_{n-1} - \lambda_n N_n}$$

$$N_n(t) = \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_{n-1} (N_1)_0 \left[\frac{e^{-\lambda_1 t}}{(\lambda_2-\lambda_1)(\lambda_3-\lambda_1)\cdots(\lambda_n-\lambda_1)} + \cdots + \frac{e^{-\lambda_n t}}{(\lambda_1-\lambda_n)(\lambda_2-\lambda_n)\cdots(\lambda_{n-1}-\lambda_n)}\right]$$

اگر $N_4$ پایدار باشد:



Subject:

زمان max شدن $N_2(t)$:

$$\left.\frac{dN_2(t)}{dt}\right|_{t=t_{max}} = 0$$

$$\frac{\lambda_1 (N_1)_0}{\lambda_2 - \lambda_1}\left(-\lambda_1 e^{-\lambda_1 t} + \lambda_2 e^{-\lambda_2 t}\right) = 0$$

$$\lambda_1 e^{-\lambda_1 t} = \lambda_2 e^{-\lambda_2 t}$$

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = e^{(\lambda_1 - \lambda_2)t}$$

$$\ln \frac{\lambda_1}{\lambda_2} = (\lambda_1 - \lambda_2)t$$

$$t_{max} = \frac{\ln \lambda_1 - \ln \lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2}$$

یا:

$$\left.\frac{dN_2(t)}{dt} = \lambda_1 N_1 - \lambda_2 N_2\right|_{t=t_{max}} = 0$$

$$\lambda_1 N_1 = \lambda_2 N_2 \Rightarrow A_1 = A_2$$

در این لحظه اکتیویته مادر و دختر مساوی می‌شوند.

MUCHO

$0/256 = 0/56 \cdot 0/6428 \, , = \frac{0/594 - 0/028}{0/028} = 0/642$

حالات مختلف از نظر بزرگی نیمه عمر مادر و دختر

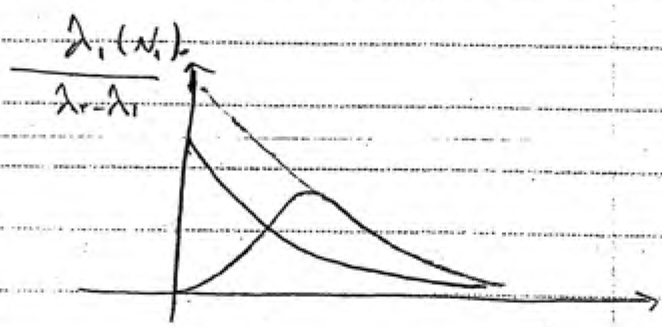
الف) نیمه عمر مادر کمتر از دختر باشد:

$T_1 < T_2 \longrightarrow \lambda_1 > \lambda_2$

پس از زمان طولانی

$$\boxed{\cancel{e^{-\lambda_1 t}} = e^{-\lambda_2 t}}$$

$$N_2(t) = \frac{\lambda_1 (N_1)_0}{\lambda_2 - \lambda_1}\left[-e^{-\lambda_2 t}\right]$$




اگر منحنی $N_2$ را رسم کنیم این تصور خواهد شد که از ابتدا فقط هسته های دختر وجود داشته اند و با ثابت واپاشی خودشان decay نموده اند

ب) تصور کنیم نیمه عمر دختر کمتر از مادر است

Subject: Data:

۶-۴) یک نوکلید مادری توریم داری

ب) یک نمونه خالص توریم ۲۲۷ به نیمه عمر ۱۰٫۲ روز با گسیل $\alpha$ به رادیوم ۲۲۳ با نیمه عمر ۱۱٫۷ روز تبدیل می شود. مقدار رادیوم ۲۲۳ خود گسیلنده $\alpha$ است. چه وقت مقدار آن بیشینه است؟ نسبت فعالیت توریم ۲۲۷ به رادیوم ۲۲۳ بعد از چنین مدتی چقدر است؟

ج) $t_{max} = \dfrac{\ln\lambda_1 - \ln\lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1}$

$$^{227}Th \longrightarrow \alpha + {}^{223}Ra$$

$$(T_{1/2})_{Th} = 10.2\,d \longrightarrow \lambda_1 = \frac{0.693}{10.2}$$

$$(T_{1/2})_{Ra} = 11.7\,d \longrightarrow \lambda_2 = \frac{0.693}{11.7}$$

$$t_{max} = \frac{\ln\frac{\lambda_2}{\lambda_1}}{\lambda_2 - \lambda_1} = \frac{\ln\frac{10.2}{11.7}}{\frac{0.693}{11.7} - \frac{0.693}{10.2}} = 2.95d$$

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{\lambda_1 N_1}{\lambda_2 N_2} = \frac{(11.7)}{10.2}\,\frac{(N_1)_0\,e^{-\lambda_1 (t)}}{\frac{(N_1)_0\lambda_1}{\lambda_2-\lambda_1}\left(e^{-\lambda_1 t} - e^{-\lambda_2 t}\right)}$$

به جای t مقدار ۲٫۹۵ [illegible]