فصل ۵
گروه‌های هموتوپی بالاتر

۵.۲ تعریف گروه‌های هموتوپی بالاتر

فرض کنیم I_n یک مکعب n بعدی در فضای اقلیدسی باشد که $\alpha: I_n \longrightarrow X$ یک نگاشت پیوسته باشد طوری که α روی ∂I_n از مکعب I_n را به یک نقطه $x_0 \in X$ می‌برد. آنگاه α یک n-لوپ در X به پایه $x_0 \in X$ نامیده می‌شود.

پس می‌توانیم نشان دهیم α را به صورت $\alpha(t_1, \dots, t_n)$ که $t_1, \dots, t_n$ مختصات یک نقطه از I_n است طوری که

$\alpha(t_1, \dots, t_n) = x_0$ اگر $t_i = 0$ یا $t_i = 1$ ، $0 < t_i < 1$

(چون $t_i = 0$ یا $t_i = 1$ نقاط روی ∂I_n را نشان می‌دهد.

محتوای هندسی تعریف $n = 2$ در شکل ۵.۱ نمایش داده شده است.

مربع مبدأ ۲-لوپ α را نمایش می‌دهد و دنباله تصویرهای بعدی شرح می‌دهند که چطور این مربع با نقاط روی مرزش یکی شده (همئومورفیک با S^2) لوپ ۲-بعدی است

تعریف

اگر α و β n-لوپ به پایه $x_0 \in X$ باشند آنگاه $\alpha \circ \beta = \gamma$ یک n-لوپ به پایه $x_0 \in X$ داده شده بدین صورت است

$$\gamma(t_1, \dots, t_n) = \alpha * \beta(t_1, \dots, t_n) = \begin{cases} \alpha(2t_1, t_2, \dots, t_n) & 0 \le t_1 \le \frac{1}{2} \\ \beta(2t_1 - 1, t_2, \dots, t_n) & \frac{1}{2} \le t_1 \le 1 \end{cases} \quad (۵.۱)$$

محتوای هندسی این تعریف برای $n = 2$ در شکل ۵.۲ نشان داده شده است

هدف در اینجا نیز مانند گروه‌های اساسی $\pi_1(X, x_0)$ است بین دو n-لوپ α و β هستند هموتوپ و می‌نویسیم $\alpha \simeq \beta$

تعریف

دو n-لوپ α و β به پایه x_0 نامیده می‌شوند هموتوپی اگر نگاشت پیوسته $H(s; t_1, \dots, t_n)$ ، $0 \le s \le 1$ وجود داشته باشد طوری که

$$H(0; t_1, \dots, t_n) = \alpha(t_1, \dots, t_n)$$
$$H(1; t_1, \dots, t_n) = \beta(t_1, \dots, t_n)$$
$$H(s; t_1, \dots, t_n) = x_0 \qquad \forall (t_1, \dots, t_n) \in \partial I_n \quad \forall s$$

صفحه ۲

بررسی اینکه هموتوپی یک رابطهٔ هم ارزی است سرراست است.

بنابراین فضای n-لوپ‌ها می‌توانند به کلاس‌های مجزا افراز شود اعضا در یک ردهٔ هموتوپی با یکدیگر هموتوپ هستند

رده‌های هم ارزی n-لوپ‌های هموتوپ با n-لوپ α را با $[\alpha]$ نشان می‌دهیم.

$$[\alpha] = \{\ \beta \text{ لوپ-}n \mid \alpha \simeq \beta\ \}$$

تعریف

n-لوپ که I_n را به x_0 می‌برد نگاشت ثابت نامیده می‌شود

$$e: I_n \longrightarrow x_0 \qquad (۵.۵)$$

تعریف

معکوس n-لوپ α به صورت α^{-1} نوشته می‌شود و به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\alpha^{-1}(t_1, t_2, \dots, t_n) = \alpha(1-t_1, t_2, \dots, t_n) \qquad (۵.۶)$$

لم (۵.۴) نشان می‌دهد که کلاس‌های هموتوپی n-لوپ‌ها با پایهٔ x_0، $[\alpha], [\beta], \dots$

یک گروه با عمل ضرب $[\alpha] \circ [\beta] = [\alpha * \beta]$ تشکیل می‌دهند.

این گروه گروه هموتوپی n-بعدی $\pi_n(X; x_0)$ از فضای توپولوژی X با پایهٔ x_0 نامیده می‌شود.

برخلاف گروه‌های هموتوپ، گروه‌های هموتوپی مرتبهٔ بالاتر آبلی می‌باشند.

۵.۴ خاصیت آبلی گروه‌های هموتوپی بالاتر

قضیه: گروه هموتوپی n-بعدی $\pi_n(X; x_0)$ برای $n > 1$ آبلی است. (۵.۷)

اثبات: هر n-لوپ α به پایهٔ x_0 هموتوپ با یک n-لوپ $\tilde{\alpha}$ که به وسیلهٔ گرفتن α و تغییر شکل پیوستهٔ آن

بدین روش:

به جای اینکه دقیقاً مرز I_n به x_0 با n-لوپ α نگاشته شود مرز را ضخیم می‌کنیم و فرض می‌کنیم کل ضخیم شده به x_0 نگاشته شود و این n-لوپ را با $\tilde{\alpha}$ تعریف می‌کنیم.

شکل ۵.۴ برای حالت $n=2$ توضیح می‌دهد.

ناحیهٔ سایه زده شده در اصل $\tilde{\alpha}$ که به x_0 نگاشته می‌شود

نتیجه صوری از این واقعیت است که به صورت تصویری در شکل توضیح داده شده است

اثبات قضیه ۵.۷ ...

چون قانون ضرب برای دو تا n-لوپ توضیح می دهد انتقال آنها را در امتداد محور t_1

تصویرهای بعدی در شکل ۵.۴ قضیه ۵.۷ را اثبات می کند برای حالت $n \geq 2$

تفاوت اساسی بین حالت $n > 1$ و $n = 1$ این است که حالت $n = 1$ مرز I_n ناهمبند است.

قضیه

اگر X یک فضای همبند مسیری باشد و $x_0, x_1 \in X$ آن گاه $\pi_n(X; x_0)$ با $\pi_n(X; x_1)$ یکریخت است (۵.۸)

مانند قبل یکریختی وابسته به مسیری که استفاده می کند همبندی بین نقاط x_0 و x_1.

قضیه

اگر X انقباض پذیر باشد به واسطه یک هموتوپی که x_0 را ثابت قرار می دهد آن گاه

$$\pi_n(X; x_0) = \{0\} \quad \forall n > 1 \qquad (۵.۹)$$

قضیه

فرض کنیم X و Y فضاهایی با $x_0 \in X$ و $y_0 \in Y$ باشند آن گاه

$$\pi_n(X \times Y, (x_0, y_0)) \cong \pi_n(X, x_0) \oplus \pi_n(Y, y_0)$$

برخلاف گروه های $\pi_1(X, x_0)$ یا گروه هومولوژی $H_p(X)$ الگوریتمی برای مشخص کردن $\pi_n(X; x_0)$ برای $n > 1$

وجود ندارد حتی وقتی که X یک فضای مثلث بندی شدنی باشد

به همین دلیل فقط یک ابزار محاسباتی عمومی از قضیه هموتوپی را توصیف خواهیم کرد.

دنباله هموتوپی دقیق

برای این منظور باید اول گروه های هموتوپی نسبی $\pi_n(X, Y, y_0)$ که $y_0 \in Y \subset X$ را تعریف کنیم

۵.۴ گروه های هموتوپی نسبی

فرض کنید X یک فضای توپولوژی شامل یک زیرفضای بسته Y باشد و فرض کنیم $y_0 \in Y$.

یک n-لوپ نسبی نسبت به Y در X می توانند به صورت زیر تعریف شود:

تعریف

یک n-لوپ نسبی با نسبت به یک زیرفضای بسته Y در X یک نگاشت پیوسته $\alpha : I_n \to X$ است بطوری که

α همه وجه های n-مکعب I_n را به تک نقطه $y_0 \in Y \subset X$ می برد به جز یکی از وجه های باز را

وجه باز J_{n-1} را به Y می‌برد هنگامیکه ∂J_{n-1} به y_0 نگاشته می‌شود.

تعریف

فرض کنید α و β دو تا n-لوپ نسبی در $y_0 \in Y$ باشند نسبت به زیرفضای Y از فضای توپولوژی X باشد آن گاه تعریف $\gamma=\alpha\circ\beta$ به صورت زیر است:

$$\gamma(t_1,\dots,t_n)=\alpha*\beta(t_1,\dots,t_n)=\begin{cases}\alpha(2t_1,t_2,\dots,t_n) & 0\le t_1\le \frac{1}{2}\\ \beta(2t_1-1,t_2,\dots,t_n) & \frac{1}{2}\le t_1\le 1\end{cases}$$

که وجه باز استثنایی J_n که به Y نگاشته می‌شود را متناظر با $0\le t\le 1$ می‌گیریم

تعریف

دو n-لوپ نسبی α و β نسبت به Y در X هموتوپ نامیده می‌شود اگر بین نگاشت پیوسته H وجود داشته باشد $0\le s\le 1$; $H(s;t_1,\dots,t_n)$

$$H(0;t_1,\dots,t_n)=\alpha(t_1,\dots,t_n)$$

$$H(1;t_1,\dots,t_n)=\beta(t_1,\dots,t_n)$$

$$H(s;t_1,\dots,t_n)=\begin{cases} y_0 & \text{if } (t_1,\dots,t_n)\in\partial I_n\\ Y & \text{if } (t_1,\dots,t_n)\in J_{n-1}\\ y_0 & \text{if } (t_1,\dots,t_n)\in\partial J_{n-1}\end{cases}$$

بنابراین دو n-لوپ نسبی α و β هموتوپ نامیده می‌شوند و می‌نویسیم $\alpha\simeq\beta$.

اگر یکی را بتوان از تغییر شکل پیوسته به دیگری بدست آورد. زمانیکه همه وجه‌های n-مکعب I_n به جز J_{n-1}

وجه باز نگاشت شده به y_0 باشند وجه باز استثنایی J_{n-1} به Y نگاشته شود و مرز آن ∂J_{n-1} به y_0 نگاشته شود

به کمک این رابطه هموتوپی دوباره این امکان است که نشان داد کلاس رده‌های هموتوپی $[\alpha]$ از

n-لوپ‌های نسبی نسبت به Y در X یک گروه تشکیل می‌دهند با قانون ضرب $[\alpha]\circ[\beta]=[\alpha*\beta]$

این گروه، گروه هموتوپی نسبی $\pi_n(X;Y;y_0)$ به ازای $y_0\in Y$ نام دارد.

[illegible]

عضوهای $\pi_n(X;Y;y_0)$ به ازای $y_0 \in Y$ دقیقاً کلاس هموتوپی همه n-لوپ‌های نسبی در Y به پایه y_0.

بنابراین با داشتن یک فضای توپولوژی X شامل زیرفضای نسبی Y و $y_0 \in Y$، گروه‌های هموتوپی $\pi_n(Y;y_0)$ و $\pi_n(X;y_0)$، $\pi_n(X;Y;y_0)$ را داریم.

همانند تئوری هومولوژی سعی می‌کنیم ارتباط این گروهها را با یکدیگر بیان کنیم.

A: ارتباط بین $\pi_n(Y;y_0)$ و $\pi_n(X;y_0)$.

چون $Y \subset X$ نگاشت شمول $i: Y \longrightarrow X$ موجود است با تعریف $i[\alpha]=[\alpha]$ برای $Y \subset X$

ملاحظه که روهای همریختی زیر را می‌دهد.

$$i^*: \pi_n(Y;y_0) \longrightarrow \pi_n(X;y_0) \quad \forall n$$

B: ارتباط بین $\pi_n(X;y_0)$ و $\pi_n(X;Y;y_0)$

$j: (X;y_0,y_0) \longrightarrow (X,Y,y_0)$ (به یاد آوریدکه $y_0 \in Y$) یک همریختی القایی کند

$$j^*: \pi_n(X,y_0;y_0) \longrightarrow \pi_n(X,Y;y_0)$$

C: ارتباط بین $\pi_n(X,Y;y_0)$ و $\pi_{n-1}(Y,y_0)$

یادآوری می‌کنیم که عضوهای $\pi_n(X,Y;y_0)$ کلاس‌های هموتوپی n-لوپ‌های نسبی بودند که به صورت نگاشت‌ها

پیوسته از I_n تعریف شده بودند و این ویژگی را داشتند که یکی از وجه‌های باز از I_n یعنی J_{n-1} به Y نگاشته می‌شوند و

مرز J_{n-1} به $y_0 \in Y \subset X$ نگاشته می‌شود. y_0 نقطه پایه گروه هموتوپی نسبی است و بنابراین اگر هر نگاشت

از I_n تحدید شود به وجه J_{n-1} به علاوه مرزش آنوقت آسان به نظر می‌آید که بخواهیم هموتوپی بین

$\pi_n(X,Y;y_0)$ و $\pi_{n-1}(Y,y_0)$ را نتیجه بگیریم و این هومومورفیسم مرزی نامیده می‌شود و به صورت زیر است

$$\partial^*: \pi_n(X,Y;y_0) \longrightarrow \pi_{n-1}(Y;y_0) \leftarrow \text{هومومورفیسم مرزی}$$

۵. قضیه: $\pi_k(S^n)$ همریخت با $\pi_{k+1}(S^{n+1})$ است برای $n>1$ و $k>1$

ما شروع می کنیم با تعریف کردن (مثل فصل ۴) فضاهای زیر :

$A^n = S^n - [s]$ ‏ $[s]$ نقطه قطب جنوب را نشان می دهد.

$B^n = S^n - [n]$ ‏ $[n]$ نقطه قطب شمال را نشان می دهد.

ما مشاهده می کنیم که فضاهای A^n و B^n انقباض پذیرند از اینرو به واسطه لم (۵.۹)

$$\pi_k(A^n) = \{0\} \quad \text{و} \quad \pi_k(B^n) = \{0\} \quad \forall k>1$$

اکنون درنظر بگیرید دو دنباله کامل زیر را :

$$\cdots \to \pi_{k+1}(A^{n+1}) \xrightarrow{i^*} \pi_{k+1}(S^{n+1}) \xrightarrow{j^*} \pi_{k+1}(S^{n+1}, A^{n+1}) \xrightarrow{\partial^*} \pi_k(A^n) \to \cdots$$

$$\cdots \pi_{k+1}(B^n) \xrightarrow{j^*} \pi_{k+1}(B^n, S^n) \xrightarrow{\partial^*} \pi_k(S^n) \xrightarrow{i} \pi_k(B^n) \to \cdots$$

برای $k>0$ بدست می آوریم.

$$\pi_{k+1}(S^{n+1}) \simeq \pi_{k+1}(S^{n+1}, A^{n+1})$$

$$\pi_{k+1}(B^n, S^n) \simeq \pi_k(S^n)$$

این جریان که در بالا آمده به موازات محاسبات درگروههای همولوژی است

اما حالا ما باید بطور متفاوتی عمل کنیم. قضیه ی شکل ص ۹۸ (excision) درتقریباً هموتوپی وجود ندارد که به ما اجازه دهد که مستقیماً بگوییم $\pi_{k+1}(S^{n+1}, A^{n+1})$ شبیه رفتن با $\pi_{k+1}(B^n, S^n)$ است

به هرحال ما مشاهده می کنیم که $B^n \subset S^{n+1}$ و $S^n \subset A^{n+1}$

بنابراین نگاشت شمول $i: [B^n, S^n] \to [B^n, S^n] \in [S^{n+1}, A^{n+1}]$ منجر به همریختی زیر می شود

$$i^*: \pi_{k+1}(B^n, S^n) \longrightarrow \pi_{k+1}(S^{n+1}, A^{n+1})$$

روابط اثبات شده می توانند بطور مناسب به این صورت خلاصه شوند

$$\begin{array}{ccc}
\pi_{k+1}(S^{n+1}, A^{n+1}) & \xleftarrow{i^*} & \pi_{k+1}(B^n, S^n) \\
j^{*-1} \downarrow \;\; \uparrow j^* & & \partial^* \downarrow \;\; \uparrow \partial^{*-1} \\
\pi_{k+1}(S^{n+1}) & & \pi_k(S^n)
\end{array}$$

از دیاگرام و این واقعیت که j^* و δ^* در این حالت یکریختی هستند این نتیجه می دهد که یک همریختی $E = j^{-1} * i * \delta^{-1}$ بین

$\pi_k(S^n)$ و $\pi_{k+1}(S^{n+1})$ که قضیه ما است.

قضیه اثبات شده یک حالت خاص از نتیجه کلی تعلیق است که به علت طولانی بودن آن را بدون اثبات readethal باقی می گذاریم.

قضیه

یک همریختی بین $\pi_k(S^n)$ و $\pi_{k+1}(S^{n+1})$ برای $k < 2n-1$ وجود دارد. وقتی که $k < 2n-1$ هومومورفیسم در حقیقت یک یکریختی است. وقتی که $k = 2n-1$ هومومورفیسم پوشایی باشد. نتایج فوراً از این قضیه نتیجه می شوند که باید به آن ها توجه کرد.

نتیجه: اگر $k = n$، داریم $\pi_n(S^n) = \pi_2(S^2)$

نتیجه: اگر $k < n$، $\pi_k(S^n) = \{0\}$ چون $\pi_1(S^p) = \{0\}$ برای $p > 1$.

یک تشابه ظاهری بین گروه های هموتوپی $H_k(X)$ و گروه هموتوپی $\pi_k(X)$ وجود دارد. هردو گروه های نسبی دارند و در روابط دنباله دقیق صدق می کنند. آیا می توان $\pi_k(X)$ را به $H_k(X)$ مربوط کرد؟

واضح است که ممکن است. قضیه بعدی منسوب به Hurewicz را داریم.

قضیه

اولین گروه هومولوژی غیرصفر (که $n > 1$) و اولین گروه هموتوپی غیرصفر $\pi_1(X)$ یک شکل دارند و یکریختی می باشند هنگامیکه $n = 1$ قضیه درست است به شرطی که گروه اساسی $\pi_1(X)$ آبلی باشد.

یک بیان از قضیه برای پوشش دادن حالت غیرآبلی در مرجع [۲] لیست شده در پایان فصل آمده به عنوان یک کاربرد از قضیه وانکن $H_1(S^2) = \{0\}$ و $H_2(S^2) = Z$ درحالیکه $\pi_1(S^2) = \{0\}$.

بنابراین این نتیجه می دهد که $\pi_2(S^2) = Z$ با ترکیب شدن این نتیجه با نتیجه ۵.۲۱ ما بدست می آوریم

نتیجه

اگر $k = n$ و $\pi_n(S^n) = Z$ $\forall n$.

این فصل را با تبصره بعدی به پایان می رسانیم. برخلاف گروه های هومولوژی $H_n(S^k)$، گروه های هموتوپی $\pi_n(S^k)$ برای $n > k$ نیاز نیست بدیهی باشند. برای مثال این نشان داده شده توسط Hopf که $\pi_3(S^2) = Z$

ما می خواهیم این نتیجه را در فصل ۹ ثابت کنیم

۸

۵.۵ دنباله‌های هموتوپی کامل

قضیه: دنباله‌ی زیر دقیق است:

$$\cdots \to \pi_n(Y, y_0) \xrightarrow{i^*} \pi_n(X, y_0) \xrightarrow{j^*} \pi_n(X, Y, y_0)$$

$$\xrightarrow{\partial^*} \pi_{n-1}(Y, y_0) \xrightarrow{i^*} \cdots \qquad (۵.۱۷)$$

اثبات: اثبات شامل بررسی‌های زیر است.

i) $\mathrm{Image}\, i^* \subseteq \ker j^*$

ii) $\mathrm{Img}\, j^* = \ker \partial^*$

iii) $\mathrm{Img}\, \partial^* = \mathrm{kernel}\, i^*$

اثبات (i): ابتدا نشان می‌دهیم که

$$\mathrm{Image}\, i^* \subseteq \mathrm{Kernel}\, j^*$$

نگاشت شمول همه عضوهای n- لوپ‌هایی در Y به پایه‌ی y_0 دارد

با توجه به تعریف آنها هموتوپ با عضو همانی $\pi_n(X,Y,y_0)$ است. لذا

$\mathrm{Image}\, i^* \subset \mathrm{kernel}\, j^*$. عکس نشان میدهیم که $\mathrm{kernel}\, j^* \subset \mathrm{Img}\, i^*$. این خود

از تعریف گروه هموتوپی نسبی $\pi_n(X,Y,y_0)$ نتیجه می‌شود.

با اول توجه می‌کنیم که $\mathrm{kernel}\, j^*$ زیرمجموعه‌ی کلاس‌های هموتوپی عضوهای

$\pi_n(X,y_0)$ است که در واقع مساوی با کلاس هموتوپی n- لوپ‌های در

Y به پایه‌ی y_0 است که به تعریف همان $\mathrm{Image}\, i^*$ است.

به عنوان مثالی که چگونه دنباله هموتوپی ممکن است استفاده شوند قضیه‌ی بعدی

را اثبات می‌کنیم.