دانشگاه پیام نور

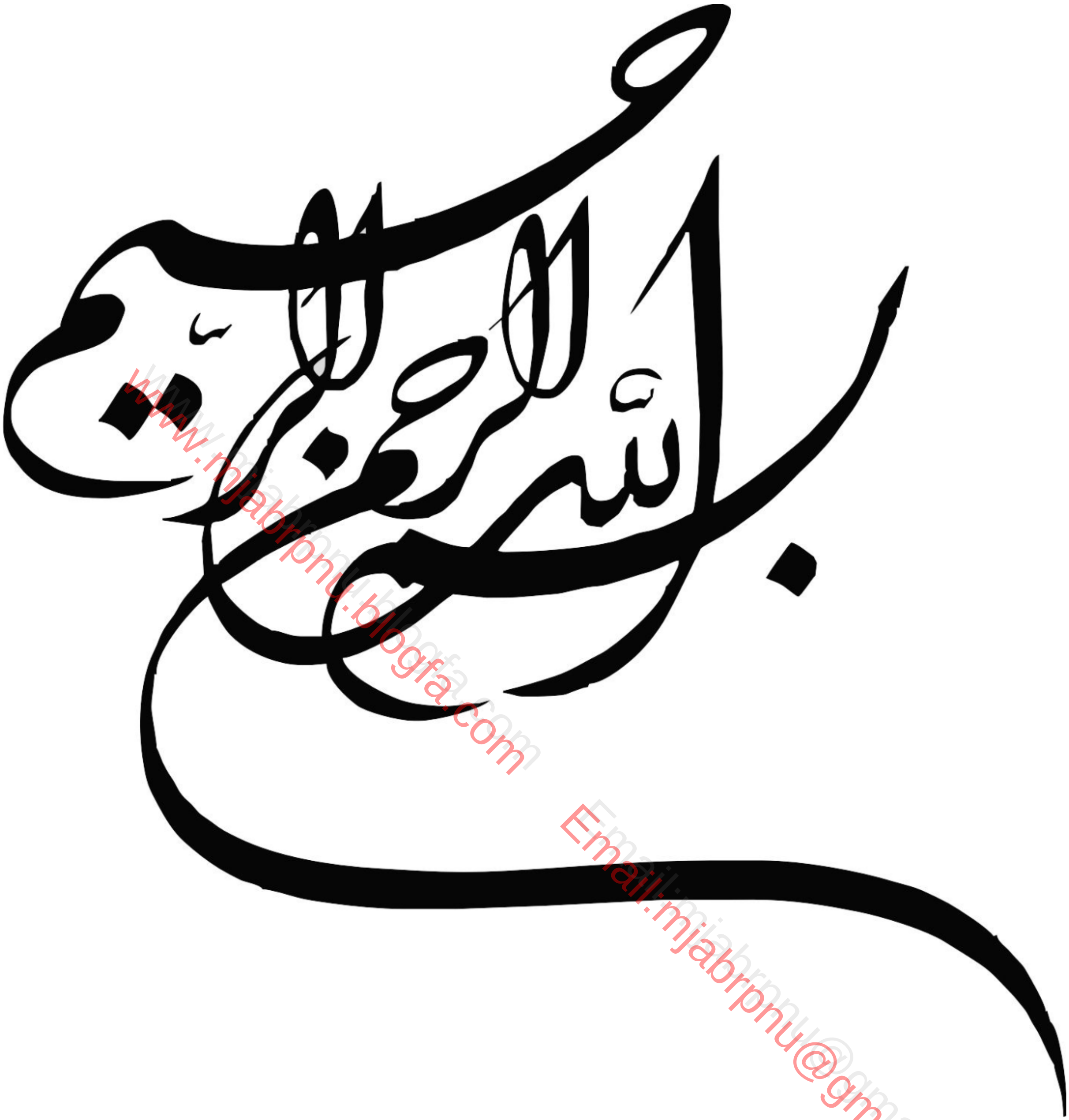
بخش علوم پایه

گروههای آبلی نامتناهی

برگرفته از کتاب :

Infinite Abelian Groups

Derek J. S. Robinson


بسم الله الرحمن الرحیم

فصل ۱

یادآوریها:

تعریف: فرض کنیم G یک گروه باشد. دراینصورت هر همریختی $f:G\to G$ را یک درونریختی می نامیم. مجموعه تمام درونریختی های G با عمل ترکیب توابع تشکیل یک گروه می دهد که با $End(G)$ نشان می دهیم.

تعریف: درونریختی f را یک خودریختی می نامیم هرگاه دوسویی باشد. مجموعه تمام خودریختی های G یک زیرگروه $End(G)$ است که با $Aut(G)$ نشان داده می شود.

تعریف: فرض کنیم G یک گروه و $a\in G$. دراینصورت نگاشت $f_a:G\to G$ با ضابطه $f_a(x)=a^{-1}xa$ یک خودریختی است. خودریختی f_a را یک خودریختی داخلی G می نامیم. مجموعه تمام خودریختی های داخلی گروه G را با $Inn(G)$ نشان می دهیم.

تعریف: فرض کنیم G یک گروه باشد. فرض کنیم f یک خودریختی روی G و $H\leq G$ باشد. در اینصورت Hرا تحت f پایا می نامیم هرگاه $f(H)\subseteq H$.

تعریف: فرض کنیم G یک گروه و H یک زیرگروه آن باشد. دراینصورت H را زیرگروه مشخصه G می نامیم هرگاه H تحت تمام خودریختی های G پایا باشد.

تذکر: یک زیرگروه نرمال است اگر و تنها اگر هر خودریختی داخلی پایا باشد.

تعریف: فرض کنیم G یک گروه و H یک زیرگروه آن باشد. دراینصورت H را یک زیرگروه کاملاً پایای G می نامیم هرگاه H تحت تمام درونریختی های G پایا باشد.

تعریف: فرض کنیم G یک گروه باشد. کوچکترین عددی چون n که برای هر $x\in G$ داشته باشیم $x^n=1$ را نمای G می نامیم.

مثال: گروه $\mathbb{Z}_n$ از نمای n است.

تعریف: فرض کنیم G یک گروه و p عددی اول باشد. دراینصورت G را یک $p-$گروه نامیم هرگاه مرتبه هر عضو آن توانی از p باشد.

تمرین: فرض کنیم G یک $p-$گروه متناهی باشد. دراینصورت عدد طبیعی n وجود دارد بطوریکه $|G|=p^n$.

تعریف: فرض کنیم G یک گروه، Ω یک مجموعه و $\alpha:G\times\Omega\to G$ یک تابع باشد. دراینصورت سه تایی (G,Ω,α) را یک گروه اپراتوری راست می نامیم هرگاه برای هر $\omega\in\Omega$ نگاشت $g\to\alpha(g,\omega)$ یک درونریختی از G باشد. اگر تابع α معلوم باشد آنگاه به جای $\alpha(g,\omega)$ می نویسیم g^ω. در این حالت G را یک $\Omega-$گروه نامیده و Ω را دامنه اپراتوری می نامیم.

مثال: فرض کنیم G یک گروه باشد. دراینصورت با در نظر گرفتن $\Omega = \phi$ می توان G را همواره یک $\Omega -$ گروه در نظر گرفت. بنابراین مفهوم گروه اپراتوری را می توان به عنوان تعمیمی از مفهوم گروه در نظر گرفت.

تعریف: فرض کنیم G یک گروه و H زیرگروهی از آن باشد. دراینصورت H را یک $\Omega -$ زیرگروه G می نامیم هرگاه برای هر $h \in H$ و هر $\omega \in \Omega$ داشته باشیم $h^{\omega} \in \mathrm{H}$.

تذکر: اشتراک هر تعداد از $\Omega -$ زیرگروههای یک گروه مانند G دوباره یک $\Omega -$ زیرگروه است. بنابراین می توان مفهوم $\Omega -$ زیرگروه تولید شده توسط زیرمجموعه ناتهی X از G را بصورت اشتراک $\Omega -$ زیرگروههای G شامل X تعریف کرد که با نماد X^{Ω} نشان داده می شود. به راحتی ثابت می شود که:

$$X^{\Omega} = \{(x_1^{\varepsilon_1})^{\omega_1}(x_2^{\varepsilon_2})^{\omega_2} \dots (x_r^{\varepsilon_r})^{\omega_r} \ : \ x_i \in X, \ \ \varepsilon_i = \pm 1, \ \ r \geq 0, \ \ \omega_i \in \Omega\}.$$

تعریف: فرض کنیم G یک گروه و N یک $\Omega -$ زیرگروه نرمال از آن باشد. دراینصورت عمل $\Omega -$ زیرگروه خارج قسمتی G/N بصورت $(Ng)^{\omega} = Ng^{\omega}$ برای هر $g \in G$ و $\omega \in \Omega$ تعریف می شود.

تعریف: فرض کنیم G و H دو $\Omega -$ گروه باشند. دراینصورت یک $\Omega -$ همریختی مانند $\alpha : G \to H$ یک همریختی است بطوریکه برای هر عضو $g \in G$ و $\omega \in \Omega$ داشته باشیم $(g^{\omega})^{\alpha} = (g^{\alpha})^{\omega}$. مجموعه تمام $\Omega -$ همریختی ها را با نماد $Hom_{\Omega}(G,H)$ نشان می دهیم.

قضیه اول یکریختی برای $\Omega -$ گروه: فرض کنیم G و H دو $\Omega -$ گروه باشند. فرض کنیم $\alpha : G \to H$ یک $\Omega -$ همریختی پوشا باشد. دراینصورت $\mathrm{G/Ker(\alpha)} \cong^{\Omega} \mathrm{H}$.

برهان: با توجه به اینکه $\alpha : G \to H$ یک همریختی پوشا است لذا بنا به قضیه اول یکریختی، یک یکریختی $\overline{\alpha} : G/Ker(\alpha) \to H$ وجود دارد بطوریکه برای هر $g \in G$ داریم $\overline{\alpha}(gK) = \alpha(g)$. ثابت می کنیم $\overline{\alpha}$ یک $\Omega -$ یکریختی است. برای اینکار ابتدا ثابت می کنیم $Ker(\alpha)$ یک زیرگروه نرمال G است. لذا ثابت می کنیم :

$$\forall k \in Ker(\alpha) \Rightarrow k^{\omega} \in Ker(\alpha)$$

حال با توجه به اینکه α یک $\Omega -$ همریختی و H یک $\Omega -$ گروه داریم:

$$(k^{\omega})^{\alpha} = \alpha(k^{\omega}) = (k^{\alpha})^{\omega} = 1^{\omega} = 1.$$

حال برای اثبات اینکه $\overline{\alpha}$ یک $\Omega -$ یکریختی است، فرض می کنیم $gK = g_0$. کافی است ثابت کنیم $(g_0^{\omega})^{\overline{\alpha}} = (g_0^{\overline{\alpha}})^{\omega}$.

داریم:

$$(g_0^{\omega})^{\overline{\alpha}} = \overline{\alpha}(g_0^{\omega}) = \overline{\alpha}(g^{\omega}K) = \alpha(g^{\omega}) = (g^{\omega})^{\alpha} = (g^{\alpha})^{\omega}.$$

$$(g_0^{\overline{\alpha}})^{\omega} = ((g_0)\overline{\alpha})^{\omega} = ((gK)\overline{\alpha})^{\omega} = ((g)\alpha)^{\omega} = (g^{\alpha})^{\omega}.$$

بنابراین حکم حاصل می شود.

مثال: اگر R یک حلقه و A یک $R-$مدول راست باشد، آنگاه A به همراه نگاشت $\alpha: A \times R \to A$ با ضابطه $\alpha(a,r) = ar$ یک $R-$گروه اپراتوری است. بنابراین مدولها حالت خاصی از گروههای اپراتوری هستند.

مثال: فرض کنیم G یک گروه و $\Omega = End(G)$. دراینصورت G یک $\Omega -$ گروه است اگر درونریختی ها از راست به گروه بطور طبیعی عمل کنند. در واقع داریم:

$$\alpha : G \times \Omega \to G$$
$$\alpha(g,f) = f(g)$$

دراین حالت H یک $\Omega -$ زیرگروه G خواهد بود هرگاه یک زیرگروه کاملاً پایای G باشد.

مثال: فرض کنیم G یک گروه و $\Omega = Aut(G)$. دراین حالت H یک $\Omega -$ زیرگروه G خواهد بود هرگاه یک زیرگروه مشخصه G باشد.

مثال: فرض کنیم G یک گروه و $\Omega = Inn(G)$. دراین حالت H یک $\Omega -$ زیرگروه G خواهد بود هرگاه یک زیرگروه نرمال G باشد. توجه می کنیم که در این حالت یک $\Omega -$ درونریختی با هر خودریختی داخلی جابجا می شود. همچنین X^{Ω} همان بستار نرمال X^{G} است.

فصل ۲

گروه آزاد و معرف (نمایش)

تعریف: فرض کنید X یک مجموعه غیر خالی و F یک گروه و نیز $\sigma: X \to F$ یک نگاشت باشد. دراینصورت F یا بطور دقیقتر (F,σ) را روی X آزاد گوییم هرگاه برای هر گروه G و هر نگاشت $\alpha: X \to G$ همریختی یکتای $\beta: F \to G$ موجود باشد بطوریکه $\sigma\beta = \alpha$. بعبارت دیگر دیاگرام زیر جابجایی باشد:

$$\begin{tikzcd} & F \arrow[dr, dashed, "\beta"] & \\ X \arrow[ur, "\sigma"] \arrow[rr, "\alpha"'] & & G \end{tikzcd}$$

تعریف: یک گروه را آزاد گوییم هرگاه روی یک مجموعه آزاد باشد.

تذکر: اگر F به همراه نگاشت $\sigma: X \to F$ روی Xآزاد باشد آن گاه σ یک به یک است.

اثبات: اثبات به برهان خلف انجام می گیرد. فرض کنیم $x, y \in F$ بطوریکه $x \neq y$ ولی $\sigma(x) = \sigma(y)$. حال فرض کنیم G گروهی باشد که حداقل دارای دو عضو متمایز مانند g_2, g_1 باشد. نگاشت $\alpha: X \to G$ را طوری تعریف می کنیم که $\alpha(x) = g_1, \alpha(y) = g_2$. با توجه به تعریف گروه آزاد همریختی منحصربفرد $\beta: F \to G$ موجود است که $\sigma\beta = \alpha$ که نتیجه می دهد:

$$g_1 = \alpha(x) = \beta\sigma(x) = \beta(\sigma(y)) = \alpha(y) = g_2.$$

که تناقض است.

تذکر: فرض کنیمF به همراه نگاشت $\sigma: X \to F$ روی Xآزاد باشد. همچنین فرض کنیم $i: Im(\sigma) \to F$ نگاشت شمول باشد. با توجه به اینکه σ یک به یک است، لذا $X \cong Im(\sigma)$. درنتیجه می توان Fرا روی $Im(\sigma)$ آزاد فرض کرد. بنابراین در تعریف گروه آزاد همواره می توان X را به عنوان زیرمجموعه F فرض کرد. همچنین جابجایی دیاگرام نیز به معنی این است که تحدید نگاشت β به X برابر α است.

تذکر: فرض کنیمF به همراه نگاشت $\sigma: X \to F$ روی Xآزاد باشد. دراینصورت به راحتی ثابت می شود که $Im(\sigma)$ یک مولد برای F است.

مثال: گروه اعداد صحیح $\mathbb{Z}$ روی مجموعه تک عضوی $X = \{x\}$ آزاد با نگاشت $\sigma: X \to \mathbb{Z}$ که $\sigma(x) = 1$ می باشد. در واقع اگر $\alpha: X \to G$ یک نگاشت دلخواه و $\alpha(x) = g$ باشد آنگاه نگاشت $\beta: \mathbb{Z} \to G$ را بصورت $\beta(n) = ng$ تعریف می کنیم. دراینصورت β یک همریختی است و داریم: $\beta(\sigma(x)) = \beta(1) = g = \alpha(x)$. در نتیجه $\sigma\beta = \alpha$.

حال $\gamma: \mathbb{Z} \to G$ نگاشت دیگری باشد که $\alpha = \sigma\gamma$ آنگاه برای هر عدد صحیح مثبت n داریم:

$$\gamma(n)=\gamma(1+1+\cdots+1)=n\gamma(1)=n\alpha(x)=n\beta(\sigma(x))=n\beta(1)=\beta(n).$$

به همین ترتیب برای هر عدد صحیح مثبت n داریم: $\gamma(n)=\beta(n)$ پس $\gamma=\beta$.

بنابراین اگر F یک گروه دوری نامتناهی باشد، آنگاه F روی مجموعه ای تک عضوی آزاد است.

ساختن گروههای آزاد:

اثبات وجود یک گروه آزاد از تعریف گروه آزاد نتیجه نمی شود، لذا برای رفع این نقص در قضیه زیر وجود چنین ساختاری را بیان می کنیم.

۲-۱-۱ : اگر X مجموعه ای ناتهی باشد آن گاه یک گروه مانند F و یک نگاشت $\sigma: X\to F$ موجودند که (F,σ) را روی X آزاد است. بعلاوه $F=<Im(\sigma)>$.

اثبات: فرض کنیم X^{-1} یک مجموعه دلخواه همعدد با X باشد که آنرا با نماد $X^{-1}=\{x^{-1}\mid x\in X\}$ (x^{-1} تنها یک نماد است) نشان می دهیم. هر شی به صورت $w=x_1^{\varepsilon_1}...x_n^{\varepsilon_n}$ یک کلمه به طول n می نامیم که در آن $(1\le i\le n),\ x_i\in X\cup X^{-1}$. اگر $n=0$ باشد نگاشت تهی به طول صفر را با ۱ نشان می دهیم. حال مجموعه $W(X)$ را به صورت زیر تعریف می کنیم $W(X)=\{w=x_1^{\varepsilon_1}...x_n^{\varepsilon_n}\mid x_i\in X,\varepsilon_i=\pm1\}$. اگر $w_1=x_1^{\varepsilon_1}...x_n^{\varepsilon_n}$ و $w_2=y_1^{\varepsilon_1}...y_n^{\varepsilon_n}$ دو لغت در $W(X)$ باشد آن گاه w_1w_2 را به وسیله کنار هم گذاری به صورت $w_1w_2=x_1^{\varepsilon_1}...x_n^{\varepsilon_n}y_1^{\varepsilon_1}...y_n^{\varepsilon_n}$ و معکوس w_1 را بصورت $w_1^{-1}=x_n^{-\varepsilon_n}...x_1^{-\varepsilon_1}$ تعریف می کنیم. همچنین قرار می دهیم $1^{-1}=1$. حال یک رابطه هم ارزی روی $W(X)$ به صورت زیر تعریف می کنیم که دو لغت w و v را هم ارز باشند $(v\sim w)$ هرگاه بتوان از w با انجام تعداد متناهی عمل بصورت زیر به v رسید:

الف) اضافه کردن xx^{-1} یا $x^{-1}x$ که $x\in X$.

ب) حذف کردن xx^{-1} یا $x^{-1}x$ که $x\in X$.

به راحتی ثابت می شود که این رابطه یک رابطه هم ارزی است. کلاس هم ارزی w را با $[w]$ نشان می دهیم و فرض کنیم F مجموعه تمام کلاس های هم ارزی فوق روی $W(X)$ باشد. حال در این مجموعه عمل ضرب را به صورت $[w][v]=[wv]$ تعریف می کنیم. ملاحظه می کنیم که

اگر $[w]=[w']$ و $[v]=[v']$ آنگاه داریم:

$$[w]=[w']\Longrightarrow w\sim w'$$

$$[v]=[v']\Longrightarrow v\sim v'$$

بنابراین $wv\sim w'v'$ و این بدان معنی است که $[wv]=[w'v']$ یعنی $[w][v]=[w'][v']$. در نتیجه عمل ضرب خوشتعریف است. همچنین داریم:

$$[w][1]=[w]=[1][w],\quad [w][w^{-1}]=[w^{-1}][w]=[1]$$

همچنین این عمل شرکت پذیر است زیرا

$$(wv)u = w(vu) \Rightarrow ([w][v]).[u] = [(wv)u] = [w(vu)] = [w]([v][u]).$$

بنابراین F همراه با عمل فوق یک گروه بوده که $[1]$ عضو خنثی گروه و معکوس هر کلمه $[w]$ همان $[w^{-1}]$ است. حال ثابت می کنیم F آزاد است. برای اینکار نگاشت $\sigma: X \to F$ را بصورت $\sigma(x) = [x]$ تعریف می کنیم. ثابت می کنیم (F, σ) را روی X آزاد است. فرض کنیم G یک گروه دلخواه و $\alpha : X \to G$ یک نگاشت باشد ابتدا نگاشت $\overline{\beta}: X \to G$ را بصورت $\overline{\beta}(x_1^{\varepsilon_1} x_2^{\varepsilon_2} \dots x_r^{\varepsilon_r}) = (\alpha(x_1))^{\varepsilon_1}(\alpha(x_2))^{\varepsilon_2} \dots (\alpha(x_r))^{\varepsilon_r}$ تعریف می کنیم. حال تعریف می کنیم:

$$\beta: F \to G$$

$$\beta[w] = \overline{\beta}[w]$$

اولا β خوشتعریف است زیرا اگر $[w] = [v]$ آنگاه $w \sim v$. حال چون عناصر مانند gg^{-1} و $g^{-1}g$ در G برابر ۱ است لذا $\overline{\beta}[w] = \overline{\beta}[v]$ پس $\beta([w] = \beta([v])$.

ثانیا β همریختی است زیرا:

$$\beta([w][v]) = \beta([wv]) = \overline{\beta}[wv] = \overline{\beta}[w]\overline{\beta}[v]$$

همچنین $\sigma\beta = \alpha$ زیرا:

$$\beta\sigma(x) = \beta([x]) = \overline{\beta}(x) = \alpha(x)$$

بالاخره توجه می کنیم که اگر $\gamma: F \to G$ نگاشت دیگری باشد که $\alpha = \sigma\gamma$ آنگاه $\beta\sigma = \alpha = \sigma\gamma$. ولی با توجه به اینکه $\beta(Im(\sigma)) = \gamma(Im(\sigma))$ و $F =< Im(\sigma) >$ لذا $\beta = \gamma$.

لغات تحویل یافته

تعریف: لغت w روی مجموعه X را تحویل یافته گوییم هرگاه w شامل هیچ xx^{-1} یا $x^{-1}x$ که $x \in X$ نباشد. لغت تهی را بنا به قرارداد تحویل یافته می گیریم.

۲-۱-۲: هر کلاس هم ارزی شامل یک لغت تحویل یافته یکتاست.

اثبات: فرض کنیم کلاس w یک کلاس هم ارزی وابسته به w باشد. اگر w تحویل یافته باشد آن گاه $w \in [w]$ وحکم تمام است. اگر w تحویل یافته نباشد آن گاه $x \in X$ موجود استکه xx^{-1} یا $x^{-1}x$ در w ظاهر شده است این عبارت ها را از w حذف می کنیم با تکرار این روند پس از تعداد متناهی مرتبه به یک لغت تحویل یافته می رسیم که با w هم ارز است اگر v_2, v_1 دو لغت تحویل یافته در کلاس w باشند آن گاه با تعدادی متناهی مرتبه اضافه یا کم کردن xx^{-1} یا $x^{-1}x$ می توان از یکی به دیگری رسید چون هر دو تحویل یافته اند و شامل xx^{-1} یا $x^{-1}x$ نیستند پس $v_1 = v_2$ خواهد بود.

شکل نرمال

اگر $[w] \in F$ آنگاه $[w]$ شامل یک لغت تحویل یافته مانند $w = x_1^{\varepsilon_1}...x_n^{\varepsilon_n}$ است پس بنا به تعریف ضرب $[W] = [x_1]^{\varepsilon_1}...[x_n]^{\varepsilon_n}$ این نمایش را فرم نرمال $[w]$ می نامیم. برای سادگی $[w]$ را با w نشان می دهیم. لذا هر عضو F بصورت

$$w = w(x_1,x_2,...,x_n) = x_1^{\varepsilon_1}x_2^{\varepsilon_2}...x_n^{\varepsilon_n} = x_1^{l_1}x_2^{l_2}...x_m^{l_m}, \quad x_i \neq x_{i+1}, \qquad l_i \in \mathbb{Z}.$$

۲-۱-۳ : فرض کنیم G یک گروه و X زیرمجموعه ای ناتهی از آن باشد. اگر هر $g \in G$ دارای نمایش یکتای به صورت

$$g = x_1^{l_1}x_2^{l_2}...x_m^{l_m}, \quad x_i \neq x_{i+1}, \qquad x_i \in X, \quad l_i \in \mathbb{Z}.$$

باشد آنگاه G روی X آزاد است.

اثبات: فرض کنیم F به همراه نگاشت شمول $\sigma: X \to F$ روی X آزاد باشد. با توجه به خاصیت مدول آزاد نگاشت $\beta: F \to G$ وجود دارد بطوریکه $\beta\sigma: X \to G$ نگاشت شمول است. با توجه به اینکه $G = < X >$ لذا نگاشت β پوشاست. از طرفی چون نمایش هر عضو بصورت فرمال یکتاست لذا β یک بیک است. بنابراین $G \cong F$. یعنی G روی X آزاد است.

۲-۱-۴: فرض کنیم F_1, F_2 به ترتیب به همراه نگاشت σ_1, σ_2 روی X_1, X_2 آزاد باشند. در اینصورت $F_1 \cong F_2$ اگر و تنها اگر $|X_1| = |X_2|$.

اثبات: (لزوم)

ابتدا فرض کنیم $|X_1| = |X_2|$ پس یک تابع دوسویی $\alpha: X_1 \to X_2$ موجود است. حال چون F_1, F_2 به ترتیب به همراه نگاشتهای σ_1, σ_2 روی X_1, X_2 آزاد می باشند، لذا همریختی های β_1 و β_2 وجود دارند بطوریکه دیاگرام های زیر جابجایی هستند:

$$\begin{tikzcd} & F_۱ \arrow[dr, dashed, "\beta_۱"] & \\ X_۱ \arrow[ur, "\sigma_۱"] \arrow[rr, "\alpha\sigma_۲"'] & & F_۲ \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & F_۲ \arrow[dr, dashed, "\beta_۲"] & \\ X_۲ \arrow[ur, "\sigma_۲"] \arrow[rr, "\alpha^{-۱}\sigma_۱"'] & & F_۱ \end{tikzcd}$$

از طرفی داریم: $\sigma_1\beta_1\beta_2 = \alpha\sigma_2\beta_2 = \alpha\alpha^{-1}\sigma_1 = \sigma_1$. لذا دیاگرام زیر نیز جابجایی است:

$$\begin{tikzcd} & F_۱ \arrow[dr, dashed, "\beta_۱\beta_۲"] & \\ X_۱ \arrow[ur, "\sigma_۱"] \arrow[rr, "\sigma_۱"'] & & F_۱ \end{tikzcd}$$

حال با توجه به اینکه دیاگرام فوق توسط نگاشت همانی روی F_1 نیز جابجا می شود لذا با توجه به یکتایی این نگاشت $\beta_1\beta_2 = 1_{F_2}$. به طریق مشابه ثابت می شود که $\beta_2\beta_1 = 1_{F_1}$ در نتیجه β_1, β_2 هر دو یکریختی هستند. درنتیجه $F_1 \cong F_2$.

کفایت: تمرین ۷.

لم: فرض کنید G یک گروه و X یک مجموعه مولد برای آن باشد. همچنین فرض کنید F یک گروه آزاد روی مجموعه ای مانند Y باشد. در اینصورت اگر $\alpha: X \to Y$ یک تابع پوشا باشد آن گاه برووریختی $\beta: F \to G$ موجود است که β توسیع α می باشد $(\beta|_Y = \alpha)$. بویژه هر گروه تصویر همریخت یک گروه آزاد است.

اثبات: چون $X \subseteq G$ لذا $\alpha: Y \to X \xrightarrow{\subseteq} G$، بنابراین طبق تعریف گروه آزاد همریختی $\beta: F \to G$ موجود است که دیاگرام زیر جابجایی است:

$$\begin{tikzcd}
Y \arrow[r] \arrow[d, "i"'] & X \arrow[r, "\subseteq"] & G \\
F \arrow[urr, "\beta"'] & &
\end{tikzcd}$$

یعنی برای هر $y \in Y$ داریم $\beta(y) = \alpha(y)$. بنابراین $\beta|_Y = \alpha$. پس $X \subseteq \operatorname{Im}\beta$ لذا β برووریختی است.

حال فرض کنیم G یک گروه دلخواه و X یک مجموعه مولد برای آن باشد. فرض کنیم F یک گروه آزاد روی X باشد لذا طبق قسمت قبل نگاشت شمول $Y \to X$ را می توان به برو ریختی $F \to G$ گسترش داد.

قضیه (خاصیت تصویری گروههای آزاد): فرض کنیم F یک گروه آزاد و G, H دو گروه دلخواه باشند. فرض کنیم $\alpha: F \to H$ یک همریختی و $\beta: G \to H$ یک برووریختی باشد. در اینصورت همریختی $\gamma: F \to G$ موجود است که $\gamma\beta = \alpha$ یعنی دیاگرام زیر جابه جایی است:

$$\begin{tikzcd}
 & F \arrow[d, "\alpha"] \arrow[dl, dashed, "\gamma"'] \\
G \arrow[r, "\beta"'] & H
\end{tikzcd}$$

اثبات: فرض کنیم F گروه آزاد روی X باشد حال با توجه به اینکه برای هر عضو دلخواه $x \in X$ داریم $x^\alpha = \alpha(x) \in Im(\beta) = H$ لذا $g_x \in G$ موجود است که $\beta(g_x) = \alpha(x)$. لذا نگاشتی مانند $x \to g_x$ از X به H تعریف می شود که با توجه به آزاد بودن F این نگاشت قابل توسیع به همریختی $\gamma: F \to G$ می باشد.

حال داریم: $\gamma\beta(x) = \beta(g_x) = \alpha(x)$ که با توجه به اینکه $F = \langle X \rangle$ لذا داریم $\gamma\beta = \alpha$.

تمرینات صفحه ۵۰

حل تمرین ۱:

فرض کنیم F آزاد روی X با نگاشت $\sigma: X \to F$ باشد. فرض کنیم $w = x_1^{n_1}x_2^{n_2}\dots x_r^{n_r}$ یک لغت تحویل یافته باشد بطوریکه برای هر $i = 1,\dots,r-1$ ، $x_i \neq x_{i+1}$ باشد. حال اگر m یک عدد صحیح مثبت باشد بطوریکه $w^m = 1$ آنگاه داریم:

$$1 = w^m = x_1^{n_1}x_2^{n_2}\dots x_r^{n_r}\dots\dots x_1^{n_1}x_2^{n_2}\dots x_r^{n_r}$$

حال با توجه به اینکه در هر گروه آزاد هر شی دارای نمایش یکتا می باشد، لذا $x_i = 1$ یعنی $w = 1$.

حل تمرین ۲:

فرض کنیم F آزاد روی X با نگاشت $\sigma: X \to F$ باشد. حال اگر $Card(X) > 1$ آنگاه دو عضو متمایز x و y را از آن انتخاب می کنیم. دراینصورت با توجه به ساختار گروه آزاد واژه $xyx^{-1}y^{-1}$ واژه تهی نمی باشد یعنی $xyx^{-1}y^{-1} \neq 1$. بنابراین $xy \neq yx$ که نشان می دهد در مرکز گروه هیچ عنصری به غیر از واژه تهی قرار نمی گیرد.

حل تمرین ۳:

اگر یک گروه آزاد دوری باشد، آنگاه آبلی خواهد بود.

برعکس: اگر F آزاد روی X با نگاشت $\sigma: X \to F$ باشد، آنگاه با توجه به مساله ۲ رتبه F باید حداکثر ۱ باشد. بنابراین $Card(X) = 1$ پس عضو $x \in X$ وجود دارد بطوریکه $X = \{x\}$. درنتیجه هر عضو F دارای نمایش یکتا $w = x_1^{n_1}x_2^{n_2}\dots x_r^{n_r} = x^n$ برای برخی عدد صحیح n خواهد بود. حال نگاشت $\alpha: F \to \mathbb{Z}$ با ضابطه $\alpha(x^n) = n$ یک یکریختی است و لذا حکم تمام است.

حل تمرین 4:

فرض کنیم $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{pmatrix}$ و نیز $B = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. دراینصورت برای هر عدد صحیح مثبت n داریم:

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ na & 1 \end{pmatrix}, \quad B^n = \begin{pmatrix} 1 & na \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

حال اگر $A^nB^m = I$، آنگاه داریم:

$$A^nB^m = I \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & ma \\ na & nma^2+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow na = ma = 0, \qquad nma^2 + 1 = 1$$

باتوجه به اینکه $|a| > 2$ بنابراین $n = m = 0$.

بنابراین رابطه $A^nB^m = I$ نتیجه می دهد که $n = m = 0$. در نتیجه در گروه $< A, B >$ هر عضو دارای نمایش یکتا بصورت توانهای A و B می باشد. پس با توجه به ۳-۱-۲ گروه $< A, B >$ آزاد است.

حل تمرین ۵:

فرض کنیم F آزاد روی X با نگاشت $\sigma: X \to F$ باشد. می دانیم $N = Y^F = \bigcap_{Y \subseteq H \lhd F} H$ بنابراین $Y \subseteq N$.

حال فرض کنیم Nw عضو دلخواهی از $\frac{F}{N}$ باشد، دراینصورت با توجه به اینکه w دارای نمایش یکتا بصورت $w = x_1^{n_1} x_2^{n_2} \dots x_r^{n_r}$ می باشد که در آن $x_i \in X, \alpha_i = \pm 1, n_r \geq 0$، لذا

$$Nw = Nx_1^{n_1} x_2^{n_2} \dots x_r^{n_r} = Nx_1^{n_1} N x_2^{n_2} \dots N x_r^{n_r}.$$

با توجه به اینکه $Y \subseteq N$ ، لذا اگر در رابطه فوق $x_i \in Y$ آنگاه $x_i \in N$. بنابراین $Nx_i = N$. نتیجه می گیریم که هر عضو گروه $\frac{F}{N}$ دارای نمایش یکتا بصورت $Nw = Nx_1^{n_1} N x_2^{n_2} \dots N x_r^{n_r}$ می باشد که در آن $x_i \in X \backslash Y$. پس با توجه به ۳-۱-۲ گروه $\frac{F}{N}$ آزاد است.

در حالت خاص اگر $X = \{x, y\}, \ Y = \{y\}$ آنگاه گروه $\frac{F}{N}$ آزاد روی $X \backslash Y = \{x\}$ خواهد بود. بنابراین $\frac{F}{N} \cong \mathbb{Z}$.

تمرین ۷: فرض کنیم $F_1 \cong F_2$. در اینصورت تعداد زیرگروه های F_2 با اندیس ۲ برابر است با تعداد زیرگروههای F_1 با اندیس ۲. فرض کنیم C_2 گروه دوری از مرتبه ۲ باشد در اینصورت هر زیرگروه با شاخص ۲ در گروه G نرمال خواهد بود. از طرفی هر زیرگروه با اندیس ۲ از F_1 هسته یک برو ریختی از $F_1 \to C_2$ خواهد بود و تنها یک برو ریختی با این ویژگی وجود دارد. پس تعداد برو ریختی هایی از F_2 به C_2 مساوی است با تعداد برو ریختی از $F_1 \to C_2$. ولی تعداد توابع پوشا $F_1 \to C_2$ برابر است با $2^{|X_1|} - 2$ لذا

$$2^{|X_1|} - 2 = 2^{|X_2|} - 2 \to |X_1| = |X_2|$$

تمرین ۱۰: فرض کنیم F گروهی آزاد و H زیرگروهی از آن باشد بطوریکه $[F:H] < \infty$. باتوجه به اینکه $[F:H] < \infty$ متناهی است پس زیرگروه نرمال N از F موجود است که $N \leq H$, $[F:N]$ متناهی است. حال فرض کنیم K زیرگروه نرمال غیربدیهی F باشد، باید ثابت کنیم $H \cap K \neq 1$. داریم

$$[N : N \cap K] = [NK : N] \leq [F : N] < \infty$$

چون K نامتناهی است پس $K \cap N \neq 1$ پس $K \cap H \neq 1$.

معرف گروه ها:

با توجه به قضایای قبل هر گروه G تصویر همریخت یک گروه آزاد است پس گروه آزاد F و بروریختی $\Pi : F \to G$ وجود دارند. بروریختی Π را یک معرف آزاد برای گروه G می نامیم که با فرض $R = Ker(\pi)$ داریم $F/R \cong G$. اعضا R را روابط این معرف می نامیم. حال اگر G یک گروه آزاد روی مجموعه ای مانند $Y = \{y_g \mid g \in G, g \neq 1\}$ باشد در اینصورت بروریختی $\Pi : F \to G$ موجود است که برای هر $g \in G$, $\Pi(y_g) = g$. همریختی Π را معرف استاندارد G می نامیم.

تعریف: فرض کنیم G یک گروه و $S \subseteq G$ باشد. در اینصورت بستار نرمال S در G را برابر اشتراک تمام زیرگروههای نرمال G که شامل S هستند تعریف می کنیم و با S^G نمایش می دهیم. درواقع S^G کوچکترین زیرگروه نرمال G است که شامل S می باشد. ثابت می شود که

$$S^G = < x^g \mid x \in S, g \in G > = < g^{-1}xg \mid x \in S, g \in G >$$

حال فرض کنیم $\Pi : F \to G$ معرفی برای G باشد. همچنین فرض کنیم Y مجموعه ای مولد برای F باشد و $S \subseteq F$ که $S^F = \ker \Pi$ در این صورت اگر $X = \Pi(Y)$ آن گاه X مولد G خواهد بود. بعلاوه اگر $r \in F$ و آن گاه r یک رابطه برای Π است اگر و تنها اگر به صورت $r = (s_1^{\varepsilon_1})^{f_1} \dots (s_n^{\varepsilon_n})^{f_n}$ نوشته شود که در آن $s_1, \dots, s_n \in S$, $f_1, \dots, f_n \in F$, $\varepsilon_i = \pm 1$.

معرف Π را به همراه S, Y در نظر گرفته و اعضای Y را مولدها و اعضاء S را روابط این معرف نامیده و می نویسیم $G = < Y | S >$.

بویژه می توانیم روابط این معرف را بصورت زیر نمایش می دهیم اگر $s \in S$ آن گاه می نویسیم $s(x) = 1$ و معرف را به صورت زیر نمایش می دهیم

$$G = < X | s(x) = 1, \quad s \in S >.$$

(قضیه ون- دایک) ۱-۲-۲: فرض کنیم H, G دو گروه با معرفهای $\varepsilon : F \to G$ و $\delta : F \to H$ باشند. اگر هر رابطه از ε یک رابطه از δ باشد آن گاه همریختی پوشای $\theta : G \to H$ موجود است که برای هر $f \in F$ داریم $\theta(\varepsilon(f)) = \delta(f)$.

اثبات: باتوجه به مفروضات قضیه $Ker(\varepsilon) \leq Ker(\delta)$. حال فرض کنیم $g \in G$ دلخواه باشد. در این صورت $f \in F$ موجود است که $\varepsilon(f) = g$. توجه می کنیم که چنین عضو f یکتاست زیرا اگر $f_1 \in F$ نیز باشد بطوریکه $\varepsilon(f_1) = g$ دراینصورت

$$\begin{aligned} ff_1^{-1} \in Ker(\varepsilon) \Rightarrow \quad & \exists k \in Ker(\varepsilon) \leq Ker(\delta), f = f_1 k \Rightarrow \delta(f) = \delta(f_1 k) = \delta(f_1)\delta(k) \\ & \Rightarrow \delta(f) = \delta(f_1)1 = \delta(f_1) \end{aligned}$$

لذا نگاشت $\theta : G \to H$ با تعریف $\theta(g) = \theta(\varepsilon(f)) = \delta(f)$ خوشتعریف و بروریختی است.

مثال: گروه D_∞ با معرف $D_\infty =< x, y \mid x^2 = 1, y^2 = 1 >$ را گروه دووجهی نامتناهی می نامیم. با فرض $xy = a$ داریم $G =< x, a >$ و همچنین $x^2 = 1$, $yx = x^{-1}ax = a^{-1}$. برعکس توجه می کنیم که روابط $y^2 = 1, x^2 = 1$ از دو رابطه $x^2 = 1$, $x^{-1}ax = a^{-1}$ نتیجه می شود. در واقع $y^2 = x^{-1}ax^{-1}a = a^{-1}a = 1$ ، لذا گروه D_∞ دارای معرف زیر نیز است:

$$D_\infty =< x, a \mid x^2 = 1, x^{-1}ax = a^{-1} >$$

مثال: گروه با معرف $G =< x, y \mid x^2 = y^2 = (xy)^{2n} = 1 >$, $n \geq 2$ را گروه دو وجهی متناهی از مرتبه $2n$ می نامیم.

گروه های متناهی معرف:

تعریف: گروه G را متناهی مولد گوییم هرگاه دارای معرفی به صورت $G =< X|R >$ باشد که R, X هر دو متناهی باشند.

توجه می کنیم که گروههای آزاد دارای معرف به شکل $Z =< X \mid \phi >$ هستند. بعبارت دیگر در این گروهها مجموعه روابط برابر ϕ است.

قضیه (B.H.Neumann) : فرض کنیم G یک گروه متناهی معرف و X یک مولد برای G باشد. در اینصورت زیرمجموعه متناهی X_0 از X موجود است که $G =< X_0 \mid r_1 = r_2 = \cdots = r_n >$.

مثال: هر گروه دوری و نیز هر گروه آزاد از رتبه متناهی، متناهی معرف می باشد که در واقع هیچ نوع رابطه ای ندارند.

مثال: هر گروه متناهی یک گروه متناهی معرف است. در واقع اگر G یک گروه متناهی باشد در اینصورت گروه آزاد با رتبه متناهی F و همریختی پوشای $\pi: F \to G$ موجود است بطوریکه $G \cong \frac{F}{Ker(\pi)}$. حال با فرض $R = Ker(\pi)$ چون F متناهی مولد و $[F:R]$ متناهی است لذا باتوجه به قضیه ۱,۶,۱۱ گروه R نیز متناهی مولد خواهد بود. لذا G متناهی معرف است.

تذکر: گروههای متناهی مولد ممکن است متناهی معرف نباشند. مثال چنین گروهی در ۱۴,۱,۱۴ داده شده است.

قضیه زیر ساختن مثالهای دیگری از گروههای متناهی معرف را بدست می دهد.

قضیه ۴-۲-۲ (P.Hall): فرض کنیم N زیرگروه نرمالی از گروه G باشد بطوریکه $N, \frac{G}{N}$ هر دو متناهی معرف باشند. در این صورت G هم متناهی معرف است.

اثبات: فرض کنیم $N =< x_1,\dots,x_m \mid r_1 = \dots = r_k = 1 >$ و $\frac{G}{N} =< y_1N,\dots,y_nN \mid s_1 = \dots = s_l = 1 >$. در اینصورت $G =< x_1,\dots,x_m, y_1,\dots,y_m >$. همچنین روابط زیر روی این مولدها برقرار است:

$$y_J^{-1}x_iy_j = u_{ij}(x)\ ,\ i=1,\dots,m \qquad r_i(x)=1\ ,\ i=1,\dots,k$$
$$y_jx_iy_j^{-1} = v_{ij}(x)\ ,\ j=1,\dots,n \qquad s_j(y)=t_j(x)\ ,\ j=1,\dots,L$$

دو دسته از روابط فوق از نرمال بودن N در G نتیجه می شود. حال فرض کنیم:

$$\overline{G} =< \overline{x}_1,\dots,\overline{x}_m, \overline{y}_1,\dots,\overline{y}_n \mid \overline{y}_j,\overline{x}_j \ \text{چهار دسته بالا} \}$$

با توجه به قضیه ون دایک بروریختی $\alpha\colon \overline{G} \to G$ موجود است بطوریکه برای هر $j=1,\dots,n\ ,\ i=1,\dots,m$ داشته باشیم:

$$\alpha(\overline{x_i}) = x_i,\ \ \alpha(\overline{y_j}) = y_j.$$

فرض کنیم $K = Ker(\alpha)$. دراینصورت تحدید α به $\overline{N} =< \overline{x}_1,\dots,\overline{x}_m >$ یک بیک است پس $K \cap \overline{N} = 1$.

از طرفی دیگر چون $\overline{y}_j^{-1}x_i\overline{y}_j, \overline{y}_jx_i\overline{y}_j^{-1} \in \overline{N}$ پس $\overline{N}$ زیرگروه نرمال $\overline{G}$ خواهد بود و لذا α به بروریختی $\overline{\alpha}\colon \frac{\overline{G}}{\overline{N}} \to \frac{G}{N}$ با ضابطه $\overline{\alpha}(\overline{y_i}\overline{N}) = y_iN$ توسیع می یابد. حال با توجه به اینکه تمام روابط y_jN از $s_j(yN)=1$ نتیجه می گردد $\overline{\alpha}$ یکریختی است بنابراین $K = 1$ بوده و $G \approx \overline{G}$ متناهی معرف است.

واریته های گروهها:

تعریف: فرض کنیم F گروهی آزاد با پایه شمارای نامتناهی $\{x_1,\ x_2,\dots\}$ و W زیرمجموعه ناتهی از لغات روی X باشد. فرض کنیم $w = x_{i_1}^{l_1}x_{i_2}^{l_2}\dots x_{i_r}^{l_r}$ عضوی دلخواه از W باشد. فرض کنیم G یک گروه دلخواه و $g_1, g_2, \dots, g_r \in G$ باشند. دراینصورت ارزش کلمه w در $(g_1, g_2, \dots, g_r)$ را با نماد $w(g_1, g_2, \dots, g_r)$ نشان داده و بصورت

$$w(g_1, g_2, \dots, g_r) = g_1^{l_1}\dots g_r^{l_r}$$

تعریف می کنیم.

تعریف: فرض کنیم G یک گروه دلخواه باشد. دراینصورت زیرگروه لغوی G به صورت $W(G)$ نشان داده و تعریف می کنیم:

$$W(G) =< w(g_1, g_2, \dots, g_r) :\ \ g_i \in G, w \in W >$$

مثال: اگر $W = \{[x_1,\ x_2]\}$ آنگاه $W(G) = G'$ زیرگروه مشتق G می باشد. همچنین اگر $W = \{x_1^n\}$ آنگاه $W(G) = G^n$ زیرگروه تولید شده توسط تمام توانهای n اعضای گروه می باشد.

تذکر: فرض کنیم $\alpha: G \rightarrow H$ یک همریختی باشد. دراینصورت برای هر لغت $w(g_1, g_2, \dots, g_r)$ در گروه G داریم $\left(w(g_1, g_2, \dots, g_r)\right)^{\alpha} = \left(w(g_1^{\alpha}, g_2^{\alpha}, \dots, g_r^{\alpha})\right)$. به ویژه هر زیرگروه لغوی یک گروه، کاملاً پایا است.

اثبات: بدیهی است که

$$\begin{aligned}\left(w(g_1, g_2, \dots, g_r)\right)^{\alpha} &= \alpha\left(w(g_1, g_2, \dots, g_r)\right) = w(\alpha(g_1), \alpha(g_2), \dots, \alpha(g_r)) \\ &= \left(w(g_1^{\alpha}, g_2^{\alpha}, \dots, g_r^{\alpha})\right)\end{aligned}$$

بنابراین حکم تمام است. برای قسمت انتهایی حکم کافی است قرار دهیم $G = H$.

تمرین ۲،۳،۳ نشان می دهد که تذکر بالا برای هر گروهی برقرار نیست. این حکم برای زیرگروههای لغوی یک گروه آزاد برقرار است که آنرا در قضیه بعدی نشان می دهیم.

۱-۳-۲ (B.H.Neumann): هر زیرگروه کاملاً پایا از یک گروه آزاد لغوی است.

اثبات: فرض کنیم F گروه آزاد روی مجموعه X باشد. فرض کنیم W زیرگروه کاملاً پایایی از F باشد. اگر $w(x_1,\dots,x_r) \in W$ عضوی باشد که در آن $x_i \in X$ و همچنین $f_1,\dots,f_r \in F$ باشند آنگاه درون ریختی $\alpha: F \rightarrow F$ موجود است که $\alpha(x_i) = f_i$. بنابراین

$$w(f_1,\dots,f_r) = w(\alpha(x_1),\dots,\alpha(x_r)) = \alpha(w(x_1,\dots,x_r)) \in \alpha(w) \subseteq W$$

پس $W(F) \subseteq W$. حال با توجه به اینکه عکس این رابطه همواره برقرار است، لذا $W(F) = W$.

زیرگروه حاشیه ای:

تعریف: فرض کنیم G یک گروه و W مجموعه ای از لغات باشد. دراینصورت زیرگروه نرمال N از G را W—حاشیه ای در G می نامیم برای هر $g_i \in G$ و هر $a \in N$ و هر $w(x_1,\dots,x_r) \in W$ داشته باشیم:

$$w(g_1, g_2, \dots, g_{i-1}, g_i a, g_{i+1}, \dots, g_r) = w(g_1, g_2, \dots, g_{i-1}, g_i, g_{i+1}, \dots, g_r).$$

با توجه به این تعریف ملاحظه می شود که زیرگروههای W—حاشیه ای در G یک زیرگروه نرمال تولید می کنند که آنرا زیرگروه W—حاشیه ای G نامیده و با نماد $W^*(G)$ نشان می دهند.

در واقع داریم:

$$\begin{aligned}W^*(G) = \{a \in G :\ & w(g_1, g_2, \dots, g_{i-1}, g_i a, g_{i+1}, \dots, g_r) \\ &= w(g_1, g_2, \dots, g_{i-1}, g_i, g_{i+1}, \dots, g_r), g_i \in G, w \in W, 1 \leq i \leq r\}.\end{aligned}$$

فرض کنیم $a, b \in W^*(G)$ دراینصورت:

(۱)
$$w(g_1, g_2, \dots, g_{i-1}, g_i ab, g_{i+1}, \dots, g_r) = w(g_1, g_2, \dots, g_{i-1}, g_i a, g_{i+1}, \dots, g_r) = w(g_1, g_2, \dots, g_{i-1}, g_i, g_{i+1}, \dots, g_r)$$

(۲)
$$w(g_1, g_2, \dots, g_{i-1}, g_i a^{-1}, g_{i+1}, \dots, g_r) = w(g_1, g_2, \dots, g_{i-1}, g_i, g_{i+1}, \dots, g_r)$$

از روابط فوق نتیجه می شود که $W^*(G)$ ناتهی است زیرا $\mathbf{1} \in W^*(G)$.برای اثبات نرمال بودن $W^*(G)$ فرض کنیم $a \in W^*(G)$ و $x \in G$. دراینصورت :

$$\begin{aligned}
&w(g_1, g_2, \dots, g_{i-1}, g_i x^{-1} a x, g_{i+1}, \dots, g_r) \\
&= w(x^{-1} x g_1 x^{-1} x,\ x^{-1} x g_2 x x^{-1}, \dots,\ x^{-1} x g_{i-1} x^{-1} x, x^{-1} x\ g_i x^{-1} a x, \dots, x^{-1} x\ g_r x^{-1} x) \\
&= x^{-1} w(x g_1 x^{-1},\ x g_2 x^{-1}, \dots, x g_{i-1} x^{-1}, x\ g_i x^{-1} a, \dots, x\ g_r x^{-1}) x \\
&= x^{-1} w(x g_1 x^{-1},\ x g_2 x^{-1}, \dots, x g_{i-1} x^{-1}, x\ g_i x^{-1}, \dots, x\ g_r x^{-1}) x \\
&= w(g_1, g_2, \dots, g_{i-1}, g_i, g_{i+1}, \dots, g_r).
\end{aligned}$$

مثال: فرض کنیم $W = \{[x,y]\}$ در این صورت $W^*(G) = Z(G)$. در واقع:

$$a \in Z(G) \Rightarrow [g_1, g_2 a] = g_1^{-1} a^{-1} g_2^{-1} g_1 g_2 a = g_1^{-1} g_2^{-1} g_1 g_2 = [g_1, g_2] \in W$$

برای عکس رابطه شمول داریم:

$$a \in W^*(G) \Rightarrow \forall g \in G, [g, a] = [g, 1a] = [g, 1] = 1 \Rightarrow a \in Z(G)$$

نکته: زیرگروه حاشیه ای همواره یک زیرگروه مشخصه است ولی با توجه به تمرین ۱-۵-۹ لزوماً کاملاً پایا نمی باشد. در واقع اگر فرض کنیم α یک خودریختی از گروه G باشد آنگاه ثابت می کنیم $\alpha(W^*(G)) \subseteq W^*(G)$.

برای اینکار فرض کنیم $\alpha(a) \in \alpha(W^*(G))$ دلخواه باشد. از طرفی با توجه به پوشا بودن αبرای اعضای $g_1, g_2, \dots, g_r$ از G داریم:

$$g_1, g_2, \dots, g_r \in G \Rightarrow \exists h_1, h_2, \dots, h_r \ :\ \alpha(h_i) = g_i.$$

بنابراین

$$\begin{aligned}
w(g_1, g_2, \dots, g_i \alpha(a), \dots, g_r) &= w\big(\alpha(h_1), \alpha(h_2), \dots, \alpha(h_i)\alpha(a), \dots, \alpha(h_r)\big). \\
&= \alpha\big(w(h_1, h_2, \dots, h_i a, \dots, h_r)\big) = \alpha\big(w(h_1, h_2, \dots, h_i, \dots, h_r)\big) \\
&= w\big(\alpha(h_1), \alpha(h_2), \dots, \alpha(h_i), \dots, \alpha(h_r)\big) = w(g_1, g_2, \dots, g_r).
\end{aligned}$$

قضیه زیر ارتباط بین زیرگروههای حاشیه ای و لغوی را نشان می دهد.

2.3.2 : فرض کنیم W یک مجموعه غیرخالی از واژه ها و G یک گروه دلخواه باشد. دراینصورت $W(G) = 1$ اگر و تنها اگر $W^*(G) = G$.

اثبات: بدیهی است که رابطه $W(G) = 1$ رابطه $W^*(G) = G$ را نتیجه می دهد زیرا برای هر $w \in W$ و هر $a \in G$ و هر $g_i \in G$ داریم

$$w(g_1, g_2, \dots, g_{i-1}, g_i a, g_{i+1}, \dots, g_r) = 1 = w(g_1, g_2, \dots, g_{i-1}, g_i, g_{i+1}, \dots, g_r).$$

برعکس: فرض کنیم $W^*(G) = G$. در اینصورت برای هر $w \in W$ و هر $g_1, \dots, g_r \in G$ داریم

$$g_i \equiv 1 \ (mod\ G) \Rightarrow w(g_1, g_2, \dots, g_r) = w(1, 1, \dots, \mathbf{1}) = 1.$$

پس $W(G) = 1$.

تعریف: یک واریته در واقع رده ای از گروهها است. به عبارت دقیقتر فرض کنیم W مجموعه ای از لغات باشد، دراینصورت واریته وابسته W را با نماد

$$\mathfrak{B}(W)=\{G\ :\ W(G)=1\}=\{G\ :\ W^*(G)=G\}.$$

همچنین W را مجموعه ای از قوانین برای وارینه $\mathfrak{B}(W)$ گویند. در واقع W را یک قانون برای G گوییم هرگاه برای هر $g_1,\dots,g_k\in G$ ، $w(g_1,\dots,g_k)=1$.

مثال: اگر $W=\{[x_1,\ x_2]\}$ آنگاه $\mathfrak{B}(W)$ رده تمام گروههای آبلی است. بنابراین W یک قانون برای G است اگر و تنها اگر G آبلی باشد.

مثال: فرض کنیم p یک عدد اول باشد. دراینصورت با فرض $W=\{[x_1,\ x_2],\ x_1^p\}$ وارینه $\mathfrak{B}(W)$ رده تمام گروههای با نمای ۱ و p هستند. درواقع $\mathfrak{B}(W)$ رده تمام $p-$ گروههای مقدماتی می باشند. با توجه به تمرین ۱،۴،۸ این گروهها حاصضرب مستقیم گروههای از مرتبه p هستند.

مثال: فرض کنیم n یک عدد طبیعی باشد. دراینصورت با فرض $W=\{\ x_1^n\}$ وارینه $\mathfrak{B}(W)$ رده تمام گروههای با نمای مقسوم علیه n هستند. این رده به وارینه برنساید از نمای n معروف است.

مثال: فرض کنیم $W=\{\ x_1\}$ باشد. دراینصورت وارینه $\mathfrak{B}(W)$ رده تمام گروههای از مرتبه ۱ هستند. همچنین با فرض $W=\{\ 1\}$ رده $\mathfrak{B}(W)$ رده تمام گروههای آبلی است.

تعریف: فرض کنیم $\mathfrak{X}$ یک خاصیت باشد. گوییم گروه G یک $\mathfrak{X}-$ گروه باقی مانده ای است هرگاه برای هر $g\in G$ ، اگر $g\neq 1$ آن گاه زیر گروه نرمال N_g از G موجود باشد که $g\notin N_g$ و $\frac{G}{N_g}$ در خاصیت $\mathfrak{X}$ صدق کند. مثلاً اگر $\mathfrak{X}$ خاصیت متناهی بودن باشد، آنگاه گوییم گروه G در خاصیت متناهی باقی مانده ای صدق می کند هرگاه برای هر $g\in G$ ، اگر $g\neq 1$ آن گاه زیر گروه نرمال N_g از G موجود باشد که $g\notin N_g$ و $\frac{G}{N_g}$ متناهی باشد.

مثال: گروههای متناهی، متناهی باقی مانده ای هستند.

مثال: $\mathbb{Z}$ متناهی باقی مانده ای است زیرا اگر $n(\neq 0)\in\mathbb{Z}$ آن گاه $n\notin(n+1)\mathbb{Z}$ و همچنین $\frac{\mathbb{Z}}{(n+1)\mathbb{Z}}\cong\mathbb{Z}_{(n+1)}$ متناهی است.

تعریف: فرض کنیم $\{G_\lambda\ :\ \lambda\in\Lambda\}$ خانواده ای از گروهها باشد گروه G را حاصلضرب دکارتی این خانواده می نامیم هرگاه یک تکریختی $\iota: G\to\prod_{\lambda\in\Lambda}G_\lambda$ موجود باشد بطوریکه برای هر $\lambda\in\Lambda$ هر عضو از G_λ در مؤلفه $\lambda-$ام عضوی از $Im(\iota)$ ظاهر شود. بعبارت دیگر

$$\forall\lambda\in\Lambda,\forall g_\lambda\in G_\lambda\ \exists g\in Im(\iota)\ :\ g\ \text{ام}-\lambda\ \text{مولفه}=g_\lambda.$$

مثال : $\mathbb{Z}$ حاصلضرب زیر دکارتی خانواده $\left\{\frac{\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}}\ :\ n(\neq 0)\in\mathbb{Z}\right\}$ است. در واقع نگاشت $\iota:\mathbb{Z}\to\prod_{n(\neq 0)\in\mathbb{Z}}\frac{\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}}$ را بصورت $\iota(m)=(m+n\mathbb{Z})_{n\in\mathbb{Z}}$ تعریف می کنیم. در این صورت ι یک تکریختی بوده و برای هر $n(\neq 0)\in\mathbb{Z}$ و هر $m+n\mathbb{Z}\in\frac{\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}}$ این عضو بر مؤلفه $n-$ ام عضو $\iota(m)$ قرار دارد.

۲-۳-۳ : گروه G یک $\mathfrak{X}$ — گروه باقی مانده ای است اگر و تنها اگر بصورت حاصلضرب زیر دکارتی $\mathfrak{X}$ — گروههای باقی مانده ای باشد.

اثبات: فرض کنیم G یک $\mathfrak{X}$ — گروه باقی مانده ای باشد. دراینصورت $\bigcap_{(g\neq 1)\in G} N_g = 1$. همچنین نگاشت $\iota: G \to \prod_{g(\neq 1)\in G} \frac{G}{N_g}$ را که توسط رابطه $\iota((x)_g) = xN_g$ تعریف می شود تکریختی است. همچنین هر عضو از $\frac{G}{N_g}$ در مؤلفه g—ام عضوی از $Im(\iota)$ ظاهر می شود.

برعکس: فرض کنیم Gحاصلضرب زیر دکارتی $\mathfrak{X}$ — گروههای باقی مانده ای $\{G_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ با تکریختی $\iota: G \to \prod_{\lambda\in\Lambda} G_\lambda$ باشد. حال برای هر $\lambda \in \Lambda$ قرار می دهیم $\iota_\lambda = \pi_\lambda \circ \iota$ که در آن $\pi_\lambda: \prod_{\lambda\in\Lambda} G_\lambda \to G_\lambda$ بروریختی تصویری به مؤلفه λ—ام است. همچنین برای هر $\lambda \in \Lambda$ قرار می دهیم $K_\lambda = Ker(\iota_\lambda)$. باتوجه به اینکه ι یک بیک است لذا $\bigcap_{\lambda\in\Lambda} K_\lambda = 1$. از طرفی با توجه به خاصیت ضرب زیردکارتی نگاشت $\iota_\lambda = \pi_\lambda \circ \iota: G \to G_\lambda$ پوشاست لذا $\frac{G}{K_\lambda} \cong Im(\iota_\lambda) = G_\lambda \in \mathfrak{X}$. حال اگر $g(\neq 1) \in G$ آنگاه داریم:

$$g(\neq 1) \in G \Rightarrow g \notin \bigcap_{\lambda\in\Lambda} K_\lambda \Rightarrow \exists \lambda \in \Lambda, \qquad g \notin K_\lambda.$$

بنابراین G یک $\mathfrak{X}$ — گروه باقی مانده ای است.

تمرینات صفحه ۵۴:

حل تمرین ۱:

می دانیم $S_3 =< (123), (121) >$. حال قرار می دهیم $x = (12)$ و $y = (123)$. دراینصورت داریم $x^2 = y^2 = 1\ ,\ yx = xy^{-1}$. همچنین به سادگی ملاحظه می شود که

$xy=(23)\ ,\ y^2=(132)\ ,\ xy^2=(13)$

$X=(12)\ ,\ Y=(123)$ و شش عضو S_3 می باشد اکنون گروه

$G=<x,y\,|\,x^2=y^3=1, yx=x^{-1}y>$ را در نظـــر مـــی گیـــریم و فـــرض کنـــیم $X=\{x,y\}$ و $R=\{x^2,y^3,xy,xyxy\}$.

تمرینات صفحه ۶۰:

حل تمرین ۲: اگر $W=\{x^2\}$ آنگاه $W(G)=<g^2\,|\,g\in G>=G^2$. همچنین داریم:

$$\begin{aligned}&W^*(G)\\&=\{a\in G\,|\,W(ga)=W(g)\ ,\ \forall g\in G\}\\&=\{a\in G\,|\,gaga=g^2\ \ ,\ \forall g\in G\}\\&=\{a\in G\,|\,aga=g\ \ ,\ \forall g\in G\}\\&=\{a\in G\,|\,ag=ag=ga^{-1}\ \ ,\ \forall g\in G\}\end{aligned}$$

حل تمرین ۳: فرض کنیم $W=\{\ x_1^3\}$ در این صورت W یک قانون برای Z_3 است. همچنین $W=\{\ x_1^2\}$ یک قانون برای Z_2 و $\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2$ (گروه چهار- کلاین) می باشد.

فصل ۳

تجزیه یک گروه

تعریف: فرض کنیم G یک گروه باشد. یک سری به صورت زیر از $\Omega-$ زیرگروههای G را یک $\Omega-$ سری به طول l می نامیم:

$$1 = G_0 \lhd G_1 \lhd \cdots \lhd G_l = G$$

در اینجا برای هر $l = 1,2,\dots,l$ گروه G_{i-1} در G_i نرمال است. G_i ها را جملات سری و $\frac{G_i}{G_{i-1}}$ را عوامل سری می نامیم.

تعریف: یک زیرگروه از گروه G را $\Omega-$ زیرنرمال نامند هرگاه جمله ای از یک $\Omega-$ سری باشد. بنابراین زیرگروه H از گروه G یک $\Omega-$ زیرنرمال است هرگاه زیرگروههای $\Omega-$ زیرنرمال متمایز $H_0 = H, H_1, \dots, H_n = G$ موجود باشند بطوریکه بین H و G یک $\Omega-$ سری موجود باشد. یعنی داشته باشیم: $H = H_0 \lhd H_1 \lhd \cdots \lhd H_n = G$.

تعریف: مجموعه تمام $\Omega-$ سریهای گروه G را در نظر می گیریم. به وضوح چنین سریهایی وجود دارند و سری $G \rhd 1$ کوچکترین آنهاست. حال اگر S و T دو $\Omega-$ سری از G باشند آنگاه S را تظریف T می نامیم هرگاه هر جمله از T جمله ای از S باشد. همچنین S را تظریف واقعی T می نامیم هرگاه S دارای جمله ای باشد که در T نیست.

تعریف: فرض کنیم S و T دو $\Omega-$ سری از G باشند. دراینصورت آنها را $\Omega-$ یکریخت نامیم هرگاه تناظر یک به یک بین عوامل دو سری چنان برقرار باشد که عوامل متناظر $\Omega-$ یکریخت باشند.

۳-۱-۱ (لم زاسنهاوس): فرض کنیم $\Omega-$ زیرگروههای A_1, A_2, B_1, B_2 از یک $\Omega-$ گروه مانند G موجود باشند بطوریکه $A_1 \lhd A_2$ و $B_1 \lhd B_2$. قرار می دهیم $D_{ij} = A_i \cap B_j$. در اینصورت $A_1 D_{21} \lhd A_1 D_{22}$ و $B_1 D_{12} \lhd B_1 D_{22}$. بعلاوه $\frac{A_1 D_{22}}{A_1 D_{21}}$ و $\frac{B_1 D_{22}}{B_1 D_{12}}$ هر دو $\Omega-$ یکریخت هستند.

اثبات: بدیهی است.

۳-۱-۲ (قضیه تظریف شرایر) : هر دو $\Omega-$ سری از یک $\Omega-$ گروه دارای تظریف های $\Omega-$ یکریخت هستند.

اثبات: فرض کنیم $1 = H_0 \lhd H_1 \lhd \ldots \lhd H_l = G$, $1 = K_0 \lhd K_1 \lhd \ldots \lhd K_m = G$ دو $\Omega-$ سری از گروه G باشند. قرار می دهیم $H_{ij} = H_i(H_{i+1} \cap K_j)$, $K_{ij} = K_j(H_i \cap K_{j+1})$. طبق لم قبل به ازای $A_1 = H_i$, $A_2 = H_{i+1}$, $B_1 = K_j$, $B_2 = K_{j+1}$ نتیجه می شود که $H_{ij} \lhd H_{ij+1}$, $K_{ij} \lhd K_{i+1j}$ و همچنین $\frac{H_{ij+1}}{H_{ij}} \approx \frac{K_{i+1j}}{K_{ij}}$. بنابراین دو سری $\{H_{ij} \mid i = 0,\dots,L \ , \ j = 0,\dots,m\}$ و $\{K_{ij} \mid i = 0,\dots,L \ , \ j = 0,\dots,m\}$

تظریف های Ω – یکریخت از دو سری اول هستند.

تعریف: یک Ω – سری را یک Ω – سری ترکیبی می نامیم هرگاه تظریف واقعی نداشته باشد.

تعریف: یک Ω – گروه را یک Ω – گروه ساده می نامیم هرگاه Ω – زیرگروه نرمال غیربدیهی نداشته باشد.

3-1-3 : یک Ω – سری، یک Ω – سری ترکیبی است اگر و تنها اگر عوامل این سری Ω – ساده باشند.

اثبات: فرض کنید G یک Ω – گروه و دارای یک Ω – سری ترکیبی I باشد که برخی از عوامل آن مانند $\frac{X}{Y}$ گروه Ω – ساده نباشند (فرض خلف). بنابراین $\frac{X}{Y}$ دارای یک Ω – زیرگروه نرمال غیربدیهی مانند $\frac{W}{Y}$ می باشد بطوریکه $Y < W < X$. حال با الحاق W به سری ترکیبی I یک سری تولید می شود که این سری تظریف حقیقی از G می باشد که تناقض است.

برعکس: اگر عوامل Ω – سری G ساده باشند ولی Ω – سری، Ω – سری ترکیبی نباشد (فرض خلف) در این صورت یک تظریف حقیقی وجود دارد بطوریکه جملات متوالی $Y < X$ شامل یک Ω – زیرگروه W می باشد که اکیداً بین X و Y قرار دارند. در اینصورت $\frac{W}{Y}$ یک Ω – زیرگروه نرمال $\frac{X}{Y}$ خواهد بود که تناقض با Ω – ساده بودن عاملها دارد.

۳-۱-۴ (قضیه ژوردان- هلدر): اگر S یک Ω – سری و T یک Ω – سری ترکیبی G باشد آنگاه S دارای تظریفی است که Ω – یکریخت با T است. بویژه هر دوسری ترکیبی از G یکریخت هستند.

اثبات: با توجه به قضیه ۳-۱-۲ سریهای S و T دارای تظریفهای Ω – یکریخت می باشند. اما S تظریف حقیقی ندارد بنابراین S با تظریفی از T، Ω – یکریخت می باشد. حال باتوجه به ۳-۱-۳ ، این تظریف یک Ω – سری ترکیبی است.

تعریف: فرض کنیم G یک گروه و $\Omega = Inn(G)$ باشد. دراینصورت اگر G در شرط ماکسیمال (مینیمال) صدق کند آن گاه می نویسیم G در شرط $\max-n(\min-n)$ صدق می کند. در این حالت Ω- سری را یک سری نرمال G می نامیم.

۳-۱-۵ : G دارای یک سری ترکیبی است اگر و تنها اگر در شرط $\max-\Omega s, \min-\Omega s$ صدق کند.

اثبات: فرض کنید G دارای یک Ω – سری ترکیبی به طول l باشد ولی لااقل در یکی از شرطهای $\max-\Omega s, \min-\Omega s$ صدق نکند. دراینصورت یک زنجیر نامتناهی از Ω – زیرگروههای زیرنرمال G به صورت $H_1 < H_2 < \cdots$ وجود دارد. حال زنجیر زیر را در نظر می گیریم:

$$1 \leq H_1 \leq H_2 \leq \cdots \leq H_{l+1}$$

با توجه به اینکه H_i یک زیرگروه Ω – زیرنرمال از G است، لذا Ω – زیرنرمال در H_{i+1} خواهد بود. بنابراین با افزودن جملات مناسب بین H_i و H_{i+1} و همچنین بین H_{l+1} و G یک Ω – سری

برای G به دست آورد. به این ترتیب یک سری از $\Omega -$ زیرگروههای زیرنرمال G با طول بیشتر از l وجود دارد که تناقض می باشد. به روش مشابه ثابت می شود که G در شرط $min-\Omega s$ صدق می کند.

برعکس: فرض کنیم G در شرط $min-\Omega s, max-\Omega s$ صدق کند ولی دارای $\Omega -$ سری ترکیبی نباشد (فرض خلف). مجموعه تمام $\Omega -$ زیرگروههای زیرنرمال واقعی G را در نظر می گیریم. با توجه به فرض این مجموعه دارای عضو ماکسیمال مانند G_1 می باشد، لذا $\frac{G}{G_1}$ گروهی $\Omega -$ ساده است. با توجه به اینکه G دارای $\Omega -$ سری ترکیبی نمی باشد لذا $G_1 \neq 1$. حال مجموعه تمام $\Omega -$ زیرگروههای زیرنرمال واقعی G_1 را در نظر می گیریم. این مجموعه دارای عضو ماکسیمال مانند G_2 می باشد، لذا $\frac{G}{G_2}$ گروهی $\Omega -$ ساده است و همچنین $G_2 \neq 1$. با توجه به اینکه این روند پایان پذیر نمی باشد، لذا با ادامه این روند زنجیر نامتناهی به صورت $\dots < G_2 < G_1 < G_0 = G$ از زیرگروههای زیرنرمال G می رسیم که با شرط $min-\Omega s$ در تناقض است.

۳-۱-۶: یک $\Omega -$ گروه در شرط $max-\Omega s$ صدق می کند تنها اگر هر $\Omega -$ زیرگروه آن یک $\Omega -$ گروه متناهی مولد باشد.

اثبات: فرض کنیم G در شرط $max-\Omega s$ صدق می کند و H یک $\Omega -$ زیرگروه آن باشد بطوریکه متناهی مولد نباشد (فرض خلف). بنابراین عضو $h_1 \in H$ وجود دارد بطوریکه $H_1 =< h_1 >^{\Omega} \neq H$. دوباره عضو $h_2 \in H\backslash H_1$ وجود دارد بطوریکه $H_1 \lneqq < h_1, h_2 >^{\Omega} \neq H$. همچنین عضو $h_3 \in H\backslash H_2$ وجود دارد بطوریکه $H_1 \lneqq H_2 \lneqq H_3 =< h_1, h_2, h_3 >^{\Omega} \neq H$. چون H متناهی مولد نیست لذا این روند تا بینهایت ادامه می یابد و لذا یک زنجیر صعودی نامتناهی از $\Omega -$ زیرگروههای G حاصل می شود که تناقض است.

برعکس: فرض کنیم هر $\Omega -$ زیرگروه G یک $\Omega -$ گروه متناهی مولد باشد ولی در شرط $max-\Omega s$ صدق نکند. بنابراین یک زنجیر نامتناهی به صورت $H_1 \lneqq H_2 \lneqq \cdots$ از $\Omega -$ زیرگروههای G وجود دارد. قرار می دهیم $H = \cup_{i\in\mathbb{N}} H_i$، دراینصورت H یک $\Omega -$ زیرگروه است و لذا متناهی مولد می باشد. بنابراین عناصر $x_1, x_2, \dots, x_i \in H$ وجود دارند بطوریکه $H =< x_1, x_2, \dots, x_i >^{\Omega}$. حال می توان عدد طبیعی n را آنقدر بزرگ اختیار کرد که تمام x_i در H_n قرار گیرد. بنابراین $H = H_n$ که تناقض است.

۳-۱-۷ : ویژگیهای $min-\Omega s, max-\Omega s$ و $min-\Omega, max-\Omega$ نسبت به توسیع بسته می باشند. بعبارت دیگر اگر N زیرگروه نرمالی از G باشد بطوریکه N و $\frac{G}{N}$ دارای ویژگی های مفروض باشند آنگاه G نیز همین ویژگی را دارد.

اثبات: برهان را برای حالت $max-\Omega s$ ارایه می دهیم. فرض کنیم $N \lhd G$ و G یک $\Omega -$ گروه

و N یک $\Omega-$ زیرگروه باشد. فرض کنیم $\frac{G}{N}, N$ هر دو در شرط $max - \Omega s$ صدق کنند ولی G این ویژگی

را نداشته باشد. بنابراین یک زنجیر صعودی نامتناهی مانند $\cdots \subsetneqq H_2 \subsetneqq H_1$ از زیرگروههای $\Omega-$ زیرنرمال

G وجود دارد . از طرفی $H_i \cap N$ یک زیرگروه $\Omega-$ زیرنرمال N و نیز $\frac{H_i N}{N}$ یک زیرگروه $\Omega-$ زیرنرمال

$\frac{G}{N}$ می باشد، لذا عدد صحیح مثبت r وجود دارد بطوریکه

$$H_r \cap N = H_{r+1} \cap N, \qquad H_r N = H_{r+1} N.$$

حال با توجه به تمرین ۱-۳-۱۶ داریم $H_r = H_{r+1}$.

تمرینات صفحه ۶۸:

حل تمرین ۱: فرض کنیم $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_n^{\alpha_n} = q_1^{\beta_1} q_2^{\beta_2} \dots q_s^{\beta_s}$ دو تجزیه برای عدد صحیح n

باشد. قرار می دهیم:

$$G_n = \mathbb{Z}_n, \qquad G_{n-1} = < p_1^{(\alpha_1-1)} p_2^{\alpha_2} \dots p_n^{\alpha_n} >, \dots, G_{n-\alpha_1} = < p_2^{\alpha_2} \dots p_n^{\alpha_n} >, \dots$$

دراینصورت دنباله زیر حاصل می شود:

$$G_n \supseteq G_{n-1} \supseteq \cdots \supseteq G_{n-(\alpha_1+\cdots\alpha_n)} = 1$$

توجه می کنیم که این دنباله یک سری ترکیب است زیرا برای هر عدد t که $1 \leq t \leq n$ داریم:

$\left|\frac{G_{i+1}}{G_i}\right| = p_t$. با شکیل سری مشابهی با اعداد اول q_i می توان سری ترکیب دیگری برای $\mathbb{Z}_n$

به دست آورد. حال با توجه قضیه ژردان-هلدر این دو سری باید یکریخت باشند پس: $\frac{G_{i+1}}{G_i} \cong \frac{H_{j+1}}{H_j}$ درنتیجه

$p_t = q_s$. بنابراین عامل های اول تجزیه با هم برابرند.

حل تمرین ۲:

سریهای ترکیب زیر را برای S_3 و $\mathbb{Z}_6$ در نظر می گیریم:

$$0 \lhd <(12)> \lhd S_3, \quad 0 \lhd <\bar{2}> \lhd \mathbb{Z}_6$$

حال داریم:

$$\frac{S_3}{<(12)>} \cong \mathbb{Z}_3 \cong \frac{<\bar{2}>}{0}, \quad \frac{\mathbb{Z}_6}{<\bar{2}>} \cong \mathbb{Z}_3 \cong \frac{<(12)>}{0}.$$

حل تمرین ۴:

فرض کنیم سری زیر یک سری ترکیب برای G باشد:

$$1 = G_0 \lhd G_1 \lhd \cdots \lhd G_l = G$$

بنابراین سری زیر یک سری ترکیب برای H خواهد بود:

$$1 = G_0 \cap H \lhd G_1 \cap H \lhd \cdots \lhd G_l \cap H = H$$

درواقع داریم:

$$G_i \lhd G_{i+1} \Rightarrow G_i \cap H \lhd G_{i+1} \cap H \Rightarrow \frac{G_{i+1} \cap H}{G_i \cap H} \cong \frac{(G_{i+1} \cap H)G_i}{G_i} \leq \frac{G_{i+1}}{G_i}$$

حال باتوجه به اینکه $\frac{G_{i+1}}{G_i}$ گروهی ساده است پس $\frac{G_{i+1} \cap H}{G_i \cap H}$ نیز چنین است.

حل تمرین ۷:

فرض کنیم $\{p_1, p_2, \dots, p_n, \dots\}$ مجموعه تمام اعداد اول باشند. همچنین فرض کنیم $g \in G$ عضو دلخواهی از گروه G باشد. دنباله نزولی زیر از زیرگروههای G را در نظر می گیریم:

$$< p_1 g > \supseteq < p_1 p_2 g > \supseteq \cdots \supseteq < p_1 p_2 \dots p_n g > \supseteq \cdots$$

با توجه به اینکه گروه G در شرط مینیموم روی زیرگروهها صدق می کند، لذا عدد طبیعی n وجود دارد بطوریکه $< p_1 p_2 \dots p_n g > = < p_1 p_2 \dots p_n p_{n+1} g >$. بنابراین:

$$p_1 p_2 \cdots p_n g \in < p_1 p_2 \cdots p_n p_{n+1} g > \Rightarrow \exists k \in \mathbb{Z}, \quad p_1 p_2 \cdots p_n g = p_1 p_2 \cdots p_n p_{n+1} g$$

$$\Rightarrow (1 - k p_{n+1}) p_1 p_2 \dots p_n g = 0$$

فصل ۵

گروههای حل پذیر و پوچ توان

تعریف: فرض کنیم G یک گروه باشد. دراینصورت آن را حلپذیر گوییم هرگاه دارای یک سری آبلی باشد، بدین معنی که یک سری بصورت $1=G_0 \lhd G_1 \lhd \ldots \lhd G_n = G$ موجود باشد که در آن عوامل $\frac{G_{i+1}}{G_i}$ گروههای آبلی باشند.

مثال: هر گروه آبلی حلپذیر است. درواقع دارای سری آبلی $1 \lhd G$ می باشد. همچنین S_3 نیز دارای سری $1 \lhd A_3 \lhd S_3$ می باشد، لذا یک گروه غیر آبلی حلپذیر است.

مثال: اگر $u=<(1,2)(3,4)>$ و $v=<(1,2)(3,4)(4,1)>$. دراینصورت S_4 دارای سری $1 \lhd u \lhd v \lhd S_4$ است.

تعریف: فرض کنیم G یک گروه حلپذیر باشد. دراینصورت طول کوچکترین سری آبلی را طول مشتق G می نامیم.

بنابراین G دارای طول مشتق صفر می باشد اگر و تنها اگر از مرتبه ۱ باشد. همچنین G دارای طول مشتق حداکثر یک می باشد اگر و تنها اگر آبلی باشد. یک گروه با طول مشتق حداکثر ۲ را یک گروه متاآبلی نامند.

۵-۱-۱ : رده تمام گروههای حلپذیر نسبت به زیرگروه، تصویر و توسیع بسته است.

اثبات: فرض کنیم G یک گروه حلپذیر با سری آبلی $1=G_0 \lhd G_1 \lhd \ldots \lhd G_n = G$ باشد. فرض کنیم H زیرگروهی از G باشد. در اینصورت با توجه به دومین قضیه یکریختی داریم:

$$\frac{G_{i+1}\cap H}{G_i \cap H} \approx \frac{(G_{i+1}\cap H)G_i}{G_i} \leq \frac{G_{i+1}}{G_i}.$$

این نشان می دهد که $\{H\cap G_i \ : \ i=0,1,\ldots,n\}$ یک سری آبلی برای H است، لذا H حلپذیر است.

حال فرض کنیم $N \lhd G$. ثابت می کنیم $\frac{G}{N}$ نیز حل پذیر است. برای اینکار توجه می کنیم که

$$\frac{G_{i+1}N}{G_iN} \cong \frac{G_{i+1}}{G_{i+1}\cap (G_iN)}.$$

که در واقع تصویری از $\frac{G_{i+1}}{G_i}$ می باشد. حال با توجه به سومین قضیه یکریختی:

$$\left\{\frac{G_iN}{N} \ : \ i=0,1,\ldots,n\right\}$$

یک سری آبلی برای $\frac{G}{N}$ است، لذا $\frac{G}{N}$ حلپذیر است. قسمت سوم قضیه بدیهی است.

۲-۱-۵ : حاصلضرب دو زیرگروه نرمال حلپذیر یک گروه، حلپذیر است.

اثبات: فرض کنید M و N دو زیرگروه نرمال حلپذیر از گروه G باشند. بنابر ۱-۱-۵ $\frac{M}{M \cap N} \cong \frac{MN}{N}$ حلپذیر است. بنابراین MN نیز حلپذیر است.

تعریف: فرض کنیم G یک گروه باشد. دراینصورت G را پوچتوان گوییم هرگاه یک سری مرکزی داشته باشد. یعنی دارای یک سری نرمال $1 = G_0 \lhd G_1 \lhd \ldots \lhd G_n = G$ باشد بطوریکه برای هر $i = 0,\ldots,n-1$ داشته باشیم $\frac{G_{i+1}}{G_i} \leq Z(\frac{G}{G_i})$. طول کوچکترین سری مرکزی G را رده پوچ توانی G می نامیم.

مثال: گروههای پوچتوان از رده پوچتوانی صفر همان گروههای از مرتبه ۱ هستند. گروههای پوچتوان از رده پوچتوانی یک همان گروههای از مرتبه ۱ هستند. هر گروه پوچتوان حلپذیر است زیرا هر سری مرکزی یک سری آبلی است. اما برعکس آن لزوماً برقرار نیست. مثلاً S_3 حلپذیر است اما پوچتوان نیست زیرا $Z(S_3) = 1$ (مرکز هر گروه پوچتوان نابدیهی است).

تذکر: اگر $1 = G_0 \lhd G_1 \lhd \ldots \lhd G_n = G$ یک سری مرکزی برای G باشد، آنگاه طبق تعریف داریم $1 \neq \frac{G_1}{G_0} \leq Z(\frac{G}{G_0})$. پس $Z(\frac{G}{G_0}) \neq 1$ لذا $Z(G) \neq 1$ باشد. بنابراین نتیجه می شود که اگر $Z(G) = 1$ آنگاه G پوچتوان نیست.

۳-۱-۵: هر $p-$ گروه متناهی پوچتوان است.

اثبات: فرض کنیم G یک $p-$ گروه متناهی باشد. دراینصورت اثبات را به استقرا روی مرتبه گروه انجام می دهیم.

اگر $|G| = 1$ آنگاه حکم برقرار است. لذا فرض کنیم $|G| = n > 1$ و حکم برای $p-$ گروههای با مرتبه کمتر از n درست باشد. با توجه به ۱-۶-۱۴ داریم $Z(G) \neq 1$، لذا $|\frac{G}{Z(G)}| < |G|$. درنتیجه طبق فرض استقرا $\frac{G}{Z(G)}$ پوچتوان است. فرض کنیم

$$1 = \frac{G_0}{Z(G)} \lhd \frac{G_1}{Z(G)} \lhd \ldots \lhd \frac{G_n}{Z(G)} = \frac{G}{Z(G)}$$

یک سری مرکزی برای $\frac{G}{Z(G)}$ باشد. آنگاه $1 \lhd G_0 \lhd \ldots \lhd G_n = G$ یک سری مرکزی برای G است.

درواقع چون $\frac{\frac{G_{i+1}}{Z(G)}}{\frac{G_i}{Z(G)}} \cong \frac{G_{i+1}}{G_i}$ لذا پوچتوانی G نتیجه می شود.

۵-۱-۴ : رده تمام گروههای پوچتوان نسبت به زیرگروه، تصویر همریخت و حاصلضرب مستقیم متناهی بسته است.

اثبات: قسمت اول و دوم مشابه قضیه حلپذیر ثابت می شود. حال اگر G و H پوچتوان باشند و $1 = G_0 \lhd \ldots \lhd G_n = G$ و $1 = H_0 \lhd H_1 \ldots \lhd H_n = H$ دو سری مرکزی برای G و H باشند، آنگاه سری $1 = G_0 \times H_0 \lhd G_1 \times H_0 \lhd \ldots \lhd G_n \times H_0 \lhd G_n \times H_1 \lhd \ldots \lhd G_n \times H_n = 1$ یک سری مرکزی برای $G \times H$ خواهد بود.

جابجاگرها

فرض کنیم G یک گروه و $x_1, x_2, \ldots$ اعضای G باشند. دراینصورت جابجاگر x_1 و x_2 را با نماد $[x_1,x_2]$ نشان داده و به صورت $[x_1,x_2] = x_1^{-1}x_2^{-1}x_1x_2$ تعریف می کنیم. این جابجاگر را از وزن ۲ نامیده و به طور کلی اگر $n \geq 2$ آن گاه

$$[x_1,\ldots,x_n] = [[x_1,\ldots,x_{n-1}],x_n]$$

را یک جابجاگر به وزن n می نامیم. طبق قرارداد $[x_1] = x_1$ و $[x,_n y] = [x,\underbrace{y,y,\ldots,y}_{n}]$.

حال برخی از خواص مقدماتی جابجاگرها را بیان می کنیم:

۵-۱-۵ : فرض کنیم G یک گروه و $x,y,z \in G$ باشند. دراینصورت داریم:

1) $[x,y] = [y,x]^{-1}$

2) $[xy,z] = [x,z]^y[y,z], \quad [x,yz] = [x,z].[x,y]^z$

3) $[x,y^{-1}] = ([x,y]^{y^{-1}})^{-1}, \ [x^{-1},y] = ([x,y]^{x^{-1}})^{-1}$

4) $[x,y^{-1},z]^y[y,z^{-1},x]^z[z,x^{-1},y]^x = 1$

اثبات: با جایگذاری حاصل می شوند.

تعریف: فرض کنیم $X_1, X_2, \ldots$ زیرمجموعه های ناتهی گروه G باشند. دراینصورت زیرگروه جابجاگر X_1 و X_2 را با نماد $[X_1,X_2]$ نشان داده و تعریف می کنیم:

$$[X_1,X_2] = \langle [x_1,x_2] : x_1 \in X_1, x_2 \in X_2 \rangle.$$

به طور کلی اگر $n \geq 2$ آنگاه تعریف می کنیم:

$$[X_1,\dots,X_n]=[[X_1,\dots,X_{n-1}],X_n]$$

و $[X_1]=<X_1>$. توجه می کنیم که با توجه به قسمت ۲ از ۵-۱-۵ داریم: $[X_1,X_2]=[X_2,X_1]$. بعلاوه برای سهولت می نویسیم $[X,_n Y]=[X,\underbrace{Y,Y,\dots,Y}_{n}]$.

همچنین تعریف می کنیم $X_1^{X_2}=<x_1^{x_2}=x_2^{-1}x_1x_2 \ : \ x_1\in X_1,\ x_2\in X_2>$. حال اگر $H\leq G$ و $X\subseteq G$، آنگاه $X\subseteq X^H \lhd <X,H>$. بنابراین $X^H=X^{<X,H>}$ بستار نرمال X در $<X,H>$ می باشد.

۵-۱-۶: فرض کنیم X زیرمجموعه و K زیرگروه یک گروه باشند. دراینصورت:

1) $X^K=<X,[X,K]>$.

2) $[X,K]^K=[X,K]$.

3) $[X,<Y>]=[X,Y]^K$.

۵-۱-7: فرض کنیم H و K زیرگروههای یک گروه باشند بطوریکه $H=<X>$, $K=<Y>$. دراینصورت $[H,K]=[X,Y]^{HK}$.

سری مشتق

تعریف: فرض کنیم G یک گروه باشد. دراینصورت سری مشتق G بصورت زیر تعریف می شود:

$$G=G^{(0)}\geq G^{(1)}\geq G^{(2)}\geq\dots$$

که در آن $G'=G^{(1)}=[G,G]$, $G^{n+1}=[G^{(n)},G^{(n)}]$. توجه می کنیم که برای هر عدد طبیعی n گروه $\frac{G^{(n)}}{G^{(n+1)}}$ آبلی است.

۵-۱-۸ : اگر $1=G_0\lhd\dots\lhd G_n=G$ یک سری آبلی برای گروه حل پذیر G باشد آنگاه برای هر $i=0,\dots,n$ داریم $G^{(i)}\leq G_{n-i}$. بویژه $G^{(n)}=1$، پس طول مشتق G برابر با طول سری مشتق G است.

اثبات: حکم را به استقرا روی (i) ثابت می کنیم.

اگر $i=0$ آنگاه حکم واضح است زیرا $G=G^0\subseteq G_n=G$. حال فرض کنیم حکم برای i درست باشد ثابت می کنیم برای $i+1$ نیز برقرار است. داریم:

$$G^{i+1}=(G^i)'\subseteq(G_{n-i})'\subseteq G_{n-(i+1)}$$

در واقع رابطه شمول نهایی از این واقعیت نتیجه می شود که چون $\frac{G_{n-i}}{G_{n-(i+1)}}$ آبلی است پس $(G_{n-i})'\leq G_{n-(i+1)}$.

تذکر: فرض کنیم G یک گروه باشد. دراینصورت G حلپذیر است اگر و تنها اگر عدد طبیعی n موجود باشد بطوریکه $G^{(n)}=1$.

سری مرکزی بالایی و پایینی:

تعریف: فرض کنیم G یک گروه باشد. قرار می دهیم:

$$\gamma_1(G)=G,\ \ \gamma_2(G)=[G,G]\ \ ,\ \ \gamma_{n+1}(G)=[\gamma_n(G),G].$$

در اینصورت یک سری نزولی بصورت زیر از زیرگروههای G تشکیل می شود:

$$G=\gamma_1(G)\geq\gamma_2(G)\geq\gamma_3(G)...$$

که به سری مرکزی پایینی معروف است.

با استقرا ثابت می شود که برای هر عدد طبیعی n داریم: $\frac{\gamma_n(G)}{\gamma_{n+1}(G)}\leq Z(\frac{G}{\gamma_{n+1}(G)})$. همچنین $\gamma_n(G)$ یک زیرگروه کاملاً پایای G است. درواقع اگر $f:G\to G$ یک همریختی دلخواه باشد، آنگاه ثابت می کنیم $f(\gamma_{n+1}(G))\subseteq\gamma_{n+1}(G)$. داریم:

$$\forall g\in\gamma_n(G)\ ,\ h\in G\ ,\ f[g,h]=[f(g),f(h)]\in[\gamma_n(G,G)]=\gamma_{n+1}(G)$$

لذا حکم حاصل می شود.

تعریف: فرض کنیم G یک گروه باشد. قرار می دهیم:

$$\zeta_0(G)=1,\zeta_1(G)=Z(G),\frac{\zeta_{n+1}(G)}{\zeta_n(G)}=Z\left(\frac{G}{\zeta_n(G)}\right).$$

در اینصورت یک سری صعودی بصورت زیر از زیرگروههای G تشکیل می شود:

$$1=\zeta_0(G)\leq\zeta_1(G)\leq\cdots,$$

که به سری مرکزی بالایی معروف است. توجه می کنیم که هر $\zeta_n(G)$ زیرگروه مشخصه است ولی لزوماً کاملاً پایا نیست.

تذکر: فرض کنیم G یک گروه پوچتوان باشد. دراینصورت مرکز G غیربدیهی است.

اثبات: اگر G آبلی باشد حکم تمام است. در غیر اینصورت یک سری مرکزی بصورت $1=G_0\lhd G_1\lhd...\lhd G_n=G$ وجود دارد. پس $G_1\leq Z_1(G)=Z(G)$ لذا $Z(G)\neq1$.

۹-۱-۵: فرض کنیم $1=G_0\lhd G_1\lhd...\lhd G_n=G$ یک سری مرکزی برای گروه پوچتوان G باشد. در اینصورت

۱- برای هر $1\leq i<n+1$, $\gamma_i(G)\leq G_{n-i+1}$ و بویژه $\gamma_{n+1}(G)=1$.

۲- برای هر $i=1,...,n$, $G_i\leq\zeta_i(G)$ و بویژه $\zeta_n(G)=G$.

۳- رده پوچتوانی G = طول سری مرکزی بالایی = طول سری مرکزی پایینی

اثبات: حکم را به استقرا روی i ثابت می کنیم.

اگر $i=1$ آن گاه $G=\gamma_1(G)\leq G_n=G$.

حال فرض کنیم حکم برای i درست باشد. در اینصورت با توجه به اینکه $\frac{G_{n-i+1}}{G_{n-i}} \subseteq Z(\frac{G}{G_{n-i}})$ لذا $[G_{n-i+1}, G] \subseteq G_{n-i}$. در واقع اگر $g \in G_{n-i+1},\ x \in G$ آنگاه $g + G_{n-i} \in Z(\frac{G}{G_{n-i}})$ لذا خواهیم داشت $gx + G_{n-i} = xg + G_{n-i}$. پس

$$[g, x] \in G_{n-i} \Rightarrow [G_{n-i+1}, G] \subseteq G_{n-i}[G_{n+i-1}, G] \subseteq G_{n+i}.$$

در نهایت داریم: $\gamma_{i+1}(G) = [\gamma_i(G), G] \subseteq [G_{n-i+1}, G] \subseteq G_{n-i}$.

اثبات ۲:

اثبات ۳: از قسمت ۱ و ۲ نتیجه می شود. درواقع اگر گروهی پوچتوان باشد، طول سری پایینی و طول سری مرکزی و بالایی با هم برابر است.

۵-۱-۱۰ (لم سه زیرگروه) : فرض کنیم K، H و L سه زیرگروه G باشند. اگر زیرگروه نرمالی از G شامل دو زیرگروه جابجاگر از بین زیرگروههای $[H,K,L]$, $[K,L,H]$, $[L,H,K]$ باشد، آنگاه شامل زیرگروه سومی نیز خواهد بود.

اثبات: باتوجه به ۵-۱-۷ گروه $[H,K,L]$ توسط مزدوج های جابجاگر به شکل $[h,k^{-1},l]$ تولید می گردد که در آن $h \in H\ ,\ k \in K\ ,\ l \in L$. حال با توجه به ۵-۱-۵ اگر زیرگروه نرمالی شامل دو جابجاگر از سه جابجاگر $[h,k^{-1},l]$, $[l,h^{-1},k]$, $[k,l^{-1},h]$ باشد، سومی نیز چنین خواهد بود.

۵-۱-۱۱ : فرض کنیم G یک گروه باشد. در اینصورت برای اعداد صحیح مثبت i, j داریم:

1) $[\gamma_i(G), \gamma_j(G)] \subseteq \gamma_{i+j}(G)$.

2) $\gamma_i(\gamma_j(G)) \subseteq \gamma_{ij}(G)$.

3) $[\gamma_i(G), Z_j(G)] \subseteq \zeta_{j-i}(G), \quad j \geq i$

4) $\zeta_i(\frac{G}{\zeta_j(G)}) = \frac{\zeta_{i+j}(G)}{\zeta_j(G)}$.

۵-۱-۱۲: فرض کنیم G یک گروه باشد. در اینصورت $G^{(i)} \leq \gamma_{2^i}(G)$. به ویژه اگر G پوچتوان از رده حداکثر c باشد، آنگاه طول سری مشتق G حداکثر $[\log_2^c]+1$ خواهد بود.

اثبات: بخش اول از ۵-۱-۱۱، قسمت ۲ نتیجه می شود. در واقع با استفاده از استقرا داریم:

$$G^{i+1} = [G^i, G^i] = \gamma_2(G^i) \subseteq \gamma_2(\gamma_{2^i}(G)) \subseteq \gamma_{2^{i+1}}(G) \subseteq \gamma_{n+1}(G) = 1.$$

حال فرض کنیم G پوچتوان از رده $c > 0$ باشد. همچنین فرض کنیم d طول رده مشتق G باشد. دراینصورت با فرض $2^i \geq c+1$ داریم: $G^{(i)} \leq \gamma_{2^i}(G) \leq \gamma_{c+1}(G) = 1$. کوچکترین چنین عدد i برابر $[\log_2^c]+1$ است که در آن $d \leq [\log_2^c]+1$.

۵-۲-۱: فرض کنیم G یک گروه پوچتوان و N یک زیرگروه نرمال غیربدیهی آن باشد. دراینصورت $N \cap \zeta(G) \neq 1$.

اثبات: باتوجه به فرض عدد صحیح مثبت c وجود دارد بطوریکه $\zeta_c(G) = G$. بنابراین عددی چون $i \geq 1$ موجود است که $N \cap \zeta_i(G) \neq 1$. فرض کنیم i کوچکترین چنین عددی باشد، لذا $N \cap \zeta_{i-1}(G) = 1$. حال داریم $[N \cap \zeta_i(G), G] \leq N \cap \zeta_{i-1}(G) = 1$ و $N \cap \zeta_i(G) \leq N \cap \zeta_1(G)$. بنابراین $N \cap \zeta_1(G) = N \cap \zeta_i(G) \neq 1$.

۵-۲-۲ : هر زیرگروه نرمال مینیمال از یک گروه پوچتوان در مرکز گروه قرار دارد.

اثبات: فرض کنیم G یک گروه و N زیرگروه نرمال مینیمال آن باشد. در اینصورت $N \cap \zeta(G) \neq 1$. از طرفی $N \cap \zeta(G)$ زیرگروه نرمال G است پس مینیمال بودن N $N \cap \zeta(G) \subseteq N$. بنابراین $N \cap \zeta(G) = N$. پس $N \subseteq \zeta(G)$.

۵-۲-۳ : فرض کنیم A یک زیرگروه نرمال آبلی ماکسیمال گروه پوچتوان G باشد. دراینصورت $A = C_G(A)$.

اثبات: چون A آبلی است لذا $A \leq C = C_G(A)$. حال فرض کنیم $A \neq C_G(A)$. دراینصورت $\frac{C_G(A)}{A}$ یک زیرگروه نرمال غیربدیهی از گروه پوچتوان $\frac{G}{A}$ خواهد بود لذا طبق ۵-۲-۱ داریم:

$$\exists\, xA \in \left(\frac{C}{A}\right) \cap \zeta\left(\frac{G}{A}\right), \qquad x \notin A.$$

حال توجه می کنیم که $< x, A >$ یک زیرگروه آبلی G است که در آن نرمال نیز می باشد زیرا $\frac{<x,A>}{A} \leq \zeta\left(\frac{G}{A}\right)$. بنابراین $< x, A >$ یک زیرگروه آبلی نرمال G است که شامل A می باشد. ولی چون A ماکسیمال است پس $< x, A > = A$ لذا $x \in A$ که یک تناقض است.

۵-۲-۸ (قضیه فیتینگ): فرض کنیم M و N زیرگروههای نرمال و پوچتوان گروهی مانند G به ترتیب از رده های پوچتوانی c و d باشند. دراینصورت $L = MN$ نیز پوچتوان از رده حداکثر $c + d$ خواهد بود.

اثبات: به استقرا روی i نشان می دهیم که $\gamma_{i+1}(L)$ بصورت حاصلضربی از زیرگروههای جابجاگر به صورت $[X_1, \ldots, X_{i+1}]$ است که X_j ها برابر M یا N هستند. برای اینکار داریم:

$$
\begin{aligned}
&\gamma_{i+1}(L)\\
&=[\gamma_i(L),L]\\
&=[\gamma_i(L),MN]\\
&=[\gamma_i(L),M][\gamma_i(L),N]\\
&=[\gamma_{i-1}(L),MN,M][\gamma_{i-1}(L),MN,N]\\
&=[[(\gamma_{i-1}(L),M][\gamma_{i-1}(L),N],M][[\gamma_{i-1}(L),M][\gamma_{i-1}(L),N],N]\\
&=[\gamma_{i-1}(L),M,M][\gamma_{i-1}(L),N,M][\gamma_{i-1}(L),M,N][\gamma_{i-1},N,N]
\end{aligned}
$$

حال اگر $i=c+d+1$ آنگاه در عبارت $[X_1,...,X_i]$ ، M به تعداد $c+1$ بار یا N ، $d+1$ بار تکرار شده است. پس $[X_1,...,X_i]$ باید شامل $\gamma_{c+1}(M)$ یا $\gamma_{d+1}(N)$ باشد که هر دو ۱ هستند. لذا $[X_1,...,X_i]=1$ پس $\gamma_i(L)=1$ یعنی L پوچتوان از رده حداکثر $c+d$ است.

زیرگروههای فیتینگ:

تعریف: فرض کنیم G یک گروه باشد. دراینصورت زیرگروه تولید شده توسط زیرگروههای نرمال پوچتوان G را زیرگروه فیتینگ G نامیده و با $Fit(G)$ نشان می دهیم.

تذکر: اگر G یک گروه متناهی باشد یا در شرط ماکسیمال برای زیرگروههای نرمال صدق کند آنگاه $Fit(G)$ یک زیرگروه نرمال و پوچتوان از G خواهد بود. همچنین اگر G حلپذیر باشد آ نگاه $Fit(G)$ شامل کوچکترین جمله غیربدیهی سری مشتق G است، بنابراین در یک گروه حلپذیر $Fit(G)$ غیربدیهی است.

۹-۲-۵: فرض کنیم G یک گروه متناهی باشد. دراینصورت $Fit(G)$ برابر با اشتراک تمام مرکزسازهای عوامل اصلی G است.

اثبات: فرض کنیم

$$1=G_0 \lhd G_1 \lhd \cdots \lhd G_l = G$$

یک سری اصلی G باشد. قرار می دهیم $I=\bigcap_{i=0}^{n-1} C_G(\frac{G_{i+1}}{G_i})$. در اینصورت برای هر $i=1,...,n-1$ داریم $[G_{i+1},I]\le G_i$. در واقع اگر $g\in G_{i+1}$, $x\in I$ آنگاه

$$xgG_i=gxG_i \to [g,x]=g^{-1}x^{-1}gx\in G_i .$$

بنابراین نتیجه می شود $\gamma_{n+1}(I)=1$ پس I پوچتوان است. همچنین I در G نرمال است. بنابراین $I\le F=Fit(G)$.

برعکس با توجه به اینکه $[G_1,F]\lhd G$ و $[G_1,F]\le G_1$، لذا نرمال مینیمال بودن G_1 در G ایجاب می کند که $[G_1,F]=G_1$ یا $[G_1,F]=1$. اگر $[G_1,F]=G_1$ آنگاه عدد c وجود دارد بطوریکه $G_1\le\gamma_{c+1}(F)=1$ که تناقض است (زیرا G_1 بدیهی نیست). بنابراین $[G_1,F]=1$ و لذا $F\le G_G(\frac{G_1}{G_2})$. به همین ترتیب به استقرا

روی i مـــی تـــوان نشـــان داد کـــه $\frac{G_1F}{G_1}$ و در نتیجـــه F در مرکزســـاز $\frac{G_{i+1}}{G_i}$ قـــرار دارد. بنـــابراین $F \le \bigcap_{i=0}^{n-1} C_G(\frac{G_{i+1}}{G_i})$.

تعریف: فرض کنیم G یـک گروه باشـد. دراینصـورت اشتراک تمـام زیرگروههـای ماکسیمال G را زیرگروه فراتینی G نامیده و با نماد $Frat(G)$ نمایش می دهیم. اگر G زیرگروه ماکسیمال نداشته باشد آنگاه قرار می دهیم: $Frat(G) = G$.

مثال: $Frat(\mathbb{Z}) = \{0\}$.

تعریف: فرض کنیم G یک گروه باشد. عضو $g \in G$ را یک نامولد گوییم اگر برای هر زیرمجموعه X از G از رابطه $G =< g, X >$ نتیجه شود $G =< X >$.

۵-۲-۱۲ (فراتینی) : فرض کنیم G یک گروه باشد. دراینصورت $Frat(G)$ دقیقاً متشکل از اعضـای نامولد در G است.

اثبـات: فـرض کنـیم $g \in Frat(G)$ دلخـواه باشـد. اگـر g نامولـد نباشـد آنگـاه $X \subseteq G$ موجـود اسـت کـه $G =< g, X >$ اما $G \neq< X >$. بنابراین X زیرگروه سره G است و در نتیجه زیرگروه ماکسیمال M از G با شرط $< X >\subseteq M$ و $g \notin M$ موجود است. توجه می کنیم که Mیک زیرگروه ماکسیمال G است. در واقع اگر H زیرگروهی از G باشد بطوریکه $M < H \le G$، آنگاه $g \in H$ و لذا $H = G$ که تناقض است پس M یک زیرگروه ماکسیمال G است. حال با توجه به اینکه $g \in Frat(G)$ لذا $g \in M$ که تناقض است.

بالعکس: فرض کنیم g یک نامولد نباشد بطوریکه $g \notin Frat(G)$. در اینصورت زیرگروه ماکسیمال M از G موجود است که $g \notin M$ و لذا $< g, M >= G$. ولی g یک نامولد است، پس $< M >= G$ لذا $G = M$ که یک تناقض است.

۵-۲-۱۳: فرض کنیم G یک گروه متناهی باشد. در اینصورت:

۱) فـرض کنیم N یـک زیرگـروه نرمـال از G و نیـز H زیرگروهـی دلخـواه باشـد. دراینصـورت اگـر $N \le Frat(H)$ آنگاه $N \le Frat(G)$.

۲) اگر $K \lhd G$ آنگاه $Frat(K) \le Frat(G)$.

۳) اگر $G \lhd N$، آنگاه $Frat(\frac{G}{N}) \ge (FratG))N/N$. همچنین تساوی زمانی برقرار است که داشته باشیم $N \le Frat(G)$.

۴) اگر A یک زیرگروه نرمال و آبلی گروه G باشد، بطوریکه $(Frat(G)) \cap A = 1$، آنگاه زیرگروه H از G وجود دارد بطوریکه $G = HA$ و $H \cap A = 1$.

اثبات: **(۴)** مجموعه Σ را بصورت $\Sigma = \{B \le G : G = BA\}$ تعریف می کنیم. فرض کنیم H عضو مینیمال این مجموعه باشد. با توجه به اینکه A آبلی است، لذا $H \cap A \lhd H$ و همچنین $H \cap A \lhd A$. بنابراین

$H \cap A \lhd HA = G$. حال اگر $H \cap A \le Frat(H)$ آنگاه طبق قسمت ۱، $H \cap A \le Frat(G) \cap A = 1$ لذا $H \cap A = 1$ و حکم ثابت می شود. در غیر اینصورت زیرگروه ماکسیمال M از H وجود دارد بطوریکه $H \cap A \nleq M$. بنابراین:

$$H = M(H \cap A) \Rightarrow G = HA = MA.$$

که این تناقض با مینیمال بودن H دارد.

۵-۲-۱۴: فرض کنیم H یک زیرگروه متناهی و نرمال از گروه G و P یک زیرگروه p—سیلوی H باشد. دراینصورت $G = N_G(P)H$.

اثبات: فرض کنیم $g \in G$، در اینصورت $P^g = g^{-1}Pg \le g^{-1}Hg = H$ و P^g یک زیرگروه p—سیلوی H است. لذا با توجه به قضیه سیلو $h \in H$ موجود است بطوریکه $P^g = P^h$.

در نتیجه $gh^{-1} \in N_G(P)$ لذا $g = gh^{-1}.h \in N_G(P)H$.

۲-۵-۱۵ : فرض کنیم G یک گروه باشد. در اینصورت:

۱) فرض کنیم H یک زیرگروه متناهی از G باشد بطوریکه $Frat(G) \le H \lhd G$ و $\dfrac{H}{Frat(G)}$ پوچتوان باشد.

دراینصورت H پوچتوان است. بویژه اگر $Frat(G)$ متناهی باشد آنگاه پوچتوان است.

۲) زیرگروهی جدید از G بنام $FFrat(G)$ بصورت زیر تعریف می کنیم که شامل $Frat(G)$ است:

$$\frac{F\,Frat(G)}{Frat(G)} = Fit(\frac{G}{Frat(G)}).$$

اگر G متناهی باشد آنگاه $FFrat(G) = Fit(G)$. همچنین $\frac{FFrat(G)}{Frat(G)}$ برابر با حاصلضرب تمام زیرگروههای نرمال مینیمال آبلی $\frac{G}{Frat(G)}$ است.

اثبات: فرض کنیم P یک زیرگروه p—سیلوی H باشد. با توجه به ۵-۲-۴ کافی است نشان دهیم P در G نرمال است. فرض کنیم $F = Frat(G)$ و $K = PF \le H$. در اینصورت با توجه به قضیه ۱-۶-۱۸ گروه $\frac{K}{F}$ یک زیرگروه p—سیلوی $\frac{H}{F}$ بوده و چون $\frac{H}{F}$ پوچتوان است لذا $\frac{K}{F}$ زیرگروه مشخصه $\frac{H}{F}$ است. بنابراین K زیرگروه مشخصه H بوده و چون $H \lhd G$ پس $K \lhd G$. حال با توجه به ۵-۲-۱۴ خواهیم داشت $G = N_G(P)K = N_G(P)F$ که ایجاب می کند $G = N_G(P)$. در نتیجه داریم $P \lhd G$.

اثبات ۲) فرض کنیم $H = FFrat(G)$ و با جایگذاری آن در قسمت قبل نتیجه می شود H پوچتوان است. همچنین داریم $H \leq Fit(G)$ و چون عکس رابطه شمول همواره برقرار است لذا خواهیم داشت $H = Fit(G)$.

حال برای اثبات قسمت نهایی می توان فرض کرد $Frat(G) = 1$.

قرار می دهیم $L = Fit(G)$. در اینصورت با توجه به ۵-۲-۴ هر زیرگروه ماکسیمال L نرمال بوده و در نتیجه دارای شاخص اول است. از اینرو

$$L' \leq Frat(L) \leq Frat(G) = 1.$$

لذا L آبلی است زیرا زیرگروه مشتقش ۱ است. فرض کنیم L حاصلضرب تمام زیرگروههای مینیمال نرمال آبلی G باشد. بدیهی است که $N \leq L$. با توجه به ۵-۲-۱۳ زیرگروه H وجود دارد بطوریکه $G = HN, H \cap N = 1$. حال چون L آبلی است لذا $H \cap L \lhd H,\ H \cap L \lhd L$. بنابراین $H \cap L \lhd HL = G$. از طرفی $(H \cap L) \cap N = 1$ و چون زیرگروه نرمال $H \cap L$ نمی تواند شامل زیرگروه نرمال مینیمالی از G باشد، لذا $H \cap L = 1$ درنتیجه $L = L \cap (HN) = N$.

تمرینات صفحه ۱۳۴:

حل تمرین ۶: فرض کنیم $\{x_1, \ldots, x_n\}$ یک مولد مینیمال گروه G باشد. در اینصورت با فرض $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ داریم $G = \langle X \rangle$ ولی مینیمال بودن مجموعه مولد X نتیجه می دهد $G \neq \langle X - \{x_i\} \rangle$. پس x_i یک نامولد نیست یعنی $x_i \notin Frat(G)$.

فصل ۶

گروههای آزاد و حاصلضربهای آزاد

تعریف: فرض کنیم $\{G_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ خانواده ای از گروهها باشد. یک حاصلضرب آزاد برای این خانواده گروهی چون G به همراه خانواده $\iota_\lambda : G_\lambda \to G$ از همریختی هاست به طوریکه برای هر گروه H و هر خانواده $\varphi_\lambda : G_\lambda \to H$ همریختی یکتای $\varphi : G \to H$ موجود است بطوریکه $\iota_\lambda \varphi = \varphi_\lambda$. یعنی دیاگرام زیرجابجایی است.

$$\begin{tikzcd} G_\lambda \arrow[r, "L_\lambda"] \arrow[d, "\varphi_\lambda"'] & G \arrow[dl, dashed, "\varphi"] \\ H & \end{tikzcd}$$

۱-۲-۶: اگر G و $\overline{G}$ دو حاصلضرب آزاد برای خانواده ای از گروهها مانند $\{G_\lambda :| \lambda \in \Lambda\}$ باشند ، آنگاه $G \cong \overline{G}$.

اثبات: فرض کنیم G حاصلضرب آزاد به همراه خانواده $\{L_\lambda : G_\lambda \to G\}$ و $\overline{G}$ حاصلضرب آزاد به همراه خانواده $\{\eta_\lambda : G_\lambda \to \overline{G}\}$ باشد با توجه به تعریف همریختی های یکتای φ, ψ موجودند که برای هر $\lambda \in \Lambda$ دیاگرام زیر جابجایی است.

$$\begin{tikzcd} G \arrow[dr, "\psi"'] & G_\lambda \arrow[l] \arrow[r] \arrow[d, "\eta_\lambda"] & G \arrow[dl, "\varphi"] \\ & \overline{G} & \end{tikzcd}$$

$$\varphi L_\lambda = \eta_\lambda$$
$$\psi \eta_\lambda = L_\lambda$$

اما $I_{G\lambda}$ طبق تعریف تنها تابعی است که دیاگرام را جابه جایی کند.

$$\begin{tikzcd} G_\lambda \arrow[r, "L_\lambda"] \arrow[d, "L_\lambda"'] & G \arrow[dl, "I_G"] \\ G & \end{tikzcd}$$

$\varphi\psi = I_{\overline{G}}$ $\quad$ $\psi\varphi = I_G$ پس φ, ψ یکریختی است.