۱ مدول و تعریف آن

تعریف ۱—۱. فرض کنید R یک حلقه بوده و $(M,+)$ یک گروه آبلی باشد و $f : R \times M \longrightarrow M$ یک تابع باشد (برای سهولت $f(r,m)$ را با $r \cdot m$ نشان می‌دهیم. توجه کنید $r \cdot m$ را ضرب اسکالر r در m گویند.) و در ضمن خواص زیر برقرار باشند:

i) به ازای هر $r \in R$ و $m_1, m_2 \in M$ داشته باشیم: $\quad r \cdot (m_1 + m_2) = r \cdot m_1 + r \cdot m_2$

ii) به ازای هر $r_1, r_2 \in R$ و $m \in M$ داشته باشیم: $\quad (r_1 + r_2) \cdot m = r_1 \cdot m + r_2 \cdot m$

iii) به ازای هر $r_1, r_2 \in R$ و $m \in M$ داشته باشیم: $\quad r_1 \cdot (r_2 \cdot m) = (r_1 r_2) \cdot m$

در این صورت M را یک Rـمدول چپ گویند. به طریق مشابه Rـمدول راست تعریف می‌شود.

تعریف ۱—۲. Rـمدول چپ M را یکانی گوییم هرگاه R یکدار باشد و به‌ازای هر $m \in M$ داشته باشیم: $1 \cdot m = m$

مثال ۱. $\mathbb{R}$ یک $\mathbb{Z}$ـمدول چپ می‌باشد، زیرا به‌ازای هر $r \in \mathbb{Z}$ و $m \in \mathbb{R}$ ضرب اسکالر $r \cdot m = rm$ را در نظر بگیرید. چون $1 \cdot m = 1m = m$ پس یکانی نیز می‌باشد.

مثال ۲. هر گروه آبلی G یک $\mathbb{Z}$ـمدول چپ می‌باشد. زیرا برای هر $m \in G$ و $r \in \mathbb{Z}$ تعریف می‌کنیم:

$$0 \cdot m = 0 \qquad r \cdot m = \underbrace{m + \cdots + m}_{\text{مرتبه } r} \quad (r > 0) \qquad r \cdot m = \underbrace{(-m) + \cdots + (-m)}_{\text{مرتبه } -r} \quad (r < 0)$$

این مدول یکانی نیز هست.

مثال ۳. اگر G یک گروه آبلی و R حلقه‌ای دلخواه باشد در این صورت اگر برای هر $r \in R$ و $m \in G$ ضرب اسکالر را به صورت $rm = 0$ تعریف کنیم آنگاه G یک Rـمدول چپ می‌شود. ولی G یکانی نیست.

مثال ۴. $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ روی $\mathbb{Z}$ با ضرب اسکالر $r(x,y) = (0, ry)$ یک $\mathbb{Z}$ـمدول چپ می‌باشد، ولی یکانی نیست زیرا $1(x,y) = (0,y) \neq (x,y)$.

مثال ۵. اگر R یک حلقه باشد، $M_n(R)$ با ضرب اسکالر $r\cdot[a_{ij}]=[ra_{ij}]$ یک Rـمدول چپ است. اگر R یکدار باشد این Rـمدول یکانی نیز است.

سؤال. آیا خواص مدول (شرایط (i)، (ii) و (iii)) مستقل از یکدیگرند.

جواب. بله.

- مثالی که شرایط (i) و (ii) را دارد ولی شرط (iii) را ندارد: $M=M_n(\mathbb{R})$ و $R=M$ را در نظر بگیرید و تعریف کنید $A\cdot B=A^tB$ در این صورت

$$\begin{cases} (A_1A_2)\cdot B=(A_2^tA_1^t)B \\ A_1\cdot(A_2B)=A_1(A_2^tB)=A_1^tA_2^tB \end{cases} \Longrightarrow (A_1A_2)\cdot B\neq A_1\cdot(A_2\cdot B)$$

- مثالی که شرایط (i) و (iii) را دارد ولی شرط (ii) را ندارد: $M=\mathbb{R}$ و $R=\mathbb{R}$ را در نظر بگیرید و تعریف کنید $x\cdot y=x^2y$ در این صورت شرایط (i) و (iii) برقرار است ولی شرط (ii) برقرار نمی‌باشد زیرا

$$(x+x')\cdot y=(x+x')^2y\neq x^2y+x'^2y$$

- مثالی که شرایط (ii) و (iii) را دارد ولی شرط (i) را ندارد: $M=\mathbb{R}[x]$ و $R=\mathbb{R}$ را با ضرب اسکالر زیر در نظر بگیرید

$$r\cdot f(x)=\begin{cases} rf(x^2) & \deg f=2k+1 \\ rf(x) & \deg f=2k \end{cases}$$

حال اگر $\deg f=2k+1$ آنگاه

$$\begin{cases} (r_1r_2)f(x)=(r_1r_2)f(x^2) \\ r_1(r_2f(x))=r_1(r_2f(x^2))=r_1r_2f(x^2) \end{cases}$$

به طریق مشابه برای $\deg f=2k$ نیز به‌دست می‌آید. اما شرط (i) برقرار نمی‌باشد، زیرا از طرفی $r\cdot[x^2+(-x^2+x)]=rx^2$ و از طرف دیگر $r\cdot x^2+r\cdot(x-x^2)=rx^2+r(x-x^2)=rx$ و لذا چون $rx\neq rx^2$ پس شرط (ii) برقرار نیست.

سؤال. به چند طریق می‌توان $\mathbb{Q}$ را به یک $\mathbb{R}$ـ مدول تبدیل کرد؟

جواب. یک حالت این است که تعریف کنیم $\forall r \in \mathbb{R}, a/b \in \mathbb{Q} : r \cdot a/b = 0$. اما حالت دیگری رخ نمی‌دهد، زیرا داریم $\{r \cdot \frac{a}{b} \mid r \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{Q}$ و چون $\mathbb{R}$ ناشمارا و $\mathbb{Q}$ شماراست پس

$$\exists r \neq s \in \mathbb{R} : r \cdot \frac{a}{b} = s \cdot \frac{a}{b} \Longrightarrow (r-s) \cdot \frac{a}{b} = 0 \Longrightarrow (r-s)^{-1}((r-s) \cdot \frac{a}{b}) = 0 \Longrightarrow 1 \cdot \frac{a}{b} = 0$$

بنابراین به‌ازای هر $r \in \mathbb{R}$، $r(1 \cdot a/b) = 0$ و در نتیجه برای هر $r \in \mathbb{R}$، $r \cdot a/b = 0$.

قرارداد. در این درس منظور از Rـمدول، Rـمدول چپ و یکانی است مگر اینکه خلاف آن ذکر گردد.

لم ۱—۳. در یک مدول خواص زیر برقرارند.

i) به‌ازای هر $m \in M$، $0 \cdot m = 0$

ii) به‌ازای هر $r \in R$، $(-r) \cdot m = -(r \cdot m)$.

اثبات (i). $(0 + 0) \cdot m = 0 \cdot m + 0 \cdot m$ و در نتیجه $0 \cdot m = 0 \cdot m + 0 \cdot m$ و چون M گروه است پس قانون حذف داریم و لذا $0 \cdot m = 0$. قسمت (ii) به راحتی از (i) نتیجه می‌شود. □

فرض کنید R یک حلقه بوده و I ایده‌آل چپی از R باشد در این صورت $(I, +)$ گروهی آبلی است. بنابراین R/I ساختمان گروه آبلی دارد. زیرا $(I, +) \subsetneq (R, +)$. حال R/I را با ضرب زیر به Rـمدول تبدیل می‌کنیم:

$$\forall r \in R, x \in R : r \cdot (I + x) = I + rx$$

این ضرب خوش تعریف است زیرا

$$I + x = I + x' \Longrightarrow x - x' \in I \Longrightarrow r(x - x') \in I$$

$$\Longrightarrow I + rx = I + rx' \Longrightarrow r \cdot (I + x) = r \cdot (I + x')$$

برقراری هر سه خاصیت مدولی به راحتی بررسی می‌شود.

نکته. اگر R یک حلقه باشد. R با ضرب $(r, x \in R) \quad r \cdot x = rx$ یک Rـمدول است.

مثال. طبق مطلب قبلی $\mathbb{Z}_n$ یک $\mathbb{Z}$ـمدول است زیرا برای $R=\mathbb{Z}$ و $I=n\mathbb{Z}$ داریم $R/I=\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. $\mathbb{Z}$ را فقط با ضرب صفر می‌توان به $\mathbb{Z}_n$ـمدول تبدیل کرد زیرا برای هر $\forall x\in\mathbb{Z}$،

$$(\overline{۱}+\cdots+\overline{۱})_{\text{مرتبه } n}\cdot x=∘\Longrightarrow \overline{۱}\cdot x+\cdots+\overline{۱}\cdot x_{\text{مرتبه } n}=∘\Longrightarrow n(\overline{۱}\cdot x)=∘\Longrightarrow \overline{۱}\cdot x=∘$$

اگر R حلقه‌ای جابجایی باشد، هر Rـمدول چپ M با ضرب اسکالر $m\cdot r=r\cdot m$ به یک Rـمدول راست تبدیل می‌شود. شرط جابجایی بودن حلقه در اثبات قسمت (iii) شرایط مدولی استفاده می‌شود، زیرا

$$(m\cdot r_۱)\cdot r_۲=(r_۱\cdot m)\cdot r_۲=r_۲\cdot(r_۱\cdot m)=(r_۲r_۱)\cdot m=(r_۱r_۲)\cdot m=m\cdot(r_۱r_۲)$$

معمولاً وقتی R جابجایی است در تعریف Rـمدول ذکر می‌شود که $r\cdot m=m\cdot r$.

اگر R و S دو حلقه بوده و $f:S\longrightarrow R$ یک هومومورفیسم حلقه‌ای باشد و M نیز یک Rـمدول باشد، در این صورت M را با ضرب اسکالر زیر می‌توان به یک Sـمدول تبدیل کرد.

$$(\forall s\in S, m\in M)\qquad s\cdot m=f(s)\cdot m$$

تعریف ۱ــ۴. فرض کنید M یک Rـمدول باشد، در این صورت زیرمجموعه‌ی ناتهی N از M را یک زیرمدول M گوییم هرگاه N با همان جمع و ضرب اسکالر M خود یک مدول باشد.

مثال. $M=\mathbb{Z}$، $N=۲\mathbb{Z}$ و $R=\mathbb{Z}$ را با ضرب معمولی در نظر بگیرید.

اگر N زیر مدولی از Rـمدول M باشد آنگاه چون $(N,+)$ زیرگروه آبلی $(M,+)$ است پس $(N,+)\subsetneq(M,+)$ و بنابراین می‌توان گروه خارج قسمتی $(M/N,+)$ را تشکیل داد. در این صورت M/N با ضرب $\forall r\in R, m\in M:\ r\cdot(N+m)=N+rm$ به یک Rـمدول تبدیل می‌شود. توجه کنید ضرب اسکالر خوش تعریف است زیرا اگر $N+m=N+m'$ آنگاه $m-m'\in N$ و چون N زیرمدول M است پس

$$r\cdot(m-m')\in N\Longrightarrow r\cdot m-r\cdot m'\in N\Longrightarrow N+rm=N+rm'\Longrightarrow r(N+m)=r(N+m')$$

لم ۱ــ۵. اگر N و P و Q زیرمدول‌هایی از Rـمدول M باشند، در این صورت داریم

i) اگر $N\subset Q$ آنگاه $N+(P\cap Q)=(N+P)\cap(N+Q)$.

ii) اگر $N \subset Q$ آنگاه $N \cap (P+Q) = (N \cap P) + (N \cap Q)$.

اثبات. (i)

$$\left.\begin{array}{l} P \cap Q \subseteq P \\ P \cap Q \subseteq Q \end{array}\right\} \Longrightarrow N + (P \cap Q) \subseteq N + P, N + Q \Longrightarrow N + (P \cap Q) \subseteq (N+P) \cap (N+Q)$$

برعکس اگر $x \in (N+P) \cap (N+Q)$ آنگاه $x = n + p = n' + q \, : \, n, n' \in N, p \in P, q \in Q$. از طرف دیگر

$$N \subset Q \Longrightarrow n' + q \in Q, n \in Q \Longrightarrow p = n' + q - n \in Q \Longrightarrow p \in Q \Longrightarrow p \in P \cap Q$$

ولی $x = n + p$ پس $x \in N + (P \cap Q)$. اثبات (ii) مشابه است. $\square$

نکته. توجه کنید در لم بالا بدون شرط‌ها تساوی برقرار نیست زیرا قرار دهید

$$N = \langle (x, \circ) \rangle, P = \langle (\circ, y) \rangle, Q = \langle (z, z) \rangle \ , \ x, y, z \in \mathbb{R}$$

قرارداد. از اینجا به بعد برای سادگی $r \cdot m$ را با rm نشان خواهیم داد.

تعریف ۱−۶. فرض کنید M و N دو Rـمدول باشند، در این صورت تابع $f : M \longrightarrow N$ را یک Rـمدول هومورفیسم گوییم هرگاه دو شرط زیر برقرار باشد

i) برای هر $m_۱, m_۲ \in M$ $\qquad f(m_۱ + m_۲) = f(m_۱) + f(m_۲)$

ii) برای هر $m \in M$ و $r \in R$ $\qquad f(rm) = rf(m)$

اگر f به ترتیب پوشا و یک به یک باشد آن را به ترتیب اپی‌مورفیسم و مونومورفیسم می‌نامیم. در صورتی که f هم یک به یک و هم پوشا باشد f را یک ایزومورفیسم Rـمدولی می‌نامند.

دو Rـمدول M و N را ایزومورف یا یکریخت گوییم هرگاه یک ایزومورفیسم Rـمدولی میان M و N وجود داشته باشد و می‌نویسیم $M \simeq N$ (به عنوان Rـمدول). در حالتی که $M = N$، f را اندمورفیسم می‌نامند. اگر f یک یکریختی و $M = N$ باشد، f را یک اتومورفیسم گویند. مجموعه‌ی اندمورفیسم‌های M را با علامت $End_R M$ یا $Hom_R(M, M)$ نمایش می‌دهیم.

به راحتی دیده می‌شود $End_R M$ با عمل جمع و ترکیب توابع تشکیل حلقه یکدار می‌دهد.

$$\left\{\begin{array}{l} (f+g)(m) = f(m) + g(m) \\ (f \circ g)(m) = f(g(m)) \end{array}\right.$$

یکِ این حلقه تابع همانی است. اگر R حلقه‌ای جابجایی باشد End_RM با ضرب اسکالر $\forall r \in R: \ (rf)(m) = r(f(m))$ به یک Rـمدول تبدیل می‌شود. زیرا rf جمع را حفظ می‌کند و اگر k یک اسکالر باشد داریم:

$$(rf)(km) = r(f(km)) = (rk)f(m) = k(rf)(m)$$

تمرین ۱. الف) ثابت کنید برقراری شرایط (i) و (ii) لم ۱.۵ برای هر سه زیر مدول M معادلند. ب) اگر سه زیر مدول وجود داشته باشند که در شرط (i) صدق نکنند، ثابت کنید وجود دارند زیرمدول‌های P' و Q' $(P' \neq Q')$ به طوری که

$$\frac{P'}{P' \cap Q'} = \frac{Q'}{P' \cap Q'} \qquad \text{(به عنوان } R\text{ـمدول)}$$

تعریف ۱—۷. اگر M و N دو Rـمدول باشند آنگاه مجموعه‌ی تمام Rـمدول همومورفیسم‌های از M به N را با نماد $Hom_R(M,N)$ نمایش می‌دهیم. چون N گروهی آبلی است پس $Hom_R(M,N)$ با جمع طبیعی، گروهی آبلی است. ولی چون ترکیب در حالت کلی معنی ندارد $(M \neq N)$ پس حلقه نمی‌باشد. به‌ازای هر $f \in Hom_R(M,N)$ تعریف می‌کنیم

$$\ker f = \{m \in M \mid f(m) = \circ\} \quad , \quad Imf = \{f(m) \mid m \in M\}$$

بنابر جبر مقدماتی، $\ker f$ زیرگروه M و Imf زیرگروهی از N است. اما داریم

$$\forall r \in R: \ f(m) = \circ \Longrightarrow rf(m) = \circ \Longrightarrow f(rm) = \circ \Longrightarrow rm \in \ker f$$
$$\forall r \in R: \ r(f(m)) = f(rm) \Longrightarrow r(f(m)) \in Imf$$

پس همواره $\ker f$ زیرمدولی از M و Imf زیرمدولی از N است.

قضیه اول ایزومورفیسم مدولی ۱—۸. فرض کنید M و N دو Rـمدول بوده و $f: M \longrightarrow N$ یک Rـمدول همومورفیسم باشد. در این صورت داریم

$$\frac{M}{\ker f} \simeq Imf \qquad \text{(به عنوان } R\text{ـمدول)}$$

اثبات. تابع $\overline{f}: M/\ker f \longrightarrow Imf$ را با ضابطه‌ی $\overline{f}(\ker f + m) = f(m)$ در نظر می‌گیریم. $\overline{f}$ خوش

تعریف است، زیرا

$$\ker f + m = \ker f + m' \Longrightarrow m - m' \in \ker f \Longrightarrow f(m - m') = \circ \Longrightarrow f(m) = f(m')$$

از جبر مقدماتی، می‌دانیم $\overline{f}$ یک همومورفیسم گروهی است که یک به یک و پوشا است. حال اگر $r \in R$، آنگاه

$$\overline{f}(r(\ker f + m)) = \overline{f}(\ker f + rm) = f(rm) = rf(m) = r(\overline{f}(\ker f + m))$$

بنابراین $\overline{f}$ یک Rـمدول ایزومورفیسم می‌باشد. یعنی $M/\ker f \simeq Imf$ (به عنوان Rـمدول). □

تعریف ۱−۹. فرض کنید $\{M_i\}_{i\in I}$ خانواده‌ای از Rـمدول‌ها باشد. در این صورت تمام دنباله‌های به صورت $\{m_i\}_{i\in I}$ را که در آن به ازای هر $i \in I$ داریم، $m_i \in M_i$ در نظر می‌گیریم و جمع و ضرب اسکالر زیر را روی آنها تعریف می‌کنیم

$\{m_i\}_{i\in I} + \{m'_i\}_{i\in I} = \{m_i + m'_i\}_{i\in I}$

$r\{m_i\}_{i\in I} = \{r \cdot m_i\}_{i\in I}$

به راحتی دیده می‌شود که این دنباله‌ها تبدیل به یک Rـمدول می‌شوند. این مدول را حاصل‌ضرب مستقیم (یا حاصل‌ضرب دکارتی) M_i ها نامیده با نماد $\prod_{i\in I} M_i$ نمایش می‌دهیم. در حالتی که $|I| = n < \infty$ معمولاً حاصل‌ضرب مستقیم را با نماد $M_۱ \times \cdots \times M_n$ نشان می‌دهند.

حال تمام دنباله‌هایی را در نظر بگیرید که به‌جز یک تعداد متناهی اندیس بقیه مؤلفه‌ها صفرند. واضح است که این دنباله‌ها تحت جمع و ضرب اسکالر بسته‌اند و لذا تشکیل یک Rـمدول می‌دهند که در واقع زیرمدولی از حاصل‌ضرب مستقیم است. این مدول را مجموع مستقیم مدول‌های M_i نامیده و با نماد $\bigoplus_{i\in I} M_i$ نشان می‌دهیم. اگر $|I| = n < \infty$ معمولاً مجموع مستقیم را با نماد $M_۱ \oplus \cdots \oplus M_n$ نشان می‌دهند. در حالتی که $|I| < \infty$ واضح است که حاصل‌ضرب مستقیم همان مجموع مستقیم است (تعداد متناهی اندیس را کل مجموعه بگیرید).

اگر M یک Rـمدول باشد و $\{M_i\}_{i\in I}$ خانواده‌ای از زیرمدول‌های M باشند تعریف می‌کنیم

$$\sum_{i\in I} M_i = \{m_{i_۱} + m_{i_۲} + \cdots + m_{i_n} \mid n \in \mathbb{N}, m_{i_j} \in M_{i_j}\}$$

دیده می‌شود که $\sum_{i\in I} M_i$ زیرمدولی از M است. $\sum_{i\in I} M_i$ را مجموع زیرمدول‌های M_i می‌نامند.

تعریف ۱ـــ۱۰. اگر $M = \sum_{i\in I} M_i$ و هر عضو M نمایش یکتا به صورت $m = m_{i_1} + \cdots + m_{i_n};\ m_{i_j} \in M_{i_j}$ داشته باشد گوییم M جمع مستقیم زیرمدول‌های M_i است.

قضیه دوم ایزومورفیسم مدولی ۱ـــ۱۱. فرض کنید M یک Rـمدول بوده و N و P زیرمدول‌هایی از M باشند در این صورت داریم

$$\frac{P+N}{P} \simeq \frac{N}{N\cap P} \qquad \text{(به عنوان } R\text{ـمدول)}$$

قضیه سوم ایزومورفیسم مدولی ۱ـــ۱۲. فرض کنید M یک Rـمدول بوده و N و P زیرمدول‌هایی از M باشند به طوری که $P \subseteq N$ در این صورت داریم

$$\frac{M}{N} \simeq \frac{M}{P}\Big/\frac{N}{P} \qquad \text{(به عنوان } R\text{ـمدول)}$$

تعریف ۱ـــ۱۳. فرض کنید $M \neq \{0\}$ یک Rـمدول باشد، در این صورت M را یک Rـمدول ساده (تحویل‌ناپذیر)[1] گوییم هرگاه تنها زیرمدول‌های M، $\{0\}$ و M باشند.

تعریف ۱ـــ۱۴. حلقه‌ی یکدار R را ساده گوییم هرگاه تنها ایده‌آل‌های آن صفر و خود R باشند.

مثال ۱. هر میدانی حلقه‌ی ساده است.

مثال ۲. هر حلقه‌ی تقسیم یک حلقه‌ی ساده است.

مثال ۳. اگر D یک حلقه‌ی تقسیم باشد تنها ایده‌آل‌های $M_n(D)$ صفر و خودش می‌باشد و لذا ساده است (از این مطلب استفاده شده است که اگر R حلقه‌ای یکدار باشد، هر ایده‌آل $M_n(R)$ به صورت $M_n(I)$ است که در آن I ایده‌آلی از R است).

[1] Simple (Irreducible)

مثال ۴. فرض کنید $R = M_n(\mathbb{R})$ در این صورت

$$I = \left\{ \left[\begin{array}{c|c} \circ & \\ \vdots & M_{n\times(n-1)} \\ \circ & \\ \circ & \end{array} \right] \right\}$$

یک ایده‌آل چپ ماکسیمال $M_n(\mathbb{R})$ است. ایده‌آل چپ بودن واضح است. حال نشان می‌دهیم ماکسیمال است. فرض کنید $A \in M_n(\mathbb{R})\backslash I$ باید نشان دهیم ایده‌آل چپ تولید شده توسط A و I برابر $M_n(\mathbb{R})$ است. فرض کنید

$$A = \left[\begin{array}{c|c} a_{11} & \\ \vdots & * \\ a_{n1} & \end{array} \right] \quad , \ a_{i1} \neq 0$$

داریم $\left[\begin{array}{c|c} \circ & \\ \vdots & * \\ \circ & \end{array} \right] \in I$ در نتیجه $\left[\begin{array}{c|c} a_{11} & \\ \vdots & \circ \\ a_{n1} & \end{array} \right]$ در ایده‌آل چپ تولید شده توسط A و I قرار دارد. اگر ستون اول را α_1 بنامیم ($0 \neq \alpha_1 \in \mathbb{R}^n$). در این صورت می‌توان آن را به یک پایه مانند $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$ از $\mathbb{R}^n$ گسترش داد. حال ماتریس $n \times n$ ای که ستون i ام آن α_i است، در ایده‌آل چپ تولیده شده توسط A و I قرار دارد و چون این ماتریس وارون‌پذیر است در نتیجه ایده‌آل چپ تولید شده توسط A و I برابر $M_n(\mathbb{R})$ است. حال $M_n(\mathbb{R})/I = \left[\begin{array}{c|c} a_{11} & \\ \vdots & \circ \\ a_{n1} & \end{array} \right]$ را در نظر بگیرید. در این صورت این گروه به عنوان $M_n(\mathbb{R})$ـمدول چپ هیچ زیرمدولی ندارد، پس ساده است.

اگر P ماتریسی وارون‌پذیر باشد، آنگاه PIP^{-1} نیز ایده‌آل چپ ماکسیمال است. چون هر $A \in M_n(\mathbb{R})$ به صورت PXP^{-1} قابل نمایش است پس

$$A(PIP^{-1}) = (PXP^{-1})(PIP^{-1}) = PXIP^{-1} \subset PIP^{-1}$$

در نتیجه PIP^{-1} ایده‌آل چپ ماکسیمال است.

تمرین ۲. فرض کنید F میدانی با مشخصه‌ی صفر و $A \in M_m(F)$ ماتریسی پادمتقارن باشد. حلقه‌ی چندجمله‌ای‌های $F[x_1, \dots, x_m]$ را در نظر بگیرید (متغیرها جابجایی نیستند ولی عناصر F با تمام اعضاء جابجا می‌شوند) و این شرط اضافی را نیز روی حلقه بگذارید که $\forall i,j: \ x_i x_j - x_j x_i = a_{ij} \ (A = [a_{ij}])$ و حلقه‌ی جدید را R بنامید. ثابت کنید R ساده است اگر و فقط اگر $\det A \neq 0$. به ویژه اگر مرتبه‌ی A فرد باشد آنگاه R ایده‌آل دوطرفه پیدا می‌کند.

تمرین ۳. ثابت کنید هر ایده‌آل چپ ماکسیمال $M_n(\mathbb{R})$ به صورت PIP^{-1} است که در آن P ماتریسی $n \times n$ و وارون‌پذیر است. I در مثال ۴ تعریف شده است.

مثال ۱. اگر D حلقه‌ی تقسیم باشد، آنگاه D به عنوان Dـمدول چپ ساده است.

مثال ۲. اگر p عددی اول باشد آنگاه $\mathbb{Z}_p$ به عنوان $\mathbb{Z}$ـمدول ساده است.

مثال ۳. اگر R یک حلقه یکدار باشد بنابه با لم زرن می‌دانیم R دارای حداقل یک ایده‌آل چپ ماکسیمال I است. حال Rـمدول R/I را در نظر بگیرید. چون زیرمدول‌های R/I به عنوان Rـمدول به صورت J/I است که J یک ایده‌آل چپ R است و $I \subseteq J$. بنابراین اگر I ایده‌آل چپ ماکسیمال باشد R/I به عنوان Rـمدول ساده است.

تعریف ۱—۱۵. فرض کنید M یک Rـمدول بوده، $X \subseteq M$ مجموعه‌ای دلخواه باشد در این صورت زیرمدول تولید شده توسط مجموعه‌ی X را، اشتراک تمام زیرمدول‌های M که شامل X هستند می‌گیریم. توجه کنید که چون خود M شامل X است پس همواره عنصری در اشتراک ظاهر می‌شود. زیرمدول تولید شده توسط X را با نماد RX نشان می‌دهیم و در حالتی که $|X| < \infty$ زیرمدول را با تولید متناهی گویند. در حالتی $X = \{x\}$ ($|X| = ۱$) زیرمدول تولید شده توسط x را دوری گویند و با نماد Rx نشان می‌دهند. اگر M یکانی نباشد آنگاه اعضای RX به صورت زیر هستند

$$RX = \left\{ \sum_{i=۱}^{n} r_i x_i + \sum_{j=۱}^{m} n_j x_j \mid r_i \in R, n_j \in \mathbb{Z}, m, n \in \mathbb{N}, x_i \in X \right\}$$

در واقع RX کوچکترین زیرمدول شامل X است، زیرا اشتراک تمام زیرمدول‌های شامل X است. اگر M یکانی باشد در این صورت

$$RX = \left\{ \sum_{i=۱}^{n} r_i x_i \mid r_i \in R, n \in \mathbb{N}, x_i \in X \right\}$$

تمرین ۴. فرض کنید R حلقه‌ای یکدار بوده و M یک Rـمدول یکانی باشد. همچنین فرض کنید R تنها یک ایده‌آل چپ ماکسیمال داشته باشد و هر زیرمدول با تولید متناهی M دوری باشد. ثابت کنید زیرمدول‌های M قابل مقایسه هستند؛ یعنی، برای هر دو زیرمدول دلخواه $M_۱$ و $M_۲$ داریم، $M_۲ \subseteq M_۱$ یا $M_۱ \subseteq M_۲$.

لم ۱—۱۶. هر مدول ساده مانند M دوری است.

اثبات. اگر $M \ni x \neq 0$، Rx زیرمدولی ناصفر از M است و چون M ساده است پس $M = Rx$. $\square$

لم ۱—۱۷. اگر M یک Rـمدول دوری باشد در این صورت ایده‌آل چپ I از R وجود دارد که $R/I \simeq M$ (به عنوان Rـمدول).

اثبات. زیرا داریم $M = Rx$. حال تابع $f : R \longrightarrow Rx$ را با ضابطه‌ی $f(r) = rx$ در نظر بگیرید. داریم

$$f(r_1 + r_2) = (r_1 + r_2)x = r_1x + r_2x = f(r_1) + f(r_2)$$

$$\forall s \in R : \ f(sr) = (sr)x = s(rx) = sf(r)$$

بنابراین f یک Rـمدول همومورفیسم است. چون هر عضو M به صورت tx است در نتیجه f پوشا است. حال بنابر قضیه اول ایزومورفیسم مدولی نتیجه می‌گیریم $R/I \simeq M$ (به عنوان Rـمدول). که در رابطه‌ی بالا $I = \ker f$. I ایده‌آل چپ است، زیرا

$$f(r) = 0 \Longrightarrow rx = 0 \Longrightarrow srx = 0 \Longrightarrow f(sr) = 0 \Longrightarrow sr \in I$$

$\square$

لم ۱—۱۸. اگر R حلقه‌ای یکدار باشد آنگاه شرایط زیر معادلند

i) M یک Rـمدول ساده است.

ii) $M \simeq R/I$ (به عنوان Rـمدول) که در آن I ایده‌آل چپ ماکسیمالی از R است.

اثبات. (i $\Longleftarrow$ ii) اگر M یک Rـمدول ساده باشد آنگاه M دوری است و لذا $M \simeq R/I$ (به عنوان Rـمدول). ادعا می‌کنیم در این حالت I بایستی ایده‌آل چپ ماکسیمال باشد. زیرا زیرمدول‌های R/I به صورت J/I می‌باشند که $I \subseteq J$ و J ایده‌آل چپ است. با توجه به اینکه M زیرمدول نابدیهی ندارد نتیجه می‌شود I ایده‌آل چپ ماکسیمال R است.

ii $\Leftarrow$ i) اگر M ساده نباشد وجود دارد زیرمدول N از M به طوری‌که $M, \{0\} \neq N$. حال اگر $f : M \longrightarrow R/I$ ایزومورفیسم مربوطه باشد، $f(N) = J/I$ که J ایده‌آل چپی از R است. ولی چون $M, \{0\} \neq N$ و f ایزومورفیسم است پس $J \neq I, R$، که تناقض است. $\square$

تعریف ۱—۱۹. فرض کنید M یک Rـمدول باشد. در این صورت زیرمدول N از M را ماکسیمال[۲] گویند هرگاه $N \neq M$ و اگر K زیرمدولی از M باشد که $N \subsetneq K$ آنگاه بتوان نتیجه گرفت $K = M$.

نکته. مدول‌ها لزوماً زیرمدول ماکسیمال ندارند مانند، $\mathbb{Z}$ـمدول‌های $\mathbb{Q}$ و $\mathbb{Z}_{p^\infty}$.

اگر M یک Rـمدول و N یک زیرمدول ماکسیمال M باشد در این صورت Rـمدول M/N ساده است و برعکس.

قضیه ۱—۲۰. فرض کنید $M = \sum_{i\in I} M_i$ که در آن M_i ها زیرمدول‌های ساده‌ی Rـمدول M می‌باشند. اگر K زیرمدولی از M باشد در این صورت وجود دارد زیرمجموعه‌ی $J \subseteq I$ به طوری که $\sum_{j\in J} M_j$ مجموع مستقیم است و $M = K \oplus \sum_{j\in J} M_j$ و در واقع داریم $M = K \oplus (\bigoplus_{j\in J} M_j)$.

اثبات. مجموعه‌ی زیر را در نظر بگیرید

$$\sum = \{I' \subseteq I \mid \text{مجموع مستقیم است } \sum_{i\in I'} M_i, (\sum_{i\in I'} M_i) \cap K = \{0\}\}$$

در مجموعه‌ی بالا اگر $I' = \emptyset$ آنگاه تعریف می‌کنیم $\sum_{i\in I'} M_i = \{0\}$.

$\emptyset \in \sum$ پس $\sum \neq \emptyset$. فرض کنید $\{I_j\}_{j\in J}$ یک زنجیر از اعضای $\sum$ باشد. نشان می‌دهیم این زنجیر در $\sum$ دارای کران بالا است. قرار دهید $T = \bigcup_{j\in J} I_j$. ادعا می‌کنیم $T \in \sum$. چون به ازای هر $j \in J$، $I_j \subseteq I$ پس $T \subseteq I$. حال باید نشان دهیم $\sum_{i\in T} M_i$ مجموع مستقیم است. اگر $m_{i_1} + \cdots + m_{i_k} = 0, i_j \in I_j$ آنگاه چون I_j ها تشکیل یک زنجیر می‌دهند قابل مقایسه‌اند و لذا ℓ ای وجود دارد که $i_1, \ldots, i_k \in I_\ell$ ولی $I_\ell \in \sum$ و لذا $m_{i_1} = \cdots = m_{i_k} = 0$.

حال ثابت می‌کنیم $(\sum_{i\in T} M_i) \cap K = \{0\}$. اگر $0 \neq x \in (\sum_{i\in T} M_i) \cap K$ آنگاه داریم،

$$0 \neq m_{i_1} + \cdots + m_{i_t} = x \in K$$

---
[۲] Maximal

از طرفی وجود دارد ℓ ای که $i_1, \ldots, i_t \in I_\ell$. ولی چون $I_\ell \in \sum$ پس $(\sum_{i \in I_\ell} M_i) \cap K = \{0\}$ اما $x \in (\sum_{i \in I_\ell} M_i) \cap K$ پس $x = 0$ و این تناقض است. در نتیجه بن به لم زرن $\sum$ عضو ماکسیمالی مانند A دارد. هدف این است که ثابت کنیم $\sum_{i \in A} M_i \oplus K = M$. قرار دهید $N = \sum_{i \in A} M_i \oplus K$. اگر $N = M$ که حکم ثابت است. پس فرض کنید $N \neq M$. حال برای هر $\alpha \in I$، $N \cap M_\alpha$ برابر M_α یا برابر صفر است (زیرا M_α ساده است و $N \cap M_\alpha$ زیرمدولی از M_α است). اگر $M_\alpha \cap N = \{0\}$ در این صورت ادعا می‌کنیم $A \subsetneq A \cup \{\alpha\} \in \sum$. زیرا اولاً $M_\alpha \cap \sum_{i \in A} M_i = \{0\}$ پس $\sum_{A \cup \{\alpha\}} M_i$ مجموع مستقیم است و ثانیاً $\sum_{i \in A \cup \{\alpha\}} M_i \cap K = \{0\}$ (زیرا $(\sum_{i \in A} M_i + K) \cap M_\alpha = \{0\}$). اما A عضو ماکسیمال $\sum$ بود و این تناقض است. لذا به‌ازای هر $\alpha \in I$ داریم $M_\alpha \cap N = M_\alpha$، یعنی $M_\alpha \subset N$. در نتیجه $\sum_{i \in I} M_i \subset N$ پس $M \subseteq N \subseteq M$ و لذا $M = N$. $\square$

نتیجه ۱—۲۱. فرض کنید M یک Rـمدول بوده و $M = \sum_{i \in I} M_i$ که در آن M_i ها Rـمدول ساده می‌باشند. در این صورت وجود دارد $J \subseteq I$ به طوری که $M = \oplus_{i \in J} M_i$. (**اثبات.** قرار دهید $K = \{0\}$ و از قضیه قبل استفاده کنید).

قضیه ۱—۲۲. فرض کنید M یک Rـمدول باشد و $M = \sum_{i \in I} M_i$ که در آن M_i ها زیرمدول‌های ساده‌ی M می‌باشند. اگر N زیرمدولی از M باشد، در این صورت وجود دارد $J \subseteq I$ به طوری که $N \simeq \bigoplus_{i \in J} M_i$.

اثبات. بنا به قضیه $J_1 \subseteq I$ وجود دارد که $M = \bigoplus_{i \in J_1} M_i$ و همچنین $J_2 \subset J_1$ وجود دارد که $M = N \oplus (\bigoplus_{i \in J_2} M_i)$ در نتیجه

$$\frac{M}{\bigoplus_{i \in J_2} M_i} \simeq N \Longrightarrow N \simeq \bigoplus_{i \in J_1 \setminus J_2} M_i$$

$\square$

نکته. در قضیه اخیر نمی‌توان "$\simeq$" را به "$=$" تبدیل کرد. زیرا قرار دهید $M = \mathbb{R}^2$ و $M_1 = \{(x, 0) \mid x \in \mathbb{R}\}$ و $M_2 = \{(0, y) \mid y \in \mathbb{R}\}$ (به عنوان $\mathbb{R}$ـمدول). حال $N = \{(x, x) \mid x \in \mathbb{R}\}$ را در نظر بگیرید.

تعریف ۱—۲۳. فرض کنید M یک Rـمدول باشد در این صورت زیرمدول $M_۱$ از M را یک جمعوند[۳] M می‌نامیم هرگاه وجود داشته باشد زیرمدول $M_۲$ از M به طوری که $M = M_۱ \oplus M_۲$. گاهی اوقات گویند $M_۱$ دارای مکمل است و مکمل آن برابر $M_۲$ است.

تعریف ۱—۲۴. Rـمدول M را مکمل‌پذیر نامند هرگاه هر زیرمدول آن دارای مکمل باشد.

نکته. توجه کنید که در تعریف مکمل‌پذیری نمی‌توان به‌جای "$=$" قرار داد "$\simeq$" زیرا $\mathbb{Z} \simeq ۲\mathbb{Z} \oplus \{۰\}$ ولی $\mathbb{Z} \neq ۲\mathbb{Z} \oplus \{۰\}$.

مثال ۱. هر Rـمدول ساده مکمل‌پذیر است.

مثال ۲. هر فضای برداری روی F به عنوان Fـمدول مکمل‌پذیر است.

مثال ۳. $\mathbb{Z}$ به عنوان $\mathbb{Z}$ـمدول مکمل‌پذیر نمی‌باشد. زیرا هر زیرمدول آن به صورت $m\mathbb{Z}$ است و چون $mn\mathbb{Z} \subset n\mathbb{Z} \cap m\mathbb{Z}$ پس $M_۱ \cap M_۲ \neq \{۰\}$، مگر اینکه $M_۱ = \{۰\}$ یا $M_۲ = \mathbb{Z}$ باشد.

قضیه ۱—۲۵. فرض کنید M یک Rـمدول مکمل‌پذیر بوده و N زیرمدولی از M باشد در این صورت N و M/N هر دو مکمل‌پذیر می‌باشند.

اثبات. فرض کنید $N_۱$ زیرمدولی از N باشد. چون $N_۱$ زیرمدول M است وجود دارد زیرمدول $N_۲$ از M به طوری که $N_۱ \oplus N_۲ = M$. حال چون $N_۱ \subset N$ پس بنابر لم ۱—۵ داریم

$$N = N \cap M = N \cap (N_۱ \oplus N_۲) = (N \cap N_۱) \oplus (N \cap N_۲)$$

و لذا داریم $N = N_۱ \oplus (N \cap N_۲)$.

برای قسمت بعد چون M مکمل‌پذیر است زیرمدول N' از M وجود دارد که $M = N \oplus N'$ در نتیجه $M/N \simeq N'$ (به عنوان Rـمدول). چون N' زیرمدول M است بنا به قسمت اول N' مکمل‌پذیر بوده و در نتیجه M/N مکمل‌پذیر می‌شود. □

سؤال. آیا عکس قضیه برای $N \neq \{۰\}$ درست است.

[۳] Summand

جواب. خیر، $M=\mathbb{Z}_{p^۲}$ (p عددی اول) را به عنوان $\mathbb{Z}$ـمدول در نظر بگیرید. $N=p\mathbb{Z}_{p^۲}$ یک $\mathbb{Z}$ـ مدول ساده است، زیرا p عضوی است. از طرفی M/N نیز ساده است پس مکمل‌پذیر است. ولی N در $\mathbb{Z}_{p^۲}$ مکمل ندارد زیرا تنها زیرگروه‌های $\mathbb{Z}_{p^۲}$، $\mathbb{Z}_{p^۲}$ و $p\mathbb{Z}_{p^۲}$ و $\{۰\}$ می‌باشند.

قضیه ۱—۲۶. هر مدول مکمل‌پذیر ناصفر شامل یک زیرمدول ساده است.

اثبات. فرض کنید $x\in M$ $x\neq\{۰\}$ و زیرمدول Rx را در نظر بگیرید. بنابر قضیه قبل Rx مکمل‌پذیر است و بنابر ۱—۱۷ $R/I\simeq Rx$ (به عنوان Rـمدول) که I ایده‌آل چپ R است. چون R یکدار است، بنابر لم زرن ایده‌آل چپ ماکسیمال m از R وجود دارد که $I\subseteq m$. در نتیجه R/I دارای زیرمدول ماکسیمالی مانند m/I است. و چون $R/I\simeq Rx$ در نتیجه Rx دارای زیرمدول ماکسیمالی مانند N است. چون Rx مکمل‌پذیر است در نتیجه وجود دارد زیرمدول N' از Rx به طوری که $N\oplus N'=Rx$. بنا به قضیه اول ایزومورفیسم $N'\simeq Rx/N$ و چون N زیرمدول ماکسیمال Rx بود پس Rx/N و لذا N' ساده است. بنابراین با قرار دادن N' به عنوان زیرمدول مورد نظر، حکم ثابت می‌شود. $\square$

نکته. اگر مکمل‌پذیری را حذف کنیم دیگر این قضیه صحیح نیست، زیرا $\mathbb{Z}$ را به عنوان $\mathbb{Z}$ـمدول در نظر بگیرید.

سؤال. آیا یکانی بودن در قضیه قبل لازم است؟

قضیه ۱—۲۷. فرض کنید M یک Rـمدول باشد. در این صورت گزاره‌های زیر معادلند

i) $M=\sum_{i\in I}M_i$ که در آن M_i ها زیرمدول‌های ساده‌ی M هستند.

ii) $M=\bigoplus_{i\in J}M_i$ که در آن M_i ها زیرمدول‌های ساده‌ی M هستند.

iii) M مکمل‌پذیر است.

اثبات. (i $\Longleftarrow$ ii) بنابر نتیجه ۱—۲۱ برقرار است.

(ii $\Longleftarrow$ iii) طبق قضیه ۱—۲۰ برقرار است.

(iii $\Longleftarrow$ i) بنابر قضیه قبل M دارای حداقل یک زیرمدول ساده مانند P است. قرار دهید $N=\sum P$ که

در آن مجموع روی P زیرمدول‌های ساده‌ی M است. ادعا می‌کنیم $M = N$. اگر $N \neq M$ آنگاه وجود دارد زیرمدول N' از M به طوری که $M = N \oplus N'$ (زیرا M مکمل‌پذیر است) و چون N' زیرمدول M است بنا به قضیه ۱—۲۵، N' مکمل‌پذیر است، پس طبق قضیه قبل N' زیرمدولی ساده مانند $P' \neq 0$ دارد. طبق تعریف N داریم $P' \subseteq N$ و از طرفی $P' \subseteq N'$، در نتیجه $P' \subset N \cap N' = \{0\}$ و این تناقض است. بنابراین داریم $M = N$ و حکم ثابت می‌شود. □

تعریف ۱—۲۸. اگر Rـمدول M در یکی از شرایط قضیه‌ی قبل صدق کند M را یک Rـمدول نیمه ساده[۴] یا کاملاً تحویل‌پذیر می‌نامند.

تمرین ۵. فرض کنید R حلقه‌ای یکدار و به عنوان Rـمدول چپ نیمه ساده باشد؛ یعنی، R جمع مستقیم یک سری از ایده‌آل‌های چپ مینیمال خود باشد. ثابت کنید

i) هر Rـمدول چپ نیمه ساده است.

ii) R برابر جمع مستقیم تعداد متناهی ایده‌آل چپ مینیمال است.

لم شور ۱—۲۹. (i) فرض کنید M یک Rـمدول ساده باشد در این صورت End_RM یک حلقه‌ی تقسیم است.

(ii) اگر M و N دو Rـمدول ساده باشند در این صورت داریم $Hom_R(M,N) \neq \{0\}$ اگر و تنها اگر $M \simeq N$ (به عنوان Rـمدول).

اثبات. (i) فرض کنید $0 \neq f \in End_R(M)$، در این صورت Imf زیرمدولی از M است و چون $f \neq 0$ و M ساده است در نتیجه $Imf = M$ یعنی f پوشا است. از طرفی $\ker f$ زیرمدول M است و چون M ساده است و $f \neq 0$ در نتیجه $\ker f \neq M$ لذا $\ker f = 0$ و بنابراین f یک به یک است. پس f وارون‌پذیر است و به راحتی دیده می‌شود که $f^{-1} \in End_R(M)$ پس $End_R(M)$ یک حلقه‌ی تقسیم است.

(ii) اگر $0 \neq f \in Hom_R(M,N)$ آنگاه با استدلالی شبیه به حالت قبل ثابت می‌شود که f یک ایزومورفیسم است و در نتیجه $M \simeq N$. اگر $M \simeq N$ آنگاه وجود دارد ایزومورفیسم $f : M \longrightarrow N$ و چون N ساده است پس

[۴] Semi-simple

$N \neq \{0\}$ و لذا $f \neq 0$. □

نکته. فرض کنید R یک حلقه بوده و M یک Rـمدول باشد. قرار دهید $A = Hom_R(R, M)$ در این صورت A با ضرب اسکالر زیر یک Rـمدول است

$$\forall r \in R, f \in A: \ (rf)(a) = f(ar) = af(r)$$

به راحتی دیده می‌شود خواص Rـمدولی برقرار است.

قضیه ۱—۳۰. فرض کنید R یک حلقه بوده و M یک Rـمدول باشد. در این صورت داریم

$$M \simeq Hom_R(R, M) \quad (\text{به عنوان } R\text{ـمدول})$$

اثبات. تابع $\phi : Hom_R(R, M) \longrightarrow M$ را با ضابطه‌ی $\phi(f) = f(1)$ در نظر بگیرید. داریم

$$\begin{cases} i) \quad \phi(f_1 + f_2) = (f_1 + f_2)(1) = f_1(1) + f_2(1) = \phi(f_1) + \phi(f_2) \\ ii) \quad \phi(rf) = (rf)(1) = f(1 \cdot r) = f(r) = r(f(1)) = r(\phi(f)) \end{cases}$$

حال فرض کنید $f \in \ker \phi$ پس داریم،

$$\phi(f) = 0 \Longrightarrow f(1) = 0 \Longrightarrow \forall r \in R: \ rf(1) = f(r) = 0$$

و چون دامنه‌ی f برابر R است پس $f = 0$ و این یعنی ϕ یک به یک است. به علاوه ϕ پوشا است، زیرا به ازای هر $m \in M$ و هر $a \in R$ تعریف کنید $f_m(a) = am$. واضح است که $f_m \in Hom_R(R, M)$ و $\phi(f_m) = f_m(1) = 1 \cdot m = m$. در نتیجه ϕ پوشاست و لذا ϕ یک ایزومورفیسم Rـمدولی است و بنابراین داریم $M \simeq Hom_R(R, M)$ (به عنوان Rـمدول). □

نکته. در حالتی که $Hom_R(M, R)$ در نظر گرفته شود دیگر به نتیجه‌ای مشابه نمی‌توان رسید، زیرا مثلاً $Hom_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Q}, \mathbb{Z}) = \{0\} \neq \mathbb{Q}, \mathbb{Z}$. توجه کنید که ممکن است حتی Rـمدول هم نباشد.

نکته. یکانی بودن لازم است، زیرا $\mathbb{Z}$ را به عنوان $\mathbb{Q}$ـمدول با ضرب صفر در نظر بگیرید. در این صورت $Hom_{\mathbb{Q}}(\mathbb{Q}, \mathbb{Z}) = \{0\}$ و بنابراین $Hom_{\mathbb{Q}}(\mathbb{Q}, \mathbb{Z}) \not\simeq \mathbb{Z}$.

تعریف ۱—۳۱. حلقه‌ی R را نیمه ساده گوییم هرگاه به عنوان Rـمدول چپ نیمه ساده باشد.

تمرین ۶. فرض کنید $\{M_i\}_{i\in I}$ خانواده‌ای از Rـمدول‌ها بوده و N یک Rـمدول باشد. ثابت کنید:

$$\begin{cases} (i)\ Hom_R(\bigoplus_{i\in I} M_i, N) & \simeq & \prod_{i\in I} Hom_R(M_i, N) \\ (ii)\ Hom_R(N, \prod_{i\in I} M_i) & \simeq & \prod_{i\in I} Hom_R(N, M_i) \end{cases}$$ (به عنوان $\mathbb{Z}$ـمدول)

همچنین با ذکر مثال‌هایی نشان دهید که اگر در (i) جای مؤلفه‌ی اول و دوم را عوض کنیم آنگاه لزوماً عبارتی برحسب جمع مستقیم و حاصل‌ضرب مستقیم به‌دست نمی‌آید. همین کار را برای یکریختی دوم انجام دهید. همچنین نشان دهید اگر R جابجایی باشد تمام ایزومورفیسم‌ها Rـمدولی هستند.

تمرین ۷. ثابت کنید اگر $f \in Hom_{\mathbb{Z}}(\prod_{i=1}^{\infty} \mathbb{Z}, \mathbb{Z})$ و تحدید f روی $\bigoplus_{i=1}^{\infty} \mathbb{Z}$ برابر صفر باشد آنگاه $f = 0$.

قضیه ۱—۳۲. اگر R حلقه‌ای نیمه ساده باشد آنگاه هر Rـمدول ساده با زیرمدولی ساده از R یکریخت است.

اثبات. فرض کنید N یک Rـمدول ساده باشد. بنا به لم ۱—۱۸، $N \simeq R/I$ که I ایده‌آل چپ ماکسیمالی از R است. حال داریم $R = I \oplus (\bigoplus_{i\in J} M_i)$ پس $R/I \simeq \bigoplus_{i\in J} M_i$ (به عنوان Rـمدول). چون R/I ساده است پس $|J| = 1$ و لذا $i \in I$ وجود دارد که $N \simeq R/I \simeq M_i$ (به عنوان Rـمدول). $\square$

نکته. با استفاده از تمرین ۵ ثابت می‌شود که اگر R نیمه ساده باشد آنگاه تعداد متناهی Rـمدول ساده‌ی $M_1, \ldots, M_n$ وجود دارد که هر Rـمدول ساده‌ی N با یکی از M_i ها یکریخت باشد.

۲ مدول‌های آزاد و مدول‌های آرتینی و نوتری

تعریف ۲ــ۱. فرض کنید M یک Rـمدول باشد. در این صورت زیرمجموعه‌ی X از M را روی R مستقل خطی[۵] گویند هرگاه

$$\forall 1 \leq i \leq n, r_i \in R, x_i \in X: \; r_1x_1 + \cdots + r_nx_n = 0 \Longrightarrow r_1 = \cdots = r_n = 0$$

همچنین $X \subseteq M$ را یک پایه[۶] می‌نامیم هرگاه X روی R مستقل خطی باشد و $RX = M$ (مدول تولید شده توسط X). Rـمدول M را آزاد[۷] می‌نامیم هرگاه دارای یک پایه باشد.

مثال ۱. $M = \{0\}$ روی حلقه‌ی دلخواه R، مدولی آزاد با پایه‌ی $\emptyset$ است. توجه کنید همواره زیرمدول تولید شده توسط $\emptyset$ برابر صفر است، یعنی $R\emptyset = \{0\}$.

مثال ۲. اگر R حلقه‌ای یکدار باشد آنگاه R به عنوان Rـمدول آزاد است و پایه آن $X = \{1\}$ می‌باشد.

مثال ۳. $\mathbb{Z}_6$ به عنوان $\mathbb{Z}$ـمدول آزاد نیست زیرا برای هر $x \in \mathbb{Z}_6$ داریم، $6x = 0$.

مثال ۴. $\mathbb{Z}_6$ به عنوان $\mathbb{Z}_6$ـمدول آزاد است و پایه آن $X = \{1\}$ می‌باشد. ولی زیرمدول $N = \{0, 2, 4\}$ از $\mathbb{Z}_6$ آزاد نمی‌باشد. زیرا $\forall x \in N: \; 3x = 0$. پس هیچ زیرمجموعه‌ی مستقل خطی به جز $\emptyset$ در N وجود ندارد.

نتیجه ۲ــ۲. زیرمدول‌های مدول‌های آزاد لزوماً آزاد نمی‌باشند.

مثال. $\mathbb{R}$ به عنوان $\mathbb{Z}$ـمدول آزاد نیست زیرا اگر X یک پایه باشد، $X = \{x_1, \{x_i\}_{i \in I \setminus \{1\}}\}$، آنگاه

$$\frac{x_1}{2} \in \mathbb{R} \Longrightarrow \frac{x_1}{2} = a_1x_{i_1} + \cdots + a_rx_{i_r} + \ell x_1 \Longrightarrow (2\ell - 1)x_1 + a_1x_{i_1} + \cdots + a_rx_{i_r} = 0$$

در نتیجه $2\ell - 1 = 0$ که تناقض است.

نکته. اگر M یک Rـمدول آزاد باشد آنگاه لزوماً هر زیرمجموعه‌ی مستقل خطی را نمی‌توان به یک پایه گسترش داد. به عنوان مثال $\mathbb{Z}$ را به عنوان $\mathbb{Z}$ـمدول در نظر بگیرید. عنصر ۲ روی $\mathbb{Z}$ مستقل خطی است ولی

[۵] Linear independent
[۶] Basis
[۷] Free

به‌ازای هر $a \in \mathbb{Z}$، $\{۲, a\}$ روی $\mathbb{Z}$ وابسته خطی است زیرا $۲a - a۲ = ۰$. پس $\{۲\}$ پایه نیست. توجه کنید $\mathbb{Z}$ به عنوان $\mathbb{Z}$ـمدول آزاد است و $\{۱\}$ پایه آن است.

نکته. اگر M یک Rـمدول آزاد با پایه‌ی $\{x_i\}_{i \in I}$ باشد در این صورت $M \simeq \bigoplus_{i \in I} R$ (به عنوان Rـمدول). زیرا تعریف کنید

$$\begin{cases} \phi : \bigoplus_{i \in I} R \longrightarrow M \\ \phi(\{r_i\}_{i \in I}) = \sum_{i \in I} r_i x_i \end{cases}$$

در حالتی که $|X| = n$ آنگاه $M \simeq R^n$ (به عنوان Rـمدول).

قضیه ۲—۳. فرض کنید M یک Rـمدول آزاد و با تولید متناهی باشد. در این صورت هر پایه‌ی M تعداد متناهی عضو دارد.

اثبات. فرض کنید $M = \langle m_۱, \ldots, m_n \rangle$ و $\{x_i\}_{i \in I}$ یک پایه برای M روی R باشد. در این صورت

$$\begin{aligned} m_۱ &= a_{۱۱} x_{i_۱} + a_{۱۲} x_{i_۲} + \cdots + a_{۱\ell} x_{i_\ell} \\ &\vdots \\ m_n &= a_{n۱} x_{i'_۱} + a_{n۲} x_{i'_۲} + \cdots + a_{nt} x_{i'_t} \end{aligned}$$

در نتیجه Rـمدول تولید شده توسط x_i هایی که در این تساوی‌ها ظاهر شده‌اند برابر M است. اگر I نامتناهی باشد در این صورت وجود دارد $x \in X = \{x_i\}_{i \in I}$ که در این مجموع‌ها ظاهر نشده است. ولی x را می‌توان برحسب این x_i ها نوشت که تناقض است. □

قضیه ۲—۴. فرض کنید R حلقه‌ای جابجایی و یکدار بوده و M یک Rـمدول آزاد و با تولید متناهی باشد. در این صورت هر دو پایه‌ی M به تعداد مساوی عضو دارند.

اثبات. فرض کنید $\{x_i\}_{i=۱}^{n}$ و $\{y_j\}_{j=۱}^{m}$ دو پایه برای Rـمدول M باشند. در این صورت $M \simeq R^n$ و $M \simeq R^m$ (به عنوان Rـمدول) پس Rـمدول ایزومورفیسم $f : R^n \longrightarrow R^m$ وجود دارد (زیرا $M \simeq R^n \simeq R^m$) که $f^{-۱} : R^m \longrightarrow R^n$ نیز یک Rـمدول ایزومورفیسم است. فرض کنید $\{e_۱, \ldots, e_n\}$ یک پایه برای R^n و $\{e'_۱, \ldots, e'_m\}$ پایه‌ای برای R^m باشد. در نتیجه ماتریس نمایش f در این پایه ماتریسی $m \times n$ با درایه‌های در R و ماتریس نمایش $f^{-۱}$ ماتریسی $n \times m$ با درایه‌های در R است. اگر آنها را به ترتیب با A و B نمایش دهیم

آنگاه چون $f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = 1$ پس $AB = I_{m\times m}, BA = I_{n\times n}$.

بدون کاسته شدن از کلیت فرض کنید $m > n$. داریم $[A]_{m\times n}[B]_{n\times m} = I_{m\times m}$ حال به ماتریس A، $m-n$ ستون صفر در انتها و به ماتریس B، $m-n$ سطر صفر در انتها اضافه می‌کنیم و آنها را به ترتیب A' و B' می‌نامیم. به راحتی دیده می‌شود که $AB = A'B' = I_{m\times m}$. ولی $\det A' = 0$ زیرا A' ستون صفر دارد. پس $\det(A'B') = 0 \Longrightarrow \det I_{m\times m} = 0$ که تناقض است و لذا $m = n$ و حکم ثابت است. $\square$

تمرین ۸. فرض کنید R حلقه‌ای جابجایی و یکدار باشد در این صورت

i) آیا در R^n می‌توان $n+1$ بردار مستقل خطی یافت؟

ii) اگر A ماتریسی $m \times n$ با درایه‌های در R باشد، آیا رتبه‌ی سطری و ستونی A مساویند؟

قضیه ۲—۵. اگر D یک حلقه‌ی تقسیم بوده و M یک Dـمدول باشد آنگاه M به عنوان Dـمدول آزاد است.

اثبات (روش اول). با استفاده از لم زرن، همان‌طوری که ثابت می‌شود هر فضای‌برداری دارای پایه است می‌توان وجود پایه برای M را ثابت نمود.

اثبات (روش دوم). چون D نیمه ساده است، طبق تمرین ۵، M به عنوان Dـمدول نیمه ساده است و در نتیجه $M = \bigoplus_{i\in I} M_i$ که در آن M_i ها ساده‌اند و در نتیجه $M_i \simeq D/I_i$ که در آن I_i ایده‌آل چپ D است. چون D حلقه‌ی تقسیم است پس $I_i = 0$ و لذا $M_i \simeq D$. پس $M \simeq \bigoplus_{i\in I} D$ (به عنوان Dـمدول). اما $\bigoplus_{i\in I} D$ به عنوان Dـمدول آزاد است. در نتیجه M به عنوان Dـمدول آزاد است. $\square$

نکته. اگر بعد یک Rـمدول آزاد M برابر n باشد آنگاه لزوماً بعد هر زیرمدول M کمتر یا مساوی n نیست. زیرا به عنوان مثال قرار دهید $M = F[x,y]$ و $R = F[x,y]$. حال M یک بعدی است ولی $N = \langle x,y\rangle$ به عنوان Rـمدول ۲ بعدی است.

تمرین ۹. ثابت کنید اگر M یک $\mathbb{Z}$ـمدول آزاد باشد آنگاه هر زیرمدول آن نیز آزاد است (این تمرین برای هر PID نیز درست است).

تمرین ۱۰. اگر R یک PID بوده و M یک Rـمدول باشد که با n عضو تولید شود آنگاه هر زیرمدول M با تولید متناهی است و با m عضو تولید می‌شود که $m \leq n$.

تعریف ۲–۶. Rـمدول M را نوتری[8] گوییم هرگاه هر زنجیر صعودی از زیرمدول‌های آن سرانجام متوقف شود. Rـمدول M را آرتینی[9] گوییم هرگاه هر زنجیر نزولی از زیرمدول‌های آن سرانجام متوقف شود.

مثال ۱. هر مدول متناهی یا هر مدول ساده، هم آرتینی و هم نوتری است.

مثال ۲. $M = \bigoplus_{i=1}^{\infty} \mathbb{Z}$ را به عنوان $\mathbb{Z}$ـمدول در نظر بگیرید. حال زنجیر صعودی

$$\mathbb{Z} \times \{0\} \times \cdots \subsetneq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \{0\} \times \cdots \subsetneq \cdots$$

را در نظر بگیرید. این زنجیر هیچ‌گاه متوقف نمی‌شود و لذا M نوتری نیست. همچنین زنجیر نزولی

$$\bigoplus_{i=1}^{\infty} \mathbb{Z} \supsetneq \{0\} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \cdots \supsetneq \{0\} \oplus \{0\} \oplus \mathbb{Z} \oplus \cdots$$

را در نظر بگیرید. این زنجیر هیچ‌گاه متوقف نمی‌شود و لذا M آرتینی نیست.

مثال ۳. $\mathbb{Z}$ به عنوان $\mathbb{Z}$ـمدول نوتری است زیرا هر PID نوتری است. ولی آرتینی نیست زیرا زنجیر نزولی زیر را در نظر بگیرید،

$$\langle 2 \rangle \supsetneq \langle 4 \rangle \supsetneq \langle 8 \rangle \supsetneq \cdots \supsetneq \langle 2^n \rangle \supsetneq \cdots$$

مثال ۴. ساختمان $\mathbb{Z}_{p^\infty}$. قرار دهید

$$M = \{\frac{a}{p^n} \mid a \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\}$$

حال $(\mathbb{Z}, +) \subseteq (M, +)$ زیرا $\forall m \in \mathbb{Z} :\ m = mp^n/p^n \in M$. حال گروه خارج قسمتی $(M/\mathbb{Z}, +)$ را در نظر بگیرید این گروه را $\mathbb{Z}_{p^\infty}$ می‌نامند.

توجه کنید $\mathbb{Z}_{p^\infty}$ یک pـگروه آبلی است. هر عنصر $M/\mathbb{Z}$ به صورت $\mathbb{Z} + a/p^n$ است که $(a,p) = 1$. مرتبه‌ی عضو فوق برابر p^n است. ادعا می‌کنیم زیرگروه‌های سره‌ی $\mathbb{Z}_{p^\infty}$ به صورت $G_n = \langle \mathbb{Z} + 1/p^n \rangle$ هستند

[8] Noetherian
[9] Artinian

که n عددی طبیعی است. فرض کنید H زیرگروه سره‌ای از $\mathbb{Z}_{p^\infty}$ باشد. ادعا می‌کنیم اگر $\mathbb{Z}+a/p^n \in H$ و $(a,p)=۱$ آنگاه $\mathbb{Z}+۱/p^n \in H$. چون $(a,p)=۱$ پس $\exists\, r,s\in\mathbb{Z}$ که

$$ra+sp^n=۱ \Longrightarrow \mathbb{Z}+\frac{ra}{p^n}\in H \Longrightarrow \mathbb{Z}+\frac{۱-sp^n}{p^n}\in H \Longrightarrow \mathbb{Z}+\frac{۱}{p^n}-s\in H \Longrightarrow \mathbb{Z}+\frac{۱}{p^n}\in H$$

ادعا می‌کنیم وجود دارد n ای که $H=G_n$. زیرا فرض کنید n بزرگترین عدد طبیعی باشد که $\mathbb{Z}+۱/p^n\in H$. اگر چنین n ای وجود نداشته باشد به‌ازای هر $m\in\mathbb{N}$ داریم $\mathbb{Z}+\frac{۱}{p^m}\in H$ و در نتیجه به‌دست می‌آوریم،

$$\forall\, a\in\mathbb{Z};\ \mathbb{Z}+\frac{a}{p^m}\in H \Longrightarrow H=\mathbb{Z}_{p^\infty}$$

که تناقض است. حال اگر n بزرگترین عددی باشد که $\mathbb{Z}+۱/p^n\in H$ آنگاه ثابت می‌کنیم $H=G_n$. چون H تحت جمع بسته است در نتیجه $G_n\subseteq H$. حال فرض کنید $\mathbb{Z}+b/p^\ell\in H\backslash G_n$ پس $\mathbb{Z}+۱/p^\ell\in H$ در نتیجه طبق تعریف n، $\ell\leq n$. از طرفی $\mathbb{Z}+۱/p^\ell=p^{n-\ell}(\mathbb{Z}+۱/p^n)$، در نتیجه $\mathbb{Z}+۱/p^\ell\in G_n$ که تناقض است. حال به راحتی دیده می‌شود که $\mathbb{Z}_{p^\infty}$ به عنوان $\mathbb{Z}$ـمدول آرتینی است. زیرا فرض کنید

$$M_۱\supsetneq M_۲\supsetneq M_۳\supsetneq\cdots$$

زنجیری نزولی از $\mathbb{Z}$ـمدول‌ها باشد. در نتیجه $M_۲\neq\mathbb{Z}_{p^\infty},\{۰\}$ پس وجود دارد n ای که $M_۲=G_n$ و لذا زنجیر متوقف می‌شود. از طرفی زنجیر زیر را داریم

$$G_۱\subsetneq G_۲\subsetneq G_۳\subsetneq\cdots$$

و لذا M نوتری نیست. توجه کنید $G_n\subsetneq G_{n+۱}$، زیرا $\mathbb{Z}+۱/p^{n+۱}\in G_{n+۱}\backslash G_n$.

تمرین ۱۱. الف) فرض کنید M یک Rـمدول باشد که هر زنجیر نزولی از زیرمدول‌های دوری آن متوقف شود. ثابت کنید هر زنجیر نزولی از زیرمدول‌های با تولید متناهی آن نیز متوقف می‌شود. ب) اگر R یک حلقه باشد در این صورت هر زنجیر نزولی از ایده‌آل‌های چپ اصلی آن متوقف می‌شود اگر و تنها اگر برای هر Rـمدول N هر زنجیر نزولی از زیرمدول‌های دوری آن متوقف گردد.

نکته. می‌توان ثابت کرد که اگر حلقه‌ی R آرتینی راست باشد آنگاه هر زنجیر نزولی از ایده‌آل‌های چپ اصلی آن متوقف می‌شود.

نکته. ماتریس‌های $\begin{bmatrix} \mathbb{Q} & \mathbb{R} \\ 0 & \mathbb{R} \end{bmatrix}$ را در نظر بگیرید. این حلقه آرتینی راست است ولی آرتینی چپ نیست. همچنین حلقه $\begin{bmatrix} \mathbb{Z} & \mathbb{Q} \\ 0 & \mathbb{Q} \end{bmatrix}$ نوتری راست است ولی نوتری چپ نیست (راهنمایی: هر ایده‌آل راستش با دو عضو تولید می‌شود).

سؤال. آیا قسمت (الف) تمرین ۱۱، برای نوتری درست است؟

جواب. خیر. به عنوان مثال $\mathbb{Z}$ـمدول $\mathbb{Z}[x]$ را در نظر بگیرید.

قضیه ۲—۷. فرض کنید M یک Rـمدول و N زیرمدولی از M باشد. در این صورت M نوتری (آرتینی) است اگر و تنها اگر N و M/N نوتری (آرتینی) باشند.

اثبات. برای نوتری ثابت می‌کنیم، برای آرتینی اثبات مشابه است. اگر M نوتری باشد، چون هر زیرمدول N یک زیرمدول M است پس N نوتری است. اگر $M_1/N \subseteq M_2/N \subseteq \cdots$ زنجیری صعودی از زیرمدول‌های M/N باشد آنگاه $N \subseteq M_1 \subseteq M_2 \subseteq \cdots$ که M_i ها زیرمدول‌های M هستند، ولی M نوتری است پس وجود دارد k ای که $M_k = M_{k+1} = \cdots$ و در نتیجه $M_k/N = M_{k+1}/N = \cdots$.

حال طرف دیگر را ثابت می‌کنیم. فرض کنید $M_1 \subseteq M_2 \subseteq \cdots$ زنجیری صعودی از زیرمدول‌های M باشند. در این صورت $M_1 \cap N \subseteq M_2 \cap N \subseteq \cdots$ زنجیری صعودی از زیرمدول‌های N است و چون N نوتری است عدد طبیعی r وجود دارد به طوری که

$$M_r \cap N = M_{r+1} \cap N = \cdots$$

حال زنجیر صعودی زیر از زیرمدول‌های M/N را در نظر بگیرید

$$\frac{M_1 + N}{N} \subseteq \frac{M_2 + N}{N} \subseteq \cdots$$

چون M/N نوتری است وجود دارد s ای که

$$M_s + N = M_{s+1} + N = \cdots$$

فرض کنید $k = \max\{r, s\}$ در این صورت

$$M_k = M_k + (M_k \cap N) = M_k + (M_{k+1} \cap N)$$

حال بنابر لم ۱—۵ و اینکه $M_k \subset M_{k+1}$ می‌توان نوشت

$$= (M_k + M_{k+1}) \cap (M_k + N) = M_{k+1} \cap (M_{k+1} + N) = M_{k+1}$$

اگر همین روند را ادامه دهیم نتیجه می‌شود،

$$M_k = M_{k+1} = M_{k+2} = \cdots$$

$\square$

قضیه ۲—۸. فرض کنید $\{M_i\}_{i\in I}$ خانواده‌ای از Rـمدول‌های ناصفر باشد. در این صورت $\bigoplus_{i\in I} M_i$ آرتینی (نوتری) است اگر و تنها اگر شرایط زیر را داشته باشیم

i) I متناهی باشد.

ii) به‌ازای هر i، M_i آرتینی (نوتری) باشد.

اثبات. برای آرتینی ثابت می‌کنیم برای نوتری اثبات مشابه است. بنا به قضیه قبل هر M_i آرتینی است. اگر $|I| = \infty$ در این صورت زنجیر نزولی زیر را در نظر بگیرید.

$$\bigoplus_{i\in I} M_i \supsetneq \{0\} + \bigoplus_{i\in I\setminus\{\alpha_1\}} M_i \supsetneq \cdots$$

که با آرتینی بودن در تناقض است.

برعکس کافی است ثابت کنیم اگر M_1 و M_2 آرتینی باشند آنگاه $M_1 \oplus M_2$ نیز آرتینی است و سپس با استقراء حکم ثابت می‌شود. حال

$$\frac{M_1 \oplus M_2}{M_1} \simeq M_2 \qquad (\text{به عنوان } R\text{ـمدول})$$

و چون M_1 و M_2 آرتینی هستند بنا به قضیه قبل حکم ثابت می‌شود. $\square$

قضیه ۲—۹. فرض کنید $M = \sum_{i=1}^{n} M_i$ که در آن M_i ها زیرمدول‌هایی از M هستند. در این صورت M آرتینی (نوتری) است اگر و تنها اگر هر M_i، آرتینی (نوتری) باشد.

اثبات. چون M آرتینی است طبق قضیه ۲—۷ هر زیرمدول M آرتینی است و لذا هر M_i آرتینی است.

برعکس فرض کنید هر M_i آرتینی باشد. حال تابع $\phi : \bigoplus_{i=1}^{n} M_i \longrightarrow \sum_{i=1}^{n} M_i$ را چنین تعریف کنید

$$\phi((m_1, \dots, m_n)) = \sum_{i=1}^{n} m_i$$

به وضوح ϕ یک Rـمدول همومورفیسم پوشاست، پس بنابر قضیه اول ایزومورفیسم داریم

$$\frac{\bigoplus_{i=1}^{n} M_i}{\ker \phi} \simeq \sum_{i=1}^{n} M_i$$

طبق قضیه قبل $\bigoplus_{i=1}^{n} M_i$ آرتینی است. در نتیجه طبق قضیه ۲.۷ $\bigoplus_{i=1}^{n} M_i / \ker \phi$ آرتینی است و لذا $\sum_{i=1}^{n} M_i$ آرتینی است (اثبات برای نوتری مشابه است). $\square$

قضیه ۲ــ۱۰. فرض کنید M یک Rـمدول باشد در این صورت گزاره‌های زیر معادلند

i) M نوتری است.

ii) هر زیرمدول M با تولید متناهی است.

iii) هر مجموعهٔ ناتهی از زیرمدول‌های M دارای عضو ماکسیمال است.

اثبات. (i $\Longleftarrow$ ii) فرض کنید N زیرمدولی از M باشد و $x_1 \in N$. اگر $N = Rx_1$ آنگاه N با تولید متناهی است و چیزی برای اثبات نداریم. در غیر این صورت وجود دارد $x_2 \in N \backslash Rx_1$. اگر $N = \langle x_1, x_2 \rangle$ آنگاه N با تولید متناهی است. پس فرض کنید $N \neq \langle x_1, x_2 \rangle$. با ادامه این روند زنجیری صعودی از زیرمدول‌های N به‌دست می‌آید $\langle x_1 \rangle \subsetneq \langle x_1, x_2 \rangle \subsetneq \cdots$ که چون M نوتری است، این زنجیر بایستی متوقف شود. لذا وجود دارد n ای که $N = \langle x_1, \dots, x_n \rangle$ یعنی N با تولید متناهی است.

(ii $\Longleftarrow$ iii) اگر $\{M_i\}_{i \in I}$ یک زنجیر در خانواده‌ی مورد نظر باشد به راحتی دیده می‌شود که $\bigcup_{i \in I} M_i$ زیرمدولی از M است. طبق فرض داریم $\bigcup_{i \in I} M_i = \langle m_1, \dots, m_n \rangle$. چون M_i ها قابل مقایسه‌اند وجود دارد j ای که $\{m_1, \dots, m_n\} \in M_j$ پس

$$\bigcup_{i \in I} M_i = \langle m_1, \dots, m_n \rangle \subseteq M_j \subseteq \bigcup_{i \in I} M_i \Longrightarrow M_j = \bigcup_{i \in I} M_i$$

حال بنابر لم زرن مجموعه‌ی مذکور دارای عضو ماکسیمال است.

(iii $\Longleftarrow$ i) اگر $M_۱ \subset M_۲ \subset \cdots$ زنجیری صعودی از زیرمدول‌های M باشد در این صورت خانواده‌ی $\{M_i\}_{i=۱}^{\infty}$ را در نظر بگیرید. طبق فرض این خانواده دارای عضو ماکسیمالی مانند M_j است و لذا $\cdots = M_{j+۱} = M_j$ پس M نوتری است. □

نکته. به روش مشابه ثابت می‌شود اگر M یک Rـمدول آرتینی باشد آنگاه هر مجموعه‌ی ناتهی از زیرمدول‌های M دارای عضو مینیمال است.

قضیه ۲—۱۱. فرض کنید M یک Rـمدول نیمه ساده باشد در این صورت شرایط زیر معادلند

i) M با تولید متناهی است.

ii) M آرتینی است.

iii) M نوتری است.

اثبات. (i $\Longleftarrow$ ii) چون M نیمه ساده است، بنابراین $M = \bigoplus_{i\in I} M_i$ که M_i ها ساده‌اند و لذا M_i ها هم نوتری‌اند و هم آرتینی‌اند. فرض کنید $M = \langle m_۱, \ldots, m_n\rangle$ در این صورت چون $m_i \in M$ در نتیجه $\forall ۱ \leq i \leq n :\ m_i = m_{i_۱} + m_{i_۲} + \cdots + m_{i_{\sigma(i)}}$ که $m_{i_j} \in M_j$. در نتیجه تعدادی متناهی اندیس مانند $i_۱, i_۲, \ldots, i_t$ وجود دارد که $M = M_{i_۱} \oplus \cdots \oplus M_{i_t}$ و لذا بنا به قضیه ۲.۸ M آرتینی است.

(ii $\Longleftarrow$ iii) بنا به قضیه ۲—۸ چون M آرتینی است پس $|I| < \infty$ و لذا طبق همان قضیه M نوتری می‌شود.

(iii $\Longleftarrow$ i) چون M زیرمدولی از M است پس طبق قضیه قبل برقرار است. □

قضیه ۲—۱۱. هر Rـمدول آرتینی ناصفر دارای حداقل یک زیرمدول ساده است.

اثبات. فرض کنید M یک Rـمدول آرتینی باشد. اگر M ساده باشد که حکم ثابت است، در غیر این صورت وجود دارد زیرمدول $M_۱$ که $M_۱ \subsetneq M$. اگر $M_۱$ ساده باشد که حکم ثابت است، در غیر این صورت وجود دارد زیرمدول $M_۲$ از $M_۱$ که $M \supsetneq M_۱ \supsetneq M_۲$. با ادامه‌ی این روند زنجیری نزولی از زیرمدول‌های M به‌دست می‌آوریم که چون M آرتینی است، این زنجیر بایستی متوقف شود و لذا وجود دارد n ای که M_n ساده است. □

قضیه ۲—۱۲. فرض کنید R حلقه‌ای یکدار باشد در این صورت گزاره‌های زیر معادلند

i) R به عنوان Rـمدول چپ نوتری (آرتینی) است.

ii) هر Rـمدول با تولید متناهی نوتری (آرتینی) است.

اثبات. (i $\Leftarrow$ ii) فرض کنید M یک Rـمدول با تولید متناهی باشد. مثلاً $M = \langle m_1, \ldots, m_n \rangle$. در این صورت تابع $\phi : R^n \longrightarrow M$ را چنین تعریف می‌کنیم $\phi((r_1, \ldots, r_n)) = \sum_{i=1}^n r_i m_i$. به وضوح ϕ یک Rـمدول اپی‌مورفیسم است. در نتیجه بنابر قضیه اول ایزومورفیسم داریم، $R^n / \ker \phi \simeq M$ (به عنوان Rـمدول). بنا به قضیه ۲—۸ چون R به عنوان Rـمدول چپ نوتری است لذا R^n به عنوان Rـمدول چپ نوتری می‌شود و لذا بنا به قضیه ۲—۷ M به عنوان Rـمدول چپ نوتری است.

(ii $\Leftarrow$ i) چون $R = \langle 1 \rangle$ در نتیجه R به عنوان Rـمدول چپ با تولید متناهی است. پس طبق فرض R به عنوان Rـمدول چپ نوتری است. $\square$

سؤال. آیا در قضیه قبل شرط یکدار بودن لازم است؟

نتیجه ۲—۱۳. فرض کنید G گروهی آبلی و با تولید متناهی باشد. ثابت کنید هر زیرگروه آن نیز با تولید متناهی است.

اثبات. چون G آبلی است پس G یک $\mathbb{Z}$ـمدول است. از طرفی $\mathbb{Z}$ نوتری است و G یک $\mathbb{Z}$ـمدول با تولید متناهی است، پس بنا به قضیه قبل G به عنوان $\mathbb{Z}$ـمدول نوتری است و لذا هر زیرمدول آن که در واقع یک زیرگروه G است با تولید متناهی می‌شود.

نکته. اگر G ناآبلی باشد حکم فوق درست نیست، زیرا به عنوان مثال نقض می‌توان به گروه آزاد $G = \langle x, y \rangle$ و $H = \langle x^i y x^{-i} \mid i \in \mathbb{Z} \rangle$ اشاره کرد. به راحتی می‌توان ثابت کرد که H با تولید متناهی نیست. $\square$

تمرین ۱۲. اگر F یک میدان نامتناهی باشد. ثابت کنید گروه $F^* = F - \{0\}$ با تولید متناهی نیست.

مسأله باز. اگر D یک حلقه‌ی تقسیم نامتناهی باشد ثابت کنید D^* با تولید متناهی نمی‌شود. (جایزه: ۱نمره + ۲۰ دلار آمریکا).

سؤال. چه حلقه‌های نامتناهی R می‌شناسید که $U(R)$ (گروه عناصر وارون‌پذیر) با تولید متناهی باشد.

قضیه ۲—۱۴. فرض کنید R حلقه‌ای یکدار بوده و به عنوان Rـمدول چپ آرتینی باشد. اگر $M \neq \{۰\}$ یک Rـمدول باشد در این صورت M دارای حداقل یک زیرمدول ساده است.

اثبات. فرض کنید $۰ \neq x \in M$. در این صورت Rx با تولید متناهی است و لذا بنا به قضیه قبل Rx به عنوان Rـمدول آرتینی است. حال بنابر قضیه ۲—۱۲، Rx دارای زیرمدولی ساده است. □

تعریف ۲—۱۵. حلقه‌ی R را نوتری چپ (آرتینی چپ) گوییم هرگاه هر زنجیر صعودی (نزولی) از ایده‌آل‌های چپ آن سرانجام متوقف شود. به همین ترتیب نوتری راست و آرتینی راست تعریف می‌شود.

تعریف ۲—۱۶. حلقه‌ی R را نوتری گوییم هرگاه R هم نوتری چپ و هم نوتری راست باشد. حلقه‌ی آرتینی نیز مشابهاً تعریف می‌شود.

قضیه ۲—۱۷. فرض کنید R حلقه‌ای یکدار باشد. در این صورت R نوتری چپ (آرتینی چپ) است اگر و تنها اگر به‌ازای هر $n \geq ۱$، $M_n(R)$ نوتری چپ (آرتینی چپ) باشد (به عنوان حلقه).

اثبات. $M_n(R)$ به عنوان Rـمدول چپ با تولید متناهی است و با $e_{۱۱}, e_{۱۲}, \ldots, e_{nn}$ تولید می‌شود. بنا به قضیه ۲.۹ $M_n(R)$ به عنوان Rـمدول چپ نوتری می‌شود. حال نشان می‌دهیم به عنوان $M_n(R)$ـمدول چپ نیز نوتری است. زیرا اگر $I_۱ \subseteq I_۲ \subseteq \cdots$ زنجیری صعودی از زیرمدول‌های $M_n(R)$ به عنوان $M_n(R)$ـمدول چپ باشد، آنگاه تمامی I_j ها Rـمدول چپ نیز می‌باشند، زیرا به‌ازای هر $r \in R$، $rI \in M_n(R)$. چون $M_n(R)$ به عنوان Rـمدول نوتری است در نتیجه وجود دارد k ای که $I_k = I_{k+۱} = \cdots$ پس $M_n(R)$ نوتری چپ است.

برعکس این قضیه برای یک n نیز کار می‌کند. فرض کنید $M_n(R)$ نوتری چپ و $I_۱ \subsetneq I_۲ \subsetneq I_۳ \subsetneq \cdots$ زنجیری صعودی از ایده‌آل‌های چپ متمایز R باشد. در این صورت

$$M_n(I_۱) \subsetneq M_n(I_۲) \subsetneq M_n(I_۳) \subsetneq \cdots$$

زنجیری صعودی از ایده‌آل‌های چپ متمایز $M_n(R)$ است. ولی این با نوتری چپ بودن $M_n(R)$ تناقض دارد، پس R نوتری چپ است. □

قضیه اساسی هیلبرت ۲—۱۸. فرض کنید R حلقه‌ای یکدار و نوتری چپ باشد. در این صورت $R[x]$ نوتری چپ است.

اثبات. بنا به قضیه ۲—۹ کافی است ثابت کنیم به‌ازای هر ایده‌آل چپ J از $R[x]$، J با تولید متناهی است. پس فرض کنید J ایده‌آل چپی از $R[x]$ باشد. برای هر $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ قرار دهید $I_n = \{a \in R \mid \exists ax^n + bx^{n-1} + \cdots \in J\}$ ادعا می‌کنیم به‌ازای هر $n \geq 0$، I_n ایده‌آل چپی از R است.

$$a, a' \in I_n \Longrightarrow \begin{cases} ax^n + bx^{n-1} + \cdots \in J \\ a'x^n + b'x^{n-1} + \cdots \in J \end{cases} \Longrightarrow (a-a')x^n + (b-b')x^{n-1} + \cdots \in J \Longrightarrow a - a' \in I_n$$

اگر $r \in R$ و $ax^n + bx^{n-1} + \cdots \in J$ آنگاه چون $r \in R[x]$ پس $rax^n + rbx^{n-1} + \cdots \in J$ لذا $ra \in I_n$ پس J ایده‌آل چپ R است. به‌ازای هر $n \geq 0$، داریم $I_n \subseteq I_{n+1}$، زیرا

$$a \in I \Longrightarrow \exists ax^n + bx^{n-1} + \cdots + \in J \Longrightarrow ax^{n+1} + bx^n + \cdots \in J \Longrightarrow a \in I_{n+1}$$

اما $\cdots \subseteq I_2 \subseteq I_1 \subseteq I_0$ و R نوتری چپ است پس وجود دارد t ای که $\cdots = I_{t+1} = I_t$. چون R نوتری چپ است پس به ازای هر $n \geq 0$ عناصر $r_j \in R$ وجود دارند که $I_n = (r_{n_1}, r_{n_2}, \ldots, r_{n_{i(n)}})$. پس بنا به تعریف وجود دارد $f_{n_j} \in J$ به طوری که

$$f_{n_j} = r_{n_j}x^n + \cdots \in J \qquad (\text{طبق تعریف } I_n)$$

ادعا می‌کنیم اگر $X = \{f_{n_j} \in J \mid 0 \leq n \leq t, 1 \leq j \leq i(n)\}$ آنگاه $R[x]X = J$ (ایده‌آل چپ تولید شده توسط X). فرض کنید $g(x) \in J$ از درجه‌ی k باشد، با استقراء روی k ثابت می‌کنیم $g(x) \in R[x]X$. قرار دهید $k = 0$ چون $\{r_{0_1}, r_{0_2}, \ldots, r_{0_{i(0)}}\} \subseteq X$ در نتیجه اگر $g(x) = r \in R$ آنگاه r توسط مجموعه‌ی فوق تولید می‌شود و لذا $r \in R[x]X$. حال فرض کنید حکم برای هر چندجمله‌ای از درجه‌ی حداکثر $k-1$ درست باشد یعنی اگر $\deg g(x) \leq k-1$ و $g(x) \in J$ آنگاه $g(x) \in R[x]X$. می‌خواهیم نشان دهیم اگر $\deg g(x) = k$ و $g(x) \in J$ آنگاه $g(x) \in R[x]X$. دو حالت در نظر می‌گیریم

i) $k \leq t$. فرض کنید $g(x) = rx^k + \cdots \in J$ طبق تعریف داریم،

$$r \in I_k \Longrightarrow r = s_1 r_{k_1} + s_2 r_{k_2} + \cdots + s_{i(k)} r_{k_{i(k)}}$$

همچنین داریم $f_{k_j}(x) = r_{k_j}x^k + \cdots \in J$. حال چون $g(x), f_{k_j} \in J$ پس

$$h(x) = g(x) - \sum_{j=۱}^{i(k)} s_j f_{k_j}(x) \in J$$

اما $\deg h(x) \leq k - ۱$ و لذا بنا به فرض استقراء $h(x) \in R[x]X$ پس $g(x) \in R[x]X$.

ii) $k > t$. داریم $I_k = I_t$. در نتیجه اگر $g(x) = rx^k + \cdots \in J$ آنگاه $r \in I_k = I_t$ پس

$$r = s_۱ r_{t_۱} + s_۲ r_{t_۲} + \cdots + s_{i(t)} r_{t_{i(t)}}$$

همچنین وجود دارند چندجمله‌ای‌های $f_{t_j} \in J$ به طوری که $f_{t_j}(x) = r_{t_j}x^t + \cdots \in J$ حال اگر تعریف کنید $h(x) = g(x) - x^{k-t}\sum_{j=۱}^{i(t)} s_j f_{t_j}(x)$ آنگاه $\deg h(x) \leq k - ۱$ و لذا بنا به فرض استقراء $h(x) \in R[x]X$ و در نتیجه $g(x) \in R[x]X$. $\square$

نکاتی درباره‌ی قضیه اساسی هیلبرت

۱) اگر $R[x]$ نوتری چپ باشد آیا R نوتری چپ است؟

بله. حتی اگر R یکدار نباشد. زیرا اگر $I_۱ \subsetneq I_۲ \subsetneq \cdots$ زنجیری صعودی از ایده‌آل‌های چپ R باشد در این صورت $I_۱[x] \subsetneq I_۲[x] \subsetneq \cdots$ زنجیری صعودی از ایده‌آل‌های چپ $R[x]$ است که متوقف نمی‌شود.

۲) اگر R یکدار نباشد قضیه اساسی هیلبرت ممکن است درست نباشد. زیرا قرار دهید $R = ۲\mathbb{Z}$ و زنجیر

$$\langle ۲ \rangle \subsetneq \langle ۲, ۲x \rangle \subsetneq \langle ۲, ۲x, ۲x^۲ \rangle \subsetneq \cdots$$

را در نظر بگیرید.

۳) این قضیه برای آرتینی چپ اصلاً درست نیست. زیرا

$$\langle x \rangle \supsetneq \langle x^۲ \rangle \supsetneq \langle x^۳ \rangle \supsetneq \cdots$$

تمرین ۱۳. ثابت کنید اگر R حلقه‌ای جابجایی باشد و $R[x]$ نوتری باشد آنگاه R یکدار است. اگر R غیر جابجایی باشد و $R[x]$ نوتری چپ باشد آیا R یکدار است؟

۳ قضیه آرتین-ودربرن

قضیه ۳—۱. فرض کنید $M = \bigoplus_{i=1}^{k} M_i$ و M_i ها Rـمدول باشند. در این صورت داریم

$$Hom_R(M,M) \simeq \begin{array}{cc} & \text{ستون } j \text{ ام} \\ \text{سطر } i \text{ ام} & \left[\begin{array}{c} \\ Hom_R(M_j, M_i) \\ \\ \end{array} \right]_{k \times k} \end{array} \quad \text{(به عنوان حلقه)}$$

(توجه. درایه‌ها گروه هستند ولی ماتریس‌های سمت راست با ضرب طبیعی تشکیل حلقه می‌دهند.)

اثبات. تابع $\sigma : Hom_R(M,M) \longrightarrow T$ را که در آن T حلقه‌ی ماتریسی است، چنین تعریف کنید

$$\begin{cases} \sigma(\phi) = [\pi_i \phi \lambda_j]_{1 \leq i,j \leq k} \\ \begin{cases} \pi_i : M \longrightarrow M_i \\ \pi_i((m_1, \ldots, m_k)) = m_i \end{cases} \\ \begin{cases} \lambda_j : M_j \longrightarrow M \\ \lambda_j(m_j) = (0, \ldots, 0, m_j, 0, \ldots, 0) \end{cases} \end{cases}$$

توجه کنید $\pi_i \phi \lambda_j \in Hom_R(M_j, M_i)$ و لذا σ خوش تعریف است. σ هومومورفیسم است، زیرا

$$\sigma(\phi_1 + \phi_2) = [\pi_i(\phi_1 + \phi_2)\lambda_j] = [\pi_i \phi_1 \lambda_j] + [\pi_i \phi_2 \lambda_j] = \sigma(\phi_1) + \sigma(\phi_2)$$

$$(\sigma(\phi_1)\sigma(\phi_2))_{ij} = \sum_{t=1}^{k} (\pi_i \phi_1 \lambda_t)(\pi_t \phi_2 \lambda_j) = \pi_i \phi_1 (\sum_{t=1}^{k} \lambda_t \pi_t) \phi_2 \lambda_j = (\pi_i \phi_1)(\phi_2 \lambda_j) = \pi_i(\phi_1 \phi_2)\lambda_j$$

$$(\sigma(\phi_1 \phi_2))_{ij} = \pi_i(\phi_1 \phi_2)\lambda_j$$

پس چون درایه‌ی ij ام هر دو عبارت برابر شد داریم،

$$\sigma(\phi_1 \phi_2) = \sigma(\phi_1)\sigma(\phi_2)$$

σ یک به یک است، زیرا اگر $\phi \neq 0$ آنگاه چون ϕ جمع را حفظ می‌کند پس وجود دارد $m_j \in M_j$ به طوری که $\phi(0, \ldots, 0, m_j, 0, \ldots, 0) \neq 0$. حال چون $\phi(0, \ldots, 0, m_j, 0, \ldots, 0) \neq 0$ پس وجود دارد i ای که $0 \neq m'_i \in M_i$ و $\phi(0, \ldots, 0, m_j, 0, \ldots, 0) = (*, \ldots, *, m'_i, *, \ldots, *)$. داریم

$$\pi_i \phi \lambda_j(m_j) = \pi_i \phi(0, \ldots, 0, m_j, 0, \ldots, 0) = m'_i \neq 0$$

پس مؤلفه ijـام ناصفر است، یعنی $\sigma(\phi) \neq 0$. σ پوشا است، زیرا فرض کنید $[f_{ij}] \in T$ و هومورفیسم زیر را در نظر بگیرید

$$\sum_{1 \leq i', j' \leq k} \lambda_{i'} f_{i'j'} \pi_{j'} \in Hom_R(M, M),$$

حال چون $\pi_i \lambda_j = \delta_{ij} \cdot 1$ پس داریم

$$\sigma(\sum \lambda_{i'} f_{i'j'} \pi_{j'}) = [\pi_i(\sum \lambda_{i'} f_{i'j'} \pi_{j'})\lambda_j] = [\pi_i \lambda_i f_{ij} \pi_j \lambda_j] = [f_{ij}]$$

در نتیجه σ پوشاست و لذا σ یک یکریختی حلقه‌ای است. □

تعریف ۳—۲. اگر R یک حلقه باشد آنگاه حلقه‌ی R^{op} حلقه‌ای است که عناصر آن همان عناصر R و جمع آن همان جمع R است. ولی برای هر $x, y \in R^{op}$ ضرب را به صورت $x \cdot y = yx$ تعریف می‌کنیم.

سؤال. آیا حلقه‌ای متناهی می‌شناسید که $R \not\simeq R^{op}$؟

نکته. حلقه‌هایی وجود دارند که $R \not\simeq R^{op}$. مثلاً حلقه‌ای که نوتری چپ است ولی نوتری راست نیست. ولی اگر $\mathbb{H}$ حلقه‌ی کواترنیون‌های حقیقی باشد، داریم $\mathbb{H} \simeq \mathbb{H}^{op}$ زیرا تابع $\theta : \mathbb{H} \longrightarrow \mathbb{H}^{op}$ را با ضابطه‌ی $\theta(a + bi + cj + dk) = a - bi - cj - dk$ در نظر بگیرید.

نکته. اگر R یک حلقه باشد در این صورت داریم $(M_n(R))^{op} \simeq M_n(R^{op})$. زیرا تابع

$$i : (M_n(R))^{op} \longrightarrow M_n(R^{op})$$

را با ضابطه‌ی $i(A) = A^t$ تعریف کنید. واضح است که i یک به یک و پوشاست و

$$i(A + B) = (A + B)^t = A^t + B^t = i(A) + i(B)$$

$$\begin{cases} i(A)i(B) = A^t B^t \Longrightarrow (A^t B^t)_{ij} = \sum_{\ell=1}^{n} a^t_{i\ell} \cdot b^t_{\ell j} = \sum_{\ell=1}^{n} b_{j\ell} a_{\ell i} \\ i(A \cdot B) = i(BA) = (BA)^t \Longrightarrow (BA)^t_{ij} = (BA)_{ji} = \sum_{\ell=1}^{n} b_{j\ell} a_{\ell i} \end{cases}$$

و لذا $i(A \cdot B) = i(A)i(B)$.

لم ۳ـ۳. اگر R حلقه‌ای یکدار باشد در این صورت داریم

$$Hom_R(R,R) \simeq R^{op} \qquad \text{(به عنوان حلقه)}$$

اثبات. تابع $f\ :\ R^{op} \longrightarrow Hom_R(R,R)$ را با ضابطه‌ی زیر تعریف کنید

$$\begin{cases} f(a) = f_a \\ \begin{cases} f_a : R \longrightarrow R \\ f_a(x) = xa \end{cases} \end{cases}$$

f جمع و ضرب را حفظ می‌کند، زیرا

$$\begin{cases} f_{a+b}(x) = x(a+b) = xa + xb = f_a(x) + f_b(x) \\ f_{a\cdot b}(x) = f_{ba}(x) = xba = (xb)a = f_a(f_b(x)) \end{cases}$$

اگر $f_a = ۰$ آنگاه به‌ازای هر $x \in R$ داریم $f_a(x) = ۰$، به خصوص برای $x = ۱$، پس $۱ \cdot a = ۰$ و لذا $a = ۰$ در نتیجه f یک به یک است. f پوشا نیز هست زیرا اگر $\theta \in Hom_R(R,R)$ آنگاه قرار دهید $a = \theta(۱)$. چون θ یک Rـمدول همومورفیسم چپ است پس به‌ازای هر $x \in R$ داریم $\theta(x) = x\theta(۱) = xa$ و در نتیجه $f(\theta(۱)) = \theta$ یعنی f پوشاست. □

قضیه (آرتین-ودربرن) ۳ـ۴. فرض کنید R حلقه‌ای نیمه‌ساده باشد در این صورت اعداد طبیعی $n_۱, \ldots, n_k$ وجود دارند که $R \simeq \prod_{i=۱}^{k} M_{n_i}(D_i)$ (به عنوان حلقه) که در آن D_i ها حلقه‌های تقسیم هستند.

اثبات. چون R حلقه‌ای نیمه ساده است بنا به تمرین ۵ داریم، $R = \bigoplus_{i=۱}^{\ell} M_i$ که در آن M_i ها Rـمدول‌های ساده هستند. می‌خواهیم مدول‌های M_i را دسته‌بندی کنیم. بدون کاسته شدن از کلیت می‌توان نوشت

$$R \simeq \bigoplus_{i=۱}^{k} n_i M_i \qquad \text{(به عنوان } R\text{ـمدول)}$$

که در آن به‌ازای هر $i \neq j$، M_i با M_j به عنوان Rـمدول یکریخت نمی‌باشد. با استفاده از لم قبل داریم

$$R^{op} \simeq Hom_R(R,R) \simeq Hom_R(\bigoplus_{i=۱}^{k} n_i M_i, \bigoplus_{i=۱}^{k} n_i M_i) \qquad \text{(به عنوان حلقه)}$$

زیرا اگر $M \overset{f}{\simeq} N$ (به عنوان Rـمدول) آنگاه ایزومورفیسم $g \longrightarrow fgf^{-۱}$ یکریختی

$$Hom_R(N,N) \simeq Hom_R(M,M) \qquad \text{(به عنوان حلقه)}$$

را القاء می‌کند.

بنابر تمرین ٦ داریم $n_in_jHom_R(M_i,M_j)\simeq Hom_R(n_iM_i,n_jM_j)$ (به عنوان $\mathbb{Z}$ـمدول). چون به‌ازای $i\neq j$، $M_i\not\simeq M_j$ بنا به لم شور $Hom_R(M_i,M_j)=\{0\}$. در نتیجه $Hom_R(n_iM_i,n_jM_j)=\{0\}$ (به عنوان Rـمدول) بنا به قضیه ۲—۱۹ داریم

$$R^{op}\simeq\begin{bmatrix}[Hom_R(M_1,M_1)]_{n_1\times n_1} & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & [Hom_R(M_k,M_k)]_{n_k\times n_k}\end{bmatrix}\qquad \text{(به عنوان حلقه)}$$

چون M_i ها، Rـمدول‌های ساده هستند بنا بر لم شور $Hom_R(M_i,M_i)$ حلقه‌ی تقسیم است که آن را با D'_i نشان می‌دهیم. در نتیجه یکریختی‌های زیر برقرارند

$$R^{op}\simeq\begin{bmatrix}M_{n_1}(D'_1) & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & M_{n_k}(D'_k)\end{bmatrix}\simeq\prod_{i=1}^{k}M_{n_i}(D'_i)\qquad \text{(به عنوان حلقه)}$$

پس

$$(R^{op})^{op}\simeq\prod_{i=1}^{k}M_{n_i}(D'^{op}_i)\qquad \text{(به عنوان حلقه)}$$

چون D'_i ها حلقه‌های تقسیم هستند در نتیجه D'^{op}_i ها نیز حلقه‌ی تقسیم هستند. حال به‌ازای $1\leq i\leq k$ اگر قرار دهید $D_i=D'^{op}_i$ آنگاه حکم نتیجه می‌شود. $\square$

تمرین ۱۴. فرض کنید K حلقه‌ای یکدار و F، Kـمدولی با پایه‌ی نامتناهی ولی شمارای $\{e_1,e_2,\ldots\}$ باشد. اگر $R=Hom_K(F,F)$ و n عدد صحیح مثبت دلخواهی باشد آنگاه ثابت کنید Rـمدول چپ R پایه‌ای با n عضو دارد؛ یعنی به‌ازای هر تعداد جمعوند متناهی، $R\simeq R\oplus R\cdots\oplus R$ (به عنوان Rـمدول).

تمرین ۱۵. حلقه‌ای مانند R چنان مثال بزنید که R ددکیند_متناهی باشد ولی $M_2(R)$ ددکیند_متناهی نباشد. (حلقه R را ددکیند_متناهی گویند هرگاه برای هر $a,b\in R$، $ab=1$ نتیجه دهد که $ba=1$.)

تعریف ۵—۳. فرض کنید M یک Rـمدول باشد. در این صورت یک سری (زنجیر) از زیرمدول‌های M به صورت زیر می‌باشد

$$\{0\}=M_0\subsetneq M_1\subsetneq M_2\subsetneq\cdots\subsetneq M_n=M$$

طول این سری را برابر n تعریف می‌کنیم. در واقع n تعداد شمول‌ها "$\subsetneq$" می‌باشد.

فرض کنید $\{M_i\}_{i=1}^{n}$ و $\{M'_i\}_{i=1}^{m}$ دو سری از زیرمدول‌های M باشند. گوییم $\{M'_i\}_{i=1}^{m}$ یک تظریف[10] $\{M_i\}_{i=1}^{n}$ است هرگاه داشته باشیم $\{M_i\}_{i=1}^{n} \subseteq \{M'_i\}_{i=1}^{m}$. سری فوق را یک سری ترکیبی[11] نامند هرگاه به‌ازای $1 \leq i \leq n$، M_i/M_{i-1} به عنوان Rـمدول ساده باشد.

نکته. اگر Rـمدول M سری ترکیبی داشته باشد آنگاه M_1 به عنوان Rـمدول ساده است و M_{n-1} نیز یک Rـزیرمدول ماکسیمال M است.

مثال ۱. اگر M_i ها، Rـمدول‌های ساده باشند آنگاه $M = \bigoplus_{i=1}^{k} M_i$ دارای سری ترکیبی زیر است

$$\{0\} \subsetneq M_1 \subsetneq M_1 \oplus M_2 \subsetneq \cdots \subsetneq \bigoplus_{i=1}^{k} M_i = M$$

طول این سری برابر k است.

مثال ۲. $\mathbb{Z}_{p^\infty}$ به عنوان $\mathbb{Z}$ـمدول سری ترکیبی ندارد، زیرا زیرمدول ماکسیمال ندارد.

مثال ۳. $\mathbb{Z}$ به عنوان $\mathbb{Z}$ـمدول سری ترکیبی ندارد، زیرا زیرمدول مینیمال یا ساده ندارد.

مثال ۴. اگر $\{M_i\}_{i=1}^{\infty}$ زیرمدول‌های ساده‌ی M باشند و $M = \bigoplus_{i=1}^{\infty} M_i$ در این صورت M سری ترکیبی ندارد، زیرا اگر $\{0\} \subsetneq N_1 \subsetneq \cdots \subsetneq N_m = M$ یک سری ترکیبی برای M باشد آنگاه چون N_1 ساده است پس N_1 نوتری است و چون N_2/N_1 ساده است پس نوتری است و لذا بنابر قضیه ۲—۷، N_2 نوتری است و به همین ترتیب با استقراء ثابت می‌شود $N_m = M$ نوتری است. و لذا بنا به قضیه ۲—۸ تعداد M_i ها بایستی متناهی باشد که تناقض است.

نکته. اگر Rـمدول M سری ترکیبی داشته باشد، هم نوتری و هم آرتینی است.

تعریف ۳—۶. فرض کنید M یک Rـمدول باشد و حداقل یک سری ترکیبی داشته باشد. در این صورت طول[12] Rـمدول M را طول کوتاهترین سری ترکیبی M تعریف می‌کنیم و آن را با $\ell(M)$ نمایش می‌دهیم. اگر Rـمدول M دارای هیچ سری ترکیبی نباشد تعریف می‌کنیم $\ell(M) = +\infty$.

[10] Refinement
[11] Composition serie
[12] Length

قضیه ۳−۷. فرض کنید M یک Rـمدول باشد و $\ell(M) < \infty$. در این صورت اگر N زیرمدول سره‌ای از M باشد آنگاه $\ell(N) < \ell(M)$.

اثبات. فرض کنید $\{0\} = M_0 \subsetneq M_1 \subsetneq \cdots \subsetneq M_n = M$ یک سری ترکیبی برای M باشد. به‌ازای هر $1 \le i \le n$ داریم $M_{i-1} \cap N \subseteq M_i \cap N$، $M \cap N = N$ و $\{0\} \cap N = \{0\}$. فرض کنید $M_{i-1} \cap N \subsetneq M_i \cap N$. نشان می‌دهیم $M_i \cap N / M_{i-1} \cap N$، Rـمدولی ساده است. تابع $\phi : M_i \cap N \longrightarrow M_i/M_{i-1}$ را به صورت طبیعی تعریف کنید. داریم

$$\ker \phi = M_{i-1} \cap M_i \cap N = M_{i-1} \cap N$$

در نتیجه بنابه قضیه‌ی اول ایزومورفیسم داریم

$$\frac{M_i \cap N}{M_{i-1} \cap N} \simeq Im\phi \qquad (\text{به عنوان } R\text{ـمدول})$$

ولی $Im\phi$ زیرمدول Rـمدول ساده‌ی M_i/M_{i-1} است. پس

$$\frac{M_i \cap N}{M_{i-1} \cap N} \neq \{0\} \Longrightarrow \frac{M_i \cap N}{M_{i-1} \cap N} \simeq \frac{M_i}{M_{i-1}}$$

یعنی $M_i \cap N / M_{i-1} \cap N$، Rـمدولی ساده است. حال اگر از میان زیرمدول‌های $\{M_i \cap N\}_{i=1}^{n}$ زیرمدول‌های تکراری را حذف کرده و فقط یکی را نگه داریم، به یک سری ترکیبی برای N می‌رسیم و در نتیجه $\ell(N) \le n = \ell(M)$.

اگر $\ell(N) = \ell(M)$ آنگاه همان‌طور که در روند اثبات دیده شد بایستی به‌ازای هر $1 \le i \le n$ داشته باشیم $M_{i-1} \cap N \subsetneq M_i \cap N$. فرض کنید j اندیسی باشد که $M_{j-1} \subset N$ ولی $M_j \not\subseteq N$. توجه کنید این اندیس وجود دارد زیرا $M \not\subseteq N$ و $N \subset \{0\}$. چون $M_j \cap N/M_{j-1}$ زیرمدولی از M_j/M_{j-1} است و M_j/M_{j-1} ساده است پس $M_j \cap N = M_j$ یا $M_j \cap N = M_{j-1}$. اگر $M_j \cap N = M_j$ در این صورت $M_j \subset N$ که تناقض است. اگر $M_j \cap N = M_{j-1}$ آنگاه $M_j \cap N = M_{j-1} \cap N$ که تناقض است. پس $\ell(N) < \ell(M)$. $\square$

قضیه (جردن[13]ـهُلدر[14]) ۳−۸. فرض کنید M یک Rـمدول باشد و $\ell(M) = n < \infty$ در این صورت

---
[13] Holder
[14] Jordan

طول هر دو سری ترکیبی M برابر n است و هر سری از زیرمدول‌های M را که در نظر بگیریم دارای تظریفی است که سری ترکیبی برای M است.

اثبات. نخست نشان می‌دهیم که طول هر زنجیر از زیرمدول‌های M حداکثر n است. فرض کنید $M_\circ \subsetneq M_1 \subsetneq \cdots \subsetneq M_{n'} = M$ یک زنجیر دلخواه باشد. بنا به قضیه قبل داریم $\ell(M_\circ) < \ell(M_1) < \cdots < \ell(M_{n'-1}) < \ell(M) = n$. چون $\ell(M_i)$ ها اعداد صحیح نامنفی‌اند پس $\ell(M) \geq n'$ و لذا $n \geq n'$. حال فرض کنید $M'_\circ \subsetneq M'_1 \subsetneq \cdots \subsetneq M'_{n'} = M$ یک سری ترکیبی برای M باشد. بنا به تعریف طول داریم $n \leq n'$، از طرفی بنا به قسمت قبل $n \geq n'$ پس $n = n'$.

برای قسمت بعد فرض کنید $M_\circ \subsetneq M_1 \subsetneq \cdots \subsetneq M_m = M$ یک سری دلخواه باشد. حال بزرگترین تظریف این سری را از نظر بزرگی طول در نظر بگیرید. توجه کنید بزرگترین تظریف وجود دارد زیرا طول هر سری حداکثر n است. حال واضح است که سری فوق یک سری ترکیبی برای M است، زیرا اگر M'_i/M'_{i-1} ای ساده نباشد بین M'_i و M'_{i-1} می‌توان یک جمله اضافه نمود و به یک سری بزرگتر رسید. $\square$

نتیجه ۳—۹. فرض کنید M و N دو Rـمدول ساده باشند و $M^m \simeq N^n$ (به عنوان Rـمدول). در این صورت $m = n$ و $M \simeq N$ (به عنوان Rـمدول).

اثبات. قبلاً دیدیم که $\ell(M^m) = m$ و $\ell(N^n) = n$. اگر $\phi : M^m \longrightarrow N^n$ یک Rـمدول هومومورفیسم باشد و $\{M_i\}_{i=\circ}^m$ یک سری ترکیبی برای M^m باشد، واضح است که $\{\phi(M_i)\}_{i=\circ}^m$ یک سری ترکیبی برای N^n است. در نتیجه $\ell(N^n) = m$ و لذا $m = n$.

برای قسمت دوم چون N^n یک Rـمدول نیمه ساده است در نتیجه بنا به قضیه ۱—۲۱ بایستی داشته باشیم $M \simeq N^i$ و چون M ساده است پس $i = 1$ و لذا $M \simeq N$. $\square$

لم ۳—۱۰. اگر N زیرمدولی از Rـمدول M باشد آنگاه داریم

$$\ell(M) = \ell(N) + \ell(\frac{M}{N})$$

اثبات. اگر $\ell(N) = \infty$ آنگاه $\ell(M) = \infty$. زیرا اگر $\ell(M) < \infty$ آنگاه $\ell(N) < \infty$ که تناقض است پس در

این حالت تساوی برقرار می‌شود.

اگر $\ell(N) < \infty$ و $\ell(M/N) < \infty$ واضح است که $\ell(M) < \infty$. پس فرض کنید $\ell(N)$ و $\ell(M/N)$ متناهی‌اند. فرض کنید $N_0 \subsetneq N_1 \subsetneq \cdots \subsetneq N_n = N$ یک سری ترکیبی باشد در این صورت $\ell(N) = n$. فرض کنید $N/N \subsetneq M'_1/N \subsetneq \cdots \subsetneq M'_{n'}/N = M/N$ سری ترکیبی برای M/N باشد در این صورت $\ell(M/N) = n'$. با استفاده از دو سری ترکیبی فوق یک سری ترکیبی برای M به طول $n + n'$ می‌سازیم و چون طول هر دو سری ترکیبی M برابرند پس

$$\ell(M) = n + n' = \ell(N) + \ell(\frac{M}{N})$$

□

تمرین ۱۶. فرض کنید F یک میدان بوده و $f(x) \in F[x]$ و $\deg f = n$ و f دقیقاً دو عامل تحویل‌ناپذیر داشته باشد یعنی $f(x) = f_1^{n_1}(x)f_2^{n_2}(x)$ و f_1, f_2 تحویل‌ناپذیرند. در این صورت طول $F[x]/\langle f(x)\rangle$ را به عنوان $F[x]$ـمدول و Fـمدول محاسبه نمایید.

تمرین ۱۷. فرض کنید M یک Rـمدول بوده و $\ell(M) = n$ باشد. اگر $\{M_i\}_{i=0}^{n}$، $\{M'_i\}_{i=0}^{n}$ دو سری ترکیبی برای M باشند، ثابت کنید جایگشت $\sigma \in S_{n+1}$ وجود دارد که با حفظ تکرر داریم

$$\frac{M_i}{M_{i-1}} \simeq \frac{M'_{\sigma(i)}}{M'_{\sigma(i)-1}} \qquad \text{(به عنوان } R\text{ـمدول)}$$

تمرین ۱۸. فرض کنید R حلقه‌ای جابه‌جایی و یکدار باشد و $A \in M_n(\mathbb{R})$ و $\det A$ یک مقسوم علیه صفر A باشد. ثابت کنید وجود دارد $0 \neq B \in M_n(R)$ به طوری که $AB = BA = 0$.

قضیه ۳–۱۱. فرض کنید M یک Rـمدول باشد. در این صورت $\ell(M) < \infty$ اگر و تنها اگر M نوتری و آرتینی باشد.

اثبات. فرض کنید $\ell(M) < \infty$ در این صورت چون طول هر سری حداکثر $\ell(M)$ است پس به وضوح M هم نوتری است و هم آرتینی. البته توجه کنید که به ابتدا و انتهای هر زنجیر صعودی یا نزولی می‌توان $\{0\}$ و M را اضافه کرد.

برعکس چون M آرتینی است پس وجود دارد زیرمدول M_1 از M که به عنوان Rـمدول مینیمال است. اگر $M_1 = M$ که M ساده است و لذا $\ell(M) < \infty$. پس فرض کنید $M_1 \neq M$ حال چون M آرتینی است پس خانواده زیرمدول‌های شامل M_1، دارای عضو مینیمالی مانند M_2 است. اگر $M_2 = M$ آنگاه $\ell(M) < \infty$. اگر همین روند را ادامه دهیم آنگاه وجود دارد i ای که $M_i = M$. زیرا اگر $M_1 \subsetneq M_2 \subsetneq \cdots$ آنگاه با نوتری بودن M در تناقض است. حال چون سری فوق یک سری ترکیبی برای M است پس $\ell(M) < \infty$. □

لم ۳—۱۲. فرض کنید R یک حلقه دلخواه بوده و e عنصری خودتوان از R باشد. در این صورت داریم

$$(eRe)^{op} \simeq End_R(Re) \qquad \text{(به عنوان حلقه)}$$

اثبات. تعریف کنید

$$\begin{cases} \begin{cases} \phi : (eRe)^{op} \longrightarrow End_R(Re) \\ \phi(eae) = f_{eae} \end{cases} \\ \begin{cases} f_{eae} : Re \longrightarrow Re \\ f_{eae}(x) = xeae \end{cases} \end{cases}$$

ابتدا نشان می‌دهیم $Im\phi \subseteq End_R(Re)$. اگر $r \in R, x \in Re$ آنگاه

$$f_{eae}(rx) = (rx)(eae) = r(xeae) = rf_{eae}(x) \Longrightarrow f_{eae} \in End_R(Re)$$

به وضوح ϕ جمع را حفظ می‌کند. ϕ ضرب را نیز حفظ می‌کند، زیرا

$$\phi(eae \cdot ebe) = \phi(ebe^2ae) = \phi(ebeae) = f_{ebeae} = f_{eae} \circ f_{ebe} = \phi(eae)\phi(ebe)$$

ϕ یک به یک نیز هست، زیرا

$$\phi(eae) = 0 \Longrightarrow f_{eae} = 0 \Longrightarrow f_{eae}(e^2) = 0 \Longrightarrow e^2(eae) = 0 \Longrightarrow eae = 0$$

ϕ پوشا نیز هست، زیرا

$$g \in End_R(Re) \Longrightarrow \phi(eg(e)e)(x) = xeg(e)e = xg(e)e = xg(e) = g(xe) = g(x)$$

پس ϕ ایزومورفیسم است. □

لم ۳—۱۳. اگر D یک حلقه‌ی تقسیم باشد آنگاه $M_n(D)e_{ii}$ یک ایده‌آل چپ مینیمال $M_n(D)$ است.

$$M_n(D)e_{ii} = \left\{ \begin{bmatrix} & a_{1i} & \\ \circ & \vdots & \circ \\ & a_{ni} & \end{bmatrix} \mid a_{ji} \in D \right\}$$

اثبات. با استفاده از ماتریس‌های جایگشتی و اعمال سطری مقدماتی. □

لم ۳—۱۴. فرض کنید R و R' دو حلقه بوده و $R \overset{f}{\simeq} R'$ (به عنوان حلقه). اگر M یک R'ـمدول باشد آنگاه

$$End_R(M) = End_{R'}(M)$$

اثبات. اگر برای هر $r \in R$ و $m \in M$ تعریف کنیم $r \cdot m = f(r)m$ در این صورت M به یک Rـمدول تبدیل می‌شود. حال فرض کنید $\phi \in End_R(M)$ در این صورت به‌ازای هر $r' \in R'$ وجود دارد $r \in R$ به طوری که $f(r) = r'$ پس

$$\phi(r'm) = \phi(f(r)m) = \phi(r \cdot m) = r \cdot \phi(m) = f(r)\phi(m) = r'\phi(m) \Longrightarrow \phi \in End_{R'}(M)$$

برعکس اگر $\phi \in End_{R'}(M)$ آنگاه

$$\forall r \in R : \phi(r \cdot m) = \phi(f(r)m) = f(r)\phi(m) = r\phi(m) \Longrightarrow \phi \in End_R(M)$$

□

قضیه ۳—۱۵. فرض کنید D_1 و D_2 دو حلقه‌ی تقسیم باشند و $M_n(D_1) \simeq M_m(D_2)$ (به عنوان حلقه). در این صورت داریم $m = n$ و $D_1 \simeq D_2$ (به عنوان حلقه).

اثبات. قرار دهید $R = M_n(D_1)$ و $R' = M_m(D_2)$ در نتیجه $R \simeq R'$ (به عنوان حلقه). داریم $R = \bigoplus_{i=1}^{n} Re_{ii}$ که در آن e_{ii} ماتریسی است که درایه‌ی iiام آن ۱ و بقیه‌ی درایه‌های آن صفرند.

$$Re_{ii} = \left\{ \left[\begin{array}{c|c|c|c|c|c|c} \circ & \dots & \circ & \begin{matrix} a_{1i} \\ \vdots \\ a_{ni} \end{matrix} & \circ & \dots & \circ \end{array} \right] \mid a_{ki} \in D_1 \right\}$$

به‌ازای هر $1 \leq i \leq n$؛ داریم $Re_{ii} \simeq Re_{11}$ (به عنوان Rـمدول) در نتیجه $R \simeq (Re_{11})^n$ (به عنوان Rـمدول).
به همین ترتیب

$$R' = \bigoplus_{i=1}^{m} R'e_{ii} \simeq (R'e_{11})^m \qquad \text{(به عنوان } R' \text{ـمدول)}$$

طبق فرض $R \overset{f}{\simeq} R'$ (به عنوان حلقه) در نتیجه $R \simeq R'$ (به عنوان Rـمدول). توجه کنید R'، Rـمدول است زیرا تعریف کنید $r \cdot x = f(r)x$.

به‌ازای هر $1 \leq i \leq m$، $R'e_{ii}$ یک Rـمدول است و به عنوان Rـمدول ساده است. زیرا طبق لم ۳—۱۳، $R'e_{ii}$ به عنوان R'ـمدول ساده است و $f : R \longrightarrow R'$ پوشاست در نتیجه $R'e'_{ii}$ به عنوان Rـمدول ساده است زیرا به‌ازای هر $0 \neq x \in R'e'_{ii}$ داریم

$$Rx = f(R)x = R'x = R'e'_{ii}$$

توجه کنید اگر M و N دو R'ـمدول یکریخت باشند و $R \overset{f}{\simeq} R'$ (به عنوان حلقه) در این صورت M و N به عنوان Rـمدول یکریختند. زیرا برای $g : M \longrightarrow N$ داریم

$$g(r \cdot m) = g(f(r) \cdot m) = f(r)g(m) = r \cdot g(m)$$

بنابراین $R' \simeq (R'e'_{11})^m$ (به عنوان Rـمدول). در نتیجه $(Re_{11})^n \simeq (R'e'_{11})^m$ (به عنوان Rـمدول) چون Re_{11} و $R'e'_{11}$ به عنوان Rـمدول، ساده و یکریخت هستند لذا بنا به نتیجه‌ی قضیه‌ی جردن‌ـهُلدر داریم $m = n$ و $R'e'_{11} \simeq Re_{11}$ (به عنوان Rـمدول). از طرفی داریم $D_1 \simeq e_{11}Re_{11}$ (به عنوان حلقه) پس

$$D_1^{op} \simeq (e_{11}Re_{11})^{op} \simeq End_R(Re_{11}) \simeq End_R(R'e'_{11}) \qquad \text{(به عنوان حلقه)}$$

زیرا $R'e'_{11} \simeq Re_{11}$ (به عنوان Rـمدول). حال

$$D_1^{op} \simeq End_R(R'e'_{11}) = End_{R'}(R'e'_{11}) \simeq (e'_{11}R'e'_{11})^{op} \simeq D_2^{op} \qquad \text{(به عنوان حلقه)}$$

در نتیجه داریم، $D_1^{op} \simeq D_2^{op}$ (به عنوان حلقه) و لذا به‌دست می‌آوریم، $D_1 \simeq D_2$ (به عنوان حلقه). $\square$

نکته. می‌توان ثابت کرد که اگر $GL_m(D_1) \simeq GL_n(D_2)$ و $m, n \geq 3$ در این صورت

$$m = n \ , \ D_1 \simeq D_2^{op} \text{ یا } D_1 \simeq D_2$$

نتیجه ۳—۱۶. فرض کنید $\prod_{i=1}^{k} M_{n_i}(D_i) \simeq \prod_{i=1}^{\ell} M_{n'_i}(D'_i)$ (به عنوان حلقه) و D_i ها و D'_i ها حلقه‌های تقسیم باشند در این صورت $\ell = k$ و با اندیس‌گذاری مناسب داریم $D_i \simeq D'_i$ (به عنوان حلقه) و $n_i = n'_i$.

اثبات. چون به‌ازای هر حلقه‌ی تقسیم D، $M_n(D)$ دقیقاً دو ایده‌آل دو طرفه دارد در نتیجه $2^k = 2^\ell$ و لذا $k = \ell$. حال $M_{n_1}(D_1) \times \{0\} \times \cdots \times \{0\}$ ایده‌آلی مینیمال از طرف چپ است پس $f(M_{n_1}(D_1) \times \{0\} \times \cdots \times \{0\})$ ایده‌آل چپ مینیمال طرف راست است و لذا به‌دست می‌آوریم

$$M_{n_1}(D_1) \times \{0\} \times \cdots \times \{0\} \simeq \{0\} \times \cdots \{0\} \times M_{n_j}(D'_j) \times \{0\} \times \cdots$$

در نتیجه بنا به قضیه قبل $n_1 = n'_j$ و $D_1 \simeq D'_j$. توجه کنید اگر $M_{n_1}(D_1)$ در طرف چپ تکرر داشته باشد در طرف راست نیز به همان اندازه تکرر دارد زیرا مثلاً $f(\{0\} \times M_{n_1}(D_1) \times \cdots \times \{0\})$ ایده‌آل مینیمال طرف راست می‌باشد که چون f یک به یک است نمی‌تواند همان ایده‌آل مینیمال قبلی باشد. □

نکته. می‌دانیم هر ایده‌آل حلقه $\prod_{i=1}^{n} R_i$ به صورت $\prod_{i=1}^{n} I_i$ است که I_i ایده‌آل R_i است. اما شرط یکدار بودن لازم است، زیرا اگر یکدار بودن را برداریم آنگاه به عنوان مثال نقض $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ را با ضرب صفر در نظر بگیرید. $I = \{(n,n) \mid n \in \mathbb{Z}\}$ یک ایده‌آل $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ است ولی به صورت $n\mathbb{Z} \times m\mathbb{Z}$ نیست.

۴ حلقه‌های ابتدایی و رادیکال جیکوبسن

تعریف ۴—۱. فرض کنید M یک Rـمدول باشد. در این صورت پوچساز[۱۵] M را به صورت

$$Ann_R(M) = \{a \in R \mid aM = \{0\}\}$$

تعریف می‌کنیم که $aM = \{am \mid m \in M\}$ گاهی اوقات $Ann_R(M)$ را با $ann_R(M)$ نشان می‌دهند.

داریم $0 \in Ann_R(M) \neq \emptyset$ و به راحتی دیده می‌شود که $Ann_R(M)$ ایده‌آلی دوطرفه از R است. زیرا برای هر $x \in R$ اگر $aM = \{0\}$ چون $xM \subseteq M$ آنگاه $axM = \{0\}$ و لذا $ax \in Ann_R(M)$.

به‌ازای هر $m \in M$ پوچساز m را به صورت $Ann_R(m) = \{a \in R \mid am = 0\}$ تعریف می‌کنیم. در این صورت $Ann_R(m)$ ایده‌آل چپی از R است.

تعریف ۴—۲. Rـمدول M را وفادار یا باایمان[۱۶] نامیم هرگاه $Ann_R M = \{0\}$.

مثال ۱. هر فضای‌برداری ناصفر به عنوان Fـمدول وفادار است.

مثال ۲. اگر D یک حلقه‌ی تقسیم باشد آنگاه هر Dـمدول ناصفر وفادار است.

مثال ۳. $2\mathbb{Z}_6$ به عنوان $\mathbb{Z}$ـمدول وفادار نمی‌باشد، زیرا $3 \in Ann_{\mathbb{Z}_6}(2\mathbb{Z}_6)$.

مثال ۴. اگر I ایده‌آل ناصفری از R باشد آنگاه R/I به عنوان Rـمدول وفادار نمی‌باشد، زیرا $Ann_R(R/I) = I$.

تعریف ۴—۳. حلقه‌ی R را ابتدایی[۱۷] نامیم هرگاه حداقل یک Rـمدول ساده‌ی وفادار وجود داشته باشد.

مثال ۱. هر حلقه‌ی تقسیم D به عنوان Dـمدول ساده و وفادار است، در نتیجه هر حلقه‌ی تقسیم ابتدایی است.

مثال ۲. $D^n = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \mid x_i \in D \right\}$ به عنوان $M_n(D)$ـمدول چپ ساده است. چون $M_n(D)$ ایده‌آل نابدیهی ندارد پس $Ann_{M_n(D)} D^n = \{0\}$ و در نتیجه D^n به عنوان $M_n(D)$ـمدول وفادار است.

---

[۱۵] Annihilator
[۱۶] faithful
[۱۷] primitive

مثال ۳. $\mathbb{Z}$ ابتدایی نیست، زیرا هر $\mathbb{Z}$ـمدول ساده‌ی آن به صورت $\mathbb{Z}_p$ است که $\mathbb{Z}_p$ وفادار نیست.

مثال ۴. فرض کنید $V = \mathbb{Q}[x]$ و D عملگر مشتق روی V و E عملگر انتگرال‌گیری روی V باشد. اگر $R = \mathbb{Q}[E, D] \subseteq End_{\mathbb{Q}}V$ در این صورت R حلقه‌ای ابتدایی است.

مثال ۵. فرض کنید F میدانی با مشخصه‌ی صفر و $F\{x, y\}$ جبر آزاد تولید شده توسط x و y باشد. اگر $R = F\{x, y\}/\langle xy - yx - x\rangle$ در این صورت R حلقه‌ای ابتدایی است.

قضیه ۴—۴. هر حلقه‌ی ساده ابتدایی است.

اثبات. فرض کنید R ساده باشد. چون R یکدار است شامل یک ایده‌آل چپ ماکسیمال مانند I است. حال Rـمدول R/I را در نظر بگیرید. دیدیم که $Ann_R(R/I)$ ایده‌آلی دوطرفه از R است و چون R ساده است پس

$$Ann_R(\frac{R}{I}) = \{\circ\} \text{ یا } R$$

ولی $1 \notin Ann_R(R/I)$ پس $Ann_R(R/I) = \{\circ\}$ و چون I ایده‌آل چپ ماکسیمال است در نتیجه R/I (به عنوان Rـمدول) ساده و وفادار است و لذا R حلقه‌ای ابتدایی است. $\square$

تمرین ۱۹. حلقه‌ای مثال بزنید که ابتدایی باشد ولی ساده نباشد.

قضیه ۴—۵. حلقه‌ی جابجایی R ابتدایی است اگر و تنها اگر R میدان باشد.

اثبات. اگر R میدان باشد بنا به قضیه قبل R ابتدایی است.

برعکس، فرض کنید R ابتدایی است. طبق تعریف Rـمدول ساده‌ی وفادار M و لذا ایده‌آل چپ ماکسیمالی مانند I از R وجود دارد به طوری که $M \simeq R/I$ (به عنوان Rـمدول). بنابراین به علت جابجایی بودن R، I ایده‌آل ماکسیمال R است. حال $I = Ann_R(R/I)$ و در نتیجه داریم، $I = \circ$. حال $R \simeq R/\{\circ\}$ و چون $\{\circ\}$ ماکسیمال است در نتیجه R میدان است. $\square$

تعریف ۴—۶. ایده‌آل P از R را ایده‌آل ابتدایی گوییم اگر R/P حلقه‌ای ابتدایی باشد.

قضیه ۴—۷. ایده‌آل P از حلقه‌ی R ابتدایی است اگر و تنها اگر Rـمدول ساده‌ی M وجود داشته باشد که

$.P = Ann_R(M)$

اثبات. اگر P ابتدایی باشد آنگاه حلقه‌ی R/P ابتدایی است و لذا R/Pـمدول ساده‌ی وفادار M وجود دارد. چون $\left\{ \begin{array}{l} \theta: \; R \longrightarrow R/P \\ \theta(r) = P + r \end{array} \right.$ یک اپی‌مورفیسم است، پس M یک Rـمدول ساده می‌شود. ادعا می‌کنیم $.Ann_R(M) = P$ اگر $p \in P$ در این صورت

$$p \cdot m = (P + p)m = \circ \cdot m = \circ \Longrightarrow P \subseteq Ann_R(M)$$

اگر $a \in Ann_R(M)$ آنگاه $a \cdot M = \theta(a)M = \{\circ\}$ و چون M، R/Pـمدول وفادار بود پس $\theta(a) = \circ$ در نتیجه $P + a = \circ$ پس $a \in P$ و لذا $Ann_R(M) \subseteq P$ پس $.Ann_R(M) = P$

برعکس فرض کنید $P = Ann_R(M)$ و M یک Rـمدول باشد. در این صورت می‌توان M را به یک R/Pـمدول تبدیل کرد. زیرا تعریف کنید

$$\forall a \in R, m \in M: \; (P + a) \cdot m = am$$

چون $P \subseteq Ann_R(M)$ پس ضرب اسکالر فوق خوش‌تعریف است. طبق تعریف ضرب زیرمدول‌های M به عنوان Rـمدول و زیرمدول‌های M به عنوان R/Pـمدول یکی هستند. چون M به عنوان Rـمدول ساده است پس به عنوان R/Pـمدول ساده است. اگر $P + x \in Ann_{\frac{R}{P}}(M)$ آنگاه داریم

$$(P + x)M = \{\circ\} \Longrightarrow xM = \{\circ\} \Longrightarrow x \in Ann_{\frac{R}{P}}(M) = P \Longrightarrow x \in P \Longrightarrow P + x = \circ$$

بنابراین نتیجه می‌گیریم $.Ann_{\frac{R}{P}}(M) = \{\circ\}$ □

در سال ۱۹۶۵، G. Bergman استاد دانشگاه برکلی مثالی ساخت که ابتدایی راست بود ولی ابتدایی چپ نبود.

تعریف ۴—۸. فرض کنید R یک حلقه باشد در این صورت رادیکال جیکوبسن چپ R چنین تعریف می‌شود

$$J_\ell(R) = \bigcap_m m$$

که در آن m ایده‌آل ماکسیمال چپ است. به همین ترتیب رادیکال جیکوبسن راست R نیز تعریف می‌شود

$$J_r(R) = \bigcap_m m$$

که در آن m ایده‌آل ماکسیمال راست است.

مثال ۱. $J_\ell(\mathbb{Z}) = J_r(\mathbb{Z}) = \bigcap p\mathbb{Z} = \{0\}$.

مثال ۲. اگر D یک حلقه‌ی تقسیم باشد آنگاه $J_\ell(D) = J_r(D) = \{0\}$.

مثال ۳. $J_\ell(\mathbb{Z}_{p^2}) = J_r(\mathbb{Z}_{p^2}) = p\mathbb{Z}_{p^2}$.

تعریف ۴—۹. اگر M یک Rـمدول و I ایده‌آل چپی از R باشد، تعریف می‌کنیم

$$IM = \left\{ \sum_{i=1}^{n} a_i m_i \mid a_i \in I, m_i \in M, n \in \mathbb{N} \right\}$$

واضح است که IM زیرمدولی از M است.

لم ۴—۱۰. هر ایده‌آل ابتدایی را می‌توان به صورت اشتراک ایده‌آل‌های چپ ماکسیمال نوشت، به علاوه هر ایده‌آل چپ ماکسیمال شامل یک ایده‌آل ابتدایی است.

اثبات. بنا به قضیه‌ی قبل اگر P ایده‌آلی ابتدایی باشد آنگاه وجود دارد Rـمدول ساده‌ی M به طوری که $Ann_R(M) = P$. حال

$$P = Ann_R(M) = \bigcap_{\{0\} \neq m \in M} Ann_R(m)$$

اگر $0 \neq m \in M$ چون M ساده است در نتیجه $Rm = M$. حال تابع $\left\{ \begin{array}{l} f : R \longrightarrow Rm = M \\ f(a) = am \end{array} \right.$ یک Rـمدول همومورفیسم است در نتیجه $R/Ann_R(m) \simeq M$ (به عنوان Rـمدول) چون M ساده است پس $Ann_R(m)$ ایده‌آل چپ ماکسیمال است. در نتیجه P اشتراک خانواده‌ای از ایده‌آل‌های چپ ماکسیمال است. برای قسمت دوم فرض کنید I یک ایده‌آل چپ ماکسیمال R باشد. در این صورت R/I به عنوان Rـمدول ساده است و لذا بنا به قضیه‌ای اگر $P = Ann_R(R/I)$ آنگاه P ایده‌آلی ابتدایی است. حال نشان می‌دهیم $P \subset I$. اگر $x \in P = Ann_R(R/I)$ آنگاه

$$x(I + 1) = 0 \Longrightarrow I + x = 0 \Longrightarrow x \in I \Longrightarrow P \subset I$$

□

نکته. رادیکال جیکوبسن لزوماً ابتدایی نیست. زیرا به عنوان مثال نقض، $\mathbb{Z}$ را در نظر بگیرید. آنگاه $J(\mathbb{Z}) = \{0\}$ و چون $\mathbb{Z}/\{0\} \simeq \mathbb{Z}$ پس $\mathbb{Z}/\{0\}$ ابتدایی نیست.

قضیه ۴–۱۱. اگر R حلقه‌ای ابتدایی باشد آنگاه

$$J_\ell(R) = \bigcap_M Ann_R(M) = \bigcap_P P$$

که در آن M یک Rـمدول ساده و P یک ایده‌آل ابتدایی R است.

اثبات. بنا به لم هر P ابتدایی اشتراک خانواده‌ای از ایده‌آل‌های چپ ماکسیمال است پس $J_\ell(R) \subseteq \bigcap P$. از طرف دیگر بنابر قسمت دوم لم ۴–۱۰ به‌ازای هر ایده‌آل چپ ماکسیمال I از R وجود دارد P_I ابتدایی به طوری که $P_I \subseteq I$ در نتیجه $J_\ell(R)$ شامل اشتراک خانواده‌ای از ایده‌آل‌های ابتدایی R است و لذا $\bigcap P \subseteq J_\ell(R)$ بنابراین $J_\ell(R) = \bigcap P$. اما بنابر قضیه ۴–۷ هر ایده‌آل ابتدایی P به صورت یک Rـمدول $Ann_R(M)$ است و برعکس. پس تساوی دوم به راحتی از قضیه ۴–۷ به‌دست می‌آید. □

نتیجه ۴–۱۲. $J_\ell(R)$ همواره ایده‌آل دوطرفه‌ای از R است.

نتیجه ۴–۱۳. اگر M یک Rـمدول ساده باشد در این صورت داریم $J_\ell(R)M = \{0\}$، زیرا $J_\ell(R) \subseteq Ann_R(M)$ است.

قضیه ۴–۱۴. فرض کنید R یک حلقه‌ی آرتینی چپ باشد. در این صورت وجود دارد تعداد متناهی ایده‌آل چپ ماکسیمال $I_1, \ldots, I_n$ از R به طوری که $J_\ell(R) = \bigcap_{i=1}^n I_i$.

اثبات. تعریف کنید

$$\sum = \{I_{i_1} \cap I_{i_2} \cap \cdots \cap I_{i_n} \mid n \in \mathbb{N}, \text{ است } R \text{ ایده‌آل چپ ماکسیمال } I_{i_j}\}$$

چون R، آرتینی چپ است، $\sum$ دارای عضو مینیمال است. فرض کنید $I_{i_1} \cap I_{i_2} \cap \cdots \cap I_{i_m}$ عضو مینیمال $\sum$ باشد. در این صورت به‌ازای هر ایده‌آل چپ ماکسیمال I از R داریم

$$I \cap I_{i_1} \cap I_{i_2} \cap \cdots \cap I_{i_m} \in \sum$$

در نتیجه داریم $I \cap I_{i_1} \cap I_{i_2} \cap \cdots \cap I_{i_m} = I_{i_1} \cap I_{i_2} \cap \cdots \cap I_{i_m}$ بنابراین به‌دست می‌آوریم $J_\ell(R) \cap I_{i_1} \cap \cdots \cap I_{i_m} = I_{i_1} \cap \cdots \cap I_{i_m}$ بنابراین $J_\ell(R) = I_{i_1} \cap I_{i_2} \cap \cdots \cap I_{i_m}$. $\square$

لم ۴—۱۵. اگر R حلقه‌ای جابجایی و آرتینی باشد آنگاه تعداد ایده‌آل‌های ماکسیمال R متناهی است.

اثبات. فرض کنید $\{m_i\}_{i=1}^{\infty}$ ایده‌آل‌های ماکسیمال متمایزی از R باشند. زنجیر زیر از ایده‌آل‌های R را در نظر بگیرید $m_1 \supseteq m_1m_2 \supseteq m_1m_2m_3 \supseteq \cdots$ چون R آرتینی است پس n ای وجود دارد که $m_1 \ldots m_n = m_1 \ldots m_n m_{n+1}$. بنابراین داریم $m_{n+1} \supset m_1m_2 \ldots m_n m_{n+1}$ و لذا $m_1m_2 \ldots m_n \subseteq m_{n+1}$.
چون m_{n+1} ماکسیمال است و حلقه جابجایی است پس m_{n+1} ایده‌آل اول است و لذا وجود دارد j ای؛ $1 \leq j \leq n$ که $m_j \subseteq m_{n+1}$ ولی این نتیجه می‌دهد $m_j = m_{n+1}$. زیرا m_j ماکسیمال است و $R \neq m_{n+1}$ که این تناقض است. $\square$

نکته. $M_2(\mathbb{R})$ بی‌نهایت ایده‌آل چپ ماکسیمال دارد. زیرا $I = \{A \mid A\alpha = 0\}$ ایده‌آل چپ $M_2(\mathbb{R})$ است. چون I پوچساز $M_2(\mathbb{R})\alpha$ به عنوان $M_2(\mathbb{R})$ـمدول است، پس ایده‌آل چپ ماکسیمال است. چون بی‌نهایت α مستقل داریم و به‌ازای α های مستقل I ها متمایزند پس تعداد I ها نامتناهی است.

قضیه ۴—۱۶. حلقه R نیمه ساده است اگر و تنها اگر R آرتینی چپ بوده و $J_\ell(R) = \{0\}$.

اثبات. بنا به قضیه آرتین‌ـودربرن داریم $R \simeq M_{n_1}(D_1) \times \cdots \times M_{n_k}(D_k)$ (به عنوان حلقه). چون هر حلقه‌ی تقسیم آرتینی چپ است پس بنا به قضیه ۲—۱۷، $M_{n_i}(D_i)$ نیز آرتینی چپ است و لذا بنا به قضیه ۲—۸، R آرتینی چپ است. داریم

$$J_\ell(R) \simeq J_\ell(M_{n_1}(D_1)) \times \cdots \times J_\ell(M_{n_k}(D_k))$$

و چون $J_\ell(M_{n_i}(D_i))$ ایده‌آل دوطرفه است و به‌ازای هر i، $M_{n_i}(D_i)$ ساده است در نتیجه $J_\ell(R) = 0$.

برعکس بنا به قضیه‌ی قبل چون R آرتینی چپ است در نتیجه وجود دارد تعداد متناهی ایده‌آل چپ ماکسیمال $L_1, \ldots, L_n$ به طوری که $J_\ell(R) = \bigcap_{i=1}^{n} L_i = \{0\}$. حال Rـمدول هومومورفیسم $f : R \longrightarrow R/L_1 \times \cdots \times R/L_n$ را با ضابطه‌ی $f(a) = (L_1 + a, \ldots, L_n + a)$ در نظر بگیرید. f یک به یک

است زیرا $\ker f = \bigcap_{i=1}^{n} L_i = \{0\}$ در نتیجه $R \simeq Imf$ (به عنوان Rـمدول). ولی هر R/L_i یک Rـمدول ساده است در نتیجه بنا به تعریف $R/L_1 \times \cdots \times R/L_n$ یک Rـمدول نیمه ساده است و لذا مکمل‌پذیر است. چون Imf زیرمدولی از این مدول است پس بنا به قضیه ۱—۲۵، مکمل‌پذیر است و لذا R به عنوان Rـمدول مکمل‌پذیر است و در نتیجه R نیمه ساده است. □

نکته. اگر R یکدار نباشد تعریف می‌کنیم: $J_\ell(R) = \bigcap Ann_R(M)$، در این صورت می‌توان ثابت کرد قضیه فوق حتی برای حلقه‌های غیر یکدار نیز درست است (برای اثبات به کتاب Noncommutative Rings تألیف Herstein مراجعه کنید).

نتیجه ۴—۱۷. اگر R حلقه‌ای ساده و آرتینی چپ باشد در این صورت $R \simeq M_n(D)$ (به عنوان حلقه) که در آن D حلقه‌ی تقسیم است.

اثبات. چون R حلقه‌ای ساده است و $J_\ell(R)$ ایده‌آل دوطرفه است پس $J_\ell(R) = \{0\}$ و لذا بنا به قضیه‌ی قبل $R \simeq M_{n_1}(D_1) \times \cdots \times M_{n_k}(D_k)$ ولی چون R ایده‌آل دوطرفه نابدیهی ندارد در نتیجه $R \simeq M_n(D)$. □

نتیجه ۴—۱۸. اگر R یک حلقه باشد آنگاه $J_\ell(R/J_\ell(R)) = \{0\}$ و به علاوه اگر R آرتینی چپ باشد $R/J_\ell(R)$ نیمه ساده است.

اثبات. زیرا R آرتینی چپ است و لذا $R/J_\ell(R)$ آرتینی چپ است.

تعریف ۴—۱۹. حلقه‌ی R را نیمه ابتدایی [18] یا Jـنیمه ساده[19] گوییم هرگاه $J_\ell(R) = \{0\}$.

تاریخچه. هدف جیکوبسن از به‌وجود آوردن رادیکال آن بود که مطالعه‌ی یک حلقه‌ی دلخواه را به مطالعه‌ی یک حلقه‌ی تقسیم تبدیل کند. جیکوبسن ثابت کرد اگر R نیمه ابتدایی باشد در این صورت $f : R \longrightarrow \prod_{i\in I} R_i$ وجود دارد که یک به یک است و $\pi_i(Imf) = R_i$ ولی R_i ها حلقه‌های ابتدایی هستند.

لم ۴—۲۰. فرض کنید R یک حلقه بوده و $y \in R$ در این صورت احکام زیر معادلند

i) $y \in J_\ell(R)$.

---

[18] Semi Primitive

[19] J-Semi Simple

ii) به‌ازای هر $x \in R$، $1 - xy$ وارون چپ دارد.

iii) به‌ازای هر Rـمدول ساده‌ی M داریم $yM = \{0\}$.

اثبات. (i $\Leftarrow$ ii) اگر $1 - xy$ وارون چپ نداشته باشد در این صورت $R(1 - xy) \neq R$ و چون یکدار است وجود دارد ایده‌آل چپ ماکسیمال m به طوری که $R(1 - xy) \subseteq m$ پس $1 - xy \in m$. از طرفی چون $y \in J_\ell(R)$ پس $y \in m$ در نتیجه $xy \in m$ و لذا $1 \in m$ که تناقض است.

(ii $\Leftarrow$ iii) فرض کنید $yM \neq \{0\}$ در نتیجه $m \in M$ وجود دارد که $ym \neq \{0\}$ توجه کنید که Rym زیرمدولی ناصفر از M است و چون $ym \in Rym \neq 0$ و M ساده است پس $Rym = M$. چون $m \in M$ در نتیجه وجود دارد $x \in R$ به طوری که $xym = m$ بنابراین $(1 - xy)m = 0$. بنا به فرض $1 - xy$ وارون چپ دارد پس $m = 0$ و بنابراین $ym = 0$ که تناقض است.

(iii $\Leftarrow$ i) $yM = 0$ نتیجه می‌دهد $y \in Ann_R(M)$. حال چون به‌ازای هر Rـمدول ساده‌ی M این رابطه برقرار است پس $y \in \bigcap Ann_R(M)$ و بنابراین طبق قضیه ۴—۱۱ $y \in J_\ell(R)$. □

لم ۴—۲۱. فرض کنید R یک حلقه بوده و $y \in R$. در این صورت احکام زیر معادلند

i) $y \in J_r(R)$.

ii) به ازای هر $z \in R$، $1 - yz$ وارون راست دارد.

iii) برای هر Rـمدول راست ساده‌ی M داریم $My = \{0\}$.

لم ۴—۲۲. فرض کنید R یک حلقه بوده و $y \in R$، در این صورت گزاره‌های زیر معادلند

i) $y \in J_\ell(R)$.

ii) به‌ازای هر $x, z \in R$؛ $1 - xyz$ وارون‌پذیر است.

اثبات. (i $\Leftarrow$ ii) چون $J_\ell(R)$ ایده‌آل دوطرفه است و $y \in J_\ell(R)$ بنابراین $yz \in J_\ell(R)$ و بنابر لم ۴—۲۰ $1 - xyz$ وارون چپ دارد. بنابراین وجود دارد $a \in R$ به طوری که $a(1 - xyz) = 1$ پس $a = 1 + axyz$. حال

چون $y \in J_\ell(R)$ و $J_\ell(R)$ ایده‌آل دوطرفه است بنابراین $yz \in J_\ell(R)$ و بنابر لم ۴ــ۲۰ $1-(-a)xyz$ و لذا a وارون چپ دارد. بنابراین a وارون‌پذیر است و معادلاً $1-xyz$ وارون‌پذیر است.

(ii $\Longleftarrow$ i) قرار دهید $z=1$ و از لم ۴ــ۲۰ استفاده کنید. □

حال با استفاده از لم‌های اخیر می‌توان قضیه جالب زیر را نتیجه گرفت

قضیه ۴ــ۲۳. اگر R یک حلقه باشد، در این صورت داریم $J_\ell(R)=J_r(R)$ (اگر R یکدار نباشد باز هم قضیه برقرار است. برای اثبات به کتاب Hungerford مراجعه کنید).

تعریف ۴ــ۲۴. اگر R یک حلقه باشد آنگاه رادیکال جیکوبسن R را برابر $J_\ell(R)=J_r(R)$ تعریف کرده و آن را با نماد $J(R)$ یا $rad(R)$ نشان می‌دهیم.

لم ۴ــ۲۵. برای هر حلقه‌ی R همواره داریم $J(R)\subseteq \bigcap m$ که m ایده‌آل ماکسیمال دوطرفه است.

اثبات (روش اول). زیرا فرض کنید $J(R)\nsubseteq m$ که m ایده‌آل ماکسیمال دوطرفه‌است. در نتیجه $J(R)+m=R$ پس $j\in J(R)$ و $x\in m$ وجود دارد که $j-1=x$ ولی بنابر لم ۴ــ۲۲ $j-1$ وارون‌پذیر است و چون $x\in m$ پس $m=R$ که تناقض است.

(روش دوم). فرض کنید m یک ایده‌آل دو طرفه ماکسیمال دلخواه باشد. m' را ایده‌آل چپ ماکسیمالی از R بگیرید که شامل m باشد. حال داریم

$$m+J_\ell(R)\subseteq m' \Longrightarrow m+J_\ell(R)=m \Longrightarrow J_\ell(R)\subseteq m$$

اما $m \subset J(R)$ پس حکم ثابت شد. □

مثال‌هایی وجود دارند که تساوی اتفاق نمی‌افتد. فرض کنید V یک Dـمدول باشد. حلقه‌ی End_DV را در نظر بگیرید. رتبه هر $f\in End_DV$ را به صورت $rank(Imf)$ (به عنوان Dـمدول) تعریف کنید. در این صورت می‌توان ثابت کرد ایده‌آل‌های دوطرفه End_DV دقیقاً به صورت $I=\{f\in End_DV \mid rankf<\mu\}$ هستند که μ کاردینالی ثابت است (برای اثبات به کتاب Algebra III تألیف P. M. Cohn مراجعه کنید). بنابراین اگر $\dim_D V=\aleph_0$ در این صورت حلقه‌ی End_DV دقیقاً یک ایده‌آل ماکسیمال دارد که از عناصری که رتبه‌ی آنها

متناهی است تشکیل شده است. در نتیجه $\bigcap m \neq \{0\}$ که m آن ایده‌آل ماکسیمال است. ولی ماتریس‌های $\infty \times \infty$ که یک ستون آنها صفر و بقیه ستون‌ها دلخواهند ایده‌آل چپ ماکسیمال است (اثبات شبیه حالت متناهی)، در نتیجه $J_\ell(R) = \{0\}$.

نکته. با در نظر گرفتن نمایش ماتریسی تبدیل‌های خطی اعضای $End_D V$ در یک پایه‌ی ثابت می‌توان نشان داد، $End_D V$ در واقع حلقه‌ی ماتریس‌های $\infty \times \infty$ است که هر ستون آن را در نظر بگیریم درآیه‌های آن از جایی به بعد صفرند و درآیه‌های ماتریس‌ها از D می‌آیند.

تعریف ۴—۲۶. فرض کنید R یک حلقه باشد در این صورت ایده‌آل I را پوچ [20] گوییم هرگاه هر عنصر I پوچ‌توان باشد و ایده‌آل I را پوچ‌توان [21] نامیم هرگاه وجود داشته باشد عدد طبیعی n به طوری که $I^n = \{0\}$ که در آن $I^n = \{\sum a_1 a_2 \dots a_n \mid a_i \in I\}$.

نکته. اگر I پوچ‌توان باشد آنگاه I پوچ است، ولی عکس این مطلب درست نیست. به عنوان مثال قرار دهید $R = \bigoplus_{i=1}^{\infty} \mathbb{Z}_{p^i}$ و $I = \bigoplus_{i=1}^{\infty} p\mathbb{Z}_{p^i}$. توجه کنید هر عضو I پوچ‌توان است زیرا مؤلفه‌ها از جایی به بعد صفرند ولی n ای وجود ندارد که $I^n = \{0\}$، زیرا به‌ازای هر n اگر $x = (0, \dots, 0, p, 0, \dots, 0)$ آنگاه $x^n \neq 0$ که p در مؤلفه $n+1$ ام است. پس I پوچ است ولی پوچ‌توان نیست.

به عنوان مثال دیگر $R = \mathbb{R}[x_1, x_2, \dots]/\langle x_1, x_2^2, x_3^3, \dots\rangle$ و $I = \langle x_1, x_2, \dots\rangle/\langle x_1, x_2^2, x_3^3, \dots\rangle$ را در نظر بگیرید. I پوچ است ولی پوچ‌توان نمی‌باشد. واضح است که اگر $J + f(x_1, \dots, x_m) \in I$، $J = \langle x_1, x_2^2, \dots\rangle$ آنگاه داریم

$$(J + f(x_1, \dots, x_m))^{\sum_{i=1}^{m} i} = 0$$

قضیه ۴—۲۷. اگر R یک حلقه باشد و I یک ایده‌آل راست پوچ (چپ پوچ) باشد آنگاه داریم $I \subseteq J(R)$.

اثبات. فرض کنید $y \in I$ در این صورت به‌ازای هر $z \in R$ داریم $yz \in I$ و چون I پوچ‌توان است در نتیجه yz پوچ‌توان است و لذا $1 - yz$ یکال است و بنابر لم ۴—۲۱ $y \in J_r(R) = J(R)$ در نتیجه $I \subseteq J(R)$. □

[20] nil
[21] nilpotent

نکته. اگر R یک حلقه بوده و I یک ایده‌آل راست پوچ‌توان و ناصفر از R باشد آنگاه R دارای یک ایده‌آل پوچ‌توان ناصفر است.

اثبات. فرض کنید I یک ایده‌آل راست بوده و $I^n = \{0\}$. حال RI ایده‌آلی از R است و چون $0 \neq I \subset RI$ پس $RI \neq \{0\}$ حال

$$(RI)^n = R(IR)^{n-1}I \subseteq RI^{n-1}I = RI^n = \{0\}$$

حدس کوته[22]. اگر R دارای یک ایده‌آل راست پوچ ناصفر باشد در این صورت R دارای یک ایده‌آل پوچ ناصفر است (این مسأله ۷۰ سال است که باز است).

تمرین ۲۰. فرض کنید R حلقه‌ای نوتری راست باشد در این صورت هر ایده‌آل یک طرفه‌ی پوچ، پوچ‌توان است.

قضیه ۴—۲۸. فرض کنید R یک حلقه‌ی آرتینی چپ باشد در این صورت $J(R)$ پوچ‌توان است.

اثبات. برای سادگی فرض کنید $J = J(R)$ در این صورت زنجیر زیر بایستی متوقف گردد

$$J \supseteq J^2 \supseteq J^3 \supseteq \cdots$$

در نتیجه وجود دارد n ای که $J^n = J^{n+1} = J^{n+2} = \cdots$ ادعا می‌کنیم $J^n = \{0\}$. فرض کنید $J^n \neq \{0\}$ و قرار دهید $\sum = \{I \mid J^n I \neq 0,\ \text{ایده‌آل چپ}\ I\}$. چون $R \in \sum$ پس $\sum \neq \emptyset$. چون R آرتینی چپ است پس $\sum$ عضو مینیمالی مانند I_0 دارد. پس $J^n I_0 \neq \{0\}$ لذا وجود دارد $a \in I_0$ به طوری که $J^n a \neq \{0\}$. چون Ja ایده‌آل چپی از R است و $Ja \subseteq I_0$. پس $Ja \in \sum$، زیرا $J^n(Ja) = J^{n+1}a = J^n a \neq \{0\}$ و چون I_0 مینیمال بود پس $Ja = I_0$. از طرفی $a \in I_0$ پس وجود دارد $b \in J$ به طوری که $ba = a$ و لذا $(1-b)a = 0$ ولی بنا به لم ۴—۲۲ چون $b \in J$، $1-b$ وارون‌پذیر است. پس $a = 0$ و لذا $J^n a = \{0\}$ که تناقض است بنابراین $J^n = \{0\}$. □

[22] Kothe

نتیجه ۴—۲۹. فرض کنید R آرتینی چپ باشد در این صورت هر ایده‌آل راست پوچ، پوچ‌توان است زیرا بنا به قضیه ۴—۲۷ ایده‌آل راست پوچ در $J(R)$ قرار دارند.

تمرین ۲۱. فرض کنید R حلقه‌ای متناهی بوده و تنها عنصر پوچ‌توان آن صفر باشد. ثابت کنید R با ضرب دکارتی تعداد متناهی میدان یکریخت است.

مثال. می‌توان مثالی زد که $J(R)$ پوچ‌توان نباشد. مثلاً

$$R[x_1, \ldots, x_n, \ldots]/\langle x_1, x_2^2, \ldots\rangle$$

$$J/\langle x_1, x_2^2, \ldots\rangle \quad , \quad J = \langle x_1, \ldots, x_n, \ldots\rangle$$

J ایده‌آل ماکسیمال است پس در $R[x_1, \ldots, x_n, \ldots]$ اول است.

مثال. می‌توان مثالی زد که $J(R)$ پوچ نباشد. مثلاً $R = \mathbb{R}[[x]] = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$. ادعا این است که $J(R) = \langle x\rangle$ (راهنمایی. از وارون‌پذیری $1 - yz$ و از این مطلب که عناصر وارون‌پذیر آنهایی هستند که جمله‌ی ثابت آنها ناصفر است استفاده کنید).

نتیجه ۴—۳۰. فرض کنید R آرتینی چپ بوده و هیچ ایده‌آل دوطرفه ناصفر پوچ‌توانی نداشته باشد، در این صورت R نیمه ساده است.

اثبات. با توجه به قضیه ۴—۲۸، $J(R) = \{0\}$ و از ۴—۱۶ حکم نتیجه می‌شود.

قضیه ۴—۳۱. فرض کنید R یک حلقه بوده و $J(R)$ پوچ‌توان باشد و به علاوه $R/J(R)$ حلقه‌ای نیمه ساده باشد. در این صورت به‌ازای هر Rـمدول M شرایط زیر معادلند

i) M نوتری است.

ii) M آرتینی است.

iii) $\ell(M) < \infty$.

اثبات. قبلاً ثابت شد که شرط iii شرایط i و ii را نتیجه می‌دهد. حال نشان می‌دهیم (i $\Longleftarrow$ iii) (اثبات برای (ii $\Longleftarrow$ iii) مشابه است).

(i $\Longleftarrow$ iii) فرض کنید $J^n = \{0\}$ و زنجیر زیر را در نظر بگیرید

$$M \supseteq JM \supseteq J^2M \supseteq \cdots \supseteq J^nM = \{0\}$$

به‌ازای $0 \leq i < n$، Rـمدول $J^iM/J^{i+1}M$ را در نظر بگیرید. داریم $J \subseteq Ann(J^iM/J^{i+1}M)$ و لذا $J^iM/J^{i+1}M$ با ضرب طبیعی $(J+x)(J^{i+1}M+y) = J^{i+1}M+xy$ تبدیل به یک R/Jـمدول می‌شود. طبق فرض R/J نیمه ساده است و لذا بنا به تمرین ۵، $J^iM/J^{i+1}M$ به عنوان R/Jـمدول نیمه ساده است یعنی $J^iM/J^{i+1}M = \bigoplus_{\ell\in I} M_\ell$ که M_ℓ ها به عنوان R/Jـمدول ساده‌اند. M_ℓ به عنوان Rـمدول نیز ساده است زیرا اگر N زیرمدول M_ℓ باشد آنگاه $RN = (R/J)N = M_\ell$. چون M به عنوان Rـمدول نوتری است در نتیجه بنا به قضیه ۲—۷، J^iM به عنوان Rـمدول نوتری است و دوباره بنا به قضیه ۲—۷، $J^iM/J^{i+1}M$ به عنوان Rـمدول نوتری است و چون $(J^iM/J^{i+1}M)$ به عنوان Rـمدول نیمه ساده است پس بنا به قضیه ۲—۸، $|I| = m < \infty$. پس $\ell(J^iM/J^{i+1}M) < \infty$ (به عنوان Rـمدول) و لذا داریم

$$\ell(M) = \sum_{i=0}^{n-1} \ell(J^iM/J^{i+1}M) < \infty \qquad (\ell(M) = \ell(N) + \ell(M/N))$$

□

قضیه‌ی (هاپکینز[۲۳] ۱۹۳۹) ۴—۳۲. هر حلقه‌ی آرتینی چپ نوتری چپ است.

اثبات. در قضیه قبل قرار دهید $M = R$. چون R، آرتینی چپ است در نتیجه $J(R)$ پوچ‌توان و لذا $R/J(R)$ نیمه ساده است. □

نتیجه ۴—۳۳. اگر R حلقه‌ای آرتینی و جابجایی باشد آنگاه نوتری است. اگر یکدار را برداریم حکم نقض می‌شود. به عنوان مثال $\mathbb{Z}_{p^\infty}$ با ضرب صفر را در نظر بگیرید.

[۲۳] Hopkins

تعریف ۴—۳۴. اگر G یک گروه و R یک حلقه باشد در این صورت $R(G)$ را چنین تعریف می‌کنیم

$$R(G) = \{\sum_{g\in G} r_g g \mid r_g \in R\}$$

که به‌جز تعداد متناهی g، $r_g = 0$ و به علاوه به‌ازای هر $g, g' \in G$، $r_g g' = g' r_g$.

جمع به صورت طبیعی تعریف می‌شود و ضرب را با استفاده از خاصیت پخشی تعریف می‌کنیم. $R(G)$ را حلقه‌ی گروهی G روی R می‌نامند.

$$(r_{g_1} g_1 + r_{g_2} g_2)(r'_{g'_1} g'_1 + r'_{g'_2} g'_2) = r_{g_1} r'_{g'_1} g_1 g'_1 + \cdots$$

نکته. R یکدار است اگر و تنها اگر $R(G)$ یکدار باشد.

قضیه (مَشکه[24]) ۴—۳۵. فرض کنید K یک میدان و G گروهی متناهی باشد. اگر $CharK = 0$ آنگاه $K(G)$ نیمه ساده است. اگر $CharK = p > 0$ در این صورت $K(G)$ نیمه ساده است اگر و تنها اگر $p \nmid |G|$.

اثبات. قرار دهید $|G| = m$. چون $K(G)$ یک فضای‌برداری روی K است و $\dim_K K(G) = m$ لذا $K(G)$ حلقه‌ای آرتینی چپ است زیرا هر ایده‌آل چپ، یک زیرفضاست و لذا طول زنجیرهای ایده‌آل‌های چپ متناهی است. به‌ازای هر $a \in K(G)$ تابع T_a را چنین تعریف کنید $\left\{ \begin{array}{l} T_a : K(G) \longrightarrow K(G) \\ T_a(x) = ax \end{array} \right.$. در این صورت T_a یک تبدیل خطی روی فضای‌برداری $K(G)$ است.

پایه‌ی $\mathfrak{B} = \{g_1, \ldots, g_m\}$ را در نظر بگیرید و فرض کنید M_a ماتریس نمایش T_a در این پایه باشد. در این صورت داریم $M_a \in M_m(K)$ و به علاوه

$$\forall a, b \in K(G) \ : \ T_a T_b(x) = T_a(bx) = abx = T_{ab}(x) \Longrightarrow T_a T_b = T_{ab}$$

و مشابهاً $T_{a+b} = T_a + T_b$. بنا به مطالب جبرخطی داریم

$$M_{a+b} = M_a + M_b \quad , \quad M_{ab} = M_a \cdot M_b \ (\forall a, b \in K(G))$$

[24] Maschke

اگر $k \in K$ در این صورت

$$\begin{bmatrix} k & & \emptyset \\ & \ddots & \\ \emptyset & & k \end{bmatrix} = M_{k1_G}$$

زیرا $T_{k\cdot 1_G}(g_i) = k \cdot g_i$. اگر $1_G \neq g_i \in G$ در این صورت چون به ازای $k \neq j$؛ $g_ig_j = g_k$ پس ماتریس M_{g_i} ماتریس جایگشتی است که روی قطر آن صفر است (ماتریس جایگشتی ماتریسی است که در هر سطر و هر ستون دقیقاً یک درآیه یک است و بقیه درآیه‌ها صفرند). در نتیجه به ازای هر $g \in G$ داریم $tr(M_g) = 0$. فرض کنید $a = k_1 1_G + k_2 g_2 + \cdots + k_m g_m \in K(G)$ پس

$$tr(M_a) = \sum_{i=1}^{m} tr(M_{k_i g_i}) \quad (g_1 = 1_G)$$

و چون tr تبدیل خطی است پس

$$tr(M_a) = \sum_{i=1}^{m} k_i tr(M_{g_i}) = k_1 m$$

زیرا

$$M_{g_1} = I = \begin{bmatrix} 1 & & \emptyset \\ & \ddots & \\ \emptyset & & 1 \end{bmatrix}$$

حال نشان می‌دهیم رادیکال جیکوبسن $K(G)$ برابر صفر است. یعنی $J = \{0\}$. فرض کنید $a = k_1 1_G + k_2 g_2 + \cdots + k_m g_m \in J$. چون $a \neq 0$ پس وجود دارد $k_i \neq 0$ و چون J ایده‌آل است پس $0 \neq ak_i^{-1} g_i^{-1} \in J$. بدون کاسته شدن از کلیت فرض کنید $0 \neq a = 11_G + k_2 g_2 + \cdots + k_m g_m \in J$ داریم $tr(M_a) = 1 \cdot m = m$. حال $a \in J$ پوچ‌توان است زیرا در هر حلقه‌ی آرتینی چپ J پوچ‌توان است. پس M_a ماتریسی پوچ‌توان است و لذا $tr(M_a) = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i = m \times 0 = 0$. از طرفی $tr(M_a) = m$ پس $m \in K$ و $m = 0$ در نتیجه $p|m = |G|$ و این با فرض در تناقض است. در نتیجه $J = \{0\}$ و چون حلقه آرتینی چپ است پس بنا به قضیه ۴—۱۶، $K(G)$ نیمه ساده است.

برای قسمت دوم با برهان خلف فرض کنید $K(G)$ نیمه ساده است و $p||G|$. عنصر $x = 1 \cdot g_1 + 1 \cdot g_2 + \cdots + 1 \cdot g_m$ را در نظر بگیرید. داریم

$$x^2 = x \sum_{i=1}^{m} g_i = \sum_{i=1}^{m} x g_i = \sum_{i=1}^{m} x = mx$$

چون $p|m$ در نتیجه $x^{2} = 0$. به‌ازای هر $1 \leq i \leq m$ داریم $xg_i = g_i x = \sum_{i=1}^{m} g_i$. و لذا $x \in Z(K(G))$.
چون $x \in Z(K(G))$ در نتیجه ایده‌آل تولید شده توسط x پوچ‌توان است و بنا به قضیه ۴—۲۷ این ایده‌آل بایستی در رادیکال جیکوبسن قرار داشته باشد ولی طبق فرض $J = \{0\}$ و لذا $x = 0$ و این تناقض است. $\square$

نکته. $K(G)$ زیر حلقه‌ای از $M_m(K)$ است. زیرا مونومورفیسم حلقه‌ای

$$\begin{cases} \phi : K(G) \longrightarrow M_m(K) \\ \phi(a) = M_a \end{cases}$$

را در نظر بگیرید.

$$M_a = 0 \Longrightarrow T_a = 0 \Longrightarrow \forall x : T_a(x) = 0 \Longrightarrow \forall x : ax = 0 \Longrightarrow a = a \times 1 = 0$$

تمرین ۲۲. اگر R یک حلقه بوده و G گروهی نامتناهی باشد ثابت کنید $R(G)$ نیمه ساده نیست.

تمرین ۲۳. با فرضیات قضیه مشکه ثابت کنید اگر K بسته‌ی جبری باشد آنگاه

$$K(G) \simeq M_{n_1}(K) \times \cdots \times M_{n_r}(K) \qquad \text{(به عنوان حلقه)}$$

قضیه ۴—۳۶. برای هر گروه G داریم $J(\mathbb{C}G) = \{0\}$ و این یعنی $\mathbb{C}G$ نیمه ابتدایی (J_نیمه ساده) است. (برای اثبات به کتاب NonCommutative Algebra تألیف Lam مراجعه کنید.)

فرض کنید D یک حلقه‌ی تقسیم و V یک D_مدول باشد. اگر $\{v_1, \ldots, v_n\}$ روی D مستقل خطی باشد و $W = \langle v_1, \ldots, v_n \rangle$ آنگاه D نیمه ساده است، زیرا V به عنوان D_مدول نیمه ساده است پس مکمل‌پذیر است در نتیجه $V = W \oplus \bigoplus_{i \in I} M_i$ (به عنوان D_مدول) که M_i ها به عنوان D_مدول ساده هستند یعنی $M_i \simeq D$ (به عنوان D_مدول). بنابراین هر مجموعه‌ی مستقل خطی را می‌توان به یک پایه برای V گسترش داد.

تعریف ۴—۳۷. فرض کنید $R \subseteq End_D V$ یک حلقه باشد گوییم حلقه‌ی R یک حلقه‌ی چگال از تبدیلات خطی است یا R روی V به طور چگال عمل می‌کند هرگاه به ازای هر مجموعه‌ی مستقل خطی $\{v_1, \ldots, v_n\}$ از

V (n عدد طبیعی دلخواه) و هر مجموعه‌ی دلخواه از عناصر V مانند $\{w_1, \dots, w_n\}$ وجود داشته باشد عنصر $f \in R$ به طوری که برای هر $1 \leq i \leq n$؛ $f(v_i) = w_i$.

مثال. اگر $R = End_D V$ آنگاه R روی V به‌طور چگال عمل می‌کند. زیرا اگر عناصر مستقل خطی $\{v_1, \dots, v_n\}$ داده شده باشند و $\{w_1, \dots, w_n\}$ دلخواه، $\{v_1, \dots, v_n\}$ را به یک پایه گسترش می‌دهیم و می‌دانیم $f \in End_D(V)$ هست که $f(v_i) = w_i$ ($1 \leq i \leq n$) و f را روی بقیه عناصر پایه برابر صفر باشد.

نکته. اگر $\dim_D V < \infty$ و $R \subseteq End_D V$ روی V به‌طور چگال عمل کند آنگاه $R = End_D V$.

تعبیر توپولوژیک تعریف فوق. روی V توپولوژی گسسته را در نظر بگیرید به این ترتیب تمام زیرمجموعه‌های V بازند. حال می‌خواهیم $End_D V$ را به یک فضای توپولوژیک تبدیل کنیم برای این کار نیاز به تعریف پایه داریم. بازهای پایه‌ای را به صورت $U = \{f \in End_D V \mid f(v_i) = w_i, 1 \leq i \leq n, w_i, v_i \in V\}$ تعریف می‌کنیم. توجه کنید $End_D V$ و $\emptyset$ بازهای پایه‌ای هستند زیرا با قرار دادن $v_1 = 0, w_1 = 0$، $End_D V$ و با قرار دادن $w \neq 0$ و $v = 0$، $\emptyset$ به‌دست می‌آید. حال نشان می‌دهیم دو خاصیت پایه برقرار است. فرض کنید $g \in U \cap U'$ که $U' = \{f \in End_D V \mid f(v'_i) = w'_i, 1 \leq i \leq m\}$ و قرار دهید

$$U'' = \{f \in End_D V \mid f(v_i) = w_i, f(v'_j) = w'_j, 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m\}$$

حال $g \in U''$ و $U'' = U \cap U'$.

چون $End_D V$ باز پایه‌ای است پس به‌ازای هر $g \in End_D V$ داریم $g \in End_D V = U$. توجه کنید چون V دارای توپولوژی گسسته است در نتیجه هر $f \in End_D V$ پیوسته است.

نشان می‌دهیم توپولوژی که روی $End_D V$ تعریف شد با توپولوژی فشرده-باز که روی $C(X, Y)$ تعریف می‌شود ($X = Y = V$ توابع پیوسته) یکی است. توجه کنید زیرمجموعه‌های فشرده‌ی V دقیقاً همان زیرمجموعه‌های متناهی هستند. در توپولوژی فشرده-باز $S(I, W) = \{f \in End_D V | f(I) \subset W\}$.

فرض کنید $U = \{f \in End_D V \mid f(x_i) = w_i, 1 \leq i \leq n\}$ داریم $U = \bigcap_{i=1}^{n} S(\{v_i\}, \{w_i\})$. برعکس اگر $g \in S(I, W)$ آنگاه فرض کنید $I = \{v_1, \dots, v_n\}$ و $w_i = g(v_i)$ در این صورت $g \in U = \{f \in End_D V \mid f(v_i) = w_i\}$. مفهوم چگال بودن جبری و توپولوژیکی یکی است. فرض

کنید R روی V به طور چگال عمل کند. اگر $g \in End_D V \backslash R$ آنگاه باز U حول g را در نظر بگیرید $U = \{f \in End_D V \mid f(v_i) = w_i, ۱ \leq i \leq n\}$. فرض کنید $\{v_{j_۱}, \ldots, v_{j_k}\}$ عناصر مستقل خطی $\{v_۱, \ldots, v_n\}$ باشند در این صورت وجود دارد $h \in R$ به طوری که به‌ازای هر k ؛ $۱ \leq i \leq k$ ؛ $h(v_{j_i}) = w_{j_i}$. در نتیجه چون h، Dـخطی است پس برای هر n ؛ $۱ \leq i \leq n$ ؛ $h(v_i) = w_i$ و لذا $h \in U$.

قضیه (قضیه چگالی برای مدول‌های نیمه ساده) ۴—۳۸. فرض کنید R یک حلقه بوده و M یک Rـمدول نیمه ساده باشد و $S = End_R M$. اگر $\phi \in End_S M$ در این صورت به ازای هر $\{x_۱, \ldots, x_n\} \subseteq M$ وجود دارد $r \in R$ به طوری که به ازای هر n ؛ $۱ \leq i \leq n$ داریم $\phi(x_i) = r x_i$. (توجه کنید M یک Sـمدول با ضرب اسکالر $f \cdot m = f(m)$ است.)

اثبات. اگر $n = ۱$ و $x_۱ \in M$ در این صورت زیر مدول $Rx_۱$ از M را در نظر بگیرید. چون M نیمه ساده است پس مکمل‌پذیر است در نتیجه وجود دارد زیرمدول N از M به طوری که $Rx_۱ \oplus N = M$. تابع $\pi : M \longrightarrow M$ را با ضابطه‌ی $\pi(tx_۱ + n) = tx_۱$ در نظر بگیرید. در این صورت π یک Rـمدول همومورفیسم است و در نتیجه $\pi \in End_R M = S$

$$\phi(x_۱) = \phi(\pi(x_۱)) = \pi(\phi(x_۱)) \in Rx_۱$$

و لذا وجود دارد $r \in R$ به طوری که $\phi(x_۱) = rx_۱$. چون M یک Rـمدول نیمه ساده است پس M^n نیز یک Rـمدول نیمه ساده است. حال Rـمدول همومورفیسم

$$\begin{cases} \phi^n : M^n \longrightarrow M^n \\ \phi((m_۱, \ldots, m_n)) = (\phi(m_۱), \ldots, \phi(m_n)) \end{cases}$$

را در نظر بگیرید. داریم $End_R M^n \simeq M_n(End_R M) = M_n(S) = S'$ (به عنوان حلقه). ادعا می‌کنیم $\phi^n = End_S M^n$. فرض کنید $A = [a_{ij}] \in M_n(S)$ داریم

$$\phi^n(A \cdot \begin{bmatrix} m_۱ \\ m_۲ \\ \vdots \\ m_n \end{bmatrix}) = \phi^n((\sum_{j=۱}^{n} a_{۱j} m_j, \ldots, \sum_{j=۱}^{n} a_{nj} m_j))$$

$$= (\sum_{j=1}^{n} a_{1j}\phi(m_j), \ldots, \sum_{j=1}^{n} a_{nj}\phi(m_j)) = A \begin{bmatrix} \phi(m_1) \\ \phi(m_2) \\ \vdots \\ \phi(m_n) \end{bmatrix} = A\phi^n((m_1, \ldots, m_n))$$

در نتیجه $\phi^n \in End_{S'}M$. حال طبق حالت ۱ $n =$ چون $\overline{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in M^n$ پس وجود دارد $r \in R$ به طوری که $\phi^n(\overline{x}) = r\overline{x}$ و در نتیجه به‌ازای هر $1 \leq i \leq n$ داریم $\phi(x_i) = rx_i$. □

قضیه (قضیه چگالی جیکوبسن[۲۵]) ۴—۳۹. فرض کنید D یک حلقه‌ی تقسیم باشد، در این صورت حلقه‌ی R ابتدایی است اگر و تنها اگر وجود داشته باشد Dـمدول V به طوری که R روی V به طور چگال عمل کند.

اثبات. چون R ابتدایی است، Rـمدول ساده‌ی وفادار M وجود دارد. قرار دهید $D = End_R M$. چون M، Rـمدول ساده است بنابر لم شور D یک حلقه‌ی تقسیم است. قرار دهید $V = M$. ادعا می‌کنیم V و D در قضیه صدق می‌کنند. نخست نشان می‌دهیم می‌توان R را زیرحلقه‌ای از $End_D(V)$ در نظر گرفت، زیرا تعریف کنید

$$\begin{cases} \begin{cases} T : R \longrightarrow End_D V \\ T(r) = T_r \end{cases} \\ \begin{cases} T_r : V \longrightarrow V \\ T_r(x) = rx \end{cases} \end{cases}$$

اولاً $T_r \in End_D V$ زیرا اگر $f \in D = End_R M$ آنگاه

$$T_r(f \cdot x) = T_r(f(x)) = rf(x)f(rx) = f \cdot T_r(x)$$

چون T_r جمع را حفظ می‌کند پس T خوش‌تعریف است. T یک همومورفیسم حلقه‌ای است، زیرا

$$\begin{cases} T(r_1 + r_2) = T_{r_1 + r_2} = T_{r_1} + T_{r_2} = T(r_1) + T(r_2) \\ T(r_1 r_2) = T_{r_1 r_2} = T_{r_1} \circ T_{r_2} \end{cases}$$

T یک به یک است زیرا اگر $T(r) = 0$ آنگاه به‌ازای هر $x \in V = M$؛ $rx = 0$ و در نتیجه $r \in Ann_R M = \{0\}$ پس $r = 0$. پس R زیرحلقه‌ای از $End_D V$ است. حال فرض کنید $\{v_1, \ldots, v_n\}$ عناصری از V باشند که روی D مستقل خطی‌اند و $\{w_1, \ldots, w_n\}$، n عضو دلخواه از V باشند. فرض کنید

[۲۵] Density theorem

$\{v_i\}_{i\in I}$ گسترش $\{v_1, \ldots, v_n\}$ به یک پایه برای Dـمدول V باشد. تابع $\phi : V \longrightarrow V$ را چنین تعریف کنید

$$\begin{cases} \phi(v_i) = w_i & 1 \leq i \leq n \\ \phi(v_j) = 0 & v_j \in \{v_i\}_{i\in I\setminus\{1,\ldots,n\}} \end{cases}$$

در نتیجه می‌توان دامنه‌ی V را با توجه به خطی بودن به V گسترش داد. حال چون $V = M$ به عنوان Rـمدول ساده است پس به عنوان Rـمدول نیمه ساده است. داریم $\phi \in End_D V = End_D M$. بنا به قضیه‌ی قبل وجود دارد $r \in R$ به طوری که برای هر $1 \leq i \leq n$؛ $\phi(v_i) = rv_i$. در نتیجه به‌ازای هر $1 \leq i \leq n$ به‌دست می‌آوریم $rv_i = w_i = \phi(v_i)$ $(r \in R)$ پس R روی V به طور چگال عمل می‌کند.

برعکس کافی است ثابت کنیم V به عنوان Rـمدول ساده و وفادار است و V زیرمدولی به‌جز $\{0\}$ و V ندارد. زیرا اگر N زیرمدول ناصفری از V به عنوان Rـمدول باشد آنگاه وجود دارد $0 \neq v \in N$. چون D حلقه‌ی تقسیم است، $\{v\}$ مستقل خطی است. اگر $w \in V$ دلخواه باشد چون طبق فرض R روی V به طور چگال عمل می‌کند لذا وجود دارد $r \in R$ به طوری که $rv = w$. چون N یک Rـمدول است و $v \in N$ و $r \in R$ پس $w \in N$ و لذا $V = N$ یعنی V به عنوان Rـمدول ساده است. حال فرض کنید $r \in Ann_R V$ یعنی به ازای هر $x \in V$ داریم $rx = 0$ طبق تعریف $R \subseteq End_D V$ پس هر عنصر $r \in R$ به صورت تابعی مانند $r : V \longrightarrow V$ است. چون $r \cdot x = 0$ پس r تابع صفر است. یعنی $r = 0$ پس R حلقه‌ای ابتدایی است. $\square$

قضیه ۴ــ۴۰. فرض کنید R یک حلقه‌ی ابتدایی باشد در این صورت وجود دارد حلقه‌ی تقسیم D به طوری که $R \simeq M_n(D)$ یا به‌ازای هر عدد طبیعی k زیر حلقه‌ی R_k از R و اپی‌مورفیسم $f_k : R_k \longrightarrow M_k(D)$ وجود دارد.

اثبات. چون R حلقه‌ای ابتدایی است بنا بر قضیه‌ی چگالی جیکوبسن وجود دارد Dـمدول V که R روی V به طور چگال عمل می‌کند. حال دو حالت در نظر می‌گیریم

i) $\dim_D V = n < \infty$. فرض کنید $\{v_1, \ldots, v_n\}$ پایه‌ای برای Dـمدول V باشد. در این صورت $V \simeq D^n$ (به عنوان Dـمدول) و لذا $End_D V \simeq End_D D^n \simeq M_n(End_D D) \simeq M_n(D^{op})$ (به عنوان حلقه) توجه کنید قبلاً دیدیم که اگر $\dim_D V < \infty$ و R روی V به طور چگال عمل کند آنگاه $R = End_D V$.

ii) $\dim_D V = +\infty$. فرض کنید $\{v_1, v_2, \ldots\}$ یک مجموعه‌ی مستقل خطی شمارا باشد و زیرفضای

$V_k = \langle v_1, v_2, \ldots, v_k \rangle$ به عنوان Dـمدول را در نظر بگیرید. فرض کنید به‌ازای هر عدد طبیعی k، $R_k = \{r \in R \mid r(V_k) \subseteq V_k\}$. R_k زیرحلقه‌ای از R است. زیرا اگر $r_1, r_2 \in R_k$ آنگاه

$$\begin{cases} (r_1 + r_2)V_k \subseteq r_1 V_k + r_2 V_k \subseteq V_k + V_k = V_k \\ (r_1 r_2)V_k = r_1(r_2 V_k) \subseteq r_1 V_k \subseteq V_k \end{cases}$$

در نتیجه $r_1 + r_2, r_1 r_2 \in R$ و به‌ازای هر عدد طبیعی k، R_k روی V_k به طور چگال عمل می‌کند. توجه کنید R_k را می‌توان به عنوان زیرحلقه‌ای از $End_D V_k$ در نظر گرفت. زیرا تحدید عناصر به V_k را در نظر بگیرید. توجه کنید R_k روی V_k به طور چگال عمل می‌کند. فرض کنید $v_1, \ldots, v_t$ عناصر مستقل خطی V_k و $w_1, \ldots, w_t \in V_k$ دلخواه باشند. حال $\{v_1, \ldots, v_t\}$ را به پایه‌ای مانند $\{v_1, \ldots, v_t, v_{t+1}, \ldots, v_k\}$ گسترش دهید. چون R روی V به طور چگال عمل می‌کند وجود دارد $r \in R$ به طوری که

$$\begin{cases} rv_i = w_i & 1 \leq i \leq t \\ rv_j = 0 & j \geq t + 1 \end{cases}$$

برای $r \in R_k$، R_k هومومورفیسم $T : R_k \longrightarrow End_D V_k$ را با ضابطه $T(r) = T_r|_{V_k}$ در نظر بگیرید. چون R روی V_k به طور چگال عمل می‌کند T پوشاست و

$$\ker T = \{r \in R \mid r(V_k) = \{0\}\}$$

توجه کنید V_k به عنوان R_kـمدول وفادار نمی‌باشد و $End_D V_k \simeq M_k(D^{op})$ (به عنوان حلقه). □

تمرین ۲۴. ثابت کنید اگر R آرتینی چپ باشد فقط حالت اول قضیه قبل اتفاق می‌افتد و اگر R آرتینی چپ نباشد فقط حالت دوم قضیه قبل اتفاق می‌افتد.

تمرین ۲۵. فرض کنید D یک حلقه‌ی تقسیم و $R \subseteq End_D(V)$ و I ایده‌آل ناصفری از R باشد. نشان دهید اگر R روی V به طور چگال عمل کند آنگاه I نیز روی V به طور چگال عمل می‌کند.

سؤال. فرض کنید می‌دانیم که اگر D یک حلقه‌ی تقسیم باشد و به‌ازای هر $x \in D$، $x^{n(x)} = x$ ($n(x) > 1$) آنگاه D جابجایی است. نشان دهید اگر R یک حلقه با خاصیت فوق باشد آنگاه R جابجایی است.

راهنمایی. اگر R حلقه‌ای نیمه ابتدایی باشد آنگاه بنا به قضیه ۴−۱۱، $J = \bigcap P = 0$. حال مونومورفیسم

$$\begin{cases} f : R \longrightarrow \prod R/P \\ f(x) = \prod (P + x) \end{cases}$$

را در نظر بگیرید. چون $\ker f = \bigcap P = 0$ پس f یک به یک است. توجه کنید به‌ازای هر i، اگر π_i تصویر روی مؤلفه‌ی iـام باشد آنگاه $\pi_i \circ f$ پوشاست.

لم (ناکایاما[۲۶]) ۴—۴۱. فرض کنید R یک حلقه بوده و I ایده‌آل چپی از R باشد، به طوری که $I \subseteq J(R)$. اگر M یک Rـمدول با تولید متناهی باشد و $IM = M$ در این صورت $M = 0$.

اثبات (روش اول). فرض کنید $n \geq 0$ کوچکترین عددی باشد که $M = \langle m_1, \ldots, m_n \rangle$. اگر $n = 0$ آنگاه $M = 0$ و چیزی برای اثبات نداریم. پس فرض کنید $n \geq 1$. داریم $m_i \in M = IM$. در نتیجه وجود دارد $x_j \in M$ و $a_j \in I$ به طوری که $m_i = \sum_{j=1}^{\ell} a_j x_j$ در نتیجه وجود دارند $r_t \in R$ به طوری که $m_1 = \sum_{t=1}^{n} b_t r_t m_t$ و به ازای هر t، $b_t \in I$ بنابراین $(1 - b_1 r_1) m_1 \in \langle m_2, \ldots, m_n \rangle$. چون J ایده‌آل دوطرفه است و $b_t \in I \subseteq J$ پس $b_t r_t \in J$ به ویژه $b_1 r_1 \in J$ و لذا $1 - b_1 r_1$ یکال است پس $m_1 \in \langle m_2, \ldots, m_n \rangle$ و لذا $M = \langle m_2, \ldots, m_n \rangle$ و این تناقض با کوچکترین عدد بودن n است.

(روش دوم). چون M با تولید متناهی است اگر $M \neq \{0\}$ آنگاه وجود دارد زیرمدول ماکسیمال M' از M (چون M با تولید متناهی است). M/M' به عنوان Rـمدول ساده است پس $J(M/M') = 0$ و لذا $(JM + M')/M' = 0$ یعنی $M = IM \subseteq JM \subseteq M'$ که تناقض است.

نتیجه ۴—۴۲. فرض کنید M یک Rـمدول و N زیرمدولی از M باشد به طوری که M/N با تولید متناهی است. اگر I ایده‌آل چپی از R باشد به طوری که $I \subseteq J(R)$ و $N + IM = M$ در این صورت $M = N$.

اثبات. داریم

$$I\frac{M}{N} = \frac{N + IM}{N} = \frac{M}{N}$$

و چون M/N با تولید متناهی است پس بنابر لم ناکایاما داریم $M/N = 0$ و این یعنی $M = N$.

قضیه ۴—۴۳. فرض کنید R حلقه‌ای جابجایی و M یک Rـمدول با تولید متناهی باشد. اگر I ایده‌آلی از R باشد به طوری که $IM = M$ در این صورت وجود دارد $a \in R$ به طوری که $a - 1 \in I$ و $aM = 0$.

[۲۶] Nakayama

اثبات. چون M با تولید متناهی است پس $M = \langle m_1, \ldots, m_n \rangle$ و $\forall i: \ m_i \in M$. از طرفی داریم $IM = M$ و چون $m_i \in M$ پس وجود دارند $m_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} m_j$ در نتیجه داریم

$$\begin{bmatrix} a_{11} - 1 & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - 1 & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} - 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \\ \vdots \\ m_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \qquad (a_{ij} \in I)$$

اگر A ماتریس ضرایب باشد در این صورت

$$(adjA)A \begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \\ \vdots \\ m_n \end{bmatrix} = 0$$

در نتیجه $0 = (\det A)I \begin{bmatrix} m_1 \\ \vdots \\ m_n \end{bmatrix}$ پس به ازای هر i، $\det A \cdot m_i = 0$. چون $\det A$ برابر مجموع حاصل‌ضرب قطرهای پراکنده همراه با یک علامت است و $a_{ij} \in I$ و I نیز ایده‌آل است، پس داریم $\det A = 1 + x$ $(x \in I)$ یا $\det A = -1 + y$ $(y \in I)$. قرار دهید $a = (-1)^n \det A$. چون به‌ازای هر i، $\det m_i = 0$ پس $(\det A)M = 0$، زیرا $M = \langle m_1, \ldots, m_n \rangle$ و حلقه جابجایی است.

نکته. در حالتی که R جابجایی باشد قضیه‌ی اخیر لم ناکایاما را نتیجه می‌دهد، زیرا وجود دارد $a \in R$ به طوری که $a - 1 \in I \subseteq J$ پس $a = 1 + x$ که $x \in J$. پس a وارون‌پذیر است و چون $aM = 0$ پس $M = 0$ است.

قضیه (واسکانسلوس[27]) ۴—۴۴. فرض کنید R حلقه‌ای جابجایی بوده و M یک Rـمدول با تولید متناهی باشد. اگر $f: M \longrightarrow M$ یک Rـمدول اپی‌مورفیسم باشد آنگاه f یک Rـمدول ایزومورفیسم است.

اثبات. می‌توان M را با ضرب زیر به یک $R[x]$ـمدول تبدیل کرد

$$g(x) \cdot m = g(f)(m)$$

به راحتی دیده می‌شود خواص مدولی برقرار است. چون $R \subseteq R[x]$ به‌ازای هر $r \in R$، $r \cdot m$ همان ضرب اسکالر قبل است در نتیجه M به عنوان $R[x]$ـمدول نیز با تولید متناهی است. قرار دهید $I = \langle x \rangle$. چون f پوشاست لذا

[27] Vascancelos

به‌ازای هر $m \in M$ وجود دارد $n \in M$ به طوری که $f(n) = m$. بنابراین $m = x \cdot n$، پس $m \in IM$ و این یعنی $IM = M$. حال بنا به قضیه قبل وجود دارد $a \in R[x]$ به طوری که $a - ۱ \in \langle x \rangle$ در نتیجه $a = ۱ + g(x)x$ و $aM = ۰$. اگر $f(a) = ۰$ و $u \in M$ داریم $au = ۰$ پس $(۱ + g(x)x) \cdot u = ۰$ در نتیجه $u + g(f)f(u) = ۰$ پس $u = ۰$ و این یعنی f یک به یک است.

سؤال. آیا قضیه‌ی قبل برای R غیر جابجایی درست است؟

جواب. خیر. برای R غیر جابجایی لزوماً درست نیست. به عنوان مثال قرار دهید $R = \mathbb{R}[x, y]/\langle yx - ۱\rangle$ که x و y جابجا نمی‌شوند و $M = R$ و

$$\begin{cases} f : R \longrightarrow R \\ f(\langle yx - ۱\rangle + t) = \langle yx - ۱\rangle + tx \end{cases}$$

R حلقه‌ای یکدار است پس با تولید متناهی است. از طرفی

$$f(\langle yx - ۱\rangle + y) = \langle yx - ۱\rangle + yx = \langle yx - ۱\rangle + ۱$$

در نتیجه چون f، Rـ‌مدول همومورفیسم است پس f پوشاست. از طرفی

$$\begin{cases} f(\langle yx - ۱\rangle + ۱) = \langle yx - ۱\rangle + x \\ f(\langle yx - ۱\rangle + xy) = \langle yx - ۱\rangle + xyx = \langle yx - ۱\rangle + xyx - x + x = \langle yx - ۱\rangle + x \end{cases}$$

ولی $xy - ۱ \notin \langle yx - ۱\rangle$ زیرا اگر $xy - ۱ \in \langle yx - ۱\rangle$ آنگاه

$$xy - ۱ = \sum_{i=۱}^{n} f_i(yx - ۱)g_i$$

و این تناقض است (چرا؟).

نکته. اگر $f : M \longrightarrow M$ یک به یک بوده و M با تولید متناهی باشد لزوماً f پوشا نیست. زیرا تعریف کنید $\begin{cases} f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z} \\ f(x) = ۲x \end{cases}$ و $\mathbb{Z}$ را به عنوان $\mathbb{Z}$ـ‌مدول در نظر بگیرید.

۵ رشته‌های دقیق

تعریف ۵—۱. فرض کنید A، B، و C سه Rـمدول بوده و $f : A \longrightarrow B$ و $g : B \longrightarrow C$ دو Rـمدول هومورفیسم باشند، در این صورت رشته‌ی $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$ از Rـمدول‌ها و Rـهومورفیسم‌ها را یک رشته‌ی دقیق[۲۸] گوییم هرگاه $\ker g = Imf$. بنابراین اگر $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$ یک رشته‌ی دقیق باشد آنگاه $g \circ f = ۰$. به همین ترتیب رشته‌ی زیر از Rـمدول‌ها و Rـهومورفیسم‌ها را یک رشته‌ی دقیق گویند

$$A_۰ \xrightarrow{f_۱} A_۱ \xrightarrow{f_۲} A_۲ \longrightarrow \cdots \xrightarrow{f_n} A_n$$

هرگاه به‌ازای هر i، $Imf_i = \ker f_{i+۱}$. حتی اگر به صورت زیر باشد

$$\cdots \longrightarrow A_{i-۱} \xrightarrow{f_i} A_i \xrightarrow{f_{i+۱}} A_{i+۱} \longrightarrow \cdots$$

توجه کنید اگر رشته‌ی $۰ \xrightarrow{\phi} A \xrightarrow{f} B$ (ϕ هومورفیسم صفر است) دقیق باشد آنگاه f یک به یک است و اگر رشته‌ی $B \xrightarrow{g} C \longrightarrow ۰$ دقیق باشد آنگاه g پوشاست. رشته‌ی دقیق $۰ \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow ۰$ را یک رشته‌ی دقیق کوتاه می‌نامند.

مثال ۱. $۰ \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{\subseteq} \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \longrightarrow ۰$

مثال ۲. $g(x,y) = y \quad , \quad f(x) = (x, ۰) \quad , \quad ۰ \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{f} \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \xrightarrow{g} \mathbb{Z} \longrightarrow ۰$

نکته. اگر $g : B \longrightarrow C$ یک Rـمدول اپی‌مورفیسم باشد، در این صورت رشته‌ی دقیق کوتاه زیر را داریم

$$۰ \longrightarrow \ker g \xrightarrow{\subseteq} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow ۰$$

و اگر $f : A \longrightarrow B$ یک Rـمدول منومورفیسم باشد آنگاه رشته‌ی دقیق کوتاه زیر را داریم

$$۰ \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{\theta} \frac{B}{Imf} \longrightarrow ۰ \qquad (\theta(b) = Imf + b)$$

---

[۲۸] Exact sequence

قضیه ۵—۲. فرض کنید R یک حلقه بوده و A، B، و C سه Rـمدول باشند. اگر

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0$$

یک رشته‌ی دقیق کوتاه باشد در این صورت گزاره‌های زیر معادلند

i) Rـمدول همومورفیسم $h : C \longrightarrow B$ وجود دارد به طوری که $gh = 1_C$.

ii) Rـمدول همومورفیسم $k : B \longrightarrow A$ وجود دارد به طوری که $kf = 1_A$.

اثبات. (i $\Longleftarrow$ ii) $k : B \longrightarrow A$ را به صورت $k(b) = f^{-1}(b - hg(b))$ تعریف کنید. به وضوح k خوش‌تعریف است. حال

$$g(b - hg(b)) = g(b) - ghg(b) = g(b) - g(b) = 0$$

پس به‌دست می‌آوریم $b - hg(b) \in \ker g = Imf$ و چون f یک به یک است پس $f^{-1}(b - hg(b))$ دقیقاً عنصری مشخص از A است. چون مجموع و وارون Rـمدول همومورفیسم‌ها، Rـمدول همومورفیسم می‌شود لذا k یک Rـمدول همومورفیسم است. اگر $a \in A$ در این صورت طبق تعریف k داریم

$$k(f(a)) = f^{-1}(f(a) - hgf(a)) = f^{-1}(f(a) - 0) = f^{-1}(f(a)) = a \Longrightarrow kf = 1_A$$

(ii $\Longleftarrow$ i) تابع $h : C \longrightarrow B$ را چنین تعریف کنید $h(c) = b - fk(b)$ که در آن $g(b) = c$ (چون g پوشاست چنین b ای وجود دارد). ضابطه‌ی h مستقل از b است، زیرا اگر $g(b_1) = g(b_2) = c$ در نتیجه $g(b_1 - b_2) = 0$ و لذا $b_1 - b_2 \in \ker g = Imf$، یعنی وجود دارد a ای که $f(a) = b_1 - b_2$ پس به‌دست می‌آوریم

$$fkf(a) = fk(b_1) - fk(b_2) = f(a)$$

در نتیجه $b_1 - b_2 = f(a) = fk(b_1) - fk(b_2)$ پس $b_1 - fk(b_1) = b_2 - fk(b_2)$. ادعا می‌کنیم h یک Rـمدول همومورفیسم است. اگر $b_1 \in g^{-1}(c_1)$ و $b_2 \in g^{-1}(c_2)$ و $r \in R$ آنگاه $b_1 + rb_2 \in g^{-1}(c_1 + rc_2)$ و در نتیجه

$$h(c_1 + rc_2) = b_1 + rb_2 - fk(b_1 + rb_2) = (b_1 - fk(b_1)) + (rb_2 - rfk(b_2)) = h(c_1) + rh(c_2)$$

اما داریم $gh(c) = g(b) - gfk(b) = g(b) = c$ پس $gh = 1_C$. $\square$

تعریف ۵—۳. گوییم رشته‌ی دقیق کوتاه $0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0$ شکافته شده است یا شکافته می‌شود هرگاه یکی از شرایط قضیه‌ی قبل برقرار باشد.

مثال. رشته‌ای که در قضیه قبل با استفاده از h و k به‌دست می‌آید لزوماً دقیق نیست. زیرا به عنوان مثال نقض رشته زیر را در نظر بگیرید

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{f} \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \xrightarrow{g} \mathbb{Z} \longrightarrow 0 \quad , \quad f(x) = (x, 0) \quad , \quad g(x, y) = y$$

اما

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{h} \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \xrightarrow{k} \mathbb{Z} \longrightarrow 0 \quad , \quad h(x) = (0, x) \quad , \quad k(x, y) = x + y$$

و داریم، $kh \neq 0$.

قضیه ۵—۴. اگر رشته‌ی دقیق کوتاه $0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0$ شکافته شده باشد در این صورت داریم $B \simeq A \oplus C$

اثبات. چون رشته شکافته می‌شود پس وجود دارد $k : B \longrightarrow A$ که $kf = 1_A$. حال تابع زیر را در نظر بگیرید

$$\begin{cases} \theta : B \longrightarrow A \oplus C \\ \theta(b) = (k(b), g(b)) \end{cases}$$

چون k و g، Rـمدول هومومورفیسم هستند پس θ نیز یک Rـمدول هومومورفیسم است. θ یک به یک نیز می‌باشد زیرا اگر $\theta(b) = 0$ آنگاه $k(b) = 0$ و $g(b) = 0$. چون $g(b) = 0$ پس $b \in \ker g = Imf$ پس وجود دارد $a \in A$ به طوری که $f(a) = b$ و لذا به‌دست می‌آوریم $kf(a) = k(b) = 0$. ولی $kf = 1_A$ پس $a = 0$ و در نتیجه $b = f(a) = 0$. θ پوشا نیز می‌باشد زیرا فرض کنید $(a, c) \in A \oplus C$. داریم

$$\theta(f(a) + h(c) - fkh(c)) = (kf(a) + kh(c) - kfkh(c), gf(a) + gh(c) - gfkh(c))$$

ولی چون $gf = 0$ و $kf = 1$ و $gh = 1$ بنابراین داریم، $\theta(f(a) + h(c) - fkh(c)) = (a, c)$. لذا θ یک Rـمدول ایزومورفیسم است پس نتیجه می‌گیریم $B \simeq A \oplus C$ (به عنوان Rـمدول) $\square$

تمرین ۲۶. اگر $0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0$ یک رشته‌ی دقیق کوتاه باشد و $B \simeq A \oplus C$، آیا می‌توان نتیجه گرفت رشته‌ی فوق شکافته می‌شود؟

تعریف ۵—۵. Rـمدول P را تصویری (افکنشی، پروژکتیو[29]) گوییم هرگاه به‌ازای هر رشته‌ی دقیق مانند $A \xrightarrow{g} B \longrightarrow 0$ از Rـمدول‌ها و هر Rـمدول هومورفیسم $f : P \longrightarrow B$، وجود داشته باشد Rـمدول هومورفیسم $h : P \longrightarrow A$ (نه لزوماً یکتا) به طوری که دیاگرام زیر جابجایی باشد

$$\begin{array}{ccccc} & & P & & \\ & \overset{h}{\swarrow} & \downarrow f & & \\ A & \xrightarrow{g} & B & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

یعنی $gh = f$.

مثال ۱. $\mathbb{Z}$ به عنوان $\mathbb{Z}$ـمدول تصویری است زیرا فرض کنید $g : A \longrightarrow B$ پوشا بوده و $f : \mathbb{Z} \longrightarrow B$ یک هومورفیسم باشد. چون g پوشاست پس وجود دارد $a \in A$ به طوری که $g(a) = f(1)$. حال تعریف کنید $\begin{cases} h : \mathbb{Z} \longrightarrow A \\ h(k) = ka \end{cases}$ داریم $gh(k) = g(ka) = kg(a) = kf(1) = f(k)$ پس $gh = f$.

نکته. هر $\mathbb{Z}$ـمدول تصویری یک گروه آبلی آزاد است.

مثال ۲. $\mathbb{Q}$ به عنوان $\mathbb{Z}$ـمدول تصویری نیست. زیرا قرار دهید $f = 1 : \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Q}$ و $B = \mathbb{Q}$ و $A = \bigoplus_{i=1}^{\infty} \mathbb{Z}$ و تعریف کنید

$$\begin{cases} g : A \longrightarrow \mathbb{Q} \\ g((x_1, x_2, \ldots)) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i/i \end{cases}$$

برای هر $n > 0$ اگر m در مؤلفه n ام باشد داریم $g((0, \ldots, 0, m, 0, \ldots, 0)) = m/n$، پس g پوشاست. در نتیجه g یک هومورفیسم پوشاست، ولی هومورفیسم ناصفر از $\mathbb{Q}$ به $\bigoplus_{i=1}^{\infty} \mathbb{Z}$ وجود ندارد زیرا فرض کنید $h(1) = (m_1, \ldots, m_n, 0, \ldots, 0)$. حال قرار دهید $t = \sum_{i=1}^{n} |m_i| + 1$، داریم

$$h(1) = h(t \times \frac{1}{t}) = th(\frac{1}{t}) \Longrightarrow h(\frac{1}{t}) = (\frac{m_1}{t}, \ldots, \frac{m_n}{t}, 0, \ldots, 0) \notin \bigoplus_{i=1}^{\infty} \mathbb{Z}$$

سؤال. آیا اپی‌مورفیسم $h : \prod_{i=1}^{\infty} \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Q}$ وجود دارد؟ (در کتاب Infinite Abelian Groups تألیف Fuchs می‌توان دید $\prod_{i=1}^{\infty} \mathbb{Z}$ روی $\mathbb{Z}$ پایه ندارد).

[29] projective

جواب. بله وجود دارد. زیرا $\prod_{i=1}^{\infty}\mathbb{Z} \subseteq \prod_{i=1}^{\infty}\mathbb{Q}$. فرض کنید $B=\{e_i\}_{i\in I}$ پایه‌ای برای $\prod_{i=1}^{\infty}\mathbb{Z}$ روی $\mathbb{Q}$ باشد. حال B را به یک پایه برای $\prod_{i=1}^{\infty}\mathbb{Q}$ روی $\mathbb{Q}$ گسترش دهید (e_i ها روی $\mathbb{Q}$ مستقل خطی هستند). چون تعداد e_i ها شماراست و $\mathbb{Q}$ نیز شماراست پس می‌توان همومورفیسم پوشای $f:\prod_{i=1}^{\infty}\mathbb{Q}\longrightarrow\mathbb{Q}$ را طوری تعریف کرد که $f(e_i)=p_i/q_i$. حال دامنه f را به $\prod_{i=1}^{\infty}\mathbb{Z}$ تحدید کنید و آن را h بنامید در این صورت باز هم h پوشاست.

مثال. هر Rـمدول آزاد F تصویری است. فرض کنید $\{x_i\}_{i\in I}$ یک پایه برای F باشد. چون $f(x_i)\in B$ و g پوشاست پس وجود دارد $y_i\in A$ به طوری که $g(y_i)=f(x_i)$. حال تعریف کنید $h(x_i)=y_i$ و با استفاده از خاصیت خطی بودن، دامنه‌ی h را به F گسترش دهید. بنابراین برای هر $i\in I$ داریم $g(h(x_i))=g(y_i)=f(x_i)$ و در نتیجه $gh=f$.

$$\begin{array}{cccc} & F & & \\ {}^{h}\swarrow & \downarrow f & & \\ A \xrightarrow{g} & B & \longrightarrow 0 & \end{array}$$

قضیه ۵—۶. فرض کنید P یک Rـمدول باشد. در این صورت شرایط زیر معادلند

i) P تصویری است.

ii) هر رشته‌ی دقیق کوتاه مانند $0\longrightarrow A\xrightarrow{f}B\xrightarrow{g}P\longrightarrow 0$ شکافته می‌شود.

iii) وجود دارد Rـمدول آزاد F و Rـمدول K به طوری که $K\oplus P\simeq F$.

اثبات. (i $\Longleftarrow$ ii) دیاگرام زیر را در نظر بگیرید

$$\begin{array}{ccccc} & & & P & \\ & & & \downarrow 1 & \\ 0\longrightarrow A & \xrightarrow{f} & B \xrightarrow{g} & P & \longrightarrow 0 \end{array}$$

چون P تصویری است پس وجود دارد $h:P\longrightarrow B$ به طوری که $gh=1$ یعنی رشته شکافته می‌شود.

(ii $\Longleftarrow$ iii) به‌ازای Rـمدول P، مدول آزادی با پایه‌ی $\{x_p\}_{p\in P}$ ساخته و آن را F بنامید. در واقع

$$F=\left\{\sum_{p\in P} r_p x_p \mid r_p\in R,\ \text{به‌جز تعداد متناهی } p \text{ سایر } r_p \text{ ها صفرند}\right\}$$

حال Rـمدول هومورفیسم $\phi : F \longrightarrow P$ را با ضابطه‌ی $\phi(x_p) = p$ در نظر بگیرید. ϕ پوشاست. حال بنا به فرض رشته‌ی دقیق $\circ \longrightarrow \ker\phi \xrightarrow{\subseteq} F \xrightarrow{\phi} P \longrightarrow \circ$ شکافته می‌شود. در نتیجه بنا به شرط (ii) داریم $F \simeq \ker\phi \oplus P$.

(iii $\Longleftarrow$ i) فرض کنید $\lambda(p) = (p, \circ)$ و $\pi((p,k)) = p$ و دیاگرام زیر را در نظر بگیرید

$$\begin{array}{ccc} P \oplus K & \overset{\lambda}{\underset{\pi}{\rightleftarrows}} & P & \\ & & \downarrow f & \\ A & \xrightarrow{g} & B & \longrightarrow \circ \end{array}$$

چون $P \oplus K$ آزاد است پس تصویری است، لذا وجود دارد $h' : P \oplus K \longrightarrow A$ به طوری که $gh' = f\pi$. در نتیجه $gh'\lambda = f\pi\lambda$ ولی $\pi\lambda = 1_P$، بنابراین $gh'\lambda = f$. حال قرار دهید $h = h'\lambda$ داریم $gh = f$ و لذا P تصویری است. □

تعریف ۵—۷. گوییم Rـمدول N یک جمعوند مستقیم[۳۰] M است اگر وجود داشته باشد Rـمدول K به طوری که $M \simeq N \oplus K$.

نتیجه ۵—۸. هر Rـمدول تصویری جمعوند مستقیم یک Rـمدول آزاد است و برعکس.

نکته. Rـمدول‌هایی وجود دارند که تصویری می‌باشند ولی آزاد نیستند. به عنوان مثال $2\mathbb{Z}_6$ به عنوان $\mathbb{Z}_6$ـمدول تصویری است ولی آزاد نیست. چون $\mathbb{Z}_6 = 2\mathbb{Z}_6 \oplus 3\mathbb{Z}_6$ در نتیجه $2\mathbb{Z}_6$ تصویری است ولی $2\mathbb{Z}_6$ به عنوان $\mathbb{Z}_6$ـمدول آزاد نیست زیرا $2 \times 3 = \circ$ و $3 \neq \circ$.

می‌توان ثابت کرد که هر $\mathbb{Z}$ـمدول تصویری آزاد است و به علاوه در حالت کلی‌تر اگر R یک PID باشد آنگاه تصویری بودن معادل آزاد بودن است. کاپلانسکی نشان داد که اگر R حلقه‌ای موضعی (حلقه‌ی موضعی حلقه‌ی جابجایی و یکداری است که تنها یک ایده‌آل ماکسیمال داشته باشد) باشد آنگاه هر Rـمدول تصویری آزاد است (اثبات حکم فوق در کتاب Algebra تألیف Hungerford موجود است).

تمرین ۲۷. فرض کنید R حلقه‌ای جابجایی بوده و P و Q، Rـمدول‌هایی تصویری و با تولید متناهی باشند. ثابت کنید $Hom_R(P,Q)$ تصویری و با تولید متناهی است.

---
[۳۰] Direct summand

تمرین ۲۸. فرض کنید R یک حوزه صحیح باشد و میدان نباشد. اگر M_R یک Rـمدول راست باشد که هم تصویری است و هم اینژکتیو، ثابت کنید $M = 0$.

قضیه ۵—۹. فرض کنید $\{P_i\}_{i\in I}$ خانواده‌ای از Rـمدول‌ها باشد. در این صورت $\bigoplus_{i\in I} P_i$ تصویری است اگر و تنها اگر هر P_i تصویری باشد.

اثبات. چون $\bigoplus_{i\in I} P_i$ تصویری است پس وجود دارد K ای که $(\bigoplus_{i\in I} P_i) \oplus K \simeq F$ و F آزاد است. در نتیجه $P_i \oplus (\bigoplus_{j\in I\setminus\{i\}} P_j \oplus K) \simeq F$ و لذا بنابر نتیجه ۵—۸، P_i تصویری است.

برعکس اگر هر P_i تصویری باشد آنگاه بنابر نتیجه ۵—۸، وجود دارند K_i هایی که $P_i \oplus K_i \simeq F_i$ و F_i ها آزاد هستند، در نتیجه داریم

$$(\bigoplus_{i\in I} P_i) \oplus (\bigoplus_{i\in I} K_i) \simeq \bigoplus_{i\in I} F_i$$

و چون $\bigoplus_{i\in I} F_i$ آزاد است حکم ثابت می‌شود. $\square$

سؤال. آیا می‌توانید مثالی بزنید که برای حاصل‌ضرب دکارتی قضیه قبل درست نباشد.

تعریف ۵—۱۰. Rـمدول J را اینژکتیو[۳۱] گوییم هرگاه به‌ازای هر رشته‌ی دقیق $0 \longrightarrow A \xrightarrow{g} B$ از Rـمدول‌ها و هر Rـمدول هومومورفیسم $f : A \longrightarrow J$ وجود داشته باشد Rـمدول هومومورفیسم $h : B \longrightarrow J$ به طوری که دیاگرام زیر جابجایی باشد

$$\begin{array}{ccccc} 0 & \longrightarrow & A & \xrightarrow{g} & B \\ & & f\downarrow & \swarrow & \\ & & J & & \end{array}$$

یعنی $hg = f$.

مثال ۱. $\mathbb{Z}$ به عنوان $\mathbb{Z}$ـمدول اینژکتیو نمی‌باشد. زیرا تنها هومومورفیسم گروهی از $\mathbb{Q}$ به $\mathbb{Z}$ هومومورفیسم صفر است پس h ای وجود ندارد که دیاگرام زیر جابجایی شود

$$\begin{array}{ccccc} 0 & \longrightarrow & \mathbb{Z} & \xrightarrow{\subseteq} & \mathbb{Q} \\ & & 1\downarrow & & \\ & & \mathbb{Z} & & \end{array}$$

[۳۱] injective

مثال ۲. هر فضای‌برداری W روی میدان F اینژکتیو است. فرض کنید $\{g(x_i)\}_{i\in I}$ یک پایه برای Img باشد. $\{g(x_i)\}_{i\in I}$ را به یک پایه برای B گسترش دهید. تعریف کنید $h(g(x_i)) = f(x_i)$ و تعریف کنید $h(\alpha_i) = 0$، اگر $\alpha_i \neq g(x_j)$، در این صورت واضح است که $hg = f$. توجه کنید که هر فضای‌برداری به دلیل آزاد بودن پروژکتیو نیز می‌باشد.

قضیه ۱۱ــ۵. فرض کنید J یک Rـمدول باشد. در این صورت J اینژکتیو است اگر و تنها اگر به‌ازای هر ایده‌آل چپ I از R و هر Rـمدول هومومورفیسم $f : I \longrightarrow J$ بتوان f را به یک Rـمدول هومومورفیسم از R به J گسترش داد.

اثبات. اگر J اینژکتیو باشد آنگاه دیاگرام زیر را در نظر بگیرید

$$\begin{array}{ccccc} 0 & \longrightarrow & I & \xrightarrow{i} & R \\ & & f\downarrow & & \\ & & J & & \end{array}$$

چون J اینژکتیو است وجود دارد هومومورفیسم $h : R \longrightarrow J$ به طوری که $hi = f$ و چون i هومومورفیسم شمول است پس h گسترش f است.

برعکس فرض کنید دامنه‌ی f را بتوان به R گسترش داد. حال دیاگرام زیر را در نظر بگیرید

$$\begin{array}{ccccc} 0 & \longrightarrow & A & \xrightarrow{g} & B \\ & & f\downarrow & & \\ & & J & & \end{array}$$

قرار دهید $\sum = \{k : C \longrightarrow J \mid Img \subseteq C \subseteq B, kg = f\}$ چون $fg^{-1} : Img \longrightarrow J$ در $\sum$ قرار دارد پس $\sum \neq \emptyset$. $k_1 : C_1 \longrightarrow J$ و $k_2 : C_2 \longrightarrow J$ را در نظر بگیرید. تعریف می‌کنیم، $k_1 \leq k_2$ اگر و تنها اگر $C_1 \subseteq C_2$ و $k_2|_{C_1} = k_1$. به راحتی دیده می‌شود که رابطه‌ی "$\leq$" یک ترتیب جزیی روی عناصر $\sum$ است. فرض کنید $\{k_i\}_{i\in I}$ یک زنجیر از عناصر $\sum$ باشد. قرار دهید $C = \bigcup_{i\in I} C_i$ و تعریف کنید $h' : \bigcup_{i\in I} C_i \longrightarrow J$ و $h'(a) = k_j(a)$ که در آن $a \in C_j$. توجه کنید چون اگر $k_j \leq k_\ell$ و $a \in C_j$ آنگاه $k_j(a) = k_\ell(a)$ پس h' خوش‌تعریف است. از طرفی چون $Img \subseteq C_j \subseteq B$ پس $Img \subseteq \bigcup_{i\in I} C_i \subseteq B$ و لذا $h' \in \sum$. اما به‌ازای هر j، داریم $C_j \subseteq \bigcup_{i\in I} C_i$ بنابراین طبق تعریف h'، به‌ازای هر j داریم $k_j \leq h'$ یعنی h' یک کران بالا برای زنجیر $\{k_i\}_{i\in I}$ است. در نتیجه بنابر لم زرن، $\sum$ دارای عضو ماکسیمالی مانند $h : H \longrightarrow J$ است و چون $h \in \sum$ پس $Img \subseteq H \subseteq B$ و $hg = f$. ادعا می‌کنیم $H = B$. فرض کنید $b \in B\backslash H$ و قرار دهید $I = \{r \in R \mid rb \in H\}$.

چون H، Rـمدول است پس I ایده‌آل چپی از R است. تعریف کنید $\left\{\begin{array}{l}\theta : I \longrightarrow J\\ \theta(r) = h(rb)\end{array}\right.$، بنا به فرض وجود دارد $\overline{\theta} : R \longrightarrow J$ به طوری که $\overline{\theta}|_I = \theta$. حال تعریف کنید $\left\{\begin{array}{l}\phi : H + \langle b\rangle \longrightarrow J\\ \phi(a+rb) = h(a) + \overline{\theta}(r)\end{array}\right.$. ϕ خوش تعریف است، زیرا

$$a + rb = a' + r'b \Longrightarrow h(a) - h(a') = h(a - a') = h((r - r')b)$$

چون $(r' - r)b = a' - a \in H$ پس

$$h((r' - r)b) = \theta((r' - r)) = \overline{\theta}(r' - r) = \overline{\theta}(r') - \overline{\theta}(r)$$

پس $h(a) - h(a') = \overline{\theta}(r') - \overline{\theta}(r)$. اگر $a \in H$ آنگاه $a = a + \circ \times b$ و لذا $\phi(a) = h(a)$ پس $\phi|_H = h$. به راحتی دیده می‌شود که ϕ یک Rـمدول همومورفیسم است و چون $H \subsetneq H + \langle b\rangle$ و $\phi|_H = h$ و به علاوه $Img \subseteq H \subseteq H + \langle b\rangle$ و همچنین به‌ازای هر $a \in A$، $g(a) \in Img$ پس داریم $\phi(g(a)) = h(g(a)) = f(a)$ و لذا $h < \phi$ و این تناقض با ماکسیمال بودن h در $\sum$ است. $\square$

تعریف ۵—۱۲. گروه آبلی G را بخش‌پذیر گوییم هرگاه به‌ازای هر $g \in G$ و هر $n \in \mathbb{N}$ معادله‌ی $nx = g$ در G جواب داشته باشد.

مثال ۱. $\mathbb{Q}$ بخش‌پذیر است.

مثال ۲. $\mathbb{Z}$ بخش‌پذیر نیست، زیرا مثلاً $2x = 3$ جواب ندارد.

مثال ۳. $\mathbb{Z}_{p^\infty}$ بخش‌پذیر است.

نکته. اگر G متناهی باشد در این صورت G بخش‌پذیر نمی‌باشد، زیرا اگر $|G| = m$ آنگاه $mx = a$ به‌ازای $a \neq \circ$ جواب ندارد (بنابر قضیه لاگرانژ $\forall x : mx = \circ$).

قضیه ۵—۱۳. گروه آبلی G بخش‌پذیر است اگر و تنها اگر G به عنوان $\mathbb{Z}$ـمدول اینژکتیو باشد.

اثبات. چون G بخش‌پذیر است پس کافیست ثابت کنیم اگر I ایده‌آلی از $\mathbb{Z}$ و $f : I \longrightarrow G$ یک هومومورفیسم باشد آنگاه دامنه‌ی f را می‌توان به $\mathbb{Z}$ گسترش داد. وجود دارد n ای که $I = \langle n\rangle$. معادله‌ی $nx = f(n)$ در G

دارای جوابی مانند a است. حال تعریف کنید $\begin{cases} \overline{f}:\mathbb{Z}\longrightarrow G \\ \overline{f}(r)=ra \end{cases}$ بنابراین

$$\overline{f}(tn)=tna=tf(n)=f(tn)$$

پس $\overline{f}|_I=f$.

برعکس فرض کنید $g\in G$ و $n\in\mathbb{N}$. معادله‌ی $nx=g$ را در نظر بگیرید. تابع $f:\langle n\rangle\longrightarrow G$ را چنین تعریف کنید $f(rn)=rg$. به وضوح f یک $\mathbb{Z}$ـمدول هومورفیسم است و چون G به عنوان $\mathbb{Z}$ـمدول اینژکتیو است پس طبق قضیه ۵−۱۱ وجود دارد $\overline{f}:\mathbb{Z}\longrightarrow G$ به طوری که $\overline{f}|_{n\mathbb{Z}}=f$. پس

$$n\overline{f}(۱)=\overline{f}(۱n)=\overline{f}(n)=f(n)=g$$

و $\overline{f}(۱)\in G$. □

نتیجه ۵−۱۴. $\mathbb{Q}$ و $\mathbb{Z}_{p^\infty}$ به عنوان $\mathbb{Z}$ـمدول اینژکتیو هستند ولی $\mathbb{Z}$ به عنوان $\mathbb{Z}$ـمدول اینژکتیو نمی‌باشد.

مثال. $\mathbb{Q}\times\mathbb{Z}$ نه اینژکتیو است و نه تصویری. اینژکتیو نیست زیرا معادله $۲(x,y)=(۳,\circ)$ در آن جواب ندارد و تصویری نیست زیرا در این صورت طبق قضیه باید تک تک آنها تصویری باشند ولی $\mathbb{Q}$ تصویری نیست.

قضیه ۵−۱۵. فرض کنید J یک Rـمدول باشد در این صورت شرایط زیر معادلند

i) J اینژکتیو است.

ii) هر رشته‌ی دقیق کوتاه $\circ\longrightarrow J\xrightarrow{f}B\xrightarrow{g}C\longrightarrow\circ$ شکافته می‌شود.

اثبات. (i $\Longleftarrow$ ii) دیاگرام زیر را در نظر بگیرید

$$\begin{array}{ccccccc} \circ & \longrightarrow & J & \xrightarrow{f} & B & \xrightarrow{g} & C \longrightarrow \circ \\ & & {\scriptstyle ۱}\downarrow & & & & \\ & & J & & & & \end{array}$$

چون J اینژکتیو است و f یک به یک است در نتیجه وجود دارد هومورفیسم $h:B\longrightarrow J$ به طوری که $hf=۱$ پس رشته شکافته می‌شود.

(ii $\Longleftarrow$ i) دیاگرام زیر را در نظر بگیرید

$$\begin{array}{cccc} \circ & \longrightarrow & A & \xrightarrow{g} B \\ & & {\scriptstyle f}\downarrow & \\ & & J & \end{array}$$

قرار دهید $W = \{(f(a), -g(a)) \mid a \in A\}$ در این صورت W زیرمدولی از $J \oplus B$ است. همچنین تعریف کنید $M = (J \oplus B)/W$. حال هومورفیسم‌های زیر را در نظر بگیرید

$$\left\{\begin{array}{l} \ell : B \longrightarrow M \\ \ell(b) = W + (\circ, b) \end{array}\right. \quad , \quad \left\{\begin{array}{l} k : J \longrightarrow M \\ k(x) = W + (x, \circ) \end{array}\right.$$

در این صورت دیاگرام زیر جابجایی می‌شود

$$\begin{array}{ccccc} \circ & \longrightarrow & A & \xrightarrow{g} & B \\ & & f\downarrow & & \downarrow \ell \\ & & J & \xrightarrow{k} & M \end{array}$$

زیرا

$$\left\{\begin{array}{l} \ell g(a) = \ell(g(a)) = W + (\circ, g(a)) \\ kf(a) = k(f(a)) = W + (f(a), \circ) \end{array}\right.$$

چون $(f(a), -g(a)) \in W$ در نتیجه $\ell g = kf$. ادعا می‌کنیم k یک به یک است. اگر $k(a) = \circ$ آنگاه $W + (a, \circ) = \circ$ در نتیجه y ای هست که $(a, \circ) = (f(y), -g(y))$ پس $g(y) = \circ$ و چون g یک به یک است پس $y = \circ$ و لذا $a = f(\circ) = \circ$. حال دیاگرام زیر را در نظر بگیرید

$$\begin{array}{ccccccc} \circ & \longrightarrow & A & \xrightarrow{g} & B & & \\ & & f\downarrow & & \downarrow \ell & & \\ \circ & \longrightarrow & J & \xrightarrow{k} & M & \longrightarrow M/Imk \longrightarrow \circ \end{array}$$

طبق فرض رشته‌ی دقیق کوتاه اخیر شکافته می‌شود پس وجود دارد $\theta : M \longrightarrow J$ به طوری که $\theta k = ۱_J$. قرار دهید $h = \theta \ell$ در این صورت $h : B \longrightarrow J$ و به علاوه داریم

$$hg = (\theta\ell)g = \theta(\ell g) = \theta(kf) = ۱ f = f$$

□

قضیه ۵ـ۱۶. فرض کنید R یک حلقه باشد. در این صورت شرایط زیر معادلند

i) R نیمه ساده است.

ii) هر Rـمدول M، نیمه ساده است.

iii) هر Rـمدول M، تصویری است.

iv) هر Rـمدول M، اینژکتیو است.

اثبات. (i $\Longleftarrow$ ii) بنا به یکی از تمرین ۵ درست است.

(ii $\Longleftarrow$ iii) (روش اول) بنابر قضیه ۵ــ۶، کافیست نشان دهیم هر رشته‌ی دقیق کوتاه $0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} M \longrightarrow 0$ شکافته می‌شود. $f(A)$ زیرمدولی از B است و چون B نیمه ساده است پس مکمل‌پذیر است در نتیجه وجود دارد Rـمدول N به طوری که، $f(A) \oplus N = B$. حال تعریف کنید $\begin{cases} k : B \longrightarrow A \\ k(f(a)+n) = a \end{cases}$، چون f یک به یک است، k خوش‌تعریف است و به علاوه به‌ازای هر $a \in A$ داریم

$$kf(a) = k(f(a) + 0) = a \Longrightarrow kf = 1$$

(روش دوم) چون M_i ساده است پس دوری است و لذا طبق قضیه‌ای $M_i \simeq R/I_i$. حال

$$M \simeq \bigoplus_{i \in I} M_i \simeq \bigoplus_{i \in I} \frac{R}{I_i}$$

در نتیجه

$$M \oplus \bigoplus_{i \in I} I_i \simeq \bigoplus_{i \in I} R$$

اما R آزاد است. حال چون جمع مستقیم M با $\bigoplus_{i=1}^{\infty} I_i$ برابر یک Rـمدول آزاد شد پس طبق قضیه‌ای M تصویری است.

(iii $\Longleftarrow$ iv) اگر $0 \longrightarrow J \xrightarrow{f} A \xrightarrow{g} B \longrightarrow 0$ رشته‌ی دقیق کوتاه باشد آنگاه طبق فرض B تصویری است و در نتیجه طبق قضیه ۵ــ۶، رشته‌ی فوق شکافته می‌شود. پس طبق قضیه‌ی قبل J اینژکتیو است.

(iv $\Longleftarrow$ i) فرض کنید I ایده‌آل چپی از R باشد. رشته‌ی دقیق کوتاه $0 \longrightarrow I \xrightarrow{i} R \xrightarrow{\pi} R/I \longrightarrow 0$ را در نظر بگیرید که در آن $i(x) = x$ و $\pi(a) = I + a$. طبق فرض I اینژکتیو است لذا بنابر قضیه ۵ــ۱۵، رشته شکافته می‌شود یعنی وجود دارد $h : R \longrightarrow I$ به طوری که $hi = 1_I$. ادعا می‌کنیم $\ker h \oplus I = R$. اگر $y \in R$، آنگاه $y = (y - ih(y)) + ih(y)$ ولی $h(y - ih(y)) = h(y) - hih(y) = h(y) - h(y) = 0$ پس $y - ih(y) \in \ker h$ و چون i همومورفیسم شمول بود و $h(y) \in I$ پس $R = \ker h + I$. اگر $a \in \ker h \cap I$ آنگاه $h(a) = 0$ و چون $a \in I$ پس $h(a) = h(ia) = hi(a) = a$ در نتیجه $a = 0$ پس $R = \ker h \oplus I$ و لذا R نیمه ساده است. $\square$

نکته. به راحتی ثابت می‌شود که اگر $\{J_i\}_{i\in I}$ خانواده‌ای از Rـمدول‌های اینژکتیو باشد آنگاه $\prod_{i\in I} J_i$ نیز اینژکتیو است و برعکس.

سؤال. آیا می‌توانید مثالی بزنید که برای مجموع مستقیم دو طرف حکم فوق نادرست باشد.

نکته. حاصل‌ضرب و حاصل‌جمع مستقیم یک سری گروه بخش‌پذیر، باز هم بخش‌پذیر است.

لم ۵ــ۱۷. هر گروه آبلی را می‌توان در یک گروه بخش‌پذیر نشاند.

اثبات. فرض کنید G آبلی است و آنگاه گروه $\bigoplus_{|G|}\mathbb{Z}$ را در نظر بگیرید. حال اپی‌مورفیسم $\left\{\begin{array}{l} f:\bigoplus_{|G|}\mathbb{Z}\longrightarrow G \\ f(e_i)=g_i\end{array}\right.$ وجود دارد پس $\bigoplus_{|G|}\mathbb{Z}/\ker f\simeq G$. ولی $\bigoplus_{|G|}\mathbb{Z}/\ker f\simeq G$ زیرگروهی از $\bigoplus_{|G|}\mathbb{Q}/\ker f$ است و می‌دانیم $\bigoplus_{|G|}\mathbb{Q}/\ker f$ گروهی بخش‌پذیر است.

روش دیگری برای اثبات لم فوق این است که اگر G گروه آبلی باشد آنگاه G در حلقه‌ی گروهی $\mathbb{Q}[G]$ می‌نشیند. $\square$

نکته. با استفاده از لم بالا می‌توان ثابت کرد که هر مدولی قابل نشاندن در یک مدول اینژکتیو است. اما هر مدولی را لزوماً نمی‌توان در یک مدول تصویری نشاند. زیرا به عنوان مثال $\mathbb{Q}$ را در نظر بگیرید. چون هر زیرگروه یک گروه آزاد، آزاد است و $\mathbb{Q}$ به عنوان $\mathbb{Z}$ـمدول آزاد نیست، پس $\mathbb{Q}$ را در یک $\mathbb{Z}$ـمدول تصویری نمی‌توان نشاند.

تمرین ۲۹. فرض کنید J یک Rـمدول باشد و رشته‌ی دقیق کوتاه $0\longrightarrow J\xrightarrow{f}B\xrightarrow{g}C\longrightarrow 0$ که در آن C یک Rـمدول دوری است، شکافته شود. ثابت کنید J اینژکتیو است.

قضیه ۵ــ۱۸. فرض کنید $C\xrightarrow{\psi}B\xrightarrow{\phi}A\longrightarrow 0$ یک رشته‌ی دقیق از Rـمدول‌ها باشد در این صورت برای هر Rـمدول D، رشته‌ی $0\longrightarrow Hom_R(D,A)\xrightarrow{\overline{\phi}}Hom_R(D,B)\xrightarrow{\overline{\psi}}Hom_R(D,C)$ رشته‌ی دقیقی از $\mathbb{Z}$ـمدول‌ها است ($\overline{\phi}(f)=\phi(f)$ و $\overline{\psi}(f)=\psi(f)$). اگر R جابجایی باشد آنگاه این رشته دقیق Rـمدولی نیز می‌شود.

اثبات. $\overline{\phi}$ یک به یک است زیرا اگر $\overline{\phi}(f)=0$ در نتیجه $\phi(f)=0$ و لذا برای هر $x\in D$، $\phi(f(x))=0$ و

چون ϕ یک به یک است پس $f(x)=0$ و لذا $f=0$. داریم $\overline{\psi}\,\overline{\phi}(f)=\psi\circ\phi\circ f=0$ و لذا $Im\overline{\phi}\subseteq\ker\overline{\psi}$.
فرض کنید $g\in\ker\overline{\psi}$ در نتیجه $\psi g=0$ و لذا $Img\subset\ker\psi=Im\phi$. می‌خواهیم تابعی مانند $f:D\longrightarrow A$ بیابیم به طوری که $\overline{\phi}f=g$. تعریف کنید $f(d)=\phi^{-1}(g(d))$. f خوش‌تعریف است زیرا $Img\subset Im\phi$، چون ϕ یک به یک است پس $\ker\overline{\psi}=Im\overline{\phi}$ و لذا رشته دقیق است. $\square$

قضیه ۵—۱۹. فرض کنید A، B، و C سه Rـمدول باشند و رشته $0\longrightarrow C\xrightarrow{\psi}B\xrightarrow{\phi}A$ دقیق باشد در این صورت برای هر Rـمدول D رشته‌ی $Hom_R(A,D)\xrightarrow{\overline{\phi}}Hom_R(B,D)\xrightarrow{\overline{\psi}}Hom_R(C,D)\longrightarrow 0$ رشته‌ی دقیقی از $\mathbb{Z}$ـمدول‌ها است ($\overline{\phi}(f)=f\circ\phi$ و $\overline{\psi}(f)=f\circ\psi$).

اثبات. $\overline{\psi}$ یک به یک است زیرا اگر $\overline{\psi}(f)=0$ آنگاه $f\circ\psi=0$ و چون ψ پوشاست پس $f=0$. داریم

$$\overline{\phi}\,\overline{\psi}(f)=\overline{\phi}(f\psi)=f(\psi\phi)=0$$

در نتیجه $Im\overline{\psi}\subseteq\ker\overline{\phi}$. فرض کنید $g\in\ker\overline{\phi}$ پس $g\phi=0$ و لذا $\ker\psi=Im\phi\subset\ker g$. تابع $f:C\longrightarrow D$ را با ضابطه‌ی $f(\psi(y))=g(y)$ در نظر بگیرید، در این صورت $\overline{\psi}(f)=g$ و لذا $Im\overline{\psi}=\ker\overline{\phi}$. $\square$

قضیه ۵—۲۰. فرض کنید R یک حلقه بوده و $0\longrightarrow A\xrightarrow{\phi}B\xrightarrow{\psi}C\longrightarrow 0$ رشته دقیق کوتاه شکافته شده باشد. در این صورت

۱) $0\longrightarrow Hom_R(C,D)\xrightarrow{\overline{\psi}}Hom_R(B,D)\xrightarrow{\overline{\phi}}Hom_R(A,D)\longrightarrow 0$ رشته‌ی دقیق شکافته شده‌ای از $\mathbb{Z}$ـمدول‌ها است.

۲) $0\longrightarrow Hom_R(D,A)\xrightarrow{\overline{\phi}}Hom_R(D,B)\xrightarrow{\overline{\psi}}Hom_R(D,C)\longrightarrow 0$ رشته‌ی دقیق شکافته شده‌ای از $\mathbb{Z}$ـمدول‌ها است.

اثبات. ۱) چون رشته شکافته می‌شود وجود دارد $k:B\longrightarrow A$ به طوری که $k\phi=1_A$. حال $\overline{k}:Hom_R(A,D)\longrightarrow Hom_R(B,D)$ را با ضابطه‌ی $\overline{k}(f)=f\circ k$ در نظر بگیرید در این صورت $\overline{\phi}\,\overline{k}(f)=f\circ k\circ\phi=f$ پس $\overline{\phi}\,\overline{k}=1_{Hom_R(A,D)}$ و لذا $\overline{\phi}$ پوشاست و رشته شکافته می‌شود.

۲) چون رشته شکافته می‌شود وجود دارد $h:C\longrightarrow B$ به طوری که $\psi h=1_C$. حال

$\overline{h}: Hom_R(D,C) \longrightarrow Hom_R(D,B)$ را با ضابطه‌ی $\overline{h}(f) = hf$ در نظر بگیرید. داریم $\overline{\psi}\,\overline{h}(f) = \psi hf = f$ و لذا $\overline{\psi}\,\overline{h} = ۱$ پس $\overline{\psi}$ پوشاست و رشته شکافته می‌شود. □

مثال ۱. می‌توان دید که، $Hom_R(N, M_۱ \oplus M_۲) \simeq Hom_R(N, M_۱) \oplus Hom_R(N, M_۲)$ ، زیرا رشته‌ی دقیق $\circ \longrightarrow M_۲ \xrightarrow{\pi} M_۱ \oplus M_۲ \xrightarrow{i} M_۱ \longrightarrow \circ$ شکافته می‌شود و لذا بنابر قضیه قبل حکم به‌دست می آید.

مثال ۲. نشان می‌دهیم $Hom_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}_m, \mathbb{Z}_n) \simeq \mathbb{Z}_{(m,n)}$. فرض کنید $m = m'd$ و $n = n'd$ که $d = (m,n)$، لذا $(m', n') = ۱$. حال رشته‌ی دقیق کوتاه $\circ \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{\phi} \mathbb{Z} \xrightarrow{\psi} \mathbb{Z}_m \longrightarrow \circ$ را که در آن $\phi(a) = ma$ و $\psi(a) = \overline{a}$، در نظر بگیرید. بنابر قضیه ۵—۱۹ رشته‌ی دقیق زیر را داریم

$$\circ \longrightarrow Hom_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}_m, \mathbb{Z}_n) \xrightarrow{\overline{\psi}} Hom_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}_n) \xrightarrow{\overline{\phi}} Hom_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}_n)$$

از قبل می‌دانیم که $\theta: Hom_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}_n) \longrightarrow \mathbb{Z}_n$ با ضابطه‌ی $\theta(f) = f(۱)$ یک یکریختی است، و چون $\overline{\psi}$ یک به یک است لذا داریم

$$Hom_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}_m, \mathbb{Z}_n) \simeq Im\overline{\psi} = \ker \overline{\phi} = \{f \mid f(۱) \in \langle n \rangle\} \simeq n'\mathbb{Z}_n \simeq \mathbb{Z}_d$$

نکته. رشته‌های دقیق کوتاه ممکن است تحت $Hom_R(D, \ )$ یا $Hom_R(\ , D)$ دقیق کوتاه باقی نمانند. به عنوان مثال رشته دقیق کوتاه $\circ \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{\phi} \mathbb{Z} \xrightarrow{\psi} \mathbb{Z}_m \longrightarrow \circ$ را که در آن $\phi(a) = ma$ و $\psi(a) = \overline{a}$، در نظر بگیرید. در این صورت رشته‌ی

$$\circ \longrightarrow Hom_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}_m, \mathbb{Z}) = \circ \longrightarrow Hom_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}_m, \mathbb{Z}) = \circ \longrightarrow Hom_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}_m, \mathbb{Z}_m) \simeq \mathbb{Z}_m \longrightarrow \circ$$

دقیق کوتاه نمی‌باشد، زیرا $\circ \longrightarrow \mathbb{Z}_m \longrightarrow \circ$ دقیق است و بایستی داشته باشیم $\mathbb{Z}_m = \circ$ که تناقض است.

قضیه ۵—۲۱. فرض کنید P یک Rـمدول باشد، در این صورت شرایط زیر معادلند

i) P تصویری است.

ii) به‌ازای هر اپی‌مورفیسم $\psi: B \longrightarrow C$، $\overline{\psi}: Hom_R(P,B) \longrightarrow Hom_R(P,C)$ یک Rـمدول اپی‌مورفیسم است.

iii) به ازای هر رشته‌ی دقیق $\circ \longrightarrow A \xrightarrow{\phi} B \xrightarrow{\psi} C \longrightarrow \circ$ رشته زیر دقیق است

$$\circ \longrightarrow Hom_R(P,A) \xrightarrow{\overline{\phi}} Hom_R(P,B) \xrightarrow{\overline{\psi}} Hom_R(P,C) \longrightarrow \circ$$

اثبات. (i $\Longleftarrow$ ii) از تعریف می‌دانیم $\overline{\psi}(f) = \psi f$. فرض کنید $g \in Hom_R(P,C)$، چون P تصویری است با توجه به دیاگرام زیر، وجود دارد $h : P \longrightarrow B$ به طوری که $\psi h = g$ پس $\overline{\psi}(h) = g$ و لذا $\overline{\psi}$ پوشا است.

$$\begin{array}{ccc} & P & \\ \overset{h}{\swarrow} & \downarrow g & \\ B \xrightarrow{\psi} & C & \longrightarrow \circ \end{array}$$

(ii $\Longleftarrow$ iii) بنا به قضیه ۵—۱۸، تنها کافی است ثابت شود $\overline{\psi}$ پوشاست که این نیز جزء فرض است.

(iii $\Longleftarrow$ i) اگر دیاگرام

$$\begin{array}{ccc} & P & \\ & \downarrow g & \\ B \xrightarrow{\psi} & C & \longrightarrow \circ \end{array}$$

را داشته باشیم در این صورت رشته‌ی دقیق کوتاه $\circ \longrightarrow \ker\psi \xrightarrow{\subseteq} B \xrightarrow{\psi} C \longrightarrow \circ$ را در نظر بگیرید. بنا به فرض رشته‌ی $\circ \longrightarrow Hom_R(P,\ker\psi) \longrightarrow Hom_R(P,B) \xrightarrow{\overline{\psi}} Hom_R(P,C) \longrightarrow \circ$ دقیق کوتاه است و لذا $\overline{\psi}$ پوشاست، پس وجود دارد h ای که $\overline{\psi}h = g$ و لذا $\psi h = g$، یعنی P تصویری است. $\square$

قضیه ۵—۲۲. فرض کنید J یک Rـمدول باشد. در این صورت شرایط زیر معادلند

i) J اینژکتیو است.

ii) به ازای هر مونومورفیسم $\psi : B \longrightarrow C$، $\overline{\psi} : Hom_R(C,J) \longrightarrow Hom_R(B,J)$ یک Rـمدول اپی‌مورفیسم است.

iii) به‌ازای هر رشته‌ی دقیق کوتاه $\circ \longrightarrow A \xrightarrow{\phi} B \xrightarrow{\psi} C \longrightarrow \circ$، رشته زیر دقیق است.

$$\circ \longrightarrow Hom_R(C,J) \xrightarrow{\overline{\phi}} Hom_R(B,J) \xrightarrow{\overline{\psi}} Hom_R(A,J) \longrightarrow \circ$$

اثبات. مشابه قضیه قبل است. □

نکته. از قبل می‌دانیم که اگر $(M,+)$ یک گروه آبلی باشد می‌توان آن را در یک گروه بخش‌پذیر J نشاند همچنین

$$M \simeq Hom_R(R,M) \subseteq Hom_{\mathbb{Z}}(R,M) \hookrightarrow Hom_{\mathbb{Z}}(R,J)$$

اگر R حلقه‌ای دلخواه و J گروهی بخش‌پذیر باشد، $Hom_{\mathbb{Z}}(R,J)$ یک Rـمدول اینژکتیو می‌شود، بنابراین هر مدول را می‌توان در یک مدول بخش‌پذیر نشاند (برای اثبات دقیق به کتاب Algebra تألیف Hungerford مراجعه کنید).

۶ حاصل‌ضرب تانسوری

تعریف ۶−۱. فرض کنید A یک Rـمدول راست و B یک Rـمدول چپ باشد. همچنین فرض کنید $Z(A,B)$، $\mathbb{Z}$ـمدول آزاد تولید شده توسط اعضای $A\times B$ (حاصل‌ضرب دکارتی A و B) باشد، یعنی

$$Z(A,B)=\left\{\sum r_i(a_i,b_i) \mid a_i\in A, b_i\in B, r_i\in\mathbb{Z},\ \text{به جز تعداد متناهی } r_i\text{، سایر } r_i \text{ ها صفرند}\right\}$$

حال اگر $Y(A,B)$ زیرمدولی از $Z(A,B)$ باشد که توسط عناصری به شکل زیر تولید می‌شود

(i $\quad a_1,a_2\in A, b\in B \quad (a_1+a_2,b)-(a_1,b)-(a_2,b)$

(ii $\quad a\in A, b_1,b_2\in B \quad (a,b_1+b_2)-(a,b_1)-(a,b_2)$

(iii $\quad a\in A, b\in B, r\in R \quad (ar,b)-(a,rb)$

در این صورت $Y(A,B)$ زیرگروهی آبلی از $Z(A,B)$ است در نتیجه می‌توان گروه خارج‌قسمتی $Z(A,B)/Y(A,B)$ را تشکیل داد. این گروه را حاصل‌ضرب تانسوری A و B نامیده و با نماد $A\otimes_R B$ نمایش می‌دهند.

اپی‌مورفیسم $\phi: Z(A,B)\longrightarrow A\otimes_R B$ را با ضابطه‌ی طبیعی در نظر بگیرید. در این صورت $\phi((a,b))=a\otimes b=Y(A,B)+(a,b)$. حال داریم

رابطه‌ی (i) نتیجه می‌دهد $(a_1+a_2)\otimes b=a_1\otimes b+a_2\otimes b$.

رابطه‌ی (ii) نتیجه می‌دهد $a\otimes(b_1+b_2)=a\otimes b_1+a\otimes b_2$.

رابطه‌ی (iii) نتیجه می‌دهد $(ar)\otimes b=a\otimes(rb)$.

خاصیت ۱) برای هر $a\in A$، $a\otimes 0=0$. زیرا

$$a\otimes 0=a\otimes(0+0)=a\otimes 0+a\otimes 0\Longrightarrow a\otimes 0=0$$

خاصیت ۲) به ازای هر $n\in\mathbb{Z}$، $(na)\otimes b=n(a\otimes b)=a\otimes(nb)$ (از روابط (i) و (ii) به‌دست می‌آید).

هر عنصر $A\otimes B$ به صورت $\sum_{i=1}^{n} r_i(a_i\otimes b_i)$ است که $r_i\in\mathbb{Z}$ و $a_i\in A$ و $b_i\in B$. می‌توان فرض کرد که تمامی r_i ها یک هستند (از خاصیت (۲) استفاده کنید) و اگر $i\neq j$ آنگاه در $\sum$ فوق $a_i\otimes b_i\neq a_j\otimes b_j$.

تعریف ۶—۲. فرض کنید A یک Rـمدول راست و B یک Rـمدول چپ و C گروهی آبلی باشد. در این صورت تابع f را یک تابع دو خطی یا تابع دو خطی میانی[32] نامند هرگاه $f: A\times B\longrightarrow C$ دارای خواص زیر باشد

i) $f(a_1+a_2,b)=f(a_1,b)+f(a_2,b)$

ii) $f(a,b_1+b_2)=f(a,b_1)+f(a,b_2)$

iii) $f(ar,b)=f(a,rb)$

قضیه ۶—۳. فرض کنید A یک Rـمدول راست و B یک Rـمدول چپ بوده و C گروهی آبلی باشد. اگر $f: A\times B\longrightarrow C$ یک تابع دو خطی باشد آنگاه هومورفیسم یکتای $\overline{f}: A\otimes_R B\longrightarrow C$ وجود دارد به طوری که $\overline{f}(a\otimes b)=f(a,b)$.

اثبات. برای $r_i\in\mathbb{Z}$، تابع $f_1: Z(A,B)\longrightarrow C$ را به صورت $f_1(\sum r_i(a_i,b_i))=\sum r_i f(a_i,b_i)$ تعریف کنید. داریم $f_1|_{A\times B}=f$. f_1 هومورفیسم گروهی است. چون f دو خطی است نتیجه می‌گیریم $Y(A,B)\subseteq \ker f_1$ و در نتیجه وجود دارد هومورفیسم $\overline{f}: Z(A,B)/Y(A,B)\longrightarrow C$ به طوری که $\overline{f}(a\otimes b)=f_1((a,b))=f(a,b)$. یکتا بودن $\overline{f}$ واضح است زیرا $\overline{f}$ هومورفیسم است و هر عضو $A\otimes_R B$ به صورت $\sum a_i\otimes b_i$ می‌باشد. □

نتیجه ۶—۴. فرض کنید A و A' دو Rـمدول راست و B و B' دو Rـمدول چپ باشند. اگر $f: A\longrightarrow A'$ و $g: B\longrightarrow B'$ دو Rـمدول هومورفیسم باشند، در این صورت وجود دارد $\mathbb{Z}$ـهومورفیسم $f\otimes g: A\otimes_R B\longrightarrow A'\otimes_R B'$ به طوری که $(f\otimes g)(a\otimes b)=f(a)\otimes g(b)$.

اثبات. تابع $\alpha: A\times B\longrightarrow A'\otimes_R B'$ را با ضابطه‌ی $\alpha(a,b)=f(a)\otimes g(b)$ در نظر بگیرید. داریم

$$\alpha(a_1+a_2,b)=f(a_1+a_2)\otimes g(b)=(f(a_1)+f(a_2))\otimes g(b)=f(a_1)\otimes g(b)+f(a_2)\otimes g(b)$$

[32] bilinear function

$$= \alpha(a_۱, b) + \alpha(a_۲, b)$$

خاصیت دوم تابع دو خطی نیز مشابهاً ثابت می‌شود. همچنین

$$\alpha(ar, b) = f(ar) \otimes g(b) = f(a)r \otimes g(b) = f(a) \otimes rg(b) = f(a) \otimes g(rb) = \alpha(a, rb)$$

پس α دو خطی است لذا بنابر قضیه قبل وجود دارد هوموموفیسم $\overline{\alpha} : A \otimes_R B \longrightarrow A' \otimes_R B'$ به طوری که $\overline{\alpha}(a \otimes b) = \alpha(a, b) = f(a) \otimes g(b)$. حال قرار دهید $\overline{\alpha} = f \otimes g$. □

اگر $f : A \longrightarrow A'$، $f' : A' \longrightarrow A''$، $g : B \longrightarrow B'$، و $g' : B' \longrightarrow B''$، آنگاه داریم

$$f \otimes g : A \otimes_R B \longrightarrow A' \otimes_R B' \quad , \quad f' \otimes g' : A' \otimes_R B' \longrightarrow A'' \otimes_R B''$$

و به علاوه $(f' \otimes g') \circ (f \otimes g) = (f'f) \otimes (g'g)$ زیرا

$$(f' \otimes g')(f \otimes g)(a \otimes b) = (f' \otimes g')(f(a) \otimes g(b)) = f'f(a) \otimes g'g(b) = (f'f \otimes g'g)(a \otimes b)$$

مثال. نشان می‌دهیم $\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} \simeq \mathbb{Q}$ (به عنوان گروه). تابع $f : \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \simeq \mathbb{Q}$ را با ضابطه‌ی $f(a, b) = ab$ در نظر بگیرید. به وضوح f دو خطی است پس بنا به قضیه ۶–۳ وجود دارد هوموموفیسم $\overline{f} : \mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} \simeq \mathbb{Q}$ به طوری که $\overline{f}(a \otimes b) = ab$. $\overline{f}$ پوشاست، زیرا برای هر $x \in \mathbb{Q}$، $\overline{f}(۱ \otimes x) = x$. $\overline{f}$ یک به یک است، زیرا فرض کنید $\overline{f}(x) = ۰$ و $x = \sum_{i=۱}^{k} (a_i/b_i) \otimes (m_i/n_i)$ در این صورت $\sum_{i=۱}^{k} \frac{a_i m_i}{b_i n_i} = ۰$. از طرفی داریم

$$x = \sum_{i=۱}^{k} \frac{a_i}{b_i} \frac{n_i}{n_i} \otimes \frac{m_i}{n_i} = \sum_{i=۱}^{k} \frac{a_i}{b_i n_i} \otimes \frac{m_i n_i}{n_i} = \sum_{i=۱}^{n} \frac{a_i}{b_i n_i} \otimes m_i = \sum_{i=۱}^{k} \frac{a_i m_i}{b_i n_i} \otimes ۱ = (\sum_{i=۱}^{k} \frac{a_i m_i}{b_i n_i}) \otimes ۱$$

$$= ۰ \otimes ۱ = ۰$$

در نتیجه $x = ۰$ و لذا $\overline{f}$ ایزومورفیسم است پس $\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} \simeq \mathbb{Q}$.

مثال ۲. اگر $(m,n)=1$ آنگاه داریم $\mathbb{Z}_m\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Z}_n=\{0\}$. زیرا $m(a\otimes b)=(ma\otimes b)=0\otimes b=0$ به همین ترتیب $n(a\otimes b)=a\otimes 0=0$. چون $(m,n)=1$ در نتیجه $rm+sn=1$ و بنابراین $a\otimes b=0$. در حالت کلی می‌توان نشان داد که $\mathbb{Z}_m\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Z}_n\simeq\mathbb{Z}_d$ که در آن $d=(m,n)$.

قضیه ۶—۵. اگر رشته‌ی $A\xrightarrow{f}B\xrightarrow{g}C\longrightarrow 0$ رشته‌ی دقیقی از Rـمدول‌های چپ باشد در این صورت برای هر Rـمدول راست D رشته‌ی $D\otimes_R A\xrightarrow{1\otimes f}D\otimes_R B\xrightarrow{1\otimes g}D\otimes_R C\longrightarrow 0$ رشته‌ی دقیقی از $\mathbb{Z}$ـمدول‌هاست.

اثبات. اگر $\sum_{i=1}^n d_i\otimes c_i\in D\otimes_R C$ آنگاه چون g پوشاست وجود دارد $b_i\in B$ به طوری که $g(b_i)=c_i$. داریم، $(1\otimes g)(\sum_{i=1}^n d_i\otimes b_i)=\sum_{i=1}^n d_i\otimes g(b_i)=\sum_{i=1}^n d_i\otimes c_i$ و همچنین $(1\otimes g)(1\otimes f)=1\otimes gf=1\otimes 0=0$ بنابراین $Im(1\otimes f)\subseteq\ker(1\otimes g)$. چون $Im(1\otimes f)\subseteq\ker(1\otimes g)$ پس وجود دارد هومومورفیسم $\overline{g}:D\otimes B/Im(1\otimes f)\longrightarrow D\otimes C$ با ضابطه‌ی $\overline{g}(Im(1\otimes f)+d\otimes b)=d\otimes g(b)=(1\otimes g)(d\otimes b)$ تعریف کنید

$$\begin{cases}\alpha:D\times C\longrightarrow(D\otimes B)/Im(1\otimes f)\\ \alpha(d,c)=Im(1\otimes f)+d\otimes b\end{cases}$$

که در آن $g(b)=c$. α خوش‌تعریف است زیرا اگر $g(b)=c$ و $g(b')=c$ در نتیجه $g(b-b')=0$ پس $b-b'\in Imf$ و لذا $b-b'=f(a)$ در نتیجه $(1\otimes f)(d\otimes a)=d\otimes(b-b')\in Im(1\otimes f)$ پس از اینجا به‌دست می‌آوریم $Im(1\otimes f)+d\otimes b=Im(1\otimes f)+d\otimes b'$ از طرفی α دوخطی است زیرا

$$\alpha(d_1+d_2,c)=Im(1\otimes f)+(d_1+d_2)\otimes b=\alpha(d_1,c)+\alpha(d_2,c)$$

سایر خواص مشابهاً ثابت می‌شود. در نتیجه بنا به قضیه ۶—۳ وجود دارد هومومورفیسم $\overline{\alpha}:D\otimes_R C\longrightarrow(D\otimes B)/Im(1\otimes f)$ و در ضمن داریم $\overline{\alpha}\,\overline{g}=1$ و $\overline{g}\,\overline{\alpha}=1$. زیرا

$$\overline{g}\,\overline{\alpha}(d\otimes c)=\overline{g}(Im(1\otimes f)+d\otimes b)=d\otimes g(b)=d\otimes c$$

به طریق مشابه $\overline{\alpha}\,\overline{g}=1$ (توجه کنید که یک‌ها با هم فرق می‌کنند). فرض کنید $a\in\ker(1\otimes g)$ در نتیجه $(1\otimes g)(a)=0$ و لذا $\overline{g}(Im(1\otimes f)+a)=0$. پس $\overline{\alpha}\,\overline{g}(Im(1\otimes f)+a)=0$ بنابراین $Im(1\otimes f)+a=0$ و لذا $a\in Im(1\otimes f)$ و در نتیجه $Im(1\otimes f)=\ker(1\otimes g)$ یعنی رشته دقیق است. □

قضیه ۶—۶. اگر رشته‌ی $0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$ رشته‌ای دقیق باشد در این صورت برای هر Rـمدول چپ D، رشته‌ی زیر دقیق است، $0 \longrightarrow A \otimes_R D \xrightarrow{f\otimes 1} B \otimes_R D \xrightarrow{g\otimes 1} C \otimes_R D$

اثبات. مشابه قضیه قبل است. $\square$

قضیه ۶—۷. فرض کنید $0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0$ رشته‌ی دقیق شکافته شده‌ای از Rـمدول‌ها باشد در این صورت رشته‌ی $0 \longrightarrow A \otimes_R D \xrightarrow{f\otimes 1} B \otimes_R D \xrightarrow{g\otimes 1} C \otimes_R D \longrightarrow 0$ شکافته می‌شود.

اثبات. چون رشته‌ی اول می‌شود پس وجود دارد $k : B \longrightarrow A$ به طوری که $kf = 1_A$. حال داریم

$$(k \otimes 1)(f \otimes 1) = (kf \otimes 1) = 1 \otimes 1 = 1_{A\otimes D}$$

پس رشته‌ی اخیر دقیق است و شکافته می‌شود (توجه کنید از قضیه قبل استفاده شده است). $\square$

نتیجه ۶—۸. اگر $A_1, \ldots, A_n$، Rـمدول‌های راست و B یک Rـمدول چپ باشد در این صورت داریم

$$\bigoplus_{i=1}^{n}(A_i \otimes_R B) \simeq (\bigoplus_{i=1}^{n} A_i) \otimes_R B$$

اثبات. رشته‌ی شکافته شده‌ی $0 \longrightarrow A_1 \xrightarrow{i} A_1 \oplus A_2 \xrightarrow{\pi} A_2 \longrightarrow 0$ را که در آن $i(x) = (x, 0)$ و $\pi(x, y) = y$ در نظر بگیرید. بنا به قضیه قبل رشته‌ی

$$0 \longrightarrow A_1 \otimes_R B \longrightarrow (A_1 \oplus A_2) \otimes_R B \longrightarrow A_2 \otimes_R B \longrightarrow 0$$

دقیق بوده و شکافته می‌شود در نتیجه $(A_1 \oplus A_2) \otimes_R B \simeq A_1 \otimes_R B \oplus A_2 \otimes_R B$. حال با استقراء حکم نتیجه می‌شود. $\square$

تعریف ۶—۹. فرض کنید R و S دو حلقه بوده و A یک Sـمدول چپ و یک Rـمدول راست باشد و به‌ازای هر $a \in A$ و هر $r \in R$ و هر $s \in S$ داشته باشیم $(sa)r = s(ar)$ در این صورت A را یک دو مدول[۳۳] گویند و با نماد A_R نمایش می‌دهند.

[۳۳] bimodule

نکته. اگر A یک Rـمدول راست و یک Sـمدول چپ باشد لزوماً A دو مدول نیست. به عنوان مثال R و S و A را حلقه ماتریس‌ها بگیرید و ضرب‌های اسکالر زیر را تعریف کنید

$$\begin{cases} A\cdot B = AB & (\text{به عنوان } S\text{ـمدول چپ}) \\ B\cdot C = C^t B & (\text{به عنوان } R\text{ـمدول راست}) \end{cases}$$

حال

$$\begin{cases} (A\cdot B)\cdot C = (AB)\cdot C = C^t AB \\ A\cdot (B\cdot C) = A\cdot (C^t B) = AC^t B \end{cases}$$

که به وضوح برابر نیستند.

قضیه ۶—۱۰. فرض کنید B یک Rـمدول چپ و C یک Rـمدول راست باشد و A_R و D_S دو مدول باشند در این صورت داریم

i) $A\otimes_R B$ را می‌توان با ضرب اسکالر $s\cdot(a\otimes b) = (sa)\otimes b$ به یک Sـمدول چپ تبدیل کرد.

ii) اگر $f : A\longrightarrow A'$ یک همومورفیسم دو مدولی و $g : B\longrightarrow B'$ یک Rـمدول همومورفیسم باشد آنگاه $f\otimes g : A\otimes_R B\longrightarrow A'\otimes_R B'$ یک همومورفیسم Sـمدولی است.

iii) $C\otimes_R D$ را می‌توان با ضرب اسکالر $(c\otimes d)\cdot s = c\otimes(ds)$ به یک Sـمدول راست تبدیل کرد.

iv) اگر $h : C\longrightarrow C'$ همومورفیسم Rـمدولی راست و $k : D\longrightarrow D'$ همومورفیسم دو مدولی باشد آنگاه $h\otimes k : C\otimes_R D\longrightarrow C'\otimes_R D'$ یک همومورفیسم از Sـمدول‌های راست است.

اثبات. (i) و (ii) را ثابت می‌کنیم اثبات (iii) و (iv) مشابه است.

(i) به‌ازای هر $s\in S$ تعریف کنید $\begin{cases} \alpha_s : A\times B\longrightarrow A\otimes_R B \\ \alpha_s(a,b) = (sa)\otimes b \end{cases}$. α_s دوخطی است، زیرا

$$\alpha_s((a_1+a_2,b)) = (s(a_1+a_2))\otimes b = (sa_1)\otimes b + (sa_2)\otimes b = \alpha_s(a_1,b)+\alpha_s(a_2,b)$$

به طریق مشابه دیده می‌شود که $\alpha_s((a,b_1+b_2)) = \alpha_s(a,b_1)+\alpha_s(a,b_2)$ و همچنین روابط زیر برقرارند

$$\alpha_s((ar,b)) = s(ar)\otimes b = (sa)r\otimes b = sa\otimes rb = \alpha_s(a,rb)$$

در نتیجه با استفاده از قضیه ۶—۳ وجود دارد هومومورفیسم، $\begin{cases} \overline{\alpha}_s : A \otimes_R B \longrightarrow A \otimes_R B \\ \overline{\alpha}_s(a \otimes b) = \alpha_s(a, b) = (sa) \otimes b \end{cases}$. حال $A \otimes_R B$ را با ضرب اسکالر $s \cdot (a \otimes b) = \overline{\alpha}_s(a \otimes b) = sa \otimes b$ به یک Sـمدول تبدیل می‌کنیم. این ضرب اسکالر خواص ضرب مدولی را دارد زیرا

$$s \cdot (a_1 \otimes b_1 + a_2 \otimes b_2) = \overline{\alpha}_s(a_1 \otimes b_1 + a_2 \otimes b_2) = \overline{\alpha}_s(a_1 \otimes b_1) + \overline{\alpha}_s(a_2 \otimes b_2) = s(a_1 \otimes b_1) + s(a_2 \otimes b_2)$$
$$s_1(s_2(a \otimes b)) = \overline{\alpha}_{s_1}(\overline{\alpha}_{s_2}(a \otimes b)) = \overline{\alpha}_{s_1}(s_2 a \otimes b) = (s_1 s_2 a) \otimes b = \overline{\alpha}_{s_1 s_2}(a \otimes b) = (s_1 s_2)(a \otimes b)$$

(ii) از قبل می‌دانیم $f \otimes g : A \otimes_R B \longrightarrow A' \otimes_R B'$ یک $\mathbb{Z}$ـهومومورفیسم می‌باشد. تنها کافیست ثابت کنیم اسکالرهای S را بیرون می‌آورد

$$(f \otimes g)(s(a \otimes b)) = (f \otimes g)(sa \otimes b) = f(sa) \otimes g(b) = sf(a) \otimes g(b) = s(f \otimes g)(a \otimes b)$$

$\square$

تعریف ۶—۱۱. فرض کنید R حلقه‌ای جابجایی بوده و A، B، و C سه Rـمدول باشند در این صورت $f : A \times B \longrightarrow C$ را دوخطی گوییم هرگاه داشته باشیم

i) $f(a_1 + a_2, b) = f(a_1, b) + f(a_2, b)$

ii) $f(a, b_1 + b_2) = f(a, b_1) + f(a, b_2)$

iii) $f(ra, b) = rf(a, b) = f(a, rb)$

قضیه ۶—۱۲. اگر A، B، و C سه Rـمدول بوده و R حلقه‌ای جابجایی باشد و به علاوه تابع $f : A \times B \longrightarrow C$ تابعی دوخطی باشد آنگاه وجود دارد Rـمدول هومومورفیسم یکتای $\overline{f} : A \otimes_R B \longrightarrow C$ به طوری که $\overline{f}(a \otimes b) = f(a, b)$.

اثبات. چون R جابجایی است A خود به خود دو مدول می‌شود پس بنا به قضیه ۶—۱۰، $A \otimes_R B$ یک Rـمدول چپ است. بنا به قضیه ۶—۳ $\overline{f} : A \otimes_R B \longrightarrow C$ وجود دارد که $\mathbb{Z}$ـهومومورفیسم است و به علاوه $\overline{f}(a \otimes b) = f(a, b)$. $\overline{f}$، Rـمدول هومومورفیسم است زیرا

$$\overline{f}(r \cdot (a \otimes b)) = \overline{f}(ra \otimes b) = f(ra, b) = rf(a, b) = r\overline{f}(a \otimes b)$$

$\square$

قضیه ۶—۱۳. فرض کنید A یک Rـمدول راست و B یک Rـمدول چپ باشد در این صورت داریم $A \otimes_R R \simeq A$ و $R \otimes_R B \simeq B$ (به عنوان Rـمدول).

اثبات. توجه کنید چون ضرب حلقه شرکت‌پذیر است پس R_R دو مدول است و لذا بنا به قضیه ۶—۱۰، $R \otimes_R B$، Rـمدول چپ و $A \otimes_R R$، Rـمدول راست است. ثابت می‌کنیم $R \otimes_R B \simeq B$ (به عنوان Rـمدول). اثبات حالت دیگر مشابه است. تابع $f : A \times B \longrightarrow B$ را چنین تعریف کنید $f((r,b)) = rb$. f پوشاست زیرا $f((۱,b)) = b$. به وضوح f دوخطی است در نتیجه وجود دارد $\mathbb{Z}$ـهومومورفیسم $\begin{cases} \overline{f} : R \otimes_R B \longrightarrow B \\ \overline{f}(r \otimes b) = f(r,b) = rb \end{cases}$. $\overline{f}$، Rـمدول هومومورفیسم است زیرا $\overline{f}(r(a \otimes b)) = \overline{f}(ra \otimes b) = rab$ $r\overline{f}(a \otimes b) = rab$ و چون f پوشاست پس $\overline{f}$ نیز پوشاست. فرض کنید $\overline{f}(\sum_{i=۱}^{n} r_i \otimes b_i) = ۰$ در نتیجه $\overline{f}(\sum_{i=۱}^{n} ۱ \otimes r_i b_i) = ۰$ و لذا $\overline{f}(۱ \otimes \sum_{i=۱}^{n} r_i b_i) = ۰$ و بنابراین $\sum_{i=۱}^{n} r_i b_i = ۰$. در نتیجه $۱ \otimes \sum_{i=۱}^{n} r_i b_i = ۰$ و لذا $\sum_{i=۱}^{n} r_i \otimes b_i = ۰$ و این بدان معنی است که $\overline{f}$ یک به یک است. $\square$

نکته. دقیق بودن رشته‌های دقیق کوتاه لزوماً تحت حاصل‌ضرب تانسوری حفظ نمی‌شود، زیرا به عنوان مثال رشته‌ی $۰ \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{f} \mathbb{Z} \xrightarrow{g} \mathbb{Z}_۲ \longrightarrow ۰$ را که در آن $f(x) = ۲x$ و $g(x) = \overline{x}$ (باقیمانده به هنگ ۲) در نظر بگیرید. در این صورت رشته‌ی $۰ \longrightarrow \mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_۲ \xrightarrow{f \otimes ۱} \mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_۲ \xrightarrow{g \otimes ۱} \mathbb{Z}_۲ \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_۲ \longrightarrow ۰$ دقیق نیست. چون $۲x \otimes b \in \mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_۲$ صفر است، $۲x \otimes b = x \otimes ۲b = x \otimes ۰ = ۰$ و چون بنا به قضیه قبل $\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_۲ \simeq \mathbb{Z}_۲$ پس $f \otimes ۱$ یک به یک نمی‌باشد.

مثال. نشان می‌دهیم اگر $d = (m,n)$ آنگاه $\mathbb{Z}_m \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_n \simeq \mathbb{Z}_d$ (به عنوان گروه). رشته‌ی دقیق $\mathbb{Z} \xrightarrow{f} \mathbb{Z} \xrightarrow{g} \mathbb{Z}_m \longrightarrow ۰$ را که در آن $f(a) = ma$ و $g(a) = \overline{a}$، در نظر بگیرید. بنا به قضیه رشته‌ی

$$\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_n \xrightarrow{f \otimes ۱} \mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_n \xrightarrow{g \otimes ۱} \mathbb{Z}_m \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_n \longrightarrow ۰$$

نیز دقیق است. در نتیجه داریم $\frac{\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_n}{Im(f \otimes ۱)} \simeq \mathbb{Z}_m \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_n$ ولی طبق تعریف f، $Im(f \otimes ۱) = m(\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_n)$. در نتیجه

$$\frac{\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_n}{m(\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_n)} \simeq \frac{\mathbb{Z}_n}{m\mathbb{Z}_n}$$

زیرا $\mathbb{Z}_n$ گروهی دوری است. از طرفی

$$\frac{\mathbb{Z}_n}{m\mathbb{Z}_n} \simeq \frac{\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}}{m(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})} = \frac{\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}}{(m\mathbb{Z}+n\mathbb{Z})/n\mathbb{Z}} \simeq \frac{\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}}{d\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}} \simeq \frac{\mathbb{Z}}{d\mathbb{Z}} \simeq \mathbb{Z}_d$$

در نتیجه $\mathbb{Z}_m \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_n \simeq \mathbb{Z}_d$.

نکته. اگر $G = \langle a \rangle$ و $H = \langle b \rangle$ و $G \simeq H$ آنگاه

$$\frac{\langle a \rangle}{\langle a^m \rangle} \overset{f}{\simeq} \frac{\langle b \rangle}{\langle b^m \rangle}$$

که در آن، $f(\langle a^m \rangle a^i) = \langle b^m \rangle b^i$.

قضیه ۶—۱۴. فرض کنید R یک حلقه بوده و I ایده‌آل راستی از R باشد. اگر M یک Rـمدول چپ باشد آنگاه داریم،

$$\frac{R}{I} \otimes_R M \simeq \frac{M}{IM} \qquad \text{(به عنوان گروه)}$$

به علاوه اگر R جابجایی باشد آنگاه یکریختی Rـمدولی است.

اثبات. تابع $f : R/I \times M \longrightarrow M/IM$ را با ضابطه‌ی $f(I+r,m) = IM + rm$ تعریف کنید. این تابع دوخطی است زیرا

$$f(I+(r_۱+r_۲),m) = IM+(r_۱+r_۲)m = (IM+r_۱m)+(IM+r_۲m) = f(I+r_۱,m)+f(I+r_۲,m)$$

توزیع‌پذیری نسبت به مؤلفه دوم مشابه است. به‌ازای هر $s \in R$، داریم

$$f((I+r)s,m) = f(I+rs,m) = IM+(rs)m = IM+r(sm) = f(I+r,sm)$$

f خوش‌تعریف است زیرا اگر $I+r_۱ = I+r_۲$ در این صورت به‌دست می‌آوریم $r_۱ - r_۲ \in I$ و لذا $(r_۱ - r_۲)m \in IM$ پس $f(I+r_۱,m) = f(I+r_۲,m)$. بنا به قضیه ۶—۳ وجود دارد همومورفیسم $\overline{f} : R/I \otimes_R M \longrightarrow M/IM$ به طوری که $\overline{f}((I+r)\otimes m) = f(I+r,m) = IM+rm$ $\overline{f}$ پوشاست زیرا، $\overline{f}((I+۱)\otimes m) = IM+m$. $\overline{f}$ یک به یک نیز هست زیرا اگر $\overline{f}(\sum_{i=۱}^{n}(I+r_i)\otimes m_i) = ۰$ آنگاه

$IM + \sum_{i=1}^{n} r_i m_i = 0$ یعنی $\sum_{i=1}^{n} r_i m_i = \sum_{i=1}^{t} a_i m_i'$ که در آن به‌ازای هر i، $a_i \in I$. لذا

$$\sum_{i=1}^{n}(I + r_i) \otimes m_i = \sum_{i=1}^{n}(I + 1)r_i \otimes m_i = \sum_{i=1}^{n}(I + 1) \otimes r_i m_i = (I + 1) \otimes \sum_{i=1}^{n} r_i m_i =$$

$$(I + 1) \otimes \sum_{i=1}^{t} a_i m_i' = \sum_{i=1}^{t}(I + a_i) \otimes m_i' = \sum_{i=1}^{t} 0 \otimes m_i' = 0$$

اگر R جابجایی باشد، R/I یک $(R/I)_R$ دو مدول است پس $R/I \otimes_R M$، با ضرب اسکالر $r(I + x \otimes m) = (I + rx) \otimes m$ یک Rـمدول است.

$$\overline{f}(t((I+r) \otimes m)) = \overline{f}((I+tr) \otimes m) = IM + (tr)m = IM + t(rm) = t(IM + rm) = t\overline{f}((I+r) \otimes m)$$

□

نتیجه ۶—۱۵. اگر $(m, n) = d$ آنگاه $\mathbb{Z}_m \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_n \simeq \mathbb{Z}_d$.

اثبات. در قضیه قبل قرار دهید $R = \mathbb{Z}$، $I = m\mathbb{Z}$، و $M = \mathbb{Z}_n$. در نتیجه یکریختی زیر را داریم

$$\frac{\mathbb{Z}}{m\mathbb{Z}} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_n \simeq \frac{\mathbb{Z}_n}{m\mathbb{Z}_n} \simeq \frac{\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}}{(m\mathbb{Z} + n\mathbb{Z})/n\mathbb{Z}} \simeq \mathbb{Z}_d$$

و لذا $\mathbb{Z}_m \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_n \simeq \mathbb{Z}_d$. □

نتیجه ۶—۱۶. اگر I و J دو ایده‌آل حلقه‌ی جابجایی R باشند در این صورت

$$\frac{R}{I} \otimes_R \frac{R}{J} \simeq \frac{R}{(I + J)} \qquad \text{(به عنوان } R \text{ـمدول)}$$

اثبات. در قضیه قبل قرار دهید $M = R/J$، در نتیجه

$$\frac{R}{I} \otimes_R \frac{R}{J} \simeq \frac{R/J}{I(R/J)} = \frac{R/J}{(I + J)/J} \simeq \frac{R}{I + J}$$

□

قضیه ۶—۱۷. فرض کنید R یک حلقه بوده و $\{A_i\}_{i\in I}$ خانواده‌ای از Rـمدول‌های راست باشند و B نیز یک Rـمدول چپ باشد در این صورت داریم

$$(\bigoplus_{i\in I} A_i)\otimes_R B \simeq \bigoplus_{i\in I}(A_i \otimes_R B) \qquad \text{(به عنوان گروه)}$$

اثبات. فرض کنید $\pi_j : \bigoplus_{i\in I} A_i \longrightarrow A_j$ نگاشت تصویر روی مؤلفه‌ی j ام و $\ell_j : A_j \longrightarrow \bigoplus_{i\in I} A_i$ نشاندن در مؤلفه j ام باشد. در این صورت همومورفیسم‌های $\pi_j \otimes ۱_B : (\bigoplus_{i\in I} A_i)\otimes_R B \longrightarrow A_j \otimes_R B$ و $\ell_j \otimes ۱ : A_j \otimes_R B \longrightarrow (\bigoplus_{i\in I} A_i)\otimes_R B$ را داریم. بنابراین

$$\sum \pi_j \otimes ۱ : (\bigoplus_{i\in I} A_i)\otimes_R B \longrightarrow \bigoplus_{i\in I}(A_i \otimes_R B)$$

$$\sum \ell_j \otimes ۱ : \bigoplus_{i\in I}(A_i \otimes_R B) \longrightarrow (\bigoplus_{i\in I} A_i)\otimes_R B$$

به راحتی دیده می‌شود که

$$(\sum(\pi_j\otimes ۱))(\sum(\ell_j \otimes ۱)) = ۱ \quad , \quad (\sum(\ell_j\otimes ۱))(\sum(\pi_j \otimes ۱)) = ۱$$

مثلاً

$$(\sum(\ell_j\otimes ۱))(\sum(\pi_j \otimes ۱))((a_۱, a_۲, \ldots)\otimes b) = \sum(\ell_j \otimes ۱)((a_۱\otimes b), (a_۲ \otimes b), \ldots)$$

$$= (a_۱, ۰, \ldots)\otimes b + (۰, a_۲, \ldots)\otimes b + \cdots = (a_۱, a_۲, \ldots)\otimes b$$

$\square$

اگر R و S دو حلقه بوده و A یک Rـمدول راست و C یک Sـمدول چپ باشد و B_S یک دو مدول باشد آنگاه $A\otimes_R B$ طبق قضیه‌ای Sـمدول راست است. همچنین $B\otimes_S C$ یک Rـمدول چپ است. بنابراین $(A\otimes_R B)\otimes_S C$ و $A\otimes_R (B\otimes_S C)$ معنی دارند و گروه هستند.

قضیه ۶—۱۸. تحت شرایط فوق داریم $(A \otimes_R B) \otimes_S C \simeq A \otimes_R (B \otimes_S C)$ (به عنوان گروه).

اثبات. به‌ازای هر $c \in C$، $\alpha_c : A \times B \longrightarrow A \otimes_R (B \otimes_S C)$ را با ضابطه‌ی $\alpha_c(a,b) = a \otimes (b \otimes c)$ در نظر بگیرید. α_c دوخطی است زیرا

$$\alpha_c(a_۱ + a_۲, b) = (a_۱ + a_۲) \otimes (b \otimes c) = a_۱ \otimes (b \otimes c) + a_۲ \otimes (b \otimes c) = \alpha_c(a_۱, b) + \alpha_c(a_۲, b)$$

به همین ترتیب روی مؤلفه‌ی دوم، جمع پخش می‌شود. داریم

$$\alpha_c(ar, b) = ar \otimes (b \otimes c) = a \otimes r(b \otimes c) = a \otimes (rb \otimes c) = \alpha_c(a, rb)$$

پس طبق قضیه ۶—۳ وجود دارد هomomorfیسم گروهی $\overline{\alpha}_c : A \otimes_R B \longrightarrow A \otimes_R (B \otimes_S C)$ که $\overline{\alpha}_c(a \otimes b) = \alpha_c(a,b) = a \otimes (b \otimes c)$. حال تابع $\alpha : (A \otimes_R B) \times C \longrightarrow A \otimes_R (B \otimes_S C)$ را با ضابطه‌ی $\alpha((a \otimes b), c) = \overline{\alpha}_c(a \otimes b)$ در نظر بگیرید. α دو خطی است زیرا

$$\alpha((a \otimes b) + (a' \otimes b'), c) = \overline{\alpha}_c(a \otimes b + a' \otimes b') = \overline{\alpha}_c(a \otimes b) + \overline{\alpha}_c(a' \otimes b') = \alpha(a \otimes b, c) + \alpha(a' \otimes b', c)$$

$$\alpha(a \otimes b, c + c') = \overline{\alpha}_{c+c'}(a \otimes b) = a \otimes (b \otimes (c + c')) = a \otimes (b \otimes c + b \otimes c') = \alpha(a \otimes b, c) + \alpha(a \otimes b, c')$$

به‌ازای هر $s \in S$ داریم

$$\alpha((a \otimes b)s, c) = \alpha(a \otimes bs, c) = \overline{\alpha}_c(a \otimes bs) = a \otimes (bs \otimes c) = a \otimes (b \otimes sc) = \overline{\alpha}_{sc}(a \otimes b) = \alpha(a \otimes b, sc)$$

بنا به قضیه ۶—۳ وجود دارد همومورفیسم $\overline{\alpha} : (A \otimes_R B) \otimes_S C \longrightarrow A \otimes_R (B \otimes_S C)$ به طوری که

$$\overline{\alpha}((a \otimes b) \otimes c) = \alpha(a \otimes b, c) = \overline{\alpha}_c(a \otimes b) = a \otimes (b \otimes c)$$

به همین ترتیب $\overline{\beta} : A \otimes_R (B \otimes_S C) \longrightarrow (A \otimes_R B) \otimes_S C$ به طوری که $\overline{\beta}(a \otimes (b \otimes c)) = (a \otimes b) \otimes c$ و واضح است که $\overline{\alpha}\overline{\beta} = ۱$ و $\overline{\beta}\overline{\alpha} = ۱$ در نتیجه $\overline{\alpha}$ یک یکریختی است و حکم ثابت می‌شود. □

تمرین ۳۰. فرض کنید $۰ \longrightarrow K_i \longrightarrow P_i \xrightarrow{g_i} M \longrightarrow ۰$ $(i = ۱, ۲)$ رشته‌ای دقیق و کوتاه باشد و به علاوه $P_۱$ و $P_۲$، Rـمدول‌هایی تصویری باشند، ثابت کنید $P_۱ \oplus K_۲ \simeq K_۱ \oplus P_۲$ (به عنوان Rـمدول).

تمرین ۳۱. فرض کنید $S \subseteq R$ و S و R یکدار باشند و به علاوه $S + J(R) = R$. ثابت کنید $1_S = 1_R$.

تمرین ۳۲. تمرین ۴ صفحه‌ی ۲۱۶ کتاب Hungerford.

قضیه ۶—۱۹. فرض کنید A یک Rـمدول راست و C یک Sـمدول چپ باشد و B_S یک دو مدول باشد. در این صورت $\mathbb{Z}$ـیکریختی $\alpha : Hom_S(A \otimes_R B, C) \longrightarrow Hom_R(A, Hom_S(B, C))$ را داریم که در آن $(\alpha(f)(a))(b) = f(a \otimes b)$.

اثبات. $Hom_S(B, C)$ با ضرب اسکالر $f \in Hom_S(B, C), r \in R : (fr)(b) = f(rb)$ Rـمدول راست می‌باشد. برای هر $s \in S$ داریم

$$(fr)(bs) = f(r(bs)) = f((rb)s) = ((f(r))b)s$$

واضح است که جمع را نیز حفظ می‌کند پس $fr \in Hom_s(B, C)$ اما $Im\alpha(f) \subseteq Hom_S(B, C)$. زیرا

$$\begin{cases} \alpha(f)(a)(bs) = f(a \otimes bs) = f((a \otimes b)s) = f(a \otimes b)s = (\alpha(f)(a)(b))s \\ \alpha(f)(a)(b_1 + b_2) = f(a \otimes (b_1 + b_2)) = f(a \otimes b_1) + f(a \otimes b_2) = \alpha(f)(a)(b_1) + \alpha(f)(a)(b_2) \end{cases}$$

بنابراین $\alpha(f)(a) \in Hom_S(B, C)$. حال نشان می‌دهیم $Im\alpha(f) \subseteq Hom_R(A, Hom_S(B, C))$. داریم

$$\alpha(f)(a_1 + a_2)(b) = f((a_1 + a_2) \otimes b) = f(a_1 \otimes b) + f(a_2 \otimes b) = \alpha(f)(a_1)(b) + \alpha(f)(a_2)(b)$$

پس $\alpha(f)(a_1 + a_2) = \alpha(f)(a_1) + \alpha(f)(a_2)$. حال اگر $r \in R$، در این صورت

$$\alpha(f)(ar)(b) = f(ar \otimes b) = f(a \otimes rb) = \alpha(f)(a)(rb) = (\alpha(f)(a))r(b)$$

در نتیجه $\alpha(f) \in Hom_R(A, Hom_S(B, C))$. α هومومورفیسم گروهی است زیرا

$$(\alpha(f_1 + f_2)(a))(b) = (f_1 + f_2)(a \otimes b) = f_1(a \otimes b) + f_2(a \otimes b) = \alpha(f_1)(a)(b) + \alpha(f_2)(a)(b)$$

α یک به یک است زیرا اگر $\alpha(f) = 0$ آنگاه به‌ازای هر $a \in A$ و $b \in B$ داریم

$$(\alpha(f)(a))(b) = 0 \Longrightarrow f(a \otimes b) = 0 \Longrightarrow f = 0$$

فرض کنید $g \in Hom_R(A, Hom_S(B,C))$ و تابع $h : A \times B \longrightarrow C$ را با ضابطه‌ی $h(a,b) = g(a)(b)$ تعریف کنید. به راحتی دیده می‌شود که h دو خطی است. لذا بنا به قضیه ۳-۶ وجود دارد $\overline{h} : A \otimes_R B \longrightarrow C$ به طوری که $\overline{h}(a \otimes b) = g(a)(b)$. در نتیجه $\alpha(\overline{h})(a)(b) = h(a \otimes b) = g(a)(b)$. پس $\alpha(\overline{h}) = g$ و لذا α پوشاست. پس α یک یکریختی گروهی است. □

تمرین ۳۳. فرض کنید A و B دو Fـجبر باشند. ثابت کنید $A \otimes_F B$ نیز یک Fـجبر با ضرب $(a \otimes b)(a' \otimes b) = aa' \otimes bb'$ است. توجه کنید که F یک میدان بوده و A و B شامل F هستند. همچنین F با هر عنصر A و B جابجا می‌شود.

تمرین ۳۴. ثابت کنید اگر F یک میدان باشد، در این صورت داریم

$$M_n(F) \otimes_F M_m(F) \simeq M_{nm}(F) \quad \text{(به عنوان } F \text{ـجبر)}$$

۷ فانکتورهای Ext و Tor

تعریف ۷–۱. فرض کنید M و N دو Rـمدول بوده و $f : M \longrightarrow N$ یک Rـمدول همومورفیسم باشد. فرض کنید A و B دو Rـمدول بوده و دو رشته‌ی زیر دقیق کوتاه باشند

$$0 \longrightarrow A_1 \longrightarrow P \longrightarrow A \longrightarrow 0 \quad , \quad 0 \longrightarrow B \longrightarrow E \longrightarrow B_1 \longrightarrow 0$$

که در آن، P تصویری و E اینژکتیو است (توجه کنید همواره دو رشته‌ی دقیق کوتاه به اشکال مذکور وجود دارند). در این صورت تعریف می‌کنیم $coker\ f = N/Imf$. حال داریم

$$0 \longrightarrow Hom_R(A,B) \longrightarrow Hom_R(P,B) \xrightarrow{\alpha} Hom_R(A_1,B) \longrightarrow coker\ \alpha \longrightarrow 0$$

$$0 \longrightarrow Hom_R(A,B) \longrightarrow Hom_R(A,E) \xrightarrow{\beta} Hom_R(A,B_1) \longrightarrow coker\ \beta \longrightarrow 0$$

می‌توان ثابت کرد که $coker\ \beta \simeq coker\ \alpha$ (به عنوان $\mathbb{Z}$ـمدول) و $coker\ \alpha$ و $coker\ \beta$ به دو رشته‌ی دقیق کوتاه بستگی ندارند یعنی اگر دو رشته‌ی دقیق کوتاه زیر را در نظر بگیریم

$$0 \longrightarrow A'_1 \longrightarrow P' \longrightarrow A \longrightarrow 0 \quad , \quad 0 \longrightarrow B \longrightarrow E' \longrightarrow B'_1 \longrightarrow 0$$

آنگاه داریم، $coker\ \beta \simeq coker\ \beta' \simeq coker\ \alpha \simeq coker\ \alpha'$

تعریف ۷–۲. به‌ازای هر Rـمدول A و B تعریف می‌کنیم $Ext^1_R(A,B) = coker\ \alpha$. بنابراین به‌ازای هر دو Rـمدول A و B دو رشته‌ی دقیق کوتاه زیر را داریم

$$0 \longrightarrow Hom_R(A,B) \longrightarrow Hom_R(P,B) \xrightarrow{\alpha} Hom_R(A_1,B) \longrightarrow Ext^1_R(A,B) \longrightarrow 0$$

$$0 \longrightarrow Hom_R(A,B) \longrightarrow Hom_R(A,E) \xrightarrow{\beta} Hom_R(A,B_1) \longrightarrow Ext^1_R(A,B) \longrightarrow 0$$

قضیه ۷–۳. فرض کنید A یک Rـمدول باشد، در این صورت گزاره‌های زیر معادلند

i) A تصویری است.

ii) به‌ازای هر Rـمدول B، $Ext_R^1(A,B)=0$.

اثبات. (i $\Leftarrow$ ii) چون A تصویری است رشته‌ی $0 \longrightarrow A_1 \longrightarrow P \longrightarrow A \longrightarrow 0$ شکافته می‌شود. در نتیجه

$$0 \longrightarrow Hom_R(A,B) \longrightarrow Hom_R(P,B) \longrightarrow Hom_R(A_1,B) \longrightarrow 0$$

دقیق است بنابراین $Ext_R^1(A,B)=0$.

(ii $\Leftarrow$ i) اگر $0 \longrightarrow A_1 \longrightarrow P \longrightarrow A \longrightarrow 0$ دقیق کوتاه باشد. رشته‌ی

$$Hom_R(P,A_1) \xrightarrow{\theta} Hom_R(A_1,A_1) \longrightarrow 0$$

دقیق است و در آن $\theta(k)=kf$. چون θ پوشاست وجود دارد ℓ ای که $\theta(\ell)=1_{A_1}$ پس $\ell f=1_{A_1}$ و لذا رشته شکافته می‌شود. داریم $P \simeq A \oplus A_1$ و چون P تصویری است بنا به قضیه ۵ــ۹ A تصویری است. $\square$

قضیه ۷ــ۴. فرض کنید B یک Rـمدول باشد، در این صورت گزاره‌های زیر معادلند

i) B اینژکتیو است.

ii) به‌ازای هر Rـمدول A، $Ext_R^1(A,B)=0$.

اثبات. مشابه قضیه بالاست. $\square$

لم ۷ــ۵. فرض کنید دیاگرام

$$\begin{array}{ccccc} A & \xrightarrow{\theta_1} & B & \xrightarrow{\theta_2} & C \\ f\downarrow & & g\downarrow & & h\downarrow \\ A' & \xrightarrow{\phi_1} & B' & \xrightarrow{\phi_2} & C' \end{array}$$

جابجایی و دقیق باشد. اگر ϕ_1 یک به یک باشد در این صورت رشته‌ی $\ker f \xrightarrow{\theta_1} \ker g \xrightarrow{\theta_2} \ker h$ دقیق است. اگر θ_2 پوشا باشد آنگاه رشته‌ی $coker\ f \xrightarrow{\phi_1} coker\ g \xrightarrow{\phi_2} coker\ h$ دقیق است.

اثبات. دقیق بودن رشته‌ی اول را ثابت می‌کنیم، اثبات دقیق بودن رشته‌ی دوم مشابه است. فرض کنید ϕ_1 یک به یک باشد. اگر $a \in \ker f$ در این صورت به‌دست می‌آوریم

$$g(\theta_1(a)) = \phi_1(f(a)) = \phi_1(0) = 0$$

در نتیجه $\theta_1(a) \in \ker g$. به همین ترتیب اگر $b \in \ker g$ آنگاه $\theta_2(b) \in \ker h$. حال فرض کنید $a \in \ker f$ داریم $\theta_2\theta_1(a) = 0$ زیرا رشته دقیق است. در نتیجه $Im\theta_1|_{\ker f} \subseteq \ker \theta_2|_{\ker g}$. فرض کنید $b \in \ker g$ و $\theta_2(b) = 0$. چون $\theta_2(b) = 0$ در نتیجه $b \in \ker \theta_2$ لذا وجود دارد x ای که $\theta_1(x) = b$ پس $g\theta_1(x) = g(b) = 0$ و در نتیجه $\phi_1 f(x) = 0$ بنابراین با توجه به یک به یک بودن ϕ_1، $f(x) = 0$ و لذا $x \in \ker f$. □

فرض کنید دیاگرام زیر جابجایی و دقیق باشد

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & A & \xrightarrow{\theta_1} & B & \xrightarrow{\theta_2} & C & \longrightarrow 0 \\
 & & f\downarrow & & g\downarrow & & h\downarrow & \\
0 & \longrightarrow & A' & \xrightarrow{\phi_1} & B' & \xrightarrow{\phi_2} & C' &
\end{array}$$

در این صورت وجود دارد Rـمدول همومورفیسم $\Delta : \ker h \longrightarrow coker\ f$. اگر $c \in \ker h$ چون θ_2 پوشاست وجود دارد $b \in B$ به طوری که $\theta_2(b) = c$ در نتیجه $h\theta_2(b) = h(c) = 0$ پس $\phi_2 g(b) = 0$ و لذا $g(b) \in \ker \phi_2 = Im\phi_1$ پس وجود دارد $a \in A'$ به طوری که $\phi_1(a) = g(b)$. حال تعریف می‌کنیم $\Delta(c) = Imf + a \in coker\ f$. ثابت می‌کنیم Δ خوش‌تعریف است. اگر $\theta_2(b') = c$ در نتیجه $\theta_2(b - b') = 0$ و لذا $b - b' \in Im\theta_1$ پس $g(b-b') = g\theta_1(x) = \phi_1 f(x)$ حال $\phi_1^{-1} g(b-b') = f(x)$ پس داریم $\Delta(c) = Imf + \phi_1^{-1} g(b)$. از طرف دیگر $\Delta(c) = Imf + \phi_1^{-1} g(b')$ با توجه به رابطه‌ی $\phi_1^{-1} g(b-b') \in Imf$ خوش‌تعریفی ثابت می‌شود. به راحتی دیده می‌شود که Δ یک Rـمدول همومورفیسم است. Δ را همومورفیسم رابط[34] نامند. □

قضیه ۷—۶. فرض کنید دیاگرام زیر

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & A & \xrightarrow{\theta_1} & B & \xrightarrow{\theta_2} & C & \longrightarrow 0 \\
 & & f\downarrow & & g\downarrow & & h\downarrow & \\
0 & \longleftarrow & A' & \xrightarrow{\phi_1} & B' & \xrightarrow{\phi_2} & C' &
\end{array}$$

[34] connecting homomorphism

دقیق و جابجایی باشد. در این صورت دنباله‌ی

$$\ker f \xrightarrow{\theta_1} \ker g \xrightarrow{\theta_2} \ker h \xrightarrow{\Delta} coker\ f \xrightarrow{\phi_1} coker\ g \xrightarrow{\phi_2} coker\ h$$

دقیق است.

اثبات. بنابر لم و تشابه کافی است ثابت شود رشته‌ی $\ker g \xrightarrow{\theta_2} \ker h \xrightarrow{\Delta} coker\ f$ دقیق است. اگر $b \in \ker g$ در این صورت $g(b) = 0$. طبق تعریف Δ داریم

$$\Delta(\theta_2(b)) = Imf + \phi_1^{-1}(g(b)) = Imf + \phi_1^{-1}(0) = Imf + 0 = 0$$

و در نتیجه $Im\theta_2 \subseteq \ker \Delta$. حال فرض کنید $c \in \ker h$ و $\Delta(c) = 0$. فرض کنید $\theta_2(b) = 0$ داریم $\phi_1^{-1} g(b) \in Imf$ در نتیجه $\phi_1^{-1}(g(b)) = f(a)$ پس $g(b) = \phi_1 f(a) = g\theta_1(a)$ در نتیجه $b - \theta_1(a) \in \ker g$ و لذا $b - \theta_1(a) = y \in \ker g$. حال $\theta_2(b) - \theta_2\theta_1(a) = \theta_2(y)$ و در نتیجه $c = \theta_2(y)$. □

نکته. اگر دیاگرام زیر جابجایی و دقیق باشد

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & A & \longrightarrow & B & \longrightarrow & C & \longrightarrow & 0 \\
 & & f\downarrow & & g\downarrow & & h\downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & A' & \longrightarrow & B' & \longrightarrow & C' & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

در این صورت رشته‌ی زیر دقیق است

$$0 \longrightarrow \ker f \longrightarrow \ker g \longrightarrow \ker h \xrightarrow{\Delta} coker\ f \longrightarrow coker\ g \longrightarrow coker\ h \longrightarrow 0$$

خاصیت‌هایی از فانکتور Ext_R^1.

فرض کنید $0 \longrightarrow A' \longrightarrow A \longrightarrow A'' \longrightarrow 0$ و $0 \longrightarrow B' \longrightarrow E \longrightarrow B_1 \longrightarrow 0$ دو رشته‌ی دقیق کوتاه از

R_مدول‌ها باشند، به طوری که E یک R_مدول اینژکتیو باشد. در این صورت دیاگرام زیر جابجایی و دقیق است

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & \circ & & \circ & & \circ & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
\circ & \longrightarrow & Hom_R(A'',B) & \longrightarrow & Hom_R(A,B) & \longrightarrow & Hom_R(A',B) & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
\circ & \longrightarrow & Hom_R(A'',E) & \longrightarrow & Hom_R(A,E) & \longrightarrow & Hom_R(A',E) & \longrightarrow & \circ \\
 & & \beta''\downarrow & & \beta\downarrow & & \beta'\downarrow & & \\
\circ & \longrightarrow & Hom_R(A'',B_1) & \longrightarrow & Hom_R(A,B_1) & \longrightarrow & Hom_R(A',B_1) & &
\end{array}$$

حال از دنباله $\ker -coker$ استفاده می‌کنیم. داریم

$$\ker\beta'' \longrightarrow \ker\beta \longrightarrow \ker\beta' \xrightarrow{\Delta} coker\ \beta'' \longrightarrow coker\ \beta \longrightarrow coker\ \beta'$$

رشته‌ای دقیق است در نتیجه

$$\begin{array}{ccccccccc}
Hom_R(A'',B) & \longrightarrow & Hom_R(A,B) & \longrightarrow & Hom_R(A',B) & & & & \\
\simeq\downarrow & & \simeq\downarrow & & \simeq\downarrow & & & & \\
\ker\beta'' & \longrightarrow & \ker\beta & \longrightarrow & \ker\beta' & & & & \\
 & & & & \downarrow & & & & \\
 & & & & coker\beta'' & \longrightarrow & coker\beta & \longrightarrow & coker\beta' \\
 & & & & \simeq\downarrow & & \simeq\downarrow & & \simeq\downarrow \\
 & & & & Ext_R^1(A'',B) & \longrightarrow & Ext_R^1(A,B) & \longrightarrow & Ext_R^1(A',B)
\end{array}$$

به راحتی دیده می‌شود که رشته‌ی زیر دقیق است

$$\circ \to Hom_R(A'',B) \to Hom_R(A,B) \to Hom_R(A',B) \to Ext_R^1(A'',B) \to Ext_R^1(A,B) \to Ext_R^1(A',B)$$

می‌توان نشان داد که اگر $\circ \longrightarrow B' \longrightarrow B \longrightarrow B'' \longrightarrow \circ$ دقیق باشد آنگاه رشته‌ی زیر دقیق است

$$\circ \to Hom_R(A,B') \to Hom_R(A,B) \to Hom_R(A,B'') \to Ext_R^1(A,B') \to Ext_R^1(A,B) \to Ext_R^1(A,B'')$$

قضیه ۷—۷. Rـمدول E اینژکتیو است اگر و تنها اگر به‌ازای هر ایده‌آل چپ I از R داشته باشیم $Ext^1_R(R/I, E) = 0$.

اثبات. اگر E اینژکتیو باشد بنا به قضیه ۷—۴ $Ext^1_R(R/I, E) = 0$.

برعکس فرض کنید $Ext^1_R(R/I, E) = 0$. بنا به قضیه‌ای ۵—۱۱ کافیست نشان دهیم هر Rـمدول هومورفیسم $f : I \longrightarrow E$ قابل گسترش به دامنه‌ی R است. رشته‌ی دقیق $0 \longrightarrow I \xrightarrow{\subseteq} R \longrightarrow R/I \longrightarrow 0$ را در نظر بگیرید. در این صورت رشته‌ی زیر دقیق است

$$0 \longrightarrow Hom_R(R/I, E) \longrightarrow Hom_R(R, E) \xrightarrow{\alpha} Hom_R(I, E) \longrightarrow Ext^1_R(R/I, I) = 0$$

در نتیجه α پوشاست. اما $\alpha(g) = gi$ که i همان تابع شمول است. وجود دارد $h \in Hom_R(R, E)$ به طوری که $\alpha(h) = f$ در نتیجه $hi = f$. اگر $x \in I$ آنگاه $i(x) = x$ پس $h(x) = f(x)$ و $h : R \longrightarrow E$. □

نتیجه ۷—۸. اگر هر Rـمدول دوری تصویری باشد آنگاه هر Rـمدول تصویری است.

اثبات. چون R/I دوری است پس $Ext^1_R(R/I, E) = 0$. طبق قضیه قبل هر Rـمدول E، اینژکتیو است و لذا بنا به قضیه ۵—۱۶ هر Rـمدول تصویری می‌شود و به علاوه R نیمه ساده است. □

لم ۷—۹. فرض کنید $0 \longrightarrow A' \longrightarrow A \longrightarrow A'' \longrightarrow 0$ یک رشته‌ی دقیق شکافته شده باشد در این صورت هومورفیسم رابط $\Delta : Hom_R(A', B) \longrightarrow Ext^1_R(A'', B)$، هومورفیسم صفر است.

اثبات. رشته‌ی $Hom_R(A, B) \xrightarrow{\alpha} Hom_R(A', B) \xrightarrow{\Delta} Ext^1_R(A'', B)$ دقیق است. بنا به قضیه ۵—۲۰ چون رشته شکافته می‌شود، رشته‌ی زیر دقیق است

$$0 \longrightarrow Hom_R(A'', B) \longrightarrow Hom_R(A, B) \xrightarrow{\alpha} Hom_R(A', B) \longrightarrow 0$$

پس α پوشاست و چون $Im\alpha = Hom_R(A', B) = \ker \Delta$ پس Δ هومورفیسم صفر است. □

لم ۷—۱۰. فرض کنید $0 \longrightarrow B' \longrightarrow B \longrightarrow B'' \longrightarrow 0$ یک رشته‌ی دقیق شکافته شده باشد در این صورت $\Delta : Hom_R(A, B'') \longrightarrow Ext^1_R(A, B')$، هومورفیسم صفر است.

اثبات. مشابه بالا ثابت می‌شود. $\square$

تمرین ۳۷. فرض کنید $0 \longrightarrow B \xrightarrow{g} X \xrightarrow{f} A \longrightarrow 0$ یک رشته‌ی دقیق از Rـمدول‌ها باشد و $\nu : B \longrightarrow B'$ یک Rـمدول همومورفیسم باشد. نشان دهید دیاگرام دقیق و جابجایی زیر وجود دارد

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 \longrightarrow & B & \xrightarrow{g} & X & \xrightarrow{f} & A & \longrightarrow 0 \\ & \nu\downarrow & & h\downarrow & & i\downarrow & \\ 0 \longrightarrow & B' & \longrightarrow & X' & \longrightarrow & A & \longrightarrow 0 \end{array}$$

قضیه ۷—۱۱. فرض کنید A و B دو Rـمدول باشند، در این صورت گزاره‌های زیر معادلند

i) $Ext^1_R(A, B) = 0$.

ii) هر دنباله‌ی دقیق به صورت $0 \longrightarrow B \longrightarrow X \xrightarrow{h} A \longrightarrow 0$ شکافته می‌شود.

اثبات. (i $\Leftarrow$ ii) رشته‌ی دقیق زیر را در نظر بگیرید

$$Hom_R(A, B) \longrightarrow Hom_R(A, X) \xrightarrow{\alpha} Hom_R(A, A) \xrightarrow{\Delta} Ext^1_R(A, B) = 0$$

پس α پوشاست و لذا وجود دارد $g \in Hom_R(A, X)$ به طوری که $\alpha(g) = 1_A$. چون $hg = 1_A$ پس رشته مذکور شکافته می‌شود.

(ii $\Leftarrow$ i) رشته‌ی دقیق $0 \longrightarrow A_1 \longrightarrow P \longrightarrow A \longrightarrow 0$ را که در آن P تصویری است در نظر بگیرید و فرض کنید $\nu \in Hom_R(A_1, B)$. بنا به تمرین ۳۷ دیاگرام

$$\begin{array}{ccc} 0 \longrightarrow & A_1 & \longrightarrow P \longrightarrow A \longrightarrow 0 \\ & \nu\downarrow & \\ & B & \end{array}$$

قابل گسترش به دیاگرام دقیق و جابجایی

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 \longrightarrow & A_1 & \longrightarrow & P & \longrightarrow & A & \longrightarrow 0 \\ & \nu\downarrow & & h\downarrow & & i_A\downarrow & \\ 0 \longrightarrow & B & \longrightarrow & X & \longrightarrow & A & \longrightarrow 0 \end{array}$$

است. رشته‌های دقیق زیر را داریم

$$Hom_R(B,B) \xrightarrow{\Delta} Ext^1_R(A,B) \longrightarrow Ext^1_R(X,B)$$

$$Hom_R(A,B) \xrightarrow{\Delta'} Ext^1_R(A,B) \longrightarrow Ext^1_R(P,B) = 0$$

با توجه به ضابطه‌های Δ و Δ' که قبلاً معرفی شدند می‌توان دید که دیاگرام زیر جابجایی است

$$\begin{array}{ccc} Hom_R(B,B) & \xrightarrow{\Delta} & Ext^1_R(A,B) \\ \theta \downarrow & & 1 \downarrow \\ Hom_R(A_1,B) & \xrightarrow{\Delta'} & Ext^1_R(A,B) \quad \longrightarrow 0 \end{array}$$

که در آن $\theta(g) = g\nu$. طبق فرض رشته‌ی $0 \longrightarrow A \longrightarrow X \longrightarrow B \longrightarrow 0$ شکافته می‌شود پس بنابر لم ۷—۹، $\Delta = 0$. داریم $\theta(1_B) = \nu$ پس چون $\Delta'\theta = 1\Delta = 0$ داریم $\Delta'(\nu) = 0$. از طرفی $\nu \in Hom_R(A_1,B)$ دلخواه بود پس $\Delta' = 0$. چون $\Delta' = 0$ پوشاست پس $Ext^1_R(A,B) = 0$. $\square$

تمرین ۳۸. فرض کنید به‌ازای $n \geq 1$،

$$0 \longrightarrow A_n \longrightarrow P_{n-1} \longrightarrow P_{n-2} \longrightarrow \cdots \longrightarrow P_0 \longrightarrow A \longrightarrow 0$$

$$0 \longrightarrow B \longrightarrow E_0 \longrightarrow E_1 \longrightarrow \cdots \longrightarrow E_{n-1} \longrightarrow B \longrightarrow 0$$

دو رشته‌ی دقیق باشند و P_i ها تصویری و E_j ها اینژکتیو باشند. ثابت کنید $Ext^1_R(A_n,B) \simeq Ext^1_R(A,B_n)$.

تعریف ۷—۱۲. فرض کنید A یک Rـمدول باشد در این صورت رشته‌ی دقیق زیر را داریم

$$\cdots \longrightarrow P_2 \longrightarrow P_1 \longrightarrow P_0 \longrightarrow A \longrightarrow 0$$

که در آن P_i ها تصویری هستند. با توجه به اینکه هر مدول تصویری یک مدول آزاد است، رشته‌ی فوق همواره وجود دارد به رشته‌ی فوق یک تحلیل تصویری[۳۵] گفته می‌شود. به طریق مشابه می‌توان تحلیل اینژکتیو[۳۶] را برای هر مدول تعریف کرد

$$0 \longrightarrow B \xrightarrow{\epsilon} E \xrightarrow{d_0} E_1 \xrightarrow{d_1} E_2 \longrightarrow \cdots$$

اگر به‌ازای Rـمدول A کوچکترین عدد طبیعی n وجود داشته باشد به طوری که رشته‌ی $0 \longrightarrow P_n \longrightarrow \cdots \longrightarrow P_1 \longrightarrow P_0 \longrightarrow A \longrightarrow 0$ (P_i ها تصویری) دقیق باشد آنگاه تعریف می‌کنیم

[۳۵] projective resolution
[۳۶] injective resolution

$pd_R(A)=n$ و آن را بعد تصویری A می‌گوییم. اگر چنین n ای وجود نداشت تعریف می‌کنیم $pd_R(A)=\infty$.
به همین ترتیب بعد اینژکتیو Rـمدول A تعریف می‌شود که آن را با نماد $id_R(A)$ نمایش می‌دهیم.

مثال. بعد تصویری و اینژکتیو $\mathbb{Q}$ و $\mathbb{Z}$ را به عنوان $\mathbb{Z}$ـمدول محاسبه می‌کنیم. می‌دانیم اگر P تصویری باشد آنگاه $pd_R(P)=0$ زیرا $0 \longrightarrow P \xrightarrow{i} P \longrightarrow 0 \longrightarrow \cdots$ دقیق است. به همین ترتیب اگر E اینژکتیو باشد آنگاه $id_R(E)=0$. پس $pd_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z})=0$ و $id_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Q})=0$. رشته‌ی دقیق $0 \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \longrightarrow 0$ را در نظر بگیرید. چون $\mathbb{Q}$ و $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ بخش‌پذیر هستند پس اینژکتیوند و لذا $id_{\mathbb{Z}}\mathbb{Z}=1$. حال رشته‌ی دقیق $0 \longrightarrow \ker\alpha \longrightarrow P_0 \xrightarrow{\alpha} \mathbb{Q} \longrightarrow 0$ را که در آن P_0 گروهی آزاد و آبلی است را در نظر بگیرید. می‌دانیم زیرگروه‌های، گروه‌های آبلی آزاد، آزادند در نتیجه $\ker\alpha$ آزاد است پس تصویری است و لذا $pd_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Q})=1$.

اگر $0 \longrightarrow A \xrightarrow{\epsilon} P_0 \xrightarrow{d_1} P_1 \xrightarrow{d_2} \cdots$ یک تحلیل تصویری A باشد آنگاه رشته‌ی زیر را داریم که لزوماً دقیق نیست ولی ترکیب هر دو هومومورفیسم متوالی آن صفر است.

$$0 \longrightarrow Hom_R(A,B) \xrightarrow{\epsilon^*} Hom_R(P_0,B) \xrightarrow{d_1^*} Hom_R(P_1,B) \xrightarrow{d_2^*} \cdots$$

به راحتی دیده می‌شود $d_{i+1}^* d_i^* = 0$. تعریف می‌کنیم $Ext_R^0(A,B)=\ker d_1^*$ و به‌ازای هر $n \geq 1$، $Ext_R^n(A,B)=\ker d_{n+1}^*/Imd_n^*$. توجه کنید چون $d_{n+1}^* d_n^* = 0$ پس $Imd_n^* \subseteq \ker d_{n+1}^*$. بنا به قضیه ۵ــ۱۸ رشته‌ی $0 \longrightarrow Hom_R(A,B) \xrightarrow{\epsilon^*} Hom_R(P_0,B)$ دقیق است در نتیجه

$$Ext_R^0(A,B)=\ker d_1^* \simeq Im\epsilon^* \simeq Hom_R(A,B)$$

در جبر همولوژی ثابت می‌شود که تعریف $Ext_R^n(A,B)$ مستقل از تحلیل‌های تصویری مختلف است. اگر $\cdots \longrightarrow E_2 \xrightarrow{d_1} E_1 \xrightarrow{d_0} E \xrightarrow{\epsilon} B \longrightarrow 0$ یک تحلیل اینژکتیو مدول B باشد آنگاه به رشته‌ی زیر می‌رسیم که لزوماً دقیق نیست

$$0 \longrightarrow Hom_R(A,B) \xrightarrow{\epsilon^*} Hom_R(A,E_0) \xrightarrow{d_0^*} Hom_R(A,E_1) \xrightarrow{d_1^*} \cdots$$

اگر تعریف کنیم $Ext_R^0(A,B)=\ker d_0^*$ و به‌ازای هر $n \geq 1$، $Ext_R^n(A,B)=\ker d_n^*/Imd_{n-1}^*$ می‌توان ثابت کرد که این تعریف با تعریف قبل معادل است.

مثال. اگر A و B گروه‌هایی آبلی باشند در این صورت به‌ازای هر $n \geq ۲$، داریم $Ext^n_{\mathbb{Z}}(A,B) = ۰$. زیرا رشته‌ی زیر دقیق است

$$\cdots \longrightarrow ۰ \longrightarrow ۰ \longrightarrow ۰ \longrightarrow \ker\alpha \longrightarrow P_۰ \xrightarrow{\alpha} B \longrightarrow ۰$$

و همه مدول‌های از $P_۰$ به بعد تصویری هستند. در نتیجه برای $i \geq ۲$، $d_i = ۰$ پس برای $n \geq ۲$، $Ext^n_{\mathbb{Z}}(A,B) = ۰$.

تمرین ۳۹. به‌ازای هر $\mathbb{Z}$ـمدول A، $Ext^۱_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}_m, A)$ را محاسبه کنید.

مشابه اثباتی که قبلاً داده شد ثابت می‌شود که اگر $۰ \longrightarrow A' \longrightarrow A \longrightarrow A'' \longrightarrow ۰$ رشته‌ی دقیق کوتاه باشد در این صورت به‌ازای هر Rـمدول B رشته‌ی دقیق زیر را داریم

$$۰ \longrightarrow Hom_R(A'',B) \longrightarrow Hom_R(A,B) \longrightarrow Hom_R(A',B) \longrightarrow Ext^۱_R(A'',B) \longrightarrow Ext^۱_R(A,B)$$

$$\longrightarrow Ext^۱_R(A',B) \longrightarrow Ext^۲_R(A'',B) \longrightarrow Ext^۲_R(A,B) \longrightarrow Ext^۲_R(A',B) \longrightarrow \cdots$$

قضیه ۷—۱۳. اگر A یک Rـمدول باشد آنگاه گزاره‌های زیر معادلند

i) A تصویری است.

ii) به‌ازای هر $n \geq ۱$ و هر Rـمدول B، $Ext^n_R(A,B) = ۰$.

iii) به‌ازای هر Rـمدول B، $Ext^۱_R(A,B) = ۰$.

اثبات. (i $\Leftarrow$ ii) زیرا تحلیل تصویری $\cdots \longrightarrow ۰ \xrightarrow{d_۲} ۰ \xrightarrow{d_۱} A \xrightarrow{\epsilon} A \longrightarrow ۰$ را در نظر بگیرید. به‌ازای هر $n \geq ۱$، داریم $d_i = ۰$ در نتیجه بنا به تعریف به‌ازای هر $n \geq ۱$، $Ext^n_R(A,B) = ۰$.

(ii $\Leftarrow$ iii) بدیهی است.

(iii $\Leftarrow$ i) رشته‌ی دقیق کوتاه $۰ \longrightarrow A_۱ \longrightarrow P \longrightarrow A \longrightarrow ۰$ را که در آن P تصویری است در نظر بگیرید. با قرار دادن $B = A_۱$ رشته‌ی $Hom_R(P,A_۱) \xrightarrow{\alpha} Hom_R(A_۱,A_۱) \longrightarrow Ext^۱_R(A,A_۱) = ۰$ دقیق

است. α پوشاست پس وجود دارد $f \in Hom_R(P, A_1)$ به طوری که $\alpha(f) = 1_{A_1}$. پس رشته‌ی دقیق کوتاه شکافته می‌شود در نتیجه $P \simeq A \oplus A_1$ و چون P تصویری است بنا به قضیه ۵—۹، A نیز تصویری است. $\square$

قضیه ۷—۱۴. اگر B یک Rـمدول باشد آنگاه گزاره‌های زیر معادلند

i) B اینژکتیو است.

ii) به‌ازای هر $n \geq 1$ و هر Rـمدول A، $Ext_R^n(A, B) = 0$.

iii) به‌ازای هر Rـمدول A، $Ext_R^1(A, B) = 0$.

اثبات. مشابه قضیه قبل ثابت می‌شود. $\square$

نتیجه ۷—۱۵. دو تعریف قدیم و جدید $Ext_R^1(A, B)$ معادلند.

اثبات. اگر $0 \longrightarrow A_1 \longrightarrow P \longrightarrow A \longrightarrow 0$ دقیق باشد آنگاه رشته‌ی زیر دقیق است

$$0 \longrightarrow Hom_R(A, B) \longrightarrow Hom_R(P, B) \xrightarrow{\alpha} Hom(A_1, B) \xrightarrow{\beta} Ext_R^1(A, B) \longrightarrow Ext_R^1(P, B) \longrightarrow \cdots$$

بنا به قضیه قبل $Ext_R^1(P, B) = 0$ پس β پوشاست و در نتیجه

$$\text{(جدید)}\ Ext_R^1(A, B) \simeq coker\ \alpha = Ext_R^1(A, B)\ \text{(قدیم)}.$$

$\square$

لم ۷—۱۶. احکام زیر معادلند

i) اگر $pd_R(A) \leq n$ آنگاه برای $k \geq n+1$ و هر Rـمدول B، $Ext_R^k(A, B) = 0$.

ii) اگر برای هر $k \geq n+1$ و هر Rـمدول B، $Ext_R^k(A, B) = 0$ آنگاه $pd_R(A) \leq n$.

iii) برای هر Rـمدول B، $Ext_R^{n+1}(A, B) = 0$.

نکته. اگر B یک $\mathbb{Z}$ـمدول باشد آنگاه تعریف کنید $B^* = Hom_{\mathbb{Z}}(B, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ در این صورت می‌توان ثابت کرد که، $(Tor_n^{\mathbb{Z}}(A, B))^* = Ext_{\mathbb{Z}}^n(A, B^*)$

تعریف ۷—۱۷. فرض کنید $\circ \longrightarrow A_۱ \longrightarrow P \longrightarrow A \longrightarrow \circ$ و $\circ \longrightarrow B \longrightarrow E \longrightarrow B_۱ \longrightarrow \circ$ دو رشته‌ی دقیق کوتاه از Rـمدول‌ها باشند که در آن P تصویری و E اینژکتیو است. بنا به قضیه ۶—۶

$$\circ \longrightarrow \ker\alpha \longrightarrow A_۱ \otimes_R B \xrightarrow{\alpha} P \otimes_R B \xrightarrow{\beta} A \otimes_R B \longrightarrow \circ$$

رشته‌ای دقیق است. همچنین

$$\circ \longrightarrow \ker\alpha' \longrightarrow A \otimes_R B \xrightarrow{\alpha'} A \otimes_R E \xrightarrow{\beta'} A \otimes_R B_۱ \longrightarrow \circ$$

رشته‌ای دقیق و کوتاه است. تعریف می‌کنیم $Tor_۱^R(A,B) = \ker\alpha$ یا $\ker\alpha'$. در جبر همولوژی ثابت می‌شود $\ker\alpha \simeq \ker\alpha'$ و تعریف $Tor_۱^R(A,B)$ به دو رشته‌ی دقیق کوتاه اول بستگی ندارد. در نتیجه رشته‌ی زیر

$$\circ \longrightarrow Tor_۱^R(A,B) \longrightarrow A_۱ \otimes_R B \longrightarrow P \otimes_R B \longrightarrow A \otimes_R B \longrightarrow \circ$$

دقیق کوتاه است. اگر $\cdots \longrightarrow P_۲ \xrightarrow{d_۲} P_۱ \xrightarrow{d_۱} P_\circ \xrightarrow{\epsilon} A \longrightarrow \circ$ یک تحلیل تصویری Rـمدول A باشد در این صورت رشته‌ی زیر که ممکن است دقیق نباشد وجود دارد

$$\cdots \longrightarrow P_۱ \otimes_R B \xrightarrow{d_۱\otimes ۱} P_\circ \otimes_R B \xrightarrow{\epsilon\otimes ۱} A \otimes_R B \longrightarrow \circ$$

داریم

$$(d_n \otimes ۱)(d_{n+۱} \otimes ۱) = d_n d_{n+۱} \otimes ۱ = \circ \otimes ۱ = \circ$$

در نتیجه $Im(d_{n+۱} \otimes ۱) \subseteq \ker(d_n \otimes ۱)$. تعریف می‌کنیم

$$A \otimes_R B \simeq \frac{P_\circ \otimes_R B}{\ker(\epsilon \otimes ۱)} = Tor_\circ^R(A,B)$$

و به‌ازای $n \geq ۱$،

$$Tor_n^R(A,B) = \frac{\ker(d_n \otimes ۱)}{Im(d_{n+۱} \otimes ۱)}$$

در جبر همولوژی ثابت می‌شود تعریف فوق به تحلیل تصویری A بستگی ندارد. در تعریف $Tor_n^R(A,B)$ می‌توان به جای تحلیل تصویری قبل تحلیل تصویری B را نیز در نظر گرفت و از سمت چپ در A تانسور کرد. ثابت می‌شود با این تعریف نیز به همان تعریف قبلی می‌رسیم.

نکته. در حالت کلی هیچ ارتباطی بین $Ext_R^n(A,B)$ و $Ext_R^n(B,A)$ وجود ندارد ولی همیشه برای فانکتور Tor داریم $Tor_n^R(A,B) \simeq Tor_n^{R^{op}}(B,A)$.

تعریف ۷—۱۸. Rـمدول راست B را یک‌دست[37] گویند هرگاه به‌ازای هر Rـمدول هومومورفیسم یک به یک $f : A' \longrightarrow A$، $1_B \otimes f : B \otimes_R A' \longrightarrow B \otimes_R A$ یک به یک باشد.

لم ۷—۱۹. اگر R یک حلقه باشد آنگاه R به عنوان Rـمدول راست یک‌دست است.

اثبات. فرض کنید $f : A' \longrightarrow A$ یک Rـمدول مونومورفیسم باشد، در این صورت دیاگرام زیر جابجایی است

$$\begin{array}{ccc} A' & \xrightarrow{f} & A \\ \simeq\uparrow \theta_1 & & \simeq\uparrow \theta_2 \\ R \otimes_R A' & \xrightarrow{1\otimes f} & R \otimes_R A \end{array}$$

زیرا

$$f\theta_1(r \otimes a') = f(ra') = rf(a') = \theta_2(r \otimes f(a')) = \theta_2(1 \otimes f)(r \otimes a')$$

حال چون f، θ_1 و θ_2 یک به یک هستند پس $1 \otimes f$ نیز یک به یک است یعنی R به عنوان Rـمدول یک‌دست است. □

لم ۷—۲۰. اگر $\{B_i\}_{i\in I}$ خانواده‌ای از Rـمدول‌های راست باشند در این صورت $\bigoplus_{i\in I} B_i$ یک‌دست است اگر و تنها اگر هر یک از B_i ها یک‌دست باشد.

اثبات. دیاگرام زیر جابجایی است

$$\begin{array}{ccc} (\bigoplus_{i\in I} B_i) \otimes_R A' & \xrightarrow{1\otimes f} & (\bigoplus_{i\in I} B_i) \otimes_R A \\ \simeq\downarrow & & \downarrow\simeq \\ \bigoplus_{i\in I}(B_i \otimes_R A') & \xrightarrow{\sum_{i\in I} 1_i \otimes f} & \bigoplus_{i\in I}(B_i \otimes_R A) \end{array}$$

جابجایی بودن دیاگرام به راحتی قابل بررسی است و لذا چون یک به یک بودن دو سطر معادل است پس لم ثابت می‌شود. □

[37] flat

قضیه ۷−۲۱. هر Rـمدول تصویری یک‌دست است.

اثبات. بنابر لم قبل R به عنوان Rـمدول یک‌دست است و چون هر Rـمدول آزاد با $\bigoplus_{i\in I} R$ یکریخت است پس یک‌دست می‌شود و چون هر Rـمدول تصویری P، بنا به قضیه جمعوند مستقیم یک Rـمدول آزاد است لذا بنابر لم، P یک‌دست است. $\square$

نکته. عکس قضیه درست نیست زیرا $\mathbb{Q}$ به عنوان $\mathbb{Z}$ـمدول یک‌دست است ولی قبلاً دیدیم که $\mathbb{Q}$ به عنوان $\mathbb{Z}$ـمدول تصویری نیست (اگر A جابجایی باشد آنگاه $S^{-1}A$ به عنوان Aـمدول یک‌دست است).

اگر $\circ \longrightarrow A_1 \longrightarrow P \longrightarrow A \longrightarrow \circ$ و $\circ \longrightarrow B' \longrightarrow B \longrightarrow B'' \longrightarrow \circ$ دو رشته‌ی دقیق کوتاه باشند که در آن B'، B، B''، Rـمدول‌های چپ و A و A_1، Rـمدول‌های راست می‌باشند، آنگاه دیاگرام جابجایی زیر را داریم

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & A_1\otimes_R B' & \longrightarrow & A_1\otimes_R B & \longrightarrow & A_1\otimes_R B'' & \longrightarrow & \circ \\
 & & \alpha\downarrow & & \beta\downarrow & & \nu\downarrow & & \\
\circ & \longrightarrow & P\otimes_R B' & \longrightarrow & P\otimes_R B & \longrightarrow & P\otimes_R B'' & \longrightarrow & \circ \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & A\otimes_R B' & \longrightarrow & A\otimes_R B & \longrightarrow & A\otimes_R B'' & \longrightarrow & \circ \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & \circ & & \circ & & \circ & &
\end{array}$$

در نتیجه اگر دنباله‌ی $\ker - coker$ را برای شبکه‌ی بالایی بنویسیم آنگاه دنباله‌ی زیر دقیق است

$$\ker\alpha \longrightarrow \ker\beta \longrightarrow \ker\nu \xrightarrow{\Delta} coker\ \alpha \longrightarrow coker\ \beta \longrightarrow coker\ \nu \longrightarrow \circ$$

و در نتیجه رشته‌ی دقیق زیر را داریم

$$Tor_1^R(A,B') \longrightarrow Tor_1^R(A,B) \longrightarrow Tor_1^R(A,B'') \xrightarrow{\Delta} A\otimes_R B' \longrightarrow A\otimes_R B \longrightarrow A\otimes_R B'' \longrightarrow \circ$$

قضیه ۷−۲۲. اگر A یک Rـمدول راست باشد در این صورت گزاره‌های زیر معادلند

i) A یک‌دست است.

ii) به‌ازای هر $n \geq 1$ و هر Rـمدول چپ B، $Tor_n^R(A,B)=0$.

iii) به‌ازای هر Rـمدول چپ B، $Tor_1^R(A,B)=0$.

اثبات. (i $\Longleftarrow$ ii) فرض کنید

$$\cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow P_2 \xrightarrow{d_2} P_1 \xrightarrow{d_1} P_0 \xrightarrow{\epsilon} B \longrightarrow 0$$

یک تحلیل تصویری Rـمدول B باشد. کافیست نشان دهیم رشته‌ی

$$\cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow A \otimes_R P_1 \xrightarrow{1\otimes d_1} A \otimes_R P_0 \xrightarrow{1\otimes \epsilon} A \otimes_R B \longrightarrow 0$$

دقیق است. برای این کار کافیست ثابت شود اگر A یک‌دست بوده و $K \xrightarrow{f} E \xrightarrow{g} F$ دقیق باشد آنگاه

$$A \otimes_R K \xrightarrow{1\otimes f} A \otimes_R E \xrightarrow{1\otimes g} A \otimes_R F$$

نیز دقیق است. چون A یک‌دست است پس رشته‌ی دقیق کوتاه زیر را داریم

$$0 \longrightarrow A \otimes_R \ker g \xrightarrow{1\otimes i} A \otimes_R E \xrightarrow{1\otimes g} A \otimes_R Img \longrightarrow 0$$

که در آن

$$\ker(1 \otimes g) = Im(1 \otimes i) = A \otimes_R \ker g \quad , \quad Im(1 \otimes f) = A \otimes_R Imf$$

داریم $Imf = \ker g$ و حکم ثابت می‌شود. داریم

$$Tor_0^R(A,B) \simeq A \otimes_R B \quad , \quad Tor_n^R(A,B) = \frac{\ker(1 \otimes d_n)}{Im(1 \otimes d_{n+1})}$$

به‌ازای $n \geq 1$، $\ker(1 \otimes d_n) = Im(1 \otimes d_{n+1})$ در نتیجه برای هر $n \geq 1$، $Tor_n^R(A,B)=0$.

(ii $\Longleftarrow$ iii) بدیهی است.

(iii $\Longleftarrow$ i) اگر $f: E \longrightarrow K$ یک به یک باشد آنگاه رشته‌ی دقیق کوتاه زیر را در نظر بگیرید

$$0 \longrightarrow E \longrightarrow K \longrightarrow \frac{K}{Imf} \longrightarrow 0$$

حال رشته‌ی دقیق زیر را داریم

$$Tor_1^R(A,E) \longrightarrow Tor_1^R(A,K) \longrightarrow Tor_1^R(A,\frac{K}{Imf}) \longrightarrow A\otimes_R E \longrightarrow A\otimes_R K$$

بنا به فرض $Tor_1^R(A,K/Imf)=0$ در نتیجه $A\otimes_R E \xrightarrow{1\otimes f} A\otimes_R K$ یک به یک است. $\square$

نکته. به راحتی دیده می‌شود که دو تعریف $Tor_1^R(A,B)$ معادلند.

اگر $0 \longrightarrow A' \longrightarrow A \longrightarrow A'' \longrightarrow 0$ رشته‌ی دقیق کوتاه باشد با محاسبات طولانی مشابه قبل رشته‌ی دقیق زیر به‌دست می‌آید

$$\cdots \longrightarrow Tor_2^R(A'',B) \longrightarrow Tor_1^R(A',B) \longrightarrow Tor_1^R(A,B) \longrightarrow Tor_1^R(A'',B) \longrightarrow Tor_0^R(A',B)$$

$$\longrightarrow Tor_0^R(A,B) \longrightarrow Tor_0^R(A'',B) \longrightarrow 0$$

تمرین ۴۰. اگر A و B گروه‌های آبلی باشند ثابت کنید $Tor_1^{\mathbb{Z}}(A,B)$ گروهی تابدار است (Rـمدول A را تابدار گوییم هرگاه برای هر $a\in A$ وجود داشته باشد $0\neq r\in R$ به طوری که، $ra=0$. ثابت می‌شود اگر R جابجایی باشد $Tor_n^R(A,B)$ تابدار است).

۸ ایده‌آل‌های اول و اولیه

یادآوری. فرض کنید R یک حلقه باشد. زیرمجموعه‌ی ناتهی S از R را یک زیرمجموعه‌ی بسته‌ی ضربی نامند هرگاه برای هر $s_1, s_2 \in S$، $s_1 s_2 \in S$ باشد.

قضیه ۸—۱. فرض کنید R حلقه‌ای دلخواه بوده و I ایده‌آلی از R و S یک زیرمجموعه‌ی بسته ضربی R باشد به طوری که $I \cap S = \emptyset$. در این صورت ایده‌آل P از R وجود دارد که در میان ایده‌آل‌هایی که با S اشتراک ندارند و شامل I می‌باشند ماکسیمال است و به علاوه P ایده‌آلی اول است.

تعریف ۸—۲. اگر I یک ایده‌آل از حلقه‌ی جابجایی R باشد در این صورت رادیکال I را چنین تعریف می‌کنیم

$$\sqrt{I} = r(I) = \{x \in R \mid \exists\, n \in \mathbb{N}, x^n \in I\}$$

به راحتی دیده می‌شود که $r(I)$ همواره ایده‌آلی از R است. در نتیجه $r(0) = \{$ عناصر پوچ‌توان $\}$. همچنین همواره داریم $I \subseteq r(I)$.

مثال. اگر $R = \mathbb{Z}$ و $I = \langle p_1^{\alpha_1}, p_2^{\alpha_2}, \ldots, p_k^{\alpha_k} \rangle$ در این صورت $r(I) = \langle p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_k^{\alpha_k} \rangle$

نکته. اگر R حلقه‌ای دلخواه باشد (نه لزوماً جابجایی)، آنگاه $S \subseteq R$ را یک mـسیستم[۳۸] گوییم هرگاه برای هر $s_1, s_2 \in S$ وجود داشته باشد $r \in R$ به طوری که $s_1 r s_2 \in S$. حال اگر R غیر جابجایی باشد آنگاه رادیکال I به صورت $\sqrt{I} = \{s \in R \mid$ هر mـسیستم شامل s با I اشتراک داشته باشد$\}$ تعریف می‌شود.

قضیه ۸—۳. اگر R حلقه‌ای جابجایی بوده و I ایده‌آلی از R باشد آنگاه $r(I) = \bigcap_P P$ که P اول است و $I \subseteq P$. مخصوصاً $r(0) = \bigcap_P P$ که P اول است.

لم ۸—۴. خواص زیر در مورد هر دو ایده‌آل I و J برقرار است

i) $r(r(I)) = r(I)$.

ii) $r(IJ) = r(I) \cap r(J) = r(I \cap J)$.

[۳۸] m-system

اثبات. نشان می‌دهیم $r(IJ) = r(I) \cap r(J)$. چون $IJ \subseteq I$ پس $r(IJ) \subseteq r(I)$ و به همین ترتیب $r(IJ) \subseteq r(J)$. پس $r(IJ) \subseteq r(I) \cap r(J)$. برعکس اگر $x \in r(I) \cap r(J)$ آنگاه وجود دارد n, m ای که $x^n \in I$ و $x^m \in J$ پس $x^{n+m} = x^n x^m \in IJ$ و لذا $x \in r(IJ)$. □

تعریف ۸—۵. فرض کنید R حلقه‌ای جابجایی باشد. ایده‌آل $Q \neq R$ را یک ایده‌آل اولیه[۳۹] گویند هرگاه اگر $xy \in Q$ و $x \notin Q$ آنگاه وجود داشته باشد عدد طبیعی n به طوری که $y^n \in Q$.

نکته. طبق تعریف هر ایده‌آل اول، اولیه است زیرا اگر $xy \in P$ و $x \notin P$ آنگاه $y \in P$ ولی توجه کنید که یک ایده‌آل ممکن است اولیه باشد ولی اول نباشد. به عنوان مثال قرار دهید $Q = \langle ۴ \rangle$. Q در $\mathbb{Z}$ اولیه است ولی اول نیست.

نکته. ایده‌آل‌های اولیه $\mathbb{Z}$ به صورت $\langle p^n \rangle$ می‌باشند که p اول است. زیرا اگر $xy \in \langle p^n \rangle$ و $x \notin \langle p^n \rangle$ آنگاه $p|y$ و در نتیجه $p^n|y^n$ و لذا $y^n \in \langle p^n \rangle$. برعکس اگر $I = \langle p_۱^{\alpha_۱} p_۲^{\alpha_۲} \dots p_k^{\alpha_k} \rangle$ و $k > ۱$ و p_i ها نیز متمایز باشند آنگاه I اولیه نیست زیرا قرار دهید $y = p_۲^{\alpha_۲} \dots p_k^{\alpha_k}$ و $x = p_۱^{\alpha_۱}$. حال $xy \in I$ و $x \notin I$. واضح است که به‌ازای هر n، $y^n \notin I$ در نتیجه I اولیه نیست.

مثال. قرار دهید $I = \langle x^۲, y \rangle$ و $R = F[x, y]$ که F یک میدان است. در این صورت I اولیه است ولی اول نمی‌باشد. I اول نیست زیرا $xx \in I$ و $x \notin I$. زیرا اگر $x \in I$ آنگاه $x = f(x, y)x^۲ + g(x, y)y$. حال قرار دهید $y = ۰$ در نتیجه $x = f(x, ۰)x^۲$ و لذا $x^۲|x$ که تناقض است. ولی $\langle x^۲, y \rangle$ اولیه است زیرا از طرفی چون $x \notin \langle x^۲, y \rangle$ پس $\langle x^۲, y \rangle \neq F[x, y]$ و از طرف دیگر فرض کنید $f_۱(x, y)f_۲(x, y) \in \langle x^۲, y \rangle$ و $f_۱(x, y) \notin \langle x^۲, y \rangle$ حال $f_۱(x, y)f_۲(x, y) = g(x, y)x^۲ + h(x, y)y$. قرار دهید $y = ۰$ در نتیجه $x^۲|f_۱(x, ۰)f_۲(x, ۰)$. اگر $x \nmid f_۲(x, ۰)$ چون داریم $f_۱(x, y) = x\ell_۱(x) + y\ell_۲(x, y) + a$ پس $f_۱(x, ۰) = x\ell_۱(x) + a$ و لذا چون $x^۲|f_۱(x, ۰)$ پس $a = ۰$ و لذا $x|\ell_۱(x)$. در نتیجه $f_۱(x, y) \in \langle x^۲, y \rangle$ و این با فرض در تناقض است. پس $x|f_۲(x, ۰)$. اما $f_۲(x, y) = xk_۱(x) + yk_۲(x, y)$ در نتیجه $f_۲^۲ \in I$.

قضیه ۸—۶. اگر R جابجایی بوده و Q ایده‌آلی اولیه باشد آنگاه $r(Q)$ ایده‌آل اول است.

[۳۹] primary

اثبات. $1 \notin r(Q)$ زیرا در غیر این صورت $1^n = 1 \in Q$ و در نتیجه $Q = R$ که تناقض است پس $r(Q) \neq R$.
اگر $xy \in r(Q)$ و $x \notin r(Q)$ آنگاه به‌ازای هر n ای، $x^n \notin Q$، ولی وجود دارد m ای که $(xy)^m \in Q$ پس $x^m y^m \in Q$ و $x^m \notin Q$ و Q اولیه است در نتیجه $y^{mk} \in Q$ در نتیجه $y \in r(Q)$ پس $r(Q)$ اول است. □

نکته. عکس این قضیه درست نمی‌باشد. زیرا $I = \langle x^2, xy \rangle$ را در $F[x,y]$ نظر بگیرید. I اولیه نیست زیرا اگر $xy \in I$ و $x \notin I$ آنگاه به ازای هر n، $y^n \notin I$ زیرا در غیر این صورت $y^n = f(x,y)x^2 + g(x,y)xy$. حال قرار دهید $x = 0$، به‌دست می‌آوریم $y^n = 0$. اما $\langle x^2, xy \rangle \subseteq x$ پس $r(\langle x^2, xy \rangle) \subseteq r(\langle x \rangle) = \langle x \rangle$ از طرفی $x^2 \subseteq \langle x^2, xy \rangle$ و در نتیجه

$$r(\langle x \rangle) = r(\langle x \rangle) \cap r(\langle x \rangle) = r(\langle x^2 \rangle) \subseteq r(\langle x^2, xy \rangle)$$

لذا به‌دست می‌آوریم $r(\langle x^2, xy \rangle) = r(\langle x \rangle) = \langle x \rangle$.

نکته. اگر P اول باشد آنگاه $r(P) = P$. زیرا $r(P) = \bigcap_{P_1} P_1$ که P_1 شامل P است ولی یکی از P_1 ها خود P است پس $r(P) = P$.

نکته. هر ایده‌آل I لزوماً اشتراک تعدادی متناهی ایده‌آل اول نیست. به عنوان مثال در $F[x]$ فرض کنید $\langle x^2 \rangle = \bigcap P$. پس برای هر P، $x^2 \in P$ و لذا $x \in P$ پس $x \in \bigcap P = \langle x^2 \rangle$ و این تناقض است زیرا $x \notin \langle x^2 \rangle$.

تمرین ۳۵. فرض کنید R حلقه‌ای جابجایی بوده و Q ایده‌آلی از R و $r(Q)$ ایده‌آل ماکسیمال R باشد. ثابت کنید Q اولیه است.

لم ۸—۷. فرض کنید R حلقه‌ای جابجایی بوده و Q یک ایده‌آل آن باشد، در این صورت Q اولیه است اگر و تنها اگر $R/Q \neq 0$ و هر مقسوم‌علیه صفر آن پوچ‌توان باشد.

اثبات. فرض کنید Q اولیه و $Q + x$ یک مقسوم‌علیه صفر R/Q باشد. در نتیجه وجود دارد $Q + y$ که $y \notin Q$ و $Q + xy = (Q + x)(Q + y) = 0$ در نتیجه $xy \in Q$. چون $y \notin Q$ در نتیجه وجود دارد n ای که $x^n \in Q$ پس $(Q + x)^n = 0$ یعنی $Q + x$ پوچ‌توان است.

برعکس چون $R/Q \neq 0$ پس $R \neq Q$. حال فرض کنید $xy \in Q$ و $x \notin Q$ پس

$$(Q+x)(Q+y) = Q + xy = 0$$

چون $Q + x \neq 0$ پس $Q + y$ مقسوم‌علیه صفر است و طبق فرض پوچ‌توان است. پس وجود دارد n ای که $(Q+y)^n = 0$ پس $y^n \in Q$ و لذا Q اولیه است. □

مثال. نشان دهید $Q = \langle x^2, y\rangle$ ایده‌آل اولیه‌ای از $F[x,y]$ است. اولاً واضح است که $Q \neq F[x,y]$ و $F[x,y]/\langle x^2, y\rangle \simeq F[x]/\langle x^2\rangle$. فرض کنید $\langle x^2\rangle + f(x)$ یک مقسوم‌علیه صفر باشد در نتیجه

$$(\langle x^2\rangle + f(x))(\langle x^2\rangle + g(x)) = 0$$

و لذا $x^2 | f(x)g(x)$. ولی $x^2 \nmid g(x)$ پس $x | f(x)$ بنابراین $(\langle x^2\rangle + f(x))^2 = 0$ و لذا طبق لم $\langle x^2, y\rangle$ اولیه است.

تعریف ۸—۸. اگر Q یک ایده‌آل اولیه باشد و $r(Q) = P$، در این صورت P را ایده‌آل اول وابسته به Q نامند و گوییم Q یک ایده‌آل Pـاولیه است.

قضیه ۸—۹. اگر P و Q ایده‌آل‌هایی از حلقه‌ی جابجایی R باشند و $Q \neq R$ آنگاه Q، Pـاولیه است اگر و تنها اگر دو شرط زیر برقرار باشند

i) $Q \subseteq P \subseteq r(Q)$.

ii) $ab \in Q$ و $a \notin Q$ نتیجه دهد $b \in P$.

اثبات. اگر Q، Pـاولیه باشد در این صورت داریم، $Q \subseteq P = r(Q)$ حال اگر $ab \in Q$ و $a \notin Q$، در نتیجه وجود دارد n ای که $b^n \in Q$ پس $b \in r(Q) = P$.

برعکس فرض کنید $xy \in Q$ و $x \notin Q$. طبق فرض $y \in P \subseteq r(Q)$ و لذا وجود دارد n ای که $y^n \in Q$. پس Q اولیه است. حال نشان می‌دهیم $r(Q) = P$. طبق فرض $P \subseteq r(Q)$. حال فرض کنید $x \in r(Q)$ در نتیجه وجود دارد n ای که $x^n \in Q$. کوچکترین n ای را در نظر بگیرید که $x^n \in Q$ بنابراین $x^{n-1} \notin Q$. حال $xx^{n-1} \in Q$ در نتیجه طبق فرض $x \in P$ و بنابراین $P = r(Q)$. □

قضیه ۸—۱۰. فرض کنید برای $1 \le i \le n$، Q_i ایده‌آل Pـاولیه‌ای از R باشد در این صورت $\bigcap_{i=1}^{n} Q_i$ یک ایده‌آل Pـاولیه است.

اثبات. اولاً $\bigcap_{i=1}^{n} Q_i \neq R$ زیرا برای هر i، $Q_i \neq R$ و ثانیاً چون $r(\bigcap_{i=1}^{n} Q_i) = \bigcap_{i=1}^{n} r(Q_i) = P$ پس

$$\bigcap_{i=1}^{n} Q_i \subseteq r(\bigcap_{i=1}^{n} Q_i) = P$$

پس شرط (i) قضیه قبل برقرار است. حال اگر $ab \in \bigcap_{i=1}^{n} Q_i$ و $a \notin \bigcap_{i=1}^{n} Q_i$ در نتیجه وجود دارد j ای که $a \notin Q_j$. از طرفی $ab \in Q_j$، از قضیه قبل چون Q_j، Pـاولیه است پس $b \in P$ بنابراین شرط (ii) قضیه قبل هم برقرار است و در نتیجه $\bigcap_{i=1}^{n} Q_i$، Pـاولیه است. □

نکته. قضیه قبل برای ایده‌آل‌های اولیه درست نیست. زیرا $2\mathbb{Z}$ و $3\mathbb{Z}$ اولیه‌اند در حالی که $2\mathbb{Z} \cap 3\mathbb{Z} = 6\mathbb{Z}$ اولیه نیست.

تعریف ۸—۱۱. فرض کنید R حلقه‌ای جابجایی باشد. گوییم ایده‌آل I دارای تجزیه اولیه[40] است اگر وجود داشته باشند ایده‌آل‌های اولیه‌ی Q_i به طوری که $I = \bigcap_{i=1}^{n} Q_i$. به علاوه اگر به‌ازای هر $1 \le j \le n$ داشته باشیم $\bigcap_{i=1, i\neq j}^{n} Q_i \nsubseteq Q_j$ و به‌ازای هر $1 \le k, j \le n$ و $k \neq j$، $r(Q_k) \neq r(Q_j)$ آنگاه تجزیه را کاهش یافته گویند.

سؤال. آیا در یک حلقه جابجایی، هر ایده‌آل نابدیهی به صورت اشتراک تعداد متناهی ایده‌آل اولیه است؟

تمرین ۳۶. حلقه‌ای جابجایی مانند R مثال بزنید که ایده‌آلی مانند $I \neq R$ داشته باشد که تجزیه اولیه نداشته باشد.

سؤال. آیا در هر حلقه‌ی جابجایی، هر ایده‌آل نابدیهی اشتراک تعداد نامتناهی ایده‌آل اولیه می‌باشد؟

نکته. اگر I دارای یک تجزیه اولیه باشد در این صورت دارای یک تجزیه اولیه‌ی کاهش یافته نیز می‌باشد. زیرا اگر $\bigcap_{i=1, i\neq j}^{n} Q_i \subseteq Q_j$ در این صورت Q_j در اشتراک تأثیری ندارد و می‌توان آن را حذف کرد. به علاوه اگر تمام ایده‌آل‌های اولیه ظاهر شده در تجزیه را در نظر بگیریم که رادیکال آنها مساوی بوده و مثلاً P باشد

[40] primary decomposition

آنگاه بنابر قضیه قبل اشتراک آنها نیز Pـاولیه است. لذا می‌توان فرض کرد که اگر $i \neq j$ آنگاه $r(Q_i) \neq r(Q_j)$.

مثال. فرض کنید $R = F[x, y]$ و $I = \langle x^2, y\rangle$. ادعا می‌کنیم $I = \langle x\rangle \cap \langle x^2, y\rangle$. قبلاً دیدیم $\langle x^2, y\rangle$ اولیه است. از طرفی چون $\langle x\rangle$ اول است پس اولیه نیز می‌باشد. واضح است که $I \subseteq \langle x\rangle \cap \langle x^2, y\rangle$. حال اگر $f(x, y) \in \langle x\rangle \cap \langle x^2, y\rangle$ در این صورت $f(x, y) = x^2 g(x, y) + yh(x, y)$. چون $x|f(x, y)$ پس $x|h(x, y)$ و در نتیجه $f(x, y) \in I$. اما این تجزیه یکتا نیست زیرا داریم $I = \langle x\rangle \cap \langle x^2, xy, y^2\rangle$. واضح است که $I \subseteq \langle x\rangle$ و $I \subseteq \langle x^2, xy, y^2\rangle$ پس $I \subseteq \langle x\rangle \cap \langle x^2, xy, y^2\rangle$. طرف دیگر نیز مشابه قبل ثابت می‌شود. اما $\langle x^2, xy, y^2\rangle$ اولیه است زیرا $\langle x^2, xy, y^2\rangle \subseteq \langle x, y\rangle$ و

$$\langle x, y\rangle^2 = \langle fx + gy\rangle\langle kx + hy\rangle \subseteq \langle x^2, xy, y^2\rangle$$

در نتیجه $\langle x, y\rangle^2 \subseteq \langle x^2, xy, y^2\rangle \subseteq \langle x, y\rangle$ و لذا $\langle x, y\rangle \subseteq r\langle x^2, xy, y^2\rangle \subseteq \langle x, y\rangle$ در نتیجه $r\langle x^2, xy, y^2\rangle = \langle x, y\rangle$ اما چون $\langle x, y\rangle$ ماکسیمال است پس طبق تمرین ۳۵، $\langle x^2, xy, y^2\rangle$ اولیه است پس دو تجزیه‌ی اولیه برای I به‌دست آوریم. توجه کنید که هر دو تجزیه کاهش‌یافته می‌باشند.

نکته. پارامترهایی که در تجزیه‌های کاهش‌یافته مختلف یک ایده‌آل ثابتند، عبارتند از

۱) تعداد ایده‌آل‌های اولیه که در تجزیه می‌آیند.

۲) اگر $I = \bigcap_{i=1}^{n} Q_i = \bigcap_{i=1}^{n} Q'_i$ آنگاه داریم $\{r(Q_i) \mid 1 \leq i \leq n\} = \{r(Q'_i) \mid 1 \leq i \leq n\}$.

۳) Q_i هایی که رادیکال آنها در مجموعه‌ی $\{r(Q_1), \ldots, r(Q_n)\}$ مینیمال است در هر تجزیه‌ای از I ظاهر می‌شوند.

همچنین ثابت می‌شود در هر حلقه‌ی نوتری هر ایده‌آلی دارای تجزیه اولیه است (برای اثبات به فصل ۴ کتاب جبر جابجایی ATIYAH مراجعه کنید).

۹ کتگوری

تعریف ۹—۱ . یک کتگوری $\mathcal{C}$[۴۱] کلاسی از اشیاء مانند A، B، C، ... است همراه با

i) مجموعه‌های مجزای $Hom(A,B)$ به‌ازای هر دو شیء A و B از $\mathcal{C}$. عناصر $Hom(A,B)$ را ریخت [۴۲] می‌نامند و با نماد $f: A \longrightarrow B$ نشان می‌دهند.

ii) برای هر سه شیء A، B، و C (نه لزوماً متمایز) وجود دارد تابع

$$\begin{cases} Hom(B,C) \times Hom(A,B) \longrightarrow Hom(A,C) \\ (g,f) \longrightarrow g \circ f \end{cases}$$

$g \circ f$ را ترکیب g و f می‌نامند. این تابع دارای خواص زیر است

۱) شرکت‌پذیری. یعنی اگر $f: A \longrightarrow B$، $g: B \longrightarrow C$، و $h: C \longrightarrow D$ آنگاه

$$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$$

۲) عنصر همانی. برای هر شیء B از $\mathcal{C}$ وجود داشته باشد ریخت $1_B: B \longrightarrow B$ به طوری که برای هر $f: A \longrightarrow B$ و هر $g: B \longrightarrow C$، $1_B \circ f = f$ و $g \circ 1_B = g$. 1_B را ریخت همانی B گویند.

واضح است که ریخت همانی هر شیء B یکتا است. زیرا

$$1_B = 1_B \circ 1_{B'} = 1_{B'}$$

ریخت $f: A \longrightarrow B$ را یک هم‌ارزی گوییم هرگاه وجود داشته باشد ریخت $g: B \longrightarrow A$ به طوری که $g \circ f = 1_A$ و $f \circ g = 1_B$.

گوییم دو شیء A و B در کتگوری $\mathcal{C}$ هم‌ارزند هرگاه وجود داشته باشد هم‌ارزی $f: A \longrightarrow B$. اگر A با B هم‌ارز باشند آنگاه واضح است که B هم با A هم‌ارز است. اگر $f \circ g = 1_B$ و $g \circ f = 1_A$ آنگاه گوییم f

---
[۴۱] category
[۴۲] morphism

وارون‌پذیر است و g را وارون f نامیده و با $g = f^{-1}$ نشان می‌دهیم. واضح است که عنصر وارون در صورت وجود یکتاست.

مثال ۱. فرض کنید اشیاء $\mathcal{C}$ تمام مجموعه‌ها باشند و به‌ازای هر دو مجموعه‌ی A و B تعریف می‌کنیم

$$Hom(A,B) = \{f : A \longrightarrow B \mid \text{تابعی دلخواه } f\}$$

تابع ترکیب زیر

$$Hom(B,C) \times Hom(A,B) \longrightarrow Hom(A,C)$$

به صورت ترکیب عادی توابع تعریف می‌شود. ترکیب توابع شرکت‌پذیر است. به‌ازای هر مجموعه‌ی B تابع همانی $1_B : B \longrightarrow B$ ریخت همانی B است. پس $\mathcal{C}$ یک کتگوری است.

مثال ۲. فرض کنید اشیاء $\mathcal{C}$ گروه‌های آبلی باشند و به‌ازای هر دو گروه آبلی A و B تعریف کنید

$$Hom(A,B) = Hom_{\mathbb{Z}}(A,B)$$

تابع ترکیب را همان ترکیب عادی توابع تعریف کنید. چون هر هomomorفیسم یک تابع است پس $\mathcal{C}$ کتگوری است.

مثال ۳. فرض کنید اشیاء $\mathcal{C}$ فضاهای توپولوژیک و

$$Hom(A,B) = \{f : A \longrightarrow B \mid \text{تابعی پیوسته است } f\}$$

تابع ترکیب را همان ترکیب عادی توابع تعریف کنید. به راحتی دیده می‌شود که $\mathcal{C}$ یک کتگوری است.

مثال ۴. فرض کنید اشیاء $\mathcal{C}$ تمام مجموعه‌های جزیی مرتب باشند و به‌ازای $(A, \leq)$ و $(B, \leq')$ تعریف کنید

$$Hom(A,B) = \{f : A \longrightarrow B \mid x \leq y \Longrightarrow f(x) \leq' f(y)\}$$

تابع ترکیب را همان ترکیب عادی توابع تعریف کنید. چون ترکیب توابع صعودی، صعودی است و نیز تابع همانی صعودی است پس $\mathcal{C}$ کتگوری است.

مثال ۵. فرض کنید G یک گروه بوده و $\mathcal{C}$ فقط یک شیء داشته باشد که آن G است. تعریف می‌کنیم $Hom(G, G) = G$.

$$\begin{cases} \circ : Hom(G,G) \times Hom(G,G) \longrightarrow Hom(G,G) = G \\ (g_۱, g_۲) \longrightarrow g_۱ g_۲ \end{cases}$$

چون ضرب گروه شرکت‌پذیر است، ترکیب شرکت‌پذیر است. e_G که عضو خنثی G است، ریخت همانی است. چون هر عنصر وارون‌پذیر است هم‌ارزی‌ها تمام عناصر G می‌باشند در نتیجه $\mathcal{C}$ یک کتگوری است.

تعریف ۹−۲. فرض کنید $\mathcal{C}$ و $\mathcal{D}$ دو کتگوری باشند منظور از یک فانکتور همورد[۴۳] از $\mathcal{C}$ به $\mathcal{D}$ زوجی از توابع است که هر دو را با T نشان می‌دهیم یکی تابع شیء که به هر شیء از $\mathcal{C}$ یک شیء از $\mathcal{D}$ را نسبت می‌دهد و دیگری تابع ریخت که به هر ریخت $f : A \longrightarrow B$ از $\mathcal{C}$ ریخت $T(f) : T(A) \longrightarrow T(B)$ از $\mathcal{D}$ را نسبت می‌دهد و T دارای خواص زیر است

i) به‌ازای هر ریخت همانی ۱_B داریم $T(۱_B) = ۱_{T(B)}$.

ii) اگر برای هر دو ریخت f و g از $\mathcal{C}$ ترکیب توابع g و f معنی داشته باشد آنگاه داشته باشیم $T(g \circ f) = T(g) \circ T(f)$.

مثال ۱. قرار دهید $\mathcal{C} = \mathcal{D}$ و به هر شیء خودش را نسبت دهید و همین طور به هر ریخت خودش را نسبت دهید، در این صورت T فانکتوری همورد از $\mathcal{C}$ به $\mathcal{C}$ است.

مثال ۲. فرض کنید A یک Rـمدول بوده و $\mathcal{C}$ کتگوری تمام Rـمدول‌ها و Rـهمومورفیسم‌ها باشد. فرض کنید $\mathcal{D}$ کتگوری تمام گروه‌های آبلی و $\mathbb{Z}$ـمدول همومورفیسم‌ها باشد. حال فانکتور T را چنین تعریف کنید $T(B) = Hom_R(A, B)$. اگر $f : B \longrightarrow C$ یک Rـمدول همومورفیسم باشد

$$\begin{cases} T(f) : T(B) = Hom_R(A,B) \longrightarrow T(C) = Hom_R(A,C) \\ T(f)(g) = f \circ g \end{cases}$$

$T(f)$ یک $\mathbb{Z}$ـمدول همومورفیسم است.

$$\begin{cases} T(۱_B)(g) = ۱ \circ g = g = ۱_{T(B)} \\ T(f_۱ \circ f_۲)(g) = (f_۱ \circ f_۲) \circ g = f_۱ \circ (f_۲ \circ g) = T(f_۱) \circ T(f_۲)(g) \end{cases}$$

---
[۴۳] covariant functors

بنابراین $T(f_1 \circ f_2) = T(f_1) \circ T(f_2)$ پس T یک فانکتور همورد است.

فرض کنید $\mathcal{C}$ یک کتگوری دلخواه بوده و A شیء ثابتی از $\mathcal{C}$ باشد. فانکتور $h_A : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ که در آن $\mathcal{D}$ کتگوری تمام مجموعه‌هاست را چنین تعریف کنید

$$h_A(B) = Hom(A, B)$$

فرض کنید $f : B \longrightarrow C$ یک ریخت در $\mathcal{C}$ باشد در این صورت

$$\begin{cases} h_A(f) : h_A(B) \longrightarrow h_A(C) \\ h_A(f)(g) = f \circ g \end{cases}$$

داریم $h_A(1) = 1$ و $h_A(f_1 \circ f_2) = h_A(f_1) \circ h_A(f_2)$ پس h_A فانکتوری همورد از $\mathcal{C}$ به $\mathcal{D}$ است که آن را فانکتور همورد Hom نامند.

تعریف ۹—۳. فرض کنید $\mathcal{C}$ و $\mathcal{D}$ دو کتگوری باشند در این صورت منظور از فانکتور پادورد[۴۴] $S : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ زوجی از توابع است که هر دوی آنها را با S نمایش می‌دهیم یکی تابع شیء که به هر شیء C از $\mathcal{C}$ یک شیء $S(C)$ از $\mathcal{D}$ را نسبت می‌دهد و دیگری تابع ریخت که به هر ریخت $f : A \longrightarrow B$ از $\mathcal{C}$ ریخت $S(f) : S(B) \longrightarrow S(A)$ از $\mathcal{D}$ را نسبت می‌دهد و S دارای خواص زیر است

i) به‌ازای هر ریخت همانی 1_B داریم $S(1_B) = 1_{S(B)}$.

ii) اگر برای هر دو ریخت f و g از $\mathcal{C}$، ترکیب توابع g و f معنی داشته باشد آنگاه داشته باشیم $S(f \circ g) = S(g) \circ S(f)$.

مثال. فرض کنید B یک Rـمدول بوده و $\mathcal{C}$ کتگوری تمام Rـمدول‌ها و $\mathcal{D}$ کتگوری تمام گروه‌های آبلی باشد. تعریف کنید

$$S(A) = Hom_R(A, B) \quad (\text{برای هر } R\text{ـمدول } A)$$

اگر $f : A \longrightarrow A'$ یک Rـمدول هomomorphism باشد تعریف کنید

$$\begin{cases} S(f) : Hom_R(A', B) \longrightarrow Hom_R(A, B) \\ S(f)(g) = g \circ f \end{cases}$$

---

[۴۴] contravariant functors

داریم $S(1) = 1$ و $S(f_1 \circ f_2) = S(f_2) \circ S(f_1)$، بنابراین S یک فانکتور پادورد است.

فرض کنید $\mathcal{C}$ یک کتگوری باشد در این صورت کتگوری متقابل[۴۵] $\mathcal{C}$ به صورت زیر تعریف می‌شود و با $\mathcal{C}^{op}$ نشان داده می‌شود.

اشیاء $\mathcal{C}^{op}$ همان اشیاء $\mathcal{C}$ هستند. تعریف می‌کنیم $Hom_{\mathcal{C}^{op}}(A, B) = Hom_{\mathcal{C}}(B, A)$

$$\begin{cases} Hom_{\mathcal{C}^{op}}(B, C) \times Hom_{\mathcal{C}^{op}}(A, B) \longrightarrow Hom_{\mathcal{C}^{op}}(A, C) \\ (f^{op}, g^{op}) \longrightarrow g^{op} \circ f^{op} \end{cases}$$

اگر $\mathcal{C}$ و $\mathcal{D}$ دو کتگوری باشند، کتگوری حاصل‌ضرب $\mathcal{C}$ و $\mathcal{D}$ چنین تعریف می‌شود. اشیاء $\mathcal{C} \times \mathcal{D}$ به شکل (C, D) هایی است که C شیء $\mathcal{C}$ و D شیء $\mathcal{D}$ است و ریخت‌ها به صورت زیر تعریف می‌شوند

$$Hom(C_1 \times D_1, C_2 \times D_2) = Hom(C_1, C_2) \times Hom(D_1, D_2)$$

به راحتی دیده می‌شود خواص کتگوری در مورد $\mathcal{C} \times \mathcal{D}$ برقرار است.

تعریف ۹—۴. یک کتگوری $\mathcal{C}$ همراه با تابع σ که به هر شیء A از $\mathcal{C}$ مجموعه $\sigma(A)$ را نسبت می‌دهد، ملموس[۴۶] نامیده می‌شود هرگاه دارای سه شرط زیر باشد

i) هر ریخت $f : A \longrightarrow B$ از $\mathcal{C}$ تابعی از $\sigma(A)$ به $\sigma(B)$ باشد.

ii) برای هر شیء C از $\mathcal{C}$ ریخت همانی 1_C تابع همانی روی $\sigma(C)$ باشد.

iii) ترکیب هر دو ریخت (اگر ترکیب معنی داشته باشد) با ترکیب عادی توابع مطابقت داشته باشد.

سؤال. مثالی بزنید که شرایط i و ii برقرار باشد ولی شرط iii برقرار نباشد.

جواب. قرار دهید $\mathcal{C} = \{A\}$ و $\sigma(A) = A$. حال $Hom(A, A)$ را تمام توابع فرض کنید و تعریف کنید

$$\begin{cases} Hom(A, A) * Hom(A, A) \longrightarrow Hom(A, A) \\ f * g = g \circ f \end{cases}$$

سؤال. مثالی بزنید که شرایط i و iii برقرار باشد ولی شرط ii برقرار نباشد.

[۴۵] opposite
[۴۶] concrete

مثال. $\mathcal{C}$ کتگوری گروه‌های آبلی و $\sigma(G)=G$ در این صورت به وضوح $\mathcal{C}$ و σ یک کتگوری ملموس است.

مثال. فرض کنید $\mathcal{C}$ فقط یک شیء مثلاً گروه G را داشته باشد و $Hom(G,G)=G$، اگر $\sigma(G)=G$ در این صورت $\mathcal{C}$ و σ کتگوری ملموس نمی‌باشد زیرا اگر $f\in Hom(G,G)=G$ آنگاه f تابعی از G به G نیست.

سؤال. آیا هر کتگوری غیر ملموس با یک کتگوری ملموس هم‌ارز است؛ یعنی، آیا وجود دارد فانکتور همورد $T:\mathcal{C}\longrightarrow\mathcal{D}$ که وارون‌پذیر باشد؟

سؤال. آیا برای هر کتگوری $\mathcal{C}$ وجود دارد تابع σ به طوری که $\mathcal{C}$ و σ تشکیل یک کتگوری ملموس دهند؟

تعریف ۹—۵. فرض کنید $\mathcal{C}$ یک کتگوری ملموس باشد و F یک شیء در $\mathcal{C}$ باشد. اگر وجود داشته باشد مجموعه‌ی $X\neq\emptyset$ و تابع $i:X\longrightarrow F$ به طوری که برای هر شیء A از $\mathcal{C}$ و هر تابع $f:X\longrightarrow A$ ریخت یکتای $\overline{f}:F\longrightarrow A$ یافت شود به قسمی که $\overline{f}i=f$ (به عنوان ترکیب توابع) آنگاه گوییم F روی X آزاد است.
به عبارت دیگر دیاگرام زیر جابجایی باشد

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{i} & F \\ f\downarrow & & \\ A & & \end{array}$$

مثال ۱. $\mathcal{C}$ کتگوری گروه‌های آبلی است در این صورت $\mathbb{Z}$ روی $X=\{۱\}$ آزاد است، زیرا قرار دهید $\left\{\begin{array}{l} i:X\longrightarrow\mathbb{Z} \\ i(۱)=۱\end{array}\right.$. اگر G گروهی آبلی و دلخواه باشد $\overline{f}(n)=nf(۱)$.

$$\begin{array}{ccc} \{۱\} & \xrightarrow{i} & \mathbb{Z} \\ f\downarrow & & \\ G & & \end{array}$$

$\overline{f}$ ریخت کتگوری است زیرا $\overline{f}$ هومورفیسم است. $\overline{f}$ یکتاست زیرا $\overline{f}i(۱)=f(۱)$ پس $\overline{f}(۱)=f(۱)$ و چون $\overline{f}$ هومورفیسم است اثرش روی هر عنصر $\mathbb{Z}$ مشخص می‌شود.

مثال ۲. در کتگوری مثال قبل $\mathbb{Q}$ روی هیچ X ای آزاد نیست. زیرا فرض کنید $G=\mathbb{Z}_۲$ و $X\neq\emptyset$. $x_۱\in X$

بگیرید و تعریف کنید $f(x_۱) = ۱$ و به‌ازای بقیه‌ی x ها صفر تعریف کنید

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{i} & \mathbb{Q} \\ f\downarrow & & \\ \mathbb{Z}_۲ & & \end{array}$$

در نتیجه $\overline{f}(y) = \overline{f}(۲ \times (y/۲)) = ۲\overline{f}(y/۲) = ۰$ پس $\overline{f}i(x_۱) = ۰$ در نتیجه $f(x_۱) = ۰$ که این تناقض است.

قضیه ۹—۶. فرض کنید $\mathcal{C}$ یک کتگوری ملموس بوده و F و F' اشیایی از $\mathcal{C}$ باشند به طوری که F روی X و F' روی X' آزاد باشد و $|X| = |X'|$ در این صورت F و F' هم‌ارزند.

اثبات. چون $|X| = |X'|$ لذا وجود دارد تابع وارون‌پذیر $f : X \longrightarrow X'$. فرض کنید $i : X \longrightarrow F$ و $i' : X' \longrightarrow F'$ توابع مربوط به آزاد بودن باشند. دیاگرام زیر را در نظر بگیرید

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{i} & F \\ f\downarrow & & \\ X' & & \\ i'\downarrow & & \\ F' & & \end{array}$$

چون F روی X آزاد است وجود دارد ریخت $\overline{f_۱}$ در $\mathcal{C}$ به طوری که $\overline{f_۱}i = i'f$. حال دیاگرام زیر را در نظر بگیرید. چون F' روی X' آزاد است وجود دارد ریخت یکتای $\overline{f_۲}$ از $\mathcal{C}$ به طوری که $\overline{f_۲}i' = if^{-۱}$.

$$\begin{array}{ccc} X' & \xrightarrow{i'} & F' \\ f^{-۱}\downarrow & & \\ X & & \\ i\downarrow & & \\ F & & \end{array}$$

داریم

$$\overline{f_۲f_۱}i = \overline{f_۲}i'f \Longrightarrow \overline{f_۲f_۱}i = if^{-۱}f = i$$

به طریق مشابه $\overline{f_1 f_2} i' = i'$ حال دیاگرام زیر را در نظر بگیرید

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{i} & F \\ i \downarrow & & \\ F & & \end{array}$$

به دلیل آزاد بودن F روی X وجود دارد ریخت یکتای $g : F \longrightarrow F$ که دیاگرام جابجایی است و چون 1_F دیاگرام را جابجایی می‌کند در نتیجه $1_F = g$. ولی $\overline{f_2 f_1} : F \longrightarrow F$ و دیاگرام را جابجایی می‌کند پس $\overline{f_2 f_1} = 1_F$ به طریق مشابه $\overline{f_1 f_2} = 1_{F'}$. پس F و F' اشیایی هم‌ارز از کتگوری $\mathcal{C}$ می‌باشند. □

تعریف ۹—۷. فرض کنید $\mathcal{C}$ و $\mathcal{D}$ دو کتگوری بوده و $T : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ و $S : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ دو فانکتور همورد باشند در این صورت تبدیل طبیعی[47] $\alpha : S \longrightarrow T$ یک تابع است به طوری که برای هر شیء C از $\mathcal{C}$ یک ریخت $\alpha_C : S(C) \longrightarrow T(C)$ از $\mathcal{D}$ را نسبت دهد به طوری که برای هر ریخت $f : C \longrightarrow C'$ در کتگوری $\mathcal{C}$ دیاگرام زیر جابجایی باشد

$$\begin{array}{ccc} S(C) & \xrightarrow{\alpha_C} & T(C) \\ S(f) \downarrow & & \downarrow T(f) \\ S(C') & \xrightarrow{\alpha_{C'}} & T(C') \end{array}$$

اگر برای هر شیء C از $\mathcal{C}$، α_C یک هم‌ارزی باشد آنگاه α را یک ایزومورفیسم طبیعی از فانکتورهای S و T نامند. به طریق مشابه یک تبدیل طبیعی β، $\beta : S \longrightarrow T$، که در آن S و T فانکتورهای پادورد هستند به صورت زیر تعریف می‌شود

$$\begin{array}{ccc} S(C) & \xrightarrow{\beta_C} & T(C) \\ S(f) \downarrow & & \downarrow T(f) \\ S(C') & \xrightarrow{\beta_{C'}} & T(C') \end{array}$$

مثال. فرض کنید B یک Rـمدول و $\mathcal{C}$ کتگوری تمام Rـمدول‌ها و $S : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}$ تابع همانی باشد، در این صورت تعریف کنید

$$\begin{cases} T : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C} \\ T(B) = R \otimes_R B \\ T(f) = 1 \otimes f \end{cases}$$

[47] natural transformation

و به‌ازای هر $C \in \mathcal{C}$ تعریف کنید

$$\begin{cases} \alpha_C : S(C) = C \longrightarrow T(C) = R \otimes_R C \\ \alpha_C(x) = ۱ \otimes x \end{cases}$$

قبلاً دیده‌ایم که α_C یک یکریختی Rـمدولی است پس α_C یک هم‌ارزی است

$$\begin{array}{ccc} C & \xrightarrow{\alpha_C} & R \otimes_R C \\ f \downarrow & & \downarrow ۱ \otimes f \\ C' & \xrightarrow{\alpha_{C'}} & R \otimes_R C \end{array}$$

به راحتی دیده می‌شود دیاگرام جابجایی است و لذا α یک یکریختی طبیعی بین فانکتورهای S و T است.