آشنایی با هندسه منیفلد

مهدی نجفی‌خواه

عضو هیات علمی دانشگاه علم و صنعت ایران

احمد رضا فروغ

عضو هیات علمی دانشگاه آزاد اسلامی

آخرین بروز رسانی: ۱۶ آذر ۱۳۹۲ [۱]

e-mail : m_nadjafikhah@iust.ac.ir, a_forough@iust.ac.ir
Web : http://webpages.iust.ac.ir/m_nadjafikhah
Last edition of this book : http://webpages.iust.ac.ir/m_nadjafikhah/NDEB.htm

فهرست مطالب

فصل ۱

تابع هموار بر فضای اقلیدسی

منیفلد چیزی است شبیه به فضای اقلیدسی $\mathbb{R}^n$ معمولی! البته نه به این سادگی، در واقع منیفلد چیزی است موضعا شبیه به $\mathbb{R}^n$. به همین دلیل هر گونه اطلاعی در خصوص $\mathbb{R}^n$ می‌تواند در محاسبات دیفرانسیلی و یا انتگرالی بر منیفلدها مفید باشد.

اهمیت فضاهای اقلیدسی بیشتر از این جهت است که دارای مختصات استاندارد فراگیر هستند. این موضوع هم فرصت است و هم تحدید! به این دلیل فرصت است که تمام ساختارهای لازم بر $\mathbb{R}^n$ را با استفاده از مختصات استاندارد موجود بر آن می‌توان تعریف نمود، و آنگاه به راحتی محاسبات لازم را به شکل صریح انجام نمود؛ و به این دلیل تحدید است که به سادگی نمی‌توان مفهوم تعریف شده به این طریق را از مختصات جدا نمود، یا اصطلاحاً به صورت مختصات آزاد[۱] بیان نمود. چون در منیفلد مختصات استاندارد وجود ندارد، تنها مفاهیمی را می‌توان از حالت اقلیدسی به حالت منیفلدها تعمیم داد که به صورت مختصات آزاد قابل بیان گردد. مثلاً، چون انتگرالگیری از توابع بر اساس مختصات تعریف می‌شود، (حداقل به صورت کلاسیک) از توابع بر منیفلدهای n-بعدی نمی‌توان منیفلدها انتگرال گرفت! عملاً، بجای توابع از فرمهای دیفرانسیلی بر منیفلدها انتگرال گرفته می‌شود. نکته اینجا است که چون مختصات فراگیر بر $\mathbb{R}^n$ وجود دارد، بین توابع بر $\mathbb{R}^n$ و n-فرمهای بر $\mathbb{R}^n$ تناظری یکبیک وجود دارد، و لذا انتگرالگیری از تابع بر $\mathbb{R}^n$، عملا به معنی انتگرالگیری از n-فرم متناظر به آن می‌باشد.

هدف از این فصل بیان حساب دیفرانسیل و انتگرال بر $\mathbb{R}^n$ به گونه‌ای است که مختصات آزاد بوده و برای تعمیم به حالت منیفلدها مناسب باشد. بر این اساس، مثلاً بردار مماس را نه بعنوان پاره خطی جهتدار و یا ستونی از اعداد، بلکه به عنوان یک مشتق بر جبر توابع تلقی می‌کنیم. این موضوع، نتیجه‌ای از دیدگاه هرمن گراسمن[۲] در خصوص توابع بر فضاهای برداری است، که اساس نظریه فرمهای دیفرانسیل امروزی را تشکیل داده است. بر این اساس، ابتدا مفهوم فرم دیفرانسیلی بر $\mathbb{R}^n$ را مطرح می‌کنیم و سپس دو عمل پایه‌ای بر فرمها، یعنی ضرب گوه‌ای و دیفرانسیل خارجی را ارائه می‌کنیم، و نشان خواهیم داد که چگونه این دو حساب دیفرانسیل برداری در $\mathbb{R}^n$ را به سادگی تعمیم می‌دهند.

---

[۱] free coordinates
[۲] Hermann Grassmann

حسابان[۳] توابع هموار ابزار اصلی در مطالعه منیفلدهای با بعد بالا است. به همین دلیل، با دورهٔ توابع هموار بر $\mathbb{R}^n$ آغاز می‌کنیم.

بخش ۱.۱ توابع تحلیلی هموار

مختصات[۱] بر $\mathbb{R}^n$ را با $(x^1, \cdots, x^n)$ نشان داده و نقطه‌ای $p = (p^1, \cdots, p^n)$ در یک زیرمجموعه باز U از $\mathbb{R}^n$ در نظر بگیرید. در هندسه دیفرانسیل رسم شده که مختصات را با اندیسهای بالا شماره گذاری می‌کنند، نه با اندیسهای پایین. در ۴.۳۹ بحثی در خصوص اندیسهای بالا و پایین آورده شده است.

۱.۱ تعریف. گیریم k عدد صحیح نامنفی است. تابع با مقدار حقیقی $f : U \to \mathbb{R}$ را در صورتی از کلاس C^k در $p \in U$ گوییم که همه مشتقات جزئی $\dfrac{\partial^j f}{\partial x^{i_1} \cdots \partial x^{i_j}}$ از مرتبه $1 \leq j \leq k$ آن در p موجود و پیوسته باشند.
تابع f را در صورتی **از کلاس C^∞ در $p \in U$** گوییم که به ازای هر $k \geq 0$ ای در p از کلاس C^k باشد؛ بعبارت دیگر، همه مشتقات جزئی آن در p از هر مرتبه‌ای موجود و پیوسته باشند.
تابع با مقدار برداری $f : U \to \mathbb{R}^n$ را در صورتی از کلاس C^k در $p \in U$ گوییم که همه توابع مولفه‌ای $f^1, \cdots, f^m$ آن از کلاس C^k در p باشند. در صورتی $f : U \to \mathbb{R}^n$ از کلاس C^k بر U گفته می‌شود که در همه نقاط U چنین باشد. تعریف مشابهی برای تابع هموار بر مجموعه‌ای باز U وجود دارد. از اصطلاح هموار[۲] به معنی هموار استفاده می‌کنیم. مجموعه توابع هموار بر U را با $C^\infty(U)$ نشان می‌دهیم.

۱.۲ مثال. ۱) تابع از کلاس C^0 بر U عملاً به معنی تابعی پیوسته بر U است.
۲) تابع $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ با ضابطه $f(x) = 3x^{1/3}$ را در نظر بگیرید. در این صورت، به ازای هر $x \neq 0$ ای $f'(x) = x^{-2/3}$، بعلاوه f' در $x = 0$ تعریف نمی‌گردد. بنابراین، تابع f در $x = 0$ از کلاس C^0 است، ولی از کلاس C^1 نیست.
۳) تابع $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ با ضابطه $g(x) = 9x^{4/3}$ را در نظر بگیرید. در این صورت $g'(x) = \frac{1}{4}f(x)$، و لذا g در $x = 0$ از کلاس C^1 باشد، در حالی که از کلاس C^2 نمی‌باشد. به همین طریق می‌توان تابعی ساخت که در نقطه‌ای بخصوص از کلاس C^k است، در حالی که از کلاس C^{k+1} نباشد.
۴) توابع چندجمله‌ای، سینوس، کسینوس و نمایی بر کل خط حقیقی از کلاس هموار هستند.

منظور از همسایگی یک نقطه در $\mathbb{R}^n$، مجموعه‌ای باز از آن نقطه است. تابع f را در صورتی حقیقی–

[۱] coordinates [۲] smooth [۳] calculus

تحلیلی در p گوییم که در همسایگی‌ای از p با بسط تیلور f در p برابر باشد؛ یعنی

$$\begin{aligned} f(x) &= f(p)+\sum_i \frac{\partial f}{\partial x^i}(p).(x^i-p^i) \\ &+\frac{1}{2!}\sum_{i,j}\frac{\partial^2 f}{\partial x^i\partial x^j}(p).(x^i-p^i)(x^j-p^j)+ \\ &\vdots \\ &+\frac{1}{k!}\sum_{i_1,\cdots,i_k}\frac{\partial^k f}{\partial x^{i_1}\cdots\partial x^{i_k}}(p).(x^{i_1}-p^{i_1})\cdots(x^{i_k}-p^{i_k})+ \\ &\vdots \end{aligned}$$

که در آن، مجموع آخر برای همه اندیسهای $i_1,\cdots,i_k$ طوری که $1\le i_1,\cdots,i_k\le n$ می‌باشد.

هر تابع حقیقی–تحلیلی لزوماً هموار است، چرا که بسط تیلور هر تابع حقیقی–تحلیلی یک سری توان همگرا (و بنابراین، همگرای یکشکل) است و لذا جمله به جمله از آن می‌توان مشتق گرفت. مثلاً،

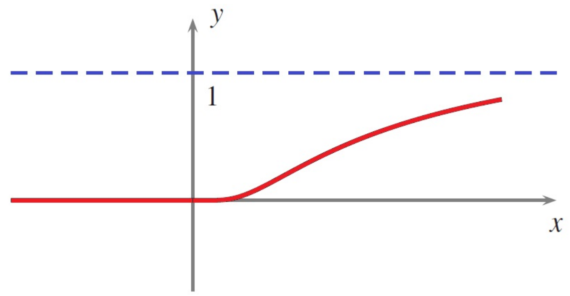
$$\begin{aligned} f(x)&=\sin(x)=x-\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{5!}x^5-\cdots, \\ f'(x)&=1-\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{4!}x^4-\cdots=\cos(x), \\ f''(x)&=-x+\frac{1}{3!}x^3-\frac{1}{5!}x^5+\cdots=-\sin(x), \\ &\vdots \end{aligned}$$

مثال زیر نشان می‌دهد که لزومی ندارد هر تابع از کلاس C^∞ حقیقی–تحلیلی باشد. ایده این مثال در ساخت تابعی چون f از کلاس C^∞ بر کل $\mathbb{R}$ است که نمودارش در 0 بسیار تخت است (یعنی، تمام مشتقات آن در 0 صفرند)، ولی منطبق بر محور x ها نمی‌باشد.

۱.۳ **مثال.** (تابعی هموار که در 0 بسیار تخت است) تابع $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ با ضابطه

$$f(x)=\begin{cases} e^{-1/x} & \text{برای } x>0 \\ 0 & \text{برای } x\ge 0 \end{cases}$$

را در نظر بگیرید (به شکل ۱.۱ توجه شود). به استقراء می‌توان اثبات نمود که f بر $\mathbb{R}^n$ از کلاس C^∞ است و به ازای هر $k\ge 0$ ای مشتق $f^{(k)}(0)=0$. در نتیجه، بسط تیلور این تابع در یک همسایگی از 0 برابر صفر است. بنابراین، f بر این همسایگی باز از 0 با بسط تیلورش برابر نیست و لذا f در 0 تحلیلی نمی‌باشد.

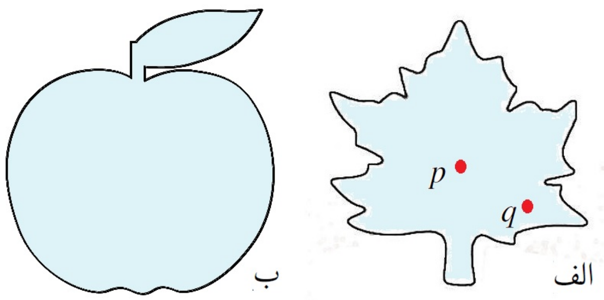


شکل ۱.۱: تابعی هموار که همه مشتقات آن از هر مرتبه‌ای در صفر، صفرند

بخش ۲.۱ قضیه تیلور با باقیمانده

با اینکه لزومی ندارد تابع هموار با بسط تیلورش برابر باشد، قضیه‌ای موسوم به قضیه تیلور با باقیمانده در مورد این نوع توابع وجود دارد که برای ادامه بحث ما کافی می‌باشد.

زیرمجموعه $S \subseteq \mathbb{R}^n$ را درصورتی ستاره شکل نسبت به نقطه $p \in S$ گوییم که به ازای هر $x \in S$ ای پاره‌خط از x تا p تماماً متعلق به S باشد (به شکل ۲.۱ توجه شود).



شکل ۲.۱: الف) این شکل نسبت به p ستاره شکل است، ولی نسبت به q خیر. ب) این شکل نسبت به هیچ نقطه‌ای ستاره شکل نیست

۱.۴ قضیه تیلور با باقیمانده. گیریم $U \subseteq \mathbb{R}^n$ زیرمجموعه‌ای باز و ستاره شکل نسبت به نقطه $p = (p^1, \cdots, p^n)$ است، و f تابعی هموار بر U. در این صورت توابع $g_1, \cdots, g_n \in C^\infty(U)$ چنان وجود دارند که

$$f(x) = f(p) + \sum_{i=1}^{n} (x^i - p^i).g_i(x), \qquad g_i(p) = \frac{\partial f}{\partial x^i}(p).$$

برهان : چون U نسبت به p ستاره شکل است، به ازای هر $x \in U$ ای، پاره‌خط $\{p + t(x - p) | 0 \leq t \leq 1\}$ تماما در U قرار دارد. با استفاده از قاعده زنجیره‌ای مشتق، داریم

$$\frac{d}{dt} f(p + t(x - p)) = \sum_{i=1}^{n} (x^i - p^i).\frac{\partial f}{\partial x^i}(p + t(x - p)).$$

چنانچه از طرفین این تساوی بر بازه $[0, 1]$ نسبت به t انتگرال بگیریم، نتیجه می‌شود که

$$f(p + t(x - p))\Big|_0^1 = \sum_{i=1}^{n} (x^i - p^i) \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x^i}(p + t(x - p)).dt.$$

گیریم $g_i(x) := \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x^i}(p + t(x - p)).dt$. در این صورت، هر یک از g_i ها هموارند، و رابطه (۱.۱) را به صورت $f(x) - f(p) = \sum_{i=1}^{n} (x^i - p^i).g_i(x)$ می‌توان نوشت. بعلاوه، $g_i(p) = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x^i}.dt = \frac{\partial f}{\partial x^i}(p)$.
□

۱.۵ قضیه تیلور با باقیمانده. گیریم $U \subseteq \mathbb{R}^n$ زیرمجموعه‌ای باز و ستاره شکل نسبت به نقطه $p = (p^1, \cdots, p^n)$ است، $k \in \mathbb{N}$ و f تابعی هموار بر U. در این صورت توابع $g_1, \cdots, g_n \in C^\infty(U)$ چنان وجود دارند که

$$\begin{aligned}
f(x) &= f(p) + \sum_i \frac{\partial f}{\partial x^i}(p).(x^i - p^i) \\
&\quad + \frac{1}{2!} \sum_{i,j} \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}(p).(x^i - p^i)(x^j - p^j) + \\
&\quad \vdots \\
&\quad + \frac{1}{k!} \sum_{i_1,\cdots,i_k} \frac{\partial^k f}{\partial x^{i_1} \cdots \partial x^{i_k}}(p).(x^{i_1} - p^{i_1}) \cdots (x^{i_k} - p^{i_k}) \\
&\quad + \sum_{i_1,\cdots,i_{k+1}} g_{i_1,\cdots,i_{k+1}}(x).(x^{i_1} - p^{i_1}) \cdots (x^{i_{k+1}} - p^{i_{k+1}})
\end{aligned}$$

که در آن

$$g_{i_1,\cdots,i_{k+1}}(p) = \frac{1}{(k+1)!} \frac{\partial^{k+1} f}{\partial x^{i_1} \cdots \partial x^{i_{k+1}}}(p).$$

برهان : ابتدا اثبات لم (۱.۴) را در نظر بگیرید. اکنون، همان لم را مجدداً در مورد هر یک از توابع g_i اجرا می‌کنیم؛ بنابراین، توابع هموار $g_{i,1}, \cdots, g_{i,n} \in C^\infty(U)$ چنان وجود دارند که

$$g_i(x) = g_i(p) + \sum_{i_1} g_{i,i_1}(x).(x^{i_1} - p^{i_1}), \qquad g_{i,i_j}(p) = \frac{\partial g_i}{\partial x^{i_j}}(p).$$

با قرار دادن این مقادیر در حکم لم (۱.۴) ، نتیجه می‌شود:

$$f(x) = f(p) + \sum_i \frac{\partial f}{\partial x^i}(p).(x^i - p^i) + \sum_{i_1,i_2} g_{i_1,i_2}(x).(x^{i_1} - p^{i_1})(x^{i_2} - p^{i_2}).$$

اگر از دو طرف این رابطه مشتق جزئی مرتبه دوم نسبت به x_{i_1} و x_{i_2} بگیریم، و سپس حاصل را در p محاسبه کنیم، خواهیم دید $g_{i_1,i_2}(p) = (\partial^2 f / \partial x^i \partial x^j)(p)$. با تکرار روند بالا، حکم به استقراء اثبات می‌گردد. □

۱.۶ یادداشت. شرط ستاره شکل بودن در لم و قضیه بالا محدودیت چندانی نیست. چرا که هر گوی باز $B(p,\varepsilon) := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - p\| < \varepsilon\}$ نسبت به مرکزش ستاره شکل است. بنابراین، اگر f تابعی هموار بر مجموعه باز $U \subseteq \mathbb{R}^n$ شامل p باشد، آنگاه $\varepsilon > 0$ ای چنان وجود دارد که $p \in U \subseteq \mathbb{R}^n$. پس اگر دامنه f را به $B(p,\varepsilon)$ تحدید کنیم، به یک همسایگی ستاره شکل حول p می‌رسیم، که استدلال قضیه تیلور با باقیمانده را بر آن می‌توان بکار بست.

بخش ۳.۱ تمرینات

۱.۱ تابعی که C^2 است ولی C^3 نیست. تابع g از قسمت ۳ در مثال ۱.۲ را در نظر بگیرید. نشان دهید که این تابع از کلاس C^1 است، ولی از کلاس C^2 نیست.

۱.۲ تابعی خیلی تخت و هموار در صفر. گیریم f تابع در مثال ۱.۳ است.

(الف) به استقراء نشان دهید که به ازای هر $x > 0$ و هر $k \geq 0$، مشتق مرتبه k ام $f^{(k)}$ به شکل $p_{2k}(1/x)e^{-1/x}$ است، که در آن $p_{2k}(y)$ یک چند جمله‌ای از درجه $2k$ بر حسب y می‌باشد.

(ب) ثابت کنید که f بر $\mathbb{R}$ هموار است و به ازای هر $k \geq 0$ ای $f^{(k)}(0) = 0$.

۱.۳ دیفئومورف بودن هر بازه باز دلخواه از $\mathbb{R}$ با خود $\mathbb{R}$. زیرمجموعه‌های باز $U \subseteq \mathbb{R}^n$ و $V \subseteq \mathbb{R}^n$ را در نظر بگیرید. نگاشت هموار $F : U \to V$ را در صورتی دیفئومورفیسم گوییم که دوسویی بوده و نگاشت وارون $F^{-1} : V \to U$ نیز هموار باشد.

(الف) نشان دهید که تابع $\tan : (-\pi/2, \pi/2) \to \mathbb{R}$ دیفئومورفیسم است.

(ب) فرض کنید a و b اعدادی حقیقی با $a < b$ هستند. تابعی خطی $h : (a,b) \to (-1,1)$ چنان بیابید که دیفئومورفیسمی بین این دو بازه بسازد. ثابت کنید که f بر $\mathbb{R}$ هموار است و به ازای هر $k \geq 0$ ای $f^{(k)}(0) = 0$.

پس ترکیب $f \circ h$ دیفئومورفیسمی از (a,b) بروی $\mathbb{R}$ می‌باشد.

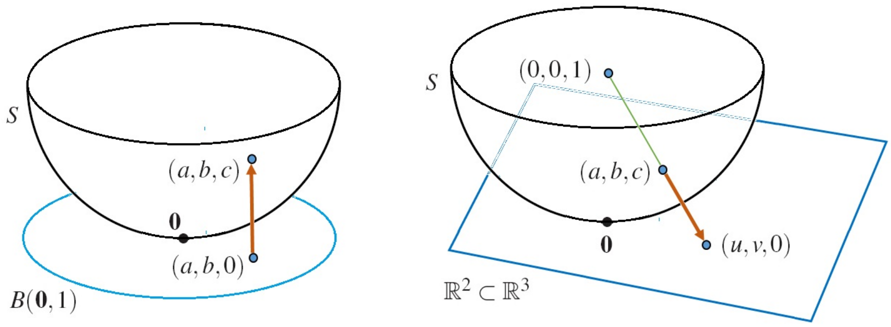
(ج) نگاشت نمایی $\exp : \mathbb{R} \to (0,\infty)$ دیفئومورفیسم است. با استفاده از آن نشان دهید که بازه‌های به شکل (a,∞) و $(-\infty,b)$ با $\mathbb{R}$ دیفئومورفند.

۱.۴ دیفئومورف بودن هر جعبه باز در $\mathbb{R}^n$ با خود $\mathbb{R}^n$. نشان دهید که تابع

$$f:(-\pi/2,\pi/2)^n \to \mathbb{R}^n, \qquad f(x^1,\cdots,x^n)=(\tan x^1,\cdots,\tan x^n)$$

دیفئومورفیسم است.

۱.۵ دیفئومورف بودن هر گوی باز از $\mathbb{R}^n$ با خود $\mathbb{R}^n$. گیریم $\mathbf{0}=(0,0)$ مبداء و $B(\mathbf{0},1)$ گوی باز یکه در $\mathbb{R}^2$ می‌باشد. برای یافتن دیفئومورفیسمی بین $B(\mathbf{0},1)$ و $\mathbb{R}^2$، $\mathbb{R}^2$ را با xy−صفحه در $\mathbb{R}^3$ یکی گرفته و نیم کره باز پایینی $S: x^2+y^2+(z-1)^2=1,\ z<1$ در $\mathbb{R}^3$ را در نظر می‌گیریم (به شکل ۳.۱ توجه شود). نگاشت دوسویی زیر را در نظر بگیرید:



شکل ۳.۱: دیفئومورف بودن هر گوی باز از $\mathbb{R}$ با خود $\mathbb{R}^n$

$$f: B(\mathbf{0},1)\to S, \qquad (a,b)\mapsto \left(a,b,1-\sqrt{1-a^2-b^2}\right).$$

(الف) نگاشت گنجنگاری $g: S\to\mathbb{R}^2$ از $(0,0,1)$، نگاشتی است که هر نقطه $(a,b,c)\in S$ را به محل برخورد خط گذرنده از نقاط $(0,0,1)$ و (a,b,c) با xy−صفحه می‌نگارد. نشان دهید که ضابطه آن چنین است:

$$(a,b,c)\mapsto (u,v)=\left(\frac{a}{1-\sqrt{1-a^2-b^2}},\frac{b}{1-\sqrt{1-a^2-b^2}}\right).$$

نشان دهید که وارون آن عبارت است از $(u,v)\mapsto\left(tu,tv,1-t\right)$ که در آن $t=2/\sqrt{1+u^2+v^2}$.

(ب) نگاشت $h := g \circ f$ را به کمک دو نگاشت f و g می‌توان تعریف نمود:

$$h(a,b) = (a,b)/\sqrt{1-a^2-b^2}.$$

فرمولی برای $h^{-1}(u,v) = (f^{-1} \circ g^{-1})(u,v)$ یافته، و نتیجه بگیرید که h دیفئومورفیسمی از $B(\mathbf{0},1)$ بروی $\mathbb{R}^2$ است.

(ج) حکم قسمت (ب) را به حالت $\mathbb{R}^n$ تعمیم دهید.

۱.۶ قضیه تیلور با باقیمانده در حالت $n=2$. ثابت کنید که اگر $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ هموار باشد، آنگاه توابع هموار g_{11}، g_{12} و g_{22} بر $\mathbb{R}^2$ چنان یافت می‌شوند که

$$\begin{aligned} f(x,y) &= f(0,0) + \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)x + \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)y \\ &\quad + x^2 g_{11}(x,y) + xy\, g_{12}(x,y) + y^2 g_{22}(x,y). \end{aligned}$$

۱.۷ تابعی با تکینگی رفع شدنی[۱]**.** یک تابع هموار $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ با این ویژگی را در نظر بگیرید که $f(0,0) = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$. فرض کنید

$$g(t,u) := \begin{cases} f(t,tu)/t & \text{برای } t \neq 0 \\ 0 & \text{برای } t = 0 \end{cases}$$

نشان دهید که این تابع هموار است و توابع هموار g_{11}، g_{12} و g_{22} بر $\mathbb{R}^2$ چنان یافت می‌شوند که

$$\begin{aligned} f(x,y) &= f(0,0) + \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)\,x + \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)\,y \\ &\quad + x^2 g_{11}(x,y) + xy g_{12}(x,y) + y^2 g_{22}(x,y). \end{aligned}$$

ثابت کنید g بر $\mathbb{R}^2$ هموار است. (راهنمایی: از تمرین ۱.۶ استفاده کنید.)

۱.۸ تابع هموار دوسویی با وارون غیر هموار. تابع $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ با ضابطه $f(x) = x^3$ را در نظر بگیرید. نشان دهید f هموار و وارونپذیر است، ولی وارون آن $f^{-1}(x)$ هموار نیست. (جالب است بدانید که این موضوع در حالت آنالیز مختلط[۲] متفاوت است؛ به این معنی که: هر نگاشت هولومورف[۳] دوسویی $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ لزوماً وارون هولومورف دارد.)

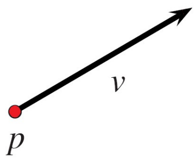
[۱] removable singularity [۲] complex analysis [۳] holomorph

فصل ۲

بردار مماس در $\mathbb{R}^n$ بعنوان عملگر مشتق

معمولاً در حساب دیفرانسیل و انتگرال مقدماتی، بردار در نقطه $p \in \mathbb{R}^3$ را به صورت جبری و به شکل ستونی از اعداد تعبیر می‌کنند؛ و یا به صورت هندسی و به شکل پاره خطی جهتدار صادره از نقطه p تجسم می‌نمایند (به شکل ۱.۲ توجه شود). در هندسه دیفرانسیل مقدماتی، برای تعریف صفحه مماس به نقطه‌ای

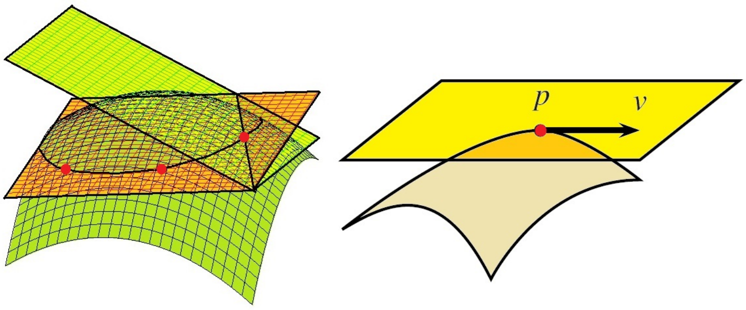
$$v = \begin{bmatrix} v^1 \\ v^2 \\ v^3 \end{bmatrix}$$



شکل ۱.۲: تجسم جبری و هندسی بردارها در $\mathbb{R}^3$

p از رویه $S \subset \mathbb{R}^3$، ابتدا سه نقطه در نزدیکی p انتخاب نموده، از آنها صفحه‌ای را عبور می‌دهند و سپس این سه نقطه را به سمت p میل می‌دهند. چنانچه صفحه حاصل به یک صفحه حدی مشخص میل نماید، این صفحه را صفحه مماس به رویه S در نقطه p می‌نامند. از نظر شهودی، صفحه مماس به رویه در نقطه p، صفحه‌ای در $\mathbb{R}^3$ است که رویه را در نقطه p تنها لمس می‌کند. به این ترتیب، برداری در p را به رویه $S \subset \mathbb{R}^3$ مماس می‌دانیم که به صفحه مماس به این رویه متعلق باشد (به شکل ۲.۲ توجه شود). در این تعریف از این ویژگی استفاده شده است که رویه در فضای پیرامونی $\mathbb{R}^3$ نشانده شده است، در حالی که مثلاً صفحه تصویری را به هیچ روش طبیعی در فضای اقلیدسی $\mathbb{R}^n$ نمی‌توان نشاند. هدف از این بخش ارائه توصیفی برای بردارهای مماس است، که قابل تعمیم به حالت منیفلدها باشد.

بخش ۱.۲ مشتق امتدادی



شکل ۲.۲: صفحه مماس به یک رویه $\mathbb{R}^3$ در یک نقطه

فضای مماس[۱] $T_p\mathbb{R}^n$ به $\mathbb{R}^n$ در نقطه p را در حسابان (ریاضی عمومی ۲) به صورت فضای برداری شامل همه پیکانهای با آغاز از p معرفی می‌کنند:

$$T_p\mathbb{R}^n := \left\{v_p \middle| v \in \mathbb{R}^n\right\}.$$

اعمال جمع برداری و ضرب اسکالر در $T_p\mathbb{R}^n$ به صورت ذیل تعریف می‌گردد:

$$v_p + w_p := (v+w)_p, \quad av_p := (av)_p, \qquad v_p, w_p \in T_p\mathbb{R}^n,\ a \in \mathbb{R}.$$

اگر بیم ابهام نرود، بجای v_p از نماد ساده‌تر v استفاده می‌کنیم. برای اینکه بین نقاط $p \in \mathbb{R}^n$ و بردارها $v \in \mathbb{R}^n$ (یا $T_p\mathbb{R}^n$) تمایزی قایل شویم، نقاط را به صورت $p = (p^1, \cdots, p^n)$ و بردارها را به صورت

$$v = \begin{bmatrix} v^1 \\ \vdots \\ v^n \end{bmatrix} \quad \text{و یا} \quad v = \langle v^1, \cdots, v^n \rangle$$

نشان می‌دهیم. پایه استاندارد برای $\mathbb{R}^n$ (یا $T_p\mathbb{R}^n$) را با $e_1, \cdots, e_n$ نشان می‌دهیم. به این ترتیب، هر عضو از $T_p\mathbb{R}^n$ را به صورت $v = \sum v^i e_i$ می‌توان نوشت، که $v^i \in \mathbb{R}$. عناصر $T_p\mathbb{R}^n$ را بردار مماس[۱] به (یا ساده‌تر، بردار از) $\mathbb{R}^n$ در p گویند.

خط گذرنده از $p = (p^1, \cdots, p^n)$ با بردار هادی $v = (v^1, \cdots, v^n)$ در $\mathbb{R}^n$ را به صورت

$$c(t) = (p^1 + tv^1, \cdots, p^n + tv^n), \qquad t \in \mathbb{R}^n$$

می‌توان پارامتره نمود. درآیه ام i $c(t)$ عبارت است از $c^i(t) = p^i + tv^i$. اگر $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ در همسایگی‌ای از p هموار و v برداری مماس به $\mathbb{R}^n$ در p باشد،مشتق امتدادی[۲] f در راستای v و در نقطه p را به صورت

$$D_v f := \lim_{t\to 0} \frac{f(c(t)) - f(p)}{t} = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} f(c(t)),$$

---

۱ tangent space ۱ tangent vector ۲ directional derivative

تعریف می‌کنیم. بنابه قاعده زنجیره‌ای مشتق، داریم

$$D_v f = \sum_{i=1}^{n} \frac{dc^i}{dt}(0).\frac{\partial f}{\partial x^i}(p) = \sum_{i=1}^{n} v^i.\frac{\partial f}{\partial x^i}(p).$$

در نماد $D_v f$ فرض بر این است که مشتقات در p محاسبه می‌شوند، زیرا بنابه فرض v برداری مماس در p است. بنابراین $D_v f$ عدد است، نه تابع. نگاشتی که f را به $D_v f$ می‌نگارد، با نماد

$$D_v := \sum_{i=1}^{n} v^i \frac{\partial}{\partial x^i}\bigg|_p$$

نشان می‌دهیم. در عمل، وقتی نقطه p در بحث مشخص است، از ذکر اندیس پایین p خودداری می‌کنیم.

۲.۱.۱ مثال تابع $f(x,y,z) = xy^2/z^3$، نقطه $p = (1,-1,2)$ و بردار مماس $v = \langle 2,4,1 \rangle$ به $T_p\mathbb{R}^3$ در p را در نظر بگیرید. در این صورت

$$\begin{aligned} D_v(f) &= v^1.\frac{\partial f}{\partial x}(p) + v^2.\frac{\partial f}{\partial y}(p) + v^3.\frac{\partial f}{\partial z}(p) \\ &= (2)\Big(\frac{y^2}{z^3}\Big)\Big|_p + (4)\Big(\frac{2xy}{z^3}\Big)\Big|_p + (1)\Big(-\frac{4xy^2}{z^4}\Big)\Big|_p \\ &= (2)\Big(\frac{1}{8}\Big) + (4)\Big(\frac{-1}{4}\Big) + (1)\Big(\frac{-1}{4}\Big) = -1. \end{aligned}$$

و کلی‌تر اینکه

$$\begin{aligned} D_v &= v^1.\frac{\partial}{\partial x}\Big|_p + v^2.\frac{\partial}{\partial y}\Big|_p + v^3.\frac{\partial}{\partial z}\Big|_p \\ &= \frac{y^2}{z^3}.\frac{\partial}{\partial x}\Big|_p + \frac{2xy}{z^3}.\frac{\partial}{\partial y}\Big|_p - \frac{4xy^2}{z^4}.\frac{\partial}{\partial z}\Big|_p \end{aligned}$$

توجه شود که اولی عدد، و دومی تابعی است با متغیر f! $\triangle$

تناظر $v \mapsto D_v$ بین بردار مماس v و D_v، امکان تصور بردارهای مماس به عنوان عملگرهایی بر فضاهای تابعی را فراهم می‌سازد. در ادامه به جهت روشن‌تر شدن بحث، به مطالعه بیشتر مشتقات امتدادی D_v به عنوان عملگر می‌پردازیم.

بخش ۲.۲ جرم تابع

اگر دو تابع f و g در همسایگی نقطه‌ای p برابر باشند، آنگاه مشتق امتدادی آنها در نقطه p با هم برابرند. این انگیزه‌ای است برای تعریف رابطه‌ای هم ارزی بر مجموعه توابع هموار تعریف شده بر همسایگی p.

مجموعه همه زوجهای مرتب (f,U) را در نظر بگیرید که U همسایگی بازی از p است و $f:U\to\mathbb{R}$ تابعی هموار بر U. درصورتی می‌گوییم (f,U) و (V,g) هم ارزند که مجموعه‌ای باز $W\subseteq U\cup V$ و شامل p وجود داشته باشد که تحدید f و g به W با هم برابر باشند. این رابطه به وضوح هم ارزی است، به این معنی که بازتابی، تقارنی و متعدی می‌باشد. کلاس هم ارزی شامل (f,U) را جرم[۱] f در p می‌نامیم. از نماد $C_p^\infty(\mathbb{R}^n)$، و یا نماد ساده‌تر C_p^∞ برای نشان دادن مجموعه همه جرمهای از توابع $\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ هموار در p استفاده می‌کنیم. کلاس هم ارزی شامل (f,U) را با $[(f,U)]$ نشان می‌دهیم.

۲.۱ **مثال.** تابع $f(x)=1/(1-x)$ با دامنه $U=\mathbb{R}-\{0\}$ و تابع $g(x)=1+x+x^2+x^3+\cdots$ با دامنه $V=(-1,1)$ بر مجموعه باز $W=(-1,1)$ با هم برابرند، و بنابراین در هر نقطه $p\in(-1,1)$ هم ارزند.

۲.۲ **تعریف.** فرض کنید K یک هیات[۱] است (مثلا هیات اعداد حقیقی $\mathbb{R}$ و یا هیات اعداد مختلط $\mathbb{C}$). منظور از یک جبر بر هیات K، فضایی برداری A است به همراه یک نگاشت ضرب دوتایی $\mu:A\times A\to A$، که اغلب به صورت $\mu(a,b)=a\cdot b$ نوشته می‌شود، به گونه‌ای که به ازای هر $a,b,c\in A$ و هر $r\in K$ داریم

۱) (شرکتپذیری) $(a\cdot b)\cdot c=a\cdot(b\cdot c)$،

۲) (توضیعپذیری) $(a+b)\cdot c=a\cdot c+b\cdot c$ و $a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c$،

۳) (همگنی) $r(a\cdot b)=(ra)\cdot b=a\cdot(rb)$.

بعبارت دیگر، جبر[۲] بر هیات K، حلقه‌ای است مانند A (با یا بدون عنصر یکانی ضرب) که همزمان فضای برداری بر K می‌باشد، به گونه‌ای که در شرط همگنی (۳) مشروح در بالا صدق می‌کند. بنابراین، جبر دارای سه عمل است: جمع و ضرب یک حلقه، به همراه ضرب اسکالری یک فضای برداری. اغلب از ذکر نماد ضرب خودداری می‌شود، و بجای $a\cdot b$ تنها می‌نویسیم ab.

۲.۳ **تعریف.** نگاشت $L:V\to W$ بین دو فضای برداری V و W (بر هیات K) را در نظر بگیرید. در صورتی می‌گوییم L نگاشت خطی[۳] یا عملگر خطی[۴] است که به ازای هر $r\in K$ و $u,v\in V$ ای

۱) $L(u+v)=L(u)+L(v)$.

۲) $L(ru)=rL(u)$.

اگر بخواهیم نقش هیات K را مشخص‌تر کنیم، از اصطلاح نگاشت K−خطی یا عملگر K−خطی استفاده می‌کنیم.

۲.۴ **تعریف.** گیریم A و A' دو جبر بر هیات K باشند. منظور از هومورفیسم جبری[۵]، نگاشتی خطی $L:A\to A'$ است که حافظ عمل ضرب در جبر باشد. یعنی، به ازای هر $a,b\in K$ ای $L(ab)=L(a)L(b)$.

جمع و ضرب توابع، اعمال مشابهی بر C_p^∞ می‌توانند تعریف نمایند:

---

۱ germ ۱ field ۲ algebra ۳ linear map ۴ linear operator ۵ algebra homomorphism

۲.۵ قضیه. اگر به ازای $[(f,U)],[(g,V)] \in C_p^\infty(U)$ و $r\in\mathbb{R}$ تعریف کنیم

$$\begin{aligned}&1)\ r[(f,U)] := [(rf,U)],\\ &2)\ [(f,U)]+[(g,V)] := [(f+g,U\cap V)],\\ &3)\ [(f,U)][(g,V)] := [(fg,U\cap V)],\end{aligned} \tag{۲.۱}$$

در این صورت، $C_p^\infty(U)$ با این اعمال تشکیل یک $\mathbb{R}$-جبر می‌دهد.

اثبات این قضیه بعنوان تمرین بر عهده خواننده است.

بخش ۲.۳ نقطه-مشتق

به ازای هر نقطه مفروض $p\in\mathbb{R}^n$، مشتق امتدادی در p باعث تعریف نگاشتی

$$D_v : C_p^\infty \to \mathbb{R},$$

بین فضاهای برداری می‌گردد. بنابه (۲.۱) D_v نگاشتی $\mathbb{R}$-خطی است و در رابطه لایبنیتز صدق می‌کند:

$$D_v(fg) = (D_vf)g(p) + f(p)D_vg,$$

چرا که عملاً مشتقات جزئی $\partial/\partial x^i|_p$ این خواص را دارند، و به پیروی از آنها D_v نیز چنین است. در کل،

۲.۶ تعریف. هر نگاشت خطی $D : C_p^\infty \to \mathbb{R}$ صادق در رابطه لایبنیتز (۲.۲) را یک نقطه-مشتق[۱] در p بر C_p^∞ (یا به اختصار، مشتق بر C_p^∞) می‌نامند. مجموعه همه نقطه-مشتقات بر C_p^∞ را با نماد $\mathcal{D}_p\mathbb{R}^n$ نشان می‌دهیم. جمع دو نقطه-مشتق با هم و نیز حاصلضرب یک عدد در یک نقطه-مشتق بر C_p^∞، نقطه-مشتق است. در نتیجه،

۲.۷ لم. مجموعه $\mathcal{D}_p\mathbb{R}^n$ یک $\mathbb{R}$-فضای برداری است.

ملاحظه شد که مشتق امتدادی در p و در هر راستای دلخواه، یک نقطه-مشتق بر C_p^∞ است. در نتیجه، نگاشتی به صورت

$$\phi : T_p\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathcal{D}_p\mathbb{R}^n, \qquad v \longmapsto D_v = \sum v^i \frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_p,$$

می‌توان تعریف نمود. چون D_v به وضوح نسبت به v خطی است، در نتیجه ϕ نیز عملگری خطی بین فضاهای برداری است. عملاً، ϕ ایزومورفیسم است. برای اثبات این موضوع به لم زیر نیاز داریم:

۲.۸ لم. اگر D یک نقطه-مشتق بر C_p^∞ باشد، آنگاه به ازای هر تابع ثابت c ای $D(c)=0$.

[۱] point-derivation

برهان : از $\mathbb{R}$-خطی بودن D نتیجه می‌شود که $D(c) = cD(1)$. پس کافی است که حکم را برای تابع 1 اثبات کنیم. با استفاده از خاصیت لایبنیتزی D، داریم

$$D(1) = D(1 \times 1) = D(1) \times 1 + 1 \times D(1) = 2D(1),$$

در نتیجه $D(1) = 0$. □

۲.۹ قضیه. نگاشت $\mathbb{R}$-خطی $\phi : T_p\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathcal{D}_p\mathbb{R}^n$ تعریف شده در (۲.۲) ایزومورفیسمی بین فضاهای برداری است.

برهان : به منظور اثبات یکبیک بودن ϕ، فرض کنیم $v \in T_p\mathbb{R}^n$ و $\phi(v) = D_v = 0$. با اعمال D_v بر توابع مختصاتی x^j داریم

$$0 = D_v(x^j) = \sum_{i=1}^{n} v^i \frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_p x^j = \sum_{i=1}^{n} v^i \delta_i^j = v^j.$$

در نتیجه $v = 0$ و لذا ϕ یکبیک است. توضیح اینکه، δ_i^j دلتای کرونکر[۱] است:

$$\delta_i^j = \begin{cases} 1 & \text{اگر } i = j \\ 0 & \text{اگر } i \neq j \end{cases}$$

برای اثبات پوشایی ϕ، فرض کنیم D یک نقطه-مشتق دلخواه بر C_p^∞ است و $[(f, V)] \in C_p^\infty$ جرمی از یک تابع f باشد. چون بنابه فرض، V باز و شامل p است، پس یک گوی باز به مرکز p در V وجود دارد. از اول می‌شود فرض نمود که V همین گوی باز است (چرا؟)، و بنابراین ستاره شکل می‌باشد. با استفاده از قضیه تیلور با باقیمانده (لم ۱.۴) نتیجه می‌گیریم که توابع هموار g_i در همسایگی‌ای از p چنان وجود دارند که

$$f(x) = f(p) + \sum_{i=1}^{n} (x^i - p^i) g_i(x), \qquad g_i(p) = \frac{\partial f}{\partial x^i}.$$

حال، D را بر دو طرف این تساوی اعمال می‌کنیم. با توجه به لم قبل، $D(f(p)) = 0$ و $D(p^i) = 0$، و بنابراین با استفاده از خاصیت لایبنیتزی D داریم

$$\begin{aligned} D(f)(x) &= \sum_{i=1}^{n} D(x^i) g_i(p) + \sum (x^i - p^i) D(g_i(x)) \\ &= \sum_{i=1}^{n} D(x^i) \frac{\partial f}{\partial x^i} = D_v(f), \end{aligned}$$

که در اینجا $v = (D(x^1), \cdots, D(x^n))$. بنابراین $D = D_v$. □

بر اساس این قضیه، قرارداد زیر را مطرح می‌کنیم:

---

[۱] Kronecker delta

۲.۱۰ قرارداد. بردارهای مماس در p را با نقطه-مشتقات بر $C_p^\infty\mathbb{R}^n$ می‌توان یکی گرفت:

$$T_p\mathbb{R}^n \cong \mathcal{D}_p\mathbb{R}^n.$$

در این یکی‌گیری، پایه استاندارد $\{e_1,\cdots,e_n\}$ برای $T_p\mathbb{R}^n$ با مجموعه مشتقات جزئی $\{\partial/\partial x^1,\cdots,\partial/\partial x^n\}$ متناظر است. از این پس این یکی‌گیری را محترم شمرده و هر بردار مماس

$$v = \langle v^1,\cdots,v^n\rangle = \sum v^i e_i$$

را به صورت $v = \sum v^i\partial/\partial x^i$ می‌نویسیم. به این ترتیب، دیگر فضای مشتقات $\mathcal{D}_p\mathbb{R}^n$ در p مانند $T_p\mathbb{R}^n$ گردایه‌ای از پیکانهای هندسی نیست، و برای تعمیم به حالت منیفلدها مناسب می‌باشد. میدانهای برداری بر U را با ستونی از توابع هموار بر U نیز می‌توان یکی گرفت:

$$v = \langle a^1,\cdots,a^n\rangle \quad\Longleftrightarrow\quad v = \sum a^i\frac{\partial}{\partial x^i} \quad\Longleftrightarrow\quad v = \begin{pmatrix} a^1\\ \vdots\\ a^n\end{pmatrix}.$$

۲.۱۱ مثال. فرض کنیم $f = x^2\sin y$، $p = (1,\pi)$ و $v = (2,3)$ باشد. در این صورت

$$D_v f = 2\frac{\partial f}{\partial x}\Big|_p + 3\frac{\partial f}{\partial y}\Big|_p = 2(2x\sin y)\Big|_p + 3(x^2\cos y)\Big|_p = -3.$$

بخش ۴.۲ میدان برداری

۲.۱۲ مثال. منظور از میدان برداری[۱] X بر مجموعه باز $U\subseteq\mathbb{R}^n$، تابعی است که به هر نقطه $p\in U$ برداری مماس $X_p\in T_p\mathbb{R}^n$ در p را نظیر می‌کند. چون $T_p\mathbb{R}^n$ دارای پایه $\{\partial/\partial x^i|_p\}$ است، بردار مماس X_p را به صورت ترکیب خطی

$$X_p = \sum_{i=1}^n a^i(p)\frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_p, \qquad p\in U,$$

می‌توان نوشت. به این ترتیب، n تابع $a^i : U\to\mathbb{R}$ مشخص می‌گردد، که آنها را توابع مختصاتی[۲] X می‌نامند. در صورتی می‌گوییم میدان برداری X بر U هموار است که همه توابع مختصاتی آن بر U هموار باشند.

[۱] vector field [۲] coordinate functions

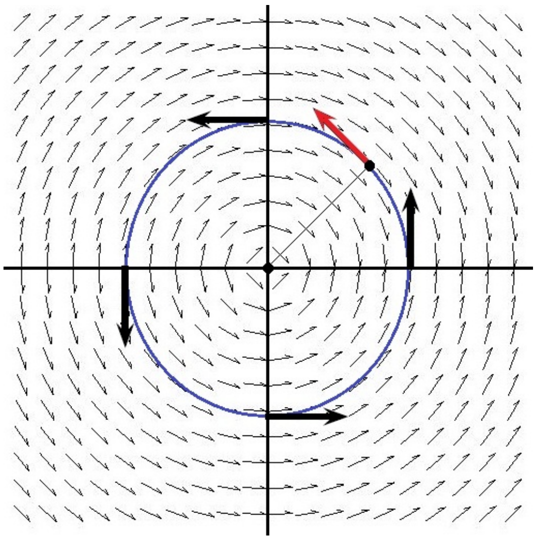
۲.۱۳ **مثال.** فرض کنیم $U = \mathbb{R}^2 - \{\mathbf{0}\}$. به هر $p = (x, y) \in U$ بردار مماس

$$\begin{aligned} X_p &= \frac{-y}{\sqrt{x^2+y^2}} \frac{\partial}{\partial x}\Big|_p + \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \frac{\partial}{\partial y}\Big|_p \\ &\cong \left\langle \frac{-y}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \right\rangle \end{aligned}$$

را نظیر می‌کنیم. این یک میدان برداری بر U است، و آن را به صورت

$$X = \frac{-y}{\sqrt{x^2+y^2}} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \frac{\partial}{\partial y}$$

می‌توانیم بنویسیم. از نظر شهودی، این میدان برداری به هر نقطه $p \in U$ برداری به طول یک و مماس بر دایره به مرکز مبداء و گذرنده از این نقطه را نظیر می‌کند؛ به شکل ۳.۲ توجه شود. توابع مختصاتی آن بترتیب عبارتند از $a^1 = -y : U \to \mathbb{R}$ و $a^2 = x : U \to \mathbb{R}$. میدان برداری

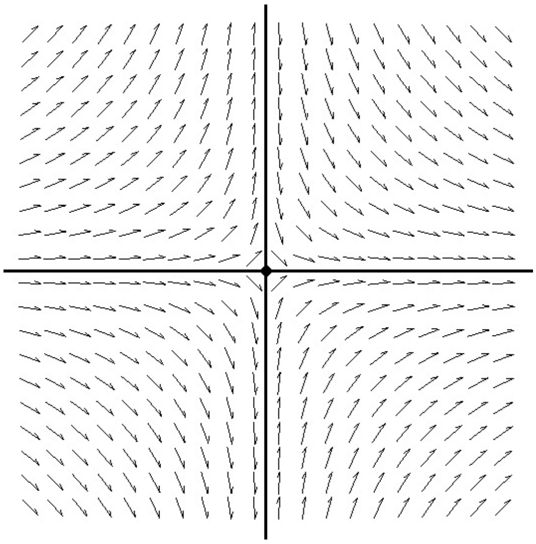


شکل ۳.۲: میدنی برداری بر $U = \mathbb{R}^2 - \{\mathbf{0}\}$

$$Y = x\frac{\partial}{\partial x} - y\frac{\partial}{\partial y} = \langle x, -y \rangle$$

نیز بر کل $\mathbb{R}^2$ قابل تعریف می‌باشد؛ به شکل ۴.۲ توجه شود.

۲.۱۴ **تعریف.** مجموعه توابع هموار بر باز $U \subseteq \mathbb{R}^n$ را با $C^\infty(U)$ و یا با $\mathcal{F}(U)$ نشان می‌دهیم. مجموعه همه میدانهای برداری هموار بر U را با نماد $\mathfrak{X}(U)$ نشان می‌دهیم.



شکل ۲.۴: میدنی برداری بر $Y = \langle x, -y \rangle$ بر $\mathbb{R}^2$

۲.۱۵ **تعریف.** فرض کنید R یک حلقه تعویضپذیر یکدار است. منظور از R−مدول[۱]، یک مجموعه A به همراه دو عمل جمع $A \times A \to A$ و ضرب اسکالر $R \times A \to A$ صادق در شرایط زیر می‌باشد:

الف) A نسبت به عمل جمع، گروه آبلی است.

ب) به ازای هر $r, s \in R$ و هر $a, b \in A$ ای

۱) (بسته بودن) $ra \in A$،

۲) (وجود یکانی) اگر $1 \in R$ عنصر یکانی باشد، آنگاه $1a = 1$،

۳) (شرکتپذیری) $(rs)a = r(sa)$.

۴) (توزیعپذیری) $(r+s)a = ra + sa$ و $r(a+b) = ra + rb$.

در واقع مدول درست شبیه به فضای برداری است، با این تفاوت که ضرایب آن بجای اینکه از یک هیات انتخاب شوند، از یک حلقه تعویضپذیر یکدار انتخاب می‌گردند. اکثر خواص فضاهای برداری، بی هیچ تغییری در مورد مدولها برقرار هستند.

۲.۱۶ **قضیه.** فرض کنید U زیرمجموعه‌ای باز از $\mathbb{R}^n$، $X, Y \in \mathfrak{X}(U)$ و $f \in C^\infty(U)$. تعریف می‌کنیم

$$(X+Y)_p := X_p + Y_p, \qquad (fX)_p := f(p)X_p.$$

در این صورت، $X+Y$ و fX نیز میدانهای برداری هموارند، و بنابراین $\mathfrak{X}(U)$ یک $C^\infty(U)$−مدول است.

---

۱ R−module

بخش ۵.۲ میدان برداری به عنوان مشتق

اگر X میدان برداری هموار بر زیرمجموعه باز $U \subseteq \mathbb{R}^n$ و f تابعی هموار بر U باشد، تابع جدید Xf را به صورت نقطه‌ای تعریف می‌کنیم. به عبارت دیگر

$$(Xf)(p) := X_p f, \qquad \text{هر ازای به } p \in U$$

اگر X را به صورت $X = \sum a^i \partial/\partial x^i$ بنویسیم، آنگاه

$$(Xf)(p) = \sum_{i=1}^{n} a^i(p) \frac{\partial f}{\partial x^i}(p),$$

یا بطور خلاصه‌تر

$$Xf = \sum_{i=1}^{n} a^i \frac{\partial f}{\partial x^i},$$

که نشان می‌دهد Xf نیز تابعی هموار بر U است. به این ترتیب، به یک نگاشت $\mathbb{R}-$خطی

$$C^\infty(U) \longrightarrow C^\infty(U), \qquad f \mapsto Xf.$$

دست یافتیم. بعبارت دیگر، هر میدان برداری هموار بر U را به صورت نگاشتی $\mathbb{R}-$خطی بر $C^\infty(U)$ می‌توان قلمداد نمود.

۲.۱۷ مثال. عملگر $K-$خطی $D : A \to A$ بر $K-$جبر A را در صورتی مشتق[۱] گوییم که

$$D(ab) = D(a)b + aD(b), \qquad \text{هر ازای به } a, b \in A$$

مجموعه همه مشتقات بر A را با $\mathrm{Der}(A)$ نشان می‌دهیم.

۲.۱۸ لم. فرض کنید A یک $K-$جبر، $D, D' \in \mathrm{Der}(A)$ و $r \in K$. فرض کنید

$$(D + D')(a) := D(a) + D'(a), \quad (rD)(a) := rD(a), \qquad a \in A,\ r \in K,$$

در این صورت، $D + D'$ و rD نیز مشتق بر A هستند. $\mathrm{Der}(A)$ همراه با این دو عمل، تشکیل یک $K-$فضای برداری می‌دهد.

۲.۱۹ گزاره (قاعده لایبنیتز برای میدانهای برداری). اگر X میدان برداری هموار بر زیرمجموعه باز $U \subseteq \mathbb{R}^n$، f و g توابعی هموار بر U باشند، آنگاه $X(fg)$ در قاعده ضربی (قاعده لایبنیتزی) صدق می‌کند:

$$X(fg) = (Xf)g + fXg.$$

---

[۱] derivation

بعبارت دیگر، X مشتقی بر جبر $C^\infty(U)$ می‌باشد: $X \in \mathrm{Der}(C^\infty(U))$.

به این ترتیب، مجدداً به یک تناظر

$$\varphi : \mathfrak{X}(U) \longrightarrow \mathrm{Der}(C^\infty(U)), \qquad X \longmapsto (f \mapsto Xf)$$

رسیدیم. بعلاوه

۲.۲۰ قضیه. نگاشت $\varphi : \mathfrak{X}(U) \longrightarrow \mathrm{Der}(C^\infty(U))$ ایزومورفیسمی بین فضاهای برداری است.

اثبات یکبیک بودن این حکم در این وضعیت ممکن است، و به عنوان تمرین بر عهده خوانند؛ اما اثبات پوشایی آن فعلا مقدور نیست و آن را به مساله ۱۹,۱۱ موکول می‌کنیم.

درست مثل حالت بردارهای مماس در یک نقطه، که بردارها را با مشتقات بر جبر $C^\infty(U)$ یکی گرفتیم، قرار داد زیر را مطرح می‌نماییم.

۲.۲۱ قرارداد. میدانهای برداری بر U را با مشتقات بر جبر $C^\infty(U)$ یکی می‌گیریم.

توجه شود که مشتق در $p \in U$ نگاشتی از C_p^∞ به خط حقیقی $\mathbb{R}$ است، حال آنکه مشتق بر C_p^∞، نگاشتی از C_p^∞ به خود C_p^∞ است.

بخش ۶.۲ تمرینات

۲.۱ . میدان برداری هموار $X = x\partial/\partial x + y\partial/\partial y$ و تابع هموار $f(x,y,x) = x^2+y^2+z^2$ بر $\mathbb{R}^3$ را در نظر بگیرید. Xf را محاسبه کنید.

۲.۲ **ساختار جبری بر $C_p^\infty(U)$.** قضیه ۲.۵ را اثبات کنید.

۲.۳ **ساختار جبری بر $\mathrm{Der}(A)$.** لم ۲.۱۸ را اثبات کنید.

۲.۴ **ضرب مشتقات.** فرض کنید یک $K-$جبر A و دو مشتق $D_1, D_2 \in \mathrm{Der}(A)$ بر A داده شده است. نشان دهید که لزومی ندارد $D_1 \circ D_2$ نیز مشتق بر A باشد؛ در حالی که همیشه $D_1 \circ D_2 - D_2 \circ D_1$ مشتقی بر A است. این عنصر را اصطلاحاً ضرب دو مشتق مورد نظر می‌نامیم.

فصل ۳

تابع k−خطی نوسانی

بخش ۱.۳ فضای دوگان

گیریم V و W فضای برداری حقیقی‌اند. فضای برداری متشکل از همه نگاشتهای خطی $f : V \to W$ را با نماد $\mathrm{Hom}(V, W)$ نشان می‌دهیم. فضا برداری همه توابع خطی بر V را با نماد V^* نشان داده و به آن فضای دوگان V [۱] می‌گوییم: $V^* := \mathrm{Hom}(V, \mathbb{R})$. عناصر V^* را همبردار[۲] یا 1−همبردار بر V می‌نامیم.

در ادامه این بخش فرض می‌کنیم V با بعد متناهی است. گیریم $\{e_1, \cdots, e_n\}$ پایه‌ای برای V است. در این صورت هر عنصر $v \in V$ را به صورتی یکتا به شکل $v = \sum v^i e_i$ می‌توان نوشت، که $v^i \in V$. گیریم $\alpha^i : V \to \mathbb{R}$ تابعی خطی باشد که هر بردار $v \in V$ را به مختص i امش می‌نگارد: $\alpha^i(v) = v^i$. به عبارت دیگر α بر اساس پایه به صورت زیر معرفی می‌گردد:

$$\alpha^i(e_j) = \delta^j_i, \qquad i, j = 1, \cdots, n$$

۱.۳ گزاره. توابع $\alpha^1, \cdots, \alpha^n$ پایه‌ای برای V^* تشکیل می‌دهند.

برهان : برای اثبات پایه بودن، باید نشان دهیم که این بردارها فضای دوگان را تولید نموده و مستقل خطی هستند. ابتدا، ثابت می‌کنیم $\alpha^1, \cdots, \alpha^n$ فضای V^* را تولید می‌کنند. اگر $f \in V^*$ و $v = \sum v^i e_i \in V$، آنگاه

$$f(v) = \sum v^i f(e_i) = \sum f(e_i) \alpha^i(v).$$

در نتیجه، $f = \sum f(e_i) \alpha^i$، که منظور ما را نشان می‌دهد.

---

۱ dual space ۲ covector

برای نشان دادن استقلال خطی $\alpha^1,\cdots,\alpha^n$، فرض می‌کنیم $\sum c_i\alpha^i=0$. با محاسبه مقدار دو طرف بر بردار e_j، (که $j=1,\cdots,n$) داریم

$$0=\sum c_i\alpha(e_j)=\sum c_i\delta_i^j=c_j,\qquad j=1,\cdots,n.$$

به این ترتیب برهان تمام است. □

۳.۲ تعریف. پایه $\{\alpha^1,\cdots,\alpha^n\}$ را پایه دوگان[1] نظیر به $\{e_1,\cdots,e_n\}$ می‌نامیم.

۳.۳ نتیجه. فضای دوگان هر فضای برداری با بعد متناهی، هم بعد با آن فضا است.

۳.۴ نتیجه (توابع مختصاتی). هر بردار v از فضای برداری مفروض V را نسبت به پایه مشخص شده $\{e_1,\cdots,e_n\}$ به صورت ترکیب خطی $v=\sum b^i(v)e_i$ می‌توان نوشت، که $b^i(v)\in\mathbb{R}$.

چنانچه، $\{\alpha^1,\cdots,\alpha^n\}$ پایه دوگان برای V^* نظیر به $\{e_1,\cdots,e_n\}$ باشد، آنگاه

$$\begin{aligned}\alpha^i(v) &= \alpha^i\Big(\sum b^j(v)e_j\Big)=\sum b^j(v)\delta^i(e_j)\\ &= \sum b^j(v)\delta^i_j=b^i(v).\end{aligned}$$

بنابراین، توابع مختصاتی $\{b^1,\cdots,b^n\}$ نسبت به پایه $\{e_1,\cdots,e_n\}$، دقیقاً همان پایه دوگان نظیر به $\{e_1,\cdots,e_n\}$ می‌باشد.

بخش ۲.۳ جایگشت

عدد صحیح مثبت k را در نظر بگیرید. منظور از جایگشت[2] برای مجموعه $A=\{1,\cdots,k\}$، تابعی است دوسویی به شکل $\sigma:A\to A$. حاصلضرب $\tau\sigma:A\to A$ دو جایگشت τ و σ را به صورت ترکیب این دو تابع تعریف می‌کنیم. بعبارت دیگر، اول σ تاثیر می‌کند و بعد τ. جایگشت دوری[3] $(a_1a_2\cdots a_r)$ عبارت است از جایگشت $\sigma:A\to A$ ای که

$$\sigma(a_1)=a_2,\quad \sigma(a_2)=a_3,\quad \cdots,\quad \sigma(a_{r-1})=a_r,\quad \sigma(a_r)=a_1.$$

و سایر عناصر در A را ثابت نگه می‌دارد. جایگشت دوری $(a_1a_2\cdots a_r)$ را دور و یا r−دور می‌نامند. 2−دور را اصطلاحا ترانهش می‌نامند. بعبارت دیگر، ترانهش[4] جایگشتی است (a,b) که دو عنصر $a,b\in A$ را تعویض می‌کند و سایر اعضاء آن را ثابت می‌گذارد.

معمولاً هر جایگشت $\sigma:A\to A$ را به صورت ماتریس

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & \cdots & k\\ a_1 & a_2 & \cdots & a_k\end{pmatrix}$$

و یا به صورت حاصلضربی $(a_1\cdots a_r)(b_1\cdots b_s)\cdots$ از جایگشتها نشان می‌دهند.

---
[1] dual basis [2] permutation [3] cyclic permutation [4] transposition

۳.۵ مثال. فرض کنید جایگشت $\sigma : \{1,2,3,4,5\} \to \{1,2,3,4,5\}$ ۱،۲،۳،۴،۵ را بترتیب به ۲،۴،۵،۱،۳ ببرد. در این صورت

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 5 & 1 & 3 \end{pmatrix} = (1\,2\,4)(3\,5).$$

در نظریه مقدماتی گروهها اثبات می‌گردد که

۳.۶ قضیه. گیریم S_k گروه همه جایگشتهای مجموعه $\{1,2,\cdots,k\}$ باشد.

۱) S_k با عمل ضرب جایگشتها تشکیل گروهی با $n!$ عضو می‌دهد؛

۲) هر جایگشت را به صورت حاصلضربی از ترانهش‌ها می‌توان تجزیه نمود. به ازاء هر جایگشت مفروض، تعداد ترانهش‌های در این تجزیه یا همواره زوج است، و یا همواره فرد؛ بر همین اساس، تعریف می‌کنیم: جایگشت σ را در صورتی زوج (بترتیب، فرد) گوییم که تعداد ترانهش‌های موجود در تجزیه آن زوج (بترتیب، فرد) باشد. اگر جایگشت σ زوج (بترتیب، فرد) باشد، علامت آن را $+1$ (بترتیب، (-1) تعریف نموده و می‌نویسیم $\operatorname{sgn}(\sigma) = +1$ (بترتیب، $\operatorname{sgn}(\sigma) = -1$)؛

۳) گیریم A_k مجموعه همه جایگشتهای زوج از مجموعه $\{1,2,\cdots,k\}$ باشد، در این صورت A_k زیر گروهی نرمال با شاخص 2 از S_k است؛

۴) به ازاء هر $\sigma,\tau \in S_k$ ای $\operatorname{sgn}(\sigma\tau) = \operatorname{sgn}(\sigma).\operatorname{sgn}(\tau)$. 2

۳.۷ مثال. گروه S_3 جایگشتهای مجموعه $\{1,2,3\}$ از مرتبه 6 بوده و عناصر آن عبارتند از

$$\mathbb{1},\quad (1\,2),\quad (1\,3),\quad (2\,3),\quad (1\,2\,3) = (1\,2)\quad (2\,3),\quad (1\,3\,2) = (1\,2)\quad (1\,3).$$

دور $(1\,2\,3\,4\,5\,7)$ از مجموعه S_7 را درنظر بگیرید. در این صورت

$$(1\,2\,3\,4\,5) = (1\,2)(1\,3)(1\,4)(1\,5).$$

بنابراین، درجه σ زوج است: $\operatorname{sgn}(\sigma) = +1$. در کل این موضوع درست است که

$$(a_1\,a_2\cdots a_r) = (a_1\,a_2)(a_1\,a_3)\cdots(a_1\,a_r).$$

بعلاوه

$$\begin{aligned} \operatorname{sgn}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 5 & 1 & 3 \end{pmatrix} &= \operatorname{sgn}((1\,2\,4)(3\,5)) \\ &= \operatorname{sgn}((1\,2\,4))\operatorname{sgn}((3\,5)) \\ &= (+1)(-1) \\ &= -1. \end{aligned}$$

یعنی، این جایگشت از درجه فرد است.

بخش ۳.۳ توابع چندخطی

۳.۸ تعریف. فرض کنید V فضای بردار حقیقی است. و V^k حاصلضربی از k کپی از V باشد. تابع $f : V^k \to \mathbb{R}$ را در صورتی k−خطی[۱] گوییم که نسبت به هر یک از k متغیرش، مستقلاً خطی باشد؛ به این معنی که

$$f(\cdots, u+av, \cdots) = f(\cdots, u, \cdots) + a f(\cdots, v, \cdots), \qquad a \in \mathbb{R},\ u, v \in V.$$

اغلب بجای اصطلاح 2−خطی و 3−خطی بترتیب از «دوخطی» و «سه‌خطی» استفاده می‌کنیم. توابع k−خطی بر V را k−تانسور بر V نیز می‌نامند. اگر f تابعی k−خطی باشد، k را درجه f می‌نامند. مجموعه همه توابع k−خطی بر V را با $\mathrm{Lin}_k(V)$ نشان می‌دهند.

برای حالت $k = 0$، تابع 0−خطی را می‌توان تابعی «بدون متغیر»، یا اصطلاحاً ثابت تلقی نمود. بنابراین، هر تابع ثابت بر فضای برداری مفروض V، یک تابع 0−خطی تلقی می‌گردد. در نتیجه $\mathrm{Lin}_0(V) := \mathbb{R}$.

۳.۹ لم. گیریم V فضای برداری n بعدی است. در این صورت، $\mathrm{Lin}_k(V)$ با تعریف جمع و ضرب اسکالر نقطه‌ای یک فضای برداری n^k بعدی است.

۳.۱۰ تعریف. تابع k−خطی $f : V^k \to \mathbb{R}$ را در صورتی متقارن[۱] گوییم که به ازای هر جایگشت $\sigma \in S_k$ و هر $v_1, \cdots, v_k \in V$ ای

$$f(v_{\sigma(1)}, \cdots, v_{\sigma(k)}) = f(v_1, \cdots, v_k).$$

آن را در صورتی نوسانی[۲] (k−همبردار و یا چندهمبردار) گوییم که به ازای هر جایگشت $\sigma \in S_k$ و هر $v_1, \cdots, v_k \in V$ ای

$$f(v_{\sigma(1)}, \cdots, v_{\sigma(k)}) = \mathrm{sgn}(\sigma).f(v_1, \cdots, v_k).$$

مجموعه همه توابع k−خطی متقارن بر V را با نماد $\mathrm{Sym}_k(V)$ و مجموعه همه توابع k−خطی نوسانی بر V را نماد $\mathrm{Alt}_k(V)$ نشان می‌دهیم.

هر عضو از $\mathrm{Lin}_0(V) = \mathbb{R}$ به وضوح هم متقارن است، و در عین حال نوسانی. در نتیجه

$$\mathrm{Alt}_0(V) = \mathrm{Sym}_0(V) = \mathrm{Lin}_0(V) = \mathbb{R}.$$

۳.۳.۱ مثال هر نگاشت خطی $f : V \to \mathbb{R}$ (همبردار بر V) عملاً تابع یکخطی متقارن است. بنابراین

---

[۱] k−linear [۱] symmetric [۲] alternating

$\mathrm{Sym}_1(V) = V^*$. حاصلضرب نقطه‌ای (داخلی) $f(u,v) = u\cdot v = \sum u^i v^i$ بر $\mathbb{R}^n$ نمونه‌ای از یک تابع دوخطی متقارن است. $\triangle$

۳.۳.۲ مثال هر نگاشت خطی $f : V \to \mathbb{R}$ (همبردار بر V) عملاً تابع یکخطی نوسانی است. بنابراین $\mathrm{Alt}_1(V) = V^*$. دترمینان

$$\begin{aligned} f(v_1,\cdots,v_n) &= u\cdot v \\ &= \det[v_1|\cdots|v_n] \\ &= \sum_{\sigma\in S_n} \mathrm{sgn}(\sigma).\alpha^{\sigma(1)}(v_1)\cdots\alpha^{\sigma(n)}(v_n), \end{aligned}$$

به عنوان تابعی از n بردار ستونی از $\mathbb{R}^n$ نمونه‌ای از یک تابع n−خطی نوسانی است. $\triangle$

بخش ۴.۳ عمل جایگشت بر توابع k−خطی

۳.۱۱ تعریف. گیریم V فضای برداری، $f \in \mathrm{Lin}(V)$ تابعی k−خطی بر آن، و $\sigma \in S_k$ جایگشت باشد. در این صورت، عمل σ بر f را با نماد $\sigma\cdot f$ نشان داده و به صورت

$$(\sigma\cdot f)(v_1,\cdots,v_k) := f(v_{\sigma(1)},\cdots,v_{\sigma(k)}), \qquad v_1,\cdots,v_k \in V,$$

تعریف می‌کنیم.

۳.۱۲ نتیجه. تابع k−خطی f را در نظر بگیرید. در این صورت

۱) f تابعی متقارن است اگر و تنها اگر به ازاء هر جایگشت $\sigma \in S_k$ ای $\sigma.f = f$.

۲) f تابعی نوسانی است اگر و تنها اگر به ازاء هر جایگشت $\sigma \in S_k$ ای $\sigma.f = \mathrm{sgn}(\sigma) f$.

۳.۱۳ تعریف. فرض کنید A مجموعه و G گروهی با همانی 1 باشد. منظور از عمل چپ[۱] G بر A، تابعی است $\mu : G\times A \to A$ که اگر بنویسیم $\mu(g,x) = g\cdot x$، آنگاه

۱) $1\cdot x = x$ به ازای هر $x\in A$؛

۲) $g\cdot(h\cdot x) = (gh)\cdot x$ به ازای هر $g,h \in G$.

به صورت مشابه، منظور از عمل راست[۲] G بر A، تابعی است $\mu : G\times A \to A$ که اگر بنویسیم $\mu(g,x) = g\cdot x$، آنگاه

---

۱ left action ۲ left action

۱) $1 \cdot x = x$ به ازای هر $x \in A$؛

۲) $g \cdot (h \cdot x) = (hg) \cdot x$ به ازای هر $g, h \in G$.

۳.۱۴ لم. گروه S_k از چپ بر $\mathrm{Lin}_k(V)$ عمل می‌کند. بعبارت دیگر، به اِزاء هر دو جایگشت $\sigma, \tau \in S_k$ و هر نگاشت k−خطی f ای $\tau \cdot (\sigma \cdot f) = (\sigma\tau) \cdot f$.

برهان : به ازای هر $v_1, \cdots, v_k \in V$ ای

$$\begin{aligned}\tau(\sigma \cdot f)(v_1, \cdots, v_k) &= (\tau f)(v_{\sigma(1)}, \cdots, v_{\sigma(k)})\\ &= f(v_{\tau(\sigma(1))}, \cdots, v_{\tau(\sigma(k))})\\ &= (\tau\sigma) \cdot f(v_1, \cdots, v_k),\end{aligned}$$

و برهان تمام است. □

بخش ۵.۳ عمگر متقارن−ساز و نوسانی−ساز

۳.۱۵ تعریف. فرض کنید V فضایی برداری و f تابعی k−خطی بر آن باشد. دو توابع k−خطی به شرح زیر تعریف می‌کنیم:

$$\begin{aligned}\mathrm{Sym}(f) &:= \sum_{\sigma \in S_k} \sigma \cdot f,\\ \mathrm{Alt}(f) &:= \sum_{\sigma \in S_k} \mathrm{sgn}(\sigma)\sigma \cdot f.\end{aligned}$$

بعبارت دیگر

$$\begin{aligned}\mathrm{Sym}(f)(v_1, \cdots, v_k) &= \sum_{\sigma \in S_k} f(v_{\sigma(1)}, \cdots, v_{\sigma(k)}),\\ \mathrm{Alt}(f)(v_1, \cdots, v_k) &= \sum_{\sigma \in S_k} \mathrm{sgn}(\sigma) f(v_{\sigma(1)}, \cdots, v_{\sigma(k)}).\end{aligned}$$

اصطلاحا، Sym را عملگر متقارن−ساز و Alt را عملگر نوسانی−ساز می‌نامند.

۳.۱۶ مثال. فرض کنید $V = \mathbb{R}^3$ و $f \in \mathrm{Lin}_2(V)$ تابع سه‌خطی با ضابطه $f(v_1, v_2, v_3) = v_{11}.v_{23}.v_{32}$ است؛ که در اینجا v_{ij} درآیه j ام از v_i می‌باشد. در این صورت

$$\begin{aligned}\mathbb{1} \cdot f(v_1, v_2, v_3) &= v_{11}v_{23}v_{32}, & (1\,2) \cdot f(v_1, v_2, v_3) &= v_{21}v_{13}v_{32}\\ (1\,3) \cdot f(v_1, v_2, v_3) &= v_{31}v_{23}v_{12}, & (2\,3) \cdot f(v_1, v_2, v_3) &= v_{11}v_{33}v_{22}\\ (1\,2\,3) \cdot f(v_1, v_2, v_3) &= v_{21}v_{33}v_{12}, & (1\,3\,2) \cdot f(v_1, v_2, v_3) &= v_{31}v_{13}v_{22}.\end{aligned}$$

در نتیجه

$$\begin{aligned}\mathrm{Sym}(f) &= v_{11}v_{23}v_{32}+v_{21}v_{13}v_{32}+v_{31}v_{23}v_{12}+v_{11}v_{33}v_{22}+v_{21}v_{33}v_{12}+v_{31}v_{13}v_{22},\\ \mathrm{Alt}(f) &= v_{11}v_{23}v_{32}-v_{21}v_{13}v_{32}-v_{31}v_{23}v_{12}-v_{11}v_{33}v_{22}+v_{21}v_{33}v_{12}+v_{31}v_{13}v_{22}.\end{aligned}$$

۳.۱۷ گزاره. فرض کنید f تابعی k−خطی بر V باشد. در این صورت

۱) تابع k−خطی $\mathrm{Sym}(f)$ متقارن است، بعلاوه، f وقتی و تنها متقارن است که $\mathrm{Sym}(f)=k!\,f$.

۲) تابع k−خطی $\mathrm{Alt}(f)$ نوسانی است، بعلاوه، f وقتی و تنها نوسانی است که $\mathrm{Alt}(f)=k!\,f$.

برهان : تنها (۲) را اثبات می‌کنیم، و اثبات (۱) را به خواننده می‌سپاریم

$$\begin{aligned}\tau\cdot(\mathrm{Alt}(f)) &= \tau\cdot\Big(\sum_{\sigma\in S_k}\mathrm{sgn}(\sigma)\sigma\cdot f\Big)\\ &= \sum_{\sigma\in S_k}\mathrm{sgn}(\sigma)\tau\cdot(\sigma\cdot f) && (۱.۳)\\ &= \sum_{\sigma\in S_k}\mathrm{sgn}(\sigma)(\tau\sigma)\cdot f && (۲.۳)\\ &= \mathrm{sgn}(\tau)\sum_{\sigma\in S_k}\mathrm{sgn}(\tau\sigma)(\tau\sigma)\cdot f && (۳.۳)\\ &= \mathrm{sgn}(\tau)\sum_{\eta\in S_k}\mathrm{sgn}(\eta)\eta\cdot f && (۴.۳)\end{aligned}$$

توضیح اینکه در (۱.۳) از تعریف نقطه‌ای عمل جایگشت بر تابع k−خطی و تعریف عملگر نوسانی−ساز، در (۲.۳) از لم ۳.۱۴، در (۳.۳) از این خاصیت استفاده نموده‌ایم که همواره $\mathrm{sgn}(\tau)^2=1$، و بالاخره در (۴.۳) از این نکته استفاده شده است که $\tau G=G$. چنانچه f خود نوسانی باشد، آنگاه به ازاء هر $\sigma\in S_k$ ای داریم $\sigma\cdot f=\mathrm{sgn}(\sigma)f$ و بنابراین

$$\begin{aligned}\mathrm{Alt}(f) &= \sum_{\sigma\in S_k}\mathrm{sgn}(\sigma)\sigma\cdot f\\ &= \sum_{\sigma\in S_k}\mathrm{sgn}(\sigma)\,\mathrm{sgn}(\sigma)\,f\\ &= \sum_{\sigma\in S_k} f = k!\,f.\end{aligned}$$

چرا که گروه S_k از مرتبه $k!$ است. □

بخش ۶.۳ حاصلضرب تانسوری و گوه‌ای

۳.۱۸ تعریف. گیریم V فضایی برداری و $f \in \mathrm{Lin}_k(V)$ و $g \in \mathrm{Lin}_\ell(V)$ توابعی k−خطی و ℓ−خطی باشند. حاصلضرب تانسوری[۱] $f \otimes g$ آنها را به صورت

$$(f \otimes g)(v_1, \cdots, v_{k+\ell}) := f(v_1, \cdots, v_k)\, g(v_{k+1}, \cdots, v_{k+\ell}),$$

تعریف می‌کنیم، که به وضوح خود یک تابع $(k+\ell)$−خطی بر V است. یعنی، حاصلضرب یک k−تانسور در یک ℓ−تانسور، یک $(k+\ell)$−تانسور می‌باشد.

۳.۶.۱ مثال (ضرب داخلی اقلیدسی) گیریم $\{e_1, \cdots, e_n\}$ پایه استاندارد برای $\mathbb{R}^n$ بوده، و $\{\alpha^1, \cdots, \alpha^n\}$ پایه دوگان متناظر با آن باشد. ضرب داخلی اقلیدسی در $\mathbb{R}^n$ تابعی دوخطی $\langle , \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ با ضابطه

$$\langle v, w \rangle := \sum_{i=1}^{n} v^i w^i, \qquad v = \sum_{i=1}^{n} v_j e_i,\ w = \sum_{i=1}^{n} w_j e_i$$

است. $\langle , \rangle$ را به صورت حاصلضرب تانسوری می‌توان نوشت:

$$\langle v, w \rangle = \sum_{i=1}^{n} v^i w^i = \sum_{i=1}^{n} \alpha^i(v)\alpha^i(w) = \sum_{i=1}^{n} (\alpha^i \otimes \alpha^i)(v, w).$$

بنابراین $\langle , \rangle = \sum_{i=1}^{n} \alpha^i \otimes \alpha^i$. از این مفهوم در هندسه دیفرانسیل استفاده فراوانی می‌شود؛ نظیر تعریف متر ریمانی در هندسه ریمانی. $\triangle$

۳.۱۹ قضیه. فرض کنید f، g و h سه تابع چندخطی بر فضای برداری V باشند و $c \in \mathrm{Lin}_0(V) = \mathbb{R}$. در این صورت

۱) $c \otimes f = cf$،

۲) $(af) \otimes g = f \otimes (ag) = a(f \otimes g)$،

۳) (توضیع‌پذیری جمع در ضرب تانسوری) $(f+g) \otimes h = f \otimes h + g \otimes h$،

۴) (شرکت‌پذیری ضرب تانسوری) $f \otimes (g \otimes h) = (f \otimes g) \otimes h$.

خوب است که اگر f و g دو تابع چندخطی نوسانی بر V باشند، ضرب تانسوری انها را طوری اصلاح کنیم که حاصلضرب آنها نیز نوسانی باشد.

[۱] tensor product

۳.۲۰ تعریف. گیریم V فضایی برداری، $f \in \mathrm{Alt}_k(V)$ و $g \in \mathrm{Alt}_\ell(V)$ است. ضرب گوه‌ای[۱] آنها را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$f \wedge g := \frac{1}{k!\ell!}\mathrm{Alt}(f \otimes g);$$

یا به بیان مختصاتی، به صورت

$$\begin{aligned}(f \wedge g)(v_1, \cdots, v_{k+\ell}) &:= \frac{1}{k!\ell!}\mathrm{Alt}(f \otimes g)\\ &= \sum_{\sigma \in S_{k+\ell}} \mathrm{sgn}(\sigma) f(v_{\sigma(1)}, \cdots, v_{\sigma(k)}) g(v_{\sigma(k+1)}, \cdots, v_{\sigma(k+\ell)}).\end{aligned}$$

بنا به گزاره ۳.۱۷، تابع $f \wedge g$ نیز نوسانی است. بعلاوه

۳.۲۱ قضیه. فرض کنید $f \in \mathrm{Alt}_k(V)$ و $g \in \mathrm{Alt}_\ell(V)$ تابع چندخطی بر فضای برداری V باشند و $c \in \mathrm{Lin}_0(V) = \mathbb{R}$. در این صورت

(۱) $f \wedge g$ نگاشت چندخطی بر V است: $f \wedge g \in \mathrm{Alt}_{(k+\ell)}(V)$.

(۲) $c \otimes f = cf$.

برهان : حکم (۱) بدیهی است. در مورد حکم دوم، توجه می‌کنیم که هر تابع ثابت $c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ را می‌توان به عنوان یک 0−تانسور نوسانی قلمداد نمود. در این وضعیت $c \wedge f$ درست به معنی ضرب اسکالر cf می‌باشد. زیرا، اگر $f \in \mathrm{Alt}_k(V)$ ، $v_1, \cdots, v_k \in V$، آنگاه

$$\begin{aligned}(c \wedge f)(v_1, \cdots, v_k) &= \frac{1}{0!\,k!}\sum_{\sigma \in S_{0+k}} \mathrm{sgn}(\sigma) f(v_{\sigma(1)}, \cdots, v_{\sigma(k)})\\ &= \frac{1}{k!}\sum_{\sigma \in S_k} \mathrm{sgn}(\sigma) f(v_{\sigma(1)}, \cdots, v_{\sigma(k)})\\ &= (cf)(v_1, \cdots, v_k)\end{aligned}$$

و به این ترتیب برهان تمام است. □

۳.۲۲ نتیجه. فرض کنید f، g، و h سه تابع چندخطی بر فضای برداری V باشند و $c \in \mathrm{Lin}_0(V) = \mathbb{R}$. در این صورت

(۱) $(cf) \wedge g = f \wedge (cg) = c(f \wedge g)$،

(۲) (توضیع‌پذیری جمع در ضرب گوه‌ای)
$$\begin{aligned}(f+g) \wedge h &= f \wedge h + g \wedge h,\\ f \wedge (g+h) &= f \wedge g + f \wedge h.\end{aligned}$$

---

[۱] wedge product

بخش ۷.۳ شرکتپذیری ضرب گوه‌ای

دیدیم که ضرب گوه‌ای دوخطی است. بعلاوه

۳.۲۳ گزاره. ضرب گوه‌ای ناجابجایی است: اگر $f \in \mathrm{Alt}_k(V)$ و $g \in \mathrm{Alt}_\ell(V)$، آنگاه

$$f \wedge g = (-1)^{k\ell} g \wedge f.$$

برهان : گیریم

$$\tau = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & \ell & \ell+1 & \cdots & \ell+k \\ k+1 & \cdots & k+\ell & 1 & \cdots & k \end{pmatrix} \in S_{k+\ell}.$$

به ازای هر $\sigma \in S_{k+\ell}$ ای داریم

$$\begin{array}{ccc} \sigma(1) = \sigma\tau(\ell+1), & \cdots, & \sigma(k) = \sigma\tau(\ell+k), \\ \sigma(k+1) = \sigma\tau(1), & \cdots, & \sigma(k+\ell) = \sigma\tau(\ell). \end{array}$$

حال، فرض کنیم $v_1, \cdots, v_{k+\ell} \in V$، در این صورت

$$\begin{aligned} &\mathrm{Alt}(f \otimes g)(v_1, \cdots, v_{k+\ell})) = \\ &\quad = \sum_{\sigma \in S_{k+\ell}} (\operatorname{sgn}\sigma)\, f(v_{\sigma(1)}, \cdots, v_{\sigma(k)})\, g(v_{\sigma(k+1)}, \cdots, v_{\sigma(k+\ell)}) \\ &\quad = \sum_{\sigma \in S_{k+\ell}} (\operatorname{sgn}\sigma)\, f(v_{\sigma\tau(\ell+1)}, \cdots, v_{\sigma\tau(\ell+k)})\, g(v_{\sigma\tau(1)}, \cdots, v_{\sigma\tau(\ell)}) \\ &\quad = (\operatorname{sgn}\tau) \sum_{\sigma \in S_{k+\ell}} (\operatorname{sgn}(\sigma\tau))\, g(v_{\sigma\tau(1)}, \cdots, v_{\sigma\tau(\ell)})\, f(v_{\sigma\tau(\ell+1)}, \cdots, v_{\sigma\tau(\ell+k)}) \\ &\quad = (\operatorname{sgn}\tau)\, \mathrm{Alt}(g \otimes f)(v_1, \cdots, v_{k+\ell})). \end{aligned}$$

تساوی آخر به این دلیل است که $S_{k+\ell} = S_{k+\ell}\tau$، زیرا $S_{k+\ell}$ گروه است و τ عضوی از آن می‌باشد. به این ترتیب، اثبات شد که $\mathrm{Alt}(f \otimes g) = (\operatorname{sgn}\tau)\, \mathrm{Alt}(g \otimes f)$ ؛ با تقسیم طرفین بر $k!\ell!$ و توجه به این نکته که $\operatorname{sgn}\tau = (-1)^{k\ell}$ (تمرین بر عهده خواننده)، حکم مورد نظر نتیجه می‌گردد. □

۳.۲۴ نتیجه. اگر f تابعی k−خطی نوسانی از درجه k فرد بر V باشد، آنگاه $f \wedge f = 0$.

بخش ۸.۳ شرکت‌پذیری ضرب گوه‌ای

برای این منظور، به لم زیر نیاز است.

۳.۸.۱ لم فرض کنید $f \in \mathrm{Lin}_k(V)$ و $g \in \mathrm{Lin}_\ell(V)$، در این صورت

۱) $\mathrm{Alt}(\mathrm{Alt}(f)\otimes g) = k!\,\mathrm{Alt}(f\otimes g)$،

۲) $\mathrm{Alt}(f\otimes \mathrm{Alt}(g)) = \ell!\,\mathrm{Alt}(f\otimes g)$.

برهان : اولی را اثبات نموده، و دومی را به عنوان تمرین به خواننده می‌سپاریم. بنا به تعریف

$$\mathrm{Alt}(\mathrm{Alt}(f)\otimes g) = \sum_{\sigma\in S_{k+\ell}} (\operatorname{sgn}\sigma)\sigma\cdot\left(\sum_{\tau\in S_k}(\operatorname{sgn}\tau)(\tau\cdot f)\otimes g\right).$$

اما، هر عضو $\tau\in S_k$ را به عنوان عنصری از $S_{k+\ell}$ می‌توان قلمداد نمود، که اعداد $k+1$، . . . و $k+\ell$ را ثابت نگاه می‌دارد. در نتیجه $(\tau\cdot f)\otimes g = \tau\cdot(f\otimes g)$، و بنابراین

$$\mathrm{Alt}(\mathrm{Alt}(f)\otimes g) = \sum_{\sigma\in S_{k+\ell}}\sum_{\tau\in S_k}(\operatorname{sgn}\sigma)(\operatorname{sgn}\tau)(\sigma\tau)\cdot(f\otimes g). \qquad (۵.۳)$$

اما، S_k زیرگروه $S_{k+\ell}$ است، و بنابراین $S_{k+\ell}S_k = S_{k+\ell}$. از طرفی، شاخص S_k در $S_{k+\ell}$ برابر $k!$ است؛ بعبارت دیگر، معادله $\mu = \sigma\tau$، که $\sigma\in S_{k+\ell}$ و $\tau\in S_k$، دارای $k!$ جواب است. بنابراین، مجموع در (۵.۳) عملا بر کل $S_{k+\ell}$ به تعداد $k!$ مرتبه صورت می‌پذیرد. یعنی

$$\begin{aligned}\mathrm{Alt}(\mathrm{Alt}(f)\otimes g) &= k!\sum_{\mu\in S_{k+\ell}}(\operatorname{sgn}\mu)\mu\cdot(f\otimes g)\\ &= k!\,\mathrm{Alt}(f\otimes g).\end{aligned}$$

به این ترتیب، حکم اول اثبات شد. □

۳.۲۵ گزاره (ناجابجایی بودن ضرب گوه‌ای). گیریم V فضای برداری حقیقی است و f,g,h توابع چندخطی نوسانی بر V باشند. در این صورت

$$(f\wedge g)\wedge h = f\wedge(g\wedge h).$$

برهان : بنابه تعریف ضرب گوه‌ای

$$\begin{aligned}(f\wedge g)\wedge h &= \frac{1}{(k+\ell)!m!}\,\mathrm{Alt}\Big((f\wedge g)\otimes h\Big)\\ &= \frac{1}{(k+\ell)!m!}\,\frac{1}{k!\ell!}\,\mathrm{Alt}\Big(\mathrm{Alt}(f\otimes g)\otimes h\Big)\\ &= \frac{1}{(k+\ell)!m!k!\ell!}\,(k+\ell)!\,\mathrm{Alt}\Big((f\otimes g)\otimes h\Big) \qquad (۶.۳)\\ &= \frac{1}{k!\ell!m!}\,\mathrm{Alt}\Big((f\otimes g)\otimes h\Big),\end{aligned}$$

که در (۶.۳) از قسمت (۱) از لم ۸.۳ استفاده شده است. به صورت مشابه

$$\begin{aligned}f\wedge(g\wedge h) &= \frac{1}{k!(\ell+m)!}\,\frac{1}{\ell!m!}\,\mathrm{Alt}\Big(f\otimes\mathrm{Alt}(g\otimes h)\Big)\\ &= \frac{1}{k!\ell!m!}\,\mathrm{Alt}\Big((f\otimes g)\otimes h\Big),\end{aligned}$$

چون، ضرب تانسوری شرکت‌پذیر است، حکم از این دو تساوی نتیجه می‌گردد. □

به جهت شرکت‌پذیری ضرب گوه‌ای، دیگر نیازی به پرانتزگذاری نیست، و بجای $(f\wedge g)\wedge h$ می‌توان نوشت $f\wedge g\wedge h$.

۳.۲۶ نتیجه. با مفروضات بالا، داریم

$$f\wedge g\wedge h=\frac{1}{k!\ell!m!}\,\mathrm{Alt}(f\otimes g\otimes h).$$

کلیتر، اگر $f_i\in\mathrm{Alt}_{d_i}(V)$ برای $i=1,\cdots,r$، آنگاه

$$f_1\wedge\cdots\wedge f_r=\frac{1}{(d_1)!\cdots(d_r)!}\,\mathrm{Alt}(f_1\otimes\cdots\otimes f_r).$$

۳.۲۷ نتیجه (ضرب گوه‌ای همبردارها). اگر $\alpha^1,\cdots,\alpha^r\in V^*$ و $v_1,\cdots,v_r\in V$، آنگاه

$$(\alpha^1\wedge\cdots\wedge\alpha^r)(v_1,\cdots,v_r)=\det[\alpha^i(v_j)].$$

که در اینجا، $[\alpha^i(v_j)]$ ماتریسی است $r\times r$ با درآیه (i,j) ام $\alpha^i(v_j)$.

برهان : بنابه قسمت دوم از نتیجه ۳.۲۶، داریم

$$\begin{aligned}(\alpha^1\wedge\cdots\wedge\alpha^r)(v_1,\cdots,v_r) &= \mathrm{Alt}(\alpha^1\otimes\cdots\otimes\alpha^r)(v_1,\cdots,v_r)\\ &= \sum_{\sigma\in S_r}(\mathrm{sgn}\,\sigma)\alpha^1(v_{\sigma(1)})\cdots\alpha^r(v_{\sigma(r)})\\ &= \det[\alpha^i(v_j)]\end{aligned}$$

و برهان تمام است. □

۳.۲۸ تعریف (جبر مدرج). جبر A بر هیات K را در صورتی مدرج[۱] گوئیم که آن را به صورت جمع مستقیم $A=\bigotimes_{k=0}^{\infty}A^k$ فضاهای برداری A^k بر هیات K طوری بتوان نوشت، که ضرب عنصری از A^k در عضوی از A^ℓ، عنصری از $A^{k+\ell}$ باشد.
جبر مدرج $A=\bigotimes_{k=0}^{\infty}A^k$ را در صورتی ناجابجایی[۲] گوئیم که به ازای هر $a\in A^k$ و هر $b\in A^\ell$ ای

$$ab=(-1)^{k\ell}ba.$$

هومورفیسم بین جبرهای مدرج، هسته، نگاره و قضایای ایزومورفیسم در کاتگوری جبرهای مدرج شبیه حالت جبرهای معمولی قابل طرح می‌باشد.

۳.۲۹ مثال. فرض کنید A^k فضای برداری همه چند جمله‌ایهای همگن از درجه k و با ضرایب حقیقی از دو متغیر x و y باشد. در این صورت، جبر چند جمله‌ایهای دو متغیره $A=\mathbb{R}[x,y]$، یک جبر مدرج است. این جبر ناجابجایی نیست.

۳.۳۰ تعریف (جبر خارجی). فرض کنید V فضای برداری n بعدی بر هیات K باشد. فرض کنیم $A^k:=\mathrm{Alt}_k(V)$ و $\mathrm{Alt}_*(V):=\bigotimes_{k=0}^{\infty}A^k$. بعبارت دیگر

$$\mathrm{Alt}_*(V)=\bigotimes_{k=0}^{\infty}\mathrm{Alt}_k(V)=\bigotimes_{k=0}^{n}\mathrm{Alt}_k(V).$$

این نمونه‌ای از یک جبر مدرج ناجابجایی است، که به آن اصطلاحاً جبر خارجی[۳] یا جبر گراسمنی[۴] همبردارهای بر فضای برداری V می‌گویند.

بخش ۹.۳ پایه‌ای برای k−همبردارها

منظور از چند−اندیس از A، یک چندتایی مرتب $I=(i_1,\cdots,i_k)$ از اعضاء A می‌باشد. مانند $I=(2,1,4)$ که یک چند−اندیس از مجموعه $A=\{1,2,3,4,5,6\}$ می‌باشد. چند−اندیس $I=(i_1,\cdots,i_k)$ را در صورتی صعودی گوئیم که درآیه‌های آن به صورت صعودی انتخاب شده باشند: $i_1<i_2<\cdots<i_k$.

[۱] graded [۲] anticommutative [۳] algebra exterior [۴] Grassmann algebra

گیریم V فضای برداری حقیقی و $e_1, \cdots, e_n$ پایه‌ای برای آن باشد. گیریم $\alpha^1, \cdots, \alpha^n$ پایه دوگان نظیر به آن برای V^* باشد. به ازاء هر چند−اندیس مفروض $I = (i_1, \cdots, i_k)$ از اعداد $1, \cdots, n$، تعریف می‌کنیم:

$$e_I := (e_{i_1}, \cdots, e_{i_k}), \qquad \alpha^I := \alpha^{i_1} \wedge \cdots \wedge \alpha^{i_k}.$$

۳.۳۱ لم. اگر با مفروضات بالا، در چند−اندیس $J = (i_1, \cdots, i_r)$ حتی دو تا از درآیه‌ها برابر باشند، آنگاه $\alpha^J = 0$؛ در غیر این صورت اگر $J = (j_1, \cdots, j_r)$ چند−اندیس صعودی حاصل از ترتیب درآیه‌های I باشد و $\sigma \in S_n$ جایگشتی باشد که i_t را به j_t می‌نگارد و سایر اعضاء $\{1, \cdots, n\}$ را به خودشان، آنگاه

$$\alpha^I = (\operatorname{sgn}\sigma)\alpha^J.$$

۳.۳۲ لم. با مفروضات بالا، به ازای هر دو چند−اندیس صعودی و هم طول مفروض $I = (i_1, \cdots, i_r)$ و $J = (j_1, \cdots, j_r)$، داریم

$$\alpha^I(e_J) = \delta^I_J := \begin{cases} 1 & I = J \text{ برای} \\ 0 & I \neq J \text{ برای} \end{cases}$$

برهان : بنابه نتیجه ۳.۲۷،

$$\alpha^I(e_J) = \det(M), \qquad M := \begin{bmatrix} \alpha^{i_1}(e_{j_1}) & \cdots & \alpha^{i_r}(e_{j_1}) \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha^{i_1}(e_{j_r}) & \cdots & \alpha^{i_r}(e_{j_r}) \end{bmatrix}.$$

چنانچه $I = J$، آنگاه ماتریس M همانی است، و بنابراین مقدار دترمینان آن یک می‌شود.
در غیر این صورت، اگر $i_1 \neq j_1$، دو حالت ممکن است: الف) اگر $i_1 < j_1$، آنگاه چون $j_1 < \cdots < j_r$، پس i_1 با همه j_t ها متفاوت است و لذا سطر اول ماتریس M صفر می‌گردد، و بنابراین دترمینان آن صفر است؛ ب) اگر $j_1 < i_1$، آنگاه (به صورت مشابه) چون $i_1 < \cdots < i_r$، پس j_1 با همه i_s ها متفاوت است و لذا ستون اول ماتریس M صفر می‌گردد، و بنابراین دترمینان آن صفر است.
اما، اگر $i_1 = j_1$ ولی $i_2 \neq j_2$، دو حالت ممکن است: الف) اگر $i_2 < j_2$، آنگاه چون $j_2 < \cdots < j_r$، پس i_2 با همه j_t ها متفاوت است و لذا سطر دوم ماتریس M صفر می‌گردد، و بنابراین دترمینان آن صفر است؛ ب) اگر $j_2 < i_2$، آنگاه (به صورت مشابه) چون $i_2 < \cdots < i_r$، پس j_2 با همه i_s ها متفاوت است و لذا ستون دوم ماتریس M صفر می‌گردد، و بنابراین دترمینان آن صفر است.
حالتهای دیگر، به استقراء و به صورت مشابه قابل بررسی است. یعنی، در این حالت همواره $\det(M) = 0$. □

۳.۳۳ گزاره. مجموعه $\mathcal{A}^k$ توابع k−خطی نوسانی α^I، که I یک چند−اندیس k تایی صعودی دلخواه از مجموعه $\{1,\cdots,n\}$ می‌باشد، پایه‌ای برای فضای برداری $\mathrm{Alt}_k(V)$ توابع k−خطی نوسانی بر V تشکیل می‌دهد. در نتیجه، اگر $k\leq n$، آنگاه $\dim \mathrm{Alt}_k(V)=\binom{n}{k}$ و در غیر این صورت $\dim \mathrm{Alt}_k(V)=0$.

برهان : ابتدا، استقلال خطی را اثبات می‌کنیم. برای این منظور فرض کنیم $\sum_I c_I\alpha^I=0$، که I بر مجموعه $\mathcal{I}$ همه چند−اندیسهای صعودی بطول k از مجموعه $\{1,\cdots,n\}$ تغییر می‌کند. این مجموعه $\binom{n}{k}$ عضو دارد (چرا؟)، بعلاوه $c_I\in\mathbb{R}$. حال فرض کنیم $J\in\mathcal{I}$ و دو طرف رابطه $\sum_I c_I\alpha^I=0$ را بر e_J تاثیر می‌دهیم. ، چون همه چند−اندیسها صعودی انتخاب شده‌اند، تنها یکی از I ها برابر J است، بر اساس لم ۳.۳۱، داریم

$$0=\sum_I c_I\alpha^I(e_J)=\sum_I c_I\delta^I_J=c_J.$$

این استقلال خطی مجموعه $\mathcal{A}^k$ را اثبات می‌کند.

برای نشان دادن اینکه $\mathcal{A}^k$ می‌تواند $\mathrm{Alt}_k(V)$ را تولید کند، فرض کنیم $f\in\mathrm{Alt}_k(V)$ و $v_i=\sum_{j=1}^n a_i^j e_j$، که $i=1,\cdots,k$. در این صورت،

$$\begin{aligned}
f(v_1,\cdots,v_k)&=f\Big(\sum_{j_1=1}^n a_1^{j_1}e_{j_1},\cdots,\sum_{j_k=1}^n a_k^{j_k}e_{j_k}\Big)\\
&=\sum_{j_1=1}^n\cdots\sum_{j_k=1}^n f(e_{(j_1,\cdots,j_k)})\,a_1^{j_1}\cdots a_1^{j_k}\\
&=\sum_{j_1=1}^n\cdots\sum_{j_k=1}^n f(e_{(j_1,\cdots,j_k)})\,\alpha^{j_1}(v_1)\cdots\alpha^{j_k}(v_k)\\
&=\Big(\sum_{J\in\mathcal{I}} f(e_J)\,\alpha^J\Big)(v_1,\cdots,v_k).
\end{aligned}$$

این نشان می‌دهیم $f=\sum_{I\in\mathcal{I}} f(e_I)\,\alpha^I$ و کار تمام است. □

بخش ۱۰.۳ تمرینات

۳.۱ ضرب تانسوری همبردارها. گیریم V فضای برداری حقیقی و $e_1,\cdots,e_n$ پایه‌ای برای آن، و $\alpha^1,\cdots,\alpha^n$ پایه دوگان نظیر به آن برای V^* باشد. فرض کنیم $[g_{ij}]\in\mathbb{R}^{n\times n}$ ماتریس $n\times n$ باشد. تابع دوخطی $f:V\times V\to\mathbb{R}$ را به صورت $f(v,w)=\sum_{1\leq i,j\leq n} g_{ij}v^iw^j$ تعریف می‌کنیم، که $v=\sum_i v^ie_i$ و $w=\sum_j w^je_j$. تابع f را بر حسب α^i ها بیان کنید.

۳.۲ ابرصفحه. الف) گیریم V فضای برداری n بعدی، و $f:V\to\mathbb{R}$ تابعک خطی غیر ثابت باشد. نشان دهید $\dim \mathrm{Ker}(f)=n-1$. زیرفضای خطی $n-1$ بعدی $\mathrm{Ker}(f)\subset V$ را ابرصفحه در V گویند.

ب) نشان دهید که در حد ضریبی ثابت، هر تابعک خطی غیر صفر بر فضای برداری V، ابرصفحه‌ای را یکتا از V را مشخص می‌کند. به این معنی که اگر $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Ker}(g)$، آنگاه ثابت $c \in \mathbb{R}$ ای وجود دارد که $f = cg$.

۳.۳ **پایه‌ای برای k−تانسورها.** گیریم V فضای برداری n بعدی با پایه $e_1, \cdots, e_n$ است، و $\alpha^1, \cdots, \alpha^n$ پایه دوگان نظیر به آن برای V^* می‌باشد. نشان دهید $\{\alpha^{i_1} \otimes \cdots \otimes \alpha^{i_k} \mid i_1, \cdots, i_k = 1, \cdots, n\}$ پایه‌ای برای فضای برداری $\mathrm{Lin}_k(V)$ است. در نتیجه $\dim \mathrm{Lin}_k(V) = n^k$.

۳.۴ . گیریم ω یک k−تانسور بر V است. ثابت کنید ω وقتی و تنها وقتی نوسانی است که با تغییر مکان دو تا از متغیرهای متوالیش، تغییر علامت دهد. بعبارت دیگر: $\omega(\cdots, v_i, v_{i+1}, \cdots) = -\omega(\cdots, v_{i+1}, v_i, \cdots)$ به ازای هر $i = 1, \cdots, n-1$.

۳.۵ . گیریم ω یک k−تانسور بر V است. ثابت کنید ω وقتی و تنها وقتی نوسانی است که: دو تا از k بردار $v_1, \cdots, v_k$ برابر باشند، آنگاه $\omega(v_1 \cdots, v_n) = 0$.

۳.۶ **تبدیلات بر ضرب گوه‌ای همبردارها.** فرض کنید دو مجموعه از همبردارهای $\{\omega^1, \cdots, \omega^k\}$ و $\{\tau^1, \cdots, \tau^k\}$ بر فضای برداری V با روابط $\omega^i = \sum_{j=1}^k a^i_j \tau^j$، که $i = 1, \cdots, k$ بهم مربوط باشند. ثابت کنید $\omega^1 \wedge \cdots \wedge \omega^k = \det(A)\, \tau^1 \wedge \cdots \wedge \tau^k$ ، که در آن $A = [a^i_j] \in \mathbb{R}^{k\times k}$.

۳.۷ **تبدیلات بر k−همبردارها.** فرض کنید ω یک k−همبردار بر فضای برداری V باشد و دو مجموعه $\{v_1, \cdots, v_k\}$ و $\{u_1, \cdots, u_k\}$ از بردارهای در V را در نظر بگیرید که با روابط $u_i = \sum_{j=1}^k a^i_j v_j$، که $i = 1, \cdots, k$ بهم مربوط باشند. ثابت کنید $\omega(u_1, \cdots, u_k) = \det(A)\, \omega(v_1, \cdots, v_k)$ ، که در آن $A = [a^i_j] \in \mathbb{R}^{k\times k}$.

۳.۸ **استقلال خطی همبردارها.** همبردارهای $\alpha^1, \cdots, \alpha^k$ بر فضای برداری V مفروضند. ثابت کنید اینها وقتی و تنها وقتی بر V^* مستقل خطی هستند که $\alpha^1 \wedge \cdots \wedge \omega^k \neq 0$.

۳.۹ **ضرب خارجی.** فرض کنید 1−همبردار α و k−همبردار ω بر فضای برداری با بعد متناهی V داده شده‌اند. نشان دهید $\alpha \wedge \omega = 0$ اگر و تنها اگر به ازای یک $(k-1)$−همبردار τ ای $\omega = \alpha \wedge \tau$.

۳.۱۰ **قلاب یک k−همبردار.** به ازای هر نگاشت خطی مفروض $L : V \to W$ بین فضاهای برداری، و هر عدد صحیح مثبت k، نگاشتی موسوم به قلاب[1] $L^* : \mathrm{Alt}_k(W) \to \mathrm{Alt}_k(V)$ با ضابطه

$$L^*(f)(v_1, \cdots, v_k) := f(L(v_1), \cdots, L(v_k)), \qquad v_1, \cdots, v_k \in V,$$

می‌توان تعریف نمود. نشان دهید که اگر $L : V \to V$ عملگر خطی بر فضای برداری n بعدی V باشد، آنگاه $L^* : \mathrm{Alt}_n(V) \to \mathrm{Alt}_n(V)$ عملاً ضرب در دترمینان نگاشت L می‌باشد.

۳.۱۱ **دترمینان.** فرض کنید $f : (\mathbb{R}^n)^n \to \mathbb{R}$ با ضابطه $f(v_1, \cdots, v_n) = v_{11} \cdots v_{nn}$ باشد. نشان دهید که تابع f k−خطی است و $\mathrm{Sym}(f) = k!\, f$ و در نتیجه f متقارن است. همچنین، ثابت کنید که $\mathrm{Alt}(f) = \det$.

۳.۱۲ . قضیه ۳.۱۹ را اثبات کنید.

---

[1] pullback

فصل ۴

فرم دیفرانسیلی بر $\mathbb{R}^n$

در این فصل از اطلاعات فصل قبل استفاده نموده و فرمهای دیفرانسیلی بر $\mathbb{R}^n$ مطرح می‌کنیم. به کمک این مفهوم می‌توان بسیاری از قضایای حسابان در $\mathbb{R}^3$ که قبلاً دیده‌اید را به شکل منسجم‌تری مطرح نموده و تعمیم داد.

بخش ۱.۴ 1–فرم دیفرانسیلی و دیفرانسیل یک تابع

۱.۴ تعریف (فضای هم-مماس). نقطه $p \in \mathbb{R}^n$ را در نظر بگیرید. فضای برداری دوگان $(T_p\mathbb{R}^n)^*$ نظیر به فضای مماس $T_p\mathbb{R}^n$، را فضای هم-مماس[۱] به $\mathbb{R}^n$ در نقطه p نامیده و با نماد $T_p^*\mathbb{R}^n$ نشان می‌دهیم. بنابراین، هر عضو از $T_p^*\mathbb{R}^n$ عملاً یک همبردار و یا تابعک خطی بر فضای مماس $T_p\mathbb{R}^n$ می‌باشد. درست همانند میدانهای برداری، تعریف می‌کنیم:

۲.۴ تعریف (میدان همبرداری یا 1–فرم دیفرانسیلی). میدان همبرداری[۲] یا 1–فرم دیفرانسیلی[۳] بر مجموعه باز $U \subseteq \mathbb{R}^n$، تابعی است ω که به هر نقطه $p \in \mathbb{R}^n$ عنصری $\omega(p)$ از $T_p^*\mathbb{R}^n$ را نظیر می‌کند. بنابراین، هر عضو از $T_p^*\mathbb{R}^n$ عملاً یک همبردار و یا تابعک خطی بر فضای مماس $T_p\mathbb{R}^n$ می‌باشد. به جهت اختصار، بجای 1–فرمی دیفرانسیلی، تنها می‌گوییم 1–فرم[۴].

۳.۴ تعریف (دیفرانسیل تابع). تابع هموار $f : U \to \mathbb{R}$ بر زیرمجموعه باز $U \subseteq \mathbb{R}^n$ را در نظر بگیرید. به ازای هر $p \in U$ ، تعریف می‌کنیم

$$(df)_p : T_p\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \qquad (df)_p(X_p) := X_p(f).$$

به وضوح، $(df)_p$ همبرداری بر $T_p\mathbb{R}^n$ است. 1–فرمی دیفرانسیلی df که به هر $p \in U$ همبردار $(df)_p$ را نظیر می‌کند، دیفرانسیل f[۵] می‌نامند.

---
[۱] cotangent space [۲] covector field [۳] differential 1–form [۴] 1–form [۵] differential of f

در بخش ۳.۲ دیدیم که اگر $x^1, \cdots, x^n$ پایه استاندارد بر $\mathbb{R}^n$ باشد و $p \in \mathbb{R}^n$، آنگاه $\{\partial/\partial x^1|_p, \cdots, \partial/\partial x^n|_p\}$ پایه‌ای برای فضای مماس $T_p\mathbb{R}^n$ تشکیل می‌دهد. اکنون می‌توان حکم مشابهی برای $T_p^*\mathbb{R}^n$ بدست آورد. اثبات آن را به عنوان تمرین به خواننده می‌سپاریم.

۴.۴ گزاره. اگر $x^1, \cdots, x^n$ پایه استاندارد بر $\mathbb{R}^n$ باشد، آنگاه به ازای هر $p \in \mathbb{R}^n$ ای $\{(dx^1)_p, \cdots (dx^n)_p\}$ پایه دوگان نظیر به پایه $\{\partial/\partial x^1|_p, \cdots, \partial/\partial x^n|_p\}$ برای فضای هم-مماس $T_p^*\mathbb{R}^n$ می‌باشد.

بنابه به این گزاره، به ازای هر 1-فرم دیفرانسیلی ω بر زیرمجموعه باز مفروض $U \subseteq \mathbb{R}^n$، و به ازای هر نقطه $p \in U$ ای اعداد منحصر بفرد $a_i(p) \in \mathbb{R}$ چنان یافت می‌شوند که $\omega_p = \sum_{i=1}^n a_i(p)\,(dx^i)_p$. در نتیجه، توابع $a_i : U \to \mathbb{R}$، که $i = 1, \cdots, n$ را چنان می‌توان تعریف نمود که

$$\omega = \sum_{i=1}^n a_i\, dx^i.$$

۴.۵ تعریف. توابع $a_i : U \to \mathbb{R}$، که $i = 1, \cdots, n$ مشروح در بالا را اصطلاحاً توابع مختصاتی ω می‌نامند. 1-فرم دیفرانسیلی $\omega = \sum_{i=1}^n a_i\, dx^i$ را در صورتی هموار گویند که توابع مختصاتی آن $a_1, \cdots, a_n : U \to \mathbb{R}$ هموار باشند.

۴.۶ نتیجه. در حالت $\mathbb{R}^3$ یا $\mathbb{R}^2$، بجای x^1، x^2 و x^3 بترتیب از x، y و z استفاده می‌کنیم. به همین دلیل، در این حالت بجای dx^1، dx^2 و dx^3 از dx، dy و dz استفاده می‌کنیم.

۴.۷ مثال. $\omega = x\,dx - yz\,dy$ نمونه‌ای از یک 1-فرم دیفرانسیلی بر $\mathbb{R}^3$ است. این فرم دیفرانسیلی هموار است، زیرا سه تابع مختصاتی x، $-yz$ و 0 هموارند.

فرم دیفرانسیلی $\eta = \sqrt{xy}\,dx + dy$ بر باز $U = \{(x,y) \,|\, x > 0, y > 0\} \subset \mathbb{R}^2$ هموار است.

۴.۸ گزاره (بیان دیفرانسیل بر حسب مختصات). اگر $f : U \to \mathbb{R}$ تابعی هموار باشد، آنگاه

$$df = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x^i}\, dx^i. \tag{۱.۴}$$

برهان : بنابه گزاره ۴.۴، به ازای هر $p \in U$، اعداد $a_i(p) \in \mathbb{R}$ چنان وجود دارند که $(df)_p = \sum_{i=1}^n a_i(p)\,(dx^i)_p$. یا به اختصار، توابع $a_i : U \to \mathbb{R}$ چنان وجود دارند که $df = \sum_{i=1}^n a_i\, dx^i$. حال، دو طرف این تساوی را در $\partial/\partial x^i$ محاسبه می‌کنیم:

$$df\Big(\frac{\partial}{\partial x^i}\Big) = \sum_{i=1}^n dx^i\Big(\frac{\partial}{\partial x^i}\Big) = \sum_{i=1}^n a_i\,\delta_j^i = a_j.$$

از طرفی، بنابه تعریف

$$df\Big(\frac{\partial}{\partial x^i}\Big) = \Big(\frac{\partial}{\partial x^i}\Big)(f) = \frac{\partial f}{\partial x^i};$$

و به این ترتیب، حکم اثبات شد. □

۴.۹ نتیجه. اگر $f : U \to \mathbb{R}$ تابعی هموار باشد، آنگاه دیفرانسیل df نیز هموار است.

۴.۱۰ مثال. تابع $f : U \to \mathbb{R}$ با ضابطه $f(x,y) = \arctan(y/x)$ بر $U = \{(x,y) | x \neq 0\}$ را در نظر بگیرید. در این صورت، f تابعی هموار است؛ در نتیجه، 1–فرم دیفرانسیلی

$$\begin{aligned} df &= \frac{-y/x^2}{1+(y/x)^2}\,dx + \frac{1/x}{1+(y/x)^2}\,dy \\ &= \frac{-y\,dx + x\,dy}{x^2+y^2}, \end{aligned}$$

بر U هموار است.

۴.۱۱ یادداشت. توجه شود که 1–فرمهای دیفرانسیلی $dx^1, \cdots, dx^n$ رفتاری شبیه به دوگان میدانهای برداری $\partial/\partial x^1, \cdots, \partial/\partial x^n$ ایفا می‌کنند:

$$dx^i\Big(\frac{\partial}{\partial x^j}\Big) = \delta_i^j.$$

این احساس البته درست است! کمی جلوتر این موضوع را بیشتر توضیح خواهیم داد.

بخش ۲.۴ k–فرم دیفرانسیلی

۴.۱۲ تعریف. منظور از فرم دیفرانسیلی ω درجه k یا به اختصار k–فرم بر زیرمجموعه باز $U \subseteq \mathbb{R}^n$، تابعی است که به هر نقطه p از U یک تابع k–خطی نوسانی بر فضای مماس $T_p\mathbb{R}^n$ متناظر می‌سازد؛ بعبارت دیگر $\omega_p \in \mathrm{Alt}_k(T_p\mathbb{R}^n)$. چون $\mathrm{Alt}_1(T_p\mathbb{R}^n) = T_p^*\mathbb{R}^n$، تعریف k–فرم تعمیم قبلی ما از 1–فرم بشمار می‌آید.

بنابه گزاره ۳.۳۳، مجموعه

$$dx_p^I := dx_p^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_p^{i_k}, \qquad 1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n,$$

پایه‌ای برای $\mathrm{Alt}_k(T_p\mathbb{R}^n)$ تشکیل می‌دهد. بنابراین، در هر نقطه $p \in U$، اعداد حقیقی $a_I(p) \in \mathbb{R}$ چنان وجود دارند که

$$\omega_p = \sum a_I(p)\,dx_p^I, \qquad 1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n;$$

در نتیجه، k–فرمی ω را بر U به صورت ترکیب خطی

$$\omega = \sum a_I\,dx_p^I,$$

می‌توان نوشت، که $a_I : U \to \mathbb{R}$ هاتوابع مختصاتی آن نامیده می‌شوند.

۴.۱۳ **تعریف.** در صورتی k−فرم ω را هموار گوییم که توابع مختصاتی $a_I : U \to \mathbb{R}$ آن بر U هموار باشند. مجموعه همه k−فرمی‌های هموار بر U را با نماد $\Omega^k(U)$ نشان می‌دهیم. 0−فرمی بر U، به هر نقطه $p \in U$ عنصری از $\mathrm{Alt}_0(T_p\mathbb{R}^n) = \mathbb{R}$ را نظیر می‌کند. بنابراین، 0−فرمی بر U درست به معنی تابعی هموار بر U است. در نتیجه $\Omega^0(U) = C^\infty(U)$.

۴.۱۴ **قضیه.** فرض کنید $U \subseteq \mathbb{R}^n$. در این صورت، مجموعه $\Omega^k(U)$ همه k−فرمی‌های هموار بر U

۱) همراه اعمال جمع و ضرب اسکالر نقطه‌ای

$$(\omega + a\eta)_p := \omega_p + a\eta_p, \qquad a \in \mathbb{R},\ \omega \in \Omega^k(U)$$

تشکیل یک فضای برداری بر هیات اعداد حقیقی $\mathbb{R}$ می‌دهد؛

۲) همراه ضرب نقطه‌ای توابع هموار $C^\infty(U)$

$$(f\omega)_p := f(p)\omega_p, \qquad f \in C^\infty(U),\ \omega \in \Omega^k(U)$$

تشکیل یک مدول بر حلقه $C^\infty(U)$ می‌دهد؛ و

۳) همراه ضرب گوه‌ای به صورت نقطه‌ای

$$(\omega \wedge \eta)_p := \omega_p \wedge \eta_p, \qquad \omega \in \Omega^k(U),\ \eta \in \Omega^\ell(U)$$

تشکیل یک جبر بر هیات $\mathbb{R}$ است.

۴.۱۵ **نتیجه.** فرض کنید $U \subseteq \mathbb{R}^n$، و تعریف کنیم $\Omega^*(U) := \bigoplus_{k=1}^\infty \Omega^k(U)$. در این صورت، $\Omega^*(U)$ یک $\mathbb{R}$−فضای برداری و همزمان یک $C^\infty(U)$−مدول و همزمان یک $\mathbb{R}$−جبر مدرج، شرکت‌پذیر و ناجابجایی است.

۴.۱۶ **یادداشت.** اگر $k > n$، آنگاه هیچ k−فرمی دیفرانسیلی بر $U \subseteq \mathbb{R}^n$ مگر k−فرمی صفر وجود ندارد. زیرا در این حالت، اگر $\deg dx^I > n$، آنگاه در dx^I حد اقل دو تا از dx^{i_s} ها برابرند، و لذا حاصل صفر می‌باشد: $dx^I = 0$؛ پس $\Omega^k(U) = \{0\}$.

۴.۱۷ **مثال.** گیریم x, y, z مختصات استاندارد بر $\mathbb{R}^3$ باشد. در این صورت، هر 1−فرمی هموار بر $\mathbb{R}^3$ به شکل

$$a(x,y,z)\,dx + b(x,y,z)\,dy + c(x,y,z)\,dz$$

است؛ هر 2−فرمی هموار بر $\mathbb{R}^3$ به شکل

$$a(x,y,z)\,dx \wedge dy + b(x,y,z)\,dy \wedge dz + c(x,y,z)\,dz \wedge dx$$

است؛ و بالاخره، هر 3−فرمی هموار بر $\mathbb{R}^3$ به شکل

$$a(x,y,z)\,dx \wedge dy \wedge dz$$

است، که a, b, c توابعی هموار بر $\mathbb{R}^3$ می‌باشند.

۴.۱۸ **مثال.** توابع $f_1 = x+y+z$، $f_2 = xy+yz+zx$ و $f_3 = xyz$ بر $\mathbb{R}^3$ را در نظر بگیرید. در این صورت

$$\begin{aligned} df_1\wedge df_2\wedge df_3 &= \\ &= (dx+dy+dz)\wedge((y+z)dx+(x+z)dy+(x+y)dz)\wedge(yz\,dx+xz\,dy+xy\,dz)\\ &= (1)(y+z)(yz)\,dx\wedge dx\wedge dx+\cdots+(1)(x+y)(xy)\,dz\wedge dz\wedge dz \qquad \text{(۲۷ جمله)}\\ &= (x^2(y-z)+y^2(z-x)+z^2(x-y))\,dx\wedge dy\wedge dz. \end{aligned}$$

ضریب $dx\wedge dy\wedge dz$ برابر دترمینان ژاکوبی تابع $F=(f_1,f_2,f_3)$ است، چرا؟

۴.۱۹ **مثال.** فرمهای دیفرانسیلی $\omega = a\,dx+b\,dy+c\,dz$ و $\eta = u\,dy\wedge dz+v\,dz\wedge dx+w\,dx\wedge dy$ بر $\mathbb{R}^3$ را در نظر بگیرید، که a,b,c,u,v,w توابعی هموار بر حسب (x,y,z) می‌باشند. در این صورت

$$\omega\wedge\eta \;=\; (au+bv+cw)\,dx\wedge dy\wedge dz.$$

این را اثبات کنید.

بخش ۳.۴ فرم دیفرانسیلی بعنوان تابع چندخطی از میدانهای برداری

۴.۲۰ **تعریف.** اگر ω یک-فرمی هموار و X میدان برداری هموار بر مجموعه باز $U\subseteq\mathbb{R}^n$ باشد، تابع $\omega(X):U\to\mathbb{R}$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\omega(X)_p := \omega_p(X_p), \qquad p\in U.$$

این را بر حسب مختصات بازنویسی می‌کنیم.

۴.۲۱ **لم.** فرض کنیم $\omega=\sum_{i=1}^n a_i\,dx^i\in\Omega^1(U)$، $X=\sum_{j=1}^n b^j\frac{\partial}{\partial x^j}\in\mathfrak{X}(U)$ و $f\in C^\infty(U)$. در این صورت،

الف) تابع $\omega(X)$ هموار است و $\omega(X)=\sum_{i=1}^n a_ib^i$.

ب) $\omega(fX)=f\omega(X)$؛ بعبارت دیگر، $\omega(X)$ نسبت به X بر $C^\infty(U)$ خطی است.

برهان : برای اثبات (الف)، کافی است توجه شود که

$$\begin{aligned}\omega(X) &= \Big(\sum_{i=1}^n a_i\,dx^i\Big)\Big(\sum_{j=1}^n b^j\frac{\partial}{\partial x^j}\Big)\\ &= \sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n a_ib^j\delta_i^j = \sum_{i=1}^n a_ib^i.\end{aligned}$$

این نشان می‌دهد که تابع $\omega(X)$ بر U هموار است. اثبات قسمت (ب) بر عهده خواننده است. □

۴.۲۲ **مثال.** $\omega = y\,dx - z^2\,dy$، $X = yz(\partial/\partial x) + (y/x)(\partial/\partial z)$ و $f = xy^2z^3$ که همگی بر $U = \{(x,y,z) | x > 0\}$ هموارند را در نظر بگیرید. در این صورت

$$\begin{aligned}\omega(X) &= (y)(yz) + (-z^2)(0) + (0)(y/x)\\ &= y^2z.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\omega(fX) &= (xy^3z^3)(yz) + (-xy^2z^5)(0) + (0)(y/x)\\ &= xy^4z^4 = f\,\omega(X).\end{aligned}$$

۴.۲۳ **نتیجه.** فرض کنید $\omega \in \Omega^1(U)$، در این صورت نگاشت $\mathfrak{X}(U) \to C^\infty(U)$ با ضابطه $X \mapsto \omega(X)$ تابعکی $C^\infty(U)$–خطی است.

۴.۲۴ **مثال.** مشابه حالت یک–فرمی، اگر $\omega \in \Omega^k(U)$ یک k–فرمی دیفرانسیلی هموار بر مجموعه باز $U \subseteq \mathbb{R}^n$ باشد، تعریف می‌کنیم

$$\mathfrak{X}(U) \times \cdots \times \mathfrak{X}(U) \to C^\infty(U), \qquad (X_1, \cdots, X_k) \mapsto \omega(X_1, \cdots, X_k) \tag{۲.۴}$$

۴.۲۵ **قضیه.** نگاشت ω معرفی شده در (۲.۴) نسبت به هر یک از متغیرهایش $C^\infty(U)$–خطی است. بعبارت دیگر، یک نگاشت k–خطی بر $C^\infty(U)$–مدول $\mathfrak{X}(U)^k$ می‌باشد.

بخش ۴.۴ مشتق خارجی

قبلاً دیفرانسیل توابع هموار و یا همان 0–فرمی‌های دیفرانسیلی را در (۱.۴) تعریف نمودیم:

$$df = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x^i}\,dx^i.$$

حال، این مفهوم را به حالت k–فرمی‌های دیفرانسیلی تعمیم می‌دهیم.

۴.۲۶ **تعریف.** اگر $\omega = \sum_I a_I\,dx^I$ یک k–فرمی دیفرانسیلی هموار بر زیرمجموعه باز $U \subseteq \mathbb{R}^n$ باشد، تعریف می‌کنیم:

$$\begin{aligned} d\omega &:= \sum_I da_I\,dx^I \\ &= \sum_I \sum_{j=1}^n \frac{\partial a_I}{\partial x^j}\,dx^j \wedge dx^I \end{aligned}$$

که یک $(k+1)$–فرمی دیفرانسیلی هموار بر U میباشد. بعبارت دیگر $d : \Omega^k(U) \to \Omega^{k+1}(U)$.

۴.۲۷ مثال. 1−فرم دیفرانسیلی $\omega = f\,dx + g\,dy$ بر $\mathbb{R}^2$ را در نظر بگیرید، که $f, g \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$. در این صورت

$$\begin{aligned} d\omega &= df \wedge dx + dg \wedge dy \\ &= (f_x dx + f_y dy) \wedge dx + (g_x dx + g_y dy) \wedge dy \\ &= (g_x - f_y)\, dx \wedge dy. \end{aligned}$$

که بجای $\partial f/\partial x$ از f_x و بجای $\partial f/\partial y$ از f_y استفاده شده است. در این محاسبه از $dx \wedge dx = 0$، $dy \wedge dy = 0$ و $dy \wedge dx = -dx \wedge dy$ نیز استفاده شده است، که نتایجی از ناجابجایی بودن ضرب گوه‌ای می‌باشند.

۴.۲۸ تعریف. گیریم $A = \bigoplus_{k=0}^\infty A^k$ جبر مدرجی بر هیات K باشد. نگاشت K−خطی $D : A \to A$ را در صورتی پادمشتق[۱] بر A گوییم که به ازای هر $\omega \in A^k$ و هر $\tau \in A^\ell$ ای

$$D(\omega \wedge \tau) = (D\omega) \wedge \tau + (-1)^k \omega \wedge (D\tau). \qquad (۴.۳)$$

اگر به ازای هر k ای، پادمشتق D اعضای A^k را به A^{k+m} بنگارد، اصطلاحاً می‌گوییم D از درجه m است.

۴.۲۹ گزاره. ۱) دیفرانسیل خارجی $d : \Omega^*(U) \to \Omega^*(U)$ پادمشتق از درجه یک است:

$$d(\omega \wedge \tau) = (d\omega) \wedge \tau + (-1)^{\deg \omega} \omega \wedge (d\tau).$$

۲) $d^2 = 0$.

۳) اگر $f \in C^\infty(U)$ و $X \in \mathfrak{X}(U)$، آنگاه $(df)(X) = Xf$.

برهان : (۱) هر دو طرف رابطه (۴.۳) نسبت به ω و τ خطی هستند، بنابراین کافی است آن را تنها برای فرمهای ساده‌تر $\omega = f\,dx^I$ و $\tau = g\,dx^J$ تحقیق کنیم. در نتیجه

$$\begin{aligned} d(\omega \wedge \tau) &= d(fg\, dx^I \wedge dx^J) \\ &= \sum \frac{\partial (fg)}{\partial x^i} dx^i \wedge dx^I \wedge dx^J \\ &= \sum \frac{\partial f}{\partial x^i} g\, dx^i \wedge dx^I \wedge dx^J + \sum f \frac{\partial g}{\partial x^i} dx^i \wedge dx^I \wedge dx^J. \end{aligned}$$

اگر در مجموع دوم فرم دیفرانسیلی $\frac{\partial g}{\partial x^i} dx^i$ را از روی k−فرمی dx^I رد کنیم، به k بار جابجایی نیاز داریم، و بنابراین عبارت در $(-1)^k$ ضرب می‌گردد. بنابراین

$$\begin{aligned} d(\omega \wedge \tau) &= \sum \frac{\partial f}{\partial x^i} g\, dx^i \wedge dx^I \wedge dx^J + (-1)^k \sum f\, dx^I \wedge \Big(\frac{\partial g}{\partial x^i} dx^i\Big) \wedge dx^J \\ &= (d\omega) \wedge \tau + (-1)^{\deg \omega} \omega \wedge (d\tau). \end{aligned}$$

---

[۱] antiderivation

(۲) چون d نسبت به متغیرش $RR-$خطی است، رابطه $d^2\omega = 0$ را تنها برای فرم ساده‌تر $\omega = f\,dx^I$ اثبات کنیم. در نتیجه

$$\begin{aligned} d^2(f\,dx^I) &= d\Big(\sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x^i}dx^i\Big)\wedge dx^I \\ &= \Big(\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x^j\partial x^i}dx^j\wedge dx^i\Big)\wedge dx^I. \end{aligned}$$

در مجموع آخر، جملات را به دو گروه می‌توان تقسیم نمود: اول، جملات به شکل

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^i\partial x^j}dx^i\wedge dx^j, \qquad i=j,$$

که همگی صفرند؛ و دوم، جفت جملات به شکل

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^i\partial x^j}dx^i\wedge dx^j,\ \ \frac{\partial^2 f}{\partial x^j\partial x^i}dx^j\wedge dx^i, \qquad i<j,$$

اما، در هر دومورد، جمع این دو جمله نیز صفر است:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^i\partial x^j}dx^i\wedge dx^j + \frac{\partial^2 f}{\partial x^j\partial x^i}dx^j\wedge dx^i = \Big(\frac{\partial^2 f}{\partial x^i\partial x^j} - \frac{\partial^2 f}{\partial x^j\partial x^i}\Big)dx^j\wedge dx^i = 0.$$

(۳) گیریم $X=\sum a^i\partial/\partial x^i$، در این صورت

$$\begin{aligned} (df)(X) &= \Big(\sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x^i}dx^i\Big)\Big(\sum_{j=1}^n a^j\frac{\partial}{\partial x^j}\Big) \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x^i}a^i = Xf, \end{aligned}$$

و به این ترتیب برهان تمام است. □

۴.۳۰ توصیف مشتق خارجی. سه خاصیت در گزاره ۴.۲۹ دیفرانسیل خارجی را به صورت یکتا توصیف می‌کند. به این معنی که اگر نگاشت $D:\Omega^*(U)\to\Omega^*(U)$ دارای خواص ذیل باشد، آنگاه $D=d$.

(۱) $D:\Omega^*(U)\to\Omega^*(U)$ پادمشتق از درجه یک است:

$$D(\omega\wedge\tau) = (D\omega)\wedge\tau + (-1)^{\deg\omega}\,\omega\wedge(D\tau).$$

(۲) $d^2=0$.

(۳) اگر $f\in C^\infty(U)$ و $X\in\mathfrak{X}(U)$، آنگاه $(Df)(X)=Xf$.

برهان : چون هر k−فرمی بر U مجموعی از جملات به شکل $f\,dx^{i_1}\wedge\cdots\wedge dx^{i_k}$ است، و چون d و D هر دو $\mathbb{R}$−خطی هستند، تساوی $D=d$ را تنها باید در این حالت ساده‌تر تحقیق نمود. اما، در این حالت

$$
\begin{aligned}
D(f\,dx^{i_1}\wedge\cdots\wedge dx^{i_k}) &= D(f\,Dx^{i_1}\wedge\cdots\wedge Dx^{i_k}) && \text{بنابه (۳)، } Dx^i=dx^i\\
&= Df\left(Dx^{i_1}\wedge\cdots\wedge Dx^{i_k}\right) && \text{بنابه (۱) و (۲)}\\
&= df\left(dx^{i_1}\wedge\cdots\wedge dx^{i_k}\right) && \text{باز هم بنابه (۳)}\\
&= d(f\,dx^{i_1}\wedge\cdots\wedge dx^{i_k}).
\end{aligned}
$$

بنابراین $D=d$ بر $\Omega^*(U)$. □

بخش ۵.۴ فرم بسته و فرم دقیق

۴.۳۱ تعریف. فرم دیفرانسیلی $\omega\in\Omega^k(U)$ را در صورت بسته[۱] گویند که $d\omega=0$؛ آن را در صورتی دقیق[۲] گویند که $(k-1)$−فرم دیفرانسیلی τ چنان وجود داشته باشد که $\omega=d\tau$.

۴.۳۲ مثال. 1−فرمی $\omega=(-y\,dx+x\,dy)/(x^2+y^2)$ بر صفحه سفته $\mathbb{R}^2-\{0\}$ را در نظر بگیرید.چون

$$
\begin{aligned}
d\omega &= \Big(\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}dx+\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}dy\Big)\wedge dx+\Big(\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}dx-\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}dy\Big)\wedge dy\\
&= \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}(dy\wedge dx+dx\wedge dy)=0
\end{aligned}
$$

این فرم بسته است.

۴.۳۳ مثال. فرم $\omega=(y^2-x^2)\,dx\wedge dy$ بر $\mathbb{R}^2$ را در نظر بگیرید. اگر $\tau=x^2y\,dx+xy^2\,dy$، آنگاه $d(\tau)=d(x^2y\,dx+xy^2\,dy)=(y^2-x^2)\,dx\wedge dy=\omega.$ بنابراین، فرم ω دقیق است. این دو مفهوم با هم مرتبط هستند. چرا که، اگر فرمی دقیق باشد $\omega=d\tau$، آنگاه $d\omega=d^2\tau=0$ و لذا بسته است. در نتیجه

۴.۳۴ قضیه. هر فرم دقیق بر زیرمجموعه باز $U\subseteq\mathbb{R}^n$، یک فرم بسته است.

عکس این حکم در حالت کلی غلط است. به مثال زیر توجه شود.

۴.۳۵ فرم بسته غیر دقیق. فرم بسته ω در مثال ۴.۳۲ را در نظر بگیرید. این فرم دقیق نیست. زیرا، اگر تابع هموازی $f:\mathbb{R}^2-\{0\}$ وجود داشته باشد که $\omega=df$، آنگاه با در نظر گرفتن دایره واحد

[۱] closed [۲] exact

$c:[0,2\pi]\to\mathbb{R}$ با ضابطه $c(t)=(\cos t,\sin t)$. داریم

$$\begin{aligned}\int_c \omega &= \int_0^{2\pi} \frac{-(\sin t)d(\cos t)+(\cos t)d(\sin t)}{(\cos t)^2+(\sin t)^2}\\ &= \int_0^{2\pi}\frac{\sin^2 t\,dt+\cos^2 t\,dt}{1}\\ &= \int_0^{2\pi} dt = 2\pi\end{aligned}$$

در حالی که

$$\int_c \omega = \int_0^{2\pi} df = f(2\pi)-f(0)=0.$$

پس ممکن نیست که ω دقیق باشد. وارون قضیه ۴.۳۴ تحت شرایطی توپولوژیک بر U برقرار است، که بعداً مطرح خواهد شد.

بخش ۶.۴ کاربرد در حسابان

به کمک فرمهای دیفرانسیلی، بسیاری از قضایای حسابان بر $\mathbb{R}^3$ را می‌توان یکپارچه نموده، و به صورت واحدی ارائه کرد. در اینجا به چند مورد ساده می‌پردازیم.

هر تابع برداری $F=(P,Q,R):\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ مفروضی را به عنوان یک میدان برداری می‌توان قلمداد نمود:

$$F:\ p\mapsto F(p)_p\in T_p\mathbb{R}^3,\qquad p\mapsto (P(p),Q(p),R(p))_p.$$

سه عملگر در حسابان مقدماتی بر $\mathbb{R}^3$ مطرح می‌گردد: گرادیان ∇، کرل Curl و دیورژانس div.

۴.۳۶ تعریف. عملگر گرادیان ∇ با ضابطه

$$\nabla := \left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z}\right),$$

تابع هموار $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ و میدان برداری هموار $F=(P,Q,R):\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ را در نظر بگیرید. گرادیان f[۱] را به صورت میدان برداری

$$\begin{aligned}\operatorname{grad}(f) &:= \nabla f\\ &= (f_x,f_y,f_z).\end{aligned}$$

[۱] gradient

تعریف می‌کنیم. کرل یا پیچش[۲] F را به صورت میدان برداری

$$\begin{aligned}\mathrm{Curl}(F) &:= \nabla\times F = \begin{bmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z\\ P & Q & R\end{bmatrix}\\ &= (R_y - Q_z, P_z - R_x, Q_x - P_y)\end{aligned}$$

تعریف می‌کنیم؛ و سرانجام، دیورژانس[۱] F را به صورت تابع

$$\begin{aligned}\mathrm{div}(F) &:= \nabla\cdot F\\ &= P_x + Q_y + R_z,\end{aligned}$$

معرفی می‌کنیم. به راحتی، بعنوان تمرینی از درس ریاضی عمومی می‌توان اثبات نمود که

۴.۳۷ قضیه. ۱) به ازای هر تابع هموار f ای $\mathrm{Curl}(\mathrm{grad}(f)) = (0,0,0)$.
۲) به ازای هر میدان برداری هموار F ای $\mathrm{div}(\mathrm{Curl}(F)) = 0$.

ملاحظه می‌شود که

$$\left\{\text{توابع هموار}\right\} \xrightarrow{\mathrm{grad}} \left\{\text{میدانهای برداری}\right\} \xrightarrow{\mathrm{Curl}} \left\{\text{میدانهای برداری}\right\} \xrightarrow{\mathrm{div}} \left\{\text{توابع هموار}\right\}$$

بر اساس این قضیه، ترکیب متوالی دو تا از نگاشتهای بالا، همواره صفر است؛ یا اصطلاحاً، دنباله دقیق است. این موضوع شبیه حکم قسمت دوم از گزاره ۴.۲۹ است، که بر اساس آن دنباله

$$\Omega^0(U) \xrightarrow{d} \Omega^1(U) \xrightarrow{d} \Omega^2(U) \xrightarrow{d} \Omega^3(U) \xrightarrow{d} \cdots$$

نیز دقیق است، یعنی $d^2 = 0$. برای توضیح این مطلب، باید ابتدا یک سری یکی‌گیری مطرح شود.

۴.۳۸ تعریف. فرض کنید U زیرمجموعه بازی از $\mathbb{R}^3$ باشد. تعریف می‌کنیم

$$\begin{aligned}
&\Phi_1 : \Omega_1(U) \longrightarrow \mathfrak{X}(U), && P\,dx + Q\,dy + R\,dz \longmapsto (P,Q,R)\\
&\Phi_2 : \Omega_2(U) \longrightarrow \mathfrak{X}(U), && P\,dy\wedge dz + Q\,dz\wedge dx + R\,dx\wedge dy \longmapsto (P,Q,R)\\
&\Phi_3 : \Omega_3(U) \longrightarrow C^\infty(U), && f\,dx\wedge dy\wedge dz \longmapsto f
\end{aligned}$$

با این نگاشتهای یکی‌گیری مشاهده می‌شود که سه دیاگرام زیر تعویض‌پذیرند:

$$\begin{tikzcd}
f \arrow[r, "d"] \arrow[d, equal] & f_x\,dx + f_y\,dy + f_z\,dz \arrow[d, "\Phi_1"]\\
f \arrow[r, "\mathrm{grad}"] & (f_x, f_y, f_z)
\end{tikzcd}$$

---

[۱] divergence [۲] curl

$$\begin{array}{ccc}
P\,dx+Q\,dy+R\,dz & \xrightarrow{d} & \begin{array}{r}(R_y-Q_z)\,dy\wedge dz+(P_z-R_x)\,dz\wedge dx\\ +(Q_x-P_y)\,dx\wedge dy\end{array}\\
\Phi_1\big\downarrow & & \big\downarrow\Phi_2\\
(P,Q,R) & \xrightarrow{\text{Curl}} & (R_y-Q_z,P_z-R_x,Q_x-P_y)
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
P\,dy\wedge dz+Q\,dz\wedge dx+R\,dx\wedge dy & \xrightarrow{d} & (P_x+Q_y+R_z)\,dx\wedge dy\wedge dz\\
\Phi_2\big\downarrow & & \big\downarrow\Phi_3\\
(P,Q,R) & \xrightarrow{\text{div}} & P_x+Q_y+R_z
\end{array}$$

این سه را می‌توان با هم ترکیب نمود. نمودار حاصل نیز تعویض‌پذیر می‌باشد:

$$\begin{array}{ccccccc}
\Omega^0(U)=C^\infty(U) & \xrightarrow{d} & \Omega^1(U) & \xrightarrow{d} & \Omega^2(U) & \xrightarrow{d} & \Omega^3(U)\\
\big\| & & \big\downarrow\Phi_1 & & \big\downarrow\Phi_2 & & \big\downarrow\Phi_3\\
C^\infty(U) & \xrightarrow{\text{grad}} & \mathfrak{X}(U) & \xrightarrow{\text{Curl}} & \mathfrak{X}(U) & \xrightarrow{\text{div}} & C^\infty(U)
\end{array}$$

یعنی، محاسبه گرادیان، کرل و دیورژانس، عملاً به معنی دیفرانسیل‌گیری از فرمهای دیفرانسیل است؛ به همین دلیل قضیه بالا در عمل همان حکم $d^2=0$ می‌باشد.

این مشاهده می‌توان سرآغاز کوهومولوژی[۱] محسوب شود. شاخه‌ای بسیار ابزاری و کاربردی که در آن از جبر بسیار استفاده می‌شود.

۴.۳۹ نتیجه (اندیسهای بالا، پایین و جمعبندی انیشتن). در هندسه دیفرانسیل مرسوم است که بردارها را با اندیسهای پایین $e_1,\cdots,e_n$، و فرمهای دیفرانسیلی را با اندیسهای بالا $\omega^1,\cdots,\omega^n$ نشان می‌دهند. چون توابع مختصاتی عملاً $0-$فرم هستند، توابع مختصاتی را نیز با اندیسهای بالایی $x^1,\cdots,x^n$ نشان می‌دهیم. دیفرانسیل آنها $dx^1,\cdots,dx^n$ را نیز که $1-$فرم هستند، با اندیسهای بالایی نشان میدهیم. در نمایش میدانهای برداری مختصاتی $\partial/\partial x^1,\cdots,\partial/\partial x^n$ از اندیس بالا استفاده می‌شود، چرا که قبلا مختصات را با همین اندیسها نشان داده بودیم.

در اندیس‌گذاری توابع مولفه‌ای، بسته به اینکه در میدانهای برداری ظاهر شوند و یا در فرمهای دیفرانسیلی، بترتیب از اندیسهای بالا و پایین استفاده می‌کنیم. مثلاً، در میدان برداری $X=\sum a^ie_i$ توابع مولفه‌ای a^i با اندیس بالا هستند، دلیل آن این است که اندیسهای بالایی در a^i، با اندیسهای پایینی در e_i جور می‌شوند، و نوعی تقارن در فرمول ظاهر می‌گردد. جالب اینکه، اگر $e_i=\partial/\partial x^i$ و $\omega=\sum b_jdx^j$، آنگاه

$$\omega(X)=\Big(\sum b_j\,dx^j\Big)\Big(\sum a^i\frac{\partial}{\partial x^i}\Big)=\sum b_ia^i$$

که باز هم در آن اندیسهای بالا و پایین تقارن دارند!

---

[۱] cohomology

بخش ۷.۴ تمرینات

۴.۱ . گیریم x^1, x^2, x^3, x^4 مختصاتی بر $\mathbb{R}^4$ هستند و $p \in \mathbb{R}^4$. پایه‌ای برای $\mathrm{Alt}_3(T_p\mathbb{R}^4)$ بنویسید.

۴.۲ . فرض کنید 1−فرمی ω و 2−فرمی η و میدانهای برداری X, Y, Z بر زیرمجموعه باز $U \subseteq \mathbb{R}^n$ داده شده‌اند. عبارت $\omega \wedge \eta(X, Y, Z)$ را بسط دهید.

۴.۳ . گیریم $\omega = z\,dx - dz$ و $X = y\,\partial/\partial x + x\,\partial/\partial y$ بر $\mathbb{R}^2$. مقدار $\omega(X)$ و $d\omega$ را محاسبه کنید.

۴.۴ . به ازای هر $p = (p^1, p^2, p^3) \in \mathbb{R}^3$، تابع دوخطی ω_p بر $T_p\mathbb{R}^3$ را به صورت

$$\omega_p(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = p^3 \det\begin{pmatrix} a^1 & b^1 \\ a^2 & b^2 \end{pmatrix}$$

تعریف می‌کنیم، که $\mathbf{a} = (a^1, a^2, a^3), \mathbf{b} = (b^1, b^2, b^3) \in T_p\mathbb{R}^3$. نشان دهید ω یک 2−فرمی دیفرانسیلی هموار بر $\mathbb{R}^3$ است، و سپس آن را بر حسب پایه $dx^i \wedge dx^j$ ها بنویسید.

۴.۵ **فرم در مختصات قطبی.** فرض کنید از مختصات قطبی (r, θ) برای صفحه $\mathbb{R}^2$ استفاده شود. چنانچه $x = r\cos\theta$ و $y = r\sin\theta$، فرمهای dx، dy و $dx \wedge dy$ را بر اساس dr و $d\theta$ بازنویسی کنید.

۴.۶ **فرم در مختصات کروی.** فرض کنید از مختصات کروی (ρ, ϕ, θ) برای صفحه $\mathbb{R}^3$ استفاده شود. چنانچه $x = \rho\sin\phi\cos\theta$، $y = \rho\sin\phi\sin\theta$ و $z = \rho\cos\phi$ فرمهای dx، dy، dz، $dx \wedge dy$، $dy \wedge dz$، $dz \wedge dx$ و $dx \wedge dy \wedge dz$ را بر اساس $d\rho$، $d\phi$ و $d\theta$ بازنویسی کنید.

۴.۷ . فرمهای دیفرانسیلی $\alpha = a_1\,dx^1 + a_2\,dx^2 + a_3\,dx^3$ و $\beta = b_1\,dx^2 \wedge dx^3 + b_2\,dx^3 \wedge dx^1 + b_3\,dx^1 \wedge dx^2$ بر $\mathbb{R}^3$ را در نظر بگیرید. $\alpha \wedge \beta$ را محاسبه کنید.

۴.۸ **رابطه بین ضرب خارجی[۱] و ضرب گوای.** به هر 1−همبردار $\alpha = a_1\,dx + a_2\,dy + a_3\,dz$ بر $\mathbb{R}^3$، برداری $v_\alpha = (a_1, a_2, a_3)$ در $\mathbb{R}^3$ را نظیر می‌کنیم؛ همچنین، به هر 2−همبردار $\beta = b_1\,dy \wedge dz + b_2\,dz \wedge dx + b_3\,dx \wedge dy$ بر $\mathbb{R}^3$، برداری $v_\beta = (b_1, b_2, b_3)$ در $\mathbb{R}^3$ را نظیر می‌کنیم. نشان دهید که با این یکی‌گیری، به ازای هر دو 1−همبردار α و β ای داریم $v_{\alpha\wedge\beta} = v_\alpha \times v_\beta$.

۴.۹ **ضرب داخلی.** اگر ω یک k−همبردار بر فضای برداری V و $v \in V$، آنگاه ضرب داخلی یا انقباض ω توسط v عبارت است از $(k-1)$−همبردار $\iota_v\omega$ با تعریف

$$\iota_v\omega(v_2, \cdots, v_k) := \omega(v, v_2, \cdots, v_k), \qquad v_2, \cdots, v_k \in V.$$

ثابت کنید که اگر $\alpha^1, \cdots, \alpha^k$ همبردارهایی بر V باشند، آنگاه

$$\iota_v(\alpha^1 \wedge \cdots \wedge \alpha^k) = \sum_{i=1}^{k} (-1)^{i+1} \alpha^i(v)\, \alpha^1 \wedge \cdots \wedge \widehat{\alpha^i} \wedge \cdots \wedge \alpha^k$$

که $\widehat{\ }$ بر α^i به معنی حذف α^i از ضرب گوه‌ای مورد نظر می‌باشد. (راهنمایی: از لم ۳.۳۲ استفاده شود.)

[۱] cross product

۴.۱۰ **ضرب داخلی.** با حفظ نمادهای در مساله قبل، ثابت کنید:
الف) $\iota_v \circ \iota_v = 0$؛
ب) $\iota_v(\omega \wedge \tau) + (\iota_v\omega) \wedge \tau + (-1)^k \omega \wedge (\iota_v\tau)$، به ازای هر $\omega \in \mathrm{Alt}_k(V)$ و $\tau \in \mathrm{Alt}_\ell(V)$.
در نتیجه، ι_v یک پادمشتق از درجه -1 است که مربع آن صفر می‌باشد.

۴.۱۱ **جابجاگر مشتقها و پادمشتقها.** فرض کنید $A = \bigoplus_{k=0}^{\infty} A^k$ یک جبر مدرج بر هیات K است. منظور از ابرمشتق[۱] بر A از درجه m، نگاشتی $K-$خطی $D : A \to A$ است که $D(A^k) \subseteq A^{k+m}$ و به ازای هر $a \in A^k$ و هر $b \in A^\ell$ ای

$$D(ab) = (Da)b + (-1)^{km} a(Db).$$

اگر D_1 و D_2 ابرمشتقات از درجه بترتیب m_1 و m_2 بر A باشند، جابجاگر آنها را به صورت

$$[D_1, D_2] = D_1 \circ D_2 - (-1)^{m_1 m_2} D_2 \circ D_1,$$

تعریف می‌کنیم. نشان دهید $[D_1, D_2]$ ابرمشتقی از درجه $m_1 + m_2$ می‌باشد.

---

۱ superderivation

فصل ۵

منیفلد

از نظر شهودی، منیفلد تعمیمی از منحنی و رویه به ابعادی بالاتر است. منیفلد یک فضای موضعا اقلیدسی است که در آن هر نقطه دارای یک همسایگی بنام چارت بوده، و هر چارت با زیر مجموعه ای باز از $\mathbb{R}^n$ همئومورف است. مختصات بر چارت این امکان را فراهم ساخته تا بتوان محاسبات را مانند فضای اقلیدسی انجام داد، بنابراین بسیاری از مفاهیم $\mathbb{R}^n$ مانند، مشتقپذیری، مشتق نقطه ای، فضای مماس و فرم دیفرانسیلی، روی منیفلد قابل اجرا می‌باشد.

همانند بسیاری از مفاهیم اساسی ریاضیات، مفهوم منیفلد نیز توسط یک فرد مشخص ارائه نگردید، بلکه به مرور زمان و با یک فعالیت جمعی بدست آمد. کارل فدریک گاوس[۱] در شاهکار خود با عنوان «بررسی کلی رویه های مستوی» که در سال ۱۸۲۷ انتشار یافت، بطور آزادانه از مختصات موضعی بر یک رویه استفاده نمود، و این نشان دهندهٔ آن بود که وی از قبل ایدهٔ چارت را در نظر داشت. بعلاوه او اولین فردی بود که یک رویه را بعنوان یک فضای مجرد واجد هویت مستقل دانسته، و فارغ از طریقهٔ نشانده شدن آن در یک فضای اقلیدسی می‌دانست. برنارد ریمن[۲] در سخنرانی معارفه خود تحت عنوان درباره مفروضات نهفته در مبانی هندسه است[۳]. در سال ۱۸۵۴ در دانشگاه گوتینگن، اساس هندسهٔ دیفرانسیل با ابعاد بالاتر را بنا نهاد. در واقع واژهٔ منیفلد که بر گرفته از واژهٔ آلمانی Mannigfaltigkeit می‌باشد، مورد استفاده ریمن در توصیف اشیای مورد نیاز وی قرار گرفت. این امر در اواخر قرن نوزدهم و درکارهای هانری پوانکاره[۴] در هومولوژی و مطالعهٔ فضاهای اقلیدسی موضعی بطور جدی دنبال شد. در اواخر قرن نوزدهم و اوایل قرن بیستم که تب مطالعه و بسط نظریه توپولوژی عمومی همه جا را در بر گرفت، این اول بار بود که در سال ۱۹۳۱، یک تعریف مدرن از منیفلد بر اساس توپولوژی عمومی و یک گروه از توابع انتقال ارائه گردید؟

در این فصل تعاریف و خواص مقدماتی یک منیفلد هموار و نگاشت های هموار بین آن ها ارائه می‌گردد. تنها روشی که در ابتدا مجبوریم از آن بهره گیریم تا مشخص ساخته که چه زمانی یک فضا یک منیفلد است، آن است که نشان دهیم که گردایه ای از چارتهای C^∞−سازگار، فضا را می‌پوشاند. در بخش ۷ توضیح خواهیم داد که تحت چه شرایطی یک فضای توپولوژی خارج قسمتی می‌تواند تشکیل یک منیفلد

[۱] Carl Friedrich Gauss
[۲] Bernhard Riemann
[۳] Uber die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen
[۴] Poincaré Henri

دهد، که روش دیگری برای ساخت منیفلد ها می‌باشد.

علی رغم وجود منیفلدهای متفاوت مانند، منیفلدهای توپولوژی، منیفلدهای C^k ، منیفلد های تحلیلی و منیفلدهای مختلط، در این کتاب بر آن هستیم تا منیفلدها را هموار در نظر گیریم. در ابتدا مطلب را با منیفلدهای توپولوژی، که دارای خواص، هاوسدورف، اصل موضوع شمارایی دوم و فضای موضعا اقلیدسی می‌باشند، آغاز نموده، و سپس با ارائهٔ مفهوم اطلس هموار ماکزیمال، از منیفلدهای توپولوژی، منیفلدهای هموار را بسازیم. این امر با ذکر چند مثال ساده بیان می‌گردد.

بخش ۱.۵ منیفلد های توپولوژی

در ابتدا چند تعریف از توپولوژی عمومی، را بیاد می‌آوریم. برای توضیحات بیشتر، ضمیمهٔ A را ببینید. یک فضای توپولوژی را واجد خاصیت شمارایی دوم[1] نامیم، هرگاه، دارای یک پایهٔ شمارا باشد. همسایگی نقطه ای مانند p در یک فضای توپولوژی M عبارتست از هر مجموعهٔ باز شامل p. یک پوشش باز[2] از M گردایه ای مانند $\{U_\alpha\}_{\alpha\in A} U_\alpha$ از مجموعه های باز در M بوده، که اجتماع $\bigcup_{\alpha\in A} U_\alpha$ برابر M باشد.

۵.۱ تعریف. فضای توپولوژی M با بعد n، یک فضای موضعا اقلیدسی است، این بدان معنی است که هر نقطه p در M دارای همسایگی مانند U و همئومورفیسمی مانند ϕ از U بروی یک زیرمجموعهٔ باز از $\mathbb{R}^n$ باشد. زوج $(U,\phi : U \to \mathbb{R}^n)$ را چارت[3]، U را همسایگی مختصاتی[4] یا مجموعهٔ باز مختصاتی، و ϕ را نگاشت یا دستگاه مختصاتی بر U نامیم. گوییم (U,ϕ) چارتی به مرکز p است، هرگاه $\phi(p) = 0$ باشد.

۵.۲ تعریف. منظور از منیفلد توپولوژی[5]، فضایی هاسدروف، شمارای دوم و موضعا اقلیدسی است. آنرا با بعد n نامیم، هرگاه موضعا اقلیدسی با بعد n باشد.

برای آنکه بعد یک منیفلد توپولوژی خوش تعریف باشد، می‌بایست بدانیم که برای $n \neq m$، یک زیر مجموعهٔ باز از $\mathbb{R}^n$ همئومورف با یک زیر مجموعهٔ باز از $\mathbb{R}^m$ نیست. این حقیقت را که ناوردایی بعد می‌نامیم، بسادگی نمی‌توان اثبات کرد. قصد آن را نداشته که این مسیر را دنبال نمایی، چون علاقه اصلی ما مطالعهٔ منیفلدهای هموار می‌باشد، در آنجا نتایج مشابه بسادگی اثبات می‌گردد (نتیجهٔ ۸.۱۴). البته اگر یک منیفلد توپولوژی دارای چندین مولفه همبند باشد، این امکان وجود دارد که برای هر مولفه بعد متفاوتی منظور گردد.

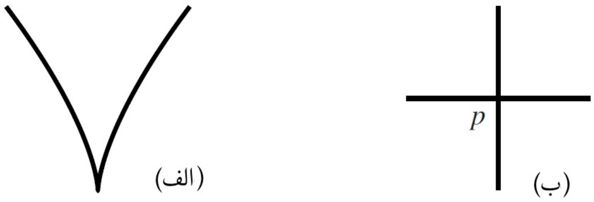
۵.۳ مثال. فضای اقلیدسی $\mathbb{R}^n$ را می‌توان بوسیلهٔ تک چارت $(\mathbb{R}^n, 1_{\mathbb{R}^n})$ پوشاند، در آن $1_{\mathbb{R}^n} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ نگاشت همانی می‌باشد. این یک مثال مقدماتی از منیفلدهای توپولوی می‌باشد. هر زیر مجموعهٔ باز از $\mathbb{R}^n$ نیز یک منیفلد توپولوژی، با چارت $(U, 1_U)$ می‌باشد.

یاد آوری می‌کنیم که شرط هاوسدورف و شمارایی دوم "خواصی ارثی" می‌باشند؛ یعنی، یک زیر فضا از فضای هاوسدورف خود هاوسدورف بوده (گزارهٔ A ۱۹.) و هر زیر فضا از فضای شمارایی دوم، خود شمارای دوم می‌باشد. (گزارهٔ A ۱۴.). بنابراین هر زیر فضا از $\mathbb{R}^n$ هاوسدورف و شمارای دوم می‌باشد.

---

[1] second countable [2] open covering [3] chart [4] coordinate eighborhood [5] topological manifold

۵.۴ مثال (نقطهٔ توقف[۶]). نمودار $y = x^{2/3}$ در $\mathbb{R}^2$ یک منیفلد توپولوژی است (شکل ۱.۵–الف) . بدلیل آنکه زیر فضایی از $\mathbb{R}^2$ است، پس هاوسدورف و شمارای دوم می‌باشد. چون نمودار فوق با ضابطهٔ $x \mapsto (x, x^{2/3})$ همئومورف با $\mathbb{R}$ می‌باشد، پس موضعا اقلیدسی است.



شکل ۱.۵: (الف) نقطه توقف (ب) نقطه تقاطع

۵.۵ مثال (نقطهٔ تقاطع[۱]). نشان می‌دهیم که شکل تقاطع در $\mathbb{R}^2$ مطابق (شکل ۱.۵–ب) با توپولوژی زیر فضایی در نقطهٔ تلاقی آن p، نمی‌تواند منیفلد توپولوژی باشد.

حل: فرض کنید که تقاطع، در نقطهٔ p موضعا اقلیدسی و با بعد n باشد. آنگاه p دارای یک همسایگی U همئومورف با یک گوی باز $B := B(0, \epsilon) \subset \mathbb{R}^n$ است که p را به 0 می‌نگارد. همئومورفیسم $U \to B$ به همئومورفیسم $U - \{p\} \to B - \{0\}$ تحدید می‌شود. اگر $n \geq 2$ باشد، آنگاه $B - \{0\}$ همبند بوده، و اگر $n = 1$، آنگاه از دو ناحیهٔ همبند تشکیل گردیده است. چون $U - \{B\}$ چهار مولفهٔ همبند دارد، در نتیجه هیچ همئومورفیسمی از $U - \{p\}$ به $B - \{0\}$ وجود ندارد. این تناقض ثابت می‌کند که تقاطع در p موضعا اقلیدسی نمی‌باشد.

بخش ۲.۵ چارتهای سازگار

فرض کنید $(U, \phi : U \to \mathbb{R}^n)$ و $(V, \psi : V \to \mathbb{R}^n)$ دو چارت از یک منیفلد توپولوژی مفروض باشند. چون $U \cap V$ در U باز است و $\phi : U \to \mathbb{R}^n$ همئومورفیسمی بروی یک زیر مجموعهٔ باز از $\mathbb{R}^n$ می‌باشد، تصویر $\phi(U \cap V)$ نیز یک زیر مجموعهٔ باز از $\mathbb{R}^n$ است. بطور مشابه $\psi(U \cap V)$ نیز یک زیر مجموعهٔ باز از $\mathbb{R}^n$ است.

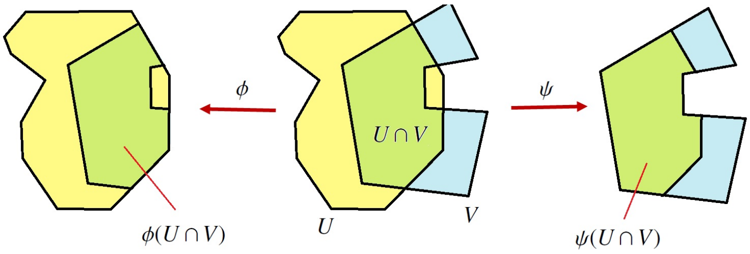
۵.۶ تعریف. دو چارت $(U, \phi : U \to \mathbb{R}^n)$ و $(V, \psi : V \to \mathbb{R}^n)$ از یک منیفلد توپولوژی را C^∞–سازگار[۲] نامیم، هرگاه دو نگاشت زیر هموار می‌باشند (شکل ۲.۵):

$$\phi \circ \psi^{-1} : \psi(U \cap V) \to \phi(U \cap V), \quad \psi \circ \phi^{-1} : \phi(U \cap V) \to \psi(U \cap V)$$

این دو نگاشت را توابع گذر[۳] بین چارتها می‌نامیم. اگر $U \cap V$ تهی باشد، آنگاه دو چارت بطور خودکار C^∞–سازگارند. برای سهولت، از نماد $U_{\alpha\beta}$ برای $U_\alpha \cap U_\beta$ و $U_{\alpha\beta\gamma}$ برای $U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma$ استفاده می‌شود. چون همواره از چارتهای C^∞–سازگار استفاده می‌کنیم، اغلب همواری را حذف نموده و برای اختصار از واژهٔ چارتهای سازگار استفاده می‌نماییم.

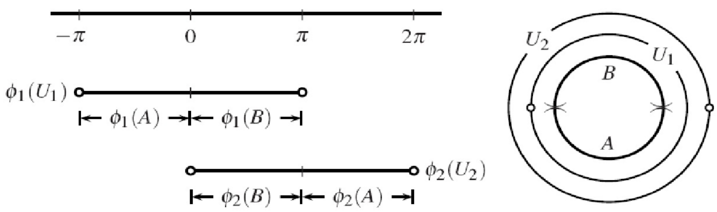
---

۶ cusp ۱ cross ۲ C^∞–compatible ۳ transition functions



شکل ۲.۵:

۵.۷ تعریف. یک اطلس هموار[۴] یا به اختصار یک اطلس[۵]، بر فضای موضعا اقلیدسی M گردایه‌ای مانند $\mathfrak{U} = \{(U_\alpha, \phi_\alpha)\}$ است از زوج چارتهای C^∞ - سازگار که M را می‌پوشانند، یعنی $M = \bigcup_\alpha U_\alpha$



شکل ۳.۵:

۵.۸ مثال (اطلسی هموار بر دایره). دایرهٔ واحد $\mathbb{S}^1$ در صفحهٔ مختلط $\mathbb{C}$ را بصورت مجموعه ای از نقاط $\{e^{it} \in \mathbb{C} \mid -\pi < t < \pi\}$ می‌توان در نظر گرفت. فرض کنید U_1 و U_2 دو زیر مجموعهٔ باز از از $\mathbb{S}^1$ باشند (شکل ۳.۵ را ببینید):

$$U_1 = \{e^{it} \in \mathbb{C} \mid -\pi < t < \pi\}, \qquad U_2 = \{e^{it} \in \mathbb{C} \mid 0 < t < 2\pi\},$$

باشند. تابع $\phi_\alpha : U_\alpha \to \mathbb{R}$ را برای $\alpha = 1,2$ با ضابطهٔ زیر تعریف می‌کنیم،

$$\phi_1(e^{it}) = t, \qquad -\pi < t < \pi, \qquad \phi_2(e^{it}) = t, \qquad 0 < t < 2\pi.$$

توابع ϕ_1 و ϕ_2 شاخه هایی از تابع لگاریتمی مختلط $(1/i)\log z$ بوده و هر یک از این توابع همئومورفیسمی بر تصاویر خود هستند. بنابراین (U_1, ϕ_1) و (U_2, ϕ_2) چارتهایی بر $\mathbb{S}^1$ می‌باشند. اشتراک $U_1 \bigcap U_2$ شامل دو مولفهٔ همبند است، یعنی

$$A = \{e^{it} \mid -\pi < t < 0\}, \qquad B = \{e^{it} \mid 0 < t < \pi\}.$$

---

[۴] smotth atlass [۵] atlass

همراه با چارتهای

$$\phi_1(U_1 \cap U_2) = \phi_1(A \sqcup B) = \phi_1(A) \sqcup \phi_1(B) = (\pi, 0) \ \sqcup \ (0, \pi),$$
$$\phi_2(U_1 \cap U_2) = \phi_2(A \sqcup B) = \phi_2(A) \sqcup \phi_2(B) = (\pi, 2\pi) \ \sqcup \ (0, \pi).$$

از نماد $A \sqcup B$ برای نمایش دادن عبارت است از اجتماع دو مجموعهٔ جدا از هم A و B استفاده می‌کنیم.
تابع گذر $\phi_2 \circ \phi_1^{-1} : \phi_1(A \sqcup B) \to \phi_2(A \sqcup B)$

$$(\phi_2 \circ \phi_1^{-1})(t) = \begin{cases} t + 2\pi & t \in (-\pi, 0) \quad \text{برای} \\ t & t \in (0, \pi) \quad \text{برای} \end{cases}$$

یا به صورت مشابه

$$(\phi_1 \circ \phi_2^{-1})(t) = \begin{cases} t - 2\pi & t \in (\pi, 2\pi) \quad \text{برای} \\ t & t \in (0, \pi) \quad \text{برای} \end{cases}$$

بنابراین (U_1, ϕ_1) و (U_2, ϕ_2) چارتهای C^∞ –سازگار بوده و لذا تشکیل یک اطلس هموار روی $\mathbb{S}^1$ می‌دهند.

گر چه چارتهای C^∞ – سازگار، منعکس و متقارن بوده، اما باید خاطر نشان ساخت که متعدی نمی‌باشند. برای اثبات آن، فرض کنید چارت (U_1, ϕ_1) با (U_2, ϕ_2) و چارت هموار باشند. توجه کنید که سه تابع مختصاتی می‌بایست همزمان بر دامنهٔ مشترک U_{123} تعریف شده باشند. بنابراین، ترکیب زیر

$$\phi_3 \circ \phi_1^{-1} = (\phi_3 \circ \phi_2^{-1}) \circ (\phi_2 \circ \phi_1^{-1})$$

نیز تنها بر $\phi_1(U_{123})$، و نه لزوما بر $\phi_1(U_{13})$، هموار می‌باشد (شکل ۴.۵). با توجه به آنچه که گذشت در مورد $\phi_3 \circ \phi_1^{-1}$ روی $\phi_1(U_{13} - U_{123})$ چیزی نمی‌دانیم، بنابراین نمی‌توان نتیجه گرفت که (U_1, ϕ_1) با (U_3, ϕ_3) نمی‌تواند C^∞ –سازگار باشد.

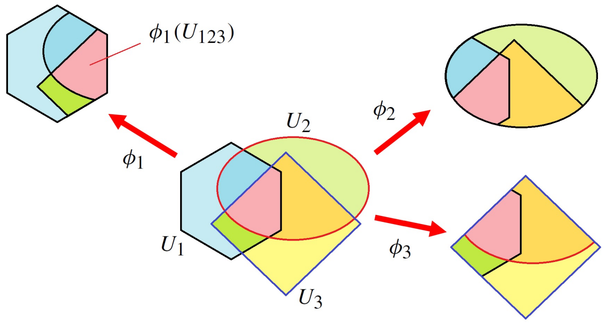
در صورتی گوییم چارت (V, ψ) با اطلس $\{(U_\alpha, \phi_\alpha)\}$ سازگار است، که با همهٔ چارتهای (U_α, ϕ_α) از آن اطلس، سازگار باشد.

۵.۹ لم. فرض کنید $\{(U_\alpha, \phi_\alpha)\}$ یک اطلس بر یک فضای موضعا اقلیدسی باشد. اگر دو چارت (V, ψ) و (W, ϕ_σ) با اطلس $\{(U_\alpha, \phi_\alpha)\}$ سازگار باشند، آنگاه آن دو با یکدیگر سازگارند.

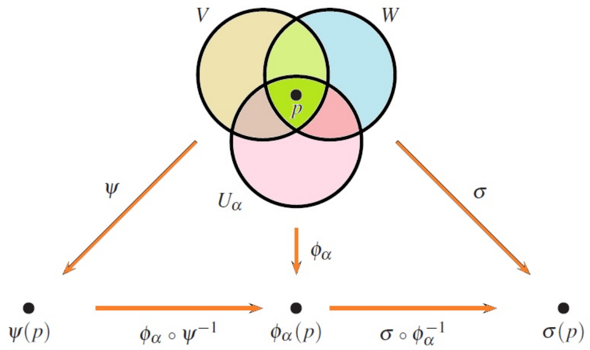
برهان : (مطابق شکل ۵.۵) فرض کنید $p \in V \bigcap W$. حال باید نشان داد که $\sigma \circ \psi^{-1}$ در $\psi(p)$، هموار است. چون $\{(U_\alpha, \phi_\alpha)\}$ اطلسی برای M می‌باشد، به ازای α ای $p \in U_\alpha$، در نتیجه p در اشتراک سه مجموعهٔ $V \bigcap W \bigcap U_\alpha$ واقع است.

بنا به ملاحظات فوق، $\sigma \circ \psi^{-1} = (\sigma \circ \phi_\alpha^{-1}) \circ (\phi_\alpha \circ \psi^{-1})$،بر $\psi(V \bigcap W \bigcap U_\alpha)$، هموار می‌باشد، در نتیجه در $\psi(p)$ نیز چنین است. چون p یک نقطهٔ دلخواه از $V \bigcap W$ است، این ثابت می‌کند که $\sigma \circ \psi^{-1}$ بر $\psi(V \bigcap W)$، هموار است. بطور مشابه $\psi \circ \sigma^{-1}$ بر $\sigma(V \bigcap W)$ نیز هموار است. □

توجه دارید که در اثبات فوق طرفین تساوی $\sigma \circ \psi^{-1} = (\sigma \circ \phi_\alpha^{-1}) \circ (\phi_\alpha \circ \psi^{-1})$ دارای دامنه‌های متفاوت بوده، بنابراین تساوی فوق زمانی معنا دارد که دو نگاشت بر دامنه مشترک شان در نظر گرفته شوند.



شکل ۴.۵: تابع گذر $\phi_3 \circ \phi_1^{-1}$ بر $\phi_1(U_{123})$، هموار است.



شکل ۵.۵: دو چارت(V,ψ) و (W,σ) سازگار با یک اطلس

بخش ۳.۵ منیفلد های هموار

یک اطلس $\mathfrak{M}$ روی یک فضای موضعا اقلیدسی را ماکزیمال نامیم، هرگاه مشمول در یک اطلس بزرگتر نباشد؛ به بیان دیگر، اگر $\mathfrak{U}$ اطلس دیگری شامل $\mathfrak{M}$ باشد، آنگاه $\mathfrak{U} = \mathfrak{M}$.

۵.۱۰ **تعریف.** منظور از منیفلد هموار[۱] یا C^∞−منیفلد، منیفلدی توپولوژی همراه با یک اطلس ماکزیمال می‌باشد. اطلس ماکزیمال را ساختار دیفرانسیل پذیر بر M نیز می‌نامند. یک منیفلد را n بعدی نامیم هرگاه، همهٔ مولفه های همبند آن دارای بعد n باشند. یک منیفلد 1 − بعدی را خم، منیفلد 2 − بعدی را رویه، و یک منیفلد n − بعدی را یک n−منیفلد می‌نامند.

در نتیجهٔ ۸.۱۴ ثابت می‌کنیم که اگر یک مجموعهٔ باز $U \subset \mathbb{R}^n$ با مجموعهٔ باز $V \subset \mathbb{R}^m$ دیفئومورف باشد، آنگاه $m = n$. به عنوان یک نتیجه، بعد منیفلد در هر نقطه خوش تعریف می‌باشد.

---

۱ smooth manifold

۵.۱۱ گزاره. هر اطلس $\mathfrak{U} = \{(U_\alpha, \phi_\alpha)\}$ بر یک فضای موضعا اقلیدسی، مشمول در یک اطلس ماکزیمال منحصر بفرد می‌باشد.

برهان : همهٔ چارتهای (V_i, ψ_i) که با $\mathfrak{U}$ سازگار باشند، به اطلس $\mathfrak{U}$ تعلق دارند. بنا به لم ۵.۹ چارتهای (V_i, ψ_i) با یکدیگر سازگارند. بنابراین گردایهٔ توسیع یافته از چارتها یک اطلس است. هر چارت سازگار با اطلس جدید، می‌بایست با اطلس اصلی $\mathfrak{U}$ سازگار باشد، و بنا به ساختار آن، به اطلس جدید تعلق دارد. این ثابت می‌کند که اطلس جدید ماکزیمال است.
گیریم $\mathfrak{M}$ اطلس ماکزیمال شامل $\mathfrak{U}$ باشد، که همین الان ساخته شد. اگر $\mathfrak{M}'$ اطلس دیگری شامل $\mathfrak{U}$ باشد، آنگاه همهٔ چارتها در $\mathfrak{M}'$ با $\mathfrak{U}$ سازگار بوده و بنا به ساختار آن، می‌بایست به $\mathfrak{M}$ تعلق داشته باشد. این ثابت می‌کند که $\mathfrak{M}' \subset \mathfrak{M}$. چون هر دو ماکزیمال هستند، $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}'$. بنابراین اطلس ماکزیمال شامل $\mathfrak{U}$ منحصر بفرد است. $\square$

بطور خلاصه، برای آنکه نشان دهیم یک فضای توپولوژی M یک منیفلد هموار است، کافیست که بررسی نماییم:

الف) M هاوسدورف و شمارای دوم باشد.

ب) M دارای یک اطلس هموار (و نه لزوما ماکزیمال) باشد.

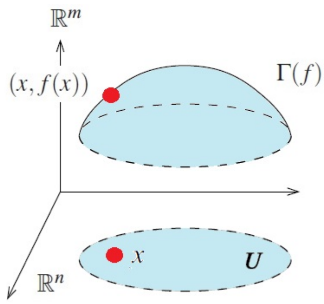
از این پس منظور از منیفلد، منیفلد هموار می‌باشد. بسته به مورد نیز از واژه های "هموار" و "C^∞" استفاده خواهد شد. در متن، مختصات استاندارد بر $\mathbb{R}^n$ را با $r^1, \cdots, r^n$ نمایش می‌دهیم. اگر $(U, \phi : U \to \mathbb{R}^n)$ چارتی از یک منیفلد باشد، $x^i = r^i \circ \phi$ را می‌توان i امین مولفهٔ ϕ در نظر گرفت، و می‌نویسیم $\phi = (x^1, \cdots x^n)$ و یا $(U, \phi) = (U, x^1, \cdots, x^n)$. در نتیجه، برای $p \in U$، $(x^1(p), \cdots, x^n(p))$ نقطه ای در $\mathbb{R}^n$ است. توابع $x^1, \cdots, x^n$ را مختصات یا مختصات موضعی بر U نامیم. گاهی اوقات از p صرفنظر می‌کنیم. بنابراین نماد $(x^1, \cdots, x^n)$ متناوبا هم بعنوان مختصات موضعی بر مجموعهٔ باز U و هم بعنوان یک نقطه در $\mathbb{R}^n$ استفاده می‌شود. منظور از چارت (U, ϕ) در منیفلد M حول نقطهٔ p، چارتی در ساختار دیفرانسیل پذیر M است، که $P \in U$.

بخش ۴.۵ مثالهایی از منیفلد های هموار

۵.۱۲ مثال (فضای اقلیدسی). فضای اقلیدسی $\mathbb{R}^n$ منیفلدی هموار با تک چارت $(\mathbb{R}^n, r^1, \cdots, r^n)$ است، که در آن $r^1, \cdots, r^n$ مختصات استاندارد بر $\mathbb{R}^n$ می‌باشد.

۵.۱۳ مثال (زیر مجموعهٔ باز از یک منیفلد). هر زیر مجموعهٔ باز V از یک منیفلد M نیز یک منیفلد است. اگر $\{(U_\alpha, \phi_\alpha)\}$ اطلسی برای M باشد، آنگاه $\{(U_\alpha \cap V, \phi_\alpha|_{U_\alpha \cap V})\}$ یک اطلس برای V بوده، که در آن $\phi_\alpha|_{U_\alpha \cap V} : U_\alpha \cap V \to \mathbb{R}^n$ نمایش دهندهٔ تحدید ϕ_α به زیر مجموعهٔ $U_\alpha \cap V$ می‌باشد.

۵.۱۴ مثال (منیفلد هایی با بعد صفر). در یک منیفلد با بعد صفر، هر زیر مجموعهٔ تک عضوی با $\mathbb{R}^0$ همئومورف بوده و لذا باز است. بنابراین، هر منیفلد صفر بعدی یک مجموعهٔ گسسته است. بنا به اصل موضوع شمارایی دوم، این مجموعهٔ گسسته شمارا نیز است.



شکل ۶.۵: نمودار یک تابع هموار $f:\mathbb{R}^n \supset U \to \mathbb{R}^m$

۵.۱۵ مثال (نمودار[۱] یک تابع هموار). برای یک زیر مجموعهٔ $A \subset \mathbb{R}^n$ و یک نگاشت دلخواه $f: A \to \mathbb{R}^m$، نمودار f به صورت زیرمجموعهٔ (شکل ۶.۵)

$$\Gamma(f) := \left\{(x, f(x)) \middle| x \in A\right\} \subset A \times \mathbb{R}^m,$$

تعریف می‌گردد. اگر U یک زیر مجموعهٔ باز از $\mathbb{R}^n$، و $f: U \to \mathbb{R}^n$ نیز هموار باشد. آنگاه دو نگاشت

$$\begin{aligned} \phi: \ \Gamma(f) &\longrightarrow U, \\ (x, f(x)) &\longmapsto x, \end{aligned} \qquad \begin{aligned} (1, f): U &\longrightarrow \ \Gamma(f), \\ x &\longmapsto (x, f(x)), \end{aligned}$$

پیوسته و وارون یکدیگر می‌باشند، بنابراین همئومورفیسم هستند. نمودار $\Gamma(f)$ تابع هموار $f: U \to \mathbb{R}^m$، واجد اطلسی با یک چارت $(\Gamma(f), \phi)$ بوده، و بنابراین یک منیفلد هموار است. این مطلب نشان می‌دهد که رویه های آشنا در حسابان، مانند هذلولی‌گون بیضوی و سهمی‌گون هذلولوی، منیفلد می‌باشند.

۵.۱۶ مثال (گروه خطی عمومی[۱]). به ازای هر دو عدد صحیح مثبت m و n فرض کنید $\mathbb{R}^{m\times n}$ متشکل از فضای برداری همهٔ ماتریس های $m \times n$ باشد. چون $\mathbb{R}^{m\times n}$، با $\mathbb{R}^{mn}$ ایزومورف است، به آن توپولوژی $\mathbb{R}^{mn}$ داده می‌شود. بنا به تعریف، گروه خطی عمومی $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ عبارتست از،

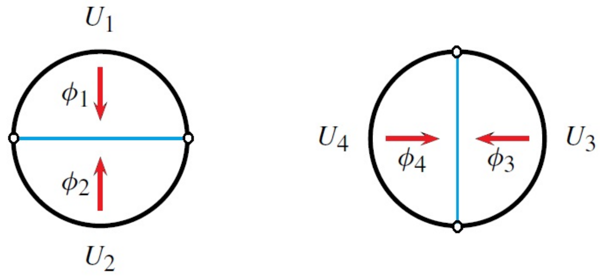
$$\mathrm{GL}(n, \mathbb{R}) := \left\{A \in \mathbb{R}^{n\times n} \mid \det A \neq 0\right\} = \det^{-1}(\mathbb{R} - \{0\}).$$

چون تابع دترمینان $\det: \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}$ پیوسته است، در نتیجه $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ زیر مجموعهٔ بازی از $\mathbb{R}^{n\times n} \simeq \mathbb{R}^{n^2}$ بوده، و بنابراین یک منیفلد است.

$\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ گروه خطی عمومی مختلط، که متشکل از گروه ماتریس های مختلط نامنفرد $n \times n$ است، را تعریف می‌نماییم. ماتریس $n \times n$، A نامنفرد است، اگر و تنها اگر $\det A \neq 0$، در نتیجه $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ زیر مجموعهٔ بازی از فضای برداری همهٔ ماتریس های مختلط $n \times n$، یعنی $\mathbb{C}^{n\times n} \simeq \mathbb{R}^{2n^2}$ می‌باشد. با استدلالی مشابه در حالت حقیقی، $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ منیفلدی با بعد $2n^2$ است.

---

[۱] Graph [۱] General linear groups).



شکل ۷.۵: چارتها روی دایرهٔ واحد

۵.۱۷ مثال (دایرهٔ واحد در صفحهٔ (x,y)). در مثال ۵.۸، برای دایرهٔ واحد $\mathbb{S}^1$ در صفحهٔ مختلط $\mathbb{C}$ یک اطلس هموار با دو چارت یافتیم، در نتیجه $\mathbb{S}^1$ یک منیفلد است. حال $\mathbb{S}^1$ را بعنوان دایرهٔ واحد در صفحهٔ حقیقی $\mathbb{R}^2$ با معادلهٔ $x^2+y^2=1$ در نضر گرفته، و اطلسی هموار شامل چهار چارت بر آن تعریف می‌کنیم.

دایره $\mathbb{S}^1$ را با چهار مجموعه می‌توان پوشاند: نیم دایره های بالایی و پایینی را با U_1، U_2 (شکل ۷.۵) و نیم دایره های راست و چپ را بترتیب با U_3، U_4 نمایش می‌دهیم. بر U_1 و U_2، مختصات تابع xهمئومورفیسمی بر بازهٔ، باز $(-1,1)$ از محور x است. بنابراین، به ازای $i=1,2$،داریم، $\phi_i(x,y)=x$. بطور مشابه می‌توان نشان داد که، تابع y یک همئومورفیسم از U_3 و U_4 بر بازهٔ باز $(-1,1)$ از محور y بوده و بنابراین، به ازای $i=3,4$، $\phi_i(x,y)=y$.

به سادگی می‌توان بررسی کرد که $\phi_\beta\circ\phi_\alpha^{-1}$ بر جفت اشتراک ناتهی $U_\alpha\cap U_\beta$ هموار است. برای مثال، روی $U_1\cap U_3$،

$$(\phi_3\circ\alpha_1^{-1})(x)=\phi_3\left(x,\ \sqrt{1-x^2}\right)=\ \sqrt{1-x^2},$$

تابعی هموار بوده و بر $U_2\cap U_4$ تابع زیر نیز چنین است.

$$(\phi_4\circ\alpha_2^{-1})(x)=\phi_4\left(x,-\sqrt{1-x^2}\right)=-\sqrt{1-x^2}.$$

۵.۱۸ مثال (منیفلد حاصلضربی[۱]). هرگاه M و N دو منیفلد هموار باشند، آنگاه $M\times N$ با توپولوژی حاصلضربی هاوسدورف و شمارای است (نتیجهٔ ۲۱.۰ و گزارهٔ ۲۲.۰). برای آنکه نشان دهیم که $M\times N$ یک منیفلد است، باید نشان دهیم که واجد یک اطلس است.

از قبل بیاد داریم که حاصلضرب دو نگاشت $f:X\to X'$ و $g:Y\to Y'$ عبارتست از

$$f\times g:X\times Y\to X'\times Y' \qquad (f\times g)(x,y)=(f(x),g(y)).$$

۵.۱۹ گزاره (اطلسی برای منیفلد حاصلضربی). اگر $\{(U_\alpha,\phi_\alpha)\}$ و $\{(V_i,\psi_i)\}$ دو اطلس هموار برای منیفلدهای M و N به ترتیب با ابعاد m و n باشند، آنگاه گردایهٔ

$$\left\{\left(U_\alpha\times V_i,\phi_\alpha\times\psi_i:U_\alpha\times V_i\to\mathbb{R}^m\times\mathbb{R}^n\right)\right\}$$

[۱] product manifold

از چارتها، یک اطلس هموار بر $M\times N$ است. بنابراین $M\times N$ یک منیفلد هموار با بعد $m+n$ می‌باشد.

برهان : در مسالهٔ ۵ به عهده خواننده گذاشته شده است. □

۵.۲۰ **مثال.** از گزارهٔ ۵.۱۹ نتیجه می‌شود که استوانهٔ نامتناهی $\mathbb{S}^1\times\mathbb{R}$ و تیوب $\mathbb{S}^1\times\mathbb{S}^1$ منیفلد هستند. (شکل ۸.۵) چون $M\times N\times P=(M\times N)\times P$ حاصلضرب فضا ها می‌باشد، اگر M، N و P منیفلد

شکل ۸.۵: تیوب - استوانهٔ نامتناهی

باشد، آنگاه $M\times N\times P$ نیز منیفلد است. بنابراین، تیوب n - بعدی $\mathbb{S}^1\times\cdots\times\mathbb{S}^1$ (n بار) نیز منیفلد است؛ این منیفلد n بعدی است.

۵.۲۱ **یادداشت.** گیریم $\mathbb{S}^n$ کرهٔ واحد $(x^1)^2+(x^2)^2+\cdots+(x^{n+1})^2=1$ در $\mathbb{R}^{n+1}$ باشد. با استفاده از مسالهٔ ۳، بسادگی می‌توان یک اطلس هموار بر $\mathbb{S}^n$ تعریف نمود. این یک ساختار دیفرانسیلپذیر بر $\mathbb{S}^n$ تعریف می‌کند. منیفلد $\mathbb{S}^n$ با این ساختار را n - کرهٔ استاندارد می‌نامند.

۵.۲۲ **یادداشت.** یکی از جالب ترین دستاورد های توپولوژی توسط جان میلنور [۲۷] در سال ۱۳۵۶ ارائه گردید. بر اساس آن، کره‌های ۷- بعدی عجیبی وجود دارند که با کره ۷- بعد استاندارد همئومورف هستند، ولی با آن دیفئومورف نیست. در سال ۱۹۶۳، مایکل کروير و جان میلنور [۲۴] نشان دادند که دقیقا ۲۸ ساختار دیفرانسیل پذیر غیر دیفئومورف بر $\mathbb{S}^7$ تعریف کردند.

می‌دانیم که هر منیفلد توپولوژی با بعد کمتر از ۴ دارای ساختار دیفرانسیل پذیر یکتایی است، بعلاوه، برای ابعاد بیشتر از ۴ هر منیفلد توپولوژی فشرده دارای تعداد متناهی ساختار دیفرانسیل پذیر است. ظاهرا بعد ۴ از رازی خاص برخوردار است. هنوز معلوم نیست که $\mathbb{S}^4$ دارای تعداد متناهی یا دارای تعداد نامتناهی ساختار دیفرانسیلپذیر است یا خیر. این مطلب که $\mathbb{S}^4$ دارای ساختار دیفرانسیل پذیر منحصر بفردی می‌باشد به حدس پوانکاره موسوم است. تا کنون، این حدس کماکان بعنوان یک مسالهٔ باز است. منیفلد های توپولوژی ای موجودند که ساختار دیفرانسیل پذیر نمی‌پذیرند. این مایکل کروير بود که مثالی برای آن ارائه داد [۲۳].

در سایت http://www.maths.ed.ac.uk/ aar/exotic.htm مطالب خواندنی بسیاری در این خصوص می‌توانید بیابید.

بخش ۵.۵ تمرینات

۵.۱ خط حقیقی با دو مبدا. گیرم A و B دو نقطه غیر واقع بر خط حقیقی $\mathbb{R}$ باشند. مجموعهٔ $S = (\mathbb{R} - \{0\}) \cup \{A, B\}$ را در نظر می‌گیریم. (شکل ۹.۵) برای هر دو عدد حقیقی مثبت c، d، تعریف می‌کنیم:

$$I_A(-c, d) = (-c, 0) \cup \{A\} \cup (0, d)$$

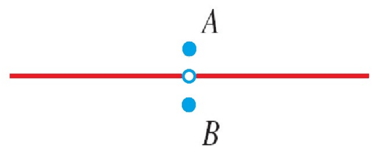
بطور مشابه مجموعه I_B برای B تعریف می‌شود. یک توپولوژی بصورت زیر بر S تعریف می‌کنیم: با استفاده از توپولوژی زیر فضایی $\mathbb{R}$، بر $(\mathbb{R} - \{0\})$ دو بازهٔ باز بعنوان مبنا در نظر می‌گیریم. یک مبنا از همسایگی های A مجموعهٔ $\{I_A(-c, d) \,|\, c, d > 0\}$ ؛ بطور مشابه مبنای دیگر از همسایگی های B عبارت است از، $\{I_B(-c, d) \,|\, c, d > 0\}$.

(الف) ثابت کنید که نگاشت $h : I_A(-c, d) \to (-c, d)$ تعریف شده با

$$h(x) = x, \quad x \in (-c, 0) \cup (0, d) \quad \text{و برای} \qquad h(A) = 0$$

همئومورفیسم است.

(ب) نشان دهید که S موضعا اقلیدسی و شمارای دوم است، ولی هاوسدورف نمی‌باشد.

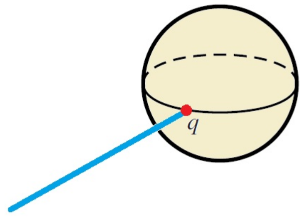


شکل ۹.۵: خط حقیقی با دو مبدا

۵.۲ آبنبات چوبی. یکی از قضایای اساسی توپولوژی، قضیهٔ ناوردایی (پایایی) بعد، بیان می‌کند، که اگر دو مجموعهٔ باز $U \subset \mathbb{R}^n$ و $V \subset \mathbb{R}^m$ همئومورف باشند، آنگاه $n = m$ است. (برای اثبات به [۱۸] صفحهٔ ۱۲۶ را ببینید). حال با استفاده از ایدهٔ مثال ۵.۵ و قضیهٔ ناوردایی بعد، ثابت کنید که کرهٔ با یک تار مو در $\mathbb{R}^3$ (شکل ۱۰.۵) در نقطهٔ q موضعا اقلیدسی نمی‌باشد. در نتیجه نمی‌تواند یک منیفلد توپولوژی باشد.

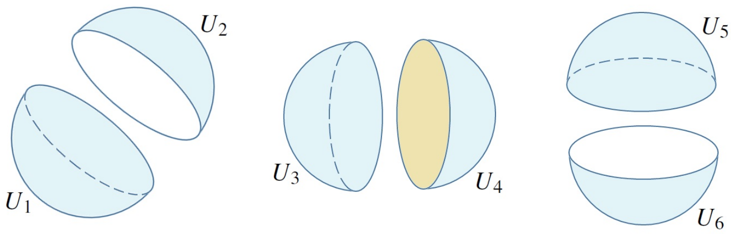
۵.۳ چارتهایی بر کره. گیریم $\mathbb{S}^2$ کرهٔ واحد $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ در $\mathbb{R}^3$ باشد. بر $\mathbb{S}^2$ شش چارت متناظر با شش نیمکره - جلو، عقب، راست، چپ، بالا و پایین را به ترتیب زیر تعریف می‌کنیم (شکل ۱۱.۵):

$$\begin{aligned}
U_1 &= \{(x,y,z) \in \mathbb{S}^2 \,|\, x > 0\}, & \phi_1(x,y,z) &= (y,z),\\
U_2 &= \{(x,y,z) \in \mathbb{S}^2 \,|\, x < 0\}, & \phi_2(x,y,z) &= (y,z),\\
U_3 &= \{(x,y,z) \in \mathbb{S}^2 \,|\, y > 0\}, & \phi_3(x,y,z) &= (x,z),\\
U_4 &= \{(x,y,z) \in \mathbb{S}^2 \,|\, y < 0\}, & \phi_4(x,y,z) &= (x,z),\\
U_5 &= \{(x,y,z) \in \mathbb{S}^2 \,|\, z > 0\}, & \phi_5(x,y,z) &= (x,y),\\
U_6 &= \{(x,y,z) \in \mathbb{S}^2 \,|\, z < 0\}, & \phi_6(x,y,z) &= (x,y).
\end{aligned}$$



شکل ۵.۱۰: کره ای با یک تار مو

دامنه $\phi_4(U_{14})$ از $\phi_1 \circ \phi_4^{-1}$ را مشخص نموده، و نشان دهید که $\phi_1 \circ \phi_4^{-1}$ بر $\phi_4(U_{14})$ تابعی هموار است. همین عمل را برای $\phi_6 \circ \phi_1^{-1}$ انجام دهید.



شکل ۵.۱۱: چارتها بر کرهٔ واحد

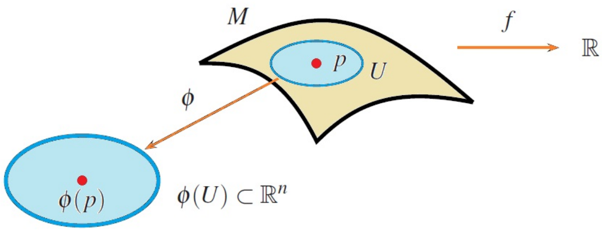
۵.۴ وجود همسایگی مختصاتی. گیریم $\{(U_\alpha, \phi_\alpha)\}$ یک اطلس ماکزیمال برای منیفلد M باشد. ثابت کنید که برای هر مجموعهٔ باز U در M و نقطهٔ $p \in U$، یک مجموعهٔ باز مختصاتی U_α بقسمی وجود دارد که، $p \in U_\alpha \subset U$.

۵.۵ اطلسی برای منیفلد حاصلضربی. گزارهٔ ۵.۱۹ را ثابت کنید.

فصل ۶

نگاشت هموار بر منیفلد

اکنون که منیفلد هموار را تعریف نمودیم، وقت آن است که نگاشتهای بین آن را بررسی کنیم. با استفاده از چارتهای مختصاتی، مفهوم نگاشتهای هموار را از فضای اقلیدسی به منیفلدها می‌توان انتقال داد. توجه به خاصیت C^∞−سازگاری چارتها در یک اطلس، نشان می دهد که مفهوم همواری نگاشتها، مستقل از انتخاب آنها بوده و لذا مفاهیمی خوش تعریف اند. محک‌های مختلفی از همواری یک نگاشت و نیز مثالهایی از نگاشتهای هموار ارائه خواهیم داد. در ادامه، مفهوم مشتقات جزئی را از فضای اقلیدسی، به کمک چارتهای مختصاتی بر منیفلد انتقال دهیم. مشتقات جزئی وابسته به چارتهای مختصاتی این امکان را فراهم ساخته تا قضیهٔ تابع وارون را به منیفلدها تعمیم دهیم. با استفاده از آن قضیه، مجموعه‌ای از توابع هموار را، بعنوان مختصات موضعی حول یک نفطه می‌توان مطالعه کرد.



شکل ۱.۶: بررسی تابع هموار − f در نقطهٔ p با قلاب به $\mathbb{R}^n$.

بخش ۱.۶ توابع هموار بر منیفلد

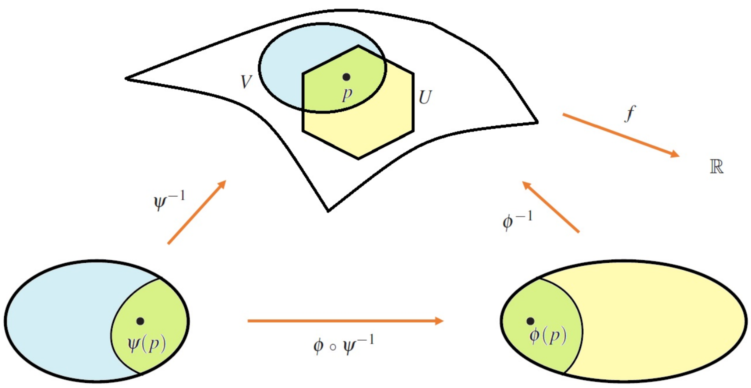
۱.۶ **تعریف.** گیریم M منیفلدی هموار با بعد n است. تابع مفروض $f: M \to \mathbb{R}$ را در نقطهٔ p هموار یا C^∞ نامیم، هرگاه چارتی مانند (U,ϕ) حول نقطهٔ p در M باشد که تابع $f\circ\phi^{-1}$ بر زیر مجموعهٔ باز

$\phi(U)$ از $\mathbb{R}^n$ در نقطهٔ $\phi(p)$ هموار باشد (شکل ۱.۶ را ببینید). تابع f را بر M هموار نامیم، هرگاه در هر نقطهٔ M هموار باشد.

۶.۲ یادداشت. تعریف همواری تابع f در یک نقطه مستقل از چارت (U,ϕ) است، برای اینکه اگر $f\circ\phi^{-1}$ در $\phi(p)$ هموار، و (V,ψ) هر چارت دیگری حول p در M باشد، آنگاه نگاشت،

$$f\circ\psi^{-1}=(f\circ\phi^{-1})\circ\left(\phi\circ\psi^{-1}\right)$$

در نقطهٔ $\psi(p)$ بر مجموعهٔ $\psi(U\cap V)$ هموار است (شکل ۲.۶ را ببینید).



شکل ۲.۶: بررسی هموار بودن تابع f در نقطهٔ p به کمک دو چارت

۶.۳ یادداشت. در تعریف ۶.۱ ، $f:M\to\mathbb{R}$ پیوسته فرض نشده است. هرچند می‌دانیم که، اگر f تابعی هموار در $p\in M$ باشد، آنگاه $f\circ\phi^{-1}:\phi(U)\to\mathbb{R}$ در نقطهٔ $\phi(p)$ متعلق به یک زیر مجموعهٔ باز از $\mathbb{R}^n$ هموار بوده، و در نتیجه در نقطهٔ $\phi(p)$ پیوسته است. با توجه به ترکیب توابع پیوسته، می‌توان نتیجه گرفت که $f=(f\circ\phi^{-1})\circ\phi$ در نقطهٔ p پیوسته است. چون می‌خواهیم توابع مورد بحث بر یک مجموعهٔ باز هموار باشند، بدون خلل به کلیت بحث می‌توان از ابتدا تابع f را پیوسته فرض کرد.

۶.۴ گزاره (همواری تابع حقیقی مقدار). گیریم M منیفلدی با بعد n و $f:M\to\mathbb{R}$ تابعی حقیقی مقدار بر M باشد. آنگاه احکام زیر هم ارزند،

(الف) تابع $f:M\to\mathbb{R}$ هموار است.

(ب) منیفلد M دارای اطلسی است که به ازای هر چارت (U,ϕ) در آن، $f\circ\phi^{-1}:\mathbb{R}^n\supset\phi(U)\to\mathbb{R}$ هموار است.

(پ) به ازای هر چارت (V,ψ) بر M تابع $f\circ\psi^{-1}:\mathbb{R}^n\supset\psi(V)\to\mathbb{R}$ C^∞ است.

برهان : این گزاره را به روش استلزام دوری اثبات می‌کنیم.
(ب) $\Leftarrow$ (الف) : این نتیجهٔ مستقیم تعریف یک تابع هموار است، چون بنا به (ب) هر نقطه مانند $p \in M$ دارای یک همسایگی مختصاتی (U,ϕ) است، که $f \circ \phi^{-1}$ در نقطهٔ $\phi(p)$ هموار است.
(الف) $\Leftarrow$ (پ) : فرض کنید (V,ψ) چارتی دلخواه بر M و $p \in V$ باشد. بنا به یادداشت (۶.۳)، $f \circ \psi^{-1}$ در $\psi(p)$ هموار است. چون p نقطهٔ دلخواهی از V است، بنابراین $f \circ \psi^{-1}$ روی $\psi(V)$ هموار، است.
اثبات (پ) $\Leftarrow$ (ب) : آشکار است. □

شرایط هموار‌ی گزارهٔ ۳٫۶، موضوعی است که بصورت مکرر در این کتاب آمده است: برای اثبات همواری منیفلد، کافی است که محک همواری روی چارتهای اطلس آن بررسی شود. اگر یکبار همواری منیفلدی تحقیق شود، نتیجهٔ آن برقراری محک همواری برای هر چارت آن منیفلد است.

۶.۵ **تعریف**. گیریم $F : N \to M$ یک نگاشت و h تابعی بر M باشد. پولبک[۱]، یا قلاب، h توسط F که با F^*h نمایش داده می‌شود، عبارتست از تابع مرکب $h \circ F$.

با این تعریف، تابع f بر M را بر یک چارت (U,ϕ) هموار نامیم، اگر و تنها اگر قلاب $f * (\phi^{-1})$ توسط ϕ^{-1} بر زیر مجموعهٔ $\phi(U)$ از یک فضای اقلیدسی، هموار باشد.

بخش ۲.۶ نگاشتهای هموار بین منیفلدها

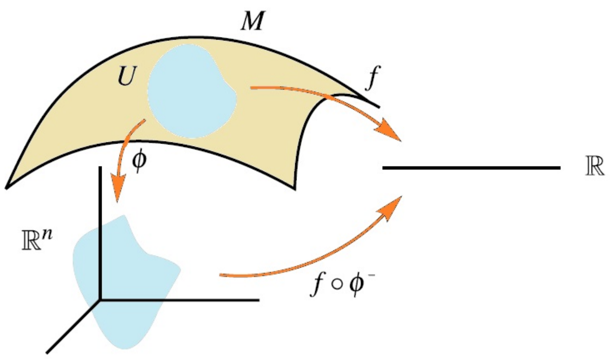
مجددا تاکید می‌کنیم که منظور از منیفلد، منیفلد هموار است مگر آنکه خلاف آن را بیان کنیم. بر آن هستیم که واژهٔ همواری و هموار را جابجا بکارگیریم. منظور از اطلس یا چارت بر منیفلد هموار، اطلس یا چارتی مشمول در ساختاری دیفرانسیل پذیر از منیفلد هموار است. عموما منیفلد را با M و بعد آن را با n نمایش می‌دهیم. معذالک اگر از دو منیفلد بطور همزمان استفاده کنیم، مثلا در نگاشت $f : N \to M$ فرض خواهیم کرد که، بعد N برابر n و بعد M برابر m باشد.

۶.۶ **تعریف**. گیریم N و M منیفلدهایی به ترتیب با بعدهای n و m باشند. نگاشت پیوستهٔ $F : N \to M$ را در نقطهٔ p متعلق به N هموار[۲] گوییم، هرگاه چارتهایی مانند (V,ψ) حول نقطهٔ $F(p)$ در M و (U,ϕ) حول نقطهٔ p در M باشند که ترکیب $\psi \circ F \circ \phi^{-1}$ نگاشتی از زیرمجموعهٔ باز $\phi(F^{-1}(V) \cap U)$ از $\mathbb{R}^n$ به $\mathbb{R}^m$ در نقطهٔ $\phi(p)$ هموار باشد (شکل۶.۳ را ببینید).

در تعریف (۶.۶)، فرض می‌کنیم که $F : N \to M$ پیوسته بوده تا مطمئن شویم که $F^{-1}(V)$ یک مجموعهٔ باز در N است. بنا به تعریف، نتیجه می‌گیریم که نگاشتهای هموار بین منیفلدها پیوسته نیز می‌باشند.

۶.۷ **یادداشت (نگاشتهای هموار بتوی $\mathbb{R}^m$)**. درحالتی که $M = \mathbb{R}^m$، $(\mathbb{R}^m, \mathbb{1}_{\mathbb{R}^m})$ را بعنوان چارتی حول $F(p)$ در $\mathbb{R}^m$ می‌توان اختیار نمود. بنا به تعریف (۶.۶)، $F : N \to \mathbb{R}^m$ در نقطهٔ $p \in N$ هموار است، اگر و تنها اگر چارتی مانند (U,ϕ) حول نقطهٔ p در N چنان باشد که، $F \circ \phi^{-1} : \phi(U) \to \mathbb{R}^m$ در $\phi(p)$ هموار گردد.

---
[۱] pullback [۲] smooth



شکل ۳.۶: بررسی هموار بودن نگاشت $F : N \to M$ در نقطهٔ p

اکنون نشان می‌دهیم که هموار بودن یک نگاشت مانند $F : N \to M$ در یک نقطه، مستقل از انتخاب چارتها می‌باشد. این مطلب مشابه آن بود، که چگونه همواری تابع $f : N \to \mathbb{R}$ در نقطهٔ $p \in N$ مستقل از انتخاب یک چارت بر N حول p می‌باشد.

۶.۸ گزاره. گیریم $F : N \to M$ در $P \in N$ هموار باشد. هرگاه (U,ϕ) چارتی در N حول p و (V,ψ) نیز چارتی در M حول $F(p)$ باشد، آنگاه $\psi \circ F \circ \phi^{-1}$ در $\phi(p)$ هموار است.

برهان : چون F در $p \in N$ هموار است، چارتهای (U_α,ϕ_α) در N حول نقطهٔ p و (V_β,ψ_β) در M حول نقطهٔ $F(p)$ وجود دارند که $\psi_\beta \circ F \circ \phi_\alpha^{-1}$ درنقطهٔ $\phi_\alpha(p)$ هموار می‌باشد. بنا به سازگاری چارتها در ساختار دیفرانسیل پذیر، $\phi_\alpha \circ \phi^{-1}$ و $\psi \circ \psi_\beta^{-1}$ بر زیر مجموعه‌های باز فضای اقلیدسی، هموار می‌باشند. در نتیجه ترکیب

$$\psi \circ F \circ \phi^{-1} = (\psi \circ \psi_\beta^{-1}) \circ (\psi_\beta \circ F \circ \phi_\alpha^{-1}) \circ (\phi_\alpha \circ \phi^{-1})$$

در $\phi(p)$ هموار می‌باشد. □

در گزارهٔ بعد، بدون مشخص ساختن نقطه‌ای در دامنه، همواری نگاشت را می‌خواهیم بررسی کنیم.

۶.۹ گزاره (همواری نگاشت بر حسب چارتها). گیریم N و M منیفلدهای هموار، و نیز $F : N \to M$ یک نگاشت پیوسته باشد. آنگاه احکام زیر هم ارزند:

(الف) نگاشت $F : N \to M$ هموار است.

(ب) اطلس‌هایی مانند $\mathfrak{U}$ برای N و $\mathfrak{B}$ برای M وجود داشته باشند بقسمی که، برای هر چارت (U,ϕ) در $\mathfrak{U}$ و (V,ψ) در $\mathfrak{B}$ نگاشت $\psi \circ F \circ \phi^{-1} : \phi(U \cap F^{-1}(V)) \to \mathbb{R}^m$ هموار باشد.

(پ) برای هر چارت (U,ϕ) بر N و (V,ψ) بر M نگاشت $\psi \circ F \circ \phi^{-1} : \phi(U \cap F^{-1}(V)) \to \mathbb{R}^m$ هموار باشد.

برهان : (الف) $\Leftarrow$ (ب) : گیریم $p \in N$ باشد. فرض کنید (U,ϕ) چارتی حول p در $\mathfrak{U}$ و (V,ψ) چارتی حول $F(p)$ در $\mathfrak{B}$ باشد. بنا به (ب)، $\psi \circ f \circ \phi^{-1}$ در نقطهٔ $\phi(p)$ هموار است. بنا به تعریف نگاشت هموار، $F : N \to M$ در p هموار است. چون p نقطهٔ دلخواهی از N است، در نتیجه نگاشت $F : N \to M$ نیز هموار می‌باشد.
(الف) $\Leftarrow$ (پ) : فرض کنید (U,ϕ) و (V,ψ) به ترتیب چارتهایی برای N و M به گونه‌ای باشند که $U \cap F^{-1} \neq \varnothing$. فرض کنید که $p \in U \cap F^{-1}(V)$. آنگاه (U,ϕ) چارتی حول p و (V,ψ) چارتی حول $F(p)$ هستند. بنا به گزارهٔ (۶.۸)، $\psi \circ F \circ \phi^{-1}$ در $\phi(p)$ هموار است.
(پ) $\Leftarrow$ (ب) واضح است. □

۶.۱۰ (گزاره (ترکیب نگاشتهای هموار). اگر $F : N \to M$ و $G : M \to P$ نگاشتهای هموار بین منیفلدها باشند، آنگاه ترکیب آن $G \circ F : N \to P$ نیز هموار است.

برهان : فرض کنید، (U,ϕ) (V,ψ) و (W,σ) به ترتیب چارتهایی روی منیفلدهای N، M و P باشند. آنگاه

$$\sigma \circ (G \circ F) \circ \phi^{-1} = (\sigma \circ G \circ \psi^{-1}) \circ (\psi \circ F \circ \phi^{-1}).$$

چون F و G هموار هستند، بنا به گزارهٔ ۶.۹ (الف) $\Leftarrow$ (پ)، $\sigma \circ G \circ \psi^{-1}$ و $\psi \circ F \circ \phi^{-1}$ هموار هستند. با توجه به ترکیب نگاشتهای هموار در فضای اقلیدسی، $\sigma \circ (G \circ F) \circ \phi^{-1}$ هموار است. با توجه به گزارهٔ ۶.۹، $G \circ F$ هموار است. □

بخش ۳.۶ دیفئومورفیسم

یک دیفئومورفیسم بین منیفلدها یک نگاشت بیژکسیون هموار، $F : N \to M$ است که وارون آن F^{-1} نیز هموار باشد. بر طبق دو گزارهٔ آخر نگاشتهای مختصاتی و وارون آنها، دیفئومورفیسم اند، هر دیفئومورفیسم یک زیر مجموعهٔ باز از یک منیفلد به یک زیر مجموعهٔ باز از یک فضای اقلیدسی را بعنوان نگاشت مختصاتی می‌توان در نظر گرفت.

۶.۱۱ گزاره. اگر (U,ϕ) چارتی بر منیفلد n بعدی M باشد، آنگاه نگاشت مختصاتی

$$\phi : U \to \phi(U) \subset \mathbb{R}^n$$

دیفئومورفیسم است.

برهان : بنا به تعریف، ϕ یک همئومورفیسم است، بنا براین کافی است که همواری نگاشتهای ϕ و ϕ^{-1} بررسی کنیم. برای بررسی همواری $\phi : U \to \phi(U)$، از اطلس $\{(U,\phi)\}$ با تک چارت بر U و اطلس $\{(\phi(U), \mathbb{1}_{\phi(U)})\}$ با تک چارت بر $\phi(U)$ استفاده می‌کنیم. چون $\mathbb{1}_{\phi(U)} \circ \phi \circ \phi^{-1} : \phi(U) \to \phi(U)$ نگاشت همانی است پس، هموار است. بنا به گزارهٔ ۶.۹، (ب) $\Leftarrow$ (الف)، ϕ هموار است.
برای بررسی همواری $\phi^{-1} : \phi(U) \to U$ از همان اطلس بالا استفاده می‌کنیم. چون

$$\phi \circ \phi^{-1} \circ \mathbb{1}_{\phi(U)} = \mathbb{1}_{\phi(U)} : \phi(U) \to \phi(U)$$

بنابراین، نگاشت ϕ^{-1} نیز هموار می‌باشد. □

۶.۱۲ گزاره. گیریم U زیر مجموعهٔ باز از منیفلد n بعدی M باشد. اگر $F : U \to F(U) \subset \mathbb{R}^n$ دیفئومورفیسمی بر یک مجموعه باز از $\mathbb{R}^n$ باشد، آنگاه (U, F) چارتی متعلق به ساختار دیفرانسیل پذیر M می‌باشد.

برهان : برای هر چارت (U_α, ϕ_α) در اطلس ماکزیمال M، بنا به گزارهٔ ۶.۱۱ ϕ_α، $\phi_\alpha^!$ هموار می‌باشند. از طرف دیگر با توجه به ترکیب نگاشتهای هموار، هر دو نگاشت $F \circ \phi_\alpha^{-1}$ و $\phi_\alpha \circ F^{-1}$ هموار می‌باشند. در نتیجه (U, F) با اطلس ماکزیمال سازگارند. بنا به اطلس ماکزیمال، چارت (U, F) در آن اطلس واقع است. □

بخش ۴.۶ همواری بر حسب مولفه‌ها

در این زیربخش معیاری برای تقلیل همواری یک نگاشت، به همواری توابع حقیقی مقدار بر یک مجموعهٔ باز ارائه می‌دهیم.

۶.۱۳ گزاره (همواری تابع حقیقی مقدار). گیریم N منیفلد و $F : N \to \mathbb{R}^m$ نگاشت پیوسته‌ای باشد. احکام زیر هم ارزند:

(الف) نگاشت $F : N \to \mathbb{R}^m$ هموار است.

(ب) منیفلد N دارای اطلسی است که برای هر چارت (U, ϕ) واقع در آن، نگاشت $F \circ \phi^{-1} : \phi(U) \to \mathbb{R}^m$ هموار است.

(پ) به ازای هر چارت (U, ϕ) در N، نگاشت $F \circ \phi^{-1} : \phi(U) \to \mathbb{R}^m$ هموار است.

برهان : (ب) $\Leftarrow$ (الف) : در گزارهٔ ۶.۹ (ب)، $\mathfrak{B}$ را اطلسی با تک چارت $(\mathbb{R}^m, \mathbb{1}_{\mathbb{R}^m})$ بر $M = \mathbb{R}^m$ فرض کردیم. این حکم را ثابت می‌کند.

(الف) $\Leftarrow$ (پ) : در گزارهٔ ۶.۹ (پ)، با فرض اینکه (V, ψ) چارتی برای $(\mathbb{R}^m, \mathbb{1}_{\mathbb{R}^m})$ بر $M = \mathbb{R}^m$ باشد، مطلب تمام است.

(پ) $\Leftarrow$ (ب) : حکم بدیهی است. □

۶.۱۴ گزاره (همواری بر حسب توابع مولفه‌ای). فرض کنید N منیفلد باشد. تابع حقیقی مقدار $F : N \to \mathbb{R}^m$ هموار است، اگر و تنها اگر، همهٔ توابع مولفه‌ای $F^1, \cdots, F^m : N \to \mathbb{R}^m$ هموار باشند.

برهان : نگاشت $F : N \to \mathbb{R}^m$ هموار است.

$\Longleftrightarrow$ به ازای هر چارت (U, ϕ) بر N نگاشت $F \circ \phi^{-1} : \phi(U) \to \mathbb{R}^m$ هموار است. (بنا به گزارهٔ ۶.۱۳).

$\Longleftrightarrow$ به ازای هر چارت (U,ϕ) بر N توابع $F^i\circ\phi^{-1}:\phi(U)\to\mathbb{R}$ همگی هموار هستند (تعریف همواری نگاشتها در فضای اقلیدسی).
$\Longleftrightarrow$ توابع $F^i:N\to\mathbb{R}$ همگی هموار هستند (بنا به گزارهٔ ۶.۴). $\square$

۶.۱۵ همواری یک نگاشت بر یک دایره. ثابت کنید که نگاشت، $F:\mathbb{R}\to\mathbb{S}^1,\ \ F(t)=(\cos t,\sin t)$ هموار است.

۶.۱۶ گزاره (همواری یک نگاشت بر حسب توابع حقیقی مقدار). گیریم $F:N\to M$ یک نگاشت پیوسته بین دو منیفلد به ترتیب n و m بعدی باشد. احکام زیر هم ارزند:

(الف) نگاشت $F:N\to M$ هموار است.

(ب) منیفلد M دارای اطلسی است که به ازای هر چارت $(V,\psi)=(V,y^1\cdots,y^m)$ واقع در آن، تابع حقیقی مقدار، $\psi\circ F:F^{-1}(V)\to\mathbb{R}^m$ هموار است.

(پ) به ازای هر چارت $(V,\psi)=(V,y^1,\cdots,y^m)$ بر M تابع حقیقی مقدار $\psi\circ F:F^{-1}(V)\to\mathbb{R}^m$ هموار است.

برهان: (ب) $\Leftarrow$ (الف) : فرض کنید $\mathfrak{B}$ اطلسی برای M در (ب)، و فرض کنید $\mathfrak{U}=\{(U,\phi)\}$ اطلس دلخواهی برای N باشد. به ازای هر چارت (V,ψ) در اطلس $\mathfrak{B}$ گردایهٔ $\{(U\cap F^{-1}(v),\phi|_{U\cap F^{-1}(V)})\}$ اطلسی برای $F^{-1}(V)$ است. چون $\psi\circ F:F^{-1}(V)\to\mathbb{R}^m$ هموار است، بنا به گزارهٔ ۶.۱۳ (الف) $\Leftarrow$ (پ)،

$$\psi\circ F\circ\phi^{-1}:\phi(U\cap F^{-1}(V))\to\mathbb{R}^m$$

هموار است. می‌توان از گزارهٔ ۶.۹ (ب) $\Leftarrow$ (الف)، نتیجه گرفت که $F:N\to M$ هموار است. (الف) $\Leftarrow$ (پ) : با توجه به گزارهٔ ۶.۱۱، ψ یک نگاشت مختصاتی بوده، و لذا هموار می‌باشد. $\psi\circ F$ حاصل از ترکیب نگاشتهای هموار بوده، خود نیز هموار است.
(پ) $\Leftarrow$ (ب) : بدیهی است. $\square$
بنا به گزارهٔ ۶.۱۴ محک همواری یک نگاشت توسط همواری نگاشتهای مولفه‌ای آن بررسی می‌شود.

۶.۱۷ گزاره (همواری یک نگاشت بر حسب مولفه‌های آن). گیریم $F:N\to M$ نگاشت پیوسته بین منیفلدهایی به ترتیب با بعد n و m باشد. آنگاه احکام زیر هم ارزند:

(الف) نگاشت $F:N\to M$ هموار است.

(ب) منیفلد M دارای اطلسی است که به ازای هر چارت $(V,\psi)=(V,y^1,\cdots,y^m)$ در آن اطلس، مولفه‌های $y^i\circ F:F^{-1}(V)\to\mathbb{R}$ از F همگی نسبت به آن چارت، هموار می‌باشند.

(پ) به ازای هر چارت $(V,\psi)=(V,y^1,\cdots,y^m)$ بر M مولفه‌های $y^i\circ F:F^{-1}(V)\to\mathbb{R}$ از F همگی نسبت به آن چارت، هموار می‌باشند.

بخش ۵.۶ مثال‌هایی از نگاشتهای هموار

دیدم که نگاشتهای مختصاتی هموارند. در این زیر بخش به ذکر چند مثال از نگاشتهای هموار می‌پردازیم.

۶.۱۸ مثال (همواری نگاشت تصویری). گیریم M و N منیفلدهایی، و $\pi : M\times N \to M$ با ضابطهٔ $\pi(p,q) = p$ نگاشت تصویری بر عامل اول باشد. ثابت کنید که π نگاشتی هموار است.
حل : فرض کنید (p,q) نقطه‌ای دلخواه از $M\times N$ باشد. فرض کنید $(U,\phi) = (U,x^1,\cdots,x^m)$ و $(V,\psi) = (V,y^1,\cdots,y^n)$ به ترتیب همسایگی‌های مختصاتی از p و q در M و N باشند. بنا به تعریف منیفلد حاصلضربی،

$$(U\times V,\phi\times\psi) = (U\times V,x^1,\cdots,x^m,y^1,\cdots,y^n)$$

یک همسایگی مختصاتی از (p,q) است. آنگاه

$$(\phi\circ\pi\circ(\phi\times\psi)^{-1})(a^1,\cdots,a^m,b^1,\cdots,b^n) = (a^1,\cdots,a^m),$$

یک نگاشت هموار از $(\phi\times\psi)(U\times V)$ در $\mathbb{R}^{m+n}$ به $\phi(U)$ در $\mathbb{R}^m$ است، بنابراین π در نقطهٔ (p,q) هموار می‌باشد. چون نقطهٔ (p,q) نقطه‌ای دلخواه از $M\times N$ در نظر گرفته شده است، در نتیجه π بر $M\times N$ هموار است. *

۶.۱۹ همواری نگاشتی به حاصلضرب دکارتی. گیریم M_1، M_2 و N به ترتیب منیفلدهایی با ابعاد m_1، m_2 و n هستند. ثابت کنید که نگاشت $(f_1,f_2) : N \to M_1\times M_2$ هموار است، اگر و تنها اگر $f_i : N \to M_i$ $i = 1,2$ هموار باشند.

۶.۲۰ مثال. قبلا بعنوان مثال نشان داده‌ایم که دایرهٔ واحد $\mathbb{S}^1$ که با $x^2+y^2 = 1$ در $\mathbb{R}^2$ تعریف می‌شود، منیفلد هموار است. که تابعی هموار مانند $f(x,y)$ روی $\mathbb{R}^2$ قابل تحدید به یک تابع هموار بر $\mathbb{S}^1$ است.
حل : برای پرهیز از ابهام، $p = (a,b)$ را نقطه‌ای واقع بر $\mathbb{S}^1$ اختیار نموده، و x، y را به منظور مختصات توابع بر $\mathbb{R}^2$ در نظر می‌گیریم. بنابراین، $x(a,b) = a$ و $y(a,b) = b$. فرض کنید که بتوان تحدید x، y را به توابع هموار بر $\mathbb{S}^1$ نشان داد. بنا به تمرین ۶.۱۹، نگاشت احتوای $i : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{R}^2$ با ضابطهٔ $i(p) = (x(p),y(p))$ نیز بر $\mathbb{S}^1$ هموار است. حال با استفاده از ترکیب توابع هموار، تابع $f|_{\mathbb{S}^1} = f\circ i$ بر $\mathbb{S}^1$ هموار می‌باشد (گزارهٔ ۶.۱۰). *

ابتدا تابع x را در نظر می‌گیریم. می‌توان از اطلس (U_i,ϕ_i) در مثال ۵.۱۷، استفاده کرد. چون x تابعی مختصاتی بر U_1 و U_2 بوده، بنا به گزارهٔ ۶.۱۱ بر $U_1\cup U_2 = \mathbb{S}^1 - \{(\pm1,0)\}$ هموار می‌باشد. برای آنکه نشان دهیم که x بر U_3 هموار است، کافی است همواری $x\circ\phi_3^{-1} : \phi_3(U_3) \to \mathbb{R}$ با ضابطهٔ

$$(x\circ\phi_3^{-1})(b) = x(\sqrt{1-b^2},b) = \sqrt{1-b^2}$$

را بررسی کنیم. بر U_3، داریم $b \neq \pm1$، بنابراین $\sqrt{1-b^2}$ تابعی هموار از b بوده، و این نتیجه می‌دهد که x، بر U_3 هموار است. b مساوی با ±1 نیست، لذا بر U_4،

$$(x\circ\phi_4^{-1})(b) = x\left(-\sqrt{1-b^2},b\right) = -\sqrt{1-b^2}$$

هموار بوده، و چون x بر چهار مجموعهٔ باز U_1، U_2، U_3 و U_4، که پوششی برای $\mathbb{S}^1$ می‌باشد، هموار است، در نتیجه، x بر $\mathbb{S}^1$ نیز هموار می‌باشد.

اینکه y هموار است، به طریق مشابه ثابت می‌گردد.

تعریف نگاشت هموار بین منیفلدها، ایجاب می‌کند که تعریفی از گروه لی ارائه گردد.

۶.۲۱ تعریف. منظور از گروه لی [۱] عبارت است از منیفلدی هموار مانند G که دارای یک ساختار گروهی بوده، بطوری که نگاشت ضرب $\mu : G\times G \to G$ و نگاشت وارون

$$\iota : G \to G, \qquad \iota(x) = x^{-1}$$

هر دو هموار باشند.

بطور مشابه گروه توپولوژی[۲] فضایی توپولوژی است که دارای ساختار گروهی باشد، به قسمی که نگاشتهای ضرب و وارون پیوسته باشند. لازم به ذکر است که یک گروه توپولوژی یک فضای توپولوژی است، ولی لزوما منیفلد توپولوژی نیست.

۶.۲۲ چند مثال.

الف) فضای اقلیدسی $\mathbb{R}^n$ یک گروه لی تحت عمل جمع است.

ب) مجموعهٔ $\mathbb{C}^\times$ متشکل از اعداد مختلط ناصفر یک گروه لی تحت عمل ضرب است.

پ) دایرهٔ واحد $\mathbb{S}^1$ در $\mathbb{C}^\times$ یک گروه لی تحت عمل ضرب است.

ت) حاصل ضرب دکارتی $G_1\times G_2$ از دو گروه لی (G_1,μ_1) و (G_2,μ_2) تحت عمل ضرب مختصه به مختصه $\mu_1\times\mu_2$، یک گروه لی است.

۶.۲۳ مثال (گروه خطی عمومی). در مثال ۵.۱۷ گروه خطی عمومی را تعریف نمودیم

$$\mathrm{GL}(n,\mathbb{R}) = \left\{A = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{n\times n} \mid \det A \neq 0\right\}.$$

که به عنوان یک زیر مجموعهٔ باز از $\mathbb{R}^{n\times n}$ منیفلد است. چون درایهٔ (i,j)−ام از حاصل ضرب دو ماتریس A و B در $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$،

$$(AB)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj},$$

یک چند جمله‌ای برحسب مختصات A و B است، لذا ضرب ماتریسی

$$\mu : \mathrm{GL}(n\times\mathbb{R})\times\mathrm{GL}(n\times\mathbb{R}) \to \mathrm{GL}(n\times\mathbb{R})$$

[۱] Lie group :: گروه و جبر لی به افتخار بنیان گذار آن سوفس لی ریاضی دان نروژی (۱۸۹۹ - ۱۸۴۲) نام گذاری شده است.

[۲] topological group

یک نگاشت هموار است.

یاد آوری می‌کنیم که کهاد - (i,j) از ماتریس A، دترمینان زیر ماتریسی از A، متناظر با حذف سطر i ام و ستون j ام می‌باشد. بنا به قاعدهٔ کرامر از جبر خطی، درایهٔ - (i,j)، A^{-1} عبارت است،

$$(A^{-1})_{ij} = \frac{1}{\det A}.(-1)^{i+j}\ (\text{کهاد } (j,i) \text{ ام } A)$$

۶.۲۴ نمادگذاری. نمادگذاری برای ماتریس‌ها از چالش خاصی برخوردار است. یک ماتریس مربعی $n\times n$، A، را می‌توان بصورت تبدیل خطی $y = Ax$ نمایش داد، که $x,y\in\mathbb{R}^n$ است. در این حالت $y^i = \sum_j a^i_j x^j$ و لذا $A = [a^i_j]$. یک ماتریس $n\times n$ را می‌توان بصورت یک فرم دوخطی $\langle x,y\rangle = x^T A y$ نیز نمایش داد، که $x,y\in\mathbb{R}^n$. در این حالت $\langle x,y\rangle = \sum_{i,j} x^i a_{ij} y^j$، و در نتیجه $A = [a_{ij}]$ است. بدون در نظر گرفتن متنی خاص، یک ماتریس را بصورت $A = [a_{ij}]$، با استفاده از حرف کوچک a بوسیلهٔ یک درایه از آن نوشته، و از دو اندیس زیر $(\ )_{ij}$ برای نمایش درایهٔ (i,j) ام آن ماتریس استفاده می‌کنیم.

بخش ۶.۶ مشتقات جزئی

فرض کنید (U,ϕ) چارتی بر منیفلد n بعدی M، f تابع هموار بتوی $\mathbb{R}^n$، و ϕ دارای مولفه‌های $x^1,\cdots,x^n$ باشند. این بدان معنی است که اگر $r^1,\cdots,r^n$ مختصات استاندارد بر $\mathbb{R}^n$ باشند، آنگاه $x^i = r^i\circ\phi$. به ازای هر $p\in U$ مشتق جزئی[1] $\partial f/\partial x^i$، تابع f نسبت به مختصه x^i در p عبارتست از

$$\begin{aligned}\left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p f &= \frac{\partial f}{\partial x^i}(p)\\ &:= \frac{\partial (f\circ\phi^{-1})}{\partial r^i}(\phi(p))\\ &:= \left.\frac{\partial}{\partial r^i}\right|_{\phi(p)}(f\circ\phi^{-1}).\end{aligned}$$

چون $p = \phi^{-1}(\phi(p))$ است، معادلهٔ فوق را می‌توان مجددا بصورت زیر نوشت

$$\frac{\partial f}{\partial x^i}(\phi^{-1}(\phi(p))) = \frac{\partial (f\circ\phi^{-1})}{\partial r^i}(\phi(p)).$$

بنابراین، بعنوان توابعی بر $\phi(U)$،

$$\frac{\partial f}{\partial x^i}\circ\phi^{-1} = \frac{\partial (f\circ\phi^{-1}}{\partial r^i}.$$

مشتق جزئی $\frac{\partial f}{\partial x^i}$ بر U، بدلیل آن که پول-بک آن، $(\partial f/\partial x^i)\circ\phi^{-1}$ بر $\phi(U)$ هموار است، خود نیز هموار می‌باشد.

در گزارهٔ بعدی خواهیم دید که مشتقات جزئی بر منیفلد در خاصیت دوگان $\partial r^i/\partial r^j = \delta^i_j$ بعنوان توابع مختصاتی r^i بر $\mathbb{R}^n$ صدق می‌کند.

[1] partial derivative

۶.۲۵ گزاره. فرض کنید $(U,x^1,\cdots,x^n)$ چارتی بر منیفلد باشد. آنگاه $\partial x^i/\partial x^j=\delta^i_j$.

برهان : در نقطهٔ $p\in U$، و با توجه به تعریف $\partial/\partial x^i\big|_p$،

$$\begin{aligned}\frac{\partial x^i}{\partial x^j}(p) &= \frac{\partial(x^i\circ\phi^{-1})}{\partial r^j}(\phi(p))\\ &= \frac{\partial(r^i\circ\phi\circ\phi^{-1})}{\partial r^j}(\phi(p))\\ &= \frac{\partial r^i}{\partial r^j}(\phi(p))=\delta^i_j,\end{aligned}$$

و برهان تمام است. □

۶.۲۶ تعریف. فرض کنید $F:N\to M$ نگاشتی هموار و $(U,\phi)=(U,x^1,\cdots,x^n)$ و $(V,\psi)=(V,y^1,\cdots,y^m)$ چارتهایی به ترتیب بر N و M بقسمی باشند که $F(U)\subset V$. i امین مولفهٔ F در چارت (V,ψ) را به صورت $F^i:=y^i\circ\psi\circ F:U\to\mathbb{R}$ نشان می‌دهیم. ماتریس $\left[\partial F^i/\partial x^j\right]$ را ماتریس ژاکوبی[۱] F نسبت به چارتهای (U,ϕ) و (V,ψ) می‌نامیم. در حالتی که N و M دارای بعد یکسان باشند، دترمینان $\det\left[\partial F^i/\partial x^j\right]$ را دترمینان ژاکوبی[۲] F نسبت به این دو چارت نامیم. دترمینان ژاکوبی را می‌توان به صورت $\partial(F^1,\cdots,F^n)/\partial(x^i,\cdots,x^n)$ نیز نمایش داد.

وقتیکه M و N زیر مجموعه‌های بازی از فضای اقلیدسی و چارتها بصورت $(U,r^1\cdots r^n)$ و $(V,r^1,\cdots,r^m)$ باشند، آنگاه ماتریس ژاکوبی $\left[\partial F^i/\partial r^j\right]$، که در آن $F^i=r^i\circ F$ است، بصورت همان ماتریس ژاکوبی معمولی در حساب دیفرانسیل و انتگرال خواهد بود.

۶.۲۷ ماتریس ژاکوبی نگاشت گذر. گیریم $(U,\phi)=(U,x^1,\cdots,x^n)$ و $(V,\psi)=(V,y^1,\cdots,y^n)$ چارتهای هم پوش بر منیفلد M باشند. نگاشت گذر $\psi\circ\phi^{-1}:\phi(U\cap V)\to\psi(U\cap V)$ یک دیفئومورفیسم بر زیر مجموعه‌های $\mathbb{R}^n$ است. نشان دهید که ماتریس ژاکوبی $J(\psi\circ\phi^{-1})$ در $\phi(p)$ ماتریس $\left[\partial y^i/\partial x^j\right]$ متشکل از مشتقات جزئی در نقطه p می‌باشند.

بنا به تعریف، $J(\psi\circ\phi^{-1})=\left[\partial(\psi\circ\phi^{-1})^i/\partial r^j\right]$، که در آن

$$\begin{aligned}\frac{\partial(\psi\circ\phi^{-1})^i}{\partial r^j}(\phi(p)) &= \frac{\partial(r^i\circ\psi\circ\phi^{-1})}{\partial r^j}(\phi(p))\\ &= \frac{\partial(y^i\circ\phi^{-1})}{\partial r^j}(\phi(p))\\ &= \frac{\partial y^i}{\partial x^j}(p).\end{aligned}$$

---

[۱] Jacobian matrix [۲] Jacobian determinant

بخش ۷.۶ قضیهٔ تابع وارون

بنا به گزارهٔ ۶.۱۲، هر دیفئومورفیسم $F : U \to F(U) \subset \mathbb{R}^n$ بر هر زیرمجموعهٔ باز U از یک منیفلد مفروض، را بصورت دستگاه مختصات بر U می‌توان در نظر گرفت. نگاشت هموار، $F : N \to M$ موضعا وارون پذیر و یا موضعا دیفئومورفیسم در نقطهٔ p گفته می‌شود، هرگاه p دارای همسایگی مانند U است که $F\big|_U : U \to F(U)$ دیفئومورفیسم باشد. n تابع هموار $F^1, \cdots, F^n$ در یک همسایگی نقطهٔ p واقع در یک منیفلد N با بعد n را در نظر می‌گیریم، مایلیم بدانیم که آیا اینها تشکیل یک دستگاه مختصاتی، در یک همسایگی p می‌دهند. این معادل آن است که آیا، $F = (F^1, \cdots, F^n) : N \to \mathbb{R}^n$ یک دیفئومورفیسم موضعی در p می‌باشد. قضیهٔ تابع وارون پاسخ این سئوال را خواهد داد.

۶.۲۸ قضیهٔ تابع وارون برای $\mathbb{R}^n$. فرض کنید $F : W \to \mathbb{R}^n$ نگاشتی هموار بر یک زیر مجموعهٔ باز W از $\mathbb{R}^n$ باشد. به ازای هر نقطهٔ p در W، نگاشت F در نقطهٔ p وارون پذیر است اگر و تنها اگر دترمینان ژاکوبی $\det\left[\partial F^i/\partial r^j(p)\right]$ غیر صفر باشد.

این قضیه معمولا در دورهٔ کارشناسی و در درس آنالیز ثابت می‌شود. ضمیمهٔ (ب) و قضایای مربوطه را می‌توان ملاحظه کرد. چون قضیهٔ تابع وارون بر $\mathbb{R}^n$ یک نتیجهٔ موضعی است، به راحتی می‌توان آن را برای منیفلدها نیز بیان نمود.

۶.۲۹ قضیهٔ تابع وارون برای منیفلدها. فرض کنید $F : N \to M$ نگاشتی هموار بین منیفلدهایی با بعد یکسان باشد، و $p \in N$. فرض کنید به ازای چارتهای $(U, \phi) = (U, x^1, \cdots, x^n)$ حول p در N و $(V, \psi) = (V, y^1, \cdots, y^n)$ حول $F(p)$ در M، داشته باشیم $F(U) \subset V$. اگر $F^i = y^i \circ F$ قرار دهیم، آنگاه F در p بطور موضعی وارون پذیر است اگر و تنها اگر، دترمینان ژاکوبی $\det\left[\partial F^i/\partial x^j(p)\right]$ ناصفر باشد.

برهان : چون $F^i = y^i \circ F = r^i \circ \psi \circ F$، ماتریس ژاکوبی F نسبت به چارتهای (U, ϕ) و (V, ψ) عبارت است از،

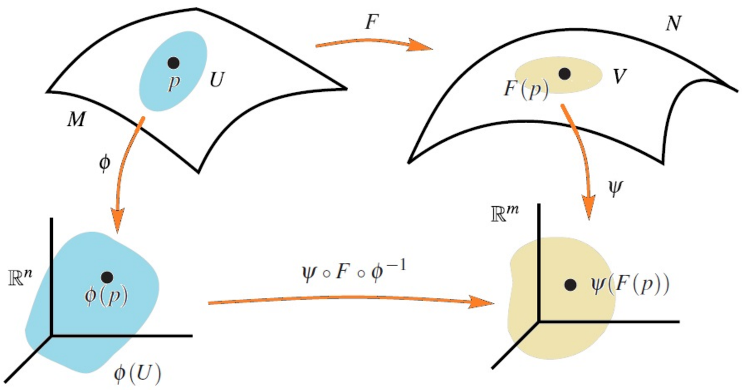
$$\begin{aligned}\left[\frac{\partial F^i}{\partial x^j}(p)\right] &= \left[\frac{\partial (r^i \circ \psi \circ F)}{\partial x^j}(p)\right]\\ &= \left[\frac{\partial (r^i \circ \psi \circ F \circ \phi^{-1})}{\partial r^j}(\phi(p))\right],\end{aligned}$$

که دقیقا ماتریس ژاکوبی نگاشت

$$\psi \circ F \circ \phi^{-1} : \mathbb{R}^n \supset \phi(U) \to \psi(V) \subset \mathbb{R}^n$$

بین دو زیر مجموعهٔ باز از $\mathbb{R}^n$ و در نقطهٔ $\phi(p)$ می‌باشد. بنا به قضیهٔ تابع وارون برای $\mathbb{R}^n$،

$$\det\left[\frac{\partial F^i}{\partial x^j}(\phi(p))\right] = \det\left[\frac{\partial r^i \circ (\psi \circ F \circ \phi^{-1})}{\partial r^j}(\phi(p))\right] \neq 0$$



شکل ۴.۶: بدلیل وارون پذیری موضعی $\psi\circ F\circ\phi^{-1}$ در $\phi(p)$، نگاشت F در p نیز موضعا وارون پذیر است .

اگر و تنها اگر $\psi\circ F\circ\phi^{-1}$ در $\phi(p)$ وارون پذیر باشد. چون ϕ و ψ دیفئومورفند (گزارهٔ ۶.۱۱)، حکم اخیر معادل است با موضعا وارون پذیر بودن F در p (شکل ۷.۶). □

معمولا قضیه تابع وارون را به فرم زیر بیان می‌کنیم.

۶.۳۰ نتیجه. گیریم N منیفلدی با بعد n باشد. مجموعه‌ای از n تابع $F^1,\cdots,F^n$ تعریف شده بر یک همسایگی مختصاتی $(U,x^1\cdots,x^n)$ از نقطهٔ $p\in N$ تشکیل یک دستگاه مختصات حول p می‌دهند، اگر و تنها اگر دترمینان ژاکوبی $\det\left[\partial F^i/\partial x^j(p)\right]$، ناصفر باشد.

برهان : گیریم $F=(F^1,\cdots,F^n):U\to\mathbb{R}^n$. آنگاه $\det\left[\partial F^i/\partial x^j(p)\right]\neq 0$

$\Longleftrightarrow$ $F:U\to\mathbb{R}^n$ در نقطهٔ p موضعا وارون پذیر باشد. (بنا به قضیهٔ تابع وارون)

$\Longleftrightarrow$ همسایگی W در N شامل نقطهٔ p چنان است که $F:W\to F(W)$ یک دیفئومورفیسم باشد (با توجه به تعریف وارون پذیری موضعی)

$\Longleftrightarrow$ در ساختار N، $(W,F^1,\cdots,F^n)$ یک چارت مختصاتی حول نقطهٔ p باشد (بنا به گزارهٔ ۶.۱۲). □

۶.۳۱ مثال. همهٔ نقاطی در $\mathbb{R}^2$ را چنان بیابید که توابع x^2+y^2-1، y یک دستگاه مختصات موضعی تشکیل دهند.

حل : تابع $F:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ با ضابطهٔ $F(x,y)=(x^2+y^2-1,y)$ تعریف می‌کنیم؛ نگاشت F یک نگاشت مختصاتی در یک همسایگی p است، اگر و فقط اگر یک دیفئومورفیسم موضعی در نقطهٔ p باشد. دترمینان ژاکوبی F عبارت است از،

$$\frac{\partial(F^1,F^2)}{\partial(x,y)}=\begin{bmatrix}2x & 2y\\ 0 & 1\end{bmatrix}=2x$$

*

حال با توجه به قضیهٔ تابع وارون، F یک دیفئومورفیسم موضعی در نقطهٔ $p = (x,y)$ است، اگر و تنها اگر $x \neq 0$. بنابراین، F را می‌توان بعنوان یک دستگاه مختصات موضعی در هر نقطهٔ p که واقع بر محور y نباشد در نظر گرفت.

بخش ۸.۶ تمرینات

۶.۱ ساختارهای دیفرانسیلی بر $\mathbb{R}$. گیریم $\mathbb{R}$ خط حقیقی همراه با ساختار دیفرانسیلی داده شده توسط اطلس ماکسیمال با چارت $(\mathbb{R}, \phi = \mathbb{1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R})$، و فرض کنید $\mathbb{R}'$ خط حقیقی با ساختار دیفرانسیلی داده شده توسط اطلس ماکسیمال با چارت $(\mathbb{R}, \psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R})$ با ضابطهٔ $\psi(x) = x^{1/3}$ باشد.

الف) نشان دهید این دو ساختار متمایز از یکدیگر هستند.

ب) نشان دهید که دیفئومورفیسمی بین $\mathbb{R}$ و $\mathbb{R}'$ موجود است. (راهنمایی : بدلیل ناهموار بودن نگاشت همانی $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$، این نگاشت دیفئومورفیسم مطلوب نیست.)

۶.۲ همواری نگاشت احتوا. فرض کنید M و N منیفلد بوده و q_0 نقطه‌ای متعلق به N باشد. ثابت کنید که نگاشت احتوا $i_{q_0} : M \to M \times N$، با ضابطهٔ $i_{q_0}(p) = (p, q_0)$ هموار است.

۶.۳ گروه اتومورفیسمهای یک فضای برداری. فرض کنید V یک فضای برداری با بعد متناهی بر $\mathbb{R}$ و $\mathrm{GL}(V)$ گروه اتومورفیسمهای خطی بر V باشد. هر اتومورفیسم خطی $L \in \mathrm{GL}(V)$ را نسبت به مبنای مرتب $e = (e_1, \cdots, e_n)$، که با ماتریس $[a^i_j]$ ارائه شده است، به صورت $L(e_j) = \sum_i a^i_j e_i$ تعریف می‌کنیم. در این صورت، نگاشت

$$\phi_e : \mathrm{GL}(V) \longrightarrow \mathrm{GL}(n, \mathbb{R}), \qquad L \longmapsto [a^i_j],$$

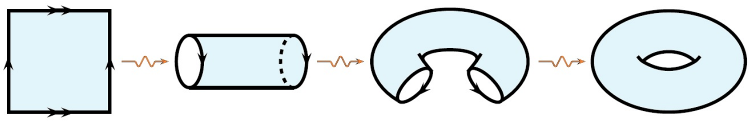
تناظری دو سویی با یک زیر مجموعهٔ باز از $\mathbb{R}^{n\times n}$ می‌باشد که $\mathrm{GL}(V)$ را بتوی یک منیفلد هموار می‌نشاند؛ بطور موقت آن را با $\mathrm{GL}(V)_e$ نمایش می‌دهیم. اگر $\mathrm{GL}(V)_u$ ساختار منیفلدی باشد که توسط مبنای دیگر $(u_1, \cdots, u_n)$ برای V تولید شده باشد، نشان دهید که $\mathrm{GL}(V)_e$ با $\mathrm{GL}(V)_u$ یکی است.

۶.۴ دستگاه مختصات موضعی. همهٔ نقاط واقع در یک همسایگی متعلق به $\mathbb{R}^3$ را چنان بیابید که توابع x، $x^2 + y^2 + z^2 - 1$ و z بر آن بصورت یک دستگاه مختصات موضعی عمل کنند.

فصل ۷

خارج قسمت

با چسباندن لبه‌های مربع انعطاف‌پذیر، رویهٔ جدیدی از آن می‌توان ساخت. برای مثال، با چسباندن لبه‌های بالایی و پایینی مربع، استوانه حاصل می‌گردد؛ و با چسباندن دو سر استوانه به یکدیگر و با حفظ جهت، تیوب ساخته می‌شود (مطابق شکل ۱.۷). چنین ساختی را یکی‌گیری[1] یا خارج قسمت‌گیری[2] می‌نامیم.



شکل ۱.۷: چسباندن لبه‌های مربع انعطاف پذیر به یکدیگر

خارج قسمت ساختن، فرایندی برای ساده‌سازی است. مطلب را با یک رابطهٔ هم‌ارزی روی یک مجموعه مفروض آغاز نموده و هر ردهٔ هم ارز، نقطه‌ای را مشخص می‌نماید. ریاضیات مملو از ساختارهای خارج قسمتی است؛ به عنوان مثال، از گروه خارج قسمتی، حلقهٔ خارج قسمتی و یا فضای برداری خارج قسمتی در جبر می‌توان نام برد. اگر مجموعهٔ زمینه فضای توپولوژی باشد، همواره این امکان وجود دارد که به مجموعهٔ خارج قسمتی توپولوژی‌ای القا شود، به گونه‌ای که نگاشت تصویر طبیعی پیوسته گردد. هر چند که اگر فضای زمینه واجد ساختار منیفلدی باشد، ولی اغلب اتفاق می‌افتد که، فضای خارج قسمتی تشکیل منیفلد ندهد.هدف اصلی این فصل فراهم ساختن شرایطی است که تحت آن یک فضای خارج قسمتی در اصل هاوسدورف و شمارایی دوم صدق کند. پس از آن روی فضای تصویری حقیقی مطالعه بعنوان مثالی از منیفلد خارج قسمتی بحث خواهیم کرد.

فضای تصویری حقیقی را می‌توان بصورت خارج قسمت کره با نقاط متقاطر (رو برو به هم در دو سر قطر کره) و یا بصورت مجموعه‌ای از خطوط راست مار بر مبدا در یک فضای برداری دانست. این دو تعبیر، دو تعمیم متمایز را نتیجه می‌دهند – از یک طرف نگاشت های پوششی، و از طرف دیگر زیر

---

[1] identification [2] quotient construction

فضاهای گراسمانی[3] k−بعدی از فضای برداری مفروض. در یکی از تمرینات، بطور مشروح $\mathrm{G}(2,4)$ زیر فضاهای گراسمانی 2−بعدی از $\mathbb{R}^4$ را محاسبه می‌نماییم.

بخش ۱.۷ توپولوژی خارج قسمتی

یادآوری می‌کنیم که رابطهٔ همارزی[1] بر مجموعهٔ S واجد خاصیت، انعکاسی، تقارنی، و تعدی یا (ترایایی) است. ردهٔ هم ارز[2] $[x]$ از $x \in S$ مجموعه‌ای متشکل ازهمهٔ اعضای S است که با x هم ارز باشد. رابطهٔ همارزی روی مجموعهٔ S، این مجموعه را به دسته‌های همارزی جدا از هم افراز می‌کند. مجموعهٔ کلاسهای هم ارز را با نماد $S/\sim$ نمایش داده و آن را مجموعهٔ خارج قسمتی S تحت رابطهٔ همارزی $\sim$ نامیم. نگاشت تصویر[3] طبیعی $\pi : S \to S/\sim$ هست که هر $x \in S$ را به دسته[4] یا (کلاس) هم ارز خود $[x]$ می‌نگارد.
حال فرض کنید که S فضای توپولوژی باشد. می‌خواهیم بر $S/\sim$ توپولوژی چنان تعریف کنیم که مجموعهٔ U در $S/\sim$ باز گوییم، اگر وتنها اگر $\pi^{-1}(U)$ در S باز باشد. واضح است که مجموعهٔ تهی $\varnothing$ و خود مجموعهٔ $S/\sim$ نیز باز می‌باشند. بعلاوه، چون

$$\pi^{-1}\Big(\bigcup_{\alpha} U_\alpha\Big) = \bigcup_{\alpha} \pi^{-1}(U_\alpha), \qquad \pi^{-1}\Big(\bigcap_{i} U_i\Big) = \bigcap_{i} \pi^{-1}(U_i),$$

پس هر گردایه از مجموعه‌های باز در $S/\sim$ تحت اجتماع دلخواه و اشتراک متناهی بسته بوده، و لذا $S/\sim$ یک توپولوژی است. آن را توپولوژی خارج قسمتی[5] بر $S/\sim$ نامیده و با توپولوژی تعریف شده، $S/\sim$ را فضای خارج قسمتی[6] از S تحت رابطهٔ همارزی $\sim$ نامیم. با توپولوژی خارج قسمتی بر $S/\sim$، نگاشت تصویری $\pi : S \to S/\sim$ خود به خود پیوسته خواهد بود، زیرا بنا به تعریف تصویر عکس هر مجموعهٔ باز در $S/\sim$ در S باز است.

بخش ۲.۷ پیوستگی نگاشت بر خارج قسمت

گیریم $\sim$ رابطهٔ همارزی بر فضای توپولوژی S و $S/\sim$ توپولوژی خارج قسمتی حاصل از آن باشد. فرض کنید تابع $f : S \to Y$ از S به فضای توپولوژی دیگر Y چنان است، که بر هر ردهٔ همارزی پایا باشد. آنگاه نگاشت $\bar{f} : S/\sim \longrightarrow Y$ به ازای

$$\bar{f}([p]) = f(p) \quad ;p \in S \text{ ،برای هر}.$$

به سخن دیگر، نمودار زیر جابجایی است،

$$\begin{tikzcd} S \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi"'] & Y. \\ S/\sim \arrow[ur, "\bar{f}"'] & \end{tikzcd}$$

---
۳ Grassmannian spaces ۱ equivalence relation ۲ equivalence class ۳ projection map
۴ class ۵ quotient topology ۶ quotient space

۷.۱ گزاره. نگاشت القا شدهٔ $\bar{f} : S/\sim \longrightarrow Y$ پیوسته است، اگر و تنها اگر نگاشت $f : S \to Y$ پیوسته باشد.

برهان : ($\Leftarrow$) اگر $\bar{f}$ پیوسته باشد، آنگاه چون ترکیب توابع $\bar{f} \circ \pi$ پیوسته است، در نتیجه f نیز پیوسته خواهد بود.
($\Rightarrow$) فرض کنید f پیوسته باشد. اگر V در Y مجموعهٔ باز باشد، آنگاه $f^{-1}(V) = \pi^{-1}(f^{-1}(V))$ در S باز است. بنا به تعریف توپولوژ ی خارج قسمتی، $\bar{f}^{-1}(V)$ در $S/\sim$ باز می‌باشد. چون V کاملا دلخواه اختیار گردیده است، بنابراین $\bar{f} : S/\sim \longrightarrow Y$ پیوسته خواهد بود. □
این گزاره محک مناسبی برای بررسی پیوسته بودن تابع $\bar{f}$ روی یک فضای خارج قسمتی $S/\sim$ می‌باشد: کافی است نگاشت $\bar{f}$ را به $f : f \circ \pi$ بر S ترفیع داده، سپس پیوستگی نگاشت ترفیع یافته f را بر S بررسی نماییم. مثال هایی از این دست را در مثال ۷.۲ و گزارهٔ ۷.۳ ببینید.

بخش ۳.۷ تعیین زیر مجموعه بعنوان نقطه

اگر A یک زیر فضای از فضای توپولوژی S باشد، می‌توان رابطهٔ $\sim$ را بر S بصورت زیر تعریف کرد

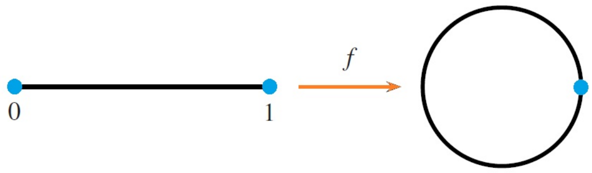
$$x \sim x \qquad ;\ x \in S \text{ برای هر،}$$

(بنابراین رابطه انعکاسی است) و

$$x \sim y \qquad ;\ x, y \in A \text{ برای هر،}$$

این رابطهٔ همارزی روی S است. گوییم فضای خارج قسمتی $S/\sim$ از S با تعیین A بعنوان یک نقطه حاصل شده است.

۷.۲ مثال. گیریم I فاصلهٔ واحد $[0,1]$، و $I/\sim$ فضای خارج قسمتی از I با تعیین مجموعهٔ دو نقطه‌ای $\{0,1\}$ به یک نقطه، باشد. دایرهٔ واحد در صفحهٔ مختلط را با $\mathbb{S}^1$ نمایش می‌دهیم. فرض کنید تابع $f : I \longrightarrow \mathbb{S}^1$ با ضابطهٔ $f(x) = exp(2\pi i x)$، در نقاط 0 و 1 مقدار یکسانی را اختیار نموده (۲.۷)، و در نتیجه تابع $\bar{f} : I/\sim \longrightarrow \mathbb{S}^1$ را القا کند.



شکل ۲.۷: دایرهٔ واحد بعنوان فضای خارج قسمتی از فاصلهٔ واحد

۷.۳ گزاره. تابع $\bar{f} : I/\sim \longrightarrow \mathbb{S}^1$ همئومورفیسم است.

برهان : چون f پیوسته است، $\bar{f}$ نیز بنا به گزارهٔ ۷.۱ پیوسته است. واضح است که $\bar{f}$ دوسویی است. خرج قسمت $I/\sim$ بدلیل آن که تصویر مجموعهٔ فشرده است، فشرده می‌باشد. بنابراین، $\bar{f}$ دو سویی پیوسته از فضای فشردهٔ $I/\sim$ به فضای هاوسدورف $\mathbb{S}^1$ می‌باشد. بنا به نتیجهٔ (A.۳۶) همئومورفیسم است. □

بخش ۴.۷ یک شرط لازم برای هاوسدورف بودن فضای خارج قسمتی

در حالت کلی ساختار خارج قسمتی، حافظ خاصیت هاوسدورف و شمارایی دوم نیست. در حقیقت، هر مجموعهٔ تک عضوی در فضای هاوسدورف بسته است، یعنی اگر $\pi : S \longrightarrow S/\sim$ نگاشت تصویری و فضای خارج قسمتی $S/\sim$ هاوسدورف باشد، آنگاه به ازای هر $p \in S$، تصویر آن $\{\pi(p)\}$ در $S/\sim$ بسته است. بدلیل پیوستگی π، تصویر وارون $\pi^{-1}\big(\{\pi(P)\}\big) = [p]$ در S نیز بسته است. این مطلب یک شرط لازم برای هاوسدورف بودن فضای خارج قسمتی را فراهم می‌سازد.

۷.۴ گزاره. اگر فضای خارج قسمتی $S/\sim$ هاوسدورف باشد، آنگاه به ازای هر نقطهٔ p در S ردهٔ هم‌ارزی $[p]$ در S بسته است.

۷.۴.۱ مثال رابطهٔ هم‌ارزی $\sim$ بر $\mathbb{R}$ را با تعیین فاصلهٔ باز $(0,\infty)$ بعنوان یک نقطه، تعریف می‌کنیم. فضای خارج قسمتی $\mathbb{R}/\sim$ هاوسدورف نیست، بدلیل آن که ردهٔ هم‌ارزی $(0,\infty)$ نسبت به $\sim$ در $\mathbb{R}$ متناظر به نقطهٔ $(0,\infty)$ در $\mathbb{R}/\sim$ بوده که، زیر مجموعهٔ بازی از $\mathbb{R}$ نمی‌باشد. △

بخش ۵.۷ رابطهٔ هم‌ارزی باز

در این بخش می‌خواهیم مشابه کتاب بوت بی [۳] عمل کرده و شرایطی را فراهم سازیم تا تحت آن فضای خارج قسمتی هم هاوسدورف و هم واجد شمارایی دوم باشد. یادآوری می‌کنیم که نگاشت $f : X \to Y$ بین فضا های توپولوژی باز است، هرگاه تصویر هر مجموعهٔ باز از آن تحت f نیز باز باشد.

۷.۵ تعریف. یک رابطهٔ هم‌ارزی $\sim$ بر فضای توپولوژی S را باز گوییم، هرگاه نگاشت تصویری $\pi : S \longrightarrow S/\sim$ باز باشد.

به سخن دیگر، رابطهٔ هم‌ارزی $\sim$ بر S باز است، اگر و تنها اگر به ازای هر مجموعهٔ باز U در S، مجموعهٔ

$$\pi^{-1}\big(\pi(U)\big) = \bigcup_{x \in U} [x]$$

متشکل از همهٔ نقاط هم ارز با هر نقطه از U باز باشد.

۷.۶ مثال. نگاشت تصویری به فضای خارج قسمتی لزوما باز نیست. برای مثال، فرض کنید $\sim$ رابطهٔ هم‌ارزی بر خط حقیقی $\mathbb{R}$ باشد که، دو نقطهٔ 1 و -1 را تعیین نموده، و $\pi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}/\sim$ نگاشت تصویری باشد. نگاشت تصویری باز است، اگر و تنها اگر هر مجموعهٔ باز V در $\mathbb{R}$، تصویر آن $\pi(V)$ در $\mathbb{R}/\sim$ باز

شکل ۳.۷: نگاشت تصویری که باز نیست.

باشد، و با توجه به تعریف توپولوژی خارج قسمتی، بدان معنی است که، $\pi^{-1}(\pi(V))$ در $\mathbb{R}$ باز باشد. حال فرض کنید که V فاصلهٔ باز $(-2,0)$ در $\mathbb{R}$ باشد. آنگاه

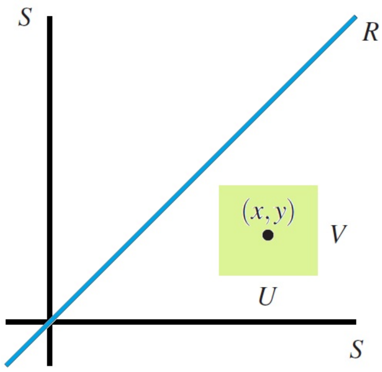
$$\pi^{-1}\big(\pi(U)\big) = (-2,0) \bigcup \{1\}$$

در $\mathbb{R}$ باز نمی‌باشد (شکل ۳.۷). بنابراین، نگاشت تصویری $\pi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}/\sim$ نگاشت باز نیست.

یک رابطهٔ هم‌ارزی $\sim$ بر S را در نظر گرفته، فرض می‌کنیم R زیرمجموعه‌ای از $S \times S$ باشد که، با رابطهٔ زیر تعریف شود

$$R = \{(x,y) \in S \times S \,|\, x \sim y\}.$$

R را نمودار رابطهٔ هم‌ارزی $\sim$ نامیم.



شکل ۴.۷: نمودار R از رابطهٔ هم‌ارزی و مجموعهٔ باز $U \times V$ جدا از R.

۷.۷ قضیه. فرض کنید $\sim$ رابطهٔ هم‌ارزی باز بر فضای توپولوژی S باشد. آنگاه فضای خارج قسمتی $S/\sim$ هاوسدورف است، اگر و تنها اگر نمودار R از $\sim$ در $S \times S$ بسته باشد.

برهان : در اینجا دنباله‌ای از احکام معادل وجود دارد:

R در $S \times S$ بسته است.

$\Longleftrightarrow$ $(S\times S)-R$ در $S\times S$ باز است.

$\Longleftrightarrow$ بـه ازای هـر $(x,y)\in S\times S-R$، مجموعهٔ بـاز مبنا شامل (x,y) است که $(U\times V)\cup R=\varnothing$. (شکل ۴.۷)

$\Longleftrightarrow$ برای هر زوج $x\nsim y$ در S، همسایگی های U شامل x و V شامل y هستند که هیچ عضوی از U هم ارز با عضو V نیست.

$\Longleftrightarrow$ به ازای هر دو نقطهٔ $[x]\neq[y]$ در $S/\sim$، همسایگی هایی U شامل x و V شامل y در S وجود دارند که، $\pi(U)\cap\pi(V)=\varnothing$ در $S/\sim$. $(*)$

حال قصد آن را داریم تا نشان دهیم که آخرین حکم $(*)$، معادل با هاوسدورف بودن $S/\sim$ است.

ابتدا فرض کنید $(*)$. چون $\sim$ رابطهٔ هم‌ارزی باز است $\pi(U)$ و $\pi(V)$ مجموعه‌های باز جدا از هم، در $S/\sim$ بوده که به ترتیب شامل $[x]$ و $[y]$ می‌باشند. این یعنی $S/\sim$ هاوسدورف است.

بر عکس، فرض کنید $S/\sim$ هاوسدورف باشد. اگر $[x]\neq[y]$، در $S/\sim$ باشد، آنگاه مجموعه‌های باز جدا از همی مانند A و B در $S/\sim$ وجود دارند که $[x]\in A$ و $[y]\in B$. بنا به پوشا بودن π، داریم $A=\pi(\pi^{-1}A)$ و $B=\pi(\pi^{-1}B)$ (تمرین ۷.۱ را ببینید). فرض کنید $U=\pi^{-1}A$ و $V=\pi^{-1}B$.آنگاه $x\in U$، $y\in V$، و $A=\pi(U)$ و $B=\pi(V)$ مجموعه‌های باز جدا از هم در $S/\sim$ می‌باشند. $\square$

اگر رابطهٔ هم‌ارزی $\sim$ رابطهٔ تساوی باشد، آنگاه فضای خارج قسمتی $S/\sim$ خود فضای S بوده و نمودار R از $\sim$ بسادگی قطری خواهد بود

$$\Delta=\Big\{(x,y)\in S\times S\Big\}.$$

در این حالت، قضیهٔ ۷.۷ به فرم مشهور زیر، که روشی برای تشخیص فضای هاوسدورف بوسیلهٔ قطرش است، در خواهد آمد (به مسالهٔ A.۶ مراجعه شود).

۷.۸ نتیجه. فضای توپولوژی S هاوسدورف است، اگر و تنها اگر قطر Δ در $S\times S$ بسته باشد.

۷.۹ قضیه. گیریم $\sim$ رابطهٔ هم‌ارزی باز بر فضای توپولوژی S با نگاشت تصویری $\pi:S\longrightarrow S/\sim$ باشد. اگر $\mathcal{B}=\{(B_\alpha)\}$ مبنایی برای S باشد، آنگاه تصویر آن $\{\pi(B_\alpha)\}$ تحت π یک مبنا برای $S/\sim$ است.

برهان : چون π نگاشتی باز است، $\{\pi(B_\alpha)\}$ گردایه‌ای از مجموعه‌های باز در $S/\sim$ می‌باشد. فرض کنید W یک مجموعهٔ باز در $S/\sim$ و $[x]\in W$، $x\in S$ باشد. آنگاه $x\in\pi^{-1}(W)$. چون $\pi^{-1}(W)$ باز است، بنابراین یک مجموعهٔ باز $B\in\mathcal{B}$ است که $x\in B\subset\pi^{-1}(W)$. آنگاه $[x]=\pi(x)\in\pi(B)\subset W$. این ثابت می‌کند که $\{\pi(B_\alpha)\}$ یک مبنای باز برای $S/\sim$ است. $\square$

۷.۱۰ نتیجه. اگر $\sim$ رابطهٔ هم‌ارزی باز بر فضای شمارای دوم مانند S باشد، آنگاه فضای خارج قسمتی $S/\sim$ نیز شمارای دوم است.

بخش ۶.۷ فضای تصویری حقیقی

یک رابطهٔ هم‌ارزی روی $\mathbb{R}^{n+1} - \{0\}$ بصورت زیر تعریف می‌کنیم،

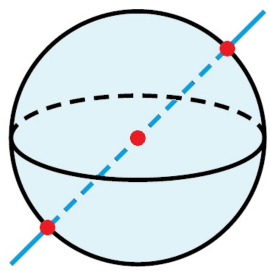
$$x \sim y \quad \longleftrightarrow \quad y = tx \text{ به ازای عدد حقیقی و نا صفر } t$$

که در آن $x, y \in \mathbb{R}^{n+1} - \{0\}$. فضای تصویری حقیقی[۱] $\mathbb{RP}^n$ فضای خارج قسمتی $\mathbb{R}^{n+1} - \{0\}$ بوسیلهٔ رابطهٔ هم‌ارزی فوق است. ردهٔ هم‌ارزی نقطهٔ $(a^0, \cdots, a^n) \in \mathbb{R}^{n+1} - \{0\}$ را با $[a^0, \cdots, a^n]$ نمایش داده و $\pi : \mathbb{R}^{n+1} - \{0\}$ را نگاشت تصویری در نظر می‌گرفته، و $[a^0, \cdot, a^n]$ را مختصات همگن[۲] $\mathbb{RP}^n$ می‌نامیم.

از نظر هندسی، دو نقطه غیر صفر در $\mathbb{R}^{n+1}$ را، هم ارز یا معادل نامیم، اگر و تنها اگر این دو نقطه بر روی خط راست گذرنده از مبدا $\mathbb{R}^{n+1}$ واقع باشند. هر خط گذرنده از مبدا در $\mathbb{R}^{n+1}$ کرهٔ واحد $\mathbb{S}^n$ را در زوج نقاط متقاطر[۳] قطع می‌کند، و بالعکس هر زوج نقاط متقاطر بر $\mathbb{S}^n$ مشخص کنندهٔ تنها خط گذرنده از مبدا می‌باشد (شکل ۵.۷). با این توضیحات می‌توان رابطهٔ هم‌ارزی $\sim$ روی $\mathbb{S}^n$ به کمک زوج نقاط متقاطر تعریف کرد،

$$x \sim y \iff x = \pm y, \qquad x, y \in \mathbb{S}^n.$$

بنابراین دو سویی $\mathbb{S}^n/\sim \longleftrightarrow \mathbb{RP}^n$ را خواهیم داشت.

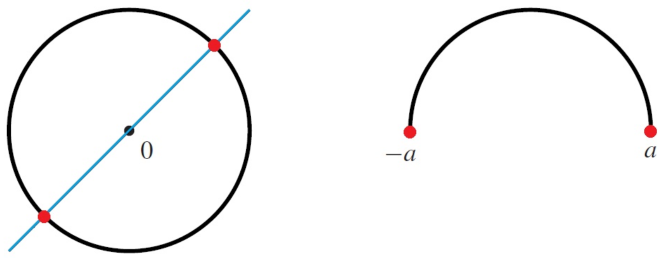


شکل ۵.۷: یک خط گذرنده از 0 در $\mathbb{R}^3$ متناظر به یک زوج از نقاط متقاطر واقع بر $\mathbb{S}^2$.

۷.۱۱ فضای تصویری حقیقی بصورت فضای خارج قسمتی کره. برای $x = (x^1, \cdots, x^n) \in \mathbb{R}^n$، مدول x را با $\|x\| = \sqrt{\sum_i (x^i)^2}$ نشان می‌دهیم. ثابت کنید که نگاشت $f : \mathbb{R}^{n+1} - \{0\} \longrightarrow \mathbb{S}^n$ با ضابطهٔ $f(x) = x/\|x\|$، همئومورفیسمی بصورت $\bar{f} : \mathbb{RP}^n \longrightarrow \mathbb{S}^n/\sim$ القا می‌کند. (راهنمایی: نگاشت وارون $\bar{g} : \mathbb{S}^n \longrightarrow \mathbb{RP}^n$ بیابید، و نشان دهید که $\bar{f}$ و $\bar{g}$ پیوسته هستند).

۷.۱۲ مثال (خط تصویری حقیقی $\mathbb{RP}^1$). هر خط گذرنده از مبدا در $\mathbb{R}^2$ دایرهٔ واحد را در دو نقطهٔ

[۱] real projective space [۲] homogeneous coordinates [۳] antipodal



شکل ۶.۷: خط تصویری حقیقی $\mathbb{RP}^1$ بعنوان مجموعه‌ای از خطوط گذرنده از نقطهٔ 0 در $\mathbb{R}^2$.

متقاطر قطع می‌کند. بنا به تمرین ۱۱ از فصل ۷، $\mathbb{RP}^1$ با فضای خارج قسمتی $\mathbb{S}^1/\sim$ همئومورف است، و به نوبهٔ خود با نیم دایرهٔ بستهٔ بالایی که توسط دو نقطهٔ انتهایی آن مشخص شده است، نیز همئومورف است. (شکل ۶.۷). بنابراین، $\mathbb{RP}^1$ با $\mathbb{S}^1$ همئومورف می‌باشد.

۷.۱۳ مثال (صفحهٔ تصویری حقیقی $\mathbb{RP}^2$). بنا به تمرین ۱۱ از فصل ۷، همئومورفیسم بصورت

$$\mathbb{RP}^2 \simeq \mathbb{S}^2/\{\text{نقاط متقاطر}\} = \mathbb{S}^2/\sim$$

موجود است. برای نقاط غیر واقع بر خط استوا، هر زوج از نقاط متقاطر شامل یک نقطهٔ منحصر بفرد در نیمکرهٔ فوقانی می‌باشد. بنابراین، دو سویی بین $\mathbb{S}^2/\sim$ و خارج قسمت نیمکرهٔ بستهٔ بالایی بقسمی وجود دارد که هر زوج از نقاط متقاطر روی خط استوا تعیین شده اند. اینکه نشان دهیم که این دوسویی همئومورفیسم است، دشوار نیست (تمرین ۷.۲ را ببینید).

فرض کنید $\mathbb{H}^2$ نیمکرهٔ بستهٔ بالایی

$$\mathbb{H}^2 = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2 = 1,\ z \geq 0\right\}$$

و $\mathbb{D}^2$ قرص بستهٔ واحد

$$\mathbb{D}^2 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 \leq 1\right\}$$

باشد. این دو فضا به کمک نگاشت پیوستهٔ زیر با یکدیگر همئومورفند.

$$\varphi : \mathbb{H}^2 \longrightarrow \mathbb{D}^2, \qquad \varphi(x,y,z) = (x,y),$$

و وارون آن،

$$\psi : \mathbb{D}^2 \longrightarrow \mathbb{H}^2, \qquad \psi(x,y) = \left(x, y, \sqrt{1-x^2-y^2}\right).$$

روی $\mathbb{H}^2$، رابطهٔ هم‌ارزی $\sim$ با تعیین نقاط متقاطر روی خط استوا، تعریف می‌کنیم:

$$(x,y,0) \sim (-x,-y,0), \quad x^2+y^2+1.$$

بر $\mathbb{D}^2$، رابطهٔ هم‌ارزی $\sim$ با تعیین نقاط متقاطر روی مرز دایره تعریف می‌کنیم:

$$(x,y) \sim (-x,-y), \quad x^2+y^2=1.$$

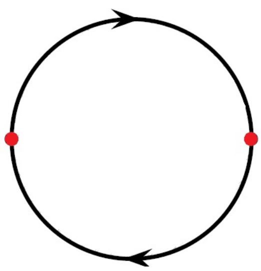
آنگاه φ و ψ همئومورفیسم های زیر را القا می‌کنند،

$$\bar{\varphi} : \mathbb{H}^2/\sim \;\longrightarrow\; \mathbb{D}^2/\sim, \quad \bar{\psi} : \mathbb{D}^2/\sim \;\longrightarrow\; \mathbb{H}^2/\sim .$$

بطور خلاصه، دنباله‌ای از همئومورفیسم ها

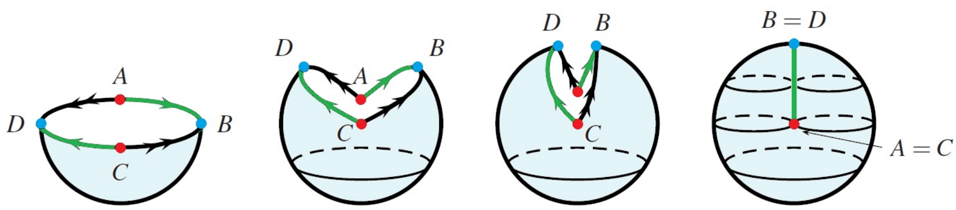
$$\mathbb{RP}^2 \xrightarrow{\sim} \mathbb{S}^2/\sim \xrightarrow{\sim} \mathbb{H}^2/\sim \xrightarrow{\sim} \mathbb{D}^2/\sim$$

است که صفحهٔ تصویری حقیقی را بصورت فضای خارج قسمتی از قرص بستهٔ $\mathbb{D}^2$ با نقاط متقاطر واقع بر مرز هایش مشخص می‌سازد. این شاید بهترین روشی برای تصویر کردن $\mathbb{RP}^2$ باشد (شکل ۷.۷). صفحهٔ



شکل ۷.۷: صفحهٔ تصویری حقیقی بصورت فضای خارج قسمتی از قرص

تصویری حقیقی $\mathbb{RP}^2$ را نمی‌توان بعنوان زیر منیفلد در $\mathbb{R}^3$ نشاند. حتی اگر خود قطعی را نیز بپذیریم، آنگاه می‌توان $\mathbb{RP}^2$ را بتوی $\mathbb{R}^3$ بصورت شکلی که سر آن بریده، بنگاریم (شکل ۸.۷). چنین نگاشتی یک به یک نیست.



شکل ۸.۷: صفحهٔ تصویری حقیقی بصورت شکل، سر بریده که در $\mathbb{R}^3$ نشانده شده است.

۷.۱۴ گزاره. رابطهٔ هم‌ارزی $\sim$ بر $\mathbb{R}^{n+1}-\{0\}$ در تعریف $\mathbb{RP}^n$، یک رابطهٔ هم‌ارزی باز می‌باشد.

برهان : برای یک مجموعهٔ باز $U \subset \mathbb{R}^{n+1} - \{0\}$، تصویر $\pi(U)$ در $\mathbb{RP}^n$ باز است، اگر و تنها اگر $\pi^{-1}(\pi(U))$ در $\mathbb{R}^{n+1} - \{0\}$ باز است. اما $\pi^{-1}(\pi(U))$ شامل همهٔ مضارب اسکالر و ناصفر از نقاط U می‌باشد؛ یعنی،

$$\pi^{-1}\big(\pi(U)\big) = \bigcup_{t\in\mathbb{R}^\times} tU = \bigcup_{t\in\mathbb{R}^\times} \{tp \mid p \in U\}.$$

چون ضرب در $t \in \mathbb{R}^\times$ یک همئومورفیسم $\mathbb{R}^{n+1} - \{0\}$ است، مجموعهٔ tU به ازای هر t باز می‌باشد. بنابراین، اجتماع آن ها $\bigcup_{\mathbb{R}^\times} tU = \pi^{-1}(\pi(U))$ نیز باز است. □

۷.۱۵ نتیجه. فضای تصویری حقیقی $\mathbb{RP}^n$ شمارای دوم است.

برهان : از نتیجهٔ ۷.۱۰ استفاده کنید. □

۷.۱۶ گزاره. صفحهٔ تصویری حقیقی هاوسدورف است.

برهان : فرض کنید، $S = \mathbb{R}^{n+1} - \{0\}$ و نیز مجموعهٔ،

$$R = \Big\{(x,y) \in S \times S \;\Big|\; y = tx,\;\; t \in \mathbb{R}^\times \text{ به ازای } \Big\}$$

را در نظر می‌گیریم. اگر x و y را به صورت بردار ستونی بنویسیم، آنگاه $[x,y]$ یک ماتریس $(n+1)\times 2$ است، و R را می‌توان بعنوان مجموعهٔ ماتریسهای $[x,y]$ در $S\times S$ با رتبهٔ $\operatorname{rank} \leq 1$ در نظر گرفت. بنا به اطلاعات ما از جبر خطی، $\operatorname{rank}[x,y] \leq 1$ معادل با آن است که تمام کهاد های 2×2 از ماتریس $[x,y]$ برابر صفر خواهد بود. (مسالهٔ B.۱ را ببینید). R بعنوان یک مجموعهٔ صفر از چند جمله‌ای های متناهی در $S\times S$ بسته است، بنا به قضیهٔ ۷.۷ خارج قسمت $S/\sim\ \simeq \mathbb{RP}^n$ هاوسدورف می‌باشد.
□

بخش ۷.۷ اطلس هموار استاندارد بر فضای تصویری حقیقی

گیریم $[a^0,\cdots,a^n]$ مختصات همگن بر فضای تصویری $\mathbb{RP}^n$ باشد. اگر چه a^0 تابع خوش تعریفی بر $\mathbb{RP}^n$ نیست، اما شرط $a^0 \neq 0$ مستقل از انتخاب نمایندهٔ $[a^0,\cdots,a^n]$ است. در نتیجه، شرط $a^0 \neq 0$ بر $\mathbb{RP}^n$ با معنی می‌باشد، حال می‌توان $U_0 := \Big\{[a^0,\cdots,a^n] \in \mathbb{RP}^n \;\Big|\; a^0 \neq 0\Big\}$ را تعریف کرد. بطور مشابه، برای هر $i = 1,\cdots,n$، فرض کنیم $U_i := \Big\{[a^0,\cdots,a^n] \in \mathbb{RP}^n \mid a^i \neq 0\Big\}$. نگاشت، $\phi_0 : U_0 \to \mathbb{R}^n$ را با ضابطهٔ $[a^0,\cdots,a^n] \mapsto \Big(a^1/a^0,\cdots,a^n/a^0\Big)$ را تعریف می‌کنیم. این نگاشت دارای وارون

$$(b^1,\cdots,b^n) \mapsto [1,b^1,\cdots,b^n]$$

بوده و لذا، همئومورفیسم است.بطور مشابه به ازای هر $i = 1, \cdots, n$ همئومورفیسم هایی بصورت زیر وجود داشته،

$$\phi_i : U_i \to \mathbb{R}^n, \qquad [a^0, \cdots, a^n] \mapsto \left(\frac{a^0}{a^i}, \cdots, \widehat{\frac{a^i}{a^i}}, \cdots, \frac{a^n}{a^i}\right),$$

که در آن علامت $\widehat{\ }$ روی a^i/a^i بدان معنی است که مولفهٔ مذکور می‌بایست حذف گردد. این مطلب ثابت می‌کند که $\mathbb{RP}^n$ با چارت (U_i, ϕ_i) موضعا اقلیدسی است. بر اشتراک $U_0 \cap U_1$، داریم، $a^0 \neq 0$ و $a^1 \neq 0$، و در نتیجه دو دستگاه مختصاتی وجود دارند،

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] & {[a^0, a^1, a^2, \cdots, a^n]} \arrow[dl, "\phi_0"'] \arrow[dr, "\phi_1"] & \\ \left(\frac{a^1}{a^0}, \frac{a^2}{a^0}, \cdots, \frac{a^n}{a^0}\right) & & \left(\frac{a^0}{a^1}, \frac{a^2}{a^1}, \cdots, \frac{a^n}{a^1}\right). \end{tikzcd}$$

می‌خواهیم توابع مختصاتی بر U_0 را با $x^1, \cdots, x^n$، و توابع مختصاتی U_1 را با $y^1, \cdots, y^n$ نشان دهیم. در این صورت، $x^i = a^i/a^0$ برای $i = 1, \cdots, n$ بر U_0، و

$$y^1 = a^0/a^1, \quad y^2 = a^2/a^1, \quad \cdots, \quad y^n = a^n/a^1$$

بر U_1. در نتیجه، بر $U_0 \cap U_1$،

$$y^1 = 1/x^1, \quad y^2 = x^2/x^1, \quad y^3 = x^3/x^1, \quad \cdots, \quad y^n = x^n/x^1,$$

بنابراین

$$(\phi_1 \circ \phi_0^{-1})(x) = \left(\frac{1}{x^1}, \frac{x^2}{x^1}, \frac{x^3}{x^1}, \cdots, \frac{x^n}{x^1}\right).$$

این تابع هموار است، زیر ا که بر $\phi_0(U_0 \cap U_1)$، $x^1 \neq 0$. بر هر $U_i \cap U_j$ روابط مشابه برقرار است. بنابراین نتیجه می‌گیریم که، گردایهٔ $\{(U_i, \phi_i)\}_{i=0,\cdots,n}$ اطلس هموار برای $\mathbb{RP}^n$ بوده، که آن را اطلس استاندارد نامیم. این ثابت می‌کند که، $\mathbb{RP}^n$ منیفلد هموار است.

بخش ۸.۷ تمرینات

۷.۱ تصویر تصویر وارون نگاشت. گیریم $f : X \to Y$ نگاشتی از مجموعه‌ها باشد، و $B \subset Y$. ثابت کنید $f\big(f^{-1}(B)\big) = B \cap f(X)$. در نتیجه، اگر f پوشا باشد، آنگاه $f(f^{-1}(B)) = B$.

۷.۲ **صفحهٔ تصویری حقیقی.** گیریم $\mathbb{H}^2$ نیمکرهٔ بستهٔ فوقانی کرهٔ واحد $\mathbb{S}^2$ و $i : \mathbb{H}^2 \to \mathbb{S}^2$ نگاشت احتوا باشد. با نمادگذاری مثال ۷.۱۳، ثابت کنید که نگاشت القایی $f : \mathbb{H}^2/\sim \longrightarrow \mathbb{S}^2/\sim$ همئومورفیسم است. (راهنمایی: شبیه گزارهٔ ۷.۳ عمل کنید.)

۷.۳ **بسته بودن قطر در فضای هاوسدورف.** قضیهٔ ۷.۷ را از نتیجهٔ ۷.۸ ثابت کنید. (راهنمایی: ثابت کنید که اگر $S/\sim$ فضای هاوسدورف باشد، آنگاه نمودار R در $S \times S$ بسته است. برای این کار از پیوستگی نگاشت تصویری $\pi : S \longrightarrow S/\sim$ استفاده کنید. برای اثبات عکس آن، از باز بودن π بهره گیرید.

۷.۴ **خارج قسمت کره بر نقاط متقاطر.** فرض کنید $\mathbb{S}^n$ کرهٔ واحد به مرکز مبدا در $\mathbb{R}^{n+1}$ باشد. رابطهٔ همارزی $\sim$ روی $\mathbb{S}^n$ را با یکی‌گیری نقاط متقاطر تعریف می‌کنیم:

$$x \sim y \quad \longleftrightarrow \quad x = \pm y, \qquad\qquad x, y \in \mathbb{S}^n.$$

الف) نشان دهید که $\sim$ رابطهٔ همارزی باز است.

ب) قضیهٔ ۷.۷ و نتیجهٔ ۷.۸ را بکار گرفته، بدون استفاده از همئومورفیسم بودن $\mathbb{RP}^n \simeq \mathbb{S}^n/\sim$، ثابت کنید که فضای خارج قسمتی $\mathbb{S}^n/\sim$ هاوسدورف است.

۷.۵ **فضای مداری برای عمل گروه پیوسته.** فرض کنید که یک عمل پیوسته راست از گروه توپولوژی G بر فضای توپولوژی S در اختیار باشد؛ این یعنی که عمل توصیف شده بصورت نگاشت $S \times G \to S$ پیوسته باشد. دو نقطهٔ x و y از S را همارز گوییم، هرگاه در یک مدار[۱] واقع باشند؛ یعنی، عضوی مانند $g \in G$ باشد که $y = xg$. فرض کنید S/G فضای خارج قسمتی باشد؛ آن را فضای مدار[۲] حاصل این عمل نامیم. ثابت کنید که نگاشت تصویری $\pi : S \longrightarrow S/G$ پیوسته است. (این مساله در واقع تعمیم گزارهٔ ۷.۱۴ در حالتی است که $G = \mathbb{R}^\times = \mathbb{R} - \{0\}$ و $S = \mathbb{R}^{n+1} - \{0\}$ باشد. چون $\mathbb{R}^\times$ جابجایی است، آنگاه با ضرب اسکالر از طرف راست، عمل $\mathbb{R}^\times$ - چپ به عمل $\mathbb{R}^\times$ - راست تبدیل می‌شود).

۷.۶ **خارج قسمت $\mathbb{R}$ با $2\pi\mathbb{Z}$.** فرض کنید گروه جمعی $2\pi\mathbb{Z}$ از راست بر $\mathbb{R}$ عمل نماید؛ یعنی، $x \cdot 2\pi n := x + 2\pi n$، که در آن n عدد صحیح فـرض گردیده است. نشان دهید فضـای مدار $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$، منیفلد هموار است.

۷.۷ **دایره بعنوان فضای خارج قسمتی.**

الف) گیریم $\{(U_\alpha, \phi_\alpha)\}_{\alpha=1,2}$ اطلس دایرهٔ $\mathbb{S}^1$ در مثال ۵.۱۷، باشد، و نیز فرض کنید $\bar{\phi}_\alpha$ ترکیب ϕ_α با نگاشت تصویری $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ باشد. چون بر $U_1 \cap U_2 = A \sqcup B$، ϕ_1 و ϕ_2 با اختلاف مضارب صحیح 2π از یکدیگر هستند، $\bar{\phi}_1 = \bar{\phi}_2$. در نتیجه، $\bar{\phi}_1$ و $\bar{\phi}_2$ با هم نگاشت خوش تعریف $\bar{\phi} : \mathbb{S}^1 \longrightarrow \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ را می‌سازند. ثابت کنید که $\bar{\phi}$ هموار است.

ب) تابع نمایی مختلط $\mathbb{R} \to \mathbb{S}^1$ با ضابطهٔ $t \mapsto e^{it}$ بر هر مدار عمل $2\pi\mathbb{Z}$ بر $\mathbb{R}$ ثابت است. در نتیجه، نگاشت القایی $F : \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{S}^1$ با ضابطهٔ $F([t]) = e^{it}$ موجود است. ثابت کنید که نگاشت F هموار می‌باشد.

---

[۱] orbit [۲] orbit space

پ ثابت کنید که نگاشت $F : \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{S}^1$ دیفئومورفیسم است.

۷.۸ **فضای گراسمن $\mathrm{G}(k,n)$.** گراسمن $\mathrm{G}(k,n)$، مجموعهٔ تمام k–صفحه‌ایهای[۳] گذرنده از مبدا $\mathbb{R}^n$ می‌باشد. چنین k–صفحه‌ای، زیر فضای خطی $\mathbb{R}^n$ با بعد k بوده، که دارای مبنا شامل k بردار مستقل خطی $a_1,\cdots,a_k$ در $\mathbb{R}^n$ است. آن را بوسیلهٔ ماتریس $n\times k$، $A=[a_1,\cdots,a_k]$ که دارای رتبهٔ k می‌باشد می‌توان بطور کامل توصیف نمود. رتبهٔ ماتریس[۴] A، که آن را با $\operatorname{rank} A$ نمایش می‌دهیم، بنا به تعریف تعداد ستونهای مستقل خطی A می‌باشد. این ماتریس را ماتریس نمایش[۵] k–صفحه‌ای نامیم. (برای مشاهدهٔ خواص رتبه، مسائل ضمیمهٔ B را ببینید.)

در صورتی دو مبنای $a_1,\cdots,a_k$ و $b_1,\cdots,b_k$، یک k–صفحه‌ای را معین می‌کنند که ماتریس تغییر مبنای $g=[g_{ij}]\in \mathrm{GL}(k,\mathbb{R})$ بقسمی باشند که

$$b_j=\sum_i a_i g'_{ij}, \qquad 1\le i,j\le k.$$

با نمادگذاری ماتریسی می‌نویسیم $B=Ag$.

گیریم $\mathrm{F}(k,n)$ مجموعهٔ همهٔ ماتریسهای $n\times k$ با رتبهٔ k، و با توپولوژی به عنوان زیر فضای $\mathbb{R}^{n\times k}$ باشد. رابطهٔ همارزی $\sim$ را بصورت زیر تعرف می‌کنیم،

$$A\sim B \quad\longleftrightarrow\quad \text{ماتریسی مانند } g\in\mathrm{GL}(k,\mathbb{R}) \text{ باشد که } B=Ag$$

با نمادگذاری مسالهٔ $B.3$، $\mathrm{F}(k,n)$ مجموعهٔ D_{max} در $\mathbb{R}^{n\times k}$ بوده و لذا زیرمجموعهٔ باز است. دوسویی بین $\mathrm{G}(k,n)$ و فضای خارج قسمتی $\mathrm{F}(k,n)/\sim$ موجود است. به گراسمن $\mathrm{G}(k,n)$ ساختار توپولوژی خارج قسمتی $\mathrm{F}(k,n)/\sim$ را می‌دهیم.

الف) نشان دهید که $\sim$ رابطهٔ همارزی باز است. (راهنمایی: یا مشابه برهان ۷.۱۴ و یا مشابه مسالهٔ ۷.۵ عمل نمایید.)

ب) ثابت کنید که گراسمن $\mathrm{G}(k,n)$ شمارای دوم است. (راهنمایی: نتیجهٔ ۷.۱۰ را بکار گیرید.)

پ) گیریم، $S=\mathrm{F}(k,n)$ باشد. ثابت کنید که نمودار R در $S\times S$ با رابطهٔ همارزی $\sim$ بسته است. (راهنمایی: دو ماتریس $A=[a_1,\cdots,a_k]$ و $B=[b_1,\cdots,b_k]$ در $\mathrm{F}(k,n)$ با یکدیگر هم ارزند، اگر و تنها اگر هر ستون B ترکیب خطی ستون های A باشد، اگر و تنها اگر $\operatorname{rank}[AB]\le k$، اگر و تنها اگر همهٔ کهادهای $(k+1)\times(k+1)$ از $[AB]$ برابر صفر باشند.)

پ) ثابت کنید گراسمن $\mathrm{G}(n,k)$ هاوسدورف است. (از برهان گزارهٔ ۷.۱۶ پیروی نمایید.)

سپس می‌خواهیم اطلس هموار برای گراسمن $\mathrm{G}(n,k)$ پیدا کنیم. برای سهولت، نظر خود را معطوف به حالت $\mathrm{F}(2,4)$ می‌نماییم. برای هر ماتریس (4×2) مانند A، فرض می‌کنیم A_{ij} زیرماتریس شامل سطر i ام و ستون j ام باشد. تعریف می‌کنیم،

$$V_{ij}=\{A\in\mathrm{F}(2,4)\,|\, A_{ij} \text{ نامنفرد باشد}\}.$$

چون متمم A_{ij} در $\mathrm{F}(2,4)$، با صفر قرار دادن دترمینان $\det A_{ij}$ تعیین می‌گردد، می‌توان نتیجه گرفت که V_{ij} زیر مجموعهٔ بازی از $\mathrm{G}(2,4)$ است.

---

[۳] k–plane	[۴] rank	[۵] representative matrix

ت) ثابت کنید که اگر $A \in V_{ij}$، آنگاه به ازای هر ماتریس نامنفرد $g \in \mathrm{GL}(2,\mathbb{R})$ داریم $Ag \in V_{ij}$. تعریف می‌کنیم $U_{ij} = V_{ij}/\sim$. چون $\sim$ رابطهٔ هم‌ارزی باز است، $U_{ij} = V_{ij}/\sim$ یک زیر مجموعهٔ باز از $\mathrm{G}(2,4)$ است. برای $A \in V_{12}$،

$$\begin{aligned} A \sim AA_{12}^{-1} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ * & * \\ * & * \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} I \\ A_{34}A_{12}^{-1} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

این نشان می‌دهد که ماتریس نمایندهٔ یک $2-$صفحه‌ای در U_{12} دارای فرم کانونی B است که در آن B_{12} ماتریس همانی می‌باشد.

ث) نشان دهید که نگاشت $\tilde{\phi}_{12} : V_{12} \to \mathbb{R}^{2\times 2}$ با ضابطهٔ $\tilde{\phi}_{12}(A) = A_{34}A_{12}^{-1}$ همئومورفیسم بفرم $\phi_{12} : U_{12} \to \mathbb{R}^{2\times 2}$ القا می‌کند.

ج) بطور مشابه همئومورفیسم های $\phi_{ij} : U_{ij} \to \mathbb{R}^{2\times 2}$ را تعریف کنید. $\phi_{12} \circ \phi_{23}^{-1}$ را محاسبه کرده، و سپس نشان دهید که هموار می‌باشد.

چ) نشان دهید که $\left\{U_{ij} \mid 1 \le i \le j \le 4\right\}$ پوشش بازی برای $\mathrm{G}(2,4)$ و همچنین $\mathrm{G}(2,4)$ منیفلدی هموار است.

بطور مشابه می‌توان نشان داد که $\mathrm{F}(k,n)$ دارای یک پوشش باز بفرم $\{V_I\}$ است که در آن I یک اندیس چندگانهٔ اکیدا افزایشی، یعنی $1 \le i_1 < \cdots < i_k \le n$ می‌باشد. برای $\mathrm{F}(k,n)$، فرض کنید A_I یک زیر ماتریس $k\times k$ از A شامل i_1 امین،...، i_k امین سطر A باشد. مجموعهٔ V_I را

$$V_I = \left\{A \in \mathrm{G}(k,n) \,\middle|\, \det A_I \neq 0\right\}$$

اکنون، $\tilde{\phi}_I : V_I \to \mathbb{R}^{(n-k)\times k}$ را با ضابطهٔ $\tilde{\phi}_I(A) = (AA_I^{-1})_{I'}$، تعریف نموده، در آن $(\,)_{I'}$ نشان دهندهٔ زیر ماتریس $(n-k)\times k$ حاصل از I'، متمم اندیس چندگانهٔ I می‌باشد. فرض کنید $U_I = V_I/\sim$. آنگاه $\tilde{\phi}$ یک همئومورفیسم بصورت $\phi : U_I \to \mathbb{R}^{(n-k)\times k}$ القا می‌کند. بسادگی می‌توان نشان داد که $\{(U_I,\phi_I)\}$ اطلس هموار برای $\mathrm{G}(k,n)$ است. بنابراین، می‌توان نتیجه گرفت که گراسمن $\mathrm{G}(k,n)$ منیفلد هموار با بعد $k(n-k)$ است.

۷.۹ فشردگی فضای تصویری حقیقی. نشان دهید که فضای تصویری حقیقی $\mathbb{RP}^n$ فشرده است. (راهنمایی: از تمرین ۱۱ از فصل ۷، کمک بگیرید.)

فصل ۸

فضای مماس

بنابه تعریف، فضای مماس به یک نقطه از یک منیفلد مفروض، فضای برداری مشتقات در آن نقطه می‌باشد. هر نگاشت هموار بین منیفلدها، نگاشتی خطی بنام دیفرانسیل، بین فضاهای مماس در نقاط متناظر القاء می‌نماید. نگاشت دیفرانسیل در مختصات موضعی با ماتریس ژاکوبی مرکب از مشتقات جزئی نگاشت بیان می‌گردد. به این تعبیر، دیفرانسیل نگاشت بین منیفلدها، تعمیم مشتق نگاشتهای بین فضاهای اقلیدسی می‌باشد.

اصل خطی‌سازی، یکی از اساسی‌ترین اصول در نظریه منیفلدها است، که بر اساس آن هر منیفلد را موضعاً در هر نقطه‌ای با فضای مماسش تقریب زده و هر نگاشت هموارا بین منیفلدها را با نگاشت دیفرانسیل آن (که نگاشتی خطی است) تقریب می‌زنند. بدین طریق، مسایل مختلف از هندسه دیفرانسیل به مسایل خطی تبدیل می‌گردند. نمونه‌ای جالب از بکارگیری اصل خطی‌سازی، قضیه تابع وارون می‌باشد، که مساله وارون‌پذیری موضعی یک نگاشت هموار بین منیفلدها را به مساله وارون‌پذیری دیفرانسیل آن نگاشت در نقطه مورد نظر، تبدیل می‌کند.

با استفاده از دیفرانسیل، نگاشتهای با رتبه حداکثر در یک نقطه را به دو گروه ایمرشن[۱] و سابمرشن[۲] در آن نقطه تقسیم می‌کنیم، بسته به اینکه دیفرانسیل آن نگاشت یکبیک و یا پوشا باشد. نقطه‌ای که در آن دیفرانسیل پوشا باشد، یک نقطه‌ی منظم نگاشت است. بر اساس قضیه مجموعه تراز منظم، مجموعه ترازی که همه نقاط آن منظم باشند، یک زیرمنیفلد منظم است؛ بعبارت دیگر، زیرمجموعه‌ای است که موضعاً شبیه به k–صفحه مختصاتی در $\mathbb{R}^n$ می‌باشد. این قضیه، ابزاری توانا در اثبات منیفلد بودن برخی فضاهای توپولوژی است.

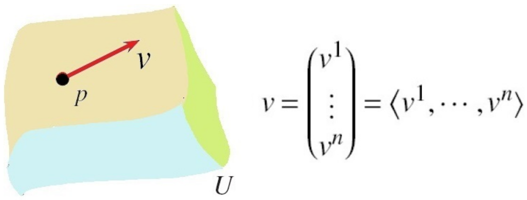
در فصل ۲ دیدیم که دو روش هم ارز برای تعریف بردار مماس در یک نقطه p از زیرمجموعه باز $U \subseteq \mathbb{R}^n$ مطرح شد:

۱) به شکل یک پیکان (شکل ۱.۸)، که به صورت برداری ستونی نشان داده می‌شود؛

۲) به صورت یک نقطه–مشتق از C_p^∞ جبر جرمهای از توابع هموار در p.

---

۱ immersion ۲ submersion



شکل ۱.۸: بردار مماس در $\mathbb{R}^n$

هر دو تعریف را به حالت منیفلدها می‌توان تعمیم داد. در تعمیم روش پیکانها، برای تعریف بردار مماس به منیفلد M در نقطه p، ابتدا چارتی (U,φ) در p انتخاب نموده و سپس، پیکانهای در $\varphi(p)$ مماس به $\varphi(U)$ را به نقطه p ترفیع می‌دهیم. این روش خیلی تجسمی است، ولی در عمل بسیار دشوار می‌باشد، زیرا احتمالاً با انتخاب یک چارت دیگر (V,ψ) در p، ممکن است برداری دیگری از ترفیع حاصل گردد، و باید مشخص نمود که چگونه حاصل ترفیع پیکان در $\varphi(p)$ از $\varphi(U)$ را با حاصل ترفیف پیکان در $\psi(p)$ از $\psi(V)$ یکی گرفت.

روشن‌ترین و در عین حال ساده‌ترین تعریف بردار مماس در نقطه $p \in M$، استفاده از مفهوم نقطه–مشتق است، و ما آن را پی می‌گیریم.

بخش ۱.۸ فضای مماس در یک نقطه

ابتدا مثل در $\mathbb{R}^n$ جرم توابع را تعریف می‌کنیم.

۸.۱ تعریف. جرم[۱] یک تابع هموار در نقطه p از منیفلد M را به صورت دسته هم ارزی توابع هموار تعریف شده در همسایگی‌ای باز از $p \in M$ تعریف می‌کنیم؛ به این ترتیب که، دو تابع را در صورت هم ارز می‌دانیم که در همسایگی‌ای از p با هم برابر باشند. مجموعه جرمهای از توابع حقیقی–مقدار هموار در $p \in M$ را با نماد $C_p^\infty(M)$ نشان می‌دهیم.

۸.۲ لم. جمع و ضرب توابع موجب تعریف ساختار حلقه در $C_p^\infty(M)$ می‌گردد؛ که همراه با ضرب عدد در تابع هموار، به جبری بر هیات $\mathbb{R}$ مبدل می‌شود.

با تعمیم مفهوم مشتق در نقطه‌ای از $\mathbb{R}^n$، مشتق در نقطه‌ای از یک منیفلد، یا اصطلاحا نقطه–مشتق برای $C_p^\infty(M)$ تعریف می‌گردد؛ یعنی

۸.۳ تعریف. منظور از بردار مماس[۲] در نقطه p از منیفلد مفروض M، یک مشتق از جبر $C_p^\infty(M)$ می‌باشد. به عبارت دیگر، نگاشتی $\mathbb{R}$–خطی $D : C_p^\infty(M) \to \mathbb{R}$ است به گونه‌ای که

$$D(fg) = (Df).g(p) + f(p).Dg.$$

درست مثل در حالت $\mathbb{R}^n$ تعریف می‌کنیم:

---

[۱] jerm [۲] tangent vector

۴.۸ قضیه. مجموعه بردارهای مماس T_pM به M در نقطه p تشکیل یک فضای برداری می‌دهد. این فضا را اصطلاحاً، فضای مماس[۳] به M در نقطه p می‌نامیم.

۵.۸ یادداشت (فضای مماس به یک زیرمجموعه باز). اگر U زیرمجموعه‌ای باز و شامل p از M باشد، آنگاه جبر $C_p^\infty(U)$ جرمهای از توابع هموار $U \to \mathbb{R}$ در p درست همان $C_p^\infty(M)$ است، و بنابراین $T_pU = T_pM$.

۶.۸ تعریف (مشتقات پایه). فرض کنید یک مختصات موضعی $(U,\varphi) = (U, x^1, \cdots, x^n)$ حول نقطه p در منیفلد M داده شده باشد، مشتق جزءی $\partial/\partial x^i$ که اول بار در فصل ۶ مطرح شد را یادآور می‌شویم. گیریم $(r^1, \cdots, r^n)$ دستگاه مختصات استاندارد بر $\mathbb{R}^n$ باشد، در این صورت $x^i = r^i \circ \varphi : U \to \mathbb{R}$. اگر $f : M \to \mathbb{R}$ تابعی هموار در یک همسایگی از p باشد، تعریف می‌کنیم

$$\frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_p f := \frac{\partial}{\partial r^i}\Big|_{\varphi(p)} (f \circ \varphi^{-1}) \in \mathbb{R}.$$

بسادگی می‌توان تحقیق نمود که $\partial/\partial x^i|_p$ در خواص مشتق صدق می‌کند و بنابراین، یک بردار مماس در p می‌باشد.

۷.۸ قرارداد. هنگامی که M یک بعدی باشد، از مختصات t بر آن استفاده نموده و برای نشان دادن بردار مماس در نقطه‌ای از آن، بجای $\partial/\partial t|_p$ از $d/dt|_p$ استفاده می‌کنیم.

بخش ۲.۸ دیفرانسیل یک نگاشت

در این بخش، مفهوم دیفرانسیل تابع را به حالت نگاشت بین منیفلدها تعمیم می‌دهیم.

۸.۸ تعریف. گیریم $F : M \to N$ نگاشتی هموار بین منیفلدها باشد. این نگاشت، در هر نقطه $p \in N$ یک نگاشت خطی بنام دیفرانسیل F[۱] در p، بین فضاهای مماس به دو طرف، القاء می‌کند:

$$F_{*,p} : T_pN \longrightarrow T_{F(p)}M.$$

این نگاشت چنین تعریف می‌شود: اگر $X_p \in T_pN$، آنگاه $F_{*,p}(X_p)$ بردار مماسی در $T_{F(p)}M$ است که

$$F_{*,p}(X_p) : C^\infty_{F(p)} \to \mathbb{R}, \qquad f \longmapsto X_p(f \circ F). \tag{۱.۸}$$

در صورتی که نقطه p در بحث مشخص باشد و بیم ابهام نرود، از ذکر آن در نماد $F_{*,p}$ خودداری می‌کنیم.

در اینجا f جرمی در $F(p)$ است،که با تابعی هموار تعریف شده در یک همسایگی از $F(p)$ نمایش داده می‌شود. چون (۱.۸) مستقل از انتخاب نمایش دهنده جرم است، آن را به عنوان تابعی از جرم می‌توان متصور نمود. در اینجا بین تابع و جرم مشخص شده توسط آن تفاوتی (به جهت سهولت در بحث) نشده‌ایم. خواننده به راحتی می‌تواند اثبات نماید که

---

[۳] tangent space   [۱] differential of F

۸.۹ قضیه (دیفرانسیل یک نگاشت). اگر $F : M \to N$ نگاشتی هموار بین منیفلدهای هموار باشد، $p \in \mathrm{Dom}(F)$ و $X_p \in T_pN$، آنگاه $F_{*,p}(X_p)$ مشتق در نقطه $F(p)$ است؛ بخصوص $F_{*,p} : T_pN \to T_{F(p)}M$ نگاشتی خطی بین فضاهای برداری است.

۸.۱۰ مثال (دیفرانسیل یک نگاشت بین فضاهای اقلیدسی). فرض کنید $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ نگاشتی هموار و p نقطه‌ای از $\mathbb{R}^n$ باشد. گیریم $(x^1, \cdots, x^n)$ مختصات استاندارد بر $\mathbb{R}^n$ و $(y^1, \cdots, y^m)$ مختصات استاندارد بر $\mathbb{R}^m$ باشد. در این صورت بردارهای مماس $\partial/\partial x^1\big|_p, \cdots, \partial/\partial x^n\big|_p$ پایه‌ای برای فضای مماس $T_p\mathbb{R}^n$ و $\partial/\partial y^1\big|_{F(p)}, \cdots, \partial/\partial y^n\big|_{F(p)}$ پایه‌ای برای فضای مماس $T_{F(p)}\mathbb{R}^m$ تشکیل می‌دهند. در این صورت، نگاشت خطی $F_{*,p} : T_p\mathbb{R}^n \to T_{F(p)}\mathbb{R}^m$ نسبت به این دو پایه با ماتریس $[a^i_j] \in \mathbb{R}^{m\times n}$ نشان داده می‌شود، که در آن

$$F_*\Big(\frac{\partial}{\partial x^j}\Big|_p\Big) = \sum_{k=1}^m a^k_j \frac{\partial}{\partial y^k}\Big|_{F(p)}. \qquad (۲.۸)$$

گیریم $F^i := y^i \circ F$ درآیه i ام نگاشت F باشد؛ در واقع $F = (F^1, \cdots, f^m)$. در این صورت، با تاثیر دادن هر دو طرف فرمول (۱.۸) بر توابع مختصاتی y^i می‌توانیم a^i_j ها را محاسبه کنیم:

$$\begin{aligned}
y^i \text{ بر (۱.۸) تاثیر سمت راست} &= \sum_{k=1}^m a^k_j \frac{\partial}{\partial y^k}\Big|_{F(p)} y^i \\
&= \sum_{k=1}^m a^k_j \delta^i_k \\
&= a^i_j, \\
y^i \text{ بر (۱.۸) تاثیر چپ راست} &= F_*\Big(\frac{\partial}{\partial x^j}\Big|_p\Big) y^i \\
&= \frac{\partial}{\partial x^j}\Big|_p (y^i \circ F) \\
&= \frac{\partial F^i}{\partial x^j}(p).
\end{aligned}$$

بنابراین، ماتریس نمایش نگاشت خطی F_* نسبت به پایه‌های استاندارد $\partial/\partial x^i\big|_p$ و $\partial/\partial y^j\big|_{F(p)}$ عبارت است از ماتریس ژاکوبی نگاشت F در نقطه p. بعبارت دیگر $J_F(p) = [\partial F^i/\partial x^j(p)]$. به این ترتیب اثبات شد که دیفرانسیل نگاشتهای هموار بین منیفلدها، تعمیم مفهوم مشابهی است که در حسابات در ارتباط با نگاشتهای بین فضاهای اقلیدسی مطرح می‌گردد.

بخش ۳.۸ قاعده زنجیری مشتق

گیریم $F : N \to M$ و $G : M \to P$ نگاشتهای هموار بین منیفلدها هستند و $p \in N$. می‌خواهیم نشان دهیم که دیفرانسیل نگاشت ترکیب آنها با ترکیب دیفرانسیل آن نگاشتها برابر است.

به عبارت دیگر، دیاگرام زیر تعویض‌پذیر است:

$$\begin{tikzcd} T_pN \arrow[r, "F_{*,p}"] \arrow[rr, bend right, "(G\circ F)_{*,p}"'] & T_{F(p)}M \arrow[r, "G_{*,F(p)}"] & T_{G(F(p))}P \end{tikzcd}$$

این موضوع در حالت نگاشتهای بین فضاهای اقلیدسی، بنام قاعده زنجیری مشتق، در حسابان اثبات شده، و دارای استفاده‌های فراوانی است.

۸.۱۱ قضیه (قاعده زنجیری مشتق). اگر $F : N \to M$ و $G : M \to P$ نگاشتهای هموار بین منیفلدها و $p \in N$، آنگاه

$$(G \circ F)_{*,p} = G_{*,F(p)} \circ F_{*,p}.$$

برهان : گیریم $X_p \in T_pN$ و f تابعی هموار در $G(F(p)) \in P$ باشد. در این صورت

$$\big((G \circ F)_{*,p}(X_p)\big)(f) = X_p(f \circ G \circ F).$$

در حالی که

$$\begin{aligned} \big((G_{*,F(p)} \circ F_{*,p})(X_p)\big)(f) &= \big(G_{*,F(p)}(F_{*,p}(X_p))\big)(f) \\ &= \big(F_{*,p}(X_p)\big)(f \circ G) \\ &= X_p(f \circ G \circ F), \end{aligned}$$

که با هم برابرند. □

۸.۱۲ نتیجه. الف) دیفرانسیل نگاشت همانی $\mathbb{1}_M : M \to M$ در هر نقطه $p \in M$ ای، نگاشت همانی $\mathbb{1}_{T_pM} : T_pM \to T_pM$ است.
ب) دیفرانسیل نگاشت وارون $F : M \to M$ در هر نقطه $F(p) \in N$ ای، برابر وارون نگاشت دیفرانسیل $F_{*,p} : T_pN \to T_{F(p)}M$ است؛ به عبارت دیگر $(F^{-1})_{*,F(p)} = (F_{*,p})^{-1}$.

برهان : برای اثبات (الف) باید توجه نمود که اگر $X_p \in T_pN$ و $f \in C_p^\infty(M)$ ، آنگاه

$$\begin{aligned} \big((\mathbb{1}_M)_{*,F(p)}(X_p)\big)(f) &= X_p(f \circ \mathbb{1}_M) \\ &= X_p f. \end{aligned}$$

برای اثبات قسمت (ب) از قضیه قاعده زنجیری مشتق در مورد $F^{-1} \circ F = \mathbb{1}_N$ استفاده می‌کنیم. در نتیجه

$$\begin{aligned} \mathbb{1}_{T_pN} &= (\mathbb{1}_N)_{*,p} \\ &= (F^{-1} \circ F)_{*,p} \\ &= (F^{-1})_{*,F(p)} \circ F_{*,p}. \end{aligned}$$

به صورت مشابه، می‌توان از قضیه قاعده زنجیری مشتق در مورد $F \circ F^{-1} = \mathbb{1}_M$ استفاده نمود. □

مشابه قسمت دوم از نتیجه بالا می‌توان استدلال نمود و اثبات کرد:

۸.۱۳ نتیجه. اگر $F : N \to M$ دیفئومورفیسمی بین منیفلدها باشد و $p \in N$، در این صورت، نگاشت دیفرانسیل $F_* : T_pN \to T_{F(p)}M$ ایزومورفیسمی بین فضاهای برداری است.

۸.۱۴ نتیجه (ناوردای بعد). اگر زیرمجموعه بازی $U \subseteq \mathbb{R}^n$ با زیرمجموعه بازی $V \subseteq \mathbb{R}^m$ دیفئومورف باشد، آنگاه $n = m$.

برهان: گیریم $F : U \to V$ دیفئومورفیسم باشد و $p \in U$. بنابه نتیجه ۸.۱۳، نگاشت $F_* : T_pU \to T_{F(p)}V$ ایزومورفیسم بین فضاهای برداری است. از طرفی، ایزومورفیسمهای $T_pU \simeq \mathbb{R}^n$ و $T_F(p)V \simeq \mathbb{R}^m$ را داریم. در نتیجه $m = n$. □

بخش ۴.۸ پایه برای فضای مماس در یک نقطه

مطابق معمول، فرض کنیم $(r^1, \cdots, r^n)$ دستگاه مختصات استاندارد بر $\mathbb{R}^n$ بوده و (U, φ) چارتی حول نقطه p از منیفلد n–بعدی M باشد. قرار داد می‌کنیم که $x^i = r^i \circ \varphi$. چون $\varphi : U \to \mathbb{R}^n$ دیفئومورفیسم بروی نگاره‌اش است (گزاره ۶.۱۱)، پس بنابه نتیجه ۸.۱۳ نگاشت دیفرانسیل $\varphi_* : T_pN \to T_{\varphi(p)}\mathbb{R}^n$ ایزومورفیسمی بین فضاهای برداری است. بخصوص، فضای مماس T_pM همبعد با منیفلد M است، یعنی n.

۸.۱۵ گزاره. گیریم $(U, \varphi) = (U, x^1, \cdots, x^n)$ چارتی حول نقطه p از منیفلد M باشد. در این صورت

$$\varphi_{*,p}\Big(\frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_p\Big) = \frac{\partial}{\partial r^i}\Big|_{\varphi(p)}.$$

برهان: اگر $f \in C^\infty_{\varphi(p)}(\mathbb{R}^n)$، آنگاه

$$\begin{aligned}
\varphi_{*,p}\Big(\frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_p\Big)(f) &= \frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_p(f \circ \varphi) && (\text{بنابه تعریف } \varphi_{*,p}) \\
&= \frac{\partial}{\partial r^i}\Big|_{\varphi(p)}(f \circ \varphi \circ \varphi^{-1}) && (\text{بنابه تعریف } \partial/\partial x^i|_p) \\
&= \frac{\partial}{\partial r^i}\Big|_{\varphi(p)}(f).
\end{aligned}$$

□

با استفاده از ایزومورفیسم ارائه شده در این گزاره، نتیجه می‌گیریم که

۸.۱۶ گزاره. اگر $(U, \varphi) = (U, x^1, \cdots, x^n)$ چارتی حول نقطه p از منیفلد M باشد. در این صورت

$$\frac{\partial}{\partial x^1}\Big|_p, \cdots, \frac{\partial}{\partial x^n}\Big|_p$$

پایه‌ای برای فضای مماس T_pM است.

۸.۱۷ گزاره. فرض کنید $(U,x^1,\cdots,x^n)$ و $(V,y^1,\cdots,y^n)$ چارتهایی همپوشا برای منیفلد M باشند و $j=1,\cdots,n$. در این صورت

$$\frac{\partial}{\partial x^j}=\sum_{i=1}^n\frac{\partial y^i}{\partial x^j}\frac{\partial}{\partial y^i},\qquad (\text{بر } U\cap V)$$

برهان : در هر نقطه $p\in U\cap V$ دو مجموعه از بردارهای $\{\partial/\partial x^j\}$ و $\{\partial/\partial y^i\}$ تشکیل پایه برای T_pM می‌دهند. در نتیجه ماتریس $[a^i_j(p)]\in\mathbb{R}^{n\times n}$ چنان وجود دارد که

$$\frac{\partial}{\partial x^j}\Big|_p=\sum_{i=1}^n a^i_j\frac{\partial y^i}{\partial x^j}\frac{\partial}{\partial y^i}\Big|_p.$$

حال اگر دو طرف را بر y^i تاثیر دهیم، نتیجه می‌شود:

$$\begin{aligned}\frac{\partial y^i}{\partial x^j}\Big|_p &= \sum_{k=1}^n a^k_j\frac{\partial y^i}{\partial y^k}\Big|_p\\ &= \sum_{k=1}^n a^k_j\delta^i_k\\ &= a^i_j,\end{aligned}$$

و برهان تمام است. □

بخش ۵.۸ بیان موضعی نگاشت دیفرانسیل

گیریم $F:N\to M$ نگاشتی هموار بین منیفلدها بوده و $p\in N$، گیریم $(U,x^1,\cdots,x^n)$ چارتی حول p در N و $(V,y^1,\cdots,y^m)$ چارتی حول $F(p)$ در M باشد. هدف تعیین بیان مختصات موضعی نگاشت دیفرانسیل $F_{*,p}:T_pN\to T_{F(p)}M$ نسبت به این دو چارت می‌باشد.
بنابه گزاره ۸.۱۶، $\{\partial/\partial x^j|_p\}_{j=1}^n$ پایه‌ای برای T_pN و $\{\partial/\partial y^i|_{F(p)}\}_{i=1}^m$ پایه‌ای برای $T_{F(p)}M$ است. بنابراین، دیفرانسیل $F_*:=F_{*,p}$ توسط اعداد a^i_j در فرمول

$$F_*\Big(\frac{\partial}{\partial x^j}\Big|_p\Big)=\sum_{k=1}^m a^k_j\frac{\partial}{\partial y^k}\Big|_{F(p)},\qquad j=1,\cdots,n.$$

کاملا تعیین می‌گردد. با تاثیر دادن دو طرف این تساوی بر توابع مختصاتی y^i، نتیجه می‌گیریم که

$$\begin{aligned} a_j^i &= \Big(\sum_{k=1}^{m} a_j^k \frac{\partial}{\partial y^k}\Big|_{F(p)}\Big) y^i \\ &= F_*\Big(\frac{\partial}{\partial x^j}\Big|_p\Big) y^i \\ &= \frac{\partial}{\partial x^j}\Big|_p (y^i \circ F) \\ &= \frac{\partial F^i}{\partial x^j}(p). \end{aligned}$$

این مطلب را به صورت گزاره زیر مطرح می‌کنیم.

۸.۱۸ گزاره. گیریم $F : N \to M$ نگاشتی هموار بین منیفلدها، $p \in N$، $(U, x^1, \cdots, x^n)$ چارتی حول p در N و $(V, y^1, \cdots, y^m)$ چارتی حول $F(p)$ در M باشد. بیان مختصات موضعی نگاشت دیفرانسیل $F_{*,p} : T_pN \to T_{F(p)}M$ نسبت به پایه‌ی $\{\partial/\partial x^j|_p\}_{j=1}^n$ برای T_pN، و پایه‌ی $\{\partial/\partial y^i|_{F(p)}\}_{i=1}^m$ برای $T_{F(p)}M$ عبارت است از ماتریس ژاکوبی $[(\partial F^i/\partial x^j)(p)]$، که $F^i = y^i \circ F$ عبارت از مولفه i ام تابع F می‌باشد.

بیان این گزاره در روش «پیکانی» بردارهای مماس، زیباتر است: $F_* v = J v$، که در آن بردار مماس $v \in T_pN$ به صورت بردار ستونی نسبت به پایه $\{\partial/\partial x^j|_p\}_{j=1}^n$ نوشته شده است، و عملا F_* به صورت ماتریس ژاکوبی $J = [(\partial F^i/\partial x^j)(p)]$ نمایان می‌گردد.

۸.۱۹ یادداشت (قضیه تابع وارون). قضیه تابع وارون در مورد منیفلدها (قضیه ۶.۲۸) را به کمک مفهوم دیفرانسیل به صورت مختصات آزاد می‌توان بیان نمود:

یک نگاشت هموار $F : N \to M$ بین منیفلدهای همبعد، وقتی و تنها وقتی در نقطه مفروض $p \in N$ معکوسپذیر است که نگاشت دیفرانسیل $F_{*,p} : T_pN \to T_{f(p)}M$ در p ایزومورفیسم باشد.

۸.۲۰ مثال (قاعده زنجیره‌ای مشتق با نمادگزاری حسابان). فرض کنید $w = G(x, y, z)$ تابعی هموار $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ بوده و $(x, y, z) = F(t)$ تابعی هموار $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ باشد. حاصل ترکیب

$$\begin{aligned} w &= (G \circ F)(t) \\ &= G(x(t), y(t), z(t)), \end{aligned}$$

تابعی هموار بر حسب $t \in \mathbb{R}$ خواهد بود. نگاشتهای دیفرانسیل F_*، G_* و $(G \circ F)_*$ بترتیب با ماتریسهای

$$\begin{bmatrix} dx/dt \\ dy/dt \\ dz/dt \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix}, \qquad \frac{dw}{dt},$$

نشان داده می‌شوند. چون ترکیب نگاشتهای خطی به معنی ضرب ماتریسهای نمایش دهنده آنها است، در این حالت، قاعده زنجیره‌ای مشتق با

$$\begin{aligned} \frac{dw}{dt} &= \begin{bmatrix} \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dx/dt \\ dy/dt \\ dz/dt \end{bmatrix} \\ &= \frac{\partial w}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial w}{\partial z}\frac{dz}{dt}, \end{aligned}$$

معادل می‌گردد. این همان قاعده زنجیره‌ای مشتق معروف در ریاضیات عمومی می‌باشد.

بخش ۶.۸ منحنی بر منیفلد

منظور از منحنی هموار[۱] بر منیفلد مفروض M، نگاشتی هموار $c:(a,b)\to M$ از یک بازه باز $(a,b)\subseteq\mathbb{R}$ بتوی M است. بجای کلمه منحنی، از خم، و یا قوس نیز استفاده می‌گردد. اغلب فرض می‌کنیم $0\in(a,b)$، و می‌گوییم منحنی c از نقطه $c(0)=p$ آغاز شده است. بردار سرعت[۲] $c'(t_0)$ منحنی c در لحظه $t_0\in(a,b)$ به صورت

$$c'(t_0) := c_*\Big(\frac{dt}{dt}\Big|_{t_0}\Big) \in T_{c(t_0)}M,$$

تعریف می‌گردد. همچنین، اصطلاحا می‌گوییم که $c'(t_0)$ سرعت c در نقطه $c(t_0)$ است. از نمادهای جایگزین

$$\frac{dc}{dt}(t_0) \qquad \text{و یا} \qquad \frac{dc}{dt}\Big|_{t_0}$$

نیز برای $c'(t_0)$ استفاده می‌گردد.

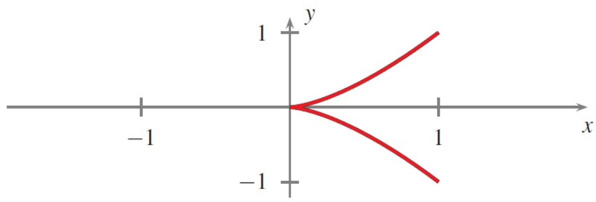
۸.۲۱ یادداشت. وقتی $c:(a,b)\to\mathbb{R}$ منحنی با فضای هدف $\mathbb{R}$ باشد، ممکن است نمادگزاری $c'(t)$ باعث ابهام گردد. در اینجا t نمایشگر مختصات استاندارد بر دامنه (a,b) است. گیریم x مختصات استاندارد بر فضای هدف $\mathbb{R}$ باشد. بنابه تعریف ما، $c'(t)$ یک بردار مماس در $c(t)$ می‌باشد، و بنابراین مضربی از $d/dx|_{c(t)}$ است. از سوی دیگر، در نمادگزاری حسابان، $c'(t)$ مشتق تابع با مقدار حقیقی $c(t)$ و لذا یک اسکالر می‌باشد. در چنین وضعیتی، چنانچه لازم باشد بین این دو مفهوم تفاوت قایل شویم، از نماد $\dot{c}(t)$ برای نشان دادن مشتق در حسابان استفاده خواهیم نمود.

۸.۲۲ تمرین (بردار سرعت به تعبیر در حسابان).* گیریم $c:(a,b)\to\mathbb{R}$ یک منحنی در فضای هدف $\mathbb{R}$ است. نشان دهید که $c'(t)=\dot{c}\,\frac{d}{dx}|_{c(t)}$.

۸.۲۳ مثال. گیریم $c:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2$ با ضابطه $c(t)=(t^2,t^3)$ است. به شکل ۲.۸ توجه شود. در این

---

[۱] smooth curve [۲] velocity vector



شکل ۲.۸: منحنی نوک تیز

صورت $c'(t)$ ترکیب خطی بردارهای $\partial/\partial x$ و $\partial/\partial y$ در $c(t)$ است:

$$c'(t) = a\frac{\partial}{\partial x} + b\frac{\partial}{\partial y}.$$

برای محاسبه a، دو طرف را بر تابع مختصاتی x محاسبه می‌کنیم:

$$\begin{aligned} a &= \Big(a\frac{\partial}{\partial x} + a\frac{\partial}{\partial y}\Big)x \\ &= c'(t)\,x \\ &= c_*\Big(\frac{d}{dt}\Big)x \\ &= \frac{d}{dt}(x\circ c) \\ &= \frac{d}{dt}t^2 \\ &= 2t, \end{aligned} \qquad \begin{aligned} b &= \Big(a\frac{\partial}{\partial x} + a\frac{\partial}{\partial y}\Big)y \\ &= c'(t)\,y \\ &= c_*\Big(\frac{d}{dt}\Big)y \\ &= \frac{d}{dt}(y\circ c) \\ &= \frac{d}{dt}t^3 \\ &= 3t^2. \end{aligned}$$

در نتیجه،

$$c'(t) = 2t\frac{\partial}{\partial x} + 3t^2\frac{\partial}{\partial y}.$$

حاصل را بر حسب پایه $\partial/\partial x$ و $\partial/\partial y$ برای $T_{c(t)}(\mathbb{R}^2)$ به صورت زیر می‌شود نوشت:

$$c'(t) = \begin{bmatrix} 2t \\ 3t^2 \end{bmatrix}.$$

در حالت کلی، مثل در این مثال، برای محاسبه بردار سرعت هر خم هموار c در $\mathbb{R}^n$، کافی است تنها از مولفه‌های c مشتق بگیریم. این نشان می‌دهد که مفهوم بردار سرعت منحنی که ما مطرح نمودیم، با تعریف معمول در حسابان مطابقت دارد.

۸.۲۴ گزاره (سرعت منحنی در مختصات موضعی). گیریم $c : (a,b) \to \mathbb{R}$ منحنی هموار بوده و $(U, x^1, \cdots, x^n)$ یک دستگاه مختصات موضعی حول $c(t)$ باشد. برای مولفه i ام منحنی c در این چارت از نماد $c^i = x^i \circ c$ استفاده می‌کنیم. در این صورت،

$$c'(t) = \sum_{i=1}^{n} \dot{c}^i \frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_{c(t)}.$$

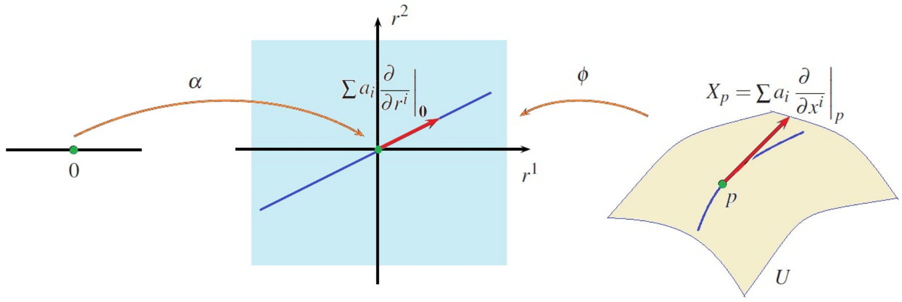
به عبارت دیگر، سرعت $c'(t)$ منحنی نسبت به پایه $\{\partial/\partial x^i|_{c(t)}\}$ برای $T_{c(t)}M$ به صورت بردار ستونی زیر است:

$$\begin{bmatrix} \dot{c}^1(t) \\ \vdots \\ \dot{c}^n(t) \end{bmatrix}.$$

برهان : به عنوان تمرین ۸.۵ بر عهده خواننده است. □

هر منحنی هموار c بر منیفلد M گذرنده از $p = c(t_0)$، یک بردار مماس $c'(t_0)$ در T_pM را به آن نقطه نظیر می‌کند. بالعکس، می‌توان نشان داد که هر بردار مماس دلخواه $X_p \in T_pM$ بردار سرعت یک منحنی در p است. به عبارت دیگر،

۸.۲۵ گزاره (وجود منحنی با بردار آغازی مفروض). به ازای هر نقطه p در منیفلد دلخواه M و هر بردار مماس $X_p \in T_pM$، عددی $0 < \varepsilon$ و یک منحنی هموار $c : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ چنان وجود دارند که $c(0) = p$ و $c'(0) = X_p$.



شکل ۳.۸: وجود منحنی با بردار آغازی مفروض

برهان : گیریم $(U, \varphi) = (U, x^1, \cdots, x^n)$ یک چارت به مرکز در p باشد، یعنی $\varphi(p) = 0 \in \mathbb{R}^n$. فرض کنید $X_p = \sum a^i \partial/\partial x^i|_p$ در p. گیریم $r^1, \cdots, r^n$ مختصات استاندارد بر $\mathbb{R}^n$ باشد. در این صورت $x^i = r^i \circ \varphi$. برای پیدا نمودن منحنی c در p به گونه‌ای که $c'(0) = X_p$، با یک منحنی α در $\mathbb{R}^n$ شروع می‌کنیم که در آن $\alpha(0) = 0$ و $\alpha'(0) = a^i \partial/\partial r^i|_p$. اکنون α را توسط φ^{-1} به M می‌نگاریم (به شکل ۳.۸ توجه شود). بنابه گزاره ۸.۲۴، خط راست

$$\alpha(t) := (a^1 t, \cdots, a^n t), \qquad t \in (-\varepsilon, \varepsilon),$$

ساده‌ترین نمونه از چنین α ای است، که در آن ε عددی باندازه کافی کوچک است که $\alpha(t)$ ها به $\varphi(U)$ متعلقند. تعریف می‌کنیم: $c := \varphi^{-1}\circ\alpha : (-\varepsilon,\varepsilon)\to M$. در این صورت، بنابه گزاره ۸.۱۵ ، داریم

$$\begin{aligned} c(0) &= \varphi^{-1}(\alpha(0)) & c'(0) &= (\varphi^{-1})_*\alpha_*\Big(\frac{d}{dt}\Big|_{t=0}\Big)\\ &= \varphi^{-1}(0) & &= (\varphi^{-1})_*\alpha_*\Big(\sum a^i\frac{\partial}{\partial r^i}\Big|_0\Big)\\ &= p, & &= \sum a^i\frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_p\\ & & &= X_p, \end{aligned}$$

و به این ترتیب برهان تمام است. □

در تعریف ۸.۳ بردار مماس در یک نقطه p از یک منیفلد را به صورت مجرد، به عنوان یک مشتق در p تعریف نمودیم. با استفاده از منحنیها، بردارهای مماس را به صورت مشتقات امتدادی می‌توانیم تعبیر هندسی کنیم.

۸.۲۶ گزاره. گیریم X_p یک بردار مماس دلخواه در نقطه p از منیفلد M باشد و $f\in C^\infty(M)$. اگر $c:(-\varepsilon,\varepsilon)\to M$ منحنی هموار آغازی از p با بردار سرعت اولیه $c'(0)=X_p$ باشد، آنگاه

$$X_p = \frac{d}{dt}\Big|_0 (f\circ c).$$

برهان : بنابه تعریف $c'(0)$ و c_*، داریم

$$\begin{aligned} X_p f &= c'(0)f\\ &= c_*\Big(\frac{d}{dt}\Big|_0\Big)f\\ &= \frac{d}{dt}\Big|_0 (f\circ c), \end{aligned}$$

و برهان تمام است. □

بخش ۷.۸ محاسبه دیفرانسیل با استفاده از منحنی

تا کنون دو راه برای محاسبه دیفرانسیل یک نگاشت هموار در اختیار داریم، یکی بر اساس مشتق در یک نقطه (معادله ۱.۸) و دیگری بر اساس مختصات موضعی (گزاره ۸.۱۸). در این بخش راه سومی برای محاسبه دیفرانسیل $F_{*,p}$ با استفاده ار منحنیها مطرح می‌کنیم.

۸.۲۷ گزاره. گیریم $F:N\to M$ نگاشتی هموار بین منیفلدها بوده، $p\in N$، و $X_p\in T_pN$ باشد. اگر c یک منحنی هموار آغازی از p در N با سرعت اولیه X_p باشد، آنگاه

$$F_{*,p}(X_p) = \frac{d}{dt}\Big|_0 (F\circ c)(t).$$

به عبارت دیگر، $F_{*,p}(X_p)$ بردار سرعت منحنی نگاره $F\circ c$ در $F(p)$ است.

برهان : بنابه فرض $c(0)=p$ و $c'(0)=X_p$. در نتیجه

$$\begin{aligned}
F_{*,p}(X_p) &= F_{*,p}(c'(0)) \\
&= (F_{*,p}\circ c_{*,0})\Big(\frac{d}{dt}\Big|_0\Big) \\
&= (F\circ c)_{*,0}\Big(\frac{d}{dt}\Big|_0\Big) \qquad \text{(بنابه قاعده زنجیره‌ای مشتق، قضیه ۸.۱۱)} \\
&= \frac{d}{dt}\Big|_0 (F\circ c)(t),
\end{aligned}$$

و برهان تمام است. □

۸.۲۸ مثال (دیفرانسیل ضرب چپ). اگر g ماتریسی در گروه خطی عمومی $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ باشد، گیریم $\ell_g:\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})\to\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ ضرب از چپ در g باشد؛ بنابراین $\ell_g(B):=gB$ به ازای هر $B\in\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$. چون $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ زیرمجموعه‌ای باز از فضای برداری $\mathbb{R}^{n\times n}$ است، فضای مماس $T_g(\mathrm{GL}(n,\mathbb{R}))$ را با خود $\mathbb{R}^{n\times n}$ می‌توان یکی گرفت. نشان دهید که با این یکی‌گیری، دیفرانسیل $(\ell_g)_{*,I}:T_I(\mathrm{GL}(n,\mathbb{R}))\to T_g(\mathrm{GL}(n,\mathbb{R}))$ نیز ضرب از چپ در g می‌باشد.

حل : گیریم $X\in T_I(\mathrm{GL}(n,\mathbb{R}))=\mathbb{R}^{n\times n}$. برای محاسبه $(\ell_g)_{*,I}(X)$، منحنی $c(t)$ در $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ را طوری انتخاب می‌کنیم که $c(0)=I$ و $c'(0)=X$. در این صورت $\ell_g(c(t))=g\,c(t)$ عملا ضرب از چپ در g است. اکنون، بنابه گزاره ۸.۲۷، داریم

$$\begin{aligned}
(\ell_g)_{*,I}(X) &= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0}\ell_g(c(t)) \\
&= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} g\,c(t) \\
&= g\,c'(0) \qquad (۳.۸) \\
&= gX.
\end{aligned}$$

دلیل (۳.۸) در این محاسبه، $\mathbb{R}$−خطی بودن مشتق از گزاره ۸.۲۴ می‌باشد. *

بخش ۸.۸ ایمرشن و سابمرشن

درست مثل مشتق نگاشت بین فضاهای اقلیدسی، که می‌دانیم بهترین تقریبی خطی تابع مورد نظر در حول نقطه مورد بحث است، دیفرانسیل نگاشت بین منیفلدهای هموار نیز چنین ویژگی منحصر بفردی را دارد، البته به تعبیر مشخصی که خواهیم گفت. دو حالت اهمیت اساسی دارد. نگاشت هموار $F:N\to M$ را در صورتی ایمرشن در $p\in N$ گوییم که نگاشت دیفرانسیلش $F_{*,p}:T_pN\to T_{F(p)}M$ یکبیک باشد، و در صورتی آن را سابمرشن در p گوییم که دیفرانسیلش $F_{*,p}$ پوشا باشد. F را در صورتی ایمرشن گوییم که در هر نقطه $p\in N$ ای ایمرشن باشد، و در صورتی سابمرشن گوییم که در همه نقاط سابمرشن باشد.

۸.۲۹ یادداشت. گیریم N و M منیفلدهای هموار با بعد بترتیب n و m باشند. در این صورت $\dim T_pN = n$ و $\dim T_{F(p)}M = m$. یکبیکی نگاشت دیفرانسیل $F_{*,p} : T_pN \to T_{F(p)}M$ ایجاب می‌کند که $n \leq m$، و پوشایی آن ایجاب می‌کند که $n \geq m$. بنابراین، اگر $F : N \to M$ در نقطه‌ای از N ایمرشن باشد، آنگاه لزوما $n \leq m$، و اگر F در نقطه‌ای سابمرشن باشد، آنگاه لزوما $n \geq m$.

۸.۳۰ مثال. شکل نوعی برای نگاشت ایمرشن، نگاشت احتوای $\mathbb{R}^n$ در فضایی با بعد بالاتر $\mathbb{R}^m$ است:

$$i(x^1, \cdots, x^n) = (x^1, \cdots, x^n, 0, \cdots, 0).$$

شکل نوعی برای نگاشت سابمرشن، نگاشت تصویر از $\mathbb{R}^m$ بروی فضایی با بعد پایین‌تر $\mathbb{R}^n$ است:

$$\pi(x^1, \cdots, x^m, x^{m+1}, \cdots, x^n) = (x^1, \cdots, x^m).$$

۸.۳۱ مثال. اگر U زیرمجموعه‌ای باز از منیفلد مفروض M باشد، آنگاه نگاشت احتوا $i : U \to M$ هم ایمرشن است و هم سابمرشن. بخصوص، از این مثال می‌توان چنین برداشت نمود که لزومی ندارد هر سابمرشنی پوشا باشد.

در فصل ۱۱ تحلیل دقیقتری از ایمرشنها و سابمرشنها ارائه خواهیم نمود. بر اساس قضیه ایمرشن و قضیه سابمرشن که در آنجا اثبات خواهد شد، هر ایمرشنی موضعا نگاشت احتوا است و هر سابمرشنی موضعا نگاشت تصویر می‌باشد.

بخش ۹.۸ رتبه، و نقاط تکین و منظم

از جبر خطی به یاد داریم که رتبه[۱] نگاشت خطی مفروض $L : V \to W$ بین فضاهای برداری با بعد متناهی، به صورت بعد نگاره $L(V)$ به عنوان زیرفضایی از W تعریف می‌گردد، حال آنکه رتبه یک ماتریس مفروض A به صورت بعد فضای ستونی آن تعریف می‌گردد. اگر L نسبت به پایه‌ای برای V و پایه‌ای برای W با استفاده از ماتریس A نمایش داده شده باشد، آنگاه رتبه L درست همان رتبه A خواهد بود، زیرا نگاره $L(V)$ درست همان فضای ستونی ماتریس A می‌باشد. حال نگاشتی هموار $F : N \to M$ بین منیفلدها در نظر بگیرید. رتبه F در نقطه $p \in N$ را با نماد $\operatorname{rank} F(p)$ نشان داده و به صورت رتبه نگاشت دیفرانسیل $F_{*,p} : T_pN \to T_{F(p)}M$ تعریف می‌کنیم. نگاشت دیفرانسیل نسبت به دستگاه مختصاتی $(U, x^1, \cdots, x^n)$ در p و $(V, y^1, \cdots, y^m)$ در $F(p)$ با ماتریس ژاکوبی نمایش داده می‌شود (گزاره ۸.۱۸)، بنابراین

$$\operatorname{rank} F(p) = \operatorname{rank}\Big[\frac{\partial y^i}{\partial x^j}(p)\Big].$$

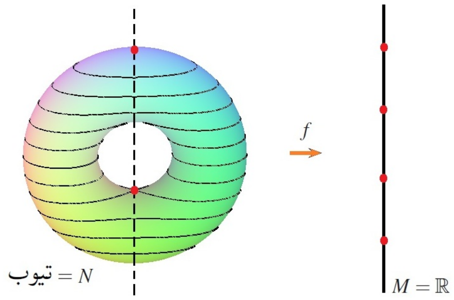
چون نگاشت دیفرانسیل هر نگاشت مفروض، از انتخاب چارتهای مختصاتی مستقل است، پس رتبه مارتیس ژاکوبی نیز چنین است.

۸.۳۲ تعریف. نقطه p در N را در صورتی یک نقطه تکین[۲] (یا، بحرانی[۳]) نگاشت $F : N \to M$ گوییم که نگاشت دیفرانسیلش

$$F_{*,p} : T_pN \to T_{F(p)}M$$

[۱] rank [۲] singular point [۳] critical point

پوشا نباشد. در صورتی که نگاشت دیفرانسیل $F_{*,p}$ پوشا باشد، نقطه p را یک نقطه منظم[۴] می‌گوییم. نقطه‌ای از M را در صورتی مقدار منظم[۵] گوییم که تمام نقاط در پیشنگاره آن، نقاط منظم باشند؛ در غیر این صورت، آن نقطه را مقدار تکین می‌گوییم (به شکل ۴.۸). به دو نکته در ارتباط با این تعریف توجه



شکل ۴.۸: نقاط تکین و نقاط منظم تابع $f(x,y,z) = z$، از تیوب بتوی خط حقیقی

داشته باشید:

(۱) مقدار منظم را به صورت نگاره یک نقطه منظم تعریف نکردیم. در واقع، لزومی ندارد که یک مقدار منظم، اصلا در نگاره F قرار داشته باشد. هر نقطه از M که در نگاره F قرار نداشته باشد، به صورت خودکار یک مقدار منظم خواهد بود، زیرا پیشنگاره آن تهی است و لذا هیچ نقطه تکینی در بر ندارد.

(۲) نقطه c در M وقتی و تنها وقتی مقدار تکین است که حد اقل یک نقطه‌ای در پیشنگاره $F^{-1}(\{c\})$، نقطه تکین باشد. نقطه c در نگاره F وقتی و تنها وقتی منظم است که هر نقطه‌ی در پیشنگاره $F^{-1}(\{c\})$ یک نقطه منظم باشد.

۸.۳۳ گزاره. گیریم $f : M \to \mathbb{R}$ تابعی حقیقی مقدار بر هموار M است و $p \in M$. شرط لازم و کافی برای اینکه p یک نقطه تکین تابع f باشد این است که همه مشتقات جزئی آن نسبت به یک دستگاه مختصات موضعی $(U, x^1, \cdots, x^n)$ شامل p در روابط ذیل صدق کنند:

$$\frac{\partial f}{\partial x^j}(p) = 0, \qquad j = 1, \cdots, n,$$

برهان : بنابه گزاره ۸.۱۸، دیفرانسیل $f_{*,p} : T_pM \to T_{f(p)}\mathbb{R} \cong \mathbb{R}$ توسط ماتریس

$$\left[\frac{\partial}{\partial x^1}(p), \cdots, \frac{\partial}{\partial x^n}(p)\right],$$

نمایش داده می‌شود. چون نگاره $f_{*,p}$ زیرفضایی خطی از $\mathbb{R}$ است، یا صفر بعدی است و یا یک بعدی. به عبارت دیگر، یا $f_{*,p}$ نگاشت صفر است و یا نگاشتی پوشا می‌باشد. بنابراین، $f_{*,p}$ وقتی و تنها وقتی پوشا نیست که همه مشتقات جزئی $\partial f / \partial x^j(p)$ صفر باشند. □

[۴] regular point [۵] regular value

بخش ۱۰.۸ مسایل

۸.۱* دیفرانسیل یک نگاشت. گیریم $F:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$ نگاشت با ضابطه

$$(u,v,w)=F(x,y)=(x,y,xy),$$

است. گیریم $p=(x,y)\in\mathbb{R}^2$. مقدار $F_*(\partial/\partial x|_p)$ را به صورت ترکیبی خطی از بردارهای $\partial/\partial u$، $\partial/\partial v$ و $\partial/\partial w$ محاسبه کنید.

۸.۲ دیفرانسیل نگاشت خطی. گیریم $L:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ نگاشتی خطی باشد. به ازای هر $p\in\mathbb{R}^n$، یکی‌گیری استاندارد $T_p\mathbb{R}^n\cong\mathbb{R}^n$ را با استفاده از

$$\sum a^i\frac{\partial}{\partial x^i}\longmapsto \mathbf{a}=\langle a^1,\cdots,a^n\rangle,$$

اعمال می‌کنیم. نشان دهید که نگاشت دیفرانسیل $L_{*,p}:T_p\mathbb{R}^n\to T_{L(p)}\mathbb{R}^m$ برابر خود $L:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ است، البته، پس از یکی‌گیری فضاهای مماس به روش توضیح داده شده.

۸.۳ مثالی از یک دیفرانسیل. به ازای عدد حقیقی دلخواه و ثابت α، نگاشت $F:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ را

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix}u\\v\end{bmatrix}&=(u,v)\\&=F(x,y)\\&=\begin{bmatrix}\cos\alpha&-\sin\alpha\\\sin\alpha&\cos\alpha\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix},\end{aligned}$$

تعریف می‌کنیم. میدان برداری $X=-y\,\partial/\partial x+x\,\partial/\partial y$ بر $\mathbb{R}^2$ را در نظر بگیرید. اگر $p=(x,y)\in\mathbb{R}^2$ و $F_*(X_p)=(a\,\partial/\partial u+b\,\partial/\partial v)|_{F(p)}$، توابع a و b را بر حسب x، y و α محاسبه کنید.

۸.۴ ماتریس گذر برای بردارهای مختصاتی. گیریم x,y دستگاه مختصات موضعی استاندارد بر $\mathbb{R}^2$ بوده و U مجموعه باز $U=\mathbb{R}^2-\{(x,0)|x\geq 0\}$ باشد. مختصات قطبی r,θ بر U به صورت

$$x=r\cos\theta,\quad y=r\sin\theta,\qquad 0<r,\quad 0<\theta<2\pi,$$

به شکل یکتا تعریف می‌گردد. $\partial/\partial r$ و $\partial/\partial\theta$ را بر حسب $\partial/\partial x$ و $\partial/\partial y$ تعیین کنید.

۸.۵* سرعت منحنی در مختصات موضعی. گزاره ۸.۲۴ را اثبات کنید.

۸.۶ بردار سرعت. گیریم $p=(x,y)\in\mathbb{R}^2$ در این صورت

$$c_p(t)=\begin{bmatrix}\cos 2t&-\sin 2t\\\sin 2t&\cos 2t\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix},\qquad t\in\mathbb{R},$$

یک منحنی با نقطه آغازی p در $\mathbb{R}^2$ می‌باشد. بردار سرعت $c_p'(0)$ را محاسبه کنید.

۸.۷* فضای مماس به حاصلضرب منیفلدها. اگر M و N منیفلد بوده و $\pi_1 : M\times N \to M$ و $\pi_2 : M\times N \to N$ تصاویر طبیعی باشند، ثابت کنید که به ازای هر $(p,q)\in M\times N$ ای

$$(\pi_{1*},\pi_{2*}) : T_{(p,q)}M\times N \longrightarrow T_pM\times T_qN$$

ایزومورفیسم است.

۸.۸ دیفرانسیل نگاشت ضرب و نگاشت وارونگیری. گیریم G یک گروه لی با نگاشت ضرب $\mu : G\times G\to G$ و نگاشت وارونگیری $\iota : G\to G$ و عنصر همانی e باشد. در این صورت

(الف) نشان دهید که دیفرانسیل نگاشت ضرب μ در نقطه (e,e) به صورت جمع رفتار می‌کند:

$$\mu_{*,(e,e)} : T_eG\times T_eG \longrightarrow T_eG, \qquad (X_e,Y_e)\longmapsto X_e+Y_e.$$

(راهنمایی: ابتدا $\mu_{*,(e,e)}(X_e,0)$ و $\mu_{*,(e,e)}(0,Y_e)$ را با استفاده از گزاره ۸.۲۷ محاسبه کنید.)

(ب) نشان دهید که دیفرانسیل نگاشت وارون ι در نقطه e به صورت ضرب در منفی یک رفتار می‌کند:

$$\iota_{*,e} : T_eG \longrightarrow T_eG, \qquad X_e\longmapsto -X_e.$$

(راهنمایی: از طرفین رابطه $\mu(c(t),(\iota\circ c)(t)) = e$ دیفرانسیل بگیرید.)

۸.۹* تبدیل بردارها به بردارهای مختصاتی. گیریم $X_1,\cdots,X_n$ میدانهای برداری بر زیرمجموعه باز U از منیفلد n بعدی M باشند. فرض کنید بردارهای $(X_1)_p,\cdots,(X_n)_p$ در $p\in U$ مستقل خطی باشند. نشان دهید که یک چارت مختصاتی $(V,x^1,\cdots,x^n)$ حول p چنان وجود دارد که به ازای هر $i=1,\cdots,n$ داریم $(X_i)_p = (\partial/\partial x^i)_p$.

۸.۱۰ ماکزیموم موضعی. در صورتی می‌گوییم تابع حقیقی-مقدار $f : M\to\mathbb{R}$ بر منیفلد M دارای ماکزیموم موضعی در نقطه $p\in M$ است، که یک همسایگی باز U شامل p در M به گونه‌ای یافت گردد که به ازای هر $q\in U$ ای $f(p)\geq f(q)$.

*(الف) ثابت کنید که اگر تابعی دیفرانسیلپذیر $f : I\to\mathbb{R}$ بر بازه باز I دارای مقدار ماکزیموم موضعی در $p\in I$ باشد، آنگاه $f'(p)=0$.

(ب) ثابت کنید ماکزیموم موضعی تابع هموار $f : M\to\mathbb{R}$ یک نقطه تکین برای f است. (راهنمایی: گیریم X_p یک بردار مماس در T_pM بوده و $c(t)$ یک منحنی آغازی از p در M باشد، که سرعت اولیه‌اش X_p می‌باشد. در این صورت $f\circ c$ تابعی حقیق-مقدار با ماکزیموم موضعی در 0 است. از (الف) استفاده نمایید.)

فصل ۹

زیرمنیفلد

برای نشان دادن منیفلد بودن یک فضای توپولوژی مفروض، تا اینجا دو روش در اختیار داریم:

الف) مستقیماً نشان دهیم که فضای داده شده هاوسدورف و با پایه شمارا است و نیز ساختار هموار دارد؛

ب) آن را به صورت یک فضای خارج‌قسمتی مناسب مطرح کنیم. در فصل ۷ شرایطی که طی آنها فضای مورد نظر منیفلد شود؛ مطرح گردید.

در این فصل، ابتدا مفهوم زیرمنیفلد منظم از یک منیفلد مفروض را مطرح می‌کنیم، زیرمجموعه‌ای که موضعاً به صورت صفر شدن تعدادی از توابع مختصاتی مطرح می‌گردد. سپس، با استفاده از قضیه تابع وارون، قضیه‌ای بنام «قضیه مجموعه تراز منظم» مطرح می‌کنیم، که از آن برای نشان دادن اینکه مجموعه تراز نگاشت هموار بین منیفلدها، زیرمنیفلد منظم است، استفاده می‌شود. با اینکه این قضیه نتیجه‌ای بالافصل از قضیه رتبه ثابت است که بعداً در ۱۱ مطرح می‌شود، در اینجا آن را مستقیماً از قضیه تابع وارون استخراج می‌کنیم.

بخش ۱.۹ زیرمنیفلد منظم

xy−صفحه نمونه اولیه از یک زیرمنیفلد منظم است. آن را به عنوان زیرمجموعه‌ای از $\mathbb{R}^3$ می‌توان قلمداد نمود که با صفر کردن تابع مختصاتی z معرفی می‌گردد. این موضوع را می‌توان تعمیم داد:

۹.۱ تعریف. زیرمجموعه S از منیفلد n−بعدی N در صورتی زیرمنیفلد منظم[۱] k−بعدی است که به ازای هر $p \in S$، یک دستگاه مختصات موضعی $(U,\phi) = (U, x^1, \cdots, x^n)$ حول p (از اطلس موجود بر منیفلد N) چنان وجود داشته باشد که $U \cap S$ را به صورت صفر مشترک $n-k$ تابع مختصاتی بتوان بیان نمود. با باز شماری مختصات، می‌توان فرض نمود که $n-k$ تابع مختصاتی مورد نظر $x^{k+1}, \cdots, x^n$ هستند. این چارت (U,ϕ) بر N را چارت موافق[۲] با S می‌نامیم.

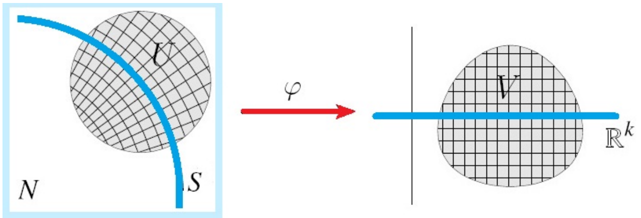
---

[۱] regular submanifold [۲] adapted chart

نگاشت ϕ بر زیرمجموعه $U \cap S$ به صورت $\phi(x^1, \cdots, x^k, 0 \cdots, 0)$ است. نگاشت

$$\phi_S : U \cap S \to \mathbb{R}^k$$

را به صورت k مختص اول از تحدید ϕ به زیرمجموعه $U \cap S$ تعریف می‌کنیم؛ بعبارت دیگر $\phi_S = (x^1, \cdots, x^k)$. عدد $n-k$ را اصطلاحاً نقصان بعد[1] S می‌نامند (به شکل ۱.۹ توجه شود).

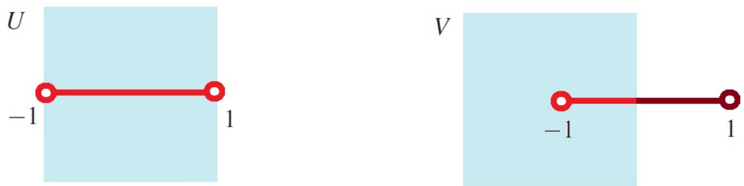


شکل ۱.۹: زیرمنیفلد منظم و چارت موافق با آن.

۹.۲ یادداشت. در اینجا فرض بر این است که توپولوژی بر زیرمنیفلد S، همان توپولوژی القایی از N بر آن می‌باشد.

۹.۳ مثال (زیرمنیفلد باز). در تعریف زیرمنیفلد، عدد k می‌تواند با بعد منیفلد n یکی باشد. در این حالت $U \cap S$ با صفر گذاشتن هیچ تابع مختصاتی حاصل می‌گردد، و بنابراین $U \cap S = U$. در نتیجه، هر زیر مجموعه باز از یک منیفلد، زیرمنیفلد منظمی از آن می‌باشد که بعدش با بعد خود منیفلد برابر است. اصطلاحاً، در این حالت U را زیرمنیفلد باز[2] می‌گوییم.

۹.۴ مثال. بازه $S = (-1,1)$ بر x−محور یک زیرمنیفلد منظم از xy−صفحه می‌باشد (به شکل ۲.۹ توجه شود). جهت ارائه چارت موافق با این زیرمنیفلد، مربع باز $U = (-1,1) \times (-1,1)$ با توابع مختصاتی x, y را در نظر می‌گیریم. در این صورت $U \cap S$ درست عبارت است از نقاط با $y = 0$ در U. توجه کنید که اگر $V = (-2,0) \times (-1,1)$، آنگاه چارت (V, x, y) با S موافق نیست، زیرا $V \cap S$



شکل ۲.۹: U چارت موافق است، ولی V خیر.

برابر بازه باز $(-1,0)$ بر x−محور است، در حالی که با صفر قرار دادن تابع مختصاتی y بر V، مجموعه $(-2,0)$ بر x−محور حاصل می‌گردد.

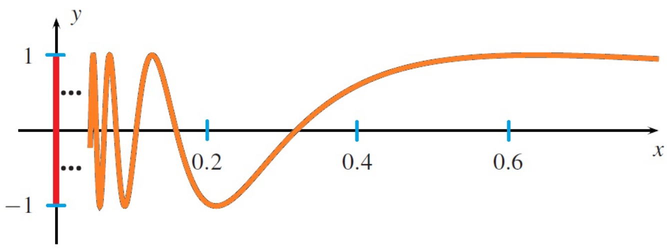
---

[1] codimension [2] open submanifold

۹.۵ مثال. گیریم Γ نمودار تابع $f(x)=\sin(1/x)$ بر بازه $(0,1)$ است، و S اجتماع Γ و بازه باز $I=\{0\}\times(-1,1)$ بر $y-$ محور است (به شکل ۳.۹ توجه شود):

$$S=\{\left(x,\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right)\Big|0<x<1\}\cup\{(0,y)\big|-1<y<1\}.$$

زیرمجموعه $S\subset\mathbb{R}^2$ زیرمنیفلد منظم نیست، زیرا: اگر p نقطه‌ای از بازه I باشد، آنگاه هیچ چارت موافق برای S حول pوجود ندارد، چرا که هر همسایگی کوچک U از p در $\mathbb{R}^2$، زیرمجموعه S را بینهایت بار قطع می‌کند.



شکل ۳.۹: نمونه‌ای از زیرمجموعه که زیرمنیفلد منظم نیست.

۹.۶ یادداشت. بستار Γ در $\mathbb{R}^2$ را منحنی سینوسی توپولوژی‌دانان می‌نامند. این مجموعه با S فرق دارد، زیرا نقاط انتهایی $(1,\sin 1)$، $(0,1)$ و $(0,-1)$ را در بر دارد. این نمونه‌ای از یک فضای همبند و غیر همبند راهی است.

۹.۷ گزاره. *گیریم S زیرمنیفلد منظمی از N است و $\mathcal{U}$ گردایه‌ای از چارتهای موافق (U,ϕ)با S می‌باشد که S را می‌پوشاند (یعنی اجتماع U ها کل S را در بر دارد). در این صورت $\mathcal{U}_S:=\{(U\cap S,\phi_S)|(U,\phi)\in\mathcal{U}\}$ اطلسی برای S می‌باشد. بنابراین، هر زیرمنیفلد منظم، خود یک منیفلد است. اگر N با بعد n و S موضعاً با صفر گرفتن $n-k$ تابع مختصاتی تعریف شده باشد، آنگاه $\dim S=k$.*

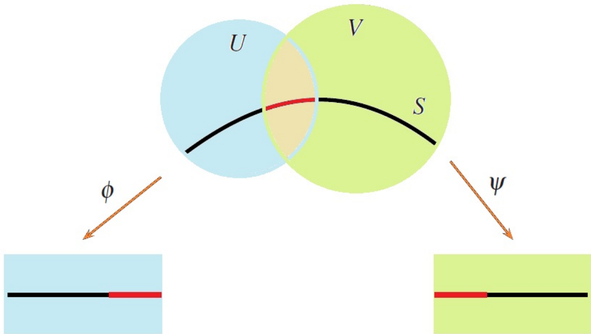
برهان : گیریم $(U,\phi)=(U,x^1,\cdots,x^n)$ و $(V,\psi)=(V,y^1,\cdots,y^n)$ دو چارت موافق از گردایه $\mathcal{U}$ هستند (به شکل ۱.۹ توجه شود). فرض کنیم $U\cap V\neq /\downarrow$1mm. در این صورت به ازای هر $p\in U\cap V\cap S$

$$\psi(p)=(y^1,\cdots,y^k,0,\cdots,0)\qquad \text{و} \qquad \phi(p)=(x^1,\cdots,x^k,0,\cdots,0)$$

در نتیجه $\phi_S(p)=(x^1,\cdots,x^k)$ و $\psi_S(p)=(y^1,\cdots,y^k)$؛ و بنابراین

$$\psi_S\circ\phi_S^{-1}(x^1,\cdots,x^k)=(y^1,\cdots,y^k).$$

چون هر یک از $y^1,\cdots,y^k$ ها تابعی هموار از $x^1,\cdots,x^k$ هستند، تابع گذر $\psi_S\circ\phi_S^{-1}$ هموار است. در نتیجه، چارتهای در $\mathcal{U}_S$ با هم $C^\infty-$سازگارند. حال، چون $\{U\cap S\,|(U,\phi)\in\mathcal{U}\}$ پوششی باز برای کل S است، پس گردایه $\mathcal{U}_S$ اطلسی برای S تشکیل می‌دهد. □



شکل ۴.۹: چارتهای موافق با یک زیرمنیفلد که همپوش هستند.

بخش ۲.۹ مجموعه صفرهای تابع

فرض کنید $f: N \to M$ تابعی بین منیفلدها باشد و $c \in M$؛ رایج است، که از $f^{-1}(c)$ به معنی $f^{-1}(\{c\})$ استفاده شود. زیرمجموعه

$$f^{-1}(c) = \{p \in N \,|\, f(p) = c\}$$

را مجموعه تراز[۱] f نظیر به c می‌نامند. نگاره وارون $f^{-1}(c)$ یک مقدار منظم c را مجموعه تراز منظم f نظیر به c می‌نامند. چنانچه $f: N \to \mathbb{R}^m$، مجموعه $f^{-1}(0) =: Z(f)$ را مجموعه صفرهای[۲] f می‌نامند.

۸.۹ مثال (2–کره در $\mathbb{R}^2$). گیریم $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$ بر $\mathbb{R}^3$. در این صورت، مجموعه تراز

$$f^{-1}(1) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$$

درست همان 2–کره $\mathbb{S}^2$ معروف است.
اکنون، به کمک قضیه تابع وارون برای این زیرمجموعه از $\mathbb{R}^3$ چارتهای موافقی پیدا می‌کنیم که قادرند کل آن را بپوشانند. چون $f_x = 2x$، $f_y = 2y$ و $f_z = 2z$، تنها نقطه تکین f مبداء $(0,0,0)$ است، که به وضوح به $\mathbb{S}^2$ تعلق ندارد. بنابراین، همه نقاط بر کره $\mathbb{S}^2$ نقاط منظم تابع f هستند، و لذا 0 یک مقدار منظم برای f می‌باشد.
گیریم $p = (p^1, p^2, p^3) \in \mathbb{S}^2$ که در آن $f_x(p) = 2p^1 \neq 0$. در این صورت ماتریس ژاکوبی نگاشت

---
۱ level set ۲ zero set

هموار $(f,y,z):\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ عبارت است از

$$\begin{aligned} J_{(f-1,y,z)} &= \begin{pmatrix} \partial(f-1)/\partial x & \partial(f-1)/\partial y & \partial(f-1)/\partial z \\ \partial y/\partial x & \partial y/\partial y & \partial y/\partial z \\ \partial z/\partial x & \partial z/\partial y & \partial z/\partial z \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2x & 2y & 2z \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

در نتیجه، دترمینان ژاکوبی آن $J_{(f-1,y,z)}(p)=2p^1\neq 0$. پس، بنا به قضیه تابع وارون (قضیه ۶.۲۹)، همسایگی باز U_p از p در $\mathbb{R}^3$ چنان وجود دارد که $(U_p,f-1,y,z)$ چارتی از اطلس $\mathbb{R}^3$ می‌باشد. در این چارت، مجموعه $U_p\cap\mathbb{S}^2$ به صورت صفر قرار دادن اولین تابع مختصاتی $f-1=0$ مطرح میگردد. بنابراین، $(U_p,f-1,y,z)$ یک چارت موافق با $\mathbb{S}^2$ است و در نتیجه، $(U_p\cap\mathbb{S}^2,y,z)$ چارتی برای $\mathbb{S}^2$ می‌باشد.

به صورت مشابه، در حالت $f_y(p)=2p^2\neq 0$، یک چارت موافق $(V_p,x,f-1,z)$ حول p وجود دارد که مجموعه $V_p\cap\mathbb{S}^2$ برابر مجموعه صفرهای دومین تابع مختصاتی آن $f-1$ می‌باشد. در حالت $f_z(p)=2p^3\neq 0$ نیز یک چارت موافق $(W_p,x,y,f-1)$ حول p وجود دارد که مجموعه $W_p\cap\mathbb{S}^2$ برابر مجموعه صفرهای سومین تابع مختصاتی آن $f-1$ می‌باشد. این سه چارت موافق کل $\mathbb{S}^2$ را می‌پوشانند. بنابراین، $\mathbb{S}^2$ زیرمنیفلدی منظم از $\mathbb{R}^3$ می‌باشد. بنابه گزاره ۹.۷، $\mathbb{S}^2$ منیفلدی 2 بعدی است.

این مثال به این جهت مهم است که آن را به حالت مجموعه تراز منظم هر تابع دلخواه $f:N\to\mathbb{R}$ می‌توان تعمیم داد. کافی است در هر نقطه‌ای لااقل یکی از مشتقات جزئی تابع مورد نظر f مخالف صفر باشد.

۹.۹ قضیه مجموعه تراز منظم. گیریم $f:N\to\mathbb{R}$ تابعی هموار بر منیفلد n−بعدی N است. در این صورت، هر مجموعه تراز منظم غیر تهی $S=f^{-1}(c)$ یک زیرمنیفلد منظم با نقصان بعد یک از N است.

برهان : با تعویض f با $f-c$ در صورت لزوم، می‌توان فرض نمود که $f(c)=0$. گیریم $p\in S$. چون p نقطه منظمی از تابع f است، چارتی $(U,x^1,\cdots,x^n)$ شامل p چنان وجود دارد، که نسبت به آن به ازای یک i ای $(\partial f/\partial x^i)(p)\neq 0$. با بازشماری توابع مختصاتی $x^1,\cdots,x^n$ می‌توانیم فرض کنیم که $(\partial f/\partial x^1)(p)\neq 0$. در این صورت، ماتریس ژاکوبی تابع هموار $\phi=(f,x^2,\cdots,x^n):U\to\mathbb{R}^n$

عبارت است از

$$J_\phi = \begin{pmatrix} \partial f/\partial x^1 & \partial f/\partial x^2 & \cdots & \partial f/\partial x^n \\ \partial x^2/\partial x^1 & \partial x^2/\partial x^2 & \cdots & \partial x^n/\partial x^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \partial x^n/\partial x^1 & \partial x^n/\partial x^2 & \cdots & \partial x^n/\partial x^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial f/\partial x^1 & \partial f/\partial x^2 & \cdots & \partial f/\partial x^n \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

پس، دترمینان ژاکوبی ϕ در p مخالف صفر است: $\partial f/\partial x^1(p) \neq 0$. در نتیجه، بنا به قضیه تابع وارون، همسایگی بازی U_p از p وجود دارد که $(f, x^2, \cdots, x^n)$ یک دستگاه مختصاتی بر آن تشکیل می‌دهد. مجموعه تراز $U_p \cap S$ نسبت به این چارت $(U_p, f, x^2, \cdots, x^n)$ به صورت صفر قرار دادن اولین تابع مختصاتی $f = 0$ حاصل می‌گردد. بنابراین، $(U_p, f, x^2, \cdots, x^n)$ یک چارت موافق با S است. در نتیجه، S زیرمنیفلد منظمی با بعد $n-1$ از N است. □

بخش ۳.۹ قضیه مجموعه تراز منظم

اکنون قضیه ۹.۹ را به حالت توابع بتوی $\mathbb{R}^m$ تعمیم می‌دهیم.

۹.۱۰ قضیه. گیریم $m \leq n$ و $f : N \to \mathbb{R}^m$ تابعی هموار بر منیفلد n−بعدی N است. در این صورت، هر مجموعه تراز منظم غیر تهی $S = f^{-1}(c)$ یک زیرمنیفلد منظم با نقصان بعد m از N است.

برهان : با تعویض تابع f با $f - c$ در صورت لزوم، می‌توادن فرض نمود که $c = 0 \in \mathbb{R}^m$. گیریم $p \in S$ و $(U, x^1, \cdots, x^n)$ چارتی از N حول p می‌باشد. چون p بنا به فرض یک نقطه منظم تابع f است، در نتیجه ماتریس ژاکوبی $[(\partial f^i/\partial x^j)(p)]$ با رتبه $m = \min\{n, m\}$ می‌باشد. با تعویض اندیس f^i ها و یا x^j ها در صورت لزوم، می‌توانیم فرض کنیم که زیر ماتریس $m \times m$ از ماتریس ژاکوبی که دترمینان مخالف صفر دارد، دقیقاً زیر ماتریس $[(\partial f^i/\partial x^j)(p)]_{1 \leq i,j \leq m}$ است. m تابع مختصاتی اول $x^1, \cdots, x^m$ در چارت (U, x) را با توابع مولفه‌ای $f^1, \cdots, f^m$ تعویض می‌کنیم. ادعا می‌کنیم که همسایگی بازی $U_p \subseteq N$ از p چنان وجود دارد که $(U_p, f^1, \cdots, f^m, x^{m+1}, \cdots, x^n)$ چارتی در اطلس N است. برای این منظور، کافی است ژاکوبی تابع $\Phi = (f^1, \cdots, f^m, x^{m+1}, \cdots, x^n)$ را در نقطه p محاسبه کنیم:

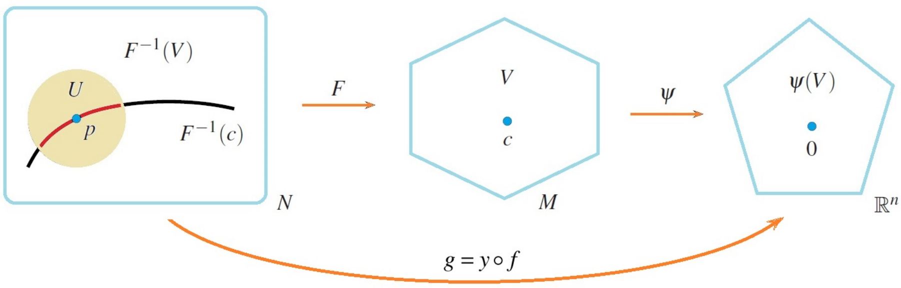
$$\begin{bmatrix} A & B \\ O & C \end{bmatrix}, \qquad A = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f^1}{\partial x^1} & \cdots & \dfrac{\partial f^1}{\partial x^m} \\ \vdots & & \vdots \\ \dfrac{\partial f^m}{\partial x^1} & \cdots & \dfrac{\partial f^m}{\partial x^m} \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f^1}{\partial x^{m+1}} & \cdots & \dfrac{\partial f^1}{\partial x^n} \\ \vdots & & \vdots \\ \dfrac{\partial f^m}{\partial x^{m+1}} & \cdots & \dfrac{\partial f^m}{\partial x^n} \end{bmatrix},$$

O ماتریس صفر $m\times m$ است و C ماتریس همانی $(n-m)\times(n-m)$. چون دترمینان این ماتریس برابر $\det A$ است، که مطابق فرض مخالف صفر می‌باشد، ادعای بالا از قضیه تابع وارون نتیجه می‌گردد.
مجموعه S در چارت (U_p,Φ) با صفر قرار دادن m تابع مختصاتی $f^1,\cdots,f^m$ حاصل می‌گردد. در نتیجه، (U_p,Φ) یک چارت برای N و موافق با S است. بنابراین، S زیرمنیفلد منظمی با بعد $n-m$ از N می‌باشد. $\square$

طبیعی است که در مرحله بعدی، قضیه ۹.۹ (و لذا قضیه ۹.۱۰) را به کلی ترین صورتش تعمیم دهیم:

۹.۱۱ قضیه (قضیه مجموعه تراز منظم). گیریم $n\le m$، N منیفلدی m بعدی، N منیفلدی n بعدی و $f:N\to M$ تابعی هموار بین آنها باشد. در این صورت، هر مجموعه تراز منظم غیر تهی $S=f^{-1}(c)$ یک زیرمنیفلد منظم با نقصان بعد m از N است.

برهان: گیریم $p\in S$ و (V,y) چارتی برای M حول $f(p)=c$ باشد. در این صورت، تابع $g=y\circ f:$ $N\to\mathbb{R}^m$ هموار است و $d=y(c)$ یک مقدار منظم آن می‌باشد؛ زیرا y، چارت است و لذا رتبه نگاشت f را تغییر نمی‌دهد: $\operatorname{rank}(g)(p)=\operatorname{rank}(f)(p)=m$. پس، همه شرایط در قضیه ۹.۱۰ فراهم است، و همان استدلال در این مورد نیز بکار می‌آید (به شکل ۳.۹ توجه شود). $\square$



شکل ۵.۹: مجموعه تراز $f^{-1}(c)$ موضعاً برابر مجموعه تراز $g^{-1}(d)$ است.

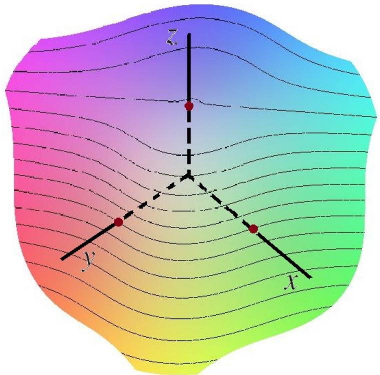
اثبات قضیه مجموعه تراز منظم، لم مفید زیر را نتیجه می‌دهد.

۹.۱۲ Lem۹,۱۱. گیریم $F:N\to\mathbb{R}^m$ نگاشتی هموار بر منیفلد $n-$بعدی N بوده و S مجموعه تراز $F^{-1}(0)$ باشد. اگر دترمینان ژاکوبی $\partial(F^1,\cdots,F^m)/\partial(x^{j_1},\cdots,x^{j_m})(p)$ نسبت به چارتی $(U,x^1,\cdots,x^n)$ حول p ناصفر باشد، آنگاه همسایگی‌ای از p وجود دارد که بر آن $F^1,\cdots,F^m$ را با $x^{j_1},\cdots,x^{j_m}$ می‌شود تعویض نمود، و به چارتی موافق با S برای N رسید.

۹.۱۳ یادداشت. در قضیه مجموعه تراز منظم شرطی کافی برای زیرمنیفلد منظم بودن مجموعه تراز ارائه می‌گردد، و نه شرط کافی! مثلا، اگر $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ نگاشت $f(x,y)=y^2$ باشد، آنگاه مجموعه تراز $Z(f)=Z(y^2)$ همان $x-$محور است، که زیر منیفلدی منظم از $\mathbb{R}^2$ می‌باشد. اما، $\partial f/\partial x=0$ و $\partial f/\partial y=2y=0$ بر $x-$ محور؛ یعنی تمام نقاط $Z(f)$ تکین هستند.

بخش ۴.۹ مثالهایی از زیرمنیفلد منظم

۹.۱۴ مثال (ابررویه در فضا). مجموعه S جواب معادله $x^3+y^3+z^3=1$ در $\mathbb{R}^3$ یک منیفلد $2-$بعدی است. معمولاً وقتی نقصان بعد زیرمنیفلدی از $\mathbb{R}^n$ برابر یک می‌شود، آن را ابررویه[۱] می‌نامند.
برای نشان دادن این مطلب، گیریم $f(x,y,z)=x^3+y^3+z^3$. در این صورت، $S=f^{-1}(1)$. چون $J_f=(3x^2,3y^2,3z^2)$، تنها نقطه تکین این تابع، مبداء $(0,0,0)$ می‌باشد، که در S قرار ندارد. در نتیجه، 1 مقدار منظمی برای f است، و لذا بنا به قضیه ۹.۹، S زیرمنیفلدی منظم از $\mathbb{R}^3$ با نقصان بعد یک (و بنابراین، با بعد 2) است. به شکل ۴.۹ توجه شود.



شکل ۶.۹: ابررویه به معادله $x^3+y^3+z^3=1$

۹.۱۵ مثال (منحنی‌ای در فضا). مجموعه S جواب دستگاه معادلات $x^3+y^3+z^3=1$ و $x+y+z=0$ در $\mathbb{R}^3$ یک منیفلد $1-$بعدی است. معمولاً وقتی بعد زیرمنیفلدی یک می‌شود، آن را منحنی می‌نامند.
برای نشان دادن این مطلب، نگاشت $F:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$ با ضابطه $F(x,y,z)=(u,v)$ را در نظر می‌گیریم که در آن $u(x,y,z)=x^3+y^3+z^3$ و $v(x,y,z)=x+y+z$. در این صورت، $S=Ff^{-1}(1,0)$. اما

$$\begin{aligned} J_F &= \begin{pmatrix} u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3x^2 & 3y^2 & 3z^2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

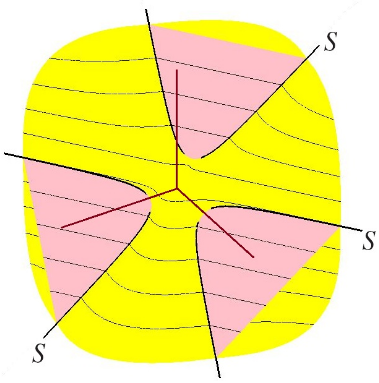
[۱] hypersurface

که $u_x = \partial u/\partial x$ و ... بنابراین، نقطه $p = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ در صورتی می‌توان نقطه تکین نگاشت F باشد که دترمینان هر سه مینور 2×2 ممکن $J_F(p)$ صفر باشد. یعنی

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 3x^2 & 3y^2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} &= 3(x^2-y^2), \\ \begin{vmatrix} 3y^2 & 3z^2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} &= 3(y^2-z^2), \\ \begin{vmatrix} 3x^2 & 3z^2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} &= 3(x^2-z^2). \end{aligned}$$

در نتیجه، $y = \pm z$ و $x = \pm x$. اما اگر $p \in S$، باید $x+y+z=0$، که تنها حالت ممکن $x=y=z=0$ می‌باشد؛ از طرفی باید $x^3+y^3+z^3=1$، که تنها نقطه $p=(0,0,0)$ نیز رد می‌شود. یعنی، F هیچ نقطه تکین ندارد. بنابراین، S یک مجموعه تراز منظم است. این نشان می‌دهد که S زیرمنیفلدی با بعد یک از $\mathbb{R}^3$ است.

تنها نقطه تکین این تابع، مبداء $(0,0,0)$ می‌باشد، که در S قرار ندارد. در نتیجه، 1 مقدار منظمی برای f است، و لذا بنا به قضیه ۹.۹، S زیرمنیفلدی منظم از $\mathbb{R}^3$ با نقصان بعد یک (و بنابراین، با بعد 2) است. به شکل ۴.۹ توجه شود.



شکل ۷.۹: منحنی به معادله $x^3+y^3+z^3=1$ و $x+y+z=0$

۹.۱۶ مثال (گروه خطی خاص). گروه خطی خاص[۱] $\mathrm{SL}(n,\mathbb{R})$ به عنوان مجموعه، زیر مجموعه‌ای از $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ متشکل از ماتریسهای با دترمینان یک است. چون $\det(AB) = (\det A)(\det B)$ و $\det(A^{-1}) = 1/\det A$، $\mathrm{SL}(n,\mathbb{R})$ زیرگروهی از $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ است. برای نشان دادن اینکه $\mathrm{SL}(n,\mathbb{R})$ زیرمنیفلد منظم است، تابع دترمینان $\det : \mathrm{GL}(n,\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ را در نظر می‌گیریم، و قضیه مجموعه تراز منظم را برای $\det^{-1}(1) = \mathrm{SL}(n,\mathbb{R})$ بکار می‌بریم. برای این منظور، نیاز است تا منظم بودن مقدار 1 برای تابع det را تحقیق کنیم.

---

[۱] special linear group

گیریم a_{ij}، که $1 \le i, j \le n$ دستگاه مختصات استاندارد بر $\mathbb{R}^{n\times n}$ باشد، و S_{ij} نمایشگر زیرماتریس حاصل از سطر i ام و ستون j ام از ماتریس $A = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{n\times n}$ باشد و $m_{ij} = \det S_{ij}$. از جبر خطی فرمولی را بیاد می‌آوریم که دترمینان را بر حسب سطر i امش بیان می‌کند:

$$\det(A) = (-1)^{i+1} a_{i1} m_{i1} + (-1)^{i+2} a_{i2} m_{i2} + \cdots + (-1)^{i+n} a_{in} m_{in}. \qquad (۱.۹)$$

بنابراین، به ازای هر i و هر j،

$$\frac{\partial \det}{\partial a_{ij}} = (-1)^{i+j} m_{ij}.$$

در نتیجه، ماتریس $A \in \mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ وقتی و تنها وقتی نقطه تکین det است که همه دترمینان‌های m_{ij} حاصل از A صفر باشند. اما، این بدان معنی است که رتبه ماتریس A کمتر از $n-1$ است، و بنابراین دترمینان آن صفر است، در حالی که اگر قرار باشد $A \in \mathrm{SL}(n,\mathbb{R})$، انگاه باید $\det A = 1$. یعنی، همه ماتریسهای در $\mathrm{SL}(n,\mathbb{R})$ نقطه منظم برای تابع det هستند. در نتیجه، بنابه قضیه مجموعه تراز منظم ۹.۹، $\mathrm{SL}(n,\mathbb{R})$ زیرمنیفلد منظمی از $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ می‌باشد. همبعد آن برابر یک است؛ در نتیجه $\dim \mathrm{SL}(n,\mathbb{R}) = \dim \mathrm{GL}(n,\mathbb{R}) - 1 = n^2 - 1$.

بخش ۵.۹ تمرینات

۹.۱ . تابع $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ با ضابطه $f(x,y)=x^3-6xy+y^2$ را در نظر بگیرید. همه مقادیر $c\in\mathbb{R}$ ای را بیابید که به ازاء آن مجموعه تراز $f^{-1}(c)$ زیرمنیفلد منظم از $\mathbb{R}^3$ می‌باشد.

۹.۲ . مختصات x,y,z,w بر $\mathbb{R}^4$ را در نظر بگیرید. آیا مجموعه جوابهای معادله $x^5+y^5+z^5+w^5=1$ در $\mathbb{R}^4$ منیفلد هموار است؟ چرا؟ (فرض بر این است که از توپولوژی زیرفضایی استفاده می‌گردد.)

۹.۳ . آیا مجموعه جوابهای دستگاه معادلات $x^3+y^3+z^3=1$ و $z=xy$ در $\mathbb{R}^3$ منیفلد هموار است؟ چرا؟

۹.۴ زیرمنیفلد منظم. فرض کنید زیرمجموعه S از $\mathbb{R}^2$ دارای این خاصیت است که موضعاً یکی از مختصاتش به صورت تابعی هموار از مختص دیگرش می‌باشد. نشان دهید S زیرمنیفلد منظمی از $\mathbb{R}^2$ می‌باشد. (توجه کنید که دایرا به تعریف $x^2+y^2=1$ این خاصیت را دارد. در هر نقطه از دایره، همسایگی‌ای وجود دارد که y تابعی هموار بر حسب x است، و یا x بر حسب y.)

۹.۵ نمودار تابع دو متغیره. نشان دهید که نمودار $\Gamma(f)=\{(x,y,f(x,y))|(x,y)\in\mathbb{R}^2\}$ هر تابع هموار $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$، زیر منیفلدی منظم از $\mathbb{R}^3$ می‌باشد.

۹.۶ فرمول اولر. چند جمله‌ای $P(x_0,\cdots,x_n)\in\mathbb{R}[x_0,\cdots,x_n]$ در صورتی همگن[1] از درجه k است که هر یک از تک جمله‌ایهای آن $x_0^{i_0}\cdots x_n^{i_n}$ از درجه $\sum_{j=0}^n i_j=k$ باشد. گیریم $P(x_0,\cdots,x_n)$ چند جمله‌ای همگن از درجه k باشد. در این صورت روشن است که $P(tx_0,\cdots,tx_n)=t^kP(x_0,\cdots,x_n)$. نشان دهید $\sum_{i=0}^n x_i(\partial P/\partial x_i)=kP$.

۹.۷ ابررویه تصویری هموار. فرض کنید $P(x_0,\cdots,x_n)\in\mathbb{R}[x_0,\cdots,x_n]$ چند جمله‌ای همگن از درجه k باشد. P را نمی‌توان تابعی بر فضای تصویری $\mathbb{RP}^n$ قلمداد نمود، زیرا مقدار آن در نقطه $[a-0,\cdots,a_n]$ منحصر بفرد نیست. اما، مجموعه صفرهای آن خوشتعریف است؛ زیرا $P(a-0,\cdots,a_n)=0$ اگر و تنها اگر

$$P(ta_0,\cdots,ta_n)=t^kP(x_0,\cdots,x_n)=0,\qquad t\in\mathbb{R}^*:=\mathbb{R}-\{0\}.$$

مجموعه صفرهای مشترک تعدادی متناهی از چند جمله‌ایهای همگن در $\mathbb{RP}^n$ را وریته تصویری حقیقی[2] می‌نامند. وریته تصویری حقیقی که با تنها یک چند جمله‌ای همگن از درجه k تعریف شده باشد، ابررویه از درجه k نامیده می‌شود. نشان دهید که اگر $\partial P/\partial x_0$، $\partial P/\partial x_1$ و $\partial P/\partial x_2$ بر ابررویه $Z(P)$ با تعریف $P(x_0,x_1,x_2)$ همزمان صفر نباشند، آنگاه $Z(P)$ منیفلدی هموار است. (راهنمایی: دستگاه مختصات موضعی $(x,y)=(x_1/x_0,x_2/x_0)$ را بر مجموعه $U_0:=\{[x_0,x_1,x_2]|x_0\neq 0\}$ در نظر بگیرید. در این صورت، بر U_0 می‌توان نشان داد که

$$P(x_0,x_1,x_2)=x_0^kP(1,x_1/x_0,x_2/x_0)=x_0^kP(1,x,y)$$

. تعریف کنید $f(x,y)=P(1,x,y)$. در نتیجه، صفرهای f و P یکی هستند.)

[1] homogeneous [2] real projective variety

۹.۸ گروه خطی خاص مختلط. گروه خطی خاص مختلط $\mathrm{SL}(n,\mathbb{C})$ زیر مجموعه‌ای از $\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$ متشکل از همه ماتریسهای با دترمینان یک است. نشان دهید $\mathrm{SL}(n,\mathbb{C})$ زیرمنیفلد منظمی از $\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$ است و سپس بعدش را بدست آورید، (برای حل این مساله کمی آنالیز مختلط باید بدانید.)

۹.۹ حاصلضرب زیمنیفلدهای منظم. اگر S_1 و S_2 زیرمنیفلد منظم بترتیب M_1 و M_2 باشند، ثابت کنید $S_1 \times S_2$ نیز زیرمنیفلد منظم $M_1 \times M_2$ می‌باشد.

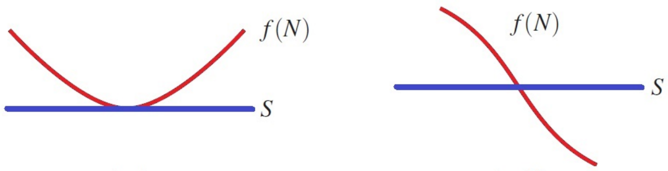
۹.۱۰ قضیه تراگردی. در صورتی می‌گوییم نگاشت هموار $f : N \to M$ با زیرمنیفلد $S \subset M$ تراگرد[1] است که به ازای هر $p \in f^{-1}(S)$ ای

$$f_*(T_pN) + T_{f(p)}S = T_{f(p)}M.$$

(توضیح اینکه در این فرمول + به معنی جمع دو زیرفضای برداری $f_*(T_pN)$ و $T_{f(p)}S$ از فضای برداری $T_{f(p)}M$ می‌باشد. این لزوماً جمع مستقیم نیست.) هدف اثبات قضیه تراگردی است:

اگر نگاشت هموار $f : N \to M$ با زیرمنیفلد منظم S از M تراگرد باشد، آنگاه $f^{-1}(S)$ زیرمنیفلد منظمی از N است. بعلاوه، نقصان بعد S در M با نقصان بعد $f^{-1}(S)$ در N برابر است.

در حالتی که S تک نقطه‌ای است، تراگردی f با S درست به معنی منظم بودن مقدار c برای تابع f است. در نتیجه، قضیه مجموعه تراز منظم حالت خاصی از قضیه تراگردی می‌باشد. اهمیت بخصوص این قضیه در تعیین شرایطی است که طی انها مقطع دو زیرمنیفلد، خود یک زیرمنیفلد می‌باشد. گیریم $p \in f^{-1}(S)$ و $(U, x^1, \cdots, x^n)$ یک چارت موافق با S برای M در $f(p)$ است، طوری که



شکل ۸.۹: الف) f با S تراگرد است؛ در حالی که الف) f با S تراگرد نیست.

$U \cap S = Z(x^{m-k+1}, \cdots, x^m)$ مجموعه صفرهای توابع مختصاتی $x^{m-k+1}, \cdots, x^m$ می‌باشد. نگاشت $g : U \to \mathbb{R}^k$ را به صورت $g = (x^{m-k+1}, \cdots, x^m)$تعریف می‌کنیم.

الف) نشان دهید $f^{-1}(U) \cap f^{-1}(S) = (g \circ f)^{-1}$.

ب) نشان دهید $f^{-1}(U) \cap f^{-1}(S)$ یک مجموعه تراز منظم برای تابع $g \circ f : f^{-1}(U) \to \mathbb{R}^k$ است.

ج) قضیه تراگردی را اثبات کنید.

[1] transversal

فصل ۱۰

کاتگوری و فانکتور

مباحث مشابه در قسمتهای به ظاهر متفاوت ریاضیات گاهی توجه را به خود جلب می‌کند. مثلاً، در توپولوژی به دنبال حل این مساله هستند که در چه صورت دو فضای توپولوژی داده شده همئومورفند، در نظریه گروهها به دنبال حل این مساله‌اند که در چه صورتی دو گروه داده شده ایزومورفند. احکام نسبتاً مشابهی نیز وجود دارد، مثلاً در نظریه گروهها هسته هر همومورفیسم، زیرگروهی نرمال از گروه مبداء است، و قضیه اول ایزومورفیسم برقرار است، و در نظریه جبرهای لی، هسته هر همومورفیسم، یک ایده‌آل از جبر لی مبداء است، و چیزی بسیار شبیه قضیه اول ایزومورفیسم در این مورد نیز درست می‌باشد؛ و بسیاری از مثالهای از این دست. ای گونه بحثها، بطور طبیعی به نظریه کاتگوری‌ها و فانکتورها منجر می‌گردد، که در عمل توانسته است ای گونه تشابهات را به صورت منسجم و علمی توضیح بدهد.

کاتگوری اساساً گردایه‌ای از اشیاء و پیکانهای بین آن اشیاء است. این پیکانها را اصطلاحاً مورفیسم می‌نامند، که باید خواص مجرد نگاشتها را داشته باشند، و عموماً نگاشتهای حافظ ساختار هستند. گردایه منیفلدهای هموار به همراه نگاشتهای هموار تشکیل یک کاتگوری می‌دهند. همچنین است، گردایه فضاهای برداری و نگاشتهای خطی بین آنها. منظور از فانکتور از یک کاتگوری به کاتگوری دیگر، تناظری است بین اشیاء و مورفیسمهای آنها، به گونه‌ای که اشیاء همانی را به اشیاء همانی می‌برد و ترکیب مورفیسمها را به ترکیبی از مورفیسمهای کاتگوری دوم می‌نگارد. به این ترتیب، اگر خاصیتی و یا حکمی در کاتگوری اول به کمک مورفیسمها مطرح شود، آن را به کاتگوری دوم می‌توان برد، شاید راحت‌تر باشد. مثلاً، ساخت فضای مماس به یک منیفلد و نیز ساخت نگاشت مشتق نظیر به نگاشتهای هموار، فانکتوری است از کاتگوری منیفلدها به کاتگوری فضاهای برداری. یک نتیجه از وجود این فانکتور این است که اگر دو منیفلد دیفئومورف باشند، آنگاه فضاهای مماس نظیر به آنها با هم ایزومورفند، و بنابراین همبعد هستند. به همین راحتی، ناوردایی بعد منیفلدها با ابزار دیفرانسیلی اثبات می‌گردد. اثبات ناوردایی بعد در کاتگوری فضاهای توپولوژی و نگاشتهای پیوسته، بسیار دشوار اثبات می‌گردد، زیرا در آنجا ابزار مناسبی مانند فانکتور فضای مماس وجود ندارد.

بسیاری از مباحث توپولوژی جبری عملاً مطالعه فانکتورهای مختلف است، نظیر فانکتور هومولوژی، کوهومولوژی و یا هوموتوپی. چنانچه فانکتور خوب انتخاب گردد، از جهت محاسبه‌پذیری باندازه کافی

ساده است، و در عین حال آن چنان ساده نیست که خواص اساسی در کاتگوری اول را منعکس نکند. این موضوع را تا اندازه‌ای در مورد فانکتور کوهومولوژی دورام می‌توان مشاهده نمود، که فانکتوری از کاتگوری منیفلدها به کاتگوری جبرهای مدرج است. در ادامه فانکتورهای چون کلاف مماس، فرمهای دیفرانسیلی و نهایتاً کوهومولوژی دورام را مطرح می‌کنیم.

در این فصل ضمن ارائه مفهوم کاتگوری و فانکتور و برخی خواص آنها، مفهوم دوگان فضای برداری را به عنوان نمونه‌ای ساده از فانکتور مورد بررسی قرار می‌دهیم. مطالب برای مطالعه بیشتر در این خصوص به کتاب مک لین [۳۱] و یا لاور و شانون [۲۹] مراجعه شود.

بخش ۱.۱۰ کاتگوری

۱.۱۰ تعریف. کاتگوری[۱] سه تایی مرتبی است چون $\mathscr{C} = (\mathcal{O}, \mathcal{M}, \circ)$ شامل

۱) گردایه‌ای $\mathcal{O}$ از عناصر بنام شیء[۲]؛

۲) به ازای هر دو شیء $A, B \in \mathcal{O}$، مجموعه‌ای $\mathrm{Mor}(A,B)$ از اعضاء بنام مورفیسم[۳]؛ و

۳) تناظری بنام ترکیب[۴] $\circ : \mathcal{M}\times\mathcal{M} \to \mathcal{M}$ که به هر دو مورفیسم $f \in \mathrm{Mor}(A,B)$ و $g \in \mathrm{Mor}(B,C)$، مورفیسمی خوشتعریف $g\circ f \in \mathrm{Mor}(A,C)$ متناظر می‌سازد؛

به گونه‌ای که ترکیب در شرایط زیر صدق می‌کند:

i) **اصل همانی:** به ازای هر شیء A، مورفیسمس همانی $\mathbb{1}_A \in \mathrm{Mor}(A,A)$ چنان وجود دارد که به ازای هر $f \in \mathrm{Mor}(A,B)$ و $g \in \mathrm{Mor}(B,A)$ ای روابط $f\circ \mathbb{1}_A = f$ و $\mathbb{1}_A \circ g = g$ برقرار است؛

ii) **اصل شرکتپذیری:** به ازای هر $f \in \mathrm{Mor}(A,B)$، $g \in \mathrm{Mor}(B,C)$ و $h \in \mathrm{Mor}(C,D)$ ای رابطه $h\circ(g\circ f) = (h\circ g)\circ f$ برقرار است.

اغلب بجای $f \in \mathrm{Mor}(A,B)$ می‌نویسند $f : A \to B$.

۲.۱۰ کاتگوری مجموعه‌ها. گردایه مجموعه‌ها به همراه توابع بین مجموعه‌ها، تشکیل کاتگوری مجموعه‌ها $\mathscr{S}et$ را می‌دهد. در اینجا $\mathrm{Mor}(A,B)$ مجموعه همه توابع از A بتوی B است.

۳.۱۰ کاتگوری گروه‌ها. گردایه گروه‌ها به همراه همومورفیسمهای بین گروه‌ها، تشکیل کاتگوری گروه‌ها $\mathscr{G}ru$ را می‌دهد. در اینجا $\mathrm{Mor}(A,B)$ مجموعه همومورفیسمهای از گروه A بتوی گروه B است، و آن را اغلب با $\mathrm{Hom}(A,B)$ نشان می‌دهند.

۴.۱۰ کاتگوری فضاهای برداری. گردایه فضاهای برداری به همراه نگاشتهای خطی بین فضاهای برداری، تشکیل کاتگوری گروه‌ها $\mathscr{V}ec$ را می‌دهد. در اینجا $\mathrm{Mor}(A,B)$ مجموعه نگاشتهای خطی از فضای برداری A بتوی فضای برداری B است، و آن را اغلب با $\mathrm{Lin}(A,B)$ نشان می‌دهند.

---

[۱] category [۲] object [۳] morphism [۴] composite

۱۰.۵ کاتگوری پیوسته[۵]. گردایه فضاهای توپولوژی به همراه نگاشتهای پیوسته بین فضاهای توپولوژی، تشکیل کاتگوری پیوسته $\mathscr{T}op$ را می‌دهد.

۱۰.۶ کاتگوری هموار[۶]. گردایه منیفلدهای هموار به همراه نگاشتهای هموار بین منیفلدها، تشکیل کاتگوری هموار $\mathscr{M}an$ را می‌دهد.

۱۰.۷ کاتگوری منیفلدهای نقطه‌دار[۱]. زوج مرتب $(M.p)$ شامل یک منیفلد M و نقطه‌ای p از آن را اصطلاحاً منیفلد نقطه‌دار می‌نامند. به ازای هر دو منیفلد نقطه‌دار (M,p) و (N,q)، گردایه $\mathrm{Mor}((M,p),(N,q))$ همه نگاشتهای هموار $f: M \to N$ با $f(p) = q$ را در نظر بگیرید. به این ترتیب، یک کاتگوری بنام کاتگوری منیفلدهای نقطه‌دار مشخص می‌گردد.

۱۰.۸ تعریف. دو شیء A و B از کاتگوری $\mathscr{C}$ را در صورتی ایزومورف[۲] گوییم که مورفیسمهای $f: A \to B$ و $g: B \to A$ چنان وجود داشته باشند که $g \circ f = \mathbb{1}_A$ و $f \circ g = \mathbb{1}_B$. در این حالت، f و g را ایزومورفیسم[۳] گفته و می‌نویسیم $A \simeq B$.

۱۰.۹ مثال. در کاتگوری مجموعه‌ها، ایزومورف بودن دو مجموعه، به معنی همعدد بودن آن دو است. در کاتگوری پیوسته، ایزومورف بودن فضاهای توپولوژی، به معنی همئومورف بودن آن دو است. در کاتگوری هموار، ایزومورف بودن منیفلدهای هموار، به معنی دیفئومورف بودن آن دو است. در کاتگوری فضاهای برداری حقیقی، ایزومورف بودن دو فضای برداری، به معنی همبعد بودن آنها است.

۱۰.۱۰ تعریف (فانکتور). منظور از فانکتور (کواریان)[۴] $\mathscr{F}$ از کاتگوری $\mathscr{C}$ به کاتگوری $\mathscr{D}$، نگاشتی است $\mathscr{F}: \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ که به هر شیء $A \in \mathscr{C}$ یک شیء $\mathscr{F}(A) \in \mathscr{D}$ و به هر مورفیسم $f: A \to B$ از C، مورفیسمی $\mathscr{F}: \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ از $\mathcal{D}$ را نظیر می‌کند، به قسمی که

۱) $\mathscr{F}(\mathbb{1}_A) = \mathbb{1}_{\mathscr{F}(A)}$؛

۲) $\mathscr{F}(f) \circ \mathscr{F}(g) = \mathscr{F}(f \circ g)$.

۱۰.۱۱ مثال (فانکتور مماس). ساخت فضای مماس، فانکتوری $\mathcal{T}$ است از کاتگوری منیفلدهای نقطه‌دار $\mathscr{M}an_0$ به کاتگوری فضاهای برداری $\mathscr{V}ec$. این فانکتور به هر منیفلد نقطه‌دار (M,p)، فضای برداری T_pM را نظیر می‌کند و به هر نگاشت هموار $f: (M,p) \to (N,q)$، نگاشت خطی $f_{*,p}: T_pM \to T_qN$ را نظیر می‌سازد.

اگر $\mathbb{1}_M: (M,p) \to (M,p)$ نگاشت همانی باشد، آنگاه $\mathscr{T}(\mathbb{1}_M) = \mathbb{1}_{M*,p} = \mathbb{1}_{T_pM}$ نیز نگاشت همانی است، و بنابراین اولین خاصیت فانکتور بودن برقرار می‌باشد. بعلاوه $(f \circ g)_{*,p} = f_{*,g(p)} \circ g_{*,p}$ و بنابراین، خاصیت دوم فانکتور بودن نیز برای $\mathscr{T}$ برقرار است.

۱۰.۱۲ گزاره. گیریم $\mathscr{F}: \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ فانکتوری از کاتگوری $\mathscr{C}$ به کاتگوری $\mathscr{D}$ است. اگر $f: A \to B$ ایزمورفیسمی در $\mathscr{C}$ باشد، آنگاه $\mathscr{F}(f): \mathscr{F}(A) \to \mathscr{F}(B)$ ایزومورفیسمی در $\mathscr{D}$ است.

توجه شود که اثبات نتایج ۸.۱۳ و ۸.۱۴ را با استفاده از فانکتورها می‌توان بازبینی نمود. فرض کنید $f: N \to M$ دیفئومورفیسم باشد، در این صورت (N,p) و $(M,f(p))$ دو شیء ایزومورف در کاتگوری

---

[۱] pointed category [۲] isomorphism [۳] isomorphic [۴] (covariant) functor [۵] continuous category [۶] smooth category

منفلدهای نقطه‌دار هستند. بنابه گزاره ۱۰.۱۲، فضاهای مماس T_pN و $T_{f(p)}M$ بایستی به عنوان فضای برداری ایزومورف باشند، و بنابراین همبعد هستند. از اینجا پایداری بعد منیفلدها نسبت به دیفئومورفیسم اثبات می‌گردد. 2

چنانچه در تعریف فانکتور تاثیر فانکتور موجب تعویض ترتیب ترکیب مورفیسمها شود، مفهوم جدیدی بنام فانکتور کواریان حاصل می‌گردد. به بیا دقیقتر

۱۰.۱۳ تعریف (فانکتور کنتراواریان). منظور از فانکتور کنتراواریان[۱] $\mathscr{F}$ از کاتگوری $\mathscr{C}$ به کاتگوری $\mathscr{D}$، نگاشتی است $\mathscr{F}:\mathscr{C}\to\mathscr{D}$ که به هر شیء $A\in\mathscr{C}$ یک شیء $\mathscr{F}(A)\in\mathscr{D}$ و به هر مورفیسم $f:A\to B$ از C، مورفیسمی $\mathscr{F}:\mathscr{C}\to\mathscr{D}$ از $\mathcal{D}$ را نظیر می‌کند، به قسمی که

۱) $\mathscr{F}(\mathbb{1}_A)=\mathbb{1}_{\mathscr{F}(A)}$؛

۲) $\mathscr{F}(f)\circ\mathscr{F}(g)=\mathscr{F}(g\circ f)$.

۱۰.۱۴ مثال. فانکتور کنتراواریانی از کاتگوری منیفلدهای هموار به کاتگوری $\mathbb{R}$−جبرهای تعویض‌پذیر معرفی می‌کنیم: به هر منیفلد هموار M، $\mathbb{R}$−جبر $\mathscr{F}(M)=C^\infty(M)$ توابع هموار بر M را نظیر می‌کنیم، و به هر نگاشت هموار $F:N\to M$، نگاشت قلاب $\mathscr{F}(F)=F^*:C^\infty(M)\to C^\infty(N)$ با ضابطه $F^*(h)=h\circ F$ را متناظر می‌سازیم. به سادگی می‌شود نشان داد که قلاب در شرایط زیر صدق می‌نماید:

i) $(\mathbb{1}_M)^*=\mathbb{1}_{C^\infty(M)}$

ii) اگر $F:N\to M$ و $G:M\to P$ نگاشتهایی هموار باشند، آنگاه

$$(G\circ F)^*=F^*\circ G^*:C^\infty(P)\to C^\infty(N).$$

بخش ۲.۱۰ فانکتور دوگان و فانکتور چندبرداری

گیریم V فضای برداری حقیقی باشد. یادآور می‌شویم که فضای دوگان V^* عبارت است از فضای برداری همه تابعکهای خطی بر V؛ بعبارت دیگر، توابع خطی $\alpha:V\to\mathbb{R}$. به صورت $V^*=\mathrm{Lin}(V,\mathbb{R})$ نیز می‌شود نوشت.

اگر V با بعد n بوده و $\{e_1,\cdots,e_n\}$ پایه‌ای برای آن باشد، آنگاه بر اساس گزاره ۳.۱، پایه‌ای $\alpha^1,\cdots,\alpha^n$ برای فضای دوگان v^* می‌توان معرفی نمود:

$$\alpha^i(e_j)=\delta^i_j,\qquad 1\le i,j\le n.$$

چون هر تابعک خطی بر V با مقادیرش بر عناصر پایه برای V مشخص می‌گردد، بنابراین این فرمولها α^i را به صورت یکتا مشخص می‌کنند.

[۱] contravariant functor

۱۰.۱۵ تعریف. هر نگاشت خطی $L : V \to W$ بین فضاهای برداری، نگاشتی خطی L^* بنام دوگان L، به صورت ذیل مشخص می‌کند: به هر تابعک خطی $\alpha : W \to \mathbb{R}$، تابعک خطی $L^*(\alpha) := \alpha \circ L$ را نظیر می‌کنیم:

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "L"] \arrow[dr, "L^*(\alpha)"'] & W \arrow[d, "\alpha"] \\ & \mathbb{R} \end{tikzcd}$$

بنابراین، نگاشت دوگان $L^* : W^* \to V^*$ ترتیب را عوض می‌کند!

۱۰.۱۶ گزاره (خاصیت فانکتوری دوگان). فرض کنید V، W و S فضای برداری حقیقی باشند. در این صورت

i) اگر $\mathbb{1}_V : V \to V$ نگاشت همانی بر V باشد، آنگاه $\mathbb{1}_V^* : V^* \to V^*$ نگاشت همانی بر V^* است.

ii) اگر $f : V \to W$ و $g : W \to S$ نگاشتهای خطی بین فضاهای برداری باشند، در این صورت $(g \circ f)^* = f^* \circ g^*$.

بر اساس این گزاره، ساخت دوگان $\mathscr{F} : (\,) \mapsto (\,)^*$ یک فانکتور کنتراواریان از کاتگوری فضاهای برداری بتوی خودش است: به ازای هر فضای برداری V، تعریف می‌کنیم $\mathscr{F}(V) = V^*$؛ و به ازای هر نگاشت خطی $f \in \mathrm{Lin}(V, W)$، تعریف می‌کنیم $\mathscr{F}(f) = f^* \in (W^*, V^*)$. در نتیجه، اگر $f : V \to W$ ایزومورفیسم باشد، آنگاه (بنا به گزاره ۱۰.۱۲) دوگانش $f^* : W^* \to V^*$ نیز ایزومورفیسم است.

۱۰.۱۷ تعریف. به ازاء هر عدد طبیعی k و هر نگاشت خطی $L : V \to W$ بین فضاهای برداری، نگاشت قلاب $L^* : \mathrm{Alt}_k(W) \to \mathrm{Alt}_k(V)$ را با ضابطه

$$(L^* f)(v_1, \cdots, v_k) = f(L(v_1), \cdots, L(v_k)),$$

تعریف می‌کنیم، که $f \in \mathrm{Alt}_k(W)$ و $v_1, \cdots, v_k \in V$.

به راحتی با استفاده از تعریف می‌توان نشان داد که L^* نگاشتی $\mathbb{R}-$خطی است.

۱۰.۱۸ گزاره. قلاب همبردارها توسط نگاشت خطی، دارای دو خاصیت فانکتوری به شرح زیر است:

i) اگر $\mathbb{1}_V : V \to V$ نگاشت همانی بر V باشد، آنگاه $\mathbb{1}_V^* : V^* \to V^*$ نگاشت همانی بر $\mathrm{Alt}_k(V)$ است.

ii) اگر $f : V \to W$ و $g : W \to S$ نگاشتهای خطی بین فضاهای برداری باشند، در این صورت $(g \circ f)^* = f^* \circ g^* : \mathrm{Alt}_k(S) \to \mathrm{Alt}_k(V)$.

چنانچه به هر فضای برداری V، فضای برداری $\mathrm{Alt}_k(V)$ همه $k-$بردارهای بر V را نظیر نموده و به هر نگاشت خطی $L : V \to W$ بین فضاهای برداری، نگاشت قلاب $\mathrm{Alt}_k(L) = L^* : \mathrm{Alt}_k(W) \to \mathrm{Alt}_k(V)$ را نظیر کنیم، به این ترتیب، به یک فانکتور Alt_k از کاتگوری فضاهای برداری بتوی خودش می‌رسیم.

در حالت $k = 1$، عملاً $\mathrm{Alt}_1(V) = V^*$ و $\mathrm{Alt}_1(L) = L^*$ نگاشت دوگان $L^* : W^* \to V^*$ است. بنابراین، فانکتور چندبرداری $\mathrm{Alt}_k(\,)$ تعمیم فانکتور دوگان $(\,)^*$ می‌باشد.

بخش ۳.۱۰ تمرینات

۱۰.۱ . ثابت کنید که اگر $F : N \to M$ دیفئومورفیسم بین منیفلدها باشد و $p \in M$، در این صورت $(F^{-1})_{*,F(p)} = (F_{*,p})^{-1}$.

۱۰.۲ . گزاره ۱۰.۳ را اثبات کنید.

۱۰.۳ . گزاره ۱۰.۵ را اثبات کنید.

۱۰.۴ . فرض کنید تبدیل خطی $L : V \to \bar{V}$ نسبت به پایه $\{e_1, \cdots, e_n\}$ برای V و پایه $\{\bar{e}_1, \cdots, \bar{e}_m\}$ برای $\bar{V}$ توسط ماتریس $A = [a^i_j]$ نشان داده می‌شود: $L(e_j) = \sum_i a^i_j \bar{e}_i$.
نشان دهید که اگر $\{\alpha^1, \cdots, \alpha^n\}$ و $\{\bar{\alpha}^1, \cdots, \bar{\alpha}^n\}$ پایه دوگان نظیر بترتیب برای V^* و $\bar{V}^*$ باشند، آنگاه $L^*(\bar{\alpha}^i) = \sum a^i_j \alpha^j$.

۱۰.۵ . الف) فرض کنید V و W فضاهای برداری بر هیات K با بعد احتمالاً بینهایت هستند. نشان دهید که اگر نگاشت خطی $L : V \to W$ پوشا باشد، آنگاه نگاشت دوگان $L^* : W^* \to V^*$ یکبیک است.
ب) فرض کنید V و W فضاهای برداری بر هیات K و با بعد متناهی هستند. نشان دهید که عکس حکم الف نیز درست است.

۱۰.۶ . گزاره ۱۰.۶ را اثبات کنید.

۱۰.۷ . نشان دهید که اگر $L : V \to W$ نگاشت خطی بر فضای برداری n–بعدی V باشد، آنگاه قلاب $L^* : \mathrm{Alt}_n(V) \to \mathrm{Alt}_n(V)$ به صورت ضرب عددی در دترمینان L است.

فصل ۱۱

رتبه نگاشت هموار

در این فصل به بررسی ساختار موضعی نگاشتهای هموار با استفاده از رتبه آنها می‌پردازیم. یادآور می‌شویم که رتبه نگاشت هموار $f : N \to M$ در نقطه $p \in N$، به صورت رتبه دیفرانسیلش df_p در نقطه p تعریف می‌گردد. دو حالت خاص مورد توجه بیشتری است:

۱) وقتی نگاشت f در نقطه‌ای با رتبه حداکثر است؛ و

۲) وقتی رتبه نگاشت f در همسایگی نقطه‌ای ثابت است.

گیریم $n = \dim N$ و $m = \dim M$. در حالتی که رتبه $f : N \to M$ در p حداکثر باشد، سه حالت ممکن است رخ دهد:

۱) اگر $n = m$، آنگاه بنابه قضیه تابع وارون، f دیفئومورفیسم موضعی[۱] در p است؛

۲) اگر $n \le m$، آنگاه رتبه ماکسیمال n است و f ایمرشن[۲] در p است؛

۳) اگر $n \ge m$، آنگاه رتبه ماکسیمال m است و f سابمرشن[۳] در p است؛

چون منیفلدها موضعاً اقلیدسی هستند، قضیه‌های در مورد رتبه نگاشتهای هموار بین فضاهای اقلیدسی (ضمیمه ب) را به راحتی به حالت نگاشتهای هموار بین منیفلدها می‌توان ترجمه نمود. بر این اساس از قضیه رتبه ثابت نگاشتهای هموار بر زیر مجموعه‌های باز فضاهای اقلیدسی، قضیه مشابهی برای منیفلدها حاصل می‌گردد که از شکل قبلی‌اش ساده‌تر نیز می‌باشد. سپس، محکی برای اینکه مجموعه ترازی بتواند زیرمنیفلد منظم باشد از آن نتیجه می‌گیریم؛ به این دلیل، آن را قضیه مجموعه تراز رتبه–ثابت می‌نامیم. یکی از نتایج قضیه رتبه ماکسیمال این است که اگر نگاشتی در یک نقطه با رتبه ماکسیمال باشد، آنگاه در یک همسایکی از آن نقطه چنین خواهد بود. در نتیجه، قضیه نگاشتهای با رتبه ماکسیمال عملا نتیجه‌ای از قضیه نگاشتهای با رتبه ثابت می‌باشد. بر اساس این قضیه می‌توان ساختار موضعی دیئومورفیسمهای

---

۱ local diffeomorphism ۲ immersion ۳ submersion

موضعی، ایمرشنها و سابمرشنها را بدست آورد. قضیه مجموعه تراز منظم که در بخش ۴.۹ مطرح گردید، حالت خاصی از این قضیه مجموعه تراز رتبه-ثابت می‌باشد.

بر اساس قضیه مجموعه تراز منظم، پیشنگاره[۴] یک مقدار منظم توسط یک نگاشت هموار، منیفلدی هموار می‌باشد. از سوی دیگر، نگاره یک نگاشت هموار در حالت کلی ممکن است ساختار جالبی نداشته باشد. به کمک قضیه ایمرشن، شرایطی را استخراج می‌کنیم که طی آنها نگاره یک نگاشت هموار می‌تواند منیفلدی هموار باشد.

بخش ۱.۱۱ قضیه رتبه ثابت

فرض کنید $f : N \to M$ نگاشتی هموار بین منیفلدها است، می‌خواهیم نشان دهیم که مجموعه تراز $f^{-1}(c)$ برای $c \in M$ ای بخصوص، منیفلد است. برای اینکه بتوانیم از قضیه مجموعه تراز منظم استفاده کنیم، لازم است دیفرانسیل f_* در هر نقطه از $f^{-1}(c)$ با رتبه ماکسیمال باشد. گاهی این شرط برقرار نیست، و حتی ممکن است گاهی برقرار باشد، ولی تحقیق آن کاری دشوار باشد. در چنین حالاتی، قضیه مجموعه تراز رتبه-ثابت می‌تواند مفید باشد؛ برای بکارگیری آن لازم نیست مقدار رتبه نگاشت را بدانیم، صرفاً اینکه نشان دهیم با رتبه ثابت است کفایت می‌کند.

چون منیفلدها موضعاً اقلیدسی هستند، قضیه رتبه ثابت برای فضاهای اقلیدسی (ضمیمه ب) را به راحتی به حالت نگاشتهای هموار بین منیفلدها می‌توان تعمیم داد.

۱.۱۱ قضیه رتبه ثابت. گیریم N و M منیفلدهای هموار با بعد بترتیب n و m بوده، و نگاشت هموار $f : N \to M$ در همسایگی‌ای از نقطه بخصوص $p \in N$ با رتبه ثابت k است. در این صورت چارتهای (U, ϕ) به مرکز در $p \in N$ و (V, ψ) به مرکز در $f(p) \in M$ چنان وجود دارند که در همسایگی‌ای از $\phi(p)$ داریم

$$\psi \circ f \circ \phi^{-1}(r^1, \cdots, r^n) = (r^1, \cdots, r^k, 0, \cdots, 0). \tag{۱.۱۱}$$

برهان : چارت $(\bar{U}, \bar{\phi})$ حول $p \in N$ و $(\bar{V}, \bar{\psi})$ حول $f(p) \in M$ را در نظر بگیرید. در این صورت $\bar{\psi} \circ f \circ \bar{\phi}^{-1}$ نگاشتی بین زیرمجموعه‌های باز از فضاهای اقلیدسی است. چون $\bar{\phi}$ و $\bar{\psi}$ دیفئومورفیسم هستند، رتبه $\bar{\psi} \circ f \circ \bar{\phi}^{-1}$ با رتبه f یکی است، و بنابراین در همسایگی‌ای از $\bar{\phi}(p) \in \mathbb{R}^n$ با رتبه ثابت k می‌باشد. بنابه قضیه رتبه ثابت برای فضاهای اقلیدسی، دیفئومورفیسمی G از یک همسایگی باز از $\bar{\phi}(p) \in \mathbb{R}^n$ و دیفئومورفیسمی F از یک همسایگی باز از $(\bar{\psi} \circ f)(p) \in \mathbb{R}^m$ چنان وجود دارند که

$$F \circ \bar{\psi} \circ f \circ \bar{\phi}^{-1} \circ G^{-1}(r^1, \cdots, r^n) = (r^1, \cdots, r^k, 0, \cdots, 0).$$

گیریم $\phi = G \circ \bar{\phi}$ و $\psi = F \circ \bar{\psi}$ و برهان تمام است. □

توجه شود که ممکن است در شکل استاندارد (۱.۱۱) تابع f در قضیه رتبه ثابت، هیچ صفری ظاهر نشود: اگر رتبه k با m برابر باشد، آنگاه

$$(\psi \circ f \circ \phi^{-1})(r^1, \cdots, r^n) = (r^1, \cdots, r^m).$$

[۴] preimage

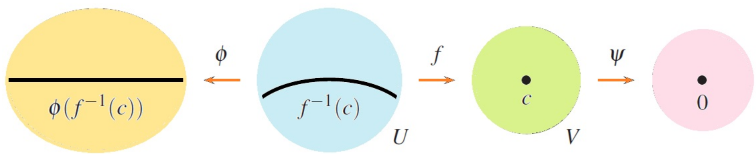
در قضیه مجموع تراز رتبه–ثابت که نتیجه‌ای ساده از این قضیه است، از اصطلاح **همسایگی یک مجموعه** استفاده شده است. منظور از همسایگی از زیرمجموعه A از منیفلد M، زیرمجموعه‌ای باز از M است که A را در بر دارد.

۱۱.۲ قضیه مجموعه تراز رتبه–ثابت[۱]. گیریم $f : N \to M$ نگاشتی هموار بین منیفلدها و $c \in N$. اگر f در همسایگی‌ای مجموعه تراز $f^{-1}(c) \subseteq N$ با رتبه ثابت k باشد، آنگاه $f^{-1}(c)$ زیرمنیفلد منظمی از N با نقصان بعد k می‌باشد.

برهان : گیریم p نقطه دلخواهی از $f^{-1}(c)$ است. بنابه قضیه رتبه ثابت، دستگاه مختصات موضعی $(U,\phi) = (U, x^1, \cdots, x^n)$ به مرکز در $p \in N$ و $(V,\psi) = (V, y^1, \cdots, y^m)$ به مرکز در $f(p) = c \in M$ چنان وجود دارند که

$$\psi \circ f \circ \phi^{-1}(r^1, \cdots, r^n) = (r^1, \cdots, r^k, 0, \cdots, 0).$$

این نشان می‌دهد که مجموعه تراز $(\psi \circ \phi^{-1})^{-1}$ با صفر قرار دادن مختصات $r^1, \cdots, r^k$ حاصل می‌گردد.



شکل ۱.۱۱: قضیه مجموه تراز رتبه–ثابت

نگاره مجموعه تراز $f^{-1}(c)$ تحت ϕ عبارت از مجموعه تراز $(\psi \circ \phi^{-1})^{-1}(0)$ می‌باشد (به شکل ۱.۱۱ توجه شود)، زیرا

$$\begin{aligned} \phi(f^{-1}(c)) &= \phi(f^{-1}(\psi^{-1}(0))) \\ &= (\psi \circ f \circ \phi^{-1})^{-1}(0). \end{aligned}$$

بنابراین، مجموعه تراز $f^{-1}(c)$ در U با صفر قرار دادن توابع مختصاتی $x^1, \cdots, x^k$ حاصل می‌گردد. این اثبات می‌کند که $f^{-1}(c)$ زیرمنیفلدی منظمی از N با نقصان بعد k است. □

۱۱.۳ مثال (گروه متعامد). گروه خطی عمومی $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ را در نظر گرفته، و فرض کنید I ماتریس همانی $n \times n$ باشد. زیرگروه متشکل از همه ماتریسهای A ای که $A^T A = I$ را گروه متعامد (n) می‌نامیم. با استفاده از قضیه رتبه ثابت، ثابت می‌کنیم که (n) زیرمنیفلدی منظم از $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ می‌باشد.

برای این منظور نگاشت $f : \mathrm{GL}(n,\mathbb{R}) \to \mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ با ضابطه $f(A) = A^T A$ را در نظر می‌گیریم. در این صورت، (n) مجموعه تراز $f^{-1}(I)$ است. به ازای هر دو ماتریس $A, B \in \mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$، ماتریس

[۱] constant rank theorem)

منحصر بفرد $C \in \mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ چنان وجود دارد که $B = AC$. ضرب از چپ و از راست در C را بترتیب با $r_C : \mathrm{GL}(n,\mathbb{R}) \to \mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ و $\ell_C : \mathrm{GL}(n,\mathbb{R}) \to \mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ نشان می‌دهیم. چون

$$\begin{aligned} f(AC) &= (AC)^T AC \\ &= C^T A^T AC \\ &= C^T f(A) C, \end{aligned}$$

بنابراین $(f \circ r_C)(A) = (\ell_{C^T} \circ r_C \circ f)(A)$. چون این موضوع برای همه $A \in \mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ ها درست است، بنابراین

$$f \circ r_C = \ell_{C^T} \circ r_C \circ f.$$

حال، با استفاده از قاعده زنجیره‌ای مشتق، داریم

$$f_{*,AC} \circ (r_C)_{*,A} = (\ell_{C^T})_{*,A^T AC} \circ (r_C)_{*,A^T A} \circ f_{*,A}. \tag{۲.۱۱}$$

چون نگاشتهای ضرب از چپ و ضرب از راست دیفئومورفیسم هستند، دیفرانسیل آنها ایزومرفیسم می‌باشد. اما، در ترکیب با ایزومورفیسم‌ها، رتبه نگاشتهای خطی تغییر نمی‌کند. در نتیجه، از (۲.۱۱) داریم

$$\mathrm{rank}(f_{*,AC}) = \mathrm{rank}(f_{*,A}).$$

چون AC و A نقاط دلخواهی از $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ فرض شده بودند، این اثبات می‌کند که دیفرانسیل f بر کل $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ با رتبه ثابت است. پس، بنابه قضیه مجموعه تراز رتبه-ثابت، گروه متعامد $(n) = f^{-1}(I)$ زیرمنیفلدی منظم از $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ می‌باشد.

۱۱.۴ **یادداشت.** اگر $f : N \to M$ نگاشتی با رتبه ثابت در یک همسایگی از نقطه $p \in N$ باشد، شکل موضعی نرمال آن (۱.۱۱) نسبت به چارتهای $(U,\phi) = (U, x^1, \cdots, x^n)$ و $(V,\psi) = (V, y^1, \cdots, y^m)$ در قضیه رتبه ثابت (قضیه ۱۱.۱) را بر اساس مختصات موضعی $(x^1, \cdots, x^n)$ و $(y^1, \cdots, y^m)$ می‌توان بیان نمود:

ابتدا، یادآور می‌شویم که به ازای هر $q \in U$ ای

$$\phi(q) = (x^1(p), \cdots, x^n(p)) \quad \text{و} \quad \psi(f(q)) = (y^1(f(q)), \cdots, y^m(f(q))).$$

در نتیجه

$$\begin{aligned} (y^1(f(q)), \cdots, y^m(f(q))) &= \psi(f(q)) \\ &= (\psi \circ f \circ \phi^{-1})(\phi(q)) \\ &= (\psi \circ f \circ \phi^{-1})(x^1(q), \cdots, x^n(q)) \\ &= (x^1(q), \cdots, x^n(q), 0, \cdots, 0) \qquad (\text{بنا به } (۱.۱۱)) \end{aligned}$$

بنابراین، بعنوان توابع بر U داریم

$$(y^1 \circ f, \cdots, y^m \circ f) = (x^1, \cdots, x^k, 0, \cdots, 0). \tag{۳.۱۱}$$

معادله (۳.۱۱) را به این صورت نیز می‌توانیم بنویسیم:

نگاشت f نسبت به چارتهای $(U, x^1, \cdots, x^n)$ و $(V, y^1, \cdots, y^m)$ به صورت ذیل است:

$$(x^1, \cdots, x^n) \mapsto (x^1, \cdots, x^k, 0, \cdots, 0).$$

بخش ۲.۱۱ قضیه ایمرشن و قضیه سابمرشن

در این بخش نشان می‌دهیم که چرا ایمرشنها و سابمرشنها با رتبه ثابتند. قضیه رتبه ثابت، صورت نرمال موضعی برای ایمرشنها و سابمرشنها فراهم می‌سازد، که به آنها بترتیب قضیه ایمرشن و سابمرشن گفته می‌شود. در ادامه، با استفاده از قضیه سابمرشن و قضیه مجموعه تراز رتبه–ثابت، دو اثبات جالب برای قضیه مجموعه تراز منظم ارائه می‌دهیم.

یک نگاشت هموار $f : N \to M$ در نظر بگیرید. گیریم $(U, \phi) = (U, x^1, \cdots, x^n)$ چارتی حول $p \in N$ و $(V, \psi) = (V, y^1, \cdots, y^m)$ چارتی حول $f(p) \in M$ است. برای مختص i ام f نسبت به چارت $(V, y^1, \cdots, y^m)$ از نماد $f^i = y^i \circ f$ استفاده می‌کنیم. نگاشت خطی مشتق $f_{*,p}$ نسبت به چارتهای (U, ϕ) و (V, ψ) توسط ماتریس ژاکوبی $[\partial f^i / \partial x^j (p)] \in \mathbb{R}^{m \times n}$ نمایش داده می‌شود (به گزاره ۸.۱۸ توجه شود). در نتیجه

$$\begin{aligned} f_{*,p} \text{ یکبیک است} \quad &\Leftrightarrow \quad \operatorname{rank}\left[\frac{\partial f^i}{\partial x^j(p)}\right] = n \text{ و } n \le m, \\ f_{*,p} \text{ پوشا است} \quad &\Leftrightarrow \quad \operatorname{rank}\left[\frac{\partial f^i}{\partial x^j(p)}\right] = m \text{ و } n \ge m. \end{aligned} \tag{۴.۱۱}$$

رتبه ماتریس برابر تعداد سطرهای مستقل خطی ماتریس می‌باشد؛ همچنین، تعداد ستونهای مستقل خطی است. بنابراین، ماکزیموم رتبه یک ماتریس $m \times n$ می‌تواند حداکثر برابر مینیموم m و n باشد. به این ترتیب، از (۴.۱۱) نتیجه می‌گردد که ایمرشن بودن و یا سابمرشن بودن f در این نقطه p معادل با ماکسیمال بودن رتبه $\operatorname{rank}[\partial f^i / \partial x^j (p)]$ است.

اینکه رتبه در نقطه‌ای ماکسیمال باشد، یک خاصیت باز است؛ به این تعبیر که مجموعه

$$D_{\max}(f) := \left\{ p \in U \,\middle|\, f_{*,p} \text{ دارای رتبه ماکسیمال } p \text{ است} \right\}$$

زیرمجموعه‌ای باز از U است. بنابراین، متمم $U - D_{\max}(f)$ با ضابطه $\operatorname{rank}[\partial f^i / \partial x^j (p)] < k$ مشخص می‌گردد، که معادل با صفر شدن دترمینان همه زیرماتریسهای $k \times k$ از ماتریس $[\partial f^i / \partial x^j (p)]$ می‌باشد. چون مجموعه صفرهای هر خانواده متناهی از توابع پیوسته، بسته است، بنابراین $U - D_{\max}(f)$ نیز بسته است. در نتیجه $D_{\max}(f)$ باز است. بخصوص، اگر f با رتبه ماکسیمال در p باشد، آنگاه در همسایگی بازی از p نیز چنین خواهد بود. به این ترتیب، گزاره زیر اثبات شد.

۱۱.۵ گزاره. گیریم N و M منیفلد و $f : N \to M$ نگاشتی هموار باشد. در این صورت

الف) اگر f در نقطه‌ای $p \in N$ ایمرشن باشد، آنگاه در همسایگی‌ای از آن نقطه ایمرشن است (با رتبه ثابت $n = \dim N$ است)؛ و

ب) اگر f در نقطه‌ای $p \in N$ ایمرشن باشد، آنگاه در همسایگی‌ای از آن نقطه ایمرشن است (با رتبه ثابت $m = \dim M$ است).

۱۱.۶ **مثال.** نگاشت $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ با ضابطه $f(x,y) = (x^2y, xy^2)$ و نقطه $p = (x,y) \in \mathbb{R}^2$ را در نظر بگیرید. در این صورت

$$J_f(p) = \begin{pmatrix} 2xy & x^2 \\ y^2 & 2xy \end{pmatrix},$$

در نتیجه، $\operatorname{rank}(f_{*,p}) < 2$ اگر و تنها اگر $\det(J_f(p)) = 0$. بعبارت دیگر، اگر و تنها اگر $x = 0$ یا $y = 0$. یعنی این نگاشت بر مجموعه باز $\mathbb{R}^2 - \{(x,0) | x \in \mathbb{R}\} \cup \{(0,y) | y \in \mathbb{R}\}$ با رتبه ماکسیمال است.

۱۱.۷ **مثال.** تابع $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ با ضابطه $f(x,y) = (x,0,0)$ را در نظر بگیرید. رتبه این نگاشت در همه جا یک است، ولی در هیچ نقطه‌ای با رتبه ماکسیمال نیست (و بنابراین، نه ایمرشن است و نه سابمرشن)! یعنی، عکس قضیه بالا در حالت کلی درست نیست. قضیه زیر حالت ساده‌ای از قضیه رتبه ثابت می‌باشد:

۱۱.۸ **گزاره.** گیریم M و N منیفلدهای هموار با بعد بترتیب n و m، و $f : N \to M$ نگاشتی هموار بین آنها باشد. در این صورت

۱) (قضیه ایمرشن) اگر f در نقطه‌ای $p \in N$ ایمرشن باشد، آنگاه چارتی (U, ϕ) به مرکز در $p \in N$ و چارتی (V, ψ) به مرکز در $f(p) \in M$ چنان وجود دارند که در همسایگی‌ای از $\phi(p)$ رابطه

$$(\psi \circ f \circ \phi^{-1})(r^1, \cdots, r^n) = (r^1, \cdots, r^n, 0, \cdots, 0),$$

برقرار است؛ و

۲) (قضیه سابمرشن) اگر f در نقطه‌ای $p \in N$ سابمرشن باشد، آنگاه چارتی (U, ϕ) به مرکز در $p \in N$ و چارتی (V, ψ) به مرکز در $f(p) \in M$ چنان وجود دارند که در همسایگی‌ای از $\phi(p)$ رابطه

$$(\psi \circ f \circ \phi^{-1})(r^1, \cdots, r^m, r^{m+1}, \cdots, r^n) = (r^1, \cdots, r^m),$$

برقرار است.

۱۱.۹ نتیجه. هر سابمرشن $f : N \to M$ بین منیفلدها، نگاشتی باز است.

برهان : گیریم W زیرمجموعه‌ای باز از N است. لازم است نشان دهیم که نگاره‌اش $f(W)$ در M باز است. برای این منظور، نقطه‌ای $f(p)$ در $f(W)$ انتخاب می‌کنیم، $p \in W$. بنابه قضیه سابمرشن، f موضعاً به صورت نگاشت تصویر است. چون نگاشتهای تصویر، بازند (مساله ۷ از ضمیمه الف)، بنابراین همسایگی باز U از p در W چنان وجود دارد که $f(U)$ در M باز است. به وضوح $f(p) \in f(U) \subseteq f(W)$. چون $f(p) \in f(W)$ دلخواه است، در نتیجه $f(W)$ در M باز می‌باشد و برهان تمام است.
□

قضیه مجموعه تراز منظم (قضیه ۹.۹) را به سادگی از قضیه سابمرشن می‌توان نتیجه گرفت.

اثبات دوم قضیه مجموعه تراز منظم: فرض کنید یک نگاشت هموار $f : N \to M$ بین منیفلدها در اختیار باشد. در این صورت، مجموعه تراز $f^{-1}(c)$ منظم است اگر و تنها اگر f در هر یک نقاط $p \in f^{-1}(c)$ سابمرشن باشد. یکی از این $p \in f^{-1}(c)$ ها را در نظر گرفته و فرض کنید (U,ϕ) و (V,ψ) چارتهای تضمین شده در قضیه سابمرشن باشند، در نتیجه $\psi \circ \phi^{-1} = \pi : \mathbb{R}^n \supseteq \phi(U) \to \mathbb{R}^m$ نگاشت تصویر بر روی m مختص اول است: $\pi(r^1, \cdots, r^n) = (r^1, \cdots, r^m)$. بنابراین، بر U داریم

$$
\begin{aligned}
\psi \circ f &= \pi \circ \phi \\
&= (r^1, \cdots, r^m) \circ \phi \\
&= (m^1, \cdots, x^m).
\end{aligned}
$$

در نتیجه

$$
\begin{aligned}
f^{-1}(c) &= f^{-1}(\phi^{-1}(0)) \\
&= (\psi \circ f)^{-1}(0) \\
&= Z(\psi \circ f) \\
&= Z(x^1, \cdots, x^m),
\end{aligned}
$$

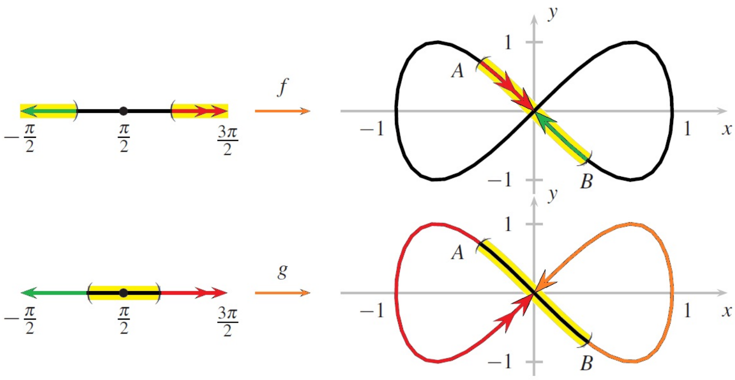
که نشان می‌دهد مجموعه تراز $f^{-1}(c)$ نسبت به چارت $(U, x^1, \cdots, x^n)$ به صورت صفر قرار ادن m تابع مختصاتی $x^1, \cdots, x^m$ معرفی می‌گردد. بنابراین، $(U, x^1, \cdots, x^n)$ یک چارت موافق برای N نسبت به $f^{-1}(c)$ می‌باشد. 2 چون قضیه سابمرشن حالت خاصی از قضیه رتبه ثابت است، چندان دور از انتظار نیست که قضیه مجموعه تراز منظم نیز حالت خاصی از قضیه مجموع تراز رتبه–ثابت باشد.

اثبات سوم قضیه مجموعه تراز منظم: نگاشت هموار $f : N \to M$ در هر نقطه از مجموعه تراز منظم $f^{-1}(c)$ با رتبه ماکسیمال m است. چون مجموعه نقاط با رتبه ماکسیمال F باز است، همسایگی بازی از مجموعه تراز منظم $f^{-1}(c)$ وجود دارد که f بر آن با رتبه ماکسیمال m می‌باشد. بنابه قضیه مجموعه تراز رتبه–ثابت (قضیه ۱۱.۲)، $f^{-1}(c)$ زیرمنیفلد منظمی از N است. 2

بخش ۳.۱۱ زیرمنیفلد ایمرز و نگاره نگاشت هموار

با یک تعریف آغاز می‌کنیم.

۱۱.۱۰ تعریف (زیرمنیفلد ایمرز). نگاره $f(N)$ یک ایمرشن یکبیک $f : N \to M$ را اصطلاحاً زیرمنیفلد ایمرز[۱] M می‌گویند. از این پس، فرض بر این است که توپولوژی بر $f(N)$ توسط f فراهم می‌شود. به این معنی که، $U \subseteq f(N)$ باز است اگر و تنها اگر $f^{-1}(U) \subseteq N$ باز باشد. توجه شود که احتمال دارد این توپولوژای با توپولوژی القائی از M بر $f(N)$ متفاوت باشد.



شکل ۲.۱۱: شکل بینهایت به عنوان نگاره دو ایمرشن یکبیک.

۱۱.۱۱ مثال (شکل بینهایت). شکل بینهایت ۲.۱۱ نگاره ایمرشن یکبیک

$$f : (-\pi/2, 3\pi/2) \to \mathbb{R}^2, \qquad f(t) = (\cos t, \sin(2t)),$$

است. بنابراین، شکل بینهایت یک زیرمنیفلدی ایمرز از $\mathbb{R}^2$ است. شکل بینهایت زیرمنیفلد منظم نیست. زیرا، اگر زیر منیفلد منظم باشد، آنگاه باید همسایگی‌ای از نقطه $(0,0)$ وجود داشته باشد که با بازه‌ای باز از $x-$محور در $\mathbb{R}^2$ همئومورف باشد. اما، این محال است؛ زیرا، چنانچه همسایگی بازی U باندازه کوچک از $(0,0)$ در نظر بگیریم، باید تصویر عکس آن توسط f در N باز باشد. بخصوص، بایستی نگاشت

$$f|_{(N-\{\pi/2\})\cap V} : (N - \{\pi/2\}) \cap V \to (f(N) - \{(0,0)\}) \cap U$$

همئومورفیسم باشد، در حالی که $(N - \{\pi/2\}) \cap V$ سه مولفه همبندی دارد و $(f(N) - \{(0,0)\}) \cap U$ چهار مولفه همبندی دارد.

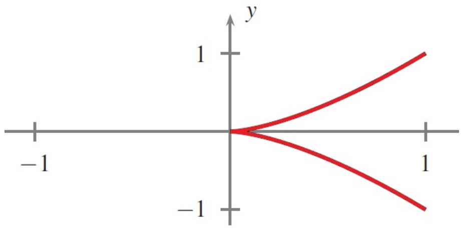
این مجموعه را به صورت دیگری نیز می‌توان به شکل نگاره یک ایمرشن نوشت. کافی است ایمرشن یکبیک

$$g : (-\pi/2, 3\pi/2) \to \mathbb{R}^2, \qquad g(t) = (\cos t, -\sin(2t)),$$

[۱] immersed submanifold

را در نظر بگیریم (به شکل ۲.۱۱ توجه شود). این دو ایمرشن ساختارهای متفاوتی را بر شکل بینهایت القاء می‌کنند. برای مشاهده این مطلب، پاره خط باز از A تا B از شکل بینهایت را در نظر بگیرید. نسبت به توپولوزی صادره توسط g، این پاره‌خط باز، (از نظر توپولوژی) باز است؛ در حالی که نسبت به توپولوژی صادره توسط f، دارای نقطه چسبیده غیر درونی $f(\pi/2)$ است، لذا باز نیست.

۱۱.۱۲ مثال. فرض کنید $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2$ با ضابطه $f(t)=(t^2,t^3)$ است. چون $t\mapsto t^3$ یکبیک است، f نیز یکبیک است. چون $f'(0)=(0,0)$، دیفرانسیل $f_{*,0}:T_0\mathbb{R}\to T_{(0,0)}\mathbb{R}^2$ نگاشت صفر است، و بنابراین یکبیک نیست؛ پس f در 0 ایمرشن نیست. نگاره آن منحنی مکعبی نوک‌تیز $y^2=x^3$ است (به شکل ۳.۱۱ توجه شود). پس، ممکن است نگاشتی ایمرشن نباشد اما یکبیک باشد! نتیجه اینکه، منحنی مکعبی نوک‌تیز، زیرمنیفلد ایمرز نیست.



شکل ۳.۱۱: منحنی مکعبی نوک‌تیز نگاره یک نگاشت یکبیک و غیر ایمرشن است.

۱۱.۱۳ مثال. فرض کنید $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2$ با ضابطه $f(t)=(t^2-1,t^3-t)$ است. چون معادله $f'(t)=(2t,3t^2-1)=(0,0)$ بر حسب t جواب ندارد، دیفرانسیل $f_{*,0}:T_0\mathbb{R}\to T_{(0,0)}\mathbb{R}^2$ یکبیک است، و بنابراین f ایمرشن می‌باشد. f یکبیک نیست، زیرا $f(1)=f(-1)$ برای مشخص کردن معادلات معرف نگاره $f(N)$، گیریم $x=t^2-1$ و $y=t^3-t$. در این صورت $y=t(t^2-1)=tx$؛ در نتیجه $y^2=t^2x^2=(x+1)^2x^2$. بنابراین، نگاره f منحنی مکعبی گرهی $y^2=(x+1)^2x^2$ است (به شکل ۴.۱۱ توجه شود). پس، ممکن است نگاشتی ایمرشن باشد اما یکبیک نباشد! باز هم، نتیجه می‌گیریم که منحنی گرهی زیرمنیفلد ایمرشن نیست.

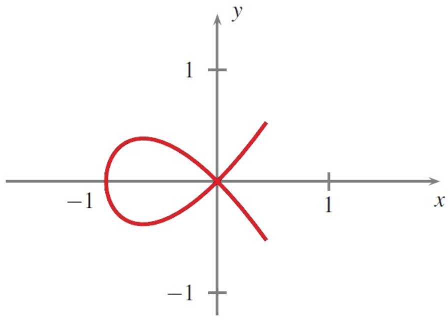
۱۱.۱۴ تعریف (نشاننده). نگاشت هموار $f:N\to M$ را در صورتی نشاننده[۱] گویند که

۱) ایمرشن یکبیک باشد، و

۲) اگر نگاره‌اش $f:N\to f(N)$ با توپولوژی زیرفضایی (که از M به ارث می‌برد) همراه شود، آنگاه f همئومورفیسمی از N بروی $f(N)$ باشد.

توجه شود که شرط یکبیک نودن، از شرط (۲) به صورت خودکار نتیجه می‌گردد.

[۱] embedding

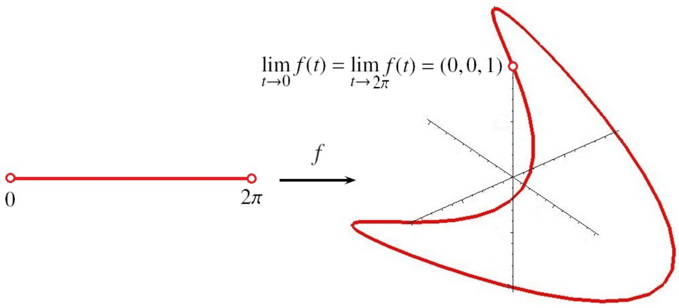


شکل ۴.۱۱: منحنی مکعبی گرهی نگاره نگاشتی است که ایمرشن است، ولی یکبیک نیست.

۱۱.۱۵ **مثال.** فرض کنید $f:\mathbb{R}\subset(0,2\pi)\to\mathbb{R}^3$ با ضابطه $f(t)=(\sin(t),\sin(2t),\cos(t))$ است. چون معادله

$$f'(t)=(\cos(t),2\cos(2t),-\sin(t))=(0,0)$$

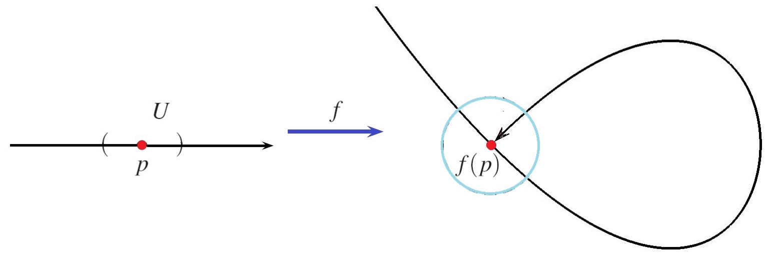
بر حسب t جواب ندارد، دیفرانسیل $f_{*,t}:T_t\mathbb{R}\to T_{f(t)}\mathbb{R}^3$ یکبیک است، و بنابراین f ایمرشن می‌باشد. بسادگی ملاحظه می‌شود که f یکبیک است. f نشاننده نیز هست (به شکل ۵.۱۱ توجه شود).



شکل ۵.۱۱: یک نشاننده در فضا

۱۱.۱۶ **مثال.** فرض کنید $f:\mathbb{R}\subset(-1,2)\to\mathbb{R}^2$ با ضابطه $f(t)=(1-t^2,t^3-t)$ است. چون معادله $f'(t)=(-2t,3t^2-1)=(0,0)$ بر حسب t جواب ندارد، دیفرانسیل $f_{*,t}:T_t\mathbb{R}\to T_{f(t)}\mathbb{R}^2$ یکبیک است، و بنابراین f ایمرشن می‌باشد. بسادگی ملاحظه می‌شود که f یکبیک است. اما، f نشاننده نیست؛ بعبارت دیگر، نگاره $M=f(-1,2)$ به همراه توپولوژی القایی از $\mathbb{R}^2$ توسط f با $N=(-1,2)$ همئومورف نیست. زیرا، (به فرض خلف) اگر همئومورفیسم باشد، نقطه $p=(0,0)\in M$ را در نظر بگیرید. روشن است که $f(1)=p$ و همچنین $\lim_{t\to-1}f(t)=p$. باید همسایگی‌های باز $0\in V\subset N$ و $p\in U\subset M$ یافت شوند که $f(U)=V$. با حذف $t=0$ از U، و متناظر با آن، حذف p از U، باید مجموعه‌های همئومورف حاصل شود، که چنین نیست! در واقع $U-\{0\}$ دو مولفه همبندی دارد، در

حالی که $V-\{p\}$ سه مولفه همبندی دارد. پس f همئومورفیسم نیست. یعنی، f نشاننده نیست. یعنی، ممکن است نگاشتی ایمرشن یکبیک باشد، ولی نشاننده نباشد (به شکل ۶.۱۱ توجه شود). در مثالهای



شکل ۶.۱۱: ایمرشن یکبیکی که نشاننده نیست.

بالا مشهود است که زیرمنیفلدهای ایمرز دارای مشکلات فراوان هستند. حتی ممکن است زیرمنیفلد ایمرز با توپولوژی صادره توسط ایمرشن‌اش، حتی منیفلد نباشد (نظیر نگاره نگاشت f از مثال ۱۱.۲۳). قضیه زیر تا حدودی می‌تواند از نگرانی در این مورد بکاهد.

۱۱.۱۷ قضیه. اگر $f: N \to M$ نشاننده باشد، آنگاه نگاره $f(N)$ زیرمنیفلدی منظم از M است.

برهان : گیریم $p \in N$. بنابه قضیه ایمرشن ۱۱.۸، مختصات موضعی $(U, x^1, \cdots, x^n)$ حول p و $(V, y^1, \cdots, y^m)$ حول $f(p)$ چنان وجود دارند که $f: U \to V$ به شکل

$$(x^1, \cdots, x^n) \longmapsto (x^1, \cdots, x^n, 0, \cdots, 0)$$

است. بنابراین، $f(U)$ در V با صفر قرار دادن توابع مختصاتی $x^1, \cdots, x^n$ مشخص می‌گردد. این به تنهایی ثابت نمی‌کند که $f(N)$ زیرمنیفلد منظم است، زیرا ممکن است $V \cap f(N)$ بزرگتر از $f(U)$ باشد. لازم است نشان دهیم که مجموعه $f(N)$ در همسایگی‌ای از $f(p)$ در V با صفر قرار دادن $m-n$ تابع مختصاتی حاصل می‌گردد.

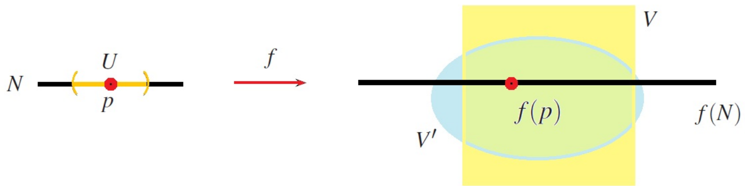
چون $f(N)$ به همراه توپولوژی زیرفضایی با N همئومورف است، نگاره $f(U)$ در $f(N)$ باز است. بنابه تعریف توپولوژی زیرفضایی، مجموعه‌ای باز V' در M چنان وجود دارد که $V' \cap f(N) = f(U)$ (به شکل ۷.۱۱ توجه شود). اکنون، در $V \cap V'$ داریم

$$V \cap V' \cap f(N) = V \cap f(U) = f(U),$$

و لذا $f(U)$ با صفر قرار دادن مختصات $y^{n+1}, \cdots, y^m$ مشخص می‌گردد. در نتیجه، $(V \cap V', y^1, \cdots, y^m)$ یک چارت موافق شامل $f(p)$ برای $f(N)$ است. چون $f(p)$ نقطه‌ای دلخواه از $f(N)$ بود، این اثبات می‌کند که $f(N)$ زیرمنیفلد منظمی از M می‌باشد. □

عکس این قضیه نیز برقرار است.

۱۱.۱۸ قضیه. اگر N زیرمنیفلد منظمی از M باشد، آنگاه نگاشت احتوی $i: N \hookrightarrow M$ زیرمنیفلدی منظم از M است.



شکل ۷.۱۱: نگاره نشاننده، زیرمنیفلد منظم است.

برهان : چون هر زیرمنیفلد منظم دارای توپولوژی زیرفضایی است و $i(N)$ نیز توپولوژی زیرفضایی دارد، $i : N \hookrightarrow i(N)$ همئومورفیسم است. کافی است نشان دهیم که $i : N \hookrightarrow M$ ایمرشن است.

برای این منظور، گیریم $p \in N$. چارتی موافق $(V, y^1, \cdots, y^n, y^{n+1}, \cdots, y^m)$ برای M حول p چنان اختیار می‌کنیم که $V \cap N$ مجموعه صفر مختصات $y^{n+1}, \cdots, y^m$ باشد.

نگاشت احتوی i نسبت به چارت $(V \cap N, y^1, \cdots, y^n)$ برای N و $(V, y^1, \cdots, y^m)$ برای M به صورت $(y^1, \cdots, y^n) \mapsto (y^1, \cdots, y^n, 0, \cdots, 0)$ بیان می‌شود، که این بیانگر ایمرشن i می‌باشد. □

در برخی منابع نگاره یک نشاننده را **زیرمنیفلد نشانده شده** می‌نامند. بر این اساس، اثبات شد که

۱۱.۱۹ **نتیجه**. زیرمنیفلد منظم درست به معنی زیرمنیفلد نشانده شده است.

بخش ۴.۱۱ نگاشت هموار بتوی یک زیرمنیفلد

فرض کنید $f : N \to M$ نگاشت همواری است که نگاره آن $f(N)$ در زیرمجموعه $S \subset M$ قرار دارد. اگر S منیفلد باشد، آنگاه آیا نگاشت القایی $\tilde{f} : N \to S$ نیز هموار است؟ این سوال زیرکانه تر از آنی است که به نظر می‌رسد! در واقع، پاسخ به این بستگی دارد که S زیرمنیفلد منظم M باشد و یا خیر.

۱۱.۲۰ **مثال**. ایمرشنهای یکبیک $f, g : I \to \mathbb{R}^2$ از مثال ۱۱.۲۳ را در نظر بگیرید، که $I = (-\pi/2, 3\pi/2) \subset \mathbb{R}$. گیریم S شکل بینهایت در $\mathbb{R}^2$ باشد که دارای ساختار زیرمنیفلد ایمرز حاصل از g است. چون نگاره نگاشت هموار $f : I \to \mathbb{R}^2$ در S قرار دارد، نگاشتی $\tilde{f} : I \to S$ حاصل می‌گردد. بازه باز از A تا B در شکل ۲.۱۱ همسایگی بازی از مبداء $(0,0)$ در S می‌باشد. نگاره وارون آن تحت $\tilde{f}$ نقطه $\pi/2$ را به عنوان نقطه‌ای تنها در بر دارد، و بنابراین باز نیست. این نشان می‌دهد که با اینکه $f : I \to \mathbb{R}^2$ هموار است، نگاشت القایی $\tilde{f} : I \to S$ حتی پیوسته نیست، چه رسد به اینکه هموار باشد.

۱۱.۲۱ **قضیه**. فرض کنید $f : N \to M$ هموار بوده و نگاره آن در زیرمجموعه $S \subseteq M$ قرار داشته باشد. اگر S زیرمنیفلد منظمی از M باشد، آنگاه نگاشت القایی $\tilde{f} : N \to S$ نیز هموار است.

برهان : فرض کنید $p \in N$ و بعد N، M و S را بترتیب n، m و s بگیریم. بنابه فرض قضیه $f(p) \in S \subseteq M$. چون S زیرمنیفلد منظمی از M است، چارت مختصاتی موافقی $(V, \psi) = (V, y^1, \cdots, y^m)$ برای M حول $f(p)$ چنان وجود دارد که $S \cap V$ مجموعه صفرهای $y^{s+1}, \cdots, y^m$ می‌باشد؛ و از نگاشت

مختصاتی $\psi_S = (y^1, \cdots, y^s)$ برای S می‌توانیم استفاده کنیم. بنابه فرض پیوستگی f، همسایگی بازی U از p چنان می‌توانیم انتخاب کنیم که $f(U) \subseteq V$. در این ثورت $f(U) \subseteq V \cap S$ و بنابراین به ازای هر $q \in U$ ای

$$(\psi \circ f)(q) = (y^1(f(q)), \cdots, y^s(f(q)), 0, \cdots, 0).$$

چون توابع $y^1 \circ f, \cdots, y^s \circ f$ بر U هموارند، بنابه گزاره ۶.۱۷، $\tilde{f}$ بر U هموار است و در نتیجه، در p هموار است. چون p نقطه دلخواهی از N بود، نگاشت $\tilde{f} : N \to S$ هموار است. □

۱۱.۲۲ مثال (نگاشت ضرب در گروه $\mathrm{SL}(n, \mathbb{R})$). نگاشت ضرب

$$\mu : \mathrm{GL}(n, \mathbb{R}) \times \mathrm{GL}(n, \mathbb{R}) \to \mathrm{GL}(n, \mathbb{R}), \qquad (A, B) \mapsto AB,$$

هموار است، زیرا توابع مولفه‌ای آن $(AB)_{i,j} = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj}$ چند جمله‌ای از توابع مختصاتی a_{ik} و b_{kj} هستند و بنابراین هموارند. (همه چند جمله‌ایهای بر $\mathbb{R}^n$ هموارند.) اما، با همین استدلال نمی‌شود همواری نگاشت ضرب

$$\bar{\mu} : \mathrm{SL}(n, \mathbb{R}) \times \mathrm{SL}(n, \mathbb{R}) \to \mathrm{SL}(n, \mathbb{R}), \qquad (A, B) \mapsto AB,$$

را استنتاج نمود! چرا که $\{a_{ij}\}_{1 \le i,j \le n}$ دیگر دستگاه مختصات بر $\mathrm{SL}(n, \mathbb{R})$ نیست؛ تعدادشان خیلی زیاد است (به مساله ۶ از فصل ۱۱ توجه شود).

چون $\mathrm{SL}(n, \mathbb{R}) \times \mathrm{SL}(n, \mathbb{R})$ زیرمنیفلد منظمی از $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R}) \times \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ است، بنابه قضیه ۱۱.۲۱، نگاشت احتوی

$$i : \mathrm{SL}(n, \mathbb{R}) \times \mathrm{SL}(n, \mathbb{R}) \hookrightarrow \mathrm{GL}(n, \mathbb{R}) \times \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$$

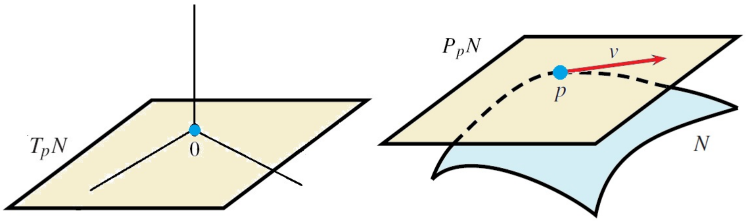
هموار می‌باشد؛ بنابابن، ترکیب

$$\mu \circ i : \mathrm{SL}(n, \mathbb{R}) \times \mathrm{SL}(n, \mathbb{R}) \hookrightarrow \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$$

نیز هموار است. چون نگاره $\mu \circ i$ در $\mathrm{SL}(n, \mathbb{R})$ قرار دارد و چون $\mathrm{SL}(n, \mathbb{R})$ زیرمنیفلد منظمی از $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ می‌باشد (به مثال ۹.۱۶ توجه شود)، از قضیه ۱۱.۲۱ نتیجه می‌گیریم که نگاشت القایی $\bar{\mu} : \mathrm{SL}(n, \mathbb{R}) \times \mathrm{SL}(n, \mathbb{R}) \to \mathrm{SL}(n, \mathbb{R})$ هموار است.

بخش ۵.۱۱ فضای مماس به ابر رویه‌های تراز در $\mathbb{R}^n$

فرض کنید $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ نگاشتی هموار و $N = f^{-1}(a)$ زیرمنیفلد منظم غیر تهی حاصل از مقدار منظم $a \in \mathbb{R}$ باشد. بنابه قضیه ۱۱.۲۱، نگاشت احتوی $i : N \hookrightarrow \mathbb{R}^n$ نشاننده است، و لذا به ازای هر $p \in N$ ای $i_{*,p} : T_pN \to T_p\mathbb{R}^n$ یکبیک می‌باشد. بنابراین، فضای مماس T_pN را بعنوان زیرفضایی از $T_p\mathbb{R}^n \simeq \mathbb{R}^n$ می‌توان قلمداد نمود (به شکل ۸.۱۱ توجه شود). معادلات معرف این زیر فضا را می‌خواهیم تعیین کنیم. فرض کنید $v = \sum v^i \partial/\partial x^i|_p$ برداری دلخواه در T_pN باشد. v را با استفاده از ایزومورفیسم



شکل ۸.۱۱: صفحه مماس و فضای مماس به یک ابر رویه تراز.

$T_p\mathbb{R}^n \simeq \mathbb{R}^n$ با برداری $\langle v^1, \cdots, v^n\rangle \in \mathbb{R}^n$ می‌توان یکی گرفت. گیریم $c(t)$ منحنی‌ای در N باشد که $c(0) = p$ و $c'(0) = \langle v^1, \cdots, v^n\rangle$. چون $c(t)$ بر N قرار دارد، به ازای هر t ای $f(c(t)) = a$. با استفاده از قاعده زنجیره‌ای مشتق داریم:

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial}{\partial t} f(c(t))\Big|_{t=0} \\ &= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x^i}(c(t)).(c^i)'(t)\Big|_{t=0} \\ &= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x^i}(p).v^i. \end{aligned}$$

از طرفی $\mathrm{grad}(f)(p) = (\frac{\partial f}{\partial x^1}(p), \cdots, \frac{\partial f}{\partial x^n}(p))$. بنابرین، رابطه اخیر به معنی $\mathrm{grad}(f)(p)\cdot v = 0$ است؛ یعنی بردار گرادیان $\mathrm{grad}(f)(p)$ به تمام بردارهای موجود در زیرفضای T_pN عمود است. از آنجایی که $a \in \mathbb{R}$ مقدار منظم f فرض شده بود، پس $\mathrm{grad}(f)(p)$ مخالف صفر است و رابطه $\mathrm{grad}(f)(p)\cdot v = 0$، زیر فضای $(n-1)$–بعدی T_pN از $\mathbb{R}^n$ را کاملاً مشخص می‌سازد:

$$T_pN = \{v \in \mathbb{R}^n \mid \mathrm{grad}(f)(p)\cdot v = 0\}.$$

با تعویض v^i ها با $x^i - p^i$ های نظیر، معادله ابر صفحه مماس بهN در نقطه p حاصل می‌گردد:

$$P_pN := \{q \in \mathbb{R}^n \mid \mathrm{grad}(f)(p)\cdot (q-p) = 0\}.$$

۱۱.۲۳ مثال (صفحه فضای مماس به کره). گیریم $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$ و $a = 1$. در این صورت، کره واحد $\mathbb{S}^2 = f^{-1}(a)$ در $\mathbb{R}^3$ حاصل می‌گردد. گیریم $p = (a,b,c) \in \mathbb{S}^2$، در نتیجه

$$\frac{\partial f}{\partial x}(p) = 2a, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(p) = 2b, \quad \frac{\partial f}{\partial z}(p) = 2c.$$

بنابراین، معادله فضای مماس به کره واحد در نقطه p عبارت است از $2ax + 2by + 2cz = 0$ و یا $ax + by + cz = 0$. به همین ترتیب، معادله صفحه مماس به کره واحد در نقطه p عبارت است از $2a(x-a) + 2b(y-b) + 2c(z-c) = 0$ و یا پس از ساده کردن $ax + by + cz = 1$.

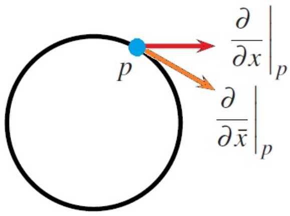
بخش ۶.۱۱ تمرینات

۱۱.۱ **بردارهای مماس به کره.** کره واحد $\mathbb{S}^n$ در $\mathbb{R}^{n+1}$ را در نظر بگیرید، که با معادله $\sum_{i=1}^{n+1}(x^i)^2 = 1$ معرفی می‌گردد. نشان دهید که اگر $p = (p^1, \cdots, p^{n+1}) \in \mathbb{S}^n$، آنگاه شرط لازم و کافی برای اینکه بردار مماس $X_p = \sum a^i \partial/\partial x^i|_p \in T_p\mathbb{R}^{n+1}$ به کره واحد در نقطه p مماس باشد این است که $\sum a^i p^i = 0$.

۱۱.۲ . الف) گیریم $i : \mathbb{S}^1 \hookrightarrow \mathbb{R}^2$ نگاشت احتوی دایره واحد باشد. مختصات در $\mathbb{R}^2$ را با x, y و تحدید این مختصات به $\mathbb{S}^1$ را با $\bar{x}, \bar{y}$ نشان می‌دهیم. بعبارت دیگر $\bar{x} = x \circ i = i^*(x)$ و $\bar{y} = y \circ i = i^*(y)$. در این صورت، $\bar{x}$ را به عنوان دستگاه مختصاتی بر نیم‌دایره بالایی $U = \{(a,b) \in \mathbb{S}^1 | b > 0\}$ می‌توان استفاده نمود؛ و در نتیجه، $\partial/\partial\bar{x}$ با معنی است.ثابت کنید که به ازای هر $p \in U$ ای

$$i_*\Big(\frac{\partial}{\partial \bar{x}}\Big|_p\Big) = \Big(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial \bar{y}}{\partial \bar{x}}\frac{\partial}{\partial y}\Big)\Big|_p.$$

بنابراین، با این که $i_* : T_p\mathbb{S}^1 \to T_p\mathbb{R}^2$ یکبیک است، $\partial/\partial\bar{x}|_p$ با $\partial/\partial x|_p$ یکی نیست (به شکل ۹.۱۱ توجه شود).



شکل ۹.۱۱: بردار مماس به دایره واحد

ب) قسمت (الف) را به حالت یک منحنی دلخواه C در $\mathbb{R}^2$ تعمیم دهید، U را قطعه‌ای از C در نظر بگیرید که $\bar{x}$ (تحدید x به C) مختصات موضعی باشد.

۱۱.۳ . نشان دهید که هر نگاشت هموار f از منیفلد فشرده N به $\mathbb{R}^m$ دارای نقطه تکین است. (راهنمایی: نگاشت تصویر بر درآیه اول $\pi : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ و ترکیب $\pi \circ f : N \to \mathbb{R}$ را در نظر بگیرید.)

۱۱.۴ . بر نیمه بالایی از کره واحد $\mathbb{S}^2$ از دستگاه مختصات $\phi = (u, v)$ استفاده می‌کنیم، که $u(a,b,c) = a$ و $v(a,b,c) = b$. بنابراین، مشتقات $\partial/\partial u|_p$ و $\partial/\partial v|_p$ در نقطه $p = (a,b,c) \in \mathbb{S}^2$ به نیم کره مماسند. گیریم $i : \mathbb{S}^2 \hookrightarrow \mathbb{R}^3$ نگاشت احتوی است و x, y, z دستگاه مختصات استاندارد بر $\mathbb{R}^3$ می‌باشد. در این صورت، $i_* : T_p\mathbb{S}^2 \hookrightarrow T_p\mathbb{R}^3$ برداری $\partial/\partial u|_p$ و $\partial/\partial v|_p$ را بتوی $T_p\mathbb{R}^3$ می‌نگارد. بنابراین،

$$\begin{aligned} i_*\Big(\frac{\partial}{\partial u}\Big|_p\Big) &= \alpha^1 \frac{\partial}{\partial x}\Big|_p + \beta^1 \frac{\partial}{\partial y}\Big|_p + \gamma^1 \frac{\partial}{\partial z}\Big|_p, \\ i_*\Big(\frac{\partial}{\partial v}\Big|_p\Big) &= \alpha^2 \frac{\partial}{\partial x}\Big|_p + \beta^2 \frac{\partial}{\partial y}\Big|_p + \gamma^2 \frac{\partial}{\partial z}\Big|_p, \end{aligned}$$

که $\alpha^1, \cdots, \gamma^2$ ثابتهایی بخصوص هستند. مقدار این ثابتها را بدست آورید.

۱۱.۵ . ثابت کنید که
اگر N منیفلدی فشرده باشد، آنگاه هر ایمرشن یکبیک $f : N \to M$ نشاننده است.

۱۱.۶ همواری نگاشت ضرب در $\mathrm{SL}(n,\mathbb{R})$. فرض کنیم $f : \mathrm{GL}(n,\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ نگاشت دترمینان $f(A) = \det A = \det[a_{ij}]$ باشد. به ازای هر $A \in \mathrm{SL}(n,\mathbb{R})$ ای، حداقل یک (k,ℓ) چنان وجود دارد که مشتق جزئی $\partial f/\partial a_{k\ell}(A)$ غیر صفر است (تمرین ۱۳ از فصل ۹). با استفاده از قضیه ۹.۹ و قضیه تابع ضمنی ثابت کنید که

الف) یک همسایگی از A در $\mathrm{SL}(n,\mathbb{R})$ وجود دارد که مجموعه a_{ij} های با $(i,j) \neq (k,\ell)$، تشکیل دستگاه مختصاتی می‌دهند، و هر $a_{k\ell}$ تابعی هموار از سایر مختصات a_{ij} با $(i,j) \neq (k,\ell)$ می‌باشد.

ب) نگاشت ضرب $\bar{\mu} : \mathrm{SL}(n,\mathbb{R}) \times \mathrm{SL}(n,\mathbb{R}) \to \mathrm{SL}(n,\mathbb{R})$ هموار است.

فصل ۱۲

کلاف مماس

کلاف برداری هموار بر منیفلد هموار M، خانواده‌ای از فضاهای برداری پارامتره شده توسط M است که به صورت هموار تغییر نموده و موضعاً شبیه به حاصلضرب می‌باشد. کلافهای برداری و نگاشتهای کلافی بین آنها تشکیل یک کاتگوری می‌دهد، و از سال ۱۹۳۰ که [؟] مطرح شد، نقش ویژه‌ای را در هندسه و توپولوژی ایفاء نموده است. گردایه فضاهای مماس به یک منیفلد مفروض، دارای ساختار فضای برداری بر منیفلد است، که به آن اصطلاحاً کلاف مماس گفته می‌شود. با محاسبه دیفرانسیل یک نگاشت هموار بین دو منیفلد مفروض، در نقاط مختلف، یک نگاشت کلافی بین کلافهای مماس نظیر به آنها حاصل می‌گردد. به این ترتیب، ساخت کلاف مماس یک فانکتور از کاتگوری منیفلدهای هموار به کاتگوری کلافهای برداری تشکیل می‌دهد.

در ظاهر فانکتور کلاف برداری موجب ساده‌تر شدن کارها نمی‌شود، زیرا کلاف مماس خوش یک منیفلد است، البته با ساختاری اضافه! اماف چون به هر منیفلدف کلاف مماسی به صورت طبیعی متناظر می‌گردد، ناورداهای کلاف مماس، عملاً ناورداهای خود منیفلد مورد مطالع هستند. مثلاً، نظریه چرن–وایلی در خصوص رده‌های مشخصه، که در توپولوژی دیفرانسیل مورد بررسی قرار می‌گیرد، از هندسه دیفرانسیل برای ساخت ناورداهای برخوردی برای کلافهای برداری استفاده می‌گردد. با بکارگیری نظریه رده‌های مشخصه در مورد کلافهای مماس، یک ناورداهای دیفئومورفیسمی عددی‌ای بنام اعداد مشخصه برای منیفلدها ساخته می‌شود. اعداد مشخصه، عملاً تعمیم مفهوم کلاسیک مشخصه‌های اولر–پوانکاره هستند.

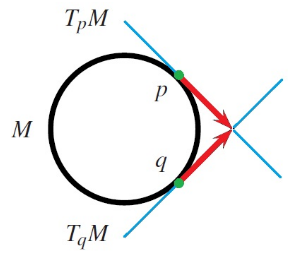
اهمیت مفهوم کلاف برداری در این کتاب بیشتر به جهت ایجاد اتحاد در مفاهیم مطرح شده می‌باشد. منظور از برش برای یک کلاف برداری مفروض $\pi : E \to M$، نگاشتی است $s : M \to E$ که هر نقطه از M را به تاری از کلاف که در آن نقطه است، می‌نگارد. همان طور که خواهیم دید، میدانهای برداری و فرمهای دیفرانسیلی بر منیفلدها، برشهایی از کلافهای برداری مناسب بر آن منیفلد هستند.

بخش ۱.۱۲ تعریف کلاف مماس

گیریم M منیفلدی هموار و $p \in M$ نقطه‌ای از آن باشد؛ فضای مماس[۱] T_pM به صورت فضای برداری همه نقطه-مشتقات بر جبر $C_p^\infty(M)$ جرمهای از توابع هموار در p تعریف گردید. کلاف مماس[۲] بر M، به صورت اجتماع مجزای همه فضاهای مماس در نقط مختلف M تعریف می‌گردد:

$$\begin{aligned} TM &:= \bigsqcup_{p\in M} T_pM \\ &= \bigcup_{p\in M} \{p\}\times T_pM. \end{aligned}$$

در اینجا به منظور تهیه اجتماع مجزای از فضاهای مماس، به هر T_pM ای یک برچسب p افزوده‌ایم. دلیل این کار این است که مثلاً در مورد منیفلد $\mathbb{S}^1$ (دایره واحد)، همان طوری که در شکل ۱.۱۲ مشهود است، بنظر می‌رسد فضاهای مماس در نقاط مختلف دایره واحد با هم برخورد دارند، در حالی که از نظر تئوری چنین نیست. بر این اساس بجای کلاف مماس $T_p\mathbb{S}^1$ می‌توان از کپی $\{p\}\times T_p\mathbb{S}^1$ استفاده نمود. به این ترتیب، بین هیچ دو فضای مماس در نقاط مختلف دایره واحد اشتراکی رخ نخواهد داد. بنابراین، تا



شکل ۱.۱۲: کلاف مماس به دایره واحد.

اینجا TM تنها یک مجموعه است و هیچ گونه ساختار توپولوژی و یا منیفلدی بر آن تعریف نشده است. در ادامه ساختار منیفلد هموار بخصوصی را بر آن تعریف می‌کنیم و نشان می‌دهیم که ساختار اضافه دیگری نیز دارد: ساختار کلاف برداری هموار. ابتدا سعی می‌کنیم بر آن توپولوژی تعریف کنیم.

بخش ۲.۱۲ توپولوژی بر کلاف مماس

۱۲.۱ **تعریف.** گیریم $(U,\varphi)=(U,x^1,\cdots,x^n)$ یک دستگاه مختصات موضعی بر M باشد. در هر نقطه $p\in M$، پایه‌ای $(\partial/\partial x^1)|_p,\cdots,(\partial/\partial x^1)|_p$ برای T_pM وجود دارد، و در نتیجه هر $X_p\in T_pM$ ای را به صورت یکتا به شکل ترکیب خطی $X_p=\sum_{i=1}^n a^i(\partial/\partial x^i)|_p$ می‌توان نوشت، که $a^i=a^i(X_p)\in\mathbb{R}$ ها به X_p بستگی دارند. چون $\varphi_*(X_p)=\sum_{i=1}^n a^i(\partial/\partial r^i)|_{\varphi(p)}\in T_{\varphi(p)}\mathbb{R}^n$، بنابراین $\varphi_*(X_p)$ را با

[۱] tangent space [۲] tangent bundle

بردار $\langle a^1, \cdots, a^n\rangle$ از $\mathbb{R}^n$ می‌توان یکی‌گرفت. گیریم

$$\begin{aligned} TU &:= \bigsqcup_{p\in U} T_pU \\ &= \bigcup_{p\in U} \times T_pM. \end{aligned}$$

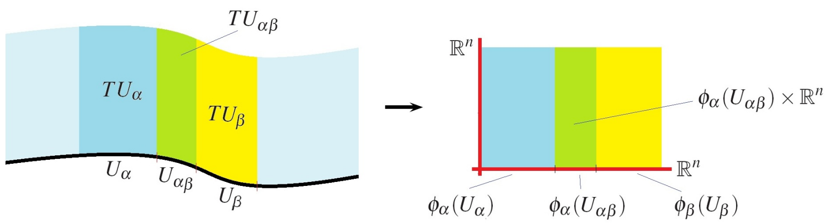
(در یادداشت ۸.۵ دیدیم که $T_pU = T_pM$.) اگر تعریف کنیم

$$\begin{aligned} \bar{\varphi} := (\varphi, \varphi_*) : \quad TU &\longrightarrow \varphi(U)\times\mathbb{R}^n \\ (p, X_p) &\longmapsto (x^1(p), \cdots, x^n(p), a^1(X_p), \cdots, a^n(X_p)) \end{aligned} \tag{۱.۱۲}$$

در این صورت، $\bar{\varphi}$ دوسویی است و وارون آن

$$(\varphi(p), a^1, \cdots, a^n) \longmapsto \left(p, \sum_{i=1}^{n} a^1 \frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_p\right)$$

می‌باشد. بنابراین، از $\bar{\varphi}$ برای انتقال توپولوژی از $\varphi(U)\times\mathbb{R}^n$ به TU می‌توانیم استفاده کنیم: زیرمجموعه $A\subseteq TU$وقتی و تنها وقتی باز است که $\bar{\varphi}(A)\subseteq\varphi(U)\times\mathbb{R}^n$ باز باشد.



شکل ۲.۱۲: کلاف مماس

گیریم $\mathcal{B}$ گردایه همه زیرمجموعه‌های باز از TU_α مشروح در بالا باشد، که U_α بر همه مجموعه‌های باز مختصاتی در M تغییر می‌کند:

$$\mathcal{B} := \bigcup_\alpha \{A \,|\, \text{.است باز } TU_\alpha \text{ در } A \text{ و است } M \text{ در مختصاتی باز مجموعه } U_\alpha\}$$

۱۲.۲ لم. گیریم M منیفلدی هموار باشد. در این صورت، گردایه $\mathcal{B}$ ارائه شده در تعریف ۱۲.۱ پایه‌ای برای یک توپولوژی بر TM تشکیل می‌دهد؛ در واقع

الف) TM برابر اجتماع همه $A\in\mathcal{B}$ ها است؛ و

ب) گیریم U و V مجموعه‌های باز مختصاتی در M باشند. اگر زیرمجموعه A در TU و زیرمجموعه B در TV باز باشند، آنگاه $A\cap B$ در $T(U\cap V)$ باز است.

در ادامه TM را با این توپولوژی همراه می‌کنیم.

برهان : چون $T(U\cap V)$ زیرمجموعه TU است، پس $A\cap T(U\cap V)\subseteq T(U\cap V)$. به صورت مشابه $B\cap T(U\cap V)\subseteq T(U\cap V)$. اما $A\cap B\subseteq TU\cap TV=T(U\cap V)$. در نتیجه

$$\begin{aligned} A\cap B &= (A\cap B)\cap T(U\cap V) \\ &= (A\cap T(U\cap V))\cap(A\cap T(U\cap V)) \end{aligned}$$

در $T(U\cap V)$ باز است. □

۱۲.۳ لم. هر منیفلد هموار دلخواه M، پایه‌ای شمارا از مجموعه‌های باز مختصاتی دارد.

برهان : بنابه تعریف، منیفلد M با پایه شمارا است. بنابراین، فرض کنیم $\mathcal{B}=\{B_i\}$ پایه‌ای شمارا برای M بوده و $\{(U_\alpha,\varphi_\alpha)\}$ اطلسی ماکسیمال برای آن باشد. به ازای هر مجموعه باز مختصاتی U_α و هر نقطه $p\in U_\alpha$، مجموعه باز $B_{p,\alpha}\in\mathcal{B}$ را چنان انتخاب می‌کنیم که $p\in B_{p,\alpha}\subseteq U_\alpha$. گردایه $\{B_{p,\alpha}\}$ بدون احتساب عناصر تکراری، زیرگردایه‌ای از $\mathcal{B}$ است، و بنابراین، شمارا است.

به ازای هر مجموعه باز $U\subseteq M$ و هر نقطه $p\in U$، مجموعه باز مختصاتی U_α چنان وجود دارد که $p\in U_\alpha\subseteq U$. در نتیجه $p\in B_{p,\alpha}\subseteq U$، که نشان می‌دهد $\{B_{p,\alpha}\}$ پایه‌ای برای M است. □

۱۲.۴ قضیه. کلاف مماس TM هر منیفلدی M هاوسدورف و با پایه شمارا است.

برهان : برای اثبات هاوسدورف بودن TM، دو بردار مماس دلخواه $X_p,Y_q\in TM$ در نظر بگیرید. دو حالت ممکن است: یا هر دو در دامنه چارتی قرار می‌گیرند و یا هیچ چارتی با این خاصیت وجود ندارد.

اگر چارتی (U,φ) یافت شود که p و q را در بر داشته باشد، آنگاه $\varphi(p)$ و $\varphi(q)$ دو نقطه از فضای هاوسدورف $\varphi(U)\subseteq\mathbb{R}^n$ هستند، و لذا همسایگی‌های باز مجزای A و B در $\varphi(U)$ چنان یافت می‌شوند که بترتیب شامل $\varphi(p)$ و $\varphi(q)$ هستند. اکنون، $\bar{\varphi}^{-1}(A)$ و $\bar{\varphi}^{-1}(B)$ همسایگی‌های باز مجزا بترتیب از p و q در $TU\subseteq TM$ هستند.

در غیر اینصورت، فرض کنیم (U,φ) چارتی حول p و (V,ψ) چارتی حول q باشد. در این حالت، $\bar{\varphi}^{-1}(U)$ و $\bar{\varphi}^{-1}(V)$ همسایگی‌های باز مجزا بترتیب از p و q در TM هستند.

برای اثبات با پایه شمارا بودن TM، با استفاده از لم قبل، پایه‌ای شمارا $\{U_i\}_{i=1}^\infty$ از مجموعه‌های باز مختصاتی برای M در نظر می‌گیریم. چون $TU_i\simeq U_i\times\mathbb{R}^n$، با زیرمجموعه‌ای باز از $\mathbb{R}^{2n}$ دیفئومورف است، و بنابراین با پایه شمارا می‌باشد. فرض کنیم که به ازای هر i ای، $\{B_{i,j}\}_{j=1}^\infty$ پایه‌ای شمارا برای TU_i باشد. در این صورت، $\{B_{i,j}\}_{i,j=1}^\infty$ پایه‌ای شمارا برای کلاف مماس است. □

اکنون ساختار منیفلدی بر TM را معرفی می‌کنیم.

۱۲.۵ قضیه. قضیه (ساختار منیفلدی بر کلاف مماس) اگر $\{(U_\alpha,\varphi_\alpha)\}$ اطلس هموار برای M باشد، آنگاه $\{(TU_\alpha,\bar{\varphi}_\alpha)\}$ اطلسی هموار برای TM است.

برهان : روشن است که $TM = \cup_\alpha U_\alpha$. پس تنها تحقیق سازگاری چارتهای مورد ادعا می‌ماند. قبل از آن، لازم است به این نکته اشاره شود که اگر $(U, x^1, \cdots, x^n)$ و $(V, y^1, \cdots, y^n)$ دو چارت برای M باشند و $1mm{\downarrow}.U \cap V \neq /$، آنگاه به ازای هر $p \in U \cap V$ دو پایه برای فضای برداری T_pM می‌توان انتخاب نمود: $\{\partial/\partial x^i\}_{i=1}^\infty$ و $\{\partial/\partial y^i\}_{i=1}^\infty$. پس هر بردار مماس $X_p \in T_pM$ دارای دو بیان است:

$$
\begin{aligned}
X_p &= \sum_{j=1}^n a^j \frac{\partial}{\partial x^j}\Big|_p \\
&= \sum_{i=1}^n b^i \frac{\partial}{\partial y^i}\Big|_p. \qquad (۲.۱۲)
\end{aligned}
$$

با تاثیر دو طرف بر توابع مختصاتی x^k، ملاحظه می‌گردد که

$$
\begin{aligned}
a^k &= \Big(\sum_{j=1}^n a^j \frac{\partial}{\partial x^j}\Big|_p\Big) x^k \\
&= \Big(\sum_{i=1}^n b^i \frac{\partial}{\partial y^i}\Big|_p\Big) x^k \\
&= \sum_{i=1}^n b^i \frac{\partial x^j}{\partial y^i}.
\end{aligned}
$$

به صورت مشابه، با تاثیر دو طرف (۲.۱۲) بر y^k بدست می‌آوریم که

$$
b^k = \sum_{j=1}^n a^j \frac{\partial y^k}{\partial x^j}.
$$

حال فرض کنیم $(TU_\alpha, \bar\varphi_\alpha)$ و $(TU_\beta, \bar\varphi_\beta)$ دو چارت برای TM باشند و $U_{\alpha\beta} = U_\alpha \cap U_\beta$، در این صورت

$$
\bar\varphi_\beta \circ \bar\varphi_\alpha^{-1} : \varphi_\alpha(U_{\alpha\beta}) \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \varphi_\beta(U_{\alpha\beta}) \times \mathbb{R}^n
$$

به شکل

$$
(x, a^1, \cdots, a^n) \longmapsto \Big(\varphi_\alpha^{-1}(x), \sum_{j=1}^n a^j \frac{\partial}{\partial x^j}\Big) \longmapsto (\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}(x), b^1, \cdots, b^n)
$$

عمل می‌کند، که $b^i = \sum_{j=1}^n a^j \partial y^i / \partial x^j$. بنابه فرض اطلس بودن $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$، نگاشت $\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}$ هموار است؛ و y^i ها مولفه‌های آن هستند. بنابراین، هر یک از y^i ها نیز توابعی هموار از x^j ها هستند. در نتیجه، هر یک از مشتقات جزئی $\partial y^i/\partial x^j$ نیز تابعی هموار هستند. بنابراین، نگاشت $\bar\varphi_\beta \circ \bar\varphi_\alpha^{-1}$ هموار است. این اثبات سازگاری چارتهای انتخابی، هموار بودن اطلس انتخابی و در نتیجه، منیفلد بودن کلاف مماس را تکمیل می‌نماید. □

بخش ۳.۱۲ کلاف برداری

۱۲.۶ تعریف (نگاشت تصویر طبیعی). نگاشت $\pi : TM \longrightarrow M$ که به صورت $\pi(p,X_p) = p$ تعریف می‌گردد، نگاشت تصویر طبیعی TM[1] نامیده می‌شود. با این تعریف ساختار جدیدی بر کلاف مماس ظاهر می‌شود که در ذیل به تعریف آن می‌پردازیم.

۱۲.۷ تعریف. فرض کنید $\pi : E \to M$ نگاشتی دلخواه باشد. پیشنگاره $\pi^{-1}(p) := \pi^{-1}(\{p\})$ هر نقطه $p \in M$ را تار در p[2] می‌نامیم. اغلب تار در p را با نماد E_p نشان می‌دهیم. به ازاء هر دو نگاشت مفروض $\pi : E \to M$ و $\pi' : E' \to M$ با فضای هدف یکسان M، نگاشت $\varphi : E \to E'$ را در صورتی حافظ تار[3] گوییم که به ازای هر $p \in M$ ای $\varphi(E_p) \subseteq E'_p$.

۱۲.۸ لم (نگاشتهای حافظ تار). نگاشتهای $\pi : E \to M$، $\pi' : E' \to M$ و $\varphi : E \to E'$ را درنظر بگیرید. شرط لازم و کافی برای اینکه $\varphi : E \to E'$ حافظ تار باشد، این است که دیاگرام زیر تعویض‌پذیر باشد:

$$\begin{tikzcd} E \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr, "\pi"'] & & E' \arrow[dl, "\pi'"] \\ & M & \end{tikzcd}$$

به عبارت دیگر $\pi' \circ \varphi = \pi$.

۱۲.۹ تعریف. نگاشت هموار و پوشای $\pi : E \to M$ را در صورتی موضعاً بدیهی[4] از رتبه r گوییم که

۱) هر تاری $\pi^{-1}(p)$ دارای ساختار فضای برداری با بعد r است؛

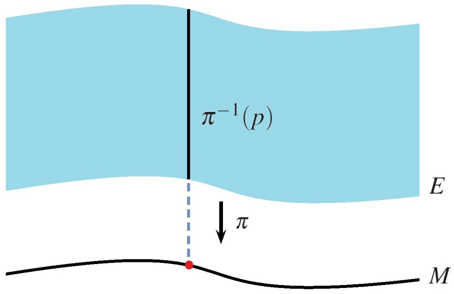
۲) به ازای هر $p \in M$، همسایگی باز U از p و دیفئومورفیسم حافظ تاری $\varphi : \pi^{-1}(U) \to U \times \mathbb{R}^r$ چنان وجود دارند که به ازای هر $q \in U$، تحدید

$$\varphi|_{\pi^{-1}(q)} : \pi^{-1}(q) \to \{q\} \times \mathbb{R}^r$$

ایزومورفیسم بین فضاهای برداری است. چنین مجموعه بازی را مجموعه باز بدیهی‌ساز برای E، و φ را بدیهی‌سازی[5] برای E روی U می‌نامند (به شکل ۳.۱۲ توجه شود).

خانواده $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$، که خانواده $\{U_\alpha\}$ پوششی باز برای M باشد، بدیهی‌سازی برای E، و خانواده $\{U_\alpha\}$ پوشش باز بدیهی‌ساز Eروی M نامیده می‌شود.
منظور از کلاف برداری[6] هموار از رتبه r، یک سه تایی مرتب (E, M, π) متشکل از منیفلدهای هموار E، M و نگاشت هموار پوشای $\pi : E \to M$ است که موضعاً بدیهی از رتبه r می‌باشد. منیفلد E را فضای کلی[7]، و M را فضای پایه[8] برای کلاف مماس می‌نامند.

[1] natural projection map [2] fiber [3] fiber preserving [4] locally trivial [5] trivialization
[6] vector bundle [7] total space [8] fibre space



شکل ۳.۱۲: کلاف برداری و تاری از آن

۱۲.۱۰ **تعریف.** هنگامی که بیم ابهام نرود، راحت از کلاف برداری E روی M سخن می‌گوییم، و از ذکر سه تایی مرتب و یا نگاشت تصویر خودداری می‌کنیم. کلافی که خانواده بدیهی‌سازی مرکب از تنها یک بدیهی‌سازی بپذیرد، کلاف بدیهی[۹] نامیده می‌شود.

۱۲.۱۱ **لم.** گیریم $\pi : E \to M$ کلاف برداری هموار باشد، و S زیرمنیفلد منظمی از M. در این صورت سه تایی $(\pi^{-1}(S), S, \pi|_{\pi^{-1}(S)})$ کلاف برداری هموار بر S است؛ آن را تحدید E به S نامیده و با $E|_S$ نشان می‌دهیم.

۱۲.۱۲ **مثال (کلاف حاصلضربی[۱]).** اگر منیفلد هموار M و عدد طبیعی r داده شده باشند، نگاشت تصویر بر مولفه اول $\pi : M \times \mathbb{R}^r \to M$ را در نظر بگیرید. در این صورت، $(M \times \mathbb{R}^r, M, \pi)$ کلاف برداری هموار از رتبه r است؛ آن را اصطلاحاً کلاف حاصلضربی از رتبه r بر M می‌نامند. ساختار فضای برداری بر تار $\pi^{-1}(p) = \{(p, v) | v \in \mathbb{R}^r\}$ به شکل بدیهی تعریف می‌گردد:

$$\begin{aligned} (p,u) + (p,v) &:= (p, u+v), \\ b \cdot (p,v) &:= (p, bv), \quad b \in \mathbb{R} \text{ به ازاء } \end{aligned}$$

بدیهی‌سازی موضعی بر $M \times \mathbb{R}$ با نگاشت همانی $\mathbb{1}_{M\times\mathbb{R}} : M \times \mathbb{R} \to M \times \mathbb{R}$ تامین می‌گردد. بعبارت دیگر، کلاف حاصلضربی، بدیهی است.

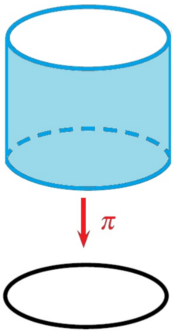
به عنوان نمونه، استوانه بینهایتی $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$ کلاف حاصلضربی از رتبه یک بر دایره واحد $\mathbb{S}^1$ می‌باشد (به شکل ۴.۱۲ توجه شود).

۱۲.۱۳ **تعریف.** گیریم $\pi : E \to M$ کلاف برداری هموار باشد. فرض کنید $(U, \psi) = (U, x^1, \cdots, x^n)$ چارتی برای M بوده و

$$\varphi : E|_U \xrightarrow{\sim} U \times \mathbb{R}^r,$$

$$\varphi(e) = (\pi(e), c^1(e), \cdots, c^n(e)),$$

[۹] trivial bundle [۱] product bundle



شکل ۴.۱۲: استوانه بینهایتی کلاف برداری با رتبه یک است.

یک بدیهی‌سازی E روی U باشد. در این صورت

$$(\psi\times\mathbb{1}_{\mathbb{R}^r})\circ\varphi : E|_U \xrightarrow{\sim} \psi(U)\times\mathbb{R}^r\subseteq\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^r$$

دیفئومورفیسمی از $E|_U$ بروی نگاره‌اش می‌باشد و بنابراین چارتی برای E تشکیل می‌دهد. $(x^1,\cdots,x^n)$ را دستگاه مختصات پایه[۲] و $(c^1,\cdots,c^n)$ را دستگاه مختصات تاری[۳] متناظر به چارت $(\psi\times\mathbb{1}_{\mathbb{R}^r})\circ\varphi$ بر $E|_U$ می‌نامند.

۱۲.۱۴ **تعریف.** گیریم $\pi_E : E\to M$ و $\pi_F : F\to N$ دو کلاف برداری هموار با رتبه احتمالاً متفاوت باشند. منظور از نگاشت کلافی[۱] از E به F، زوج مرتبی است از نگاشتها $(f,\tilde{f})$ به شکل $f : M\to N$ و $\tilde{f} : E\to F$، به گونه‌ای که

۱) دیاگرام

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "\tilde{f}"] \arrow[d, "\pi_E"'] & F \arrow[d, "\pi_F"] \\ M \arrow[r, "f"'] & N \end{tikzcd}$$

تعویض‌پذیر باشد، یعنی $\pi_F\circ\tilde{f} = f\circ\pi_E$؛ و

۲) نگاشت $\tilde{f}$ بر هر تاری خطی باشد، بعبارت دیگر به ازای هر $p\in M$ ای $\tilde{f} : E_p\to F_{f(p)}$ نگاشتی خطی بین فضاهای برداری باشد.

۱۲.۱۵ **قضیه.** گردایه همه کلافهای برداری و نگاشتهای کلافی بین آنها، تشکیل یک کاتگوری می‌دهد.

۱۲.۱۶ **مثال.** هر نگاشت هموار $f : N\to M$ بین منیفلدها، یک نگاشت کلافی $(f,\tilde{f})$ از کلاف برداری $\pi_N : TN\to N$ به کلاف برداری $\pi_M : TM\to M$ القاء می‌کند، که در آن $\tilde{f} : TN\to TM$ به صورت

$$TN\supset\{p\}\times T_pN\ni(p,v)\ \longmapsto\ (f(p),f_{*,p}(v))\in\{f(p)\}\times T_{f(p)}M\subset TM$$

---
[۱] bundle map [۳] fibre coordinates [۲] base coordinates

تعریف می‌گردد. به این ترتیب، یک فانکتور کوواریان T از کاتگوری منیفلدهای هموار و نگاشتهای هموار بتوی کاتگوری کلافهای برداری و نگاشتهای برداری، حاصل می‌گردد: به هر منیفلد M، کلاف مماسش $T(M) = TM$ نظیر می‌گردد، و به هر نگاشت هموار $f : M \to N$ بین منیفلدها، نگاشت کلاف مشتق $T(f) = (f, f_*)$ نظیر می‌شود.

۱۲.۱۷ **تعریف.** اگر E و F کلاف برداری بر منیفلد مشترک M باشند، آنگاه نگاشت کلافی از E به F روی M، یک نگاشت کلافی است که در آن نگاشت پایه، همان نگاشت همانی $\mathbb{1}_M$ می‌باشد. به ازای یک منیفلد هموار مفروض M، کاتگوری همه کلافهای برداری هموار روی M و نگاشتهای کلافی هموار روی M را می‌توان در نظر گرفت. از ایزومورفیسم کلافهای برداری روی M در این کاتگوری می‌توان سخن گفت. با این مقدمات، کلاف برداری $\pi : E \to M$ بر M درصورتی بدیهی است که با کلاف حاصلضربی $M \times \mathbb{R}^r \to M$ ایزومورف باشد (به تعریف ۱۲.۱۰ توجه شود).

۱۲.۱۸ **مثال.** الف) اگر X میدانی برداری بر $\mathbb{R}^3$ باشد، آنگاه ضرب خارجی نمودن در X، نگاشتی از $\mathfrak{X}(\mathbb{R}^3)$ بروی خودش تعریف می‌کند: $Y \mapsto X \times Y$. چون این نگاشت نسبت به Y $C^\infty(\mathbb{R}^3)$−خطی است، پس یک نگاشت کلافی از $T\mathbb{R}^3$ بتوی خودش می‌باشد. برای نمونه اگر $X = -y\partial/\partial x + x\partial/\partial y$، آنگاه نگاشت کلافی القایی چنین است:

$$\begin{array}{ccc} T\mathbb{R}^3 & \longrightarrow & T\mathbb{R}^3 \\ a\dfrac{\partial}{\partial x} + b\dfrac{\partial}{\partial y} + c\dfrac{\partial}{\partial z} & \longmapsto & xc\dfrac{\partial}{\partial x} + yca\dfrac{\partial}{\partial y} - (xa + yb)a\dfrac{\partial}{\partial z} \end{array}$$

ب) به صورت مشابه، صرب داخلی نمودن در میدان برداری مفروض X، یک نگاشت کلافی از کلاف مماس $T\mathbb{R}^3$ به کلاف حاصلضربی خطی $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}$ تعریف می‌کند: $Y \mapsto X \cdot Y$. برای نمونه، با انتخاب X به صورت در قسمت (الف) به نگاشت کلافی ذیل می‌رسیم:

$$\begin{array}{ccc} T\mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}, \\ a\dfrac{\partial}{\partial x} + b\dfrac{\partial}{\partial y} + c\dfrac{\partial}{\partial z} & \longmapsto & (xb - yc)\dfrac{d}{dt} \end{array}$$

توجه شود که d/dt میدان مختصاتی نظیر چارت مختصاتی استاندارد t بر $\mathbb{R}$ است.

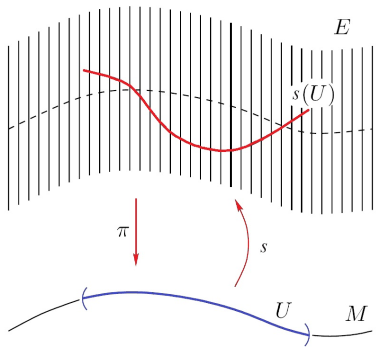
بخش ۴.۱۲ برش هموار

۱۲.۱۹ **تعریف.** منظور از برش[1] برای کلاف برداری $\pi : E \to M$، نگاشتی $s : M \to E$ است که $\pi \circ s = \mathbb{1}_M$؛ بعبارت دیگر، به هر $p \in \mathrm{Dom}(s) \subseteq M$ ای یک عنصر $s(p)$ در تار E_p متناظر گردد. به بیان معادل، دیاگرام

$$\begin{tikzcd} E \arrow[rr, "\pi"] & & M \arrow[dl, "\mathbb{1}_M"] \\ & M \arrow[ul, "s"] & \end{tikzcd}$$

[1] section

تعویض‌پذیر باشد. برش را به صورت در شکل ۵.۱۲ می‌توان متصور شد. برش را در صورتی هموار گوییم که به عنوان نگاشتی از منیفلد M بتوی منیفلد E هموار باشد.



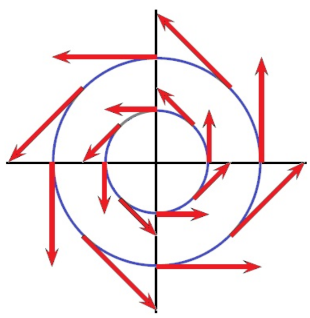
شکل ۵.۱۲: برش از یک کلاف برداری.

۱۲.۲۰ **مثال**. میدان برداری X بر منیفلد هموار مفروض M، برشی است از کلاف مماس $\pi : M \to M$. بعبارت دیگر، نگاشتی $X : M \to TM$ است که به هر نقطه $p \in \mathrm{Dom}(X) \subseteq TM$، برداری مماس X_p در همان نقطه نظیر می‌سازد.

۱۲.۲۱ **مثال**. فرمول

$$\begin{aligned} X_{(x,y)} &= -y\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial y} \\ &= \langle -y, x\rangle, \end{aligned}$$

میدانی برداری بر منیفلد استاندارد $\mathbb{R}^2$ تعریف می‌کند (به شکل ۶.۱۲ توجه شود). بعنوان تمرین به راحتی



شکل ۶.۱۲: نمونه‌ای از یک میدان برداری.

می‌توان اثبات نمود که

۱۲.۲۲ قضیه (برش صفر). کلاف برداری هموار $\pi : E \to M$ را در نظر بگیرید. نگاشت $\mathbf{0} : M \to E$ که هر نقطه $p \in M$ را به صفر $\mathbf{0}(p) = 0 \in E_p$ فضای برداری E_p می‌نگارد، برش صفر نامیده می‌شود. برش صفر، هموار و ایمرشن است.

۱۲.۲۳ گزاره. گیریم s و t برشهای هموای از کلاف برداری هموار $\pi : E \to M$ بوده و f تابع حقیقی-مقداری هموای بر M باشد. در این صورت

۱) مجموع $s+t : M \to E$ با تعریف

$$(s+t)(p) := s(p)+t(p) \in E_p, \qquad p \in M,$$

برشی هموار از E است.

۲) حاصلضرب $fs : M \to E$ با تعریف

$$(fs)(p) := f(p).s(p) \in E_p, \qquad p \in M,$$

برشی هموار از E است.

برهان : (۱) را اثبات نموده و اثبات (۲) را به عنوان تمرین به خواننده می‌سپاریم. روشن است که $s+t$ برشی از E است. پس کافی است همواری آن را تحقیق کنیم. برای این منظور، نقطه‌ای $p \in M$ و مجموعه باز بدیهی‌ساز V برای E شامل p را در نظر می‌گیریم. فرض کنیم بدیهی‌سازی نظیر آن $\varphi : \pi^{-1}(V) \to V \times \mathbb{R}^r$ باشد و

$$\begin{aligned} (\varphi \circ s)(q) &= (q, a^1(q), \cdots, a^r(q)), \\ (\varphi \circ t)(q) &= (q, b^1(q), \cdots, b^r(q)), \qquad q \in V. \end{aligned}$$

چون s و t هموارند، بنابراین a^i و b^j همگی توابعی هموار بر V هستند (به گزاره ۶.۹ توجه شود). چون φ بر هر تاری خطی است، بنابراین

$$(\varphi \circ (s+t))(q) = (q, a^1(q)+b^1(q), \cdots, a^r(q)+b^r(q)), \qquad q \in V.$$

این نشان می‌دهد که $s+t$ نگاشتی هموار بر V است. چون نقطه $p \in M$ دلخواه بود، بنابراین $s+t$ برشی هموار بر M می‌باشد. □

۱۲.۲۴ تعریف. مجموعه همه برشهای هموار از کلاف برداری هموار مفروض $\pi : E \to M$ را با نماد $\Gamma(E)$ نشان می‌دهیم. اگر $U \subseteq M$ زیرمجموعه‌ای باز باشد، مجموعه همه برشهای هموار E روی U را با نماد $\Gamma(E, U)$ نشان می‌دهیم. در مورد کلاف مماس، بجای $\Gamma(TM)$ از $\mathfrak{X}(M)$ استفاده می‌کنیم. برشی که دامنه‌اش کل M باشد، برش فراگیر[۱] نامیده می‌شود.

۱۲.۴.۱ نتیجه $\Gamma(E, U)$ با اعمال تعریف شده در گزاره بالا، یک فضای برداری بر هیات $\mathbb{R}$ و همزمان یک مدول بر حلقه توابع هموار $C^\infty(M)$ می‌باشد. بخصوص، $\Gamma(E)$ نیز یک فضای برداری بر هیات $\mathbb{R}$ و همزمان یک مدول بر حلقه توابع هموار $C^\infty(M)$ می‌باشد.

---

[۱] global section

بخش ۵.۱۲ کنج هموار

۱۲.۲۵ تعریف. فرض کنید $\pi : E \to M$ یک کلاف برداری هموار از رتبه r بوده و U زیرمجموعه‌ای باز از M باشد. منظور از کنج[۱] برای E روی U، مجموعه‌ای مرتب از r برش $(s_1, \cdots, s_r)$ از E روی U است، به گونه‌ای که به ازای هر $p \in U$ ای، عناصر $s_1(p), \cdots, s_r(p)$ پایه‌ای برای تار $E_p := \pi^{-1}(p)$ تشکیل می‌دهند. کنج را در صورتی هموار گوییم که برشهای معرف آن هموار باشند. کنج بر کلاف مماس $TM \to M$ روی U را کنج بر U می‌گوییم.

۱۲.۲۶ مثال. گردایه میدانهای برداری $\partial/\partial x, \partial/\partial y, \partial/\partial z$ یک کنج هموار بر $\mathbb{R}^3$ است. نمونه‌ای از یک کنج فراگیر.

۱۲.۲۷ مثال. گیریم M منیفلدی هموار و $\{e_1, \cdots, e_r\}$ پایه‌ای برای فضای برداری استاندارد $\mathbb{R}^r$ باشد. به ازای هر $i = 1, \cdots, r$ ای نگاشت $\bar{e}_i : M \to M \times \mathbb{R}^r$ را با ضابطه $\bar{e}_i(p) = (p, e_i)$ تعریف می‌کنیم. در این صورت، $\{e_1, \cdots, e_r\}$ برشی هموار برای کلاف حاصلضربی $M \times \mathbb{R}^r \to M$ می‌باشد.

۱۲.۲۸ مثال (کنج متناظر به یک بدیهی‌سازی). فرض کنید $\pi : E \to M$ کلاف برداری هموار با رتبه r باشد. اگر $\varphi : E|_U \xrightarrow{\sim} U \times \mathbb{R}^r$ یک بدیهی‌سازی برای E روی مجموعه باز $U \subseteq M$ باشد، آنگاه φ^{-1} کنج هموار $\{e_1, \cdots, e_r\}$ بر کلاف حاصلضربی $U \times \mathbb{R}^r$ را بروی کنج همواری $\{t_1, \cdots, t_r\}$ برای E روی U تصویر می‌کند:

$$\begin{aligned} t_i(p) &= \varphi^{-1}(\bar{e}_i(p)) \\ &= \varphi^{-1}(p, e_i), \qquad p \in U. \end{aligned}$$

اصطلاحاً $\{t_1, \cdots, t_r\}$ را کنج هموار روی U متناظر با بدیهی‌سازی φ می‌نامند.

۱۲.۲۹ لم. گیریم $\varphi : E|_U \to U \times \mathbb{R}^r$ یک بدیهی‌سازی روی مجموعه باز U برای کلاف برداری هموار $E \to M$ بوده و $\{t_1, \cdots, t_r\}$کنج هموار روی U متناظر با این بدیهی‌سازی باشد. در این صورت، برش $s = \sum_{i=1}^r b^i t_i$ از E روی U وقتی و تنها وقتی هموار است که مختصاتش b^j نسبت به کنج $\{t_1, \cdots, t_r\}$ هموار باشند.

برهان : برای اثبات ”اگر“ کافی است به گزاره ۱۲.۲۳ توجه شود.
در مورد ”فقط اگر“، فرض کنیم برش $s = \sum_{i=1}^r b^i t_i$ از E روی U هموار باشد. در این صورت،

---
[۱] frame

$s\circ\varphi$ هموار است. توجه شود که

$$\begin{aligned}(\varphi\circ s)(p) &= \sum_{i=1}^{r} b^i(p)\varphi(t_i(p))\\ &= \sum_{i=1}^{r} b^i(p)(p,e_i)\\ &= \Big(p,\sum_{i=1}^{r} b^i(p)e_i\Big).\end{aligned}$$

بنابراین، $b^i(p)$ ها عملاً مختصات تاری $s(p)$ نسبت به بدیهی‌سازی φ می‌باشند. در نتیجه، چون $s\circ\varphi$ هموار است، همه b^i ها نیز هموار هستند. □

۱۲.۳۰ گزاره (توصیف برشهای هموار). گیریم $\pi: E\to M$ کلاف برداری هموار و U زیرمجموعه‌ای باز از M باشد. فرض کنیم $\{s_1,\cdots,s_r\}$کنج هموار‌ی برای E روی U باشد. در این صورت، برش $s=\sum_{i=1}^{r} c^i s_i$ از E روی U وقتی و تنها وقتی هموار است که ضرایبش c^j توابعی هموارا بر U باشند.

برهان : چنانچه $\{s_1,\cdots,s_r\}$کنج نظیر به یک بدیهی‌سازی برای E روی U باشد، این گزاره عملاً همان لم ۱۲.۲۹ می‌شود. گزاره را به راحتی با تبدیل حالت کلی به این حالت خاص، اثبات می‌کنیم. یک طرف گزاره بدیهی است، زیرا اگر توابع c^j بر U هموار باشند، آنگاه برش $s=\sum_{j=1}^{r} c^j s_j$ نیز بنابه گزاره ۱۲.۲۳ بر U هموار است.

بالعکس، فرض کنیم $s=\sum_{j=1}^{r} c^j s_j$ برشی هموار برای E روی U باشد. نقطه‌ای $p\in U$ و مجموعه باز بدیهی‌ساز $V\subseteq U$ برای E شامل p با بدیهی‌سازی نظیر $\varphi:\pi^{-1}(V)\to V\times\mathbb{R}^r$ را در نظر بگیرید. گیریم $\{t_1,\cdots,t_r\}$ کنج هموارا نظیر به بدیهی‌سازی φ باشد (مثال ۱۲.۱۶). اگر s و s_j ها را بر حسب کنج $\{t_1,\cdots,t_r\}$ بنویسیم، مثلاً $s=\sum_{i=1}^{r} b^i t_i$ و $s_j=\sum_{i=1}^{r} a_j^i t_i$، آنگاه بنابه لم ۱۲.۲۹ همه توابع مختصاتی b^j و a_j^i ها بر V هموارند. حال $s=\sum_{i=1}^{r} c^i t_i$ را بر اساس کنج $\{t_1,\cdots,t_r\}$ بسط می‌دهیم:

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{r} b^i t_i &= s\\ &= \sum_{i=1}^{r} a_j^i t_i\\ &= \sum_{i=1}^{r} c^j a_j^i t_i.\end{aligned}$$

با مقایسه ضرایب t_i در دو طرف تساوی، نتیجه می‌شود که $b^i=\sum_{j=1}^{r} c^j a_j^i$. بعبارت دیگر، چنانچه

$r\times r$-ماتریس $A=[a^i_j]$ را معرفی کنیم، آنگاه $b=Ac$، که در آن

$$b=\langle b^1,\cdots,b^r\rangle^t,\qquad c=\langle c^1,\cdots,c^r\rangle^t.$$

هر یک از درآیه‌های نگاشت ماتریس $V\ni p\mapsto A(p)=[a^i_j(p)]\in\mathbb{R}^{r\times r}$ هموارند، و بنابراین خود این نگاشت نیز هموار می‌باشد. پس، بنابه قاعده کرامر از جبر خطی، $c=A^{-1}b$ برداری ستونی از توابع هموار بر V است. این نشان می‌دهد که توابع c^j در p هموارند. چون $p\in U$ دلخواه بود، بنابراین همه توابع مختصاتی c^j بر U هموارند. □

۱۲.۳۱ یادداشت. اگر در بحثهای بالا، بجای هموار از پیوسته استفاده کنیم، کلیه احکام به حالت پیوسته تعمیم پیدا می‌کند.

بخش ۶.۱۲ تمرینات

۱۲.۱ . قضیه ۱۲.۲۲ را اثبات کنید.

۱۲.۲ . گیریم $(U,\varphi)=(U,x^1,\cdots,x^n)$ و $(V,\psi)=(V,y^1,\cdots,y^n)$ چارتهای همپوشا بر منیفلد M باشند. در این صورت، چارتهای مختصاتی القایی $(TU,\tilde\varphi)$ و $(TV,\tilde\psi)$ توسط آنها بر فضای کلی TM کلاف مماس (به معادله (۱.۱۲) توجه شود) با استفاده از $\tilde\psi\circ\tilde\varphi^{-1}$ تغییر می‌کنند:

$$(x^1,\cdots,x^n,a^1,\cdots,a^n)\ \longmapsto\ (y^1,\cdots,y^n,b^1,\cdots,b^n).$$

الف) ماتریس ژاکوبی تابع تغییر مختصات $\tilde\psi\circ\tilde\varphi^{-1}$ در $\varphi(p)$ را محاسبه کنید؛ و
ب) نشان دهید که دترمینان ژاکوبی تابع تغییر مختصات $\tilde\psi\circ\tilde\varphi^{-1}$ در $\varphi(p)$ برابر $(\det[\partial x^i/\partial y^j])^2$ است.

۱۲.۳ . قسمت ۲ از گزاره ۱۲.۲۳ را اثبات کنید.

۱۲.۴ . گیریم $\pi:E\to M$ کلاف برداری هموار و $\{s_1,\cdots,s_r\}$ یک کنج هموار برای E روی مجموعه باز $U\subseteq M$ باشد. در این صورت هر $e\in\pi^{-1}(U)$ را به صورت یکتا به شکل ترکیب خطی

$$e=\sum_{j=1}^{r}c^j(e)\,s_j(p),\qquad p=\pi(e)\in U.$$

می‌توان نوشت. ثابت کنید که توابع $c^j:\pi^{-1}(U)\to\mathbb{R}$ که $j=1,\cdots,r$ هموارند. (راهنمایی: ابتدا نشان دهید که ضرایب e نسبت به کنج $\{t_1,\cdots,t_r\}$ متناظر به یک بدیهی‌سازی هموار است.)

فصل ۱۳

توابع ضربه‌ای و افراز یکانی

افراز یکانی بر یک منیفلد مفروض، به معنی گردایه‌ای از توابع هموار و نامنفی است که مجموع آنها برابر یک می‌گردد. اغلب لازم است تا افراز یکانی مورد نظر، تحت تسلط یک پوشش باز مفروض $\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$ باشد. این بدان معنی است که افراز یکانی $\{\rho_\alpha\}_{\alpha\in A}$ را درست همانند پوشش $\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$ بتوان اندیسگذاری نمود، و به ازای هر α در A، محمل ρ_α در U_α قرار داشته باشد. بخصوص، ρ_α بر خارج از U_α صفر می‌گردد.

وجود افراز یکانی هموار یکی از ابزارهای تکنیکی مهم در نظریه منیفلدهای هموار می‌باشد. این تک خالی است که رفتار منیفلدهای هموار را از رفتار منیفلدهای حقیقی-تحلیلی و یا مختلط متفاوت می‌سازد. در این بخش به ساخت توابع ضربه‌ای هموار بر منیفلد دلخواه پرداخته و بکمک آنها وجود افراز یکانی هموار بر هر منیفلد فشرده را اثبات می‌کنیم. اثبات وجود افراز یکانی هموار برای حالت کلی‌تر، کمی تکنیکی‌تر است و آن را در ضمیمه ج آورده‌ایم.

از افراز یکانی به دو روش استفاده می‌شود:

(الف) تجزیه یک شیء فراگیر مفروض بر یک منیفلد به صورت مجموع موضعا متناهی از اشیاء موضعی بر مجموعه‌های باز U_α از یک افراز مفروض، و

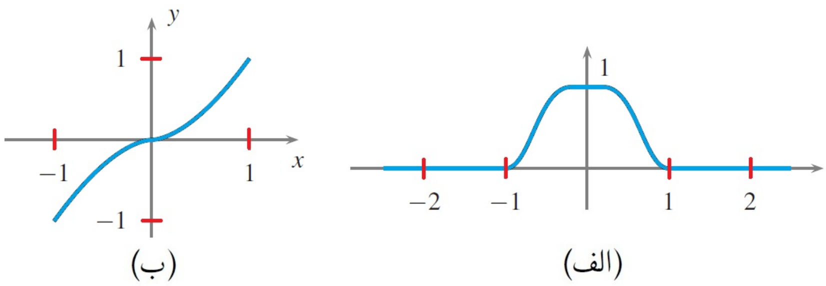
(ب) بهم چسبانیدن اشیاء موضعی بر مجموعه‌های باز U_α و ساختن یک شیء فراگیر بر آن منیفلد.

بخش ۱.۱۳ توابع ضربه‌ای هموار

یادآور می‌شویم که $\mathbb{R}^{\times}$ نمایشگر مجموعه همه اعداد حقیقی مخالف صفر است. محمل[۱] تابع حقیق-مقدار f بر منیفلد M را به صورت بستار زیرمجموعه همه نقاطی از M که در آنها $f \neq 0$ تعریف می‌کنیم:

$$\begin{aligned} \operatorname{supp} f &:= \operatorname{cl}_M(f^{-1}(\mathbb{R}^{\times})) \\ &= \text{بستار } \{q \in M \mid f(q) \neq 0\} \text{ در } M \end{aligned}$$

گیریم q نقطه‌ای در M و U همسایگی بازی از q باشد. منظور از تابع ضربه‌ای[۱] در q با محمل در U، تابعی نامنفی و پیوسته ρ بر M است که در یک همسایگی از q متحد با یک می‌باشد و $\operatorname{supp}\rho \subset U$. مثلا در شکل ۱.۱۳ نمودار یک تابع ضربه‌ای در 0 با محمل در بازه باز $(-2,2)$ آورده شده است. تابع بر



شکل ۱.۱۳: (الف) تابع ضربه‌ای در 0 بر $\mathbb{R}$ (ب) نمودار تابع $y = x^{5/3}$

بازه باز $(-1,1)$ مخالف صفر است، و در خارج از آن صفر می‌باشد. محمل آن بازه بسته $[-1,1]$ است.

تنها توابع ضربه‌ای هموار برای ما اهمیت دارند. در حالی که پیوستگی تابع را اغلب با ابتکار می‌شود بررسی نمود، برای مطالعه هموازی تابع معمولا به بررسی یک فرمول پرداخته می‌شود. در این بخش، هدف یافتن فرمولی کلی برای تابع ضربه‌ای هموار مانند در شکل ۱.۱۳ - الف است.

۱.۱۳ مثال. نمودار $y = x^{5/3}$ بنظر هموار می‌رسد (به شکل ۲.۱۳) - ب، اما عملا در $x = 0$ هموار نیست، زیرا مشتق دوم آن $y'' = (10/9)x^{-1/3}$ در آن نقطه تعریف نمی‌گردد. در مثال ۳.۱ تابعی هموار

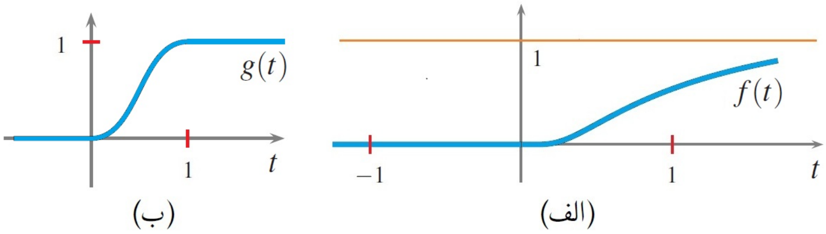
$$f(t) = \begin{cases} e^{-1/t} & \text{برای } t > 0 \\ 0 & \text{برای } t \leq 0 \end{cases}$$

مطرح شد که نمودار آن در شکل ۲.۱۳ - الف آورده شده است.

چالش اصلی در ساخت تابع ضربه‌ای هموار از f، ساخت نوع هموار تابع پله‌ای است؛ یعنی، تابعی هموار $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ با ضابطه

$$g(t) = \begin{cases} 0 & \text{برای } t \leq 0 \\ 1 & \text{برای } t \geq 1 \end{cases}$$

[۱] support [۱] bump function



شکل ۲.۱۳: (الف) نمودار تابع $f(t)$ (ب) نمودار تابع $g(t)$

که نمودارش در شکل ۲.۱۳ –ب آورده شده است. اگر چنین تابع پله‌ای هموار g در اختیار داشته باشیم، آنگاه به راحتی با انتقال، انعکاس و یا تجانس، تابعی می‌توانیم بسازیم که شبیه به در شکل ۱.۱۳ - الف باشد.

کار را به این صورت دنبال می‌کنیم که، تابع $g(t)$ را بر تابعی مثبت $\ell(t)$ تقسیم می‌نماییم. پس خارج قسمت $f(t)/\ell(t)$ برای $t \leq 0$ ها صفر است. مخرج $\ell(t)$ را تابعی مثبت می‌گیریم که برای $t \geq 1$ ها برابر $f(t)$ باشد، و لذا $f(t)/\ell(t)$ برای $t \geq 1$ ها متحد با یک شود. ساده‌ترین راه برای ساختن $\ell(t)$، جمع نمودن $f(t)$ با تابعی نامنفی است، که برای $t \geq 1$ ها صفر می‌گردد. نمونه‌ای از چنین تابع، $f(1-t)$ است. پس می‌شود فرض نمود $\ell(t) := f(t) + f(1-t)$، و بنابراین، تابع

$$g(t) := \frac{f(t)}{f(t)+f(1-t)} \tag{۱.۱۳}$$

را در نظر می‌گیریم.

نشان می‌دهیم که مخرج $f(t)+f(1-t)$ صفر نمی‌شود. برای $t > 0$ ها $f(t) > 0$ و بنابراین

$$f(t)+f(1-t) \geq f(t) > 0.$$

برای $t \leq 0$ ها $1-t \geq 0$ و بنابراین

$$f(t)+f(1-t) \geq f(1-t) > 0.$$

پس در هر صورت $f(t)+f(1-t) \neq 0$. این ثابت می‌کند که به ازای هر t ای $g(t)$ تعریف می‌گردد. چون خارج قسمت هر دو تابع هموار که مخرجش صفر نشود، هموار است، پس $g(t)$ به ازای هر t ای هموار می‌باشد.

همان طوری که گفته شد، صورت $f(t)$ به ازای $t \leq 0$ صفر است، و بنابراین $g(t)$ نیز برای $t \geq 0$ متحد با صفر است. برای $t \geq 1$، داریم $f(1-t) = 0$ و لذا $g(t) = f(t)/f(t)$ برای $t \geq 1$ متحد با یک است. بنابراین، g نمونه‌ای از یک تابع پله‌ای هموار با خواص مورد نظر می‌باشد.

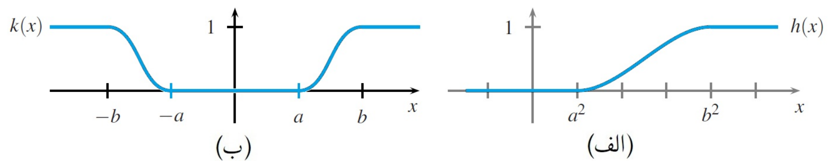
به ازای هر دو عدد حقیقی مثبت $a < b$، یک تغییر متغیر خطی وجود دارد که بازه $[a^2, b^2]$ را بروی بازه $[0,1]$ می‌نگارد، یعنی $x \longmapsto (x-a^2)/(b^2-a^2)$، گیریم،

$$h(t) = g\Big(\frac{x-a^2}{b^2-a^2}\Big).$$

در این صورت، $h:\mathbb{R}\to[0,1]$ تابع پله‌ای همواری است که

$$h(t)=\begin{cases}0 & \text{برای } x\le a^2\\ 1 & \text{برای } x\ge b^2\end{cases}$$

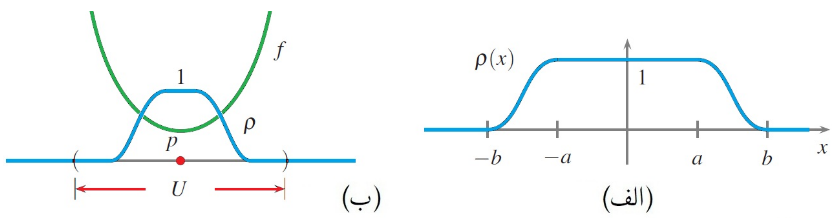
به شکل ۳.۱۳ - الف توجه شود. با تعویض x با x^2، تابعی متقارن بر حسب x بدست می‌آید، یعنی: $k(x):=h(x^2)$. به شکل ۳.۱۳ - ب توجه شود. سر انجام با قرار دادن



شکل ۳.۱۳: (الف) نمودار تابع $h(t)$ (ب) نمودار تابع $k(t)$

$$\begin{aligned}\rho(x) &:= 1-k(x)\\ &= 1-g\Big(\frac{x-a^2}{b^2-a^2}\Big).\end{aligned}$$

به یک تابع ضربه‌ای هموار $\rho(x)$ در 0 می‌رسیم، که بر $[-a,a]$ متحد با یک بوده و با محمل در $[-b,b]$ می‌باشد (به شکل ۳.۱۳ - الف توجه شود). برای هر $q\in\mathbb{R}$، $\rho(x-q)$ یک تابع ضربه‌ای هموار در q است. بسادگی روند بالا برای ساختن تابعی ضربه‌ای از $\mathbb{R}$ را به $\mathbb{R}^n$ می‌توان تعمیم داد. برای حصول



شکل ۴.۱۳: (الف) نمودار تابع $\rho(t)$ (ب) امکان توسیع دامنه تابع با ضرب نمودن تابع ضربه‌ای

به یک تابع ضربه‌ای در $\mathbf{0}$ بر $\mathbb{R}^n$، که بر گوی بسته $\bar{B}(\mathbf{0},a)$ متحد با یک بوده و با محمل در گوی بسته $\bar{B}(\mathbf{0},a)$ باشد، کافی است قرار دهیم

$$\begin{aligned}\sigma(x) &:= \rho(\|x\|)\\ &= 1-g\left(\frac{\|x\|^2-a^2}{b^2-a^2}\right).\end{aligned}\qquad (۲.۱۳)$$

تابع مرکب حاصل σ از توابع هموار، خودش نیز هموار است. برای حصول به تابعی ضربه‌ای در q بر $\mathbb{R}^n$، کافی است از $\sigma(x-q)$ استفاده شود.

۱۳.۲ *تمرین (تابع ضربه‌ای با محمل در یک مجموعه باز). گیریم q نقطه‌ای دلخواه و U همسایگی بازی از q در منیفلد M باشد. یک تابع ضربه‌ای هموار در q با محمل در U بسازید.

در کل دلیلی وجود ندارد که یک تابع هموار بر مجموعه‌ای باز U از یک منیفلد M را به تابعی هموار بر کل M بتوان داد؛ مثلا تابع $\sec(x)$ بر بازه باز $(-\pi/2, \pi/2)$ در $\mathbb{R}$ را در نظر بگیرید. البته، اگر بخواهیم تابع فراگیری حاصله بر M تنها بر یک همسایگی از نقطه‌ای در U با تابع مفروض برابر باشد، امکان ساختن تابعی هموار وجود دارد.

۱۳.۳ گزاره (توسیع هموار یک تابع). فرض کنید f تابعی هموار باشد که بر همسایگی بازی U از نقطه p در منیفلد M تعریف می‌گردد. در این صورت، تابعی هموار $\tilde{f}$ بر M وجود دارد که بر یک همسایگی احتمالا کوچکتر از p با تابع f برابر است.

برهان : یک تابع ضربه‌ای هموار $\rho : M \to \mathbb{R}$ با محمل در U در نظر بگیرید که بر یک همسایگی V از p متحد با صفر است (به شکل ۴.۱۳ - ب توجه شود). فرض کنیم

$$\tilde{f}(q) := \begin{cases} \rho(q) f(q) & q \in U \text{ به ازای } \\ 0 & q \notin U \text{ به ازای } \end{cases}$$

تابع $\tilde{f}$ به عنوان حاصلضربی از توابع هموار بر U، بر بازه U هموار است. اگر $q \notin U$، آنگاه $q \notin \operatorname{supp}\rho$، و لذا یک مجموعه باز شامل q وجود دارد که $\tilde{f}$ بر آن صفر است، زیرا $\operatorname{supp}\rho$ فشرده است. بنابراین، چون $\rho \simeq 1$ بر V، تابع $\tilde{f}$ بر V برابر f است. □

بخش ۲.۱۳ افراز یکانی

اگر $\{U_i\}_{i\in I}$ یک پوشش باز متناهی مفروض برای M باشد، منظور از افراز یکانی تحت تسلط $\{U_i\}_{i\in I}$، گردایه‌ای از توابع هموار نامنفی $\{\rho_i : M \to \mathbb{R}\}_{i\in I}$ است، به گونه‌ای که $\operatorname{supp}\rho \subset U_i$ و بعلاوه

$$\sum \rho_i = 1. \tag{۳.۱۳}$$

وقتی مجموعه I نامتناهی باشد، برای اینکه مجموع در (۳.۱۳) با معنی باشد، لازم است شرط موضعا متناهی[1] بودن را اضافه کنیم. گردایه $\{A_\alpha\}$ از زیرمجموعه‌های یک فضای توپولوژی S را در صورتی موضعا متناهی گوییم که به ازای هر $q \in S$، یک همسایگی باز از q چنان یافت گردد که تنها تعدادی متناهی از مجموعه‌های V_α را قطع نماید. به خصوص، هر q از S در تنها تعدادی متناهی از V_αها قرار دارد.

۱۳.۴ مثال (پوشش بازی که موضعا متناهی نیست). گیریم $U_{r,n}$ بازه باز $(r - 1/n, r + 1/n)$ از خط حقیقی $\mathbb{R}$ باشد. در این صورت، پوشش باز $\{U_{r,n} | r \in \mathbb{Q}, n \in \mathbb{Z}^+\}$ از $\mathbb{R}$ موضعا متناهی نیست.

۱۳.۵ تعریف. منظور از یک افراز یکانی[2] هموار بر منیفلد مفروض M، گردایه‌ای از توابع هموار نامنفی $\{\rho_\alpha : M \to \mathbb{R}\}$ است، به گونه‌ای که

---

[1] locally finite [2] partition of unity

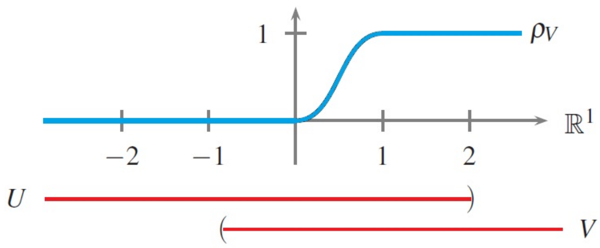
(۱) گردایه محملها $\{\operatorname{supp}\rho_\alpha\}_{\alpha\in A}$ موضعا متناهی است،

(۲) $\sum\rho_\alpha = 1$.

در صورتی که پوششی باز $\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$ برای M در اختیار باشد، در صورتی می‌گوییم افراز یکانی $\{\rho_\alpha\}_{\alpha\in A}$ تحت تسلط[۱] $\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$ است که به ازای هر $\alpha\in A$ ای $\operatorname{supp}\rho_\alpha\subset U_\alpha$.

چون گردایه محملها $\{\operatorname{supp}\rho_\alpha\}_{\alpha\in A}$ موضعا متناهی است (شرط (۱))، هر نقطه q ای تنها در تعدادی متناهی از مجموعه محملها $\operatorname{supp}\rho_\alpha$ قرار دارد. در نتیجه، به ازای تنها تعدادی متناهی از α ها $\rho_\alpha(q)\neq 0$. نتجه اینکه، مجموع در (۲) به ازای هر نقطه‌ای متناهی است.

۱۳.۶ مثال. گیریم U و V بترتیب بازه‌های باز $(-\infty,2)$ و $(-1,\infty)$ در $\mathbb{R}$ باشند، و ρ_V تابعی هموار با نمودار در شکل ۵.۱۳ باشد، مثلا تابع $g(t)$ در (۱.۱۳). فرض کنیم $\rho_U = 1-\rho_V$. د ر این صورت، $\operatorname{supp}\rho_V\subset V$ و $\operatorname{supp}\rho_U\subset U$. در نتیجه $\{\rho_U,\rho_V\}$ یک افراز یکانی تحت تسلط برای پوشش باز $\{U,V\}$ تشکیل می‌دهد.



شکل ۵.۱۳: افراز یکانی $\{\rho_U,\rho_V\}$ تحت تسلط پوشش باز $\{U,V\}$ است.

۱۳.۷ یادداشت. گیریم $\{f_\alpha\}_{\alpha\in A}$ گردایه‌ای از توابع هموار بر منیفلد M باشد، به گونه‌ای که گردایه محملهای آنها $\{\operatorname{supp} f_\alpha\}_{\alpha\in A}$ موضعا متناهی است. در این صورت، هر نقطه q در M چنان همسایگی W_α ای دارد که محملهای $\operatorname{supp}\rho_\alpha$ را برای تنها تعدادی متناهی از α ها قطع مینماید. بنابراین، مجموع $\sum_{\alpha\in A} f_\alpha$ عملا یک مجموع متناهی است. این نشان می‌دهد که تابع $f=\sum f_\alpha$، خوشتعریف است، و بر منیفلد M هموار می‌باشد. چنین تابعی را اصطلاحا یک حاصل جمع موضعا متناهی، می‌گوییم.

بخش ۳.۱۳ وجود افراز یکانی

این بخش را با اثبات وجود افراز یکانی هموار بر منیفلد آغاز می‌کنیم. چون حالت منیفلدهای فشرده ساده‌تر است، و عملا جنبه‌ای از حالت کلی است، فعلا، به جهت سهولت در بحث تنها به اثبات در حالت فشرده می‌پردازیم.

۱۳.۸ لم. اگر $\rho_1,\cdots,\rho_m$ توابع با مقدار حقیقی بر منیفلد M باشند، آنگاه

$$\operatorname{supp}\Big(\sum\rho_i\Big)\subseteq\bigcup\operatorname{supp}\rho_i.$$

[۱] subordinate to

برهان : به عنوان تمرین ۱۳.۱ بر عهده خواننده است. □

۱۳.۹ گزاره. گیریم M منیفلدی فشرده و $\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$ پوششی باز برای M باشد. در این صورت، یک افراز یکانی $\{\rho_\alpha\}_{\alpha\in A}$ تحت تسلط برای $\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$ وجود دارد.

برهان : به ازای هر $q\in M$، مجموعه بازی U_α شامل q از پوشش داده شده انتخاب نموده و فرض می‌کنیم ψ_α تابع ضربه‌ای هموار در q با محمل در U_α باشد (تمرین ۱۳.۱ را ملاحظه کنید). چون $\psi_q(q)>0$، یک همسایگی باز W_q شامل q چنان وجود دارد که بر آن $\psi_q>0$. بنابه فرض فشردگی M، پوشش باز $\{W_q\,|\,q\in M\}$ دارای زیرپوششی متناهی است؛ مثلا $\{W_{q_1},\cdots,W_{q_m}\}$. گیریم $\psi_{q_1},\cdots,\psi_{q_m}$ توابع ضربه‌ای متناظر به آنها باشند. در این صورت $\psi:=\sum\psi_{q_i}$ در هر نقطه دلخواهی $q\in M$ مثبت است، زیرا به ازای یک i ای حتما $q\in W_{q_i}$. تعریف می‌کنیم

$$\varphi_i:=\psi_{q_i}/\psi,\qquad i=1,\cdots,m.$$

به وضوح، $\sum\varphi_i=1$. بعلاوه، $\psi>0$، و وقتی و تنها وقتی $\varphi_i(q)\neq 0$ که $\psi_{q_i}(q)\neq 0$، بنابراین، به ازای یک $\alpha\in A$ ای

$$\operatorname{supp}\varphi_i=\operatorname{supp}\psi_{q_i}\subset U_\alpha.$$

این نشان می‌دهد که $\{\varphi_i\}$ یک افراز یکانی است و به ازای هر i ای یک $\alpha\in A$ وجود دارد که $\operatorname{supp}\varphi_i\subset U_\alpha$.

مرحله بعد، اندیسگذاری مجموعه افراز یکانی همانند پوشش باز است. به ازای $i=1,\cdots,m$، اندیس $\tau(i)\in A$ را چنان اختیار می‌کنیم که $\operatorname{supp}\varphi_i\subset U_{\tau(i)}$. گردایه توابع $\{\varphi_i\}$ را بر حسب $\tau(i)$ ها مجددا دسته‌بندی نموده و به ازای هر $\alpha\in A$ تعریف می‌کنیم:

$$\rho_\alpha:=\sum_{\tau(i)=\alpha}\varphi_i.$$

اگر هیچ i ای پیدا نشود که $\tau(i)=\alpha$، مجموع بالا تهی است و لذا در این حالت تعریف می‌کنیم $\rho_\alpha=0$. در این صورت

$$\begin{aligned}\sum_{\alpha\in A}\rho_\alpha &= \sum_{\alpha\in A}\sum_{\tau(i)=\alpha}\varphi_i\\ &= \sum_{i=1}^{m}\varphi_i=1.\end{aligned}$$

بعلاوه، بنابه لم ۱۳.۸، داریم

$$\operatorname{supp}\rho_\alpha\subset\bigcup_{\tau(i)=\alpha}\varphi_i\subset U_\alpha.$$

در نتیجه، $\{\rho_\alpha\}$ افراز یکانی تحت تسلط برای $\{U_\alpha\}$ است. □

۱۳.۱۰ قضیه (وجود افراز یکانی هموار) . گیریم $\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$ یک پوشش باز برای منیفلد M باشد. در این صورت

(۱) یک افراز یکانی هموار $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$ وجود دارد که در آن هر یک از φ_k ها با محمل فشرده هستند و به ازای هر k، یک $\alpha\in A$ چنان یافت می‌شود که $\operatorname{supp}\varphi_k\subset U_\alpha$.

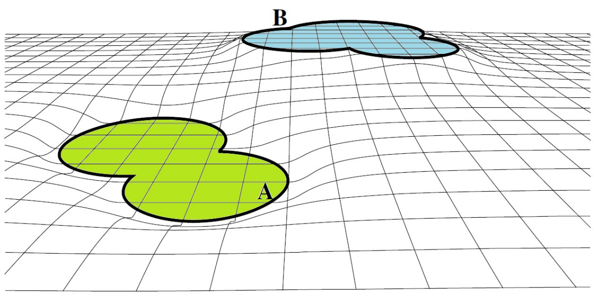
(۲) اگر ویژگی با محمل فشرده بودن را نخواهیم، یک افراز یکانی هموار $\{\rho_\alpha\}$ تحت تسلط برای $\{U_\alpha\}$ وجود خواهد داشت.

بخش ۴.۱۳ مسایل

۱۳.۱* محمل یک مجموع متناهی. لم ۱۳.۸ را اثبات کنید.

۱۳.۲* خانواده موضعا متناهی و مجموعه فشرده. گیریم $\{A_\alpha\}$ خانواده‌ای موضعا متناهی از زیرمجموعه‌های در فضای توپولوژی S باشد. نشان دهید که هر مجموعه فشرده K در S دارای یک همسایگی باز W است که تنها تعدادی متناهی از A_α ها را قطع می‌نماید.

۱۳.۳ لم اوریزون هموار. (الف) گیریم A و B دو مجموعه بسته مجزا در منیفلد M باشند. تابعی هموار f بر M چنان بیابید که بر A متحد با ۰، و بر B متحد با ۱ است. (راهنمایی: یک افراز یکانی هموار $\{\rho_{M-A},\rho_{M-B}\}$ تحت تسلط برای پوشش باز $\{M-A,M-B\}$ در نظر بگیرید. این لم در بخش ؟؟ لازم است.) به شکل ۶.۱۳ توجه شود. (ب) گیریم A زیرمجموعه‌ای بسته و U زیرمجموعه‌ای باز از



شکل ۶.۱۳: تابع حاصل از بکارگیری لم اوریزون

منیفلد M باشد که A را در بر دارد. نشان دهید که تابعی هموار f بر M چنان وجود دارد که بر A متحد با ۱ است و $\operatorname{supp} f\subset U$.

۱۳.۴ محمل قلاب یک تابع. گیریم $F: N\to M$ نگاشتی هموار بین منیفلدها و $h: M\to\mathbb{R}$ تابع حقیقی-مقدار هموار است. ثابت کنید که $\operatorname{supp} F^*h\subset F^{-1}(\operatorname{supp} h)$.

۱۳.۵* محمل قلاب توسط نگاشت تصویر. گیریم $f : M \to \mathbb{R}$ تابعی هموار بر منیفلد M است. اگر N منیفلد دیگری بوده و $\pi : M \times N \to M$ تصویر بروی اولین عامل باشد، ثابت کنید

$$\operatorname{supp}(\pi^* f) = (\operatorname{supp} f) \times N.$$

۱۳.۶ قلاب یک افراز یکانی. فرض کنید $\{\rho_\alpha\}$ یک افراز یکانی بر منیفلد M تحت تسلط برای پوشش باز $\{U_\alpha\}$ برای M است و $F : N \to M$ نگاشتی هموار است. ثابت کنید

(الف) گردایه محملها $\{\operatorname{supp} F^* \rho_\alpha\}$ موضعا متناهی است؛

(ب) گردایه توابع $\{F^* \rho_\alpha\}$ یک افراز یکانی بر N است که تحت تسلط برای پوشش باز $\{F^{-1}(U_\alpha)\}$ برای N می‌باشد.

۱۳.۷* بستار یک گردایه موضعا متناهی. ثابت کنید که اگر $\{A_\alpha\}$ گردایه‌ای موضعا متناهی از زیرمجموعه‌های در یک فضای توپولوژی مفروض باشد، در این صورت

$$\overline{\bigcup A_\alpha} = \bigcup \overline{A_\alpha}, \tag{۴.۱۳}$$

که $\bar{A}$ نمایشگر بستار زیرمجموعه A است.

۱۳.۸ یادداشت. به ازای هر گردایه از زیرمجموعه‌ها A_α، همواره رابطه

$$\bigcup \overline{A_\alpha} \subseteq \overline{\bigcup A_\alpha},$$

برقرار است. اما در حالت کلی، رابطه عکس برقرار نیست. مثلا، فرض کنید A_n بازه بسته $[0, 1 - 1/n]$ در $\mathbb{R}$ باشد. در این صورت

$$\overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n} = \overline{[0,1)} = [0,1],$$

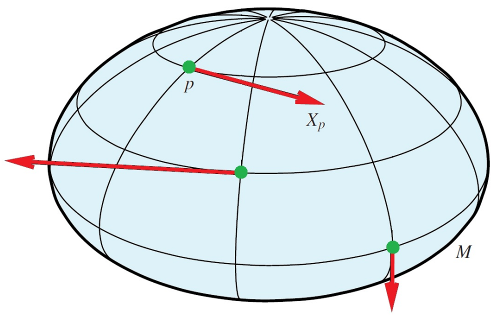
در حالی که

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{A_n} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left[0, 1 - \frac{1}{n}\right] = [0,1).$$

فصل ۱۴

میدان برداری

منظور از میدان برداری X بر منیفلد M، نگاشتی است که به هر نقطه $p \in M$ یک بردار مماس $X_p \in T_pM$ متناظر می‌سازد. به بیان رسمی‌تر، میدان برداری بر M، یک برش از کلاف مماس TM به M است. طبیعی است که چون میدان برداری برشی از کلاف مماس است، از هموار آن بتوان سخن گفت. اولین بخش از این فصل به دو توصیف دیگر از میدانهای برداری هموار اختصاص دارد، یکی بر اساس بیان نسبت به یک دستگاه مختصات موضعی و دیگری بر اساس توابع هموار بر منیفلد. به شکل ۱.۱۴ توجه شود.



شکل ۱.۱۴: میدان برداری بر یک منیفلد

میدانهای برداری به طور طبیعی در بسیاری از موقعیتها ظاهر می‌شوند، نظیر میدان برداری سرعتهای یک سیال، میدان الکتریکی اطراف یک ذره باردار، و میدان گرانشی حاصل از یک جرم. مدل شار یک سیال در نوع خود بسیار کلی است، چرا که هر میدان برداری هموار را، حد اقل به شکل موضعی، به صورت میدانهای سرعت یک شار سیال می‌توان در نظر گرفت. اثر حرکت هر ذره از این شار را منحنی انتگرال (و یا خم انتگرال) میدان برداری مورد نظر می‌نامند. منحنی انتگرال، عبارت از یک منحنی بر منیفلد است که میدان برداری سرعت آن برابر با تحدید میدان برداری مفروض به آن منحنی می‌باشد.

مساله تعیین معادله یک منحنی انتگرال با مساله حل یک دستگاه معادلات دیفرانسیل معمولی مرتبه اول معادل می‌باشد. بنابراین، نظریه معادلات دیفرانسیل معمولی، مجوزی برای وجود و یکتایی منحنی‌های انتگرال فراهم می‌سازد.

مجموعه $\mathcal{X}(M)$ میدانهای برداری هموار بر منیفلد مفروض M به وضوح ساختار فضای برداری دارد. یک عمل براکت $[\,,]$ بر آن تعریف نموده و نشان خواهیم داد که $\mathcal{X}(M)$ به همراه آن براکت ساختار جبر لی دارد، و به این ترتیب به یک فانکتور از کاتگوری منیفلدهای هموار بتوی کاتگوری جبرهای لی دست می‌یابیم. در ادامه به مفهوم میدانهای برداری مرتبط خواهیم پرداخت، که به کمک آن امکان مقایسه میدانهای برداری بر دو منیفلد با استفاده از نگاشت بین آنها فراهم می‌گردد.

بخش ۱.۱۴ همواری یک میدان برداری

بنابه تعریف ۱۲.۱۳، میدان برداری X بر منیفلد M درصورتی هموار است که $X : TM \to M$ به عنوان برشی از کلاف مماس $\pi : TM \to M$ هموار باشد. اگر یک دستگاه مختصات موضعی $(U,\phi) = (U, x^1, \cdots, x^n)$ در اختیار باشد، آنگاه مقدار میدان برداری X در نقطه $p \in U$ را به صورت ترکیب خطی

$$X_p = \sum_{i=1}^{n} a^i(p) \frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_p$$

می‌توان بیان نمود. چون p می‌تواند بر U تغییر کند، پس ضرایب a^i توابعی بر U هستند.

همان طوری که در بخشهای ۱.۱۲ و ۲.۱۲ دیدیم، هر چارت $(U,\phi) = (U, x^1, \cdots, x^n)$ بر منیفلد M موجب چارتی

$$(TU, \tilde{\phi}) = (TU, \bar{x}^1, \cdots, \bar{x}^n, c^1, \cdots, c^n)$$

بر کلاف مماس TM می‌گردد، که در آن $\bar{x}^i = \pi^*(x^i) = x^i \circ \pi$ و c^i ها به صورت

$$v = \sum_{i=1}^{n} c^i(v) \frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_p, \qquad v \in T_pM \text{ برای}$$

تعریف می‌گردند. با مقایسه ضرایب در تساوی

$$\begin{aligned} X_p &= \sum_{i=1}^{n} a^i(p) \frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_p \\ &= \sum_{i=1}^{n} c^i(X_p) \frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_p, \qquad p \in U \text{ برای} \end{aligned}$$

در می‌یابیم که $a^i = c^i \circ X$ به عنوان توابع بر U. بر این اساس، c^i ها توابعی هموار بر TU می‌شوند. بنابراین، اگر X یک میدان برداری هموار بوده و $(U, x^1, \cdots, x^n)$ چارتی دلخواه بر M باشد، آنگاه ضرایب a^i عملا میدان $X = \sum a^i \partial/\partial x^i$ نسبت به کنج $\partial/\partial x^i$ بر U هموار هستند.

بر اساس لم زیر، عکس این مطلب نیز درست است.

۱۴.۱ لم (هموار‌ی میدان برداری بر یک چارت مفروض). گیریم $(U,\phi) = (U, x^1, \cdots, x^n)$ چارتی بر منیفلد M باشد. میدان برداری $X = \sum a^i \partial/\partial x^i$ بر U وقتی و تنها وقتی هموار است که توابع ضریب a^i همگی بر U هموار باشند.

برهان : این لم حالت خاص گزاره ۱۲.۳۰ است، که در آن باید E را کلاف برداری بر M گرفت و s_i ها را میدانهای برداری مختصاتی $\partial/\partial x^i$ در نظر گرفت.
چون بیان صریح ساختار منیفلدی بر کلاف مماس TM را در اختیار داریم، لم را مستقیما نیز می‌توانیم اثبات کنیم. چون $\tilde{\phi} : TU \xrightarrow{\sim} U \times \mathbb{R}^n$ دیفئومورفیسم است، $X : TM \to M$ وقتی و تنها وقتی هموار است که $\tilde{\phi} \circ X : U \to U \times \mathbb{R}^n$ هموار باشد. برای $p \in U$، داریم

$$\begin{aligned} (\tilde{\phi} \circ X)(p) &= \tilde{\phi}(X_p) \\ &= (x^1(p), \cdots, x^n(p), c^1(X_p), \cdots, c^n(X_p)) \\ &= (x^1(p), \cdots, x^n(p), a^1(p), \cdots, a^n(p)). \end{aligned}$$

توابع $x^1, \cdots, x^n$ به عنوان توابع مختصاتی بر U هموارند. بنابراین، بر اساس گزاره ۶.۱۷، وقتی و تنها وقتی $\tilde{\phi} \circ X$ هموار است که همه توابع a^i بر U هموار باشند. □

بر اساس این لم، روشی برای بررسی هموار‌ی میدان برداری بر منیفلد بر اساس هموار‌ی توابع مختصاتی آن نسبت به کنج مختصاتی را فراهم می‌گردد.

۱۴.۲ گزاره (هموار‌ی میدان برداری بر اساس توابع ضریب). گیریم X میدانی برداری بر منیفلد M است. احکام زیر معادلند:

(۱) میدان برداری X بر منیفلد M هموار است.

(۲) منیفلد M اطلسی دارد که به ازای هر چارت $(U,\phi) = (U, x^1, \cdots, x^n)$ از آن اطلس، همه ضرایب a^i میدان برداری $X = \sum a^i \partial/\partial x^i$ نسبت به کنج $\partial/\partial x^i$ هموارند.

(۳) نسبت به هر چارت دلخواه $(U,\phi) = (U, x^1, \cdots, x^n)$ بر منیفلد M، ضرایب a^i میدان برداری $X = \sum a^i \partial/\partial x^i$ نسبت به کنج $\partial/\partial x^i$ هموارند.

برهان : $(1) \Longleftarrow (2)$: فرض کنیم (۲) برقرار باشد. بنابه لم قبل، X بر هر چارت (U,ϕ) از یک اطلس برای M هموار است. در نتیجه، X بر M هموار است.
$(3) \Longleftarrow (1)$: هر میدان برداری هموار X بر M، بر هر چارت (U,ϕ) از M هموار است. از لم قبل نتیجه می‌گیریم که (۳) درست است.
$(2) \Longleftarrow (3)$: بدیهی است. □

درست مثل بخش ۵.۲، هر میدان برداری X بر منیفلد M، یک نگاشت خطی بر جبر $C^\infty(M)$ توابع هموار بر M القاء می‌نماید: به ازای هر $f \in C^\infty(M)$، تابع Xf را به صورت

$$(Xf)(p) := X_p f, \qquad p \in M,$$

تعریف می‌کنیم. بر اساس این عمل بر توابع هموار، ابزار دیگری برای بررسی همواری میدانهای برداری می‌توانیم مطرح کنیم:

۱۴.۳ گزاره (همواری میدان برداری بر اساس توابع). میدان برداری X بر M وقتی و تنها وقتی هموار است که به ازای هر تابع هموار f بر M، تابع Xf نیز بر M هموار باشد.

برهان : ($\Longleftarrow$) فرض کنید X هموار بوده و $f \in C^\infty(M)$. بنابه گزاره ۱۴.۲، بر هر چارت دلخواه $(U,\phi) = (U, x^1, \cdots, x^n)$ بر منیفلد M، ضرایب a^i میدان برداری $X = \sum a^i \partial/\partial x^i$ هموارند. در نتیجه، تابع $Xf = \sum a^i \partial f/\partial x^i$ نیز بر U هموار است. چون M را با چارتها می‌شود پوشاند، بنابراین Xf بر کل M هموار است.
($\Longrightarrow$) گیریم $(U,\phi) = (U, x^1, \cdots, x^n)$ چارتی دلخواه بر منیفلد M باشد. بنابه گزاره ۱۳.۳، به ازای هر $k = 1, \cdots, n$، هر یک از توابع مختصاتی x^k را به تابعی هموار $\tilde{x}^k$ بر M می‌شود توسیع داد، که بر همسایگی‌ای از p در U با x^k برابر است. بنابراین، تساوی

$$\begin{aligned} X\tilde{x}^k &= \Big(\sum a^i \frac{\partial f}{\partial x^i}\Big)\tilde{x}^k \\ &= \Big(\sum a^i \frac{\partial f}{\partial x^i}\Big)x^k = a^k, \end{aligned}$$

را بر V داریم. این نشان می‌دهد که همه توابع a^k در p هموارند. چون p نقطه‌ای دلخواه از U بود، توابع a^k بر کل U نیز هموار هستند. اکنون، بنابه محک همواری در گزاره ۱۴.۲، X هموار است.
توسیع x^k ها به توابعی هموار و فراگیر $\tilde{x}^k$ بر کل M لازم بود، زیرا با اینکه $Xx^k = a^k$ برقرار است، اما تابع مختصاتی x^k تنها بر U تعریف می‌گردد، و نه بر کل M، و لذا شرط همواری بر Xf قابل استفاده در مورد Xx^k نیست. □

بر اساس گزاره ۱۴.۳، هر میدان برداری هموار X را به عنوان عملگری خطی $X : C^\infty(M) \to C^\infty(M)$ بر جبر توابع هموار بر M می‌توانیم در نظر بگیریم. بر اساس گزاره ۲.۱۹، این عملگر خطی $X : C^\infty(M) \to C^\infty(M)$ مشتق است؛ یعنی به ازای هر $f, g \in C^\infty(M)$، داریم

$$X(f.g) = (Xf).g + f.(Xg).$$

پس در مجموع، هر میدان برداری هموار بر M را هم به عنوان برشی هموار از کلاف مماس TM و هم به عنوان مشتقی از جبر $C^\infty(M)$ توابع هموار می‌شود در نظر گرفت. در واقع، می‌توان نشان داد که این دو تعبیر از میدانهای برداری هموار معادلند (تمرین ۱۹.۲۴).
گزاره ۱۳.۳ در خصوص توسیع هموار توابع، مشابهی در حالت میدانهای برداری دارد.

۱۴.۴ گزاره (توسیع هموار یک میدان برداری). فرض کنیم X میدان برداری هموار تعریف شده بر همسایگی باز U از نقطه p از منیفلد M باشد. در این صورت، یک میدان برداری هموار $\tilde{X}$ بر M وجود دارد که بر یک همسایگی احتمالا کوچکتر از U و شامل p با X موافق می‌باشد.

برهان : یک تابع ضربه‌ای هموار $\rho : M \to \mathbb{R}$ با محمل در U که بر همسایگی V از p متحد با ۱ است را در نظر بگیرید. تعریف می‌کنیم

$$\tilde{X}_q = \begin{cases} \rho(q) X_q & \text{برای } q \in U \\ 0 & \text{برای } q \notin U \end{cases}$$

مابقیه اثبات شبیه به گزاره ۱۳.۳ است. □

بخش ۲.۱۴ منحنی انتگرال

در مثال ۱۲.۲۱ نشان داده شد که از هر نقطه از صفحه دایره‌ای می‌توان عبور داد که بردار سرعت آن در نقطه مورد نظر با برداری که از قبل در آن نقطه معرفی شده بود، برابر است. این چنین دایره‌ها، نمونه‌هایی از منحنی انتگرال برای میدان برداری هستند، که اکنون به دنبال تعریف آن هستیم.

۱۴.۵ تعریف. گیریم X میدان برداری هموار بر منیفلد مفروض M است، و $p \in M$. منظور از منحنی انتگرال[۱] برای X، منحنی همواری $c : (a,b) \to M$ است که به ازای هر $t \in (a,b)$ ای $c'(t) = X_{c(t)}$. اغلب فرض می‌شود بازه باز (a,b) صفر را در بر دارد. در این حالت، اگر $c(0) = p$، اصطلاحا می‌گوییم c منحنی انتگرال آغازی از p است و p را نقطه آغاز[۲] c می‌نامیم. اغلب، برای نشان دادن وابستگی یک منحنی انتگرال به نقطه آغازش p، بجای $c(t)$ از نماد $c_t(p)$ استفاده می‌کنیم.

۱۴.۶ تعریف. منحنی انتگرال را در صورتی ماکسیمال[۳] گوییم که آن را به بازه‌ای بزرگتر نتوان توسیع داد.

۱۴.۷ مثال. میدان برداری $X_{(x,y)} = \langle -y, x \rangle$ بر $\mathbb{R}^2$ را به یاد بیاورید (شکل ۶.۱۲). منحنی انتگرال $c(t)$ میدان برداری X آغازی از نقطه $(1,0) \in \mathbb{R}^2$ را می‌خواهیم بیابیم. شرط اینکه $c(t) = (x(t), y(t))$ منحنی انتگرال باشد، این است که $c'(t) = X_{c(t)}$، یا

$$\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y(t) \\ x(t) \end{bmatrix},$$

درنتیجه، باید دستگاه معادلات دیفرانسیل معمولی مرتبه اول

$$(a)\ \ \dot{x} = -y, \qquad (b)\ \ \dot{y} = x, \tag{۱.۱۴}$$

را حل کنیم؛ و البته، باید شرایط اولیه $(x(0), y(0)) = (1,0)$ را نیز باید در نظر بگیریم. از معادله (a) در (۱.۱۴) نتیجه می‌شود $y = -\dot{x}$، و بنابراین $\dot{y} = -\ddot{x}$. با جاگذاری آن در معادله (b) از (۱.۱۴) نتیجه می‌شود که $\ddot{x} = -x$. جواب عمومی این معادله بسیار معروف است:

$$x = A\cos t + B\sin t. \tag{۲.۱۴}$$

---

[۱] integral curve [۲] initial point [۳] maximal

بنابراین،

$$y = -\dot{x} = A\sin t - B\cos t. \tag{۳.۱۴}$$

اکنون، از برقراری شرایط اولیه نتیجه می‌گردد که $A = 1$ و $B = 0$. لذا منحنی انتگرال آغازی از $(1,0)$ عبارت است از $c(t) = (\cos t, \sin t)$.

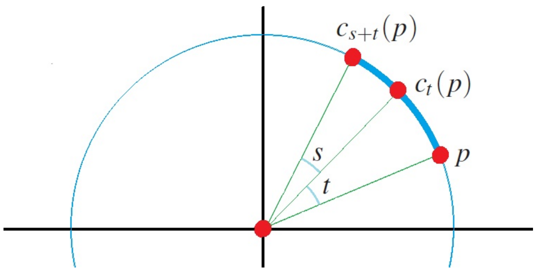
در کل، اگر نقطه آغازی منحنی انتگرال، یعنی نقطه نظیر به $t = 0$، عبارت از $p = (x_0, y_0)$ باشد، آنگاه بنابه (۲.۱۴) و (۳.۱۴) داریم $A = x_0$ و $B = -y_0$ و جواب عمومی (۱.۱۴) عبارت است از

$$x = x_0\cos t - y_0\sin t, \qquad y = x_0\sin t + y_0\cos t, \qquad t \in \mathbb{R}.$$

این را به شکل ماتریسی به صورت

$$\begin{aligned} c(t) &= \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{bmatrix} p, \end{aligned}$$

می‌توان نوشت؛ که این نشان می‌دهد که منحنی انتگرال X آغازی از p را با دوران نقطه p در جهت عقربه‌های ساعت باندازه t رادیان و با مرکز در مبداء می‌توان بدست آورد. توجه کنید که $c_s(c_t(p)) = c_{s+t}(p)$. به شکل ۲.۱۴ توجه شود. زیرا اگر ابتدا با زاویه t نقطه‌ای را دوران دهیم، و سپس نتیجه را با زاویه s دوران دهیم، مثل آن است که از ابتدا نقطه را با زاویه $s+t$ دوران دهیم. بعلاوه، به ازای هر $t \in \mathbb{R}$ ای، نگاشت $c_t : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ دیفئومورفیسمی با وارون c_{-t} است.



شکل ۲.۱۴: منحنی انتگرال میدان برداری $X_{(x,y)} = \langle -y, x \rangle$

۱۴.۸ تعریف. گیریم $\mathrm{Diff}(M)$ گروه دیفئومورفیسمهای از منیفلد M بروی خودش باشد، که عمل گروهی آن، ترکیب توابع است. در این صورت هومورفیسم $c : \mathbb{R} \to \mathrm{Diff}(M)$ را گروه یک-پارامتری[۱] از دیفئومورفیسمهای در M می‌نامند.

[۱] one-parameter group

در مثال ۱۴.۷، منحنیهای انتگرال میدان برداری $X_{(x,y)} = \langle -y, x\rangle$ بر $\mathbb{R}^2$ به یک گروه ی-پارامتری از دیفئومورفیسمهای در $\mathbb{R}^2$ منجر شده‌اند.

۱۴.۹ مثال. گیریم X میدان برداری $x^2\, d/dx$ بر خط حقیقی $\mathbb{R}$ باشد. منحنی انتگرال ماکسیمال X آغازی از $x = 1$ را مشخص کنید.

حل : فرض کنیم منحنی انتگرال مورد نظر $x(t)$ باشد. در این صورت، اگر $x'(t)$ بردار سرعت منحنی انتگرال $x(t)$ بوده و $\dot{x}(t)$ مشتق معمولی تابع با مقدار حقیقی $x(t)$ باشد، آنگاه شرط $x'(t) = X_{x(t)}$ به این معنی است که $\dot{x}(t)\, d/dx = x^2(t)\, d/dx$. بنابراین، $x(t)$ در معادله دیفرانسیل

$$\frac{dx}{dt} = x^2, \qquad x(0) = 1, \tag{۴.۱۴}$$

صدق می‌کند. برای حل (۴.۱۴)، آن را تفکیک می‌کنیم: $dx/x^2 = dt$. اگر از دو طرف این تساوی انتگرال بگیریم، نتیجه خواهد شد که $-1/x = t + C$ به ازای یک ثابت دلخواه C؛ در نتیجه $x = -1/(t+C)$. شرط اولیه $x(0) = 1$ ایجاب می‌کند که $C = -1$. در نتیجه، $x(t) = 1/(1-t)$. ملاحظه می‌گردد که بازه ماکسیمال شامل 0 که $x(t)$ بر آن تعریف گردد، $(-\infty, 1)$ است. *

از این مثال چنین می‌توان برداشت نمود که ممکن است دامنه تعریف یک منحنی انتگرال ماکسیمال، کل خط حقیقی نباشد.

بخش ۳.۱۴ شار موضعی

دو مثال انتهایی بخش قبلی نشان دادند که مساله تعیین منحنیهای انتگرال یک میدان برداری مفروض، موضعا معادل با حل یک دستگاه معادلات دیفرانسیل معمولی مرتبه اول با مقادیر اولیه است. در کل، اگر X میدان برداری هموار بر منیفلد X باشد، برای حل مساله تعیین منحنی انتگرال $c(t)$ میدان X آغازی از نقطه p، ابتدا یک دستگاه مختصات موضعی $(U,\phi) = (U, x^1, \cdots, x^n)$ حول p را درنظر می‌گیریم. بر اساس مختصات موضعی، داریم

$$X_{c(t)} = \sum_{i=1}^{n} a^i(c(t)) \frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_{c(t)} \qquad \text{و بنابه گزاره ۸.۲۴} \qquad c'(t) = \sum_{i=1}^{n} \dot{c}(t) \frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_{c(t)}$$

که $c^i(t) = x^i \circ c(t)$ برابر i امین مولفه $c(t)$ در چارت (U,ϕ) می‌باشد. بنابراین، شرط $c'(t) = X_{c(t)}$ با

$$\dot{x}^i(t) = a^i(c(t)), \qquad i = 1, \cdots, n, \tag{۵.۱۴}$$

معادل است. این یک دستگاه معادلات دیفرانسیل معمولی است؛ شرط اولیه $c(0) = p$ به صورت $(c^1(0), \cdots, c^n(0)) = (p^1, \cdots, p^n)$ ترجمه می‌شود. بنابه قضیه وجود و یکتایی جواب دستگاههای معادلات دیفرانسیل معمولی، چنین دستگاهی به تعبیر زیر دارای جواب یکتا است.

۱۴.۱۰ قضیه. گیریم V زیرمجموعه‌ای باز از $\mathbb{R}^n$ است، p_0 نقطه‌ای در V و $f : V \to \mathbb{R}$ تابعی هموار باشد. معادله دیفرانسیل $dy/dt = f(y)$ با شرط آغازی $y(0) = p_0$، جوابی هموار و منحصر بفرد

$y:(a(p_0),b(p_0))\to V$ دارد، که $(a(p_0),b(p_0))$ بازه باز ماکسیمال شامل 0 است که y بر آن تعریف می‌گردد.

یکتایی جواب به این معنی است که اگر $z:(\delta,\varepsilon)\to V$ در همان معادله دیفرانسیل $dz/dt=f(z)$ و شرط آغازی $z(0)=p_0$ صدق کند، آنگاه دامنه (δ,ε) تابع z زیرمجموعه‌ای از $(a(p_0),b(p_0))$ است، و بر بازه (δ,ε) تساوی $z(t)=y(t)$ برقرار است.

این قضیه وجود و یکتایی منحنی انتگرال ماکسیمال X آغازی از هر نقطه p از دامنه یک چارت مختصاتی U را تضمین می‌کند.

در مرحله بعد مایلیم تا چگونگی بستگی منحنی انتگرال به نقطه آغازیش را بررسی کنیم. باز هم مساله را به صورت موضعی، و لذا بر $\mathbb{R}^n$ بررسی می‌کنیم. در این صورت تابع y تابعی از دو متغیر t و q خواهد بود، و شرط اینکه y منحنی انتگرال آغازی از نقطه q باشد، به این معنی است که

$$\frac{\partial y}{\partial t}(t,q)=f(y(t,q)),\qquad y(0,q)=q. \tag{۶.۱۴}$$

قضیه زیر از نظریه معادلات دیفرانسیل معمولی، وابستگی جواب به نقطه آغازی به شکل هموار را تضمین می‌کند.

۱۴.۱۱ قضیه. گیریم V زیرمجموعه‌ای باز از $\mathbb{R}^n$ بوده و $f:V\to\mathbb{R}$ تابعی هموار بر V باشد. در این صورت، به ازای هر نقطه‌ی $p_0\in V$، همسایگی بازی W از p_0 در V و عددی $\varepsilon>0$ و تابعی هموار $y:(-\varepsilon,\varepsilon)\times W\to V$ چنان وجود دارد که

$$\frac{\partial y}{\partial t}(t,q)=f(y(t,q)) \quad \text{به ازای هر} \quad (t,q)\in(-\varepsilon,\varepsilon)\times W \qquad \text{و} \qquad y(0,q)=q$$

برای مشاهده اثبات این دو قضیه، به ضمیمه ج، صفحات ۳۵۹ تا ۳۶۶ کتاب [۷] مراجعه شود.

از قضیه ۱۴.۱۱ و فرمول (۶.۱۴) نتیجه می‌گردد که اگر X میدان برداری هموار بر چارت U بوده و $p\in U$، آنگاه یک همسایگی باز W از p در U، عددی $\varepsilon>0$ و نگاشتی هموار

$$F:(-\varepsilon,\varepsilon)\times W\to U, \tag{۷.۱۴}$$

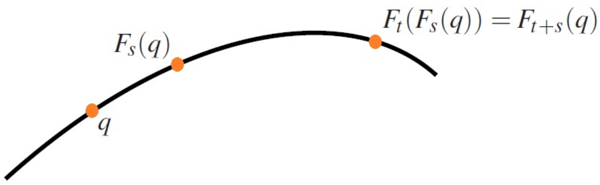
چنان وجود دارند که به ازای هر $q\in W$، تابع $F(t,q)$ منحنی انتگرال X آغازی از q است. بخصوص، $F(0,q)=q$. معمولا بجای $F(t,q)$ از نماد $F_t(q)$ استفاده می‌کنیم.

فرض کنید s و t در بازه $(-\varepsilon,\varepsilon)$ باشند، طوری که $F_t(F_s(q))$ و $F_{s+t}(q)$ هر دو تعریف شوند. در این صورت، $F_t(F_s(q))$ و $F_{s+t}(q)$ به عنوان توابعی از t منحنی انتگرال X آغازی از نقطه $F_s(q)$ هستند، یعنی هر دو به ازای $t=0$ به این نقطه می‌رسند. بنابه یکتایی منحنی انتگرال آغازی از یک نقطه، نتیجه می‌گیریم که

$$F_t(F_s(q))=F_{s+t}(q). \tag{۸.۱۴}$$

نگاشت F در (۷.۱۴) را شار موضعی[۱] تولید شده توسط میدان برداری X می‌نامند. به ازای هر $q\in U$، تابع $t\mapsto F_t(q)$ را یک خط شار[۲] از شار موضعی مورد نظر می‌گویند. هر خط شار، یک منحنی

---
۱ local flow ۲ flow line



شکل ۳.۱۴: خط شار گذرنده از q از بین یک شار موضعی

انتگرال از X است. اگر شار موضعی F بر $\mathbb{R}\times M$ تعریف گردد، آن را شار فراگیر[۳] می‌نامند. هر میدان برداری یک شار موضعی حول هر نقطه دلخواه دارد، اما در حالت کلی لزومی ندارد شار فراگیر داشته باشد. میدانی که دارای شار فراگیر باشد، میدان برداری کامل نامیده می‌شود. اگر F یک شار فراگیر باشد، آنگاه به ازای هر $t\in\mathbb{R}$ ای $F_t\circ F_{-t} = F_{-t}\circ F_t = \mathbb{1}_M$؛ بنابراین، $F_t : M\to M$ دیفئومورفیسم است. در نتیجه، هر شار فراگیر بر M موجب یک گروه یک-پارامتری از دیفئومورفیسمهای M می‌گردد.
این انگیزه‌ای برای تعریف بعدی است.

۱۴.۱۲ تعریف. منظور از شار موضعی حول نقطه p در یک مجموعه باز U از منیفلد مفروض M، تابعی است هموار مانند $F:(-\varepsilon,\varepsilon)\times W\to U$، که ε یک عدد حقیقی مثبت است و W همسایگی بازی از p در U است، به گونه‌ای که اگر بنویسیم $F_t(q)=F(t,q)$، آنگاه

(۱) به ازای هر $q\in W$ ای $F_0(q)=q$.

(۲) $F_t(F_s(q)) = F_{s+t}(q)$ ، هر گاه دو طرف تعریف شوند.

اگر $F(t,q)$ یک شار موضعی از میدان برداری X بر U باشد، آنگاه

$$F(0,q)=q \qquad \text{و} \qquad \frac{\partial F}{\partial t}(0,q) = X_{F(0,q)} = X_q$$

بنابراین، میدان برداری X را از روی شار موضعی‌اش می‌توان بازسازی نمود.

۱۴.۱۳ مثال. تابع $F:\mathbb{R}\times\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ با ضابطه

$$F\left(t,\begin{bmatrix} x\\ y\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}\cos t & -\sin t\\ \sin t & \cos t\end{bmatrix}\begin{bmatrix} x\\ y\end{bmatrix},$$

[۳] global flow

یک شار فراگیر بر $\mathbb{R}^2$ است که توسط میدان برداری زیر تولید شده است:

$$\begin{aligned} X_{(x,y)} &= \frac{\partial F}{\partial t}(t,(x,y))\Big|_{t=0} \\ &= \begin{bmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\Big|_{t=0} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -y \\ x \end{bmatrix} \\ &= -y\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial y}. \end{aligned}$$

این درست همان میدان برداری در مثال ۱۲.۲۱ است. *

بخش ۴.۱۴ براکت لی

گیریم X و Y میدانهای برداری هموار بر زیرمجموعه باز U از منیفلد M باشد. X و Y را به عنوان مشتقات بر $C^\infty(U)$ در نظر می‌گیریم. به ازای هر تابع هموار f بر U، بنابه گزاره ۱۴.۳ تابع Yf بر U هموار است، و تابع $(XY)f := X(Yf)$ نیز بر U هموار است. بعلاوه، چون X و Y هر دو نگاشتهایی $\mathbb{R}-$خطی از $C^\infty(U)$ به $C^\infty(U)$ هستند، نگاشت $XY : C^\infty(U) \to C^\infty(U)$ نیز $\mathbb{R}-$خطی است. اما XY در خاصیت لایبنیتزی که برای مشتق بودن لازم است، صدق نمی‌کند: اگر $f, g \in C^\infty(U)$، آنگاه

$$\begin{aligned} XY(f.g) &= X((Yf).g + f.(Yg)) \\ &= (XYf).g + (Yf).(Xg) + (Xf).(Xg) + f.(XYg). \end{aligned}$$

چنانچه نگاه دقیقتری به این فرمول بیاندازیم، ملاحظه می‌کنیم که جملات $(Xf)(Yg)$ و $(Yf)(Xg)$ هستند که XY را از مشتق بودن می‌اندازند، و بعلاوه نسبت به X و Y متقارن نیز هستند. بنابراین، اگر $YX(f.g)$ را محاسبه کرده و آن را از $XY(f.g)$ کم کنیم، جملات اضافه محو می‌گردند، و $XY - YX$ مشتقی از $C^\infty(U)$ است.

بر این اساس، به ازای هر دو میدان برداری X و Y بر U و هر $p \in U$، براکت لی[۱] $[X, Y]$ آنها در نقطه p را به صورت

$$[X, Y]_p f := (X_p Y - Y_p X) f, \qquad \text{به ازای هر تابع هموار } f \text{ در } p$$

تعریف می‌کنیم. با همان محاسبات انجام شده در بالا، ولی با مقداریابی در p، بسادگی مشاهده می‌گردد که $[X, Y]_p$ یک مشتق برای جبر $C_p^\infty(U)$ است، و بنابراین، یک بردار مماس در p می‌باشد (به تعریف ۸.۳ توجه شود). چون p می‌تواند تغییر کند، پس $[X, Y]$ یک میدان برداری بر U است.

۱۴.۱۴ گزاره. اگر X و Y میدانهای برداری هموار بر M باشند، آنگاه میدان برداری $[X, Y]$ نیز بر U هموار است.

---

[۱] barcket Lie

برهان : بنابه گزاره ۱۴.۳، کافی است نشان دهیم که اگر f تابعی هموار بر M باشد، آنگاه تابع $[X,Y]f$ نیز هموار است. اما $[X,Y]f = (XY - YX)f = X(Yf) - Y(Xf)$ که به وضوح بر M هموار است، زیرا X و Y هر دو هموارند. □

از این گزاره استنباط می‌گردد که براکت لی تعریف شده بر فضای برداری $\mathcal{X}(M)$ همه میدانهای برداری هموار بر M، یک عمل ضرب بر آن فراهم می‌سازد. به وضوح $[X,Y] = -[Y,X]$.

۱۴.۱۵ تمرین (اتحاد ژاکوبی). برقراری اتحاد ژاکوبی[1] را نشان دهید:

$$\sum_{\text{دوری}} [X,[Y,Z]] = 0.$$

این نماد بدان معنی است در مجموع بالا سه میدان برداری X، Y و Z به صورت دوری جایگشت نموده‌اند. به عبارت دیگر،

$$\sum_{\text{دوری}} [X,[Y,Z]] = [X,[Y,Z]] + [Y,[Z,X]] + [Z,[X,Y]].$$

۱۴.۱۶ تعریف. گیریم $\mathbb{K}$ یک هیات است. منظور از جبر لی[2] بر $\mathbb{K}$، یک فضای برداری V بر $\mathbb{K}$ به همراه یک ضرب $[\,,\,] : V \times V \to V$، بنام براکت، است که دارای خواص به شرح ذیل می‌باشد: به ازای هر $a,b \in \mathbb{K}$ و هر $X,Y,Z \in V$ ای

(۱) (دو خطی بودن)
$$[aX + bY, Z] = a[X,Z] + b[Y,Z],$$
$$[Z, aX + bY] = a[Z,X] + b[Z,Y]$$

(۲) (پادتقارنی)
$$[X,Y] = -[Y,X]$$

(۳) (اتحاد ژاکوبی)
$$\sum_{\text{دوری}} [X,[Y,Z]] = 0$$

در ادامه بیشتر به جبرهای حقیقی می‌پردازیم، یعنی جبرهایی بر هیات اعداد حقیقی $\mathbb{R}$. بر این اساس، مادامی که خلافش تصریح نشود، همه جبر های لی حقیقی فرض می‌شوند.

۱۴.۱۷ مثال. بر فضای برداری دلخواه V، به ازای هر $X,Y \in V$ تعریف می‌کنیم $[X,Y] = 0$. در این صورت، V با این براکت یک جبر لی می‌گردد. آن را اصطلاحا جبر لی آبلی می‌نامند.

در تعریف جبر که در بخش ۲.۲ آورده شد، می‌باید ضرب شرکتپذیر باشد. در هر جبر لی آبلی، کروشه شرکتپذیر است. اما در حالت کلی، براکت یک جبر لی دلخواه شرکتپذیر نیست. بنابراین،
جبر لی بر خلاف اسمش، در حالت کلی اصلا جبر نیست.

۱۴.۱۸ مثال. اگر M منیفلد باشد، آنگاه فضای برداری $\mathcal{X}(M)$ همه میدانهای برداری هموار بر M یک جبر لی حقیقی با کروشه لی $[\,,\,]$ به عنوان کروشه است.

---

[1] Jacobi identity [2] Lie algebra

۱۴.۱۹ مثال. گیریم $\mathbb{K}^{n\times n}$ فضای برداری همه ماتریسهای $n\times n$ بر هیات $\mathbb{K}$ باشد. به ازای هر $X, Y \in \mathbb{K}^{n\times n}$ تعریف می‌کنیم $[X,Y] := XY - YX$، که XY به معنی ضرب مالتریسی X در Y می‌باشد. در این صورت، $\mathbb{K}^{n\times n}$ با این کروشه، یک جبر لی است. دوخطی بودن و پادتقارنی $[\,,\,]$ بدیهی است، اما بررسی اتحا ژاکوبی در آن نیاز به محاسبه دارد، و محتوی تمرین ۱۴.۱۱ می‌باشد.

در حالت کلی،

۱۴.۲۰ لم. چنانچه A یک جبر بر هیات $\mathbb{K}$ باشد، آنگاه حاصلضرب $[x,y] := xy - yx$، که $x, y \in A$، A را به یک جبر لی بر $\mathbb{K}$ تبدیل می‌سازد.

۱۴.۲۱ تعریف. منظور از مشتق[1] برای جبر لی مفروض V بر هیات $\mathbb{K}$، یک نگاشت $\mathbb{K}$−خطی $D: V \to V$ است، که در رابطه ضربی ذیل صدق می‌کند:

$$D[Y,Z] = [Dy,Z] + [Y,DZ], \qquad Y,Z \in V$$

۱۴.۲۲ تعریف. گیریم V یک جبر لی بر هیات $\mathbb{K}$ است. به ازای هر $X \in V$، نگاشت $\mathrm{ad}_X : V \to V$ را به صورت $\mathrm{ad}_X(Y) := [X,Y]$ تعریف می‌کنیم. اتحاد اکوبی را به صورت

$$[X,[Y,Z]] = [[X,Y],Z] + [Y,[X,Z]],$$

می‌توانیم بازنویسی کنیم، در نتیجه $\mathrm{ad}_X[Y,Z] = [\mathrm{ad}_X Y, Z] + [Y, \mathrm{ad}_X Z]$، که این نشان می‌دهد، نگاشت $\mathrm{ad}_X : V \to V$ یک مشتق برای جبر لی V می‌باشد. اصطلاحا ad_X را الحاقی نسبت به X می‌نامند.

بخش ۵.۱۴ رانش میدانهای برداری

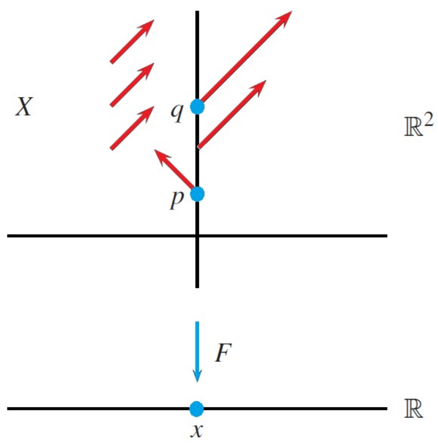
گیریم $F: M \to N$ نگاشتی هموار بین منیفلدها و $F_*: T_pN \to T_{F(p)}M$ دیفرانسیل آن در نقطه p از N باشد. اگر $X_p \in T_pN$، آنگاه $F_*(X_p)$ را رانش[2] بردار X_p در p می‌نامند. این مفهوم در حالت کلی به میدانهای برداری قابل تعمیم نیست، زیرا اگر X میدانی برداری بر N باشد و $z = F(p) = F(q)$ برای دو نقطه متفاوت p و q، آنگاه X_p و X_q هر دو به بردارهای مماس $F_*(X_p)$ و $F_*(X_q)$ در $z \in M$ رانده می‌شوند، و لزومی ندارد که آنها با هم برابر باشند (به شکل ۴.۱۴ توجه شود).

در یک حالت خاص مهم، یعنی وقتی $F: N \to M$ دیفئومورفیسم باشد، هر میدان برداری X بر N دارای میدان برداری رانده شده F_*X خوشتعریف است. در این حالت، چون F یکبیک است، هیچ ابهامی از آن چه که گفته شد رخ نمی‌دهد، به این معنی که $(F_*X)_{F(p)} = F_{*,p}(X_p)$، و چون F یکبیک است، پس در همه جا F_*X خوشتعریف می‌باشد.

بخش ۶.۱۴ میدانهای برداری مرتبط

در حالت کلی، به ازای هر نگاشت هموار $F: N \to M$، رانده شده یک میدان برداری مفروض بر N، ممکن است میدان برداری خوشتعریفی بر M نباشد. اگر چنین میدان برداری رانده شده‌ای یافت گردد، اصطلاحا آن دو میدان برداری را مرتبط[3] می‌نامند.

[1] derivation [2] pushforward [3] related



شکل ۴.۱۴: میدان برداری X توسط تصویر بر اولین درآیه $F:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ به میدان برداری رانده نمی‌شود

۱۴.۲۳ تعریف. گیریم $F:N\to M$ یک نگاشت هموار بین منیفلدها باشد. میدان برداری X بر N را در صورتی با میدان برداری $\bar{X}$ بر M $F-$مرتبط گوییم که

$$F_{*,p}(X_p)=\bar{X}_{F(p)} \qquad \text{به ازای هر } p\in N \text{ ای} \tag{۹.۱۴}$$

۱۴.۲۴ مثال (رانش بوسیله دیفئومورفیسم). اگر $F:N\to M$ دیفئومورفیسم بوده و X میدانی برداری بر N باشد، آنگاه رانش F_*X قابل تعریف است. بنابه تعریف، میدان برداری X بر N با میدان برداری F_*X بر M $F-$مرتبط هستند. در بخش ۴.۱۶، مثالهایی از میدانهای برداری مرتبط شده بوسیله دیفئومورفیسمها ملاحظه خواهید نمود.

شرط (۹.۱۴) برای $F-$مرتبط بودن را به شکل زیر می‌شود بازنویسی نمود.

۱۴.۲۵ گزاره. گیریم $F:N\to M$ یک نگاشت هموار بین منیفلدها باشد. در این صورت، شرط لازم و کافی برای اینکه میدان برداری X بر N با میدان برداری $\bar{X}$ بر M $F-$مرتبط باشد، آن است که

$$X(g\circ F)=(\bar{X}g)\circ F \qquad \text{به ازای هر } g\in C^\infty(M)$$

برهان : ($\Longleftarrow$) فرض کنید X بر N و $\bar{X}$ بر M با هم $F-$مرتبط باشند. بنابه (۹.۱۴)، به ازای هر $g\in C^\infty(M)$ و هر $p\in N$ داریم

$$\begin{aligned} F_{*,p}(X_p)g &= \bar{X}_{F(p)}g && \text{(بنابه تعریف } F\text{-مرتبط بودن)}\\ (X_p)(g\circ F) &= (\bar{X}g)(F(p)) && \text{(بنابه تعریف } F_* \text{ و } \bar{X}g)\\ (X(g\circ F))(p) &= (\bar{X}g)(F(p)). \end{aligned}$$

چون این به ازای هر $p\in N$ درست است، بنابراین $X(g\circ F)=(\bar{X}g)\circ F$.

($\Longrightarrow$) کافی است معادلات بالا را از انتها چیده و استدلال کنیم. □

۱۴.۲۶ گزاره. گیریم $F: N \to M$ یک نگاشت هموار بین منیفلدها باشد. اگر a عددی دلخواه بوده و میدانهای برداری X و Y بر N، بترتیب با $\bar{X}$ و $\bar{Y}$ بر M $F-$مرتبط باشند، آنگاه

(۱) مضرب aX با مضرب $a\bar{X}$ نیز $F-$مرتبط است؛

(۲) مجموع $X+Y$ با مجموع $\bar{X}+\bar{Y}$ نیز $F-$مرتبط است؛ و

(۳) براکت لی $[X,Y]$ با براکت لی $[\bar{X},\bar{Y}]$ نیز $F-$مرتبط است.

برهان : دو حکم اول به عنوان تمرین بر عهده خواننده. تنها حکم سوم را اثبات می‌کنیم. به ازای هر $g \in C^\infty(M)$ داریم

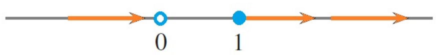
$$\begin{aligned}
[X,Y](g\circ F) &= XY(g\circ F) - YX(g\circ F) && \text{(بنابه تعریف } [X,Y]\text{)}\\
&= X((\bar{Y}g)\circ F) - Y((\bar{X}g)\circ F) && \text{(بنابه گزاره ۱۴.۲۵)}\\
&= (\bar{X}\bar{Y}g)\circ F - (\bar{Y}\bar{X}g)\circ F && \text{(بنابه گزاره ۱۴.۲۵)}\\
&= ((\bar{X}\bar{Y} - \bar{Y}\bar{X})g)\circ F\\
&= ([\bar{X},\bar{Y}]g)\circ F.
\end{aligned}$$

باز هم بر اساس گزاره ۱۴.۲۵، این ثابت می‌کند که میدانهای برداری $[X,Y]$ بر N و $[\bar{X},\bar{Y}]$ بر M با هم $F-$مرتبط هستند. □

بخش ۷.۱۴ مسایل

۱۴.۱* تساوی میدانهای برداری. نشان دهید که دو میدان برداری هموار X و Y بر منیفلد M وقتی و تنها وقتی برابرند که به ازای هر تابع هموار f بر M داشته باشیم $Xf = Yf$.

۱۴.۲ میدان برداری بر کره فرد بعدی. گیریم $x^1, y^1, \cdots, x^n, y^n$ مختصات استاندارد بر $\mathbb{R}^{2n}$ باشد. کره واحد $\mathbb{S}^{2n-1}$ در $\mathbb{R}^{2n}$ را با استفاده از معادله $\sum_{i=1}^n (x^i)^2 + (y^i)^2 = 1$ تعریف می‌کنیم. نشان دهید که $X = \sum_{i=1}^n -y^i\,\partial/\partial x^i + x^i\,\partial/\partial y^i$. یک میدان برداری هموار همه جا ناصفر بر $\mathbb{S}^{2n-1}$ است. چون همه



شکل ۵.۱۴: میدان برداری d/dx بر $\mathbb{R} - \{0\}$

کره‌های هم بعد، دیفئومورفند، این ثابت می‌کند که هر کره با بعد فرد، یک میدان برداری همه جا ناصفر می‌پذیرد. قضیه‌ای کلاسیک در توپولوژی دیفرانسیل وجود دارد که بر اساس ان، هیچ میدان برداری همه جا ناصفر بر کره‌ای با بعد زوج نمی‌توان یافت (به صفحه ۳۱، بخش ۵ از [۲۸] و یا قضیه ۱۶٫۵ از [۷۰] توجه شود). (راهنمایی: از مساله ۱۱.۱ استفاده نموده و نشان دهید که X به $\mathbb{S}^{2n-1}$ مماتس است.)

۱۴.۳ منحنی انتگرال ماکسیمال بر خط سفته. گیریم M خط سفته $\mathbb{R}-\{0\}$ بوده و X میدان برداری d/dx بر M باشد (به شکل ۵.۱۴ توجه شود). منحنی انتگرال ماکسیمال X آغازی از $x=1$ را تعیین کنید.

۱۴.۴ منحنی انتگرال در صفحه. منحنی انتگرال میدان برداری بر $\mathbb{R}^2$ را بیابید:

$$X_{(x,y)} = x\frac{\partial}{\partial x} - y\frac{\partial}{\partial y} = \begin{bmatrix} x \\ -y \end{bmatrix}.$$

۱۴.۵ منحنی انتگرل ماکسیمال در صفحه. منحنی انتگرال ماکسیمال $c(t)$ آغازی از نقطه $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ برای میدان برداری $X_{(x,y)} = \partial/\partial x + x\partial/\partial y$ بر $\mathbb{R}^2$ را تعیین کنید.

۱۴.۶ منحنی انتگرل آغازی در صفر یک میدان برداری. (الف) فرض کنید میدان برداری هموار X بر منیفلد M در نقطه $p\in M$ صفر شود. نشان دهید مه منحنی انتگرال X با نقطه آغازی در p، منحنی ثابت $c(t)=p$ می‌باشد.
(ب) نشان دهید که اگر X میدان برداری صفر بر منیفلد M باشد، و $c_t(p)$ منحنی انتگرال ماکسیمال آغازی در p باشد، آنگاه گروه یک–پارامتری دیفئومورفیسمهای $c:\mathbb{R}\to \mathrm{Diff}(M)$ عملا نگاشت ثابت $c(t)=\mathbb{1}_M$ است.

۱۴.۷ منحنی انتگرال ماکسیمال. گیریم X میدان برداری $x\,d/dx$ بر $\mathbb{R}$ باشد. به ازای هر p در $\mathbb{R}$، منحنی انتگرال ماکسیمال X آغازی در p را بیابید.

۱۴.۸ منحنی انتگرال ماکسیمال. گیریم X میدان برداری $x^2\,d/dx$ بر $\mathbb{R}$ باشد. به ازای هر $p>0$ در $\mathbb{R}$، منحنی انتگرال ماکسیمال X آغازی در p را بیابید.

۱۴.۹ تجدید پیمایش یک منحنی انتگرال. فرض کنید $c:(a,b)\to M$ یک منحنی انتگرال برای میدان برداری هموار X بر M باشد. نشان دهید که به ازای هر عدد حقیقی s، نگاشت

$$c_s:(a+s,b+s)\to M, \qquad c_s(t)=c(t-s),$$

نیز یک منحنی انتگرال برای X است.

۱۴.۱۰ براکت میدانهای برداری. اگر f و g توابعی هموار و X و Y میدانهای برداری هموار بر منیفلد M باشند، نشان دهید $[f.X,g.Y] = f.g.[X,Y]+f.(Xg).Y-g.(Yf).X$.

۱۴.۱۱ براکت میدانهای برداری بر $\mathbb{R}^2$. حاصل براکت لی $[-y\partial/\partial x + x\partial/\partial y, \partial/\partial x]$ بر $\mathbb{R}^2$ را محاسبه کنید.

۱۴.۱۲ براکت لی در مختصات موضعی. میدانهای برداری هموار X و Y با مختصات بترتیب $\sum_{i=1}^n a^i\partial/\partial x^i$ و $\sum_{j=1}^n b^j\partial/\partial x^j$ بر $\mathbb{R}^n$ را در نظر بگیرید، که a^i و b^i توابع هموار بر $\mathbb{R}^n$ هستند. چون $[X,Y]$ نیز میدان برداری هموار بر $\mathbb{R}^n$ است، پس می‌توان نوشت $[X,Y]=\sum_{i=1}^n c^k\partial/\partial x^k$ که c^k ها توابع هموار هستند. فرمولی برای c^k ها بر حسب a^i ها و b^j ها بیابید.

۱۴.۱۳ میدان برداری تحت دیفئومورفیسم. گیریم $F : N \to M$ دیفئومورفیسمی بین منیفلدها باشد. ثابت کنید که اگر g تابعی هموار و X میدان برداری هموار بر N باشد، آنگاه $F_*(gX) = (g \circ F^{-1}) F_* X$.

۱۴.۱۴ براکت لی تحت دیفئومورفیسم. گیریم $F : N \to M$ یک دیفئومورفیسم بین منیفلدها باشد. ثابت کنید که اگر X و Y میدان برداری هموار بر N باشند، آنگاه $F_*[X,Y] = [F_*X, F_*Y]$.

۱۴.۱۵ براکت پوازون[۱]. جبر $C^\infty(\mathbb{R}^2)$ توابع هموار بر $\mathbb{R}^2$ را در نظر گرفته و فرض کنید

$$((f,g)) := \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial g}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial g}{\partial x}, \qquad f,g \in C^\infty(\mathbb{R}^2) \text{ برای}$$

ثابت کنید که $((\ ,\ ))$ ساختار یک جبر لی بر $C^\infty(\mathbb{R}^2)$ تعریف می‌نماید.

۱ Poisson bracket

فصل ۱۵

گروه و جبر لـی

منظور از گروه لی منیفلدی است که همزمان گروه بوده، و عمل های گروه بر آن نیز همواری باشند. گروه های کلاسیکی مانند، گروهای خطی عمومی و خاص روی $\mathbb{R}$ و $\mathbb{C}$، گروه های متعامد، گروه های یکانی، و گروه های سیمپلکتیک نمونه هایی از گروه های لی هستند.

گروه لی، یک فضای همگن است، به این مفهوم که انتقال چپ توسط یک عنصر گروه، یک دیفئومورفیسم از گروه بروی خودش می‌باشد که عنصر همانی را به g می‌نگارد. در نتیجه، بطور موضعی هر گروه حول یک نقطه یکسان به نظر می‌رسد. برای مطالعهٔ موضعی ساختار یک گروه لی، کافی است که همسایگی عضو همانی مورد مطالعه واقع گیرد. بنابراین، تعجبی ندارد که فضای مماس در نقطهٔ همانی، یک گروه لی نقشی کلیدی برای آن ایفا کند.

فضای مماس در نقطهٔ همانی از هر گروه لی G یک عمل براکتی کانونی، $[\,,\,]$ می‌تواند بپذیرد، و در نتیجه تبدیل به یک جبر لی می‌شود. فضای مماس T_eG به همراه براکت را، جبر لی گروه لی G نامیم. جبر لی یک گروه لی، اطلاعات زیادی از آن گروه لی در بر دارد.

یک ریاضیدان نروژی بنام سوفس لـی[۱]، در یک سری از مقالات خود بین سال های (۱۲۶۳-۱۲۵۳ شمسی)، به مطالعه گروه و جبر لی پرداخت. در ابتدا کارهای او مورد توجه واقع نشد، و این شاید به دلیل آن بود که او مقالات خود را به زبان نروژی می‌نوشت. لی، در سال (۱۲۶۳ شمسی)، استاد دانشگاه لایپزیگ، آلمان شد. پس از انتشار سه جلد کتاب در قلمرو نظریهٔ گروه تبدیلات[۲] که با همکاری و کمک فریدریش انگل[۳] نوشته شد، نظریهٔ او با اقبال عمومی مواجه گردید.

انگیزهٔ اصلی لـی، مطالعهٔ گروه تبدیلات، مشابه گروه جایگشت های یک مجموعهٔ متناهی بود. در واقع، یک دیفئومورفیسم از یک منیفلد M را بصورت یک جایگشت از نقاط M می‌توان در نظر گرفت. رابطهٔ بین نظریهٔ گروه ها، توپولوژی، و جبر خطی، زمینه ساز نظریهٔ گروه و جبر لـی هستند، که شاخه‌ای غنی و کاربردی از ریاضیات است. در این فصل تنها می‌خواهیم بطور سطحی این مبحث گسترده را مورد مطالعه قرار دهیم. برای ما، گروه های لی نقشی بسیار اساسی از یک دسته از منیفلد ها را ایفا نموده، و جبرهای لـی مثل فضا های مماس آن عمل می‌کنند.

---

[۱] Sophus Lie [۲] Theorie der Transformationsgruppen [۳] Friedrich Engel

بخش ۱.۱۵ گروه لـی

ابتدا چندین مثال از گروه های ماتریسی آورده، زیر گروه هایی از یک گروه خطی عمومی روی یک میدان ارائه می‌دهیم. هدف ما نمایش روش های متفاوت برای نشان دادن آن است که چگونه گروه، یک گروه لی است، و سپس محاسبهٔ بعد آن گروه لی خواهد شد. این مثال ها می‌توانند مبنایی برای مطالعهٔ گروه های ماتریسی دیگر نیز باشند. یک ابزار توانمند، که در اینجا در صدد اثبات آن بر نخواهیم آمد، قضیهٔ زیرگروه بسته است. بر طبق این قضیه، یک زیرگروه مجرد، که زیر مجموعهٔ بستهٔ یک گروه لی باشد، خود نیز یک گروه لی خواهد بود. در بسیاری موارد، قضیهٔ زیر گروه بسته، ساده ترین روشی است تا یک گروه تبدیل به یک گروه لی گردد.

برای محاسبهٔ دیفرانسیل یک نگاشت بر یک گروه ماتریسی، مطالعهٔ ماتریس های نمایی که باعث ایجاد منحنی هایی در یک گروه ماتریسی با یک بردار آغازین می‌شوند، بسیار مفید خواهد بود. به عنوان یک مثال، می‌توان دیفرانسیل نگاشت دترمینان، یک گروه خطی عمومی بر $\mathbb{R}$ را محاسبه نمود.

بخش ۲.۱۵ مثال هایی از گروه های لـی

در اینجا لازم است یاد آوری کنیم که تعریف گروه لـی، اول بار در زیر بخش ۶,۵ ارائه گردید.

۱۵.۱ تعریف. یک گروه لـی عبارتست از یک منیفلد هموار، مانند G که یک گروه نیز بوده، و دو عمل گروه، یعنی نگاشت عمل ضرب

$$\mu : G\times G \longrightarrow G, \qquad \mu(a,b)=ab,$$

و همچنین، نگاشت وارونگیری هموار باشند:

$$\iota : G \longrightarrow G, \qquad \iota(a)=a^{-1}.$$

برای $a\in G$ عمل ضرب از طرف چپ و از طرف راست توسط a را، به ترتیب با $(\ell_a : G\to G;\ \ \ell_a(x)=\mu(a,x))$، و $(r_a : G\to G;\ \ r_a(x)=ax)$ نمایش می‌دهیم. ضرب از طرف چپ و راست را به ترتیب انتقال از چپ و راست نیز می‌نامند.

۱۵.۲ تمرین (ضرب چپ). نشان دهید که، به ازای هر عضو a از گروه لـی G ضرب چپ $\ell : G\to G$، دیفئومورفیسم است.

۱۵.۳ تعریف. یک نگاشت $F : H\to G$ بین گروه های لـی H و G یک همومورفیسم گروه های لـی نامیم، هرگاه این نگاشت، یک همومورفیسم گروهی و هموار باشد. شرط همومورفیسم گروهی بدان معنی است که

$$F(hx)=F(x)F(x), \qquad (h,x\in H \text{ به ازای هر}) \tag{۱.۱۵}$$

این شرط را می‌توان به زبان نمادگذاری تابعی ها بصورت

$$F\circ\ell_h=\ell_{F(h)}\circ F, \qquad (h\in H \text{ به ازای هر}) \tag{۲.۱۵}$$

نوشت. فرض کنید که e_H و e_G به ترتیب عنصر های همانی H و G باشند، با قرار دادن عنصر همانی e_H به جای h و x در (۱.۱۵)، می‌توان نتیجه گرفت که $F(e_H) = e_G$. این یعنی که یک همومورفیسم گروهی همواره عنصر همانی را به عنصر همانی می‌برد. نمادگذاری : از حروف بزرگ برای نمایش ماتریسها استفاده نموده، و حروف کوچک را برای نمایش درآیه‌های آن بکار خواهیم برد. بنابراین، درایهٔ (i, j) -ام از ماتریس AB بصورت $(AB)_{ij} = \sum_k a_{ik} b_{kj}$ است .

۱۵.۴ مثال (گروه خطی عمومی) . در مثال ۶.۲۳، نشان دادیم که گروه خطی عمومی

$$\mathrm{GL}(n,\mathbb{R}) = \left\{A \in \mathbb{R}^{n\times n} \;\middle|\; \det A \neq 0\right\},$$

یک گروه لـی است.

۱۵.۵ مثال (گروه خطی خاص). گروه خطی خاص $\mathrm{SL}(n,\mathbb{R})$ زیر گروه $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ متشکل از ماتریس هایی با دترمینان 1 می‌باشد. بنا به مثال ۹.۱۶، $\mathrm{SL}(n,\mathbb{R})$ یک زیر منیفلد منظم با بعد $n^2 - 1$ از $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ بوده، و بنا به مثال ۱۱.۲۳، نگاشت ضرب،

$$\bar{\mu} : \mathrm{SL}(n,\mathbb{R}) \times \mathrm{SL}(n,\mathbb{R}) \longrightarrow \mathrm{SL}(n,\mathbb{R})$$

یک نگاشت هموار است. برای اینکه ببینیم که نگاشت وارون

$$\bar{\iota} : \mathrm{SL}(n,\mathbb{R}) \longrightarrow \mathrm{SL}(n,\mathbb{R})$$

یک نگاشت هموار است، فرض کنید که $i : SL(n,\mathbb{R}) \to \mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$، نگاشت احتوا و $\iota : \mathrm{GL}(n,\mathbb{R}) \to \mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ نگاشت وارون $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ باشد. از آنجایی که ترکیب نگاشت های هموار، خود نگاشتی هموار است بنابراین داریم،

$$\iota \circ i : \mathrm{SL}(n,\mathbb{R}) \xrightarrow{i} \mathrm{GL}(n,\mathbb{R}) \xrightarrow{\iota} \mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$$

چون تصویر آن در زیر منیفلد منظم $\mathrm{SL}(n,\mathbb{R})$ واقع است، از قضیهٔ ۱۱.۲۱ نتیجه می‌شود که نگاشت القایی $\bar{\iota} : \mathrm{SL}(n,\mathbb{R}) \to \mathrm{SL}(n,\mathbb{R})$، نگاشتی هموار می‌باشد. بنابراین، $\mathrm{SL}(n,\mathbb{R})$ یک گروه لـی است.

با تمهیداتی مشابه آنچه که گفته شد، می‌توان ثابت کرد که گروه خطی خاص مختلط $\mathrm{SL}(n,\mathbb{C})$، نیز یک گروه لـی است.

۱۵.۶ مثال (گروه متعامد). یاد آوری می‌کنیم که گروه متعامد $\mathrm{O}(n)$ زیر گروهی از $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ متشکل از همهٔ ماتریس هایی مانند A است که، $A^T A = I$. در نتیجه، $\mathrm{O}(n)$، تصویر وارون I تحت نگاشت $f(A^T A)$ می‌باشد.

در مثال ۱۱.۶ نشان دادیم که $f : \mathrm{GL}(n,\mathbb{R}) \to \mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ نگاشتی با رتبهٔ ثابت می‌باشد. بنا به قضیهٔ مجموعهٔ تراز رتبهٔ ثابت، $\mathrm{O}(n)$ یک زیر منیفلد منظم از $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ است. یک نقطه ضعف آن روش این است که به ما در مورد رتبهٔ f چیزی نمی‌دهد، و بتبع آن بعد $\mathrm{O}(n)$ نامعلوم می‌ماند.

در این مثال می‌خواهیم از قضیهٔ مجموعهٔ تراز منظم استفاده نموده تا ثابت کنیم که $\mathrm{O}(n)$ زیر منیفلدی منظم از $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ است. این روش در عین حال بعد $\mathrm{O}(n)$ را نیز تعیین می‌نماید. برای چنین دستاوردی، ابتدا می‌بایست فضای هدف نگاشت f را تعریف مجدد نماییم. چون $A^T A$ یک ماتریس متقارن است، تصویر f واقع در S_n، متشکل از فضای برداری همهٔ ماتریس های $n \times n$ متقارن حقیقی، می‌باشد. هرگاه $n \geq 2$، آنگاه فضای S_n زیر فضای سرهٔ $\mathbb{R}^{n\times n}$ است.

۱۵.۷ تمرین (فضای ماتریسهای متقارن). نشان دهید که فضای برداری S_n متشکل از همهٔ ماتریس های $n \times n$ متقارن حقیقی، دارای بعد $(n^2+n)/2$ می‌باشد.
نگاشت $f : \mathrm{GL}(n,\mathbb{R}) \to S_n, \quad f(A) = A^T A$ را در نظر می‌گیریم. چون S_n یک فضای برداری می‌باشد، در نتیجه فضای مماس به S_n در هر نقطه، بطور کانونی با خود S_n ایزو مورف است.
بنابراین، تصویر دیفرانسیل

$$f_{*,A} : T_A(\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})) \longrightarrow T_{f(A)}(S_n) \simeq S_n$$

در S_n واقع است. با وجود اینکه می‌دانیم که f، $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ را به $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ یا $\mathbb{R}^{n\times n}$ نیز می‌نگارد، اگر $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ یا $\mathbb{R}^{n\times n}$ بعنوان فضای مقصد f در نظر گرفته می‌شد، دیفرانسیل $f_{*,A}$ به ازای هر $A \in \mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ و $n \geq 2$، پوشا نمی‌شد، زیرا که دیفرانسیل $f_{*,A}$ به زیر مجموعهٔ سره S_n از $\mathbb{R}^{n\times n}$ نگاشته می‌شود. این یک اصل کلی است که: اگر قرار باشد $f_{*,A}$ پوشا باشد، فضای مقصد f می‌بایست تا حد امکان کوچک اختیار شود. برای آنکه نشان دهیم که دیفرانسیل،

$$f : \mathrm{GL}(n,\mathbb{R}) \to S_n, \quad f(A) = A^T A,$$

پوشاست، کافی است بطور صریح دیفرانسیل $f_{*,A}$ را محاسبه کنیم. چون $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ زیر مجموعهٔ بازی از $\mathbb{R}^{n\times n}$ است، فضای مماس برآن در هر $A \in \mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ عبارت است از

$$T_A(\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})) = T_A(\mathbb{R}^{n\times n}) = \mathbb{R}^{n\times n}.$$

برای هر ماتریس $X \in \mathbb{R}^{n\times n}$، منحنی $c(t)$ در $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ با شرایط $c(0) = A$ و $c'(0) = X$ موجود است (گزارهٔ ۸.۲۵). با توجه به گزارهٔ ۸.۲۷،

$$\begin{aligned} f_{*,A}(X) &= \frac{d}{dt} f(c(t))\Big|_{t=0} \\ &= \frac{d}{dt} c(t)^T c(t)\Big|_{t=0} \\ &= \left(c'(t)^T c(t) + c(t)^T c'(t)\right)\Big|_{t=0} \qquad \text{(بنا به مسالهٔ ۱۵.۲)} \\ &= X^T A + A^T X. \end{aligned}$$

پوشا بودن $f_{*,A}$ این سئوال را مطرح می‌کند که: اگر $A \in \mathrm{O}(n)$ و B هر ماتریس متقارن در S_n باشد، آیا ماتریسی $n \times n$ مانند X است که $X^T A + A^T X = B$؟ چون $(X^T A)^T = A^T X$، کافی است رابطهٔ بالا را به ازای،

$$A^T X = \frac{1}{2} B, \tag{۳.۱۵}$$

حل کنیم، $X^T A + A^T X = B^T/2 + B/2 + B$. معادلهٔ (۳.۱۵) دارای جواب : $X = \frac{1}{2}(A^T)^{-1} B$ است. در نتیجه، $f_{*,A} : T_A \mathrm{GL}(n,\mathbb{R}) \to S_n$ به ازای هر $A \in \mathrm{O}(n)$ پوشا بوده، و $\mathrm{O}(n)$ یک مجموعهٔ

تراز منظم f می‌باشد. حال با توجه به قضیهٔ مجموعهٔ تراز منظم، $\mathrm{O}(n)$ یک زیر منیفلد منظم $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ با بعد

$$\begin{aligned} \dim \mathrm{O}(n) &= n^2 - \dim S_n \\ &= n^2 - \frac{n^2+n}{2} = \frac{n^2-n}{2}. \end{aligned} \tag{۴.۱۵}$$

بخش ۳.۱۵ زیر گروه های لـی

۱۵.۸ تعریف. یک زیر گروه لی از یک گروه لی G، (الف) یک زیر گروه مجرد مانند H است که (ب) یک زیر منیفلد ایمرز، بوده بطوری که (پ) عمل های گروه بر H، نیز هموار باشند. بر خلاف مفهوم یک زیر گروه لی، منظور از یک زیر گروه مجرد، صرفا زیر گروهی جبری است. عملیات بر زیر گروه H، در واقع تحدید نگاشت ضرب μ و نگاشت وارون ι از G به H می‌باشد. برای دانستن آن که چرا یک زیر گروه لی به جای زیر منیفلد منظم، یک زیر منیفلد ایمرز است، می‌توان به یادداشت ۱۶.۱۷ مراجعه کرد. چون زیر گروه لی یک منیفلد ایمرز است، نیاز به داشتن توپولوژی نسبی نیست. اگر نگاشت احتوا $i : H \hookrightarrow G$ یک ایمرشن از زیر گروه لی H باشد، آنگاه این نگاشت هموار بوده، و در نتیجه ترکیب

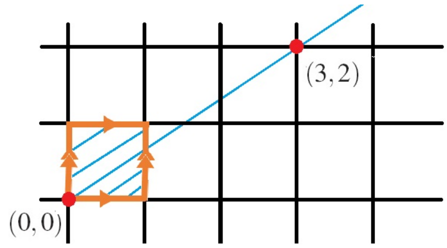
$$\mu \circ (i \times i) : H \times H \to G \times G \to G$$

نیز هموار می‌باشد. اگر H زیر منیفلدی منظم از G فرض شود، آنگاه بنا به قضیهٔ ۱۱.۲۱ نگاشت ضرب $H \times H \to H$ و نیز بطور مشابه نگاشت وارون $H \to H$ خود به خود هموار می‌باشد، و لذا شرط (پ) در تعریف زیرگروه لی زائد می‌نماید. چون یک زیر گروه لی به عنوان یک زیر منیفلد ایمرز تعریف شده است، در نتیجه لازم است شرط (پ) روی عملیات بر H آورده شود.

۱۵.۹ مثال (خطوطی با شیب غیر گویا بر تیوب). فرض کنید G چمبرهٔ $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ و L خطی گذرنده از مبدا $\mathbb{R}^2$ باشد. تیوب را می‌توان بصورت یک مربع واحد که اضلاع روبروی آن یکی گرفته می‌شوند، در نظر گرفت. تصویر H از L تحت نگاشت تصویری $\pi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ یک منحنی بسته است، اگر و تنها اگر خط L از نقطهٔ مشبکه دیگری، که آن را $(m,n) \in \mathbb{Z}^2$ نامیم، بگذرد. این حالت وقتی و تنها وقتی اتفاق می‌افتد که شیب عدد گویای n/m یا ∞ باشد؛ آن گاه H تصویر تعداد متناهی پاره خط در مربع واحد است. H یک منحنی بسته دیفئومورف با یک دایره بوده و زیر منیفلد منظم $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ (شکل ۱.۱۵).

اگر شیب L غیرگویا باشد، آنگاه تصویر آن H روی تیوب هرگز بطور کامل بسته نخواهد شد. در این حالت تحدید به L توسط نگاشت تصویری، $f = \pi|_L : L \longrightarrow \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$، یک ایمرشن یک به یک است. می‌توان توسط f ساختار توپولوژی و منیفلد را به H القا نمود. می‌توان نشان داد که H زیر مجموعهٔ چگال از تیوب است. [۳، مثال III.۶,۱۵، صفحهٔ ۸۶]. در نتیجه، یک زیر منیفلد ایمرز از $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ بوده و زیر منیفلد منظم از آن نمی‌باشد.

شیب L هر چه باشد، تصویر آن H در $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ یک زیر گروه مجرد از تیوب، یک زیر منیفلد ایمرز، و بنابراین گروه لی است. بنابراین، H یک زیر گروه لی، تیوب است.



شکل ۱.۱۵: یک زیر گروه نشانده شده از تیوب

۱۵.۱۰ تمرین (توپولوژی القا شده در مقایسه با توپولوژی زیر فضایی). فرض کنید $HSUbset\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ تصویر خط L با شیب غیرگویا در $\mathbb{R}^2$ باشد. توپولوژی بر H که توسط دوسویی $f: L\tilde{\to}H$ القا می‌شود را توپولوژی القایی و توپولوژی بر H بعنوان زیر مجموعهٔ $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ را توپولوژی زیر فضایی نامیم. این دو توپولوژی را با یکدیگر مقایسه کنید: کدامیک زیر مجموعهٔ دیگری است؟

۱۵.۱۱ گزاره. اگر H یک زیر گروه مجرد و یک زیر منیفلد منظم از گروه لی G باشد، آنگاه H یک زیر گروه لی G است.

برهان : چون یک زیر منیفلد منظم تصویر یک نشاندن است (قضیهٔ ۱۱.۱۷)، یک زیر منیفلد ایمرز نیز می‌باشد.

گیریم $\mu: G\times G\to G$ یک نگاشت ضرب بر G باشد. چون H یک زیر منیفلد ایمرز از G است، نگاشت احتوای $i: H\hookrightarrow G$، یک نگاشت هموار است. بنابراین، نگاشت احتوای $i\times i: H\times H\hookrightarrow G\times G$ نیز هموار بوده، و ترکیب $\mu\circ(i\times i): H\times H\to G$ نیز هموار می‌باشد. بنا به قضیهٔ ۱۱.۲۱، چون H زیر منیفلد منظم از G بوده، لذا نگاشت القاء شدهٔ $\bar{\mu}: H\times H\to H$ نیز هموار است.

همواری نگاشت وارون $\iota: G\to G$، همواری نگاشت وارون $\bar{\iota}: H\to H$ را مانند مثال ۱۵.۵، را می‌توان نتیجه گرفت. □

بدلیل آنکه نگاشت احتوای $i: H\to G$ متناظر به یک زیر منیفلد منظم، نشاندن است (قضیهٔ ۱۱.۱۷)، زیر گروه H همانند آن چه در گزارهٔ ۱۵.۱۱ دیدیم را، زیر گروه لی نشانده شده می‌نامیم.

۱۵.۱۲ مثال. در مثال های ۱۵.۵ و ۱۵.۶ نشان دادیم که زیر گروه های $\mathrm{SL}(n,\mathbb{R})$ و $\mathrm{O}(n)$ از $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ هر دو زیر منیفلد های منظم بوده، و بنا به گزارهٔ ۱۵.۱۱ زیر گروه های لی نشانده شده می‌باشند.

حال می‌خواهیم یک قضیهٔ مهم در مورد زیر گروه های لی بدون اثبات را بیان کنیم. اگر G یک گروه لی باشد، آنگاه یک زیر گروه مجرد که زیر مجموعهٔ بسته در فضای توپولوژی G است را زیر گروه بستهٔ نامیم.

۱۵.۱۳ قضیهٔ زیر گروه بسته. یک زیر گروه بسته از یک گروه لی، یک زیر گروه لی نشانده شده است.

برای اثبات قضیهٔ زیر گروه بسته، می‌توان [۳۸، قضیهٔ ۳٫۴۲، صفحهٔ ۱۱۰] را دید.

۱۵.۱۴ چند مثال. الف) یک خط با شیب غیر گویا در چمبرهٔ $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$، بدلیل آن که همهٔ تیوب نبوده، زیر گروه بسته آن نیست، ولی بستار آن، چگال است.

ب) گروه خطی خاص $\mathrm{SL}(n,\mathbb{R})$ و گروه متعامد $\mathrm{O}(n)$ مجموعهٔ صفر های چند جمله ای های بر $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ هستند، و لذا زیر مجموعه های بستهٔ $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ هستند، در نتیجه، $\mathrm{SL}(n,\mathbb{R})$ و $\mathrm{O}(n)$ زیر گروه های لـی نشانده شده از $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ می‌باشند.

بخش ۴.۱۵ ماتریس نمایی

برای محاسبهٔ دیفرانسیل نگاشت زیر گروهی از $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$، به ماتریس های نامنفرد نیاز است. بدلیل نامنفرد بودن ماتریس نمایی، این ماتریس برای مقصود ما بسیار مناسب است.

۱۵.۱۵ تعریف. منظور از نُرم بر فضای برداری مفروض V، تابعی حقیقی مقدار مانند $\|\,.\,\| : V \to \mathbb{R}$ است که در سه شرط زیر صدق می‌کند: به ازای هر $r \in \mathbb{R}$ و $v, w \in V$،

الف) (مثبت معین)؛ $\|v\| \geq 0$ و زمانی تساوی اتفاق می‌افتد اگر و تنها اگر $v = 0$،

ب) (همگنی مثبت)؛ $\|rv\| = |r|\|v\|$،

پ) (زیرجمعی)؛ $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$.

یک فضای برداری V همراه با نرم $\|\,.\,\|$ را فضای برداری نُرم دار نامیم. فضای برداری $\mathbb{R}^{n\times n} \simeq \mathbb{R}^{n^2}$ متشکل از همهٔ ماتریس های $n \times n$ حقیقی، یک نُرم اقلیدسی اختیار می‌کند:
به ازای هر $X = [x_{ij}] \in \mathbb{R}^{n\times n}$، داریم $\|X\| = (\sum x_{ij}^2)^{1/2}$. ماتریس نمایی e^X متناظر به ماتریس $X \in \mathbb{R}^{n\times n}$، مشابه مقدار نمایی یک عدد حقیقی تعریف می‌گردد:

$$e^X = I + X + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}X^3 + \cdots, \qquad (۵.۱۵)$$

که در آن I ماتریس $n \times n$ نمایی می‌باشد. برای با معنی بودن فرمول اخیر، کافیست نشان دهیم که طرف راست سری بالا، در فضای برداری نُرم دار $\mathbb{R}^{n\times n} \simeq \mathbb{R}^{n^2}$، همگرا ست. جبر نُرم دار V، فضایی برداری نُرم دار و همچنین یک جبر بر $\mathbb{R}$ است که در خاصیت زیر ضربی، $\|vw\| \leq \|v\|\,\|w\|$ صدق کند. ضرب ماتریسی، فضای برداری نُرم دار $\mathbb{R}^{n\times n}$ را به یک جبر نُرم دار تبدیل می‌کند.

۱۵.۱۶ گزاره. برای هر $X, Y \in \mathbb{R}^{n\times n}$، نشان دهید، $\|XY\| \leq \|X\|\,\|Y\|$.

برهان : اگر بنویسیم $X = [x_{ij}]$، $Y = [y_{ij}]$ و نیز اندیس دوگانهٔ (i, j) را ثابت در نظر بگیریم، بنا به نامساوی کشی - شوارتز

$$\begin{aligned}
\left(XY\right)_{ij}^2 &= \Big(\sum_k x_{ik}y_{kj}\Big)^2 \\
&\leq \Big(\sum_k x_{ik}^2\Big)\Big(\sum_k y_{kj}^2\Big) \\
&= a_i b_j,
\end{aligned}$$

اگر $a_i = \sum_k x_{ik}^2$ و $b_j = \sum_k y_{kj}^2$ قرار داده، آنگاه

$$\begin{aligned} \|X\,Y\|^2 &= \sum_{i,j}(X\,Y)_{ij}^2 \le \sum_{i,j} a_i b_j \\ &= \Big(\sum_i a_i\Big)\Big(\sum_j b_j\Big) \\ &= \Big(\sum_{i,k} x_{ik}^2\Big)\Big(\sum_{j,k} y_{kj}^2\Big) \\ &= \|X\|^2\,\|Y\|^2. \end{aligned}$$

□

در هر یک جبر نُرم دار، عمل ضرب روی تعداد متناهی جمع پخش یا (توزیع) می‌گردد. زمانی که تعداد جمع نامتناهی باشد، مثل سری های همگرا، پخشی ضرب روی جمع نیاز به اثبات می‌باشد.

۱۵.۱۷ گزاره. گیریم V یک جبر نُرم دار باشد.

(الف) اگر $a \in V$ و s_m دنباله ای در V باشد، که به s همگرا باشد، آنگاه as_m به as همگراست.

(ب) اگر $a \in V$ و $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ یک سری همگرا در V باشد، آنگاه، $a\sum_k b_k = \sum_k ab_k$.

۱۵.۱۸ تمرین (پخشپذیری سری های همگرا). گزارهٔ ۱۵.۱۷ را ثابت کنید.

در یک فضای برداری نُرم دار V سری $\sum a_k$، را بطور مطلق همگرا نامیم، هرگاه سری $\sum \|a_k\|$ متشکل از نُرم ها در $\mathbb{R}$ همگرا باشد. فضای برداری نُرم دار V را کامل گوییم، [۱] هرگاه هر دنبالهٔ کوشی در V همگرا به نقطه‌ای در V باشد. بعنوان مثال، $\mathbb{R}^{n\times n}$ یک فضای برداری نُرم دار است. به سادگی می‌توان نشان داد که در هر فضای برداری نُرم دار کامل، همگرایی مطلق، همگرایی را نتیجه می‌دهد [۲۶، قضیهٔ ۲,۹,۳، صفحهٔ ۱۲۶]. برای آن که نشان دهیم سری $\sum Y_k$ از ماتریس ها همگراست، تنها کافی است نشان دهیم که، سری $\sum \|Y_k\|$ از اعداد حقیقی همگراست.

به ازای هر $X \in \mathbb{R}^{n\times n}$ و $k > 0$، و با بکار گیری مکرر گزارهٔ ۱۵.۱۶، $\|X^k\| \le \|X\|^k$. بنابراین، سری قدر مطلق $\sum_{k=0}^{\infty} \|X^k/k!\|$ جمله به جمله به سری همگرای زیر کراندار است،

$$\sqrt{n} + \|X\| + \frac{1}{2!}\|X\|^2 + \frac{1}{3!}\|X\|^3 + \cdots = (\sqrt{n} - 1) + e^{\|X\|}.$$

بنا به آزمون مقایسه سری های عددی، سری $\sum_{k=0}^{\infty} \|X^k/k!\|$ نیز همگراست. در نتیجه، سری ۵.۱۵ به ازای هر ماتریس $n\times n$، مانند X بطور مطلق همگراست. نمادگذاری : از حرف e هم برای نگاشت نمایی

[۱] یک فضای برداری نُرم دار را معمولا یک فضای باناخ نامیده، که به پاس کارهای ریاضیدان لهستانی استفان باناخ نامگذاری شده است. بر این اساس، جبر نُرم دار را نیز جبر باناخ نامند.

و هم برای عنصر همانی یک گروه لی عمومی استفاده می‌نماییم. خود متن باعث جلوگیری از وجود ابهام می‌شود. گاهی اوقات از بجای e^X می‌نویسیم $exp(X)$.

بر خلاف خواص تابع نمایی اعداد حقیقی، وقتیکه A و B ماتریس های $n\times n$ به ازای $n>1$ باشند، رابطهٔ زیر لزوما بر قرار نیست که $e^{A+B}=e^Ae^B$.

۱۵.۱۹ تمرین (ماتریس های جابجایی نمایی). نشان دهید که اگر A و B ماتریسهای $n\times n$ جابجایی باشند، آنگاه $e^{A+B}=e^Ae^B$.

۱۵.۲۰ گزاره. برای هر $X\in\mathbb{R}^{n\times n}$ ای $\frac{d}{dt}e^{tX}=Xe^{tX}=e^{tX}X$.

برهان : چون هر درایهٔ $-(i,j)$ ام از سری تابع نمایی e^{tX} یک سری توانی بر حسب t است، می‌توان جمله به جمله از آن مشتق گیری کرد [۳۵، قضیهٔ ۸٫۱، صفحهٔ ۱۷۳]. بنابراین،

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}e^{tX} &= \frac{d}{dt}\left(I+tX+\frac{1}{2!}t^2X^2+\frac{1}{3!}t^3X^3+\cdots\right)\\ &= X+tX^2+\frac{1}{2!}t^2X^3+\cdots\\ &= X\left(I+tX+\frac{1}{2!}t^2X^2+\cdots\right)\\ &= Xe^{tX} && \text{(گزارهٔ ۱۵.۱۷ (ب))}\end{aligned}$$

□

تعریف ماتریس نمایی برای زمانیکه X یک ماتریس مختلط باشد، با معنی است. تمام موارد بالا، برای این حالت نیز برقرار است. فقط می‌بایست بجای نُرم اقلیدسی $\|X\|^2=\sum x_{ij}^2$ از نُرم هرمیتی، $\|X\|^2=\sum|x_{ij}|^2$ استفاده شود، که در آن $|z|$، مدول عدد مختلط $z=a+bi$ می‌باشد، $\sqrt{a^2+b^2}$.

بخش ۵.۱۵ ماتریس نمایی

بنا به تعریف، حاصلجمع $\mathrm{tr}(X):=\sum_{i=1}^n x_{ii}$ درایه های قطر اصلی یک ماتریس $n\times n$، X را، اثر[۱] آن ماتریس می‌نامیم.

۱۵.۲۱ لم. الف) به ازای هر دو ماتریس $X,Y\in\mathbb{R}^{n\times n}$، $\mathrm{tr}(XY)=\mathrm{tr}(YX)$.

ب) به ازای $X\in\mathbb{R}^{n\times n}$ و $A\in\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$، $\mathrm{tr}(AXA^{-1})=\mathrm{tr}(X)$.

برهان : (الف)

$$\mathrm{tr}(YX)=\sum_k (YX)_{kk} = \sum_k\sum_i y_{ki}x_{ik}. \qquad \mathrm{tr}(XY)=\sum_i (XY)_{ii} = \sum_i\sum_k x_{ik}y_{ki},$$

۱ trace

(ب) با قرار دادن $B = XA^{-1}$ در (الف)، به نتیجه می‌رسیم. □

می‌دانیم که مقادیر ویژهٔ[۱] یک ماتریس $n\times n$ مانند X، ریشه های معادلهٔ $\det(\lambda I - X) = 0$ است. روی یک میدان از اعداد مختلط، که از نظر جبری بسته است، چنین معادله ای با احتساب مرتبهٔ تکرار دارای دقیقا n ریشه می‌باشد. در نتیجه، انتخاب اعداد مختلط این مزیت را دارا بوده که، هر ماتریس $n\times n$، اعم از حقیقی یا مختلط، با احتساب مرتبهٔ تکرار دقیقا n مقدار ویژه داشته باشد، لازم به ذکر است که ماتریس های حقیقی لزوما مقادیر ویژهٔ حقیقی ندارند.

۱۵.۲۲ مثال. ماتریس حقیقی $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ هیچ مقدار ویژهٔ حقیقی ندارد. این ماتریس دو مقدار ویژهٔ مختلط، $\pm i$ دارد.

احکام زیر در مورد مقادیر ویژه بلافاصله از تعریف آن نتیجه می‌شوند:

(الف) دو ماتریس مشابه X و AXA^{-1} دارای مقادیر ویژهٔ یکسانی هستند، زیرا

$$\begin{aligned} \det(\lambda I - AXA^{-1}) &= \det(A(\lambda I - X)A^{-1}) \\ &= \det(\lambda I - X). \end{aligned}$$

(ب) مقادیر ویژهٔ ماتریس مثلثی عملا همان درآیه های قطر اصلی آن می‌باشند، زیرا

$$\det\left(\lambda I - \begin{bmatrix} \lambda_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix}\right) = \prod_{i=1}^{n}(\lambda - \lambda_i).$$

بنا به قضیه ای در جبرخطی [۱۹، ق: ۶,۴,۱، ص: ۲۸۶]، هر ماتریس مربعی مختلط مانند A را می‌توان مثلثی کرد؛ به بیان دقیقتر، یک ماتریس مربعی مختلط نامنفرد مانند A است به قسمی‌که، ماتریس AXA^{-1} بالا مثلثی باشد. چون مقادیر ویژهٔ $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$، ماتریس X مشابه مقادیر ویژهٔ ماتریس AXA^{-1} است، مقادیر ویژهٔ ماتریس X، روی قطر اصلی ماتریس مثلثی AXA^{-1} واقع می‌گردند:

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix}.$$

هر ماتریس حقیقی X را به صورت یک ماتریس مختلط می‌توان فرض نمود، در نتیجه آن ماتریس را نیز می‌توان مثلثی کرد، البته باید در نظر داشت که ماتریس A و ماتریس مثلثی AXA^{-1} را باید ماتریس های مختلط در نظر گرفت.

۱۵.۲۳ گزاره. اثر هر ماتریس، اعم از مختلط یا حقیقی، با حاصل جمع مقادیر ویژهٔ آن ماتریس برابر است.

---

۱ eigenvalues

برهان : فرض کنید X، دارای مقادیر ویژهٔ مختلط $\lambda_1,\cdots,\lambda_n$ باشد. آنگاه یک ماتریس نامنفرد مانند $A\in \mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$ چنان وجود دارد که

$$AXA^{-1}=\begin{bmatrix}\lambda_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n\end{bmatrix}.$$

حال بنا به لم ۱۵.۲۱، $\mathrm{tr}(X)=\mathrm{tr}(AXA^{-1})=\sum\lambda_i$. □

۱۵.۲۴ گزاره. به ازای هر ماتریس $X\in\mathbb{R}^{n\times n}$ داریم $\det(e^X)=e^{\mathrm{tr}X}$.

برهان : حالت ۱. فرض کنید X ماتریس بالا مثلثی

$$X=\begin{bmatrix}\lambda_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n\end{bmatrix}$$

باشد، آنگاه،

$$\begin{aligned} e^X &= \sum\frac{1}{k!}X^k \\ &= \sum\frac{1}{k!}\begin{bmatrix}\lambda_1^k & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n^k\end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix}\lambda_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n\end{bmatrix}.\end{aligned}$$

بنابراین، $\det e^X=\prod e^{\lambda_i}=e^{\sum\lambda_i}=e^{\mathrm{tr}X}$.

حالت ۲. یک ماتریس عمومی X، با مقادیر ویژهٔ $\lambda_1,\cdots,\lambda_n$ را در نظر گرفته، ماتریس مختلط نامنفرد A را چنان می‌توان یافت که ماتریس

$$AXA^{-1}=\begin{bmatrix}\lambda_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n\end{bmatrix},$$

بالا مثلثی باشد. آنگاه

$$\begin{aligned}
e^{AXA^{-1}} &= I + AXA^{-1}\\
&= \frac{1}{2!}\left(AXA^{-1}\right)^2 + \frac{1}{3!}\left(AXA^{-1}\right)^3 + \cdots\\
&= I + AXA^{-1} + A\left(\frac{1}{2!}X^2\right)A^{-1} + A\left(\frac{1}{3!}X^3\right)A^{-1} + \cdots\\
&= Ae^XA^{-1} && \text{(بنا به گزارهٔ ۱۵.۱۷)}
\end{aligned}$$

در نتیجه،

$$\begin{aligned}
\det e^X &= \det\left(Ae^XA^{-1}\right)\\
&= \det\left(e^{AXA^{-1}}\right)\\
&= e^{\mathrm{tr}(AXA^{-1})} && \text{(بنا به حالت ۱، چون } AXA^{-1} \text{ ماتریس بالا مثلثی است.)}\\
&= e^{\mathrm{tr}X} && \text{(بنا به لم ۱۵.۲۱)}
\end{aligned}$$

□

از این گزاره نتیجه می‌گیریم که، ماتریس نمایی e^X بدلیل آن که $\det(e^X) = e^{\mathrm{tr}X}$ هرگز صفر نمی‌شود، نامنفرد است. این یکی از دلایل استفاده از ماتریس نمایی می‌باشد، چون این اجازه را خواهد داد تا، یک منحنی در $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ با یک نقطهٔ اولیه و یک سرعت اولیه، را بطور صریح رسم کرد. به عنوان مثال، $c(t) = e^{tX} : \mathbb{R} \to \mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ یک منحنی در $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ با نقطهٔ اولیهٔ I و سرعت اولیهٔ X است.

$$\begin{aligned}
c'(0) &= \frac{d}{dt}e^{tX}\Big|_{t=0} & \qquad c(0) &= e^{0X}\\
&= XE^{tX}\Big|_{t=0} & &= e^0\\
&= X, & &= I.
\end{aligned} \tag{۶.۱۵}$$

بطور مشابه $c(t) = Ae^{tX};\mathbb{R} \to \mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$، یک منحنی در $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ با نقطهٔ اولیهٔ A و سرعت اولیهٔ AX می‌باشد.

بخش ۶.۱۵ دیفرانسیل det در ماتریس همانی

گیریم $\det : \mathrm{GL}(n,\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ نگاشت دترمینان باشد. فضای مماس $T_I\,\mathrm{GL}(n.\mathbb{R})$ به $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ در ماتریس همانی I فضای برداری $\mathbb{R}^{n\times n}$ بوده، و فضای مماس $T_1\mathbb{R}$ به $\mathbb{R}$ در 1 برابر $\mathbb{R}$ می‌باشد. بنابراین،

$$\det{}_{*,I} : \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}.$$

۱۵.۲۵ گزاره. به ازای هر $X \in \mathbb{R}^{n\times n}$، داریم $\det_{*,I}(X) = \mathrm{tr}(X)$.

برهان : از یک منحنی در I برای محاسبهٔ دیفرانسیل استفاده می‌کنیم (گزارهٔ ۸.۲۷) . ماتریس نمایی $c(t)=e^{tX}$ را به عنوان منحنی $c(t)$ با شرایط اولیهٔ $c(0)=I$ و $c'(0)=X$ در نظر می‌گیریم. داریم

$$\begin{aligned}\det_{*,I}(X) &= \frac{d}{dt}\det(e^{tX})\Big|_{t=0}\\ &= \frac{d}{dt}e^{t\,\mathrm{tr}X}\Big|_{t=0}\\ &= (\mathrm{tr}X)e^{t\,\mathrm{tr}X}\Big|_{t=0} = \mathrm{tr}X.\end{aligned}$$

□

بخش ۷.۱۵ تمرینات

۱۵.۱ ماتریس نمایی. برای $X\in\mathbb{R}^{n\times n}$، حاصل جمع جزئی $s_m=\sum_{k=0}^{m}X^k/k!$ را تعریف می‌کنیم.

الف) نشان دهید که $\|s_\ell - s_m\| \le \sum_{k=m+1}^{\ell}\|X\|^k/k!$ برای $\ell\ge m$.

ب) نشان دهید که s_m یک دنبالهٔ کوشی در $\mathbb{R}^{n\times n}$ بوده، و در نتیجه به یک ماتریس، که آن را با e^X نمایش می‌دهیم، همگراست. این روش دیگری است که، بدون استفاده از آزمون مقایسه یا قضیهٔ همگرایی مطلق، نشان دهیم $\sum_{k=0}^{\infty}X^k/k!$ در یک فضای برداری کامل، همگراست.

۱۵.۲ قانون ضرب برای توابع ماتریسی مقدار . گیریم (a,b) یک بازه باز در $\mathbb{R}$ باشد. همچنین فرض کنید، $A:(a,b)\to\mathbb{R}^{m\times n}$ و $B:(a,b)\to\mathbb{R}^{n\times p}$ به ترتیب ماتریس هایی $m\times n$ و $n\times p$ بوده بطوری که درایه های آنها توابع دیفرانسیل پذیر بر $t\in[a,b]$ باشند. ثابت کنید که، برای $t\in]a,b[$، داریم

$$\frac{d}{dt}A(t)B(t)=A'(t)B(t)+A(t)B'(t),$$

که در آن $A'(t)=(dA/dt)(t)$ و $B'(t)=(dB/dt)(t)$ می‌باشند.

۱۵.۳ مولفهٔ همانی یک گروه لـی. **مولفهٔ همانی** G_0 از یک گروه لـی مفروض G مولفهٔ همبند شامل عنصر همانی e در G است. گیریم μ و ι نگاشت ضرب و نگاشت وارون G باشند.

الف) برای هر $x\in G_0$، نشان دهید که، $\mu(\{x\}\times G_0)\subset G_0$. (راهنمایی : از گزارهٔ A.۴۳ استفاده کنید.)

ب) نشات دهید که، $\iota(G_0)\subset G_0$.

پ) نشان دهید که، G_0 یک زیر مجموعهٔ باز از G است. (راهنمایی : از مسالهٔ A.۱۶ استفاده کنید.)

ت) ثابت کنید که خود G_0 یک گروه لـی می‌باشد.

۱۵.۴ تمرین (زیر گروه باز از یک گروه لی همبند). ثابت کنید که هر زیر گروه باز H، از یک گروه لی همبند مانند G، با خود G مساوی است.

۱۵.۵ دیفرانسیل نگاشت ضرب. گیریم، G یک گروه لی با نگاشت ضرب $\mu : G\times G \longrightarrow G$، بوده و نیز فرض کنید $\ell_a : G \to G$ و $r_a : G \to G$، به ترتیب ضرب چپ و راست توسط $a, b \in G$ باشند. نشان دهید که دیفرانسیل μ در $(a\times a) \in G\times G$ عبارت است از،

$$\mu_{*,(a,b)}(X_a, Y_b) = (r_b)_*(X_a) + (\ell_a)_*(Y_b); \quad (\text{برای } X_a \in T_aG \text{ ،} Y_b \in T_bG)$$

۱۵.۶ دیفرانسیل نگاشت وارون. گیریم G یک گروه لی با نگاشت ضرب $\mu : G\times G \to G$، نگاشت وارون $\iota : G \to G$، و عنصر همانی e باشد. نشان دهید که دیفرانسیل نگاشت وارون در $a \in G$ بصورت،

$$\iota_{*,a} : T_aG \to T_{a^{-1}}G, \qquad \iota_{*,a}(Y_a) = -(r_{a^{-1}})*(\ell_{a^{-1}})*Y_a,$$

است، که در آن $(r_{a^{-1}})_* = (r_{a^{-1}})_{*,e}$ و $(\ell_{a^{-1}})_* = (\ell_{a^{-1}})_{*,a}$. (دیفرانسیل وارون در نقطهٔ همانی در تمرین ۸.۸ قسمت (ب) محاسبه شده است.)

۱۵.۷ دیفرانسیل نگاشت دترمینان در A. نشان دهید که دیفرانسیل نگاشت دترمینان $\det : \mathrm{GL}(n,\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ در $A \in \mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ بصورت زیر می‌باشد،

$$\det\nolimits_{*,A}(AX) = (\det A)\mathrm{tr}X; \qquad (\text{برای } X \in \mathbb{R}^{n\times n}) \tag{۷.۱۵}$$

۱۵.۸ گروه خطی خاص. از تمرین ۱۵.۷ استفاده نموده و نشان دهید که 1 یک مقدار منظم نگاشت دترمینان است. این مطلب یک برهان فوری برای زیر منیفلد منظم بودن گروه خطی خاص $\mathrm{SL}(n,\mathbb{R})$ از گروه خطی عمومی $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ می‌باشد.

۱۵.۹ ساختار یک گروه خطی عمومی.

(الف) برای $r \in \mathbb{R}^\times := \mathbb{R} - \{0\}$، گیریم که M_r ماتریس $n\times n$

$$M_r = \begin{bmatrix} r & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{bmatrix} = [re_1 e_2 \cdots e_n],$$

که در آن $e_1, \cdots, e_n$ مبنای استاندارد برای $\mathbb{R}^n$ است. ثابت کنید که نگاشت،

$$f : \mathrm{GL}(n,\mathbb{R}) \longrightarrow \mathrm{SL}(n,\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^\times, \qquad A \longmapsto \big(AM_{1/\det A}, \det A\big),$$

یک دیفئومورفیسم است.

ب) منظور از مرکز گروه مفروض G، زیر گروهی از عناصر $g \in G$ است، که با عناصر G جابجا می‌شوند: $Z(G) := \{g \in G \mid gx = xg; \quad x \in G \text{ برای هر}\}$. نشان دهید که مرکز $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ با $\mathbb{R}^\times$، متناظر با زیر گروهی از ماتریس های اسکالر، ایزومورف است، و مرکز $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^\times$ با $\{\pm 1\} \times \mathbb{R}^\times$ نیز ایزو مورف است. گروه $\mathbb{R}^\times$ دارای دو عضو از مرتبهٔ 2 بوده، در حالیکه $\{\pm 1\} \times \mathbb{R}^\times$ دارای چهار عضو از مرتبهٔ 2 می‌باشد. بدلیل آن که مرکز آنها ایزو مورف نیست، $\mathrm{GL}(2,\mathbb{R})$ با $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^\times$ بعنوان گروه ایزو مورف نمی‌باشد.

پ) نشان دهید

$$h : \mathrm{GL}(3,\mathbb{R}) \longrightarrow \mathrm{SL}(3,\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^\times, \qquad A \longmapsto \left((\det A)^{1/3}, \det A\right),$$

یک ایزومورفیسم لـی گروه است.

حکمی‌مشابه برای حالت های (الف) و (ب) زمانیکه n زوج باشد، برقرار است. دو گروه لـی $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ و $\mathrm{SL}(n,\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^\times$ بعنوان گروه، ایزومورف نیستند، حال آن که اگر n فرد باشد، بعنوان گروه لـی با یکدیگر ایزومورفند.

۱۵.۱۰ گروه متعامد. با استفاده از دو حکم داده شده، نشان دهید که گروه متعامد $\mathrm{O}(n)$ فشرده است، الف) $\mathrm{O}(n)$ زیر مجموعهٔ بستهٔ $\mathbb{R}^{n\times n}$ است؛ و ب) $\mathrm{O}(n)$ زیر مجموعهٔ کراندار $\mathbb{R}^{n\times n}$ است.

۱۵.۱۱ گروه متعامد خاص $\mathrm{SO}(2)$. **گروه متعامد خاص** $\mathrm{SO}(n)$ زیر گروهی از $\mathrm{O}(n)$، متشکل از همهٔ ماتریسهایی است که درمینان آنها برابر 1 می‌باشد. نشان دهید که هر ماتریس $A \in \mathrm{SO}(2)$ را می‌توان به فرم زیر

$$A = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

به ازای مقادیر حقیقی θ نوشت. ثابت کنید که $\mathrm{SO}(2)$ با دایرهٔ $\mathbb{S}^1$ دیفئو مورف است.

۱۵.۱۲ گروه یکانی . **گروه یکانی** $\mathrm{U}(n)$ بصورت،

$$\mathrm{U}(n) = \left\{A \in \mathrm{GL}(n,\mathbb{C}) \mid \bar{A}^T A = I\right\},$$

تعریف می‌شود. در آن $\bar{A}$ نشان دهندهٔ ماتریس مزدوج A است، یعنی ماتریسی که درایه های آن مزدوج درایه های ماتریس A باشد: $(\bar{A})_{ij} = \overline{a_{ij}}$. نشان دهید که $\mathrm{U}(n)$ زیر منیفلدی منظم از $\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$ با بعد $\dim \mathrm{U}(n) = n^2$ است.

۱۵.۱۳ گروه یکانی خاص $\mathrm{SU}(2)$. یک گروه یکانی خاص $\mathrm{SU}(n)$، زیر گروهی از $\mathrm{U}(n)$ است که شامل ماتریس هایی با درمینان 1 می‌باشد.

الف) نشان دهید که $\mathrm{SU}(2)$ را می‌توان بصورت زیر نیز نمایش داد،

$$\mathrm{SU}(2) = \left\{ \begin{bmatrix} a & -\bar{b} \\ b & \bar{a} \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{2\times 2} \,\middle|\, a\bar{a} + b\bar{b} = 1 \right\}.$$

(راهنمایی : شرط $A^{-1} = \bar{A}^T$ را بر حسب درایه های ماتریس A بنویسید.)

ب) نشان دهید $\mathrm{SU}(2)$ با کرهٔ سه بعدی زیر دیفئومورف است،

$$\mathbb{S}^3 = \left\{ (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \,\middle|\, x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 1 \right\}.$$

۱۵.۱۴ ماتریس نمایی. درآیه‌های ماتریس $\exp\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ را محاسبه کنید.

۱۵.۱۵ گروه سیمپلکتیک . برای حل این تمرین، نیاز به اطلاعاتی در مورد کواترنیونها می‌باشد که در ضمیمه E آمده است. فرض کنید $\mathbb{H}$ یک میدان کج از کواترنیونها باشد. گروه سیمپلکتیک[۱] $\mathrm{Sp}(n)$ را به صورت $\mathrm{Sp}(n) := \left\{ A \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{H}) \,\middle|\, \bar{A}^T A = I \right\}$ تعریف نمود، که در آن $\bar{A}$ نمایش دهندهٔ مزدوج کواترنیونی A است. نشان دهید که $\mathrm{Sp}(n)$ یک زیر منیفلد منظم از $\mathrm{GL}(n, \mathbb{H})$ است، بعد آن را نیز حساب کنید.

۱۵.۱۶ گروه سیمپلکتیک مختلط. گیریم J ماتریس $2n \times 2n$ بصورت $J = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix}$ باشد که در آن I_n نمایش دهندهٔ ماتریس همانی $n \times n$ باشد. گروه سیمپلکتیک مختلط[۲] $\mathrm{Sp}(2n, \mathbb{C})$ را بصورت $\mathrm{Sp}(2n, \mathbb{C}) := \{ A \in \mathrm{GL}(2n, \mathbb{C}) \mid A^T J A = J \}$ تعریف می‌کنیم. نشان دهید که $\mathrm{Sp}(2n, \mathbb{C})$ یک زیر منیفلد منظم $\mathrm{GL}(2n, \mathbb{C})$ است، بعد آن را حساب کنید. (راهنمایی : مشابه مثال ۱۵.۶ عمل کنید. این حائز اهمیت است که فضای هدف برای نگاشت $f(A) = A^T J A$ صحیح انتخاب گردد.)

---

[۱] symplectic group [۲] complex symplectic group

فصل ۱۶

جبر لـی

در یک گروه لـی G، بدلیل آن که هر انتقال چپ، توسط یک عنصر $g \in G$، دیفئومورفیسمی است که، یک همسایگی همانی را به یک همسایگی g می‌نگارد، لذا همهٔ اطلاعات موضعی در یک همسایگی از عنصر همانی متمرکز شده، و بر این اساس فضای مماس در نقطهٔ همانی از اهمیت ویژه ای برخوردار می‌باشد.

برای فضای مماس T_eG، یک براکت لـی $[\ ,\ ]$ می‌توان تعریف کرد، بطوری که علاوه بر فضای برداری، دارای ساختار جبر لـی نیز باشد، آن را **جبر لـی**، متناظر با آن گروه لـی می‌نامیم. این جبر لـی اطلاعات زیادی از گروه لـی متناظر، خواهد داد. هدف از این بخش تعریف ساختار جبر لـی بر T_eG و متحد قرار دادن جبرهای لـی، چند گروه لـی کلاسیک است.

براکت لـی بر فضای مماس T_eG، بوسیلهٔ یک ایزومورفیسم بین فضای مماس در نقطهٔ همانی و فضای برداری از میدانهای برداری ناوردای چپ روی G، تعریف می‌شود. با توجه به این براکت، دیفرانسیل هر هومومورفیسم گروه لـی، یک هومومورفیسم جبر لـی خواهد شد. نتیجتا، یک فانکتور از کاتگوری گروههای لـی و هومومورفیسمهای گروه لـی، به کاتگوری جبرهای لـی و هومومورفیسمهای جبر لـی، بدست می‌آید. نتیجهٔ مطلوب، اطلاع از ساختار گروههای لـی و نمایش آن، به کمک جبر لـی متناظر خواهد شد.

بخش ۱.۱۶ فضای مماس در نقطهٔ همانی، یک گروه لـی

چون برای هر گروه لـی یک ضرب تعریف می‌شود، لذا حالت بسیار خاصـی از یـــک منیـفلد اســـت. در تمرین ۱۵.۲ ، مشاهده گردید که به ازای هر $g \in G$، انتقال چپ $\ell_g : G \to G$ توسط g، یک دیفئومورفیسم با وارون $\ell_{g^{-1}}$ است. دیفئومورفیسم ℓ_g عنصر همانی e را به عنصر g می‌نگارد و لذا یک ایزومورفیسم بین فضاهای مماس القاء می‌کند،

$$\ell_{g*} = (\ell_g)_{*,e} : T_eG \to T_gG.$$

بنابراین، اگر بتوان فضای مماس T_eG را در نقطهٔ همانی بررسی نمود، آنگاه به کمک تبدیل $\ell_{g*}T_eG$ می‌توان، فضای مماس T_gG را به ازای هر $g \in G$ مطالعه کرد.

۱۶.۱ مثال (فضای مماس بر $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ در I). در مثال ۸.۲۸ مشاهده کردیم که، فضای مماس بر $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ در نقطهٔ $g\in\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ را با $\mathbb{R}^{n\times n}$، که متشکل از فضای برداری همهٔ ماتریسهای حقیقی $n\times n$ است می‌شود یکی گرفت، و همچنین ایزومورفیسم $\ell_{g*}: T_I\,\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})\to T_g\,\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ را با ضرب چپ $g: X\mapsto gX$ یکی گرفتیم.

۱۶.۲ مثال (فضای مماس بر $\mathrm{SL}(n,\mathbb{R})$ در I). در جستجوی شرایطی خواهیم بود تا بردار مماس X در $T_I\,\mathrm{SL}(n,\mathbb{R})$ قرار داشته باشد. بنا به گزارهٔ ۸.۲۵ یک منحنی مانند $c:(-\varepsilon,\varepsilon)\to\mathrm{SL}(n,\mathbb{R})$ با شرایط $c(0)=I$ ، $c'(0)=X$ وجود دارد. چون c در $\mathrm{SL}(n,\mathbb{R})$ است، در نتیجه این منحنی می‌باید در رابطه $\det c(t)=1$ به ازای هر t متعلق به دامنهٔ $(-\varepsilon,\varepsilon)$ صدق کند. حال از طرفین نسبت به t مشتق گیری نموده و $t=0$ قرار می‌دهیم $t=0$. طرف چپ رابطه برابر است با،

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\det(c(t))\Big|_{t=0} &= (\det\circ c)_*\left(\frac{d}{dt}\Big|_0\right) \\
&= \det{}_{*,I}\left(c_*\frac{d}{dt}\Big|_0\right) && \text{(بنا به قاعدهٔ زنجیری)} \\
&= \det{}_{*,I}(c'(0)) \\
&= \det{}_{*,I}(X) \\
&= \mathrm{tr}(X) && \text{(بنا به گزارهٔ ۱۵.۲۵)}
\end{aligned}$$

در نتیجه،

$$\mathrm{tr}(X)=\frac{d}{dt}1\Big|_{t=0}=0.$$

بنابراین، فضای مماس $T_I\,\mathrm{SL}(n,\mathbb{R})$ در زیر فضای V از $\mathbb{R}^{n\times n}$ واقع شده که، بصورت زیر تعریف می‌شود،

$$V=\left\{X\in\mathbb{R}^{n\times n}\;\middle|\;\mathrm{tr}X=0\right\}.$$

چون $\dim V=n^2-1=\dim T_I\,\mathrm{SL}(n,\mathbb{R})$، دو فضا باید یکی باشند.

۱۶.۳ گزاره. فضای مماس $T_I\,\mathrm{SL}(n,\mathbb{R})$، در نقطهٔ همانی از گروه خطی خاص $\mathrm{SL}(n,\mathbb{R})$، زیر فضایی از $\mathbb{R}^{n\times n}$، متشکل از ماتریسهای $n\times n$ با اثر 0 می‌باشد.

۱۶.۴ مثال (فضای مماس بر $\mathrm{O}(n)$ در I). فرض کنید X یک بردار مماس بر گروه متعامد $\mathrm{O}(n)$ در نقطهٔ همانی I باشد. یک منحنی مانند $c(t)$ در $\mathrm{O}(n)$ بر فاصلهٔ کوچک شامل 0 چنان تعریف می‌کنیم که $c(0)=I$ و $c'(0)=X$. چون $c(t)$ در $\mathrm{O}(n)$ واقع است، پس $c(t)^Tc(t)=I$.

حال با مشتق گیری از طرفین نسبت به t و نیز با توجه به قانون مشتق از ضرب ماتریسی (تمرین ۱۵.۲) داریم $c'(t)^Tc(t)+c(t)^Tc'(t)=0$.

با محاسبهٔ آن در $t=0$ خواهیم داشت $X^T+X=0$ در نتیجه، ماتریس X متقارن اریب می‌باشد.

فرض کنید K_n فضای همهٔ ماتریسهای حقیقی $n\times n$ متقارن اریب باشد. برای مثال، برای $n=3$، ماتریسهایی به فرم

$$\begin{bmatrix}0&a&b\\-a&0&c\\-b&-c&0\end{bmatrix},\qquad a,b,c\in\mathbb{R} \text{ که در آن}$$

درآیه‌های قطر اصلی، چنین ماتریسی همگی برابر 0 بوده، و همهٔ درآیهای زیر قطر توسط درآیه‌های بالای قطر تعیین می‌شوند. در نتیجه،

$$\dim K_n = \frac{n^2 - \{\text{تعداد درآیه‌های قطر اصلی}\}}{2} = \frac{1}{2}(n^2 - n).$$

نشان دادیم که،

$$T_I(\mathrm{O}(n)) \subseteq K_n. \qquad (۱.۱۶)$$

حال بنا به محاسبات قبلی داریم (۴.۱۵را ملاحظه نمایید)،

$$\dim T_I(\mathrm{O}(n)) = \dim \mathrm{O}(n) = \frac{n^2 - n}{2}$$

چون دو فضای برداری در فرمول (۱.۱۶) دارای بعد یکسان می‌باشند، در نتیجه تساوی بر قرار است.

۱۶.۵ گزاره. فضای مماس $T_I(\mathrm{O}(n))$، از گروه متعامد $\mathrm{O}(n)$ در نقطهٔ همانی، زیر فضایی از $\mathbb{R}^{n\times n}$ متشکل از همهٔ ماتریسهای $n \times n$ متقارن اریب می‌باشد.

بخش ۲.۱۶ میدانهای برداری ناوردای - چپ، از یک گروه لـی

فرض کنید X یک میدان برداری بر گروه لـی G باشد. X را هموار فرض نمی‌کنیم. به ازای هر $g \in G$، بدلیل دیفئومورف بودن ضرب چپ $\ell_g : G \to G$، جلوبرنده (پوش فوروارد) $\ell_{g*}X$، یک میدان برداری خوش تعریف بر G است. گوییم میدان برداری X، **ناوردای - چپ یا پایای - چپ** است، هرگاه به ازای هر $g \in G$ ای $\ell_{g*}X = X$. این بدان معنی است که به ازای هر $h \in G$ ای

$$\ell_{g*}(X_h) = X_{gh}.$$

به بیان دیگر، یک میدان برداری X ناوردای - چپ است اگر و تنها اگر به ازای هر $g \in G$، آن میدان برداری با خودش ℓ_g - مرتبط باشد.

واضح است که هر میدان برداری ناوردای - چپ X، بطور کامل توسط مقدار آن در نقطهٔ همانی X_e تعریف می‌شود، زیرا

$$X_g = \ell_{g*}(X_e). \qquad (۲.۱۶)$$

بالعکس، فرض کنید میدان مماس $A \in T_eG$ در اختیار باشد، یک میدان برداری $\tilde{A}$ بر G می‌توان تعریف کرد که $(\tilde{A})_g = \ell_{g*}A$ (با توجه به ۲.۱۶). میدان برداری $\tilde{A}$ ناوردای - چپ است، چون

$$\begin{aligned}
\ell_{g*}(\tilde{A}_h) &= \ell_{g*}\ell_{h*}A \\
&= (\ell_g \circ \ell_h)_*A \qquad \text{(بنا به قاعدهٔ زنجیری)} \\
&= (\ell_{gh})_*(A) \\
&= \tilde{A}_{gh}.
\end{aligned}$$

عنصر $\tilde{A}$ را، **میدان برداری ناوردای - چپ بر G تولید شده توسط $A \in T_eG$** می‌نامیم. فرض کنید $L(G)$ فضای برداری از همهٔ میدانهای برداری ناوردای - چپ بر G باشد. در اینصورت یک تناظر یک به یک بصورت زیر موجود است،

$$\begin{array}{ccc} T_eG & \longleftrightarrow & L(G), \\ X_e & \longmapsto & X, \\ A & \longmapsto & \tilde{A}, \end{array} \tag{۳.۱۶}$$

به سادگی می‌توان نشان داد که این تناظر، در حقیقت یک ایزومورفیسم فضاهای برداری نمی‌باشد.

۱۶.۶ مثال (میدانهای برداری ناوردای - چپ روی $\mathbb{R}$). بر گروه لی $\mathbb{R}$ عمل گروه را جمع و عنصر همانی را 0 در نظر می‌گیریم. بنابراین **ضرب چپ** ℓ_g عملا همان عمل جمع $\ell_g(x) = g + x$ می‌باشد. $\ell_{g*}(d/dx|_0)$ را محاسبه می‌نماییم. چون $\ell_{g*}(d/dx|_0)$ بردار مماسی در g است، لذا یک مضرب اسکالر از $d/dx|_g$ می‌باشد:

$$\ell_{g*}\left(\frac{d}{dx}\Big|_0\right) = a\frac{d}{dx}\Big|_g. \tag{۴.۱۶}$$

برای محاسبه a طرفین رابطهٔ ۴.۱۶ را بر تابع $f(x) = x$ اثر می‌دهیم:

$$\begin{aligned} a &= a\frac{d}{dx}\Big|_g f \\ &= \ell_{g*}\left(\frac{d}{dx}\Big|_0\right) f \\ &= \frac{d}{dx}\Big|_0 \; f \circ \ell_g \\ &= \frac{d}{dx}\Big|_0 (g + x) = 1. \end{aligned}$$

در نتیجه،

$$\ell_{g*}\left(\frac{d}{dx}\Big|_0\right) = \frac{d}{dx}\Big|_g.$$

این نشان می‌دهد که d/dx یک میدان برداری ناوردای - چپ روی $\mathbb{R}$ می‌باشد. بنابراین، میدانهای برداری ناوردای - چپ روی $\mathbb{R}$ مضارب ثابتی از d/dx هستند.

۱۶.۷ مثال (میدانهای برداری ناوردای - چپ روی $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$). چون $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ یک زیر مجموعهٔ باز از $\mathbb{R}^{n\times n}$ است، در هر $g \in \mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ یک یکی گیری کانونی بین فضای مماس $T_g(\mathrm{GL}(n,\mathbb{R}))$ با $\mathbb{R}^{n\times n}$ تحت عملی که یک بردار مماس متناظر به یک ماتریس $n \times n$ بصورت زیر گردد:

$$\sum a_{ij}\frac{\partial}{\partial x_{ij}}\Big|_g \longleftrightarrow [a_{ij}]. \tag{۵.۱۶}$$

در اینجا از حرف B برای نشان دادن بردار مماس $B = \sum b_{ij}\partial/\partial x_{ij}\big|_I \in T_I(\mathrm{GL}(n,\mathbb{R}))$ در نقطهٔ همانی و نیز ماتریس $B = [b_{ij}]$، استفاده می‌کنیم. فرض کنید

$$B = \sum b_{ij} \frac{\partial}{\partial x_{ij}}\Big|_I \in T_I(\mathrm{GL}(n,\mathbb{R}))$$

همچنین فرض کنید $\tilde{B}$ میدان برداری ناوردای چپ روی $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ تولید شده بوسیلهٔ B باشد. با توجه به مثال ۸.۲۸ ،رابطهٔ زیر تحت اتحاد ۵.۱۶ برقرار می‌باشد،

$$\tilde{B}_g = (\ell_g)_* B \longleftrightarrow gB$$

. بر حسب مبنای استاندارد $\partial/\partial x_{ij}$ خواهیم داشت،

$$\tilde{B}_g = \sum_{i,j} (gB)_{ij} \frac{\partial}{\partial x_{ij}}\Big|_g = \sum_{i,j}\left(\sum_k g_{ik} b_{kj}\right)\frac{\partial}{\partial x_{ij}}\Big|_g.$$

۱۶.۸ گزاره. هر میدان برداری ناوردای چپ X روی یک گروه لی G ، هموار می‌باشد.

برهان : بنا به گزارهٔ ۱۴.۳ کافی است نشان دهیم که برای هر تابع هموار مانند f بر G، تابع Xf نیز هموار است. خم هموار $c : I \to G$ ، تعریف شده روی فاصلهٔ I شامل نقطهٔ 0 را چنان اختیار نموده که، $c(0) = e$ و $c'(0) = X_e$. هرگاه $g \in G$، آنگاه $gc(t)$ خمی است با نقطهٔ آغازین g و بردار اولیهٔ X_g، زیرا $gc(0) = ge = g$ و

$$(gc)'(0) = \ell_{g*}c'(0) = \ell_{g*}X_e = X_g.$$

بنا به گزارهٔ ۸.۲۶،

$$(Xf)(g) = X_g f = \frac{d}{dt}\Big|_0 f(cg(t)).$$

حال تابع $f(gc(t))$ ترکیبی از توابع هموار ،

$$\begin{array}{ccccccc} G\times I & \xrightarrow{\mathbb{1}\times c} & G\times G & \xrightarrow{\mu} & G & \xrightarrow{f} & \mathbb{R}, \\ (g,t) & \longmapsto & (g,c(t)) & \longmapsto & gc(t) & \longmapsto & f(gc(t)); \end{array}$$

می‌باشد و لذا هموار است. مشتق آن نسبت به t،

$$F(g,t) := \frac{d}{dt} f(gc(t)),$$

نیز هموار می‌باشد. چون $(Xf)(g)$ ترکیبی از توابع هموار است،

$$\begin{array}{ccccc} G & \longrightarrow & G\times I & \xrightarrow{F} & \mathbb{R}, \\ g & \longmapsto & (g,0) & \longmapsto & F(g,0) = \dfrac{d}{dt}\Big|_{t=0} f(gc(t)), \end{array}$$

بنابراین این تابع بر G تابعی هموار خواهد بود. این مطلب ثابت می‌کند که X یک میدان برداری هموار بر G است. □

از این گزاره می‌توان نتیجه گرفت که

۱۶.۹ نتیجه. فضای برداری $L(G)$ مرکب از میدانهای برداری ناوردای چپ بر G، زیر فضایی از فضای برداری $\mathfrak{X}(G)$، متشکل از همهٔ میدانهای برداری هموار بر G می‌باشد.

۱۶.۱۰ گزاره. اگر X و Y میدانهای برداری ناوردای چپ بر G باشند، آنگاه $[X,Y]$ نیز چنین است.

برهان : برای هر g در G، X و Y هر یک با خود، ℓ_g − مرتبطند. حال بنا به گزارهٔ ۱۴.۲۶، $[X,Y]$ نیز با خود ℓ_g−مرتبط است. □

بخش ۳.۱۶ جبـــر لـــی یک گروه لـــی

قبلاً گفته شد که **جبر لـی** عبارت است از یک فضای برداری $\mathfrak{g}$ بهمراه یک عمل براکت، یعنی یک نگاشت ناجابجایی و دوخطی، $[\ ,\ ]:\mathfrak{g}\times\mathfrak{g}\longrightarrow\mathfrak{g}$ که در اتحاد ژاکوبی (تعریف ۱۴.۱۶) صدق کند. **زیر جبر لـی** از یک جبر لـی $\mathfrak{g}$، زیر فضای برداری $\mathfrak{h}\in\mathfrak{g}$ است که تحت عمل براکت $[\ ,\ ]$ بسته باشد. بنا به گزارهٔ (۱۶.۱۰)، فضای $L(G)$ مرکب از میدانهای برداری ناوردای چپ روی گروه لـی مفروض G تحت براکت لـی $[\ ,\ ]$ بسته است، و بنابراین یک زیر جبر لـی، از جبر لـی $\mathfrak{X}(G)$ متشکل از همهٔ میدانهای برداری هموار بر G می‌باشد.

همانطوریکه در چند زیر بخش آینده خواهیم دید، ایزومورفیسم خطی $\varphi: T_eG\simeq L(G)$ در رابطهٔ (۳.۱۶) از دو منظر مورد استفاده قرار خواهد گرفت. در واقع هر یک از فضاهایبرداری طرفین رابطهٔ فوق دارای مزیتی است که دیگری فاقد آن می‌باشد. فضای برداری $L(G)$ دارای ساختار طبیعی جبر لـی بوده که توسط براکت لـی میدانهای برداری بدان تفویض می‌گردد، حال آنکه فضای مماس در نقطهٔ همانی دارای مفهوم طبیعی پیش برنده (پوش فوروارد) است، که توسط دیفرانسیل هومورفیسم گروه لـی بدست می‌آید. ایزومورفیسم خطی $\varphi: T_eG\simeq L(G)$ این اجازه را به ما خواهد داد، تا بتوان یک براکت لـی را بر T_eG تعریف کرد، همچنین این اجازه را خواهیم داشت، تا میدانهای برداری ناوردای چپ را تحت یک هومورفیسم گروه لـی پوش فوروارد نماییم.

ابتدا مطلب را با براکت لـی بر T_eG آغاز می‌کنیم. فرض کنید $A,B\in T_eG$ ، ابتدا آنها را به کمک φ به میدانهای برداری ناوردای چپ $\tilde{A},\tilde{B}$ می‌نگاریم، سپس براکت لـی آن را حساب نموده، $[\tilde{A},\tilde{B}]=\tilde{A}\tilde{B}-\tilde{B}\tilde{A}$. آنگاه بوسیلهٔ نگاشت وارون φ^{-1} آن را به T_eG بر می‌گردانیم. بنابراین، تعریف براکت لـی $[A,B]\in T_eG$ می‌بایست بصورت تعریف شود:

$$[A,B]:=[\tilde{A},\tilde{B}]_e. \qquad (۶.۱۶)$$

۱۶.۱۱ گزاره. اگر $A,B\in T_eG$ و $\tilde{A},\tilde{B}$ میدانهای برداری ناوردای چپ تولید شده توسط آنها باشند، آنگاه $[\tilde{A},\tilde{B}]=\widetilde{[A,B]}$.

برهان : با بکار بردن $\widetilde{(\ )}$ در طرفین رابطهٔ ۶.۱۶ داریم،

$$\begin{aligned}\widetilde{[A,B]} &= \widetilde{[\tilde{A},\tilde{B}]_e}\\ &= [\tilde{A},\tilde{B}],\end{aligned}$$

زیرا $\widetilde{(\ )}$ و $(\ )_e$ وارون یکدیگر هستند. □

فضای مماس T_eG بهمراه براکت لی $[,]$ ، تشکیل یک جبر داده که به آن، **جبر لی، گروه لی G** گوییم. جبر لی، T_eG را معمولا با نماد $\mathfrak{g}$ نشان می‌دهیم.

بخش ۴.۱۶ براکت لی بر $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{R})$

برای گروه خطی عمومی $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$، فضای مماس در نقطهٔ (ماتریس) همانی I را با فضای برداری $\mathbb{R}^{n\times n}$ متشکل از همهٔ ماتریسهای $n\times n$ حقیقی می‌توان یکی گرفت. بنابراین یک بردار مماس در $T_I\,\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ را با یک ماتریس $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$ که بوسیلهٔ رابطهٔ زیر بهم مربوط می‌شوند، می‌توان نشان داد.

$$\sum a_{ij}\frac{\partial}{\partial x_{ij}}\Big|_I \longleftrightarrow [a_{ij}] \tag{۷.۱۶}$$

فضای مماس $T_I\,\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ با ساختار جبر لی آن را با نماد $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{R})$ نشان می‌دهیم. فرض کنید $\tilde{A}$ یک میدان برداری ناوردای - چپ بر $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ تولید شده توسط A باشد. آنگاه بر جبر لی $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{R})$، براکت لی $[A,B]=[\tilde{A},\tilde{B}]_I$ که از براکت لی میدانهای برداری ناوردای چپ ناشی می‌شود را خواهیم داشت. در گزارهٔ بعدی براکت لی را بر حسب ماتریس تعیین می کنیم.

۱۶.۱۲ گزاره. فرض کنید،

$$A=\sum a_{ij}\frac{\partial}{\partial x_{ij}}\Big|_I,\quad B=\sum b_{ij}\frac{\partial}{\partial x_{ij}}\Big|_I\in T_I\,\mathrm{GL}(n,\mathbb{R}).$$

چنانچه اگر

$$\left[A,B\right]=\left[\tilde{A},\tilde{B}\right]_I=\sum c_{ij}\frac{\partial}{\partial x_{ij}}\Big|_I, \tag{۸.۱۶}$$

آنگاه $c_{ij}=\sum a_{ik}b_{kj}-b_{ik}a_{kj}$، و اگر مشتقات بوسیلهٔ رابطهٔ ماتریسی (۷.۱۶) تعریف شده باشد، آنگاه می‌توان نتیجه گرفت $[A,B]=AB-BA$.

برهان : به طرفین رابطهٔ (۸.۱۶) x_{ij} را اثر داده، حاصل عبارت است از

$$\begin{aligned}c_{ij} &= \left[\tilde{A},\tilde{B}\right]_I x_{ij}\\ &= \tilde{A}_I\tilde{B}x_{ij}-\tilde{B}_I\tilde{A}x_{ij}\\ &= A\tilde{B}x_{ij}-B\tilde{A}x_{ij} \qquad (\tilde{B}_I=B\ \ ,\ \ \tilde{A}_I=A\ \ \text{زیرا}),\end{aligned}$$

بنابراین لازم است که فرمولی برای تابع $\tilde{B}x_{ij}$ یافت شود. در مثال ۱۶.۷ دیدیم که میدان برداری ناوردای چپ $\tilde{B}$ بر $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ در نقطهٔ $g \in \mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ با رابطه زیر بیان می‌شود،

$$\tilde{B}_g = \sum_{i,j}(gB)_{ij}\frac{\partial}{\partial x_{ij}}\Big|_g$$

در نتیجه،

$$\tilde{B}_g x_{ij} = (gB)_{ij} = \sum_k g_{ik}b_{kj} = \sum_k b_{kj}x_{ik}(g).$$

چون این فرمول به ازای هر $g \in \mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ بر قرار است، تابع $\tilde{B}x_{ij}$ برابر است با،

$$\tilde{B}x_{ij} = \sum_k b_{kj}x_{ik}.$$

در نتیجه

$$\begin{aligned} A\tilde{B}x_{ij} &= \sum_{p,q}\frac{\partial}{\partial x_{pq}}\Big|_I\left(\sum_k b_{kj}x_{ik}\right)\\ &= \sum_{p,q,k} a_{pq}b_{kj}\delta_{ip}\delta_{kq}\\ &= \sum_k a_{ik}b_{kj}\\ &= (AB)_{ij}. \end{aligned}$$

با تعویض A و B داریم،

$$B\tilde{A}x_{ij} = \sum_k b_{ik}a_{kj} = (BA)_{ij}.$$

و بنابراین

$$c_{ij} = \sum_k a_{ik}b_{kj} - b_{ik}a_{kj} = (AB_BA)_{ij}$$

□

بخش ۴.۱۶ پوش فوروارد میدانهای برداری ناوردای چپ

همانطوریکه در زیر بخش (۱۴,۵) اشاره شد، که اگر $F: N \to M$ یک نگاشت هموار از منیفلد ها، و X یک میدان برداری هموار بر N باشد، پوش فوروارد F_*X در حالت کلی تعریف نمی‌شود، مگر آنکه F یک دیفئومورفیسم باشد. در حالت گروههای لی، چون تناظری بین میدانهای برداری ناوردای چپ و بردارهای مماس در نقطهٔ همانی وجود دارد، میدانهای برداری ناوردای چپ را تحت یک همومورفیسم گروههای لی می‌توان پوش فوروارد کرد. فرض کنید $F: H \to G$ یک همومورفیسم گروه لی باشد. یک میدان برداری

ناوردای چپX بر H بوسیلهٔ مقدار آن در نقطهٔ همانی بدست می‌آید، یعنی $A = X_e \in T_eH$ در نتیجه $X = \tilde{A}$. چون هر همومورفیسم $F : H \to G$ عضو همانی H را به عضو همانی G می‌نگارد، بنابراین دیفرانسیل آن $F_{*,e}$ در نقطهٔ همانی یک نگاشت خطی از T_eH به T_eG می‌باشد. نمودار زیر بوضوح وجود یک نگاشت خطی القا شده $F_* : L(H) \to L(G)$ بر میدانهای برداری ناوردای چپ، به همان روشی که تعریف می‌شود را نشان می‌دهد.

$$\begin{tikzcd} T_eH \arrow[r, "F_{*,e}"] \arrow[d, "\simeq"] & T_eG \arrow[d, "\simeq"'] \\ L(H) \arrow[r] & L(G) \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} A \arrow[r, mapsto] \arrow[d, mapsto] & F_{*,e}A \arrow[d, mapsto] \\ \tilde{A} \arrow[r, mapsto, dashed] & (\widetilde{F_{*,e}A}) \end{tikzcd}$$

۱۶.۱۳ مثال. فرض کنید $F : H \to G$ یک همومورفیسم بین گروههای لی باشد. آنگاه $F_* : L(H) \to L(G)$ را با ضابطهٔ

$$F_*(\tilde{A}) = (\widetilde{F_{*,e}A})$$

به ازای هر $A \in T_eH$ تعریف می‌کنیم.

۱۶.۱۴ گزاره. اگر $F : H \to G$ یک همومورفیسم گروههای لی و X نیز یک میدان برداری ناوردای چپ بر H باشد، آنگاه میدان برداری ناوردای چپ F_*X بر G ، با میدان برداری ناوردای چپ X ، F - مرتبط می‌باشد.

برهان :   می‌بایست به ازای هر $h \in H$ ، درستی رابطهٔ زیر را بررسی نماییم،

$$F_{*,h}(X_h) = (F_*X)_{F(h)} \qquad (۹.۱۶)$$

طرف چپ (۹.۱۶) عبارتست از،

$$\begin{aligned} F_{*,h}(X_h) &= F_{*,h}(\ell_{h*,e}X_e) \\ &= (F \circ \ell_h)_{*,e}(X_e), \end{aligned}$$

حال آنکه طرف راست (۹.۱۶) برابرست با،

$$\begin{aligned} (F_*X)_{F(h)} &= (\widetilde{F_{*,e}X_e})_{F(h)} && (\text{از تعریف} F_*X) \\ &= \ell_{F(h)*}F_{*,e}(X_e) && (\text{از تعریف ناوردای چپ}) \\ &= (\ell_{F(h)} \circ F)_{*,e}(X_e) && (\text{از قاعده زنجیری}) \end{aligned}$$

چون F یک همومورفیسم گروههای لی می‌باشد، داریم $F \circ \ell_h = \ell_{F(h)} \circ F$ ، بنابراین دو طرف رابطهٔ (۹.۱۶) باهم برابرند. □

۱۶.۱۵ تعریف. اگر $F : H \to G$ یک همومورفیسم گروههای لی باشد، و X یک میدان برداری ناوردای چپ بر H باشد، آنگاه F_*X را پوش فوروارد X تحت F نامیم.

بخش ۵.۱۶ دیفرانسیل، بعنوان یک هومورفیسم بین جبرهای لی

۱۶.۱۶ گزاره. اگر $F : H \to G$ یک هومورفیسم جبر لی باشد، آنگاه دیفرانسیل آن در نقطهٔ همانی،

$$F_* = F_{*,e} : T_eH \to T_eG,$$

یک هومورفیسم جبر لی است، یعنی یک نگاشت خطی است که به ازای هر $A, B \in T_eH$ ،

$$F_*[A, B] = [F_*A, F_*B].$$

برهان : بنابه گزاره ۱۶.۱۴ میدان برداری $F_*\tilde{A}$ بر G نسبت به میدان برداری $\tilde{A}$ بر H، F − مرتبط است، و میدان برداری $F_*\tilde{B}$ نسبت به $\tilde{B}$ بر H ، F − مرتبط می‌باشد. نتیجه می‌گیریم که براکت $[F_*\tilde{A}, F_*\tilde{B}]$بر G با براکت لی $[\tilde{A}, \tilde{B}]$ بر H، F − مرتبط است. (گزارهٔ ۱۴.۲۶). این یعنی

$$F_*([\tilde{A}, \tilde{B}]_e) = [F_*\tilde{A}, F_*\tilde{B}]_e.$$

سمت چپ این تساوی عبارتست از $F_*[A, B]$، حال آنکه سمت راست آن برا بر است با،

$$\begin{aligned} [F_*\tilde{A}, F_*\tilde{B}]_e &= [(\widetilde{F_*A}), (\widetilde{F_*B})]_e && (\text{بنا به تعریف}\ F_*\tilde{A}) \\ &= [F_*A, F_*B] && (\text{از تعریف}\ [\ ,\ ]\ \text{بر}\ T_eG) \end{aligned}$$

با برابر قرار دادن دو طرف داریم $F_*[A, B] = [F_*A, F_*B]$. □

فرض کنید که H یک زیر گروه لی، با نگاشت احتوا $i : H \to G$ برای گروه لی G باشد. چون i یک ایمرشن است، دیفرانسیل آن

$$i_* : T_eH \to T_eG$$

یکبیک می‌باشد. برای تمایز بین براکت لی بر T_eH از براکت لی بر T_eG، موقتا T_eH و T_eG را بصورت اندیس دو براکت بکار می‌گیریم. بنا به گزارهٔ ۱۶.۱۶، به ازای هر $X, Y \in T_eH$

$$i_*\left(\left[X, Y\right]_{T_eH}\right) = \left[i_*X, i_*Y\right]_{T_eG} \tag{۱۰.۱۶}$$

این نشان می‌دهد که هرگاه T_eH توسط i_* زیر فضای از T_eG باشد، آنگاه براکت T_eH از تحدید براکت T_eG بر T_eH بدست می‌آید. در نتیجه جبر لی از یک زیر گروه H را با یک زیر جبر لی از جبر لی G می‌توان مشخص نمود.

معمولا جبرهای لی گروههای کلاسیک را با حروف **گوتیک** نمایش می‌دهند. بعنوان مثال جبرهای لی $\mathrm{GL}(n\mathbb{R})$ ، $\mathrm{SL}(n, \mathbb{R})$ ، $\mathrm{O}(n)$، و $\mathrm{Un}(n)$ را به ترتیب با $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$، $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{R})$، $\mathfrak{o}(n)$ و $\mathfrak{u}(n)$ نمایش می‌دهند. با توجه به (۱۶،۱۰) و گزارهٔ (۱۶،۱۱) ساختار جبر لی بر $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{R})$، $\mathfrak{o}(n)$ و $\mathfrak{u}(n)$ مانند ساختار جبری $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$ بصورت $[A, B] = AB - BA$ می‌باشد.

۱۶.۱۷ یادداشت. یک قضیهٔ اساسی در نظریهٔ گروههای لی وجود دارد که حکم می‌کند ، یک تناظر یک به یک بین زیر گروههای همبند از گروه لی G و زیر جبرهای جبر لی $\mathfrak{g}$ موجود است.[قضیهٔ (۳,۱۹) از مرجع ۳۸ نتیجهٔ .ص.(a) ۹۵]. در چمبرهٔ $\mathbb{R}/\mathbb{Z}^2$ ، $\mathbb{R}^2$ یک زیر فضای برداری، جبر لی $\mathfrak{g}$ بوده، و زیر جبرهای لی یک بعدی آن همگی خطوط گذرنده از مبداء می‌باشند. هر خط گذرنده از مبدا در $\mathbb{R}^2$ یک زیر گروه $\mathbb{R}^2$ تحت عمل جمع است. تصویر آن تحت نگاشت خارج قسمتی $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ یک زیر گروه از چمبرهٔ $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ است. اگر خطی دارای شیب گویا باشد، آنگاه تصویر آن یک زیر منیفلد منظم تیوب بوده، و اگر خط دارای شیب گنگ (اصم) باشد ،آنگاه تصویر آن تنها یک زیر منیفلد ایمرس از تیوب خواهد بود. قضیهٔ بالا تنها بیان می‌کند که، زیر گروههای لی یک بعدی و همبند، از تیوب تصاویر خطوط گذرنده از مبدا می‌باشند. توجه کنید که اگر یک زیر گروه لی ، زیر گروهی بوده که، زیر منیفلد منظم نیز باشد، آنگاه می‌بایست همهٔ خطوط با شیبهای اصم را بعنوان زیر گروههای لی تیوب از آن مستثنی کرد، و امکان وجود یک تناظر یک به یک بین زیر گروههای همبند از یک گروه لی و زیر جبرهای لی ، از جبر لی آن نخواهد بود. علت نیازمند به چنین تناظری آن است که، یک زیر گروه لی از یک گروه لی، زیر گروهی و نیز زیر منیفلدی ایمرس باشد.

بخش ۶.۱۶ تمرینات

در تمرینات زیر واژهٔ ”**بعد** اشاره به بعد فضای برداری حقیقی یا بعد منیفلد دارد.

۱۶.۱ ماتریس هرمیتی-اریب. ماتریس مختلط $X \in \mathbb{C}^{n\times n}$ را یک ماتریس **هرمیتی-اریب** نامیم هرگاه مزدوج ترانهادهٔ آن یعنی $\bar{X}^T$ با $-X$ برابر باشد. فرض کنید V یک فضای برداری متشکل از ماتریسهای $n\times n$ هرمیتی - اریب باشد. نشان دهید که $\dim V = n^2$.

۱۶.۲ جبر لی متناظر به گروه یکدار. نشان دهید که فضای مماس در نقطهٔ همانی I از گروه یکدار $\mathrm{Un}(n)$ یک فضای برداری متشکل از ماتریسهای $n\times n$ هرمیتی-اریب است.

۱۶.۳ جبر لی متناظر به گروه سیمپلتیک. ابتدا به تمرین ۱۵.۱۵ برای نمادهای مربوط به گروه سیمپلتیک $\mathrm{Sp}(n)$ رجوع شود. نشان دهید که فضای مماس در نقطهٔ همانی I از گروه سیمپلتیک $\mathrm{Sp}(n) \subset \mathrm{GL}(n,\mathbb{H})$، فضای برداری متشکل از همهٔ ماتریسهای $n\times n$ **کوارترنیونی** X است که $\bar{X}^T = -X$.

۱۶.۴ جبر لی متناظر به گروه سیمپلیتیک مختلط.

(الف) نشان دهید که فضای مماس در نقطهٔ همانی I از $\mathrm{Sp}(2n,\mathbb{C}) \subset \mathrm{GL}(2n,\mathbb{C})$ فضای برداری متشکل از همهٔ ماتریسهای $2n\times 2n$ مختلط X است که، JX ماتریس متقارن باشد.

(ب) بعد $\mathrm{Sp}(2n,\mathbb{C})$ را حساب کنید.

۱۶.۵ میدانهای برداری ناوردای چپ روی $\mathbb{R}^2$. میدانهای برداری ناوردای چپ بر $\mathbb{R}^n$ را بیابید.

۱۶.۶ میدانهای برداری ناوردای چپ روی دایره. میدانها برداری ناوردای چپ بر S^1 را بیابید.

۱۶.۷ منحنیهای انتگرال یک میدان برداری ناوردای چپ. فرض کنید $A \in \mathfrak{gl}(n,\mathbb{R})$ و $\tilde{A}$ نیز میدان برداری ناوردای چپ بر $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ تولید شده بوسیلهٔ A باشد. نشان دهید که $c(t) = e^{tA}$ منحنی انتگرال $\tilde{A}$ با شروع از ماتریس همانی I است. منحنی انتگرال $\tilde{A}$ را با شروع از $g \in \mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ بیابید.

۱۶.۸ منیفلدهای توازی پذیر. منیفلدی که کلاف مماس آن بدیهی باشد را **توازی پذیر** گوییم. اگر M منیفلدی با بعد n باشد، نشان دهید که توازی پذیری معادل با وجود یک کنج هموار $X_1,\dots,X_n$ بر M است.

۱۶.۹ توازی پذیری گروه لی. نشان دهید که هر گروه لی توازی پذیر است.

۱۶.۱۰ پوش فوروارد میدانهای برداری ناوردای چپ. فرض کنید $F : H \to G$ یک همومورفیسم گروههای لی بوده، و X و Y میدانهای برداری ناوردای چپ بر H باشند. ثابت کنید که در این صورت $F_*[X,Y] = [F_*X, F_*Y]$.

۱۶.۱۱ نمایش الحاقی. فرض کنید G یک گروه لی با بعد n با جبر لی $\mathfrak{g}$ باشد.

(الف) برای هر $a \in G$، دیفرانسیل در نقطهٔ همانی نگاشت تزویج $c_a : \ell_a \circ r_{a^{-1}} : G \to G$ یک ایزومورفیسم خطی $c_{a*} : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ است. در نتیجه، $c_{a*} \in \mathrm{GL}(\mathfrak{g})$. نشان دهید که نگاشت $\mathrm{Ad} : G \to \mathrm{GL}(\mathfrak{g})$ که با $\mathrm{Ad}(a) = c_{a*}$ تعریف می‌شود، یک همومورفیسم گروهها است. آنرا **نمایش الحاقی** گروه لی G نامیم.

(ب) نشان دهید که $\mathrm{Ad} : G \to \mathrm{GL}(\mathfrak{g})$ ، هموار است.

۱۶.۱۲ یک ساختار جبر لی بر $\mathbb{R}^3$. جبر لی $\mathfrak{o}(n)$ متناظر به گروه متعامد $\mathrm{O}(n)$ یک جبر لی متشکل از ماتریسهای $n \times n$ متقارن-اریب حقیقی است، با براکت لی $[A,B] = AB - BA$ است. در حالت $n = 3$، یک ایزومورفیسم فضای برداری $\varphi : \mathfrak{o}(3) \to \mathbb{R}^3$ موجود است،

$$\varphi : \begin{bmatrix} 0 & a_1 & a_2 \\ -a_1 & 0 & a_3 \\ -a_2 & -a_3 & 0 \end{bmatrix} \longmapsto \begin{bmatrix} a_1 \\ -a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}.$$

ثابت کنید که $\varphi([A,B]) = \varphi(A) \times \varphi(B)$. در نتیجه، $\mathbb{R}^3$ با ضرب خارجی تشکیل یک جبر لی می‌دهد.

فصل ۱۷

فرم های دیفرانسیلی

فرم های دیفرانسیلی تعمیم توابع حقیقی مقدار بر منیفلد هستند. بجای نسبت دادن هر نقطه از یک منیفلد به یک عدد، یک k - فرم دیفرانسیلی نگاشتی است که به هر نقطه از فضای مماس آن یک k-همبردار نسبت می‌دهد. برای $k = 0, 1$، k-فرم دیفرانسیلی را به ترتیب تابع و میدان همبردار نامیم. فرم های دیفرانسیلی نقشی اساسی در نظریهٔ منیفلد ها ایفا می‌کنند. آن ها جز اولین و مهمترین اشیاء ذاتی وابسته به هر منیفلد می‌باشند، که می‌توان برای ساخت ناوردا های دیفئومورفیسم یک منیفلد استفاده کرد. بر خلاف میدان های برداری، که آن ها نیز جز اشیاء ذاتی وابسته به منیفلد هستند، فرم های دیفرانسیل دارای ساختار جبری غنی تر می‌باشند. به علت وجود ضرب گوه ای، مشتق خارجی، و مدرج، مجموعه فرم های هموار بر یک منیفلد دارای ساختار جبر مدرج و مجتمع دیفرانسیلی [۱] می‌باشند. به چنین ساختار جبری معمولا جبر دیفرانسیلی مدرج[۲] گویند. علاوه بر آن، مجتمع دیفرانسیلی از فرم های هموار بر یک منیفلد را می‌توان با پولبک کردن تحت یک نگاشت هموار، به صورت یک فانکتور پادوردا تبدیل نمود که به آن مجتمع دورام [۳] ، منیفلد گویند. می‌خواهیم از یکمجتمع دورام یک کوهمولوژی دورام[۴] ، یک منیفلد را بسازیم. چون انتگرال گیری از توابع بر یک فضای اقلیدسی به انتخاب مختصات بستگی داشته، و تحت یک تغییر مختصات ناوردا نمی‌باشد، بنابراین انتگرال گیری از توابع روی منیفلد امکانپذیر نمی‌باشد. بالاترین درجهٔ ممکن از یک فرم دیفرانسیلی در واقع برابر با بعد منیفلد آن می‌باشد. در میان فرم های دیفرانسیلی، آنهایی که دارای بالاترین درجه هستند، قابل تبدیل تحت یک تغییر مختصات بوده و به اشیائی تبدیل می‌شوند که قابل انتگرال گیری هستند. نظریهٔ انتگرال گیری بر یک منیفلد بدون حضور فرم های دیفرانسیلی امکانپذیر نمی‌باشد. اگر بخواهیم بطور غیر مسند صحبت کنیم، فرم های دیفرانسیلی در زیر علامت انتگرال ظاهر می‌گردند. بدین مفهوم آن ها قدمتی به اندازهٔ عمر حسابان داشته و بسیاری از قضایای حسابان مانند قضیهٔ انتگرال کشی و قضیهٔ گرین را می‌توان به زبان فرم های دیفرانسیلی بیان کرد. گرچه بسیار دشوار است تا گفته شود که چه کسی اول بار برای فرم های دیفرانسیلی یک معنی مستقلی ارائه داد،

---
[۱] Differential complex [۲] Differential graded algebra [۳] de Rham [۴] de Rham cohomology

اما هنری پوانکاره[۳۲] [۵] و الی کارتان [۵] [۶] جز پیشگامانی بودند که در این زمینه کار کردند . کارتان در مقالهٔ [۵] بطور رسمی جبر فرم های دیفرانسیلی بر $\mathbb{R}^n$ را بعنوان یک جبر مدرج ناجابجایی بر توابع C^∞ تولید شده توسط فرم های $dx^1,...,dx^n$ را بیان کرد. در همان مقاله می‌توان برای اول بار مشتق خارجی بر فرم های دیفرانسیلی را یافت. تعریف مدرن از فرم دیفرانسیلی بعنوان برشی از توان خارجی یک کلاف کتانژانت پس از بیان نظریهٔ کلاف های تاری در اواخر دههٔ چهل ارائه گردید. [۶]

در این فصل تعریفی از فرم های دیفرانسیل از منظر کلاف های برداری ارائه می‌دهیم. برای سهولت ابتدا مطلب را از ۱-فرمی‌ها، که قبلا در خواص k- فرم ها بیان گردیده، آغاز می‌کنیم. در اینجا خواصی متفاوتی از فرم های دیفرانسیلی، از جمله چگونگی ضرب، دیفرانسیل گیری، و پولبک آن ها را بررسی می‌کنیم. علاوه بر آن در مشتق خارجی، مشتق لی و ضرب درونی، بهمراه دو عمل ذاتی دیگر بر منیفلد ها را معرفی می‌کنیم.

بخش ۱.۱۷ ۱-فرمی‌های دیفرانسیلی

فرض کنید M یک منیفلد هموار و p یک نقطه از M باشد. **فضای کتانژانت** M در p که با نماد $T_p^*(M)$ یا T_p^*M نموده می‌شود، فضای دوگان فضای مماس T_pM تعریف شده، یعنی

$$T_p^*M = (T_pM)^\vee = Hom(T_pM, \mathbb{R}).$$

یک عضو از فضای کتانژانت را T_p^*M را یک **همبردار** در p نامیم. بنابراین، یک همبردار ω_p در p تابعی خطی است بصورت،

$$\omega_p : T_pM \to \mathbb{R}$$

یک **میدان همبردار** ، یک **۱-فرم دیفرانسیلی**، یا باختصار یک **۱-فرم** بر M ، تابعی است مانند ω که به هر نقطهٔ p در M یک همبردار ω_p در p را نظیر می‌کند. به این مفهوم یک میدان همبردار، دوگان یک میدان برداری بر M است، که به هر نقطه از M یک بردار مماس در p را نظیر می‌کند. میدان های همبردار بطور طبیعی، حتی زمانی که علاقه مند بکار با میدان های برداری هستیم خود را نشان می‌دهند. برای مثال، اگر X یک میدان برداری C^∞ بر $\mathbb{R}^n$ باشد، آنگاه در هر نقطه $p \in \mathbb{R}^n$ بصورت $X_p = \sum a^i \partial/\partial x^i|_p$. ضریب a^i به بردار X_p بستگی دارد. این ضریب تابعی خطی بصورت: $T_p\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ است، و یک همبردار در p می‌باشد. اگر p روی $\mathbb{R}^n$ تغییر کند، a^i یک میدان همبردار بر $\mathbb{R}^n$ خواهد شد. در حقیقت، ۱-فرم dx^i چیزی جز این نیست که i امین ضریب میدان برداری نسبت به کنج استاندارد $\partial/\partial x^1,...\partial/\partial x^n$ را انتخاب می‌نماید.

بخش ۲.۱۷ دیفرانسیل یک تابع

[۵] Henri Poincaré [۶] Élie Cartan

۱۷.۱ تعریف. اگر f یک تابع حقیقی مقدار C^∞ بر یک منیفلد M باشد، **دیفرانسیل** آن ۱-فرمی df بر M است، بقسمی که به ازای هر $p \in M$ و $X_p \in T_pM$ ،

$$(df)_p(X_p) = X_p f.$$

بجای $(df)_p$، می‌توان ۱-فرم df را در نقطهٔ p بصورت $df|_p$ نیز نوشت. این در واقع مشابه نماد نویسی برای بردار مماس بصورت، $(d/dt)|_p = d/dt|_p$ است. در زیر بخش ۸,۲ به مفهوم دیگری از دیفرانسیل برخوردیم که با، f_* نشان داده شده و برای یک نگاشت بین منیفلد ها بیان گردید. حال می‌خواهیم این دو مفهوم از دیفرانسیل را مقایسه نماییم.

۱۷.۲ گزاره. اگر $f : M \to \mathbb{R}$ یک تابع C^∞ باشد، آنگاه به ازای هر $p \in M$ و $X_p \in T_pM$ ،

$$F_*(X_p) = (df)_p(X_p)\frac{d}{dt}|_{f(p)}$$

برهان : چون $f_*(X_p) \in T_{f(p)}\mathbb{R}$، پس عدد حقیقی مانند a است که،

$$f_*(X_p) = a\frac{d}{dt}\Big|_{f(p)} \tag{۱.۱۷}$$

برای بدست آوردن a کافی است که طرفین رابطهٔ (۱.۱۷) را بر x اثر دهیم،

$$a = f_*(X_p)(t) = X_p(t \circ f) = X_p f = (df)_p(X_p).$$

□

این گزاره نشان می‌دهد که تحت یکی گیری کانونی فضا های مماس $T_{f(p)}\mathbb{R}$ با $\mathbb{R}$ از طریق

$$a\frac{d}{dt}\Big|_{f(p)} \longleftrightarrow a,$$

f_* با df یکی می‌باشد. به این دلیل، می‌پذیریم که هر دوی آن ها دیفرانسیل f اند. بر حسب دیفرانسیل df، یک تابع C^∞ مانند $f : M \to \mathbb{R}$ دارای یک نقطهٔ بحرانی در $p \in M$ است اگر و تنها اگر $(df)_p = 0$
.

بخش ۳.۱۷ بیان موضعی برای ۱-فرم دیفرانسیلی

فرض کنید $(U, \phi) = (U, x^1 \cdots, x^n)$ یک چارت مختصاتی بر منیفلد M باشد. آنگاه دیفرانسیل های $dx^1, \cdots, dx^n$ ۱-فرمی‌هایی بر U می‌باشند.

۱۷.۳ گزاره. در هر نقطهٔ $p \in U$، همبردارهای $(dx^1)_p, \cdots, (dx^n)_p$ تشکیل یک مبنا برای فضای کتانژانت T_p^*M می‌دهند که، دوگان مبنای $\partial/\partial x^1|_p, \cdots, \partial/\partial x^n|_p$ برای فضای مماس T_pM هستند.

برهان : اثبات درست مشابه حالت اقلیدسی می‌باشد گزارهٔ (۴.۴)

$$(dx^i)_p\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\Big|_p\right) = \frac{\partial}{\partial x^j}\Big|_p x^i = \delta^i_j.$$

□

بنابراین، هر ۱-فرمی ω بر U را می‌توان بصورت یک ترکیب خطی

$$\omega = \sum a_i dx^i,$$

نوشت، که در آن ضرایب a_i توابعی بر U هستند. مخصوصا، اگر f یک تابع C^∞ بر M باشد، آنگاه با تحدید ۱-فرمی df به U می‌بایست یک ترکیب خطی بصورت

$$df = \sum a^i dx^i$$

داشت. برای یافتن a_j، از همان ترفند همیشگی استفاده نموده و طرفین رابطه را بر $\frac{\partial}{\partial x^j}$ اثر می‌دهیم،

$$(df)\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right) = \sum_i a_i dx^i\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right) \quad \Longrightarrow \quad \frac{\partial f}{\partial x^j} = \sum_i a_i \delta^i_j = a_j$$

این مطلب یک بیان موضعی برای df ارائه می‌دهد.

$$df = \sum \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i \qquad (۲.۱۷)$$

بخش ۴.۱۷ کلاف کتانژانت

مجموعهٔ زمینهٔ **کلاف کتانژانت** T^*M از یک منیفلد M عبارت است از اجتماع فضا های کتانژانت در هر نقطه از M،

$$T^*M := \bigcup_{p\in M} T^*_pM \qquad (۳.۱۷)$$

درست مانند حالت کلاف مماس، اجتماع (۳.۱۷) عبارت است از یک اجتماع جدا از هم، و لذا نگاشت طبیعی $\pi : T^*M \to M$ با ضابطهٔ $\pi(\alpha) = p$ به ازای $\alpha \in T^*_pM$ وجود دارد.به تقلید از ساختار کلاف مماس، می‌توان یک توپولوژی بصورت زیر به T^*M تفویض نمود. اگر $(U,\phi) = (U, x^1, \cdots, x^n)$ یک چارت بر M و $p \in U$ باشد، آنگاه هر $\alpha \in T^*_pM$ را می‌توان بصورت ترکیب خطی یکتای زیر نوشت

$$\alpha = \sum c_i(\alpha) dx^i|_p$$

این مطلب باعث ایجاد یک دو سویی بفرم زیر خواهد بود،

$$\tilde{\phi} : T^*U \to \phi(U)\times\mathbb{R}^n,$$
$$\alpha \mapsto (\phi(p), c_1(\alpha), \cdots, c_n(\alpha)) = (\phi\circ\phi, c_1, \cdots, c_n)(\alpha)$$

با استفاده از این دو سویی، می‌توان توپولوژی $\phi(U)\times\mathbb{R}^n$ را به $T*U$ منتقل نمود.
حال به ازای هر دامنهٔ U از یک چارت در اطلس ماکسیمال M، فرض کنید $\mathcal{B}_U$ گردایه ای از همهٔ زیرمجموعه های باز T^*U ، و نیز $\mathcal{B}$ اجتماع $\mathcal{B}_U$ باشد. همانطوریکه در زیر بخش (۱,۱۲) مشاهده شد، $\mathcal{B}$ در شرایط مبنا بودن، گردایه ای از زیر مجموعه های T^*M صدق می‌کند. به T^*M توپولوژی تولید شده توسط $\mathcal{B}$ را تفویض می‌کنیم. مانند کلاف مماس با نگاشت های $\tilde{\phi} = (x^1\circ\pi, \cdots, x^n\circ\pi, c_1, \cdots, c_n)$ از (۴.۱۷) بعنوان نگاشت های مختصاتی، T^*M دارای ساختار منیفلد C^∞ خواهد بود، بعلاوه با نگاشت تصویری $\pi : T^*M \to M$ یک کلاف برداری از رتبهٔ n روی منیفلد پایهٔ M می‌باشد، که معمولا این کلاف را **کلاف کتانژانت** نام‌گذاری می‌کنند. اگر $x^1, \cdots, x^n$ مختصاتی بر زیر مجموعهٔ باز $U\subset M$ باشد، آنگاه $\pi^*x^1, \cdots, \pi^*x^n, c_1, \cdots, c_n$ مختصاتی برای $\pi^{-1}U\subset T^*M$ خواهد بود. بطور صریح **کلاف کتانژانت** از منیفلد M سه تایی (T^*M, M, π) است که، در آن به ترتیب T^*M و M را فضای کلی و فضای پایهٔ کلاف نامیده ، ولی بطور غیر تخصصی، معمولا T^*M را کلاف کتانژانت بر M نامند.
به زبان کلاف کتانژانت، یک ۱-فرمی بر M یک برش از کلاف کتانژانت T^*M خواهد بود، یعنی نگاشتی است مانند $\omega : M \to T^*M$ بقسمی که $\pi\circ\omega = \mathbf{1}_M$ نگاشت همانی بر M باشد. ۱-فرمی را C^∞ نامیم، هرگاه نگاشت $M \to T^*M$ نگاشتی C^∞ باشد.

۱۷.۴ مثال (فرم لیوویل بر کلاف کتانژانت). اگر منیفلد M با بعد n در نظر گرفته شود، آنگاه فضای کلی T^*M از کلاف کتانژانت $\pi : T^*M \to M$ منیفلدی با بعد $2n$ خواهد بود. قابل ملاحظه است که روی T^*M یک ۱-فرمی λ موسوم به **فرم لیوویل** (یا در پاره ای از کتاب ها موسوم به **فرم پوانکاره**) موجود است که بطور مستقل از روی چارت ها و بصورت زیر تعریف می‌شود. همانطوریکه می‌دانید یک نقطه در T^*M یک همبردار بصورت $\omega_p \in T_p^*M$ در نقطهٔ مفروض $p\in M$ است. بنابراین می‌توان با زوج ω_p و $\pi_*(X_{\omega_p})$ عدد حقیقی $\omega_p(\pi_*(X_{\omega_p}))$ را بدست آورد.

با توجه به ملاحظات اخیر تعریف می‌کنیم،

$$\lambda_{\omega_p}(X_{\omega P}) = \omega_p(\pi_*(X_{\omega_p})).$$

کلاف کتانژانت و فرم لیوویل بر آن، نقش مهمی در نظریهٔ مکانیک کلاسیک ایفا می‌کنند [۱. ص. ۲۰۲].

بخش ۵.۱۷ مشخصهٔ ۱-فرمی‌های C^∞

یک ۱-فرمی ω تعریف شده بر منیفلد M را هموار گوییم، هرگاه $\omega : M \to T^*M$ بعنوان برشی از کلاف کتانژانت $\pi : T^*M \to M$ هموار باشد. مجموعهٔ همهٔ ۱-فرمی‌های هموار بر M دارای ساختار یک فضای برداری بوده و با نماد $\Omega^1(M)$ نمایش داده می‌شود. در یک چارت مختصاتی $(U,\phi) = (U, x^1, \cdots, x^n)$ بر M، مقدار ۱-فرمی ω در $p\in U$ یک ترکیب خطی بصورت

$$\omega_p = \sum a_i(p) dx^i|_p.$$

است. هنگامیکه p در U تغییر می‌کند، ضرایب a_i توابعی بر U هستند. حال می‌خواهیم محک هموار را برای یک ۱-فرمی بر حسب ضرایب a_i بدست آوریم. این مطلب درست ماتند محک هموار است که در زیر بخش (۱,۱۴) بدان پرداختیم.

بنا به زیر بخش (۳,۱۷) چارت (U,ϕ) بر M چارت زیر را بر T^*M القا می‌کند،

$$(T^*M,\tilde{\phi}) = (T^*U,\bar{x}^1,\cdots,\bar{x}^n,c_1,\cdots,c_n)$$

در آن $\bar{x}^i = \pi^*x^i = x^i\circ\pi$ و c_i با رابطهٔ

$$\alpha = \sum c_i(\alpha)dx^i|_p, \qquad \alpha\in T^*_pM.$$

تعریف می‌شود.

با مقایسه نمودن ضرایب در

$$\omega_p = \sum a_i(p)dx^i|_p = \sum c_i(\omega_p)dx^i|_p,$$

در می‌یابیم که $a_i = c_i\circ\omega$ می‌باشد، که ω بعنوان نگاشتی از U به T^*U می‌باشد. c_i ها توابع مختصاتی بوده، و لذا بر T^*U هموار می‌باشند. عکس این مطلب نیز درست است، لم زیر این مطلب را بیان می‌کند،

۱۷.۵ لم. فرض کنید $(U,\phi) = (U,x^1,\cdots,x^n)$ یک چارت بر منیفلد M باشد. یک ۱-فرمی $\omega = \sum a_idx^i$ بر U هموار است، اگر و تنها اگر توابع ضریب a_i همگی هموار باشند.

برهان : این لم حالت خاصی از گزارهٔ ۱۲.۳۰، که در آن E کلاف کتانژانت T^*M و s_j مختصات ۱-فرمی های dx^j می‌باشد، هر چند که اثبات مستقیمی نیز برای آن وجود دارد (به لم ۱۴.۱ مراجعه شود).

چون $\tilde{\phi} : T^*U \to U\times\mathbb{R}^n$ یک دیفئومورفیسم است، $\omega : U\to T^*M$ هموار است اگر و تنها اگر $(\tilde{\phi}\circ\omega) : U\to U\times\mathbb{R}^n$ هموار باشد. برای $p\in U$ ،

$$\begin{aligned}(\tilde{\phi}\circ\omega)(p) = p\tilde{h}i(\omega_p) \quad &= (x^1(p),\cdots,x^n(p),c_1(p),\cdots,c_n(p))\\ &= (x^1(p),\cdots,x^n(p),a_1(p),\cdots,a_n(p)).\end{aligned}$$

بنابراین از آنجا بیکه، $x^1,\cdots,x^n$ توابع مختصاتی هموار بر U هستند، با توجه به گزارهٔ ۱۳.۹، $\tilde{\phi}\circ\omega$ بر U هموار است، اگر و تنها اگر همهٔ a_i ها بر U هموار باشند. □

۱۷.۶ گزاره (همواری یک ۱-فرمی بر حسب ضرایب). فرض کنید ω یک ۱-فرمی بر منیفلد M باشد. احکام زیر معادلند:

الف- ۱-فرمی ω بر M هموار است.

ب- منیفلد M دارای اطلسی است که بر هر چارت $(U,x^1,\cdots,x^n)$ از آن اطلس، ضرایب a_i از $\omega = \sum a_idx^i$ نسبت به کنج dx^i همگی هموارند.

پ- بر هر چارت $(U, x^1, \cdots, x^n)$ روی منیفلد، ضرایب a_i از $\omega = \sum a_i dx^i$ نسبت به کنج dx^i همگی هموارند.

برهان : از برهان صرفنظر می‌گردد، چون مشابه برهان گزارهٔ ۱۴.۲ می‌باشد. □

۱۷.۷ نتیجه. اگر f یک تابع C^∞ روی یک منیفلد M باشد، آنگاه دیفرانسیل آن df یک ۱-فرمی بر M است.

برهان : بر هر چارت $(U, x^1, \cdots, x^n)$ بر M، تساوی $df = \sum (\partial f/\partial x^i) dx^i$ بر قرار است. چون ضرایب $\partial f/\partial x^i$ همگی C^∞، می‌باشند، بنا به گزارهٔ ۱۷.۶ و (پ) ، ۱-فرمی df نیز C^∞ است. □

اگر ω یک ۱-فرمی و X یک میدان برداری بر منیفلد M باشد، $\omega(X)_p$ را با بصورت زیر تعریف می‌کنیم،

$$\omega(X)_p = \omega_p(X_p) \in \mathbb{R}, \qquad p \in M.$$

۱۷.۸ گزاره (خطی بودن۱- فرمی بر توابع). فرض کنید ω یک ۱-فرمی روی منیفلد M باشد. اگر f یک تابع و X یک میدان برداری بر M باشد، آنگاه $\omega(f) = f\omega(X)$.

برهان : در هر نقطه مانند$p \in M$،

$$\omega(fX)_p = \omega_p(f(p)X_p) = f(p)\omega_p(X_P) = (f\omega(X))_p.$$

□

۱۷.۹ گزاره (همواری یک ۱-فرمی بر حسب میدان های برداری). یک ۱-فرم ω بر یک منیفلدM C^∞ است، اگر و تنها اگر به ازای هر میدان برداری C^∞ مانند X بر M، تابع $\omega(X)$ بر M، C^∞ باشد.

برهان : $(\Rightarrow)$ فرض کنید ω یک ۱-فرمی C^∞ و X نیز یک میدان برداری C^∞ بر M باشد. بر هر چارت $(U, x^1, \cdots, x^n)$ بر M، و بنا به گزاره های ۱۴.۲ و (۱۷.۶) ، $\omega = \sum a_i dx^i$ و $X = \sum b^j \partial/\partial x^j$ توابع a_i و b^j C^∞ می‌باشند. حال با توجه به خاصیت خطی ۱-فرمی‌ها بر توابع (گزارهٔ ۱۷.۸)،

$$\omega(X) = \Big(\sum a_i dx^i\Big)\Big(\sum b^j \frac{\partial}{\partial x^j}\Big) = \sum_{i,j} a_i b^j \delta^i_j = \sum a_i b^j,$$

یک تابع C^∞ بر U می‌باشد. چون U یک چارت دلخواه بر M اختیار شده است، پس تابع $\omega(X)$ نیز بر M، C^∞ است.

$(\Leftarrow)$ فرض کنید ω یک ۱-فرمی چنان باشد که تابع $\omega(X)$ به ازای هر C^∞ میدان برداری X بر M، C^∞ باشد. فرض کنید $p \in M$ باشد، یک همسایگی مختصاتی مانند $(U, x^1, \cdots, x^n)$ حول p انتخاب می‌نماییم. آنگاه به ازای توابع a_i داریم $\omega = \sum a_i dx^i$.

یک عدد صحیح مانند j که، $1 \le j \le n$ و از این پس ثابت اختیار نموده، بنا به گزارهٔ ۱۴.۴، میدان برداری C^∞، $X = \partial/\partial x^j$بر U را می‌توان به میدان برداری C^∞، $\bar{X}$ بر M طوری توسیع داد که در یک همسایگی V_p^j از p در U با $\partial/\partial x^j$ برابر باشد. حال با تحدید بر مجموعهٔ باز V_p^j داریم،

$$\omega\left(\bar{X}\right) = \left(\sum a_i dx^i\right)\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right) = a_j.$$

این مطلب ثابت می‌کند که a_j بر چارت مختصاتی $(V_p^j, x^1, \cdots, x^n)$، C^∞ بوده، در نتیجه همهٔ، a_j ها روی اشتراک $V_p := \bigcap_j V_p^j$، C^∞ می‌باشد. بنا به لم ۱۷.۵، ۱-فرمی ω بر V_p، C^∞ است. بنابراین برای هر $p \in M$، توانستیم یک همسایگی مختصاتی مانند V_p بیابیم، که بر آن ω، C^∞ است. در نتیجه ω یک نگاشت C^∞ از M به T^*M خواهد بود. □

فرض کنید که، $\mathcal{F} = C^\infty(M)$ یک حلقه متشکل از همهٔ توابع C^∞ بر M باشد. بنا به گزارهٔ ۱۷.۹ یک ۱-فرمی ω بر M یک نگاشت بصورت، $\mathfrak{X} \to \mathcal{F}, X \mapsto \omega(X)$ تعریف می‌کند. بر طبق گزارهٔ ۱۷.۸، این نگاشت هم $\mathbb{R}$ - خطی و هم $\mathcal{F}$ - خطی می‌باشد.

بخش ۶.۱۷ پولبک ۱-فرمی

آگر $F : N \to M$ یک نگاشت C^∞ از منیفلد ها باشد، آنگاه در هر نقطهٔ $p \in N$ دیفرانسیل،

$$F_{*,p} : T_pN \to T_{F(p)}M$$

یک نگاشت خطی است، بردار ها در نقطهٔ p را از N به M پوش فوروارد می‌کند. **همدیفرانسیل** [۱]، یعنی دوگان دیفرانسیل،

$$(F_{*,p})^\vee : T^*_{F(p)}M \to T^*_pN$$

نگاشتی است که جهت را برگردانده و یک همبردار در $F(p)$ از M به N پولبک می‌کند. برای همدیفرانسیل نماد دیگری بصورت، $F^* = (F_{*,p})^\vee$ وجود دارد. بنا به تعریف دوگان، اگر $\omega_{F(p)} \in T^*_{F(p)}M$ یک همبردار در $F(p)$ و $X_p \in T_pN$ یک بردار مماس در p باشد، آنگاه

$$F^*\left(\omega_{F(p)}\right)\left(X_p\right) = \left(\left(F_{*,p}\right)^\vee \omega_{F(p)}\right)\left(X_p\right) = \omega_{F(p)}\left(F_{*,p}X_p\right).$$

حال $F^*\left(\omega_{F(p)}\right)$ را پولبک همبردار $\omega_{F(p)}$ توسط F نامیم. در نتیجه پولبک همبردار، همدیفرانسیل است. بر خلاف میدان های برداری، که در حالت کلی نمی‌توان تحت هر نگاشت C^∞ پوش فوروارد کرد، هر میدان همبردار را می‌توان تحت هر نگاشت C^∞ پولبک نمود. اگر ω یک ۱-فرمی بر M باشد. پولبک آن $F^*\omega$ یک ۱-فرمی بر N بوده که نقطه به نقطه بصورت زیر تعریف می‌گردد،

$$(F^*\omega)_p = F^*(\omega_{F(p)}), \qquad p \in N.$$

[۱] Codifferential

این یعنی که به ازای هر $X_p \in T_pN$،

$$(F^*\omega)_p(X_p) = \omega_{F(p)}(F_*(X_p)).$$

بیاد می‌آوریم که توابع را نیز می‌توان پولبک نمود: اگر F یک نگاشت C^∞ از N به M و نیز $g \in C^\infty(M)$ باشد، آنگاه $F^*g = g \circ F \in C^\infty(N)$.

این تفاوت در رفتار بین میدان های برداری و فرم ها تحت یک نگاشت را می‌توان در خاصیت غیر متقارنی مفهوم تابع ریشه یابی کرد - هر نقطه از دامنه فقط به یک نقطه از برد نظیر می‌شود، حال آنکه یک نقطه از برد می‌تواند نقاط پیش نگارهٔ فراوانی در دامنه داشته باشد.

حال که پولبک ۱-فرمی تحت یک نگاشت تعریف گردید، یک سئوال طبیعی مطرح می‌شود. آیا پولبک یک ۱-فرمی C^∞ تحت یک نگاشت C^∞ خود C^∞ است؟ برای پاسخ دادن به چنین سئوالی ابتدا باید سه خاصیت جابجایی پولبک، یعنی جابجایی با دیفرانسیل، با مجموع، و بالاخره با حاصلضرب را بیان کرد.

۱۷.۱۰ گزاره (جابجایی پولبک با دیفرانسیل). فرض کنید $F : N \to M$ یک نگاشت C^∞ از منیفلد ها باشد. برای هر $h \in C^\infty(M)$ داریم $F^*(dh) = d(F^*h)$.

برهان : کافی است که به ازای هر $p \in N$ و هر بردار مماس $X_p \in T_pN$ درستی رابطهٔ زیر را بررسی کنیم:

$$(F^*dh)_p(X_p) = (dF^*h)_p(X_p). \qquad (۴.۱۷)$$

سمت چپ (۵,۱۷) عبارتست از،

$$\begin{aligned}(F^*dh)_p(X_p) &= (dh)_{F(p)}(F_*(X_p)) && \text{(تعریف پولبک یک ۱-فرمی)}\\ &= (F_*(X_p))h && \text{(تعریف دیفرانسیل } dh)\\ &= X_p(h \circ F) && \text{(تعریف } F_*)\end{aligned}$$

طرف راست (۵,۱۷) عبارتست از،

$$\begin{aligned}(dF^*h)_p(X_p) &= X_p(F^*h) && \text{(تعریف } d \text{ یک تابع)}\\ &= X_p(h \circ F) && \text{(تعریف } F^* \text{ یک تابع)}\end{aligned}$$

□

پولبک توابع و ۱-فرمی‌ها ترتیب جمع و حاصلضرب اسکالر را حفظ می‌کنند.

۱۷.۱۱ گزاره (پولبک مجموع و حاصلضرب). فرض کنید $F : N \to M$ یک نگاشت C^∞ از منیفلدها باشد. فرض کنید $\omega, \tau \in \Omega^1(M)$ و $g \in C^\infty(M)$ باشد. آنگاه،

الف-

$$F^*(\omega + \tau) = F^*\omega + F^*\tau,$$

ب-

$$F^*(g\omega) = (F^*g)(F^*\omega).$$

برهان : مسالهٔ (۵,۱۷). □

۱۷.۱۲ گزاره (پولبک ۱-فرمی C^∞). پولبک $F^*\omega$ از یک ۱-فرمی C^∞، ω بر M تحت نگاشت C^∞، $F: N \to M$ یک ۱-فرمی C^∞ بر N است.

برهان : فرض کنید $p \in N$ باشد، چارت $(V,\psi) = (V, y^1, \cdots, y^n)$ را در M حول نقطهٔ $F(p)$ اختیار می‌کنیم. بنا به پیوستگی F، چارتی مانند $(U,\phi) = (U, X^1, \cdots, x^n)$ در N حول نقطهٔ p است که $F(U) \subset V$. بر V، $\omega = \sum a_i dy^i$ به ازای $a_i \in C^\infty(V)$. بر U،

$$\begin{aligned} F^*\omega &= \sum (F^*a_i)F^*(dy^i) && \text{(گزارهٔ ۱۱,۱۷)} \\ &= \sum (F^*a_i)dF^*y^i && \text{(گزارهٔ ۱۰,۱۷)} \\ &= \sum (a_i \circ F)d(y^i \circ F) && \text{(تعریف } F^* \text{ یک تابع)} \\ &= (a_i \circ F)\frac{\partial F^i}{\partial x^j}dx^j && \text{(معادلهٔ ۲,۱۷)} \end{aligned}$$

چون ضرایب $(a_i \circ F)\ \partial F^i/\partial x^j$ همگی C^∞ هستند، بنا به لم ۱۷.۵ ۱-فرمی $F^*\omega$ بر U، و در نتیجه در نقطهٔ p، C^∞ می‌باشد. چون p یک نقطهٔ دلخواه از N اختیار شده است، لذا پولبک $F^*\omega$ بر U، C^∞ است. □

۱۷.۱۳ مثال (فرم لیوویل بر کلاف کتانژانت). فرض کنید M یک منیفلد باشد. بر حسب پولبک، فرم لیوویل λ بر کلاف کتانژانت T^*M که در مثال ۱۷.۴ معرفی شده است را می‌توان بصورت $\lambda_{\omega_p} = \pi^*(\omega_p)$ در هر نقطهٔ $\omega_p \in T^*M$ بیان کرد.

بخش ۷.۱۷ تحدید ۱-فرمی به یک زیر منیفلد ایمرس

فرض کنید $S \subset M$ یک زیر منیفلد ایمرس و $i: S \to M$ نگاشت شمول باشد. در هر نقطهٔ $p \in S$ بدلیل انژکتیو بودن دیفرانسیل $i_*: T_pS \to T_pM$، می‌توان فضای مماس T_pS را بعنوان زیر فضای T_pM در نظر گرفت. اگر ω یک ۱-فرمی بر M باشد، آنگاه تحدید ω بر S، یک ۱-فرمی بصورت $\omega|_S$ بوده و اینطور تعریف می‌شود،

$$(\omega|_S)_p(v) = \omega_p(v) \qquad \text{به ازای هر } p \in S \text{ و هر } v \in T_pS.$$

در نتیجه، تحدید $\omega|_S$ درست مانند ω است، با این تفاوت که دامنهٔ آن بجای M به S تحدید یافته است، دامنهٔ $(\omega|_S)_p$ نیز از T_pM به T_pS تحدید می‌یابد. گزارهٔ زیر نشان می‌دهد که ۱-فرمی‌ها بسادگی پولبک نگاشت شمول i هستند.

۱۷.۱۴ گزاره. اگر $i : S \hookrightarrow M$ یک نگاشت احتوا از یک زیر منیفلد ایمرس S باشد و ωیک ۱-فرمی بر M، آنگاه $i^*\omega = \omega|_S$.

برهان : برای $p \in S$ و $v \in T_pS$،

$$\begin{aligned} (i^*\omega)_p(v) &= \omega_{i(p)}(i_*v) && \text{(تعریف پولبک)} \\ &= \omega_p(v) && \text{(هر دوی } i \text{ و } i^* \text{ توابع شمولند)} \\ &= (\omega|_S)_p(v) && \text{(تعریف } \omega|_S\text{.)} \end{aligned}$$

□

برای اجتناب از پیچیدگی نماد ها، در پاره ای از موارد از ω بجای $\omega|S$ استفاده می‌کنیم، که با توجه به متن می‌توان آن ها را از یکدیگر تمیز داد.

۱۷.۱۵ مثال (یک ۱-فرمی بر دایره). میدان برداری سرعت بر دایرهٔ واحد $c9t) = (x,y) = (\cos t, \sin t)$ در $\mathbb{R}^2$ عبارت است از،

$$c'(t) = (-\sin t, \cos t) = (-y, x)$$

بنابراین،

$$X = -y\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial y}$$

یک میدان برداری بر دایرهٔ واحد $\mathbb{S}^1$ است. آنچه که از این نماد بر می‌آید، آن است که اگر x ، y مختصات استاندارد بر $\mathbb{R}^2$ و $i;\mathbb{S}^1 \hookrightarrow \mathbb{R}^2$ نگاشت شمول باشد، آنگاه در یک نقطهٔ $p = (x,y) \in \mathbb{S}^1$ ، می‌توان رابطهٔ $i_*X_p = -y\partial/\partial x|_p + x\partial/\partial y|_p$ را داشت، که در آن $\partial/\partial x|_p$ و $\partial/\partial y|_p$ بردار های مماس در نقطهٔ p از $\mathbb{R}^2$ می‌باشند. یک ۱-فرمی $\omega = adx + bdy$ بیابید که $\omega(X) \equiv 1$. در اینجا ω بعنوان تحدید ۱-فرمی $adx + bdy$ از $\mathbb{R}^2$ به $\mathbb{S}^1$ در نظر گرفته شده است. حال در $\mathbb{R}^2$محاسبه می‌کنیم، در آن dx و dy به ترتیب دوگان $\partial/\partial x$ و $\partial/\partial y$ است.

$$\omega(X) = (adx + bdy)\left(-y\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial y}\right) = -ay + bx = 1. \qquad (۵.۱۷)$$

زیرا روی $\mathbb{S}^1$ داریم $x^2 + y^2 = 1$ ، از آنجا $a = -y$ و $b = x$ یک جواب (۶,۱۷) خواهد بود. بنابراین $\omega = -ydx + xdy$ یک ۱-فرمی بوده، و چون $\omega(X) \equiv 1$ نتیجه می‌گیریم که فرم ω هیچ جا بر دایره صفر نمی‌شود.

۱۷.۱۶ یادداشت. در نماد گذاری مسالهٔ ۱۱.۲، ω بصورت $-\bar{y}d\bar{x} + \bar{x}\bar{y}$ نوشته شده است، زیرا x و y توابعی بر $\mathbb{R}^2$ بوده، و $\bar{x}$ و $\bar{y}$ تحدید آن ها به $\mathbb{S}^1$ می‌باشد. معمولا، از نمادگذاری یکسان برای یک فرمی‌ها بر $\mathbb{R}^2$ و تحدید آن به زیر منیفلد استفاده می‌کنیم. چون $i^*x = \bar{x}$ و $i^*dx = d\bar{x}$ با حذف علامت بار احتمال کمی وجود داشته تا بین $\mathbb{R}^2$ و تحدید آن اشتباهی صورت گیرد. این مطلب بر خلاف زمانی است که با میدان های برداری سر و کار داریم، چون $i_*(\partial/\partial\bar{x}|_p) \neq \partial/\partial x|_p$.

۱۷.۱۷ مثال (پولبک ۱-فرمی). فرض کنید $h:\mathbb{R}\to\mathbb{S}^1\subset\mathbb{R}^2$ با ضابطهٔ $h(t)=(\cos t,\sin t)$ داده شده باشد. اگر ω یک ۱-فرمی بر $\mathbb{S}^1$ بصورت $-ydx+xdy$ باشد، پولبک $h^*\omega$ را محاسبه کنید.

$$\begin{aligned} h^*(-ydx+xdy) &= -(h^*y)d(h^*x)+(h^*x)d(h^*y) \qquad (\text{بنا به گزارهٔ } ۱۱,۱۷)\\ &= -(\sin t)d(\cos t)+(\cos t)d(\sin t)\\ &= \sin^2 tdt+\cos^2 tdt\\ &= dt. \end{aligned}$$

بخش ۸.۱۷ تمرینات

۱۷.۱۸ یک ۱-فرمی بر $\mathbb{R}^2-\{(0,0)\}$. مختصات استاندارد بر $\mathbb{R}^2$ را با x،y نمایش داده، و فرض می‌کنیم

$$X=-y\frac{\partial}{\partial x}+x\frac{\partial}{\partial y} \qquad \text{و} \qquad Y=x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}$$

میدان های برداری بر $\mathbb{R}^2$ باشند. یک ۱-فرمی مانند ω بر $\mathbb{R}^2-\{(0,0)\}$ چنان بیابید که $\omega(X)=1$ و $\omega(Y)=0$.

۱۷.۱۹ فرمول تبدیل برای ۱-فرمی‌ها. اگر $(U,x^1,\cdots,x^n)$ و $(V,y^1,\cdots,y^n)$ دو چارت غیر همپوش بر M باشند (یعنی $U\cap V\neq\varnothing$). آنگاه یک ۱-فرمی C^∞ مانند ω بر $U\cap V$ است که دارای دو نمایش موضعی متفاوت بصورت زیر

$$\omega=\sum a_j dx^j=\sum b_i dy^i$$

می‌باشد. مطلوبست یافتن فرمولی برای a_j بر حسب b_i.

۱۷.۲۰ پولبک ۱-فرمی بر $\mathbb{S}^1$. ضرب در کرهٔ واحد $\mathbb{S}^1$، بعنوان یک زیر مجموعه از صفحهٔ مختلط ، بصورت زیر داده شده است،

$$e^{it}.e^{iu}=e^{i(t+u)}, \qquad t,u\in\mathbb{R}$$

حال بر حسب جز حقیقی و انگاره ای،

$$(\cos t+i\sin t)(x+iy)=((\cos t)x-(\sin t)y)+i((\sin t)x+(\cos t)y).$$

اگر $g=(\cos t,\sin t)\in\mathbb{S}^1\subset\mathbb{R}^2$ باشد، آنگاه ضرب چپ $\ell_g:\mathbb{S}^1\to\mathbb{S}^1$ با ضابطهٔ

$$\ell_g(x,y)=((\cos t)x-(\sin t)y,(\sin t)x+(\cos t)y).$$

تعریف شده است. فرض کنید $\omega=-ydx+xdy$ یک ۱-فرمی آمده در مثال ۱۷.۱۵ باشد. ثابت کنید که به ازای هر $g\in\mathbb{S}^1$ داریم $\ell_g^*\omega=\omega$.

۱۷.۲۱ فرم لیوویل بر کلاف کتانژانت .

الف- فرض کنید $(U,\phi) = (U, x^1, \cdots, x^n)$ یک چارت بر منیفلد M باشد، و همچنین فرض کنید

$$(\pi^{-1}U, \tilde{\phi}) = (\pi^{-1}U, \bar{x}^1, \cdots, \bar{x}^n, c_1, \cdots, c_n)$$

چارت القا شده بر کلاف کتانژانت T^*M باشد. فرمولی برای فرم لیوویل λ بر $\pi^{-1}U$ بر حسب $\bar{x}^1, \cdots, \bar{x}^n, c_1, \cdots, c_n$ پیدا کنید.

ب- ثابت کنید که فرم لیوویل λ بر T^*M، C^∞ است. (راهنمایی : از (الف) و گزارهٔ ۱۷.۶ استفاده کنید.)

۱۷.۲۲ پولبک مجموع و حاصلضرب. گزارهٔ ۱۷.۱۱ را با تاثیر X_p در نقطهٔ p بر طرفین هر تساوی آن ثابت کنید.

۱۷.۲۳ ساخت کلاف کتانژانت. فرض کنید M منیفلدی با بعد n باشد. با پیروی از ساخت کلاف مماس در بخش (۱۲)، برهانی مشروح ارائه دهید تا ثابت کند که، $\pi : T^*M \to M$ یک کلاف برداری C^∞ با رتبهٔ n می‌باشد.

فصل ۱۸

k- فرمهای دیفرانسیلی

حال می‌خواهیم ساختار ۱- فرمی‌ها را بر یک منیفلد به k–فرمها تعمیم دهیم. پس از تعریف k–فرمها بر یک منیفلد، نشان می‌دهیم که بطور موضعی تفاوتی بین آن ها و k–فرمها بر $\mathbb{R}^n$ وجود ندارد. به موازات ساخت کلاف های مماس و کتانژانت بر یک منیفلد، توان خارجی k ام، $\wedge^k(T^*M)$ از کلاف کتانژانت را خواهیم ساخت. k–فرم دیفرانسیلی یک برش کلاف $\wedge^k(T^*M)$ می‌باشد. این مطلب به ما یک مفهوم طبیعی از هموارى فرمهای دیفرانسیلی می‌دهد. یک k–فرم دیفرانسیلی هموار است، اگر و تنها اگر بعنوان برشی از کلاف برداری $\wedge^k(T^*M)$ هموار باشد. پولبک و حاصلضرب گوه ای بصورت نقطه به نقطه تعریف می‌گردد. بعنوان یک مثالی از فرمهای دیفرانسیلی، می‌توان فرمهای ناوردای چپ بر گروه لی را بر شمرد.

بخش ۱.۱۸ فرمهای دیفرانسیلی

یاد آوری می‌کنیم که یک k–تانسور بر یک فضای برداری V تابعی k–خطی بصورت زیر است،

$$f : V\times\cdots\times V \to \mathbb{R}.$$

k– تانسور f را متناوب گوییم، هرگاه به ازای هر جایگشت $\sigma\in S_k$

$$f(v_{\sigma(1)},\cdots,v_{\sigma(k)}) = (\operatorname{sgn}\sigma)f(v_1,\cdots,v_k). \qquad (۱.۱۸)$$

وقتی $k = 1$، تنها عضوی از گروه جایگشتی S_1 جایگشت همانی خواهد بود. بنابراین برای 1 – تانسورها شرط (۱.۱۸) بی مورد بوده و تمام 1 – تانسورها متناوب (و نیز متقارن) می‌باشند. یک k–تانسور متناوب بر V را یک **k–همبردار**[۱] بر V نامیم. برای هر فضای برداری V، فضای برداری همهٔ k–تانسورهای متناوب بر V را با $A_k(V)$ نمایش می‌دهیم. نماد دیگر مرسوم برای $A_k(V)$، عبارتست از

[۱] covector

$\wedge^k(V^\vee)$. در نتیجه،

$$\wedge^0(v^\vee) = A_0(V) = \mathbb{R},$$
$$\wedge^1(V^\vee) = A_1(V) = V^\vee,$$
$$\wedge^2(V^\vee) = A_2(V), \qquad \text{(و غیره.)}$$

در واقع، یک ساختار جبر ی کامل برای $\wedge^k(V)$ وجود دارد، که به آن توان خارجی k ام فضای برداری V گوییم، با این خاصیت که $\wedge^k(V^\vee)$ با $A_k(V)$ ایزو مورف است. هر چه که در مورد ساختار این فضا مطالعه گردد، افق های دورتری در مقابل دیدگان ما باز میشود، لذا در این کتاب $\wedge^k(V^\vee)$ فقط یک نمایش دیگری از $A_k(V)$ محسوب میگردد. در اینجا فانکتور $A_k(\ )$ را در نقطهٔ p از منیفلد M به فضای مماس T_pM در نظر میگیریم. فضای مماس $A_k(T_pM)$، که معمولا با $\wedge^k(T_p^*M)$ نموده می‌شود، فضای متشکل از همهٔ k−تانسور های متناوب بر فضای مماس T_pM می‌باشد. یک **k−میدان همبردار** بر M تابعی است مانند ω که به هر نقطهٔ $p \in M$، یک k−همبردار $\omega_p \in \wedge^k(T_p^*M)$ نظیر می‌کند. یک k−میدان همبردار را نیز یک k−فرم دیفرانسیلی یا یک فرم دیفرانسیلی از درجهٔ k، یا باختصار یک k−فرم گویند. بالاترین درجهٔ یک فرم، عبارت است از یک فرم دیفرانسیلی که درجهٔ آن با بعد منیفلد زمینه برابر باشد.

اگر ω یک k−فرم بر منیفلد M و $X_1, \cdots, X_k$ میدانهای برداری بر آن باشند، آنگاه $\omega(X_1, \cdots, X_k)$ تابعی است بر M که با ضابطهٔ زیر بیان می‌گردد،

$$(\omega(X_1, \cdots, X_k))(p) = \omega_p((X_1)_p, \cdots, (X_k)_p).$$

۱۸.۱ گزاره (خاصیت چند خطی، یک فرم بر توابع). فرض کنید ω یک k−فرم بر منیفلد M باشد. برای میدانهای برداری دلخواه $X_1, \cdots, X_k$ و هر تابع h بر M،

$$\omega(X_1, \cdots, hX_i, \cdots, X_k) = h\omega(X_1 \cdots, X_i, \cdots, X_k)$$

برهان : اثبات این گزاره درست مانند اثبات گزارهٔ ۱۷.۸ می‌باشد. □

۱۸.۲ مثال. فرض کنید $(U, x^1, \cdots, x^n)$ یک چارت مختصاتی بر منیفلدی مفروض باشد. در هر نقطهٔ $p \in U$، یک مبنا برای فضای مماس T_pU عبارتست از،

$$\frac{\partial}{\partial x^1}\bigg|_p, \cdots, \frac{\partial}{\partial x^n}\bigg|_p .$$

همانطوریکه در برهان گزارهٔ ۱۷.۳ مشاهده شد، مبنای دوگان برای فضای کتانژانت T_p^*U عبارتست از،

$$(dx^1)_p, \cdots, (dx^n)_p.$$

این یعنی به محض آنکه p بر U تغییر می‌کند، ۱− فرمی‌های دیفرانسیلی $dx^1, \cdots, dx^n$ بر U حاصل می‌شوند. بنا به گزارهٔ ۳.۳۳ یک مبنا برای k−تانسور های متناوب در $\wedge^k(T_p^*U)$ عبارتست از،

$$(dx^{i_1})_p \wedge \cdots \wedge (dx^{i_k})_p, \qquad 1 \le i_1 \le \cdots \le i_k \le n.$$

اگر ω یک k–فرم بر $\mathbb{R}^n$ باشد، آنگاه در هر نقطهٔ $p\in\mathbb{R}^n$، ω_p یک ترکیب خطی بصورت زیر است،

$$\omega_p=\sum a_{i_1\cdots i_k}(p)(dx^{i_1})_p\wedge\cdots\wedge(dx^{i_k})_p.$$

با حذف نقطهٔ p، داریم

$$\omega=\sum a_{i_1\cdots i_k}dx^{i_1}\wedge\cdots\wedge dx^{i_k}.$$

در این عبارت ضرایب $a_{i_1\cdots i_k}$ توابعی بر U بوده که با تغییر نقطهٔ p تغییر می‌کنند. برای سهولت در نمادگذاری، فرض می‌کنیم

$$\mathcal{J}_{k,n}=\left\{I=(i_1,\cdots,i_k)\middle|1\le i_1<\cdots<i_k\le n\right\}$$

مجموعهای متشکل از همهٔ زنجیر اکیدا صعودی از چند اندیس ها بین 1 و n بطول k باشد، می‌نویسیم

$$\omega=\sum_{I\in\mathcal{J}_{k,n}}a_I dx^I,$$

که در آن dx^I نمایش دهندهٔ $dx^{i_1}\wedge\cdots\wedge dx^{i_k}$ می‌باشد.

بخش ۲.۱۸ عبارت موضعی برای یک k–فرم

با توجه به مثال ۱۸.۲، بر یک چارت مختصاتی $(U,x^1,\cdots,x^n)$ از منیفلد M، یک k–فرم بر U ترکیب خطی بصورت $\omega=\sum a_I dx^I$ است، که در آن $I\in\mathcal{J}_{k,n}$ و a_I توابعی بر U می‌باشند. میدان برداری مختص i ام را باختصار با $\partial_i=\partial/\partial x^i$ نمایش می‌دهیم. با استفاده از لم ۳.۳۲، بصورت نقطه به نقطه مقدار $I,J\in\mathcal{J}_{k,n}$ را بر U با تساوی زیر بیان می‌کنیم،

$$dx^I(\partial_{j_1},\cdots,\partial_{j_k})=\delta^I_J=\begin{cases}1 & ;I=J,\\ 0 & ;I\neq J.\end{cases}\qquad(۲.۱۸)$$

۱۸.۳ گزاره (ضرب گوه ای دیفرانسیل نسبت به مختصات موضعی). فرض کنید، $(U,x^1,\cdots,x^n)$ یک چارت بر یک منیفلد، و $f^1,\cdots,f^k$ توابع هموار بر U باشند. آنگاه

$$df^1\wedge\cdots\wedge df^k=\sum_{I\in\mathcal{J}_{k,n}}\frac{\partial(f^1,\cdots,f^k)}{\partial(x^{i_1},\cdots,x^{i_k})}dx^{i_1}\wedge\cdots\wedge dx^{i_k}.$$

برهان : بر U،

$$df^1\wedge\cdots\wedge df^k=\sum_{J\in\mathcal{J}_{k,n}}c_J dx^{j_1}\wedge\cdots\wedge dx^{j_k}\qquad(۳.۱۸)$$

به ازای توابع c_J. حال بنا به تعریف دیفرانسیل، داریم $df^i(\partial/\partial x^j) = \partial f^i/\partial x^j$. با اثر دادن طرفین رابطهٔ (۳.۱۸) به بردار های مختصاتی $\partial_{i_1}, \cdots, \partial_{i_k}$، می‌توان داشت

$$\begin{aligned}
\text{سمت چپ} &= (df^1 \wedge \cdots \wedge df^k)(\partial_{i_1}, \cdots, \partial_{i_k}) \\
&= \det\left[\frac{\partial f^i}{\partial x^{i_j}}\right] && \text{بنا به گزارهٔ ۳,۲۷} \\
&= \frac{\partial(f^1, \cdots, f^k)}{\partial(x^{i_1}, \cdots, x^{i_k})}, \\
\text{سمت راست} &= \sum_J c_J dx^J(\partial_{i_1}, \cdots, \partial_{i_k}) \\
&= \sum_J c_J \delta_I^J = c_I && \text{بنا به لم ۲,۱۸}
\end{aligned}$$

در نتیجه، $c_I = \partial(f^1, \cdots, f^k)/\partial(x^{i_1}, \cdots, x^{i_k})$. □

اگر $(U, x^1, \cdots, x^n)$ و $(V, y^1, \cdots, y^n)$ دو چارت هموش بر یک منیفلد باشند، آنگاه بر دامنهٔ مشترک $U \bigcap V$، و با استفاده از گزارهٔ ۱۸.۳ فرمول گذر برای k-فرمها عبارتست از،

$$dy^J = \sum_I \frac{\partial(y^{j_1}, \cdots, y^{j_k})}{\partial(x^{i_1}, \cdots, x^{i_k})} dx^I.$$

دو حالت از گزارهٔ ۱۸.۳ در اینجا دارای توجه خاصی است،

۱۸.۴ نتیجه. فرض کنید $(U, x^1, \cdots, x^n)$ یک چارت بر منیفلد، و فرض کنید $f, f^1, \cdots, f^n$ توابع هموار بر U باشند. آنگاه،

الف- (۱- فرم) $df = \sum(\partial f/\partial x^i)dx^i,$

ب- (بالاترین فرم) $df^1 \wedge \cdots \wedge df^n = \det\left[\partial f^j/\partial x^i\right] dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n,$

حالت (الف) از نتیجهٔ بالا با رابطهٔ ۲.۱۷ منطبق است.

۱۸.۵ *تمرین (فرمول گذر برای یک ۲- فرم). اگر $(U, x^1, \cdots, x^n)$ و $(V, y^1, \cdots, y^n)$ دو چارت مختصاتی هموش بر منیفلد M باشند، آنگاه یک ۲- فرم هموار مانند ω بر $U \bigcap V$، دارای دو عبارت موضعی به صورت زیر است،

$$\omega = \sum_{i<j} a_{ij} dx^i \wedge dx^j = \sum_{k<\ell} b_{k\ell} dy^k \wedge dy^\ell.$$

حال مطلوبست یافتن فرمولی برای a_{ij} بر حسب $b_{k\ell}$ و توابع مختصاتی $x^1, \cdots, x^n, y^1, \cdots, y^n$.

بخش ۳.۱۸ از دیدگاه کلاف

فرض کنید M یک منیفلد n بعدی باشد. برای درک بیشتر مفهوم فرمهای دیفرانسیلی، به پیروی از روش ساخت کلاف مماس و کلاف کتانژانت عمل نموده و مجموعهٔ زیر را تشکیل می‌دهیم،

$$\wedge^k(T^*M) := \bigcup_{p\in M} \wedge^k(T_p^*M) = \bigcup_{p\in M} A_k(T_pM)$$

که متشکل از همهٔ k–تانسور های متناوب در هر نقطه از M می‌باشد. این مجموعه را **توان خارجی k ام کلاف کتانژانت** نامند. یک نگاشت تصویری $\pi : \wedge^k(T^*M) \to M$ با ضابطهٔ $\pi(\alpha) = p$ است، هرگاه $\alpha \in \wedge^k(T_p^*M)$. اگر (U,ϕ) چارت مختصاتی برای M باشد، آنگاه یک دو سوئی بصورت زیر وجود دارد،

$$\wedge^k(T^*U) = \bigcup_{p\in U} \wedge^k(T_p^*U) \simeq \phi(U)\times\mathbb{R}^{\binom{n}{k}}, \qquad \alpha\in\wedge(T_p^*U)\mapsto(\phi(p),\{c_I(\alpha)\}_I),$$

که در آن $\alpha = \sum c_I(\alpha)dx^I\big|_p \in \wedge^k(T_p^*U)$ و $I = (1\le i_1 < \cdots < i_k \le n)$. به این روش می‌توان برای $\wedge^k(T^*U)$ و در نتیجه $\wedge^k(T^*M)$ یک توپولوژی و یا حتی یک ساختار دیفرانسیلپذیر تعریف نمود. جزئیات آن مشابه ساخت کلاف مماس بوده، که ما از بیان آن در اینجا صرفنظر می‌کنیم. نتیجهٔ نهایی آن است که نگاشت تصویری $\pi : \wedge^k(T^*M) \to M$ یک کلاف برداری هموار با رتبهٔ $\binom{n}{k}$ بوده، و یک k–فرم دیفرانسیلی یک برش این کلاف می‌باشد. همانطوریکه می‌توان انتظار داشت، یک k–فرم را هموار نامیم، هرگاه یک برش هموار از کلاف $\pi : \wedge^k(T^*M) \to M$ باشد.

۱۸.۶ **نماد گذاری.** اگر $E \to M$ یک کلاف برداری هموار باشد، آنگاه فضای برداری متشکل از همهٔ برش ها ی هموار از E را با نماد $\Gamma(E)$ یا $\Gamma(M,E)$ نشان می‌دهیم. فضای برداری متشکل از همهٔ k–فرمهای هموار بر M معمولا با نماد $\Omega^k(M)$ نمایش داده می‌شود. در نتیجه،

$$\Omega^k(M) = \Gamma\left(\wedge^k(T^*M)\right) = \Gamma\left(M,\wedge^k(T^*M)\right).$$

بخش ۴.۱۸ k–فرمهای هموار

چند مشخصه معادل برای k–فرمهای هموار موجود است. چون اثبات آن ها مشابه (لم های ۱۷.۵ و گزاره های ۱۷.۶ و ۱۷.۹) می‌باشد، لذا از بیان مجدد آن صرفنظر می‌نماییم.

۱۸.۷ **لم (همواری یک k–فرم بر یک چارت).** فرض کنید $(U,x^1,\cdots,x^n)$ چارتی از منیفلد M باشد. k–فرم $\omega = \sum a_I dx^I$ بر U هموار است، اگر و تنها اگر ضرایب تابعی آن یعنی a_I ها، همگی بر U هموار باشند.

۱۸.۸ گزاره (مشخصهٔ یک k-فرم هموار). فرض کنید ω یک k-فرم بر منیفلد M باشد. احکام زیر با هم معادلند:

الف- k-فرم ω بر M، هموار است.

ب- منیفلد M دارای اطلسی است که بر هر چارت $(U,\phi) = (U, x^1, \cdots, x^n)$ در این اطلس، ضرایب a_I از $\omega = \sum a_I dx^I$ نسبت به کنج مختصاتی $\{dx^I\}_{I \in \mathcal{J}_{k,n}}$، همگی هموار هستند.

پ- برای هر چارت $(U,\phi) = (U, x^1, \cdots, x^n)$ از منیفلد M، ضرایب a_I از $\omega = \sum a_I dx^I$ نسبت به کنج مختصاتی $\{dx^I\}_{I \in \mathcal{J}_{k,n}}$، همگی هموار هستند.

ت- برای هر k میدان برداری هموار $X_1, \cdots, X_k$ بر M. تابع $\omega(X_1, \cdots, X_k)$ بر M، هموار است.

ما 0 -تانسورها و 0 - همبردار ها را ثابت تعریف می‌کنیم، یعنی $L_0(V) = A_0(V) = \mathbb{R}$. بنابراین، کلاف $\wedge^0(T^*M)$ بصورت $M \times \mathbb{R}$ خواهد بود و یک 0 - فرمی‌بر M تابعی بر M می‌باشد. یک 0 - فرم هموار بر M دقیقا یک تابع هموار بر M خواهد بود. حال با نمادگذاری جدید،

$$\Omega^0(M) = \Gamma(\wedge^0(T^*M)) = \Gamma(M \times \mathbb{R}) = C^\infty(M).$$

گزارهٔ ۱۳.۳ بر گسترش هموار از توابع، دارای تعمیمی به فرمهای دیفرانسیلی است.

۱۸.۹ گزاره (گسترش هموار از یک فرم). فرض کنید τ یک فرم دیفرانسیلی تعریف شده بر یک همسایگی U از نقطهٔ p در منیفلد M باشد. آنگاه یک فرم هموار مانند $\tilde{\tau}$ بر M است که با τ بر یک همسایگی تا حد امکان کوچک از نقطهٔ p برابر است.

اثبات درست مانند اثبات گزارهٔ ۱۳.۳ است. آن را بعنوان یک تمرین واگذار می‌کنیم. البته توسیع $\tilde{\tau}$ منحصر بفرد نیست. اثبات به نقطهٔ p و نیز انتخاب تابع **برآمده**[۱] در آن نقطه بستگی دارد.

بخش ۵.۱۸ پولبک k-فرم

ما قبلا پولبک 0 - فرم و 1 - فرمی را تحت نگاشت هموار، $F: N \to M$ تعریف کردیم. برای یک 0 - فرمی هموار بر M، یعنی، یک تابع هموار بر M، پولبک F^*f عبارتست از،

$$N \xrightarrow{F} M \xrightarrow{f} \mathbb{R}, \qquad F^*(f) = f \circ F \in \Omega^0(N).$$

برای تعمیم پولبک k-فرم به ازای $k \geq$، ابتدا پولبک k-همبردار در زیر بخش (۳,۱۰) را بیاد می‌آوریم. یک نگاشت خطی $L: V \to W$ از فضاهای برداری نگاشت پولبکی بصورت $L^*: A_k(W) \to A_k(V)$ باضابطهٔ

$$(L^*\alpha)(v_1, \cdots, v_k) = \alpha(L(v_1), \cdots, L(v_k))$$

[۱] Bump Function

به ازای هر $\alpha \in A_k(W)$ و $v_1, \cdots, v_k \in V$ القا می‌کند.

حال فرض کنید $F : N \to M$ یک نگاشت هموار بر منیفلد ها باشد. در هر نقطهٔ $p \in N$، دیفرانسیل

$$F_{*,p} : T_pN \to T_{F(p)}M$$

نگاشت خطی بین فضاهای مماس بوده و لذا بنا به پاراگراف قبل نگاشت پولبک وجود دارد،

$$(F_{*,p})^* : A_k(T_{F(p)}M) \to A_k(T_pN).$$

این نگاشت را معمولا بصورت ساده شدهٔ F^* نشان می‌دهند. بنابراین، اگر $\omega_{F(p)}$ یک k−همبردار در $F(p)$ از M باشد، آنگاه پولبک $F^*(\omega_{F(p)})$ یک k−همبردار در p از N بوده، که بوسیلهٔ رابطه زیر بیان می‌شود

$$F^*(\omega_{F(p)})(v_1, \cdots, v_k) = \omega_{F(p)}(F_{*,p}v_1, \cdots, F_{*,p}v_k), \qquad v_i \in T_pN.$$

در نهایت، اگر ω یک k−فرم بر M باشد، آنگاه پولبک $F^*\omega$ یک k−فرم بر N بوده که بطور نقطه به نقطه بصورت $(F^*\omega)_p = F^*(\omega_{F(p)})$ به ازای هر $p \in N$ تعریف می‌شود. بطور معادل داریم

$$(F^*\omega)_p(v_1, \cdots, v_k) = \omega_{F(p)}(F_{*,p}v_1, \cdots, F_{*,p}v_k), \qquad v_i \in T_pN. \qquad (۴.۱۸)$$

و زمانیکه $k = 1$، این رابطه حالت خاصی است که قبلا در تعریف پولبک 1 - فرمی در زیر بخش (۵,۱۷) آورده شده است. رابطهٔ (۴,۱۸) را می‌توان به صورت ترکیب زیر نیز نشان داد،

$$T_pN \times \cdots \times T_pN \xrightarrow{F_* \times \cdots \times F_*} T_{F(p)}M \times \cdots \times T_{F(p)}M \xrightarrow{\omega_{F(p)}} \mathbb{R}.$$

۱۸.۱۰ گزاره (خاصیت خطی پولبک). فرض کنید $F : N \to M$ یک نگاشت هموار باشد. اگر ω، τ، k−فرمهایی بر M بوده و a یک عدد حقیقی باشد، آنگاه

الف- $F^*(\omega + \tau) = F^*\omega + F^*\tau$

ب- $F^*(a\omega) = aF^*\omega.$

برهان : مسالهٔ ۱۸.۱۷. □

هنوز نمی‌دانیم که، اگر k عددی غیر از 1 و 0 باشد، آنگاه پولبک یک k−فرم هموار تحت یک نگاشت هموار هنوز هموار است. این یک سئوال اساسی است که در زیر بخش (۵,۱۹) به آن پاسخ خواهیم داد.

بخش ۶.۱۸ ضرب گوه ای

در بخش ۳ آموختیم که اگر α و β تانسورهای متناوب به ترتیب از درجهٔ k و ℓ روی میدان برداری V باشند، آنگاه حاصلضرب گوه ای $\alpha \wedge \beta$، $(k+\ell)$ - تانسور متناوب بر V است که با

$$(\alpha \wedge \beta)(v_1, \cdots, v_{k+\ell}) = \sum (\operatorname{sgn} \sigma) \alpha(v_{\sigma(1)}, \cdots, v_{\sigma(k)}) \beta(v_{\sigma(k+1)}, \cdots, v_{\sigma(k+\ell)})$$

تعریف می‌گردد، که در آن $v_i \in V$ و σ همهٔ جایگشت های $1,\cdots,k+\ell$ را برای (k,ℓ) اختیار می‌کند. بعنوان مثال، اگر α و β، 1 - بردار باشند، آنگاه

$$(\alpha\wedge\beta)(v_1,v_2)=\alpha(v_1)\beta(v_2)-\alpha(v_2)\beta(v_1).$$

حاصلضرب گوه ای نیز برای فرمهای دیفرانسیلی روی منیفلد ها قابل تعمیم است: برای یک k-فرم ω و یک ℓ - فرم τ بر M، **حاصلضرب گوه ای**[۱]، $\omega\wedge\tau$ یک $(k+\ell)$ - فرم بر M است که، به ازای هر $p\in M$،

$$(\omega\wedge\tau)_p=\omega_p\wedge\tau_p$$

۱۸.۱۱ گزاره. اگر ω و τ، فرمهای هموار بر M باشند، آنگاه $\omega\wedge\tau$ نیز هموار می‌باشد.

برهان : فرض کنید $(U,x^1\cdots,x^n)$ یک چارت بر M باشد. بر U،

$$\omega=\sum a_I dx^I,\qquad \tau=\sum b_J dx^J$$

که در آن a_I، b_J توابع هموار بر U هستند. حاصلضرب گوه ای بر U عبارتست از،

$$\begin{aligned}\omega\wedge\tau &= \left(\sum a_I dx^I\right)\wedge\left(\sum b_J dx^J\right)\\ &= \sum a_I b_J dx^I\wedge dx^J.\end{aligned}$$

در این جمع هرگاه اندیس I و J یکسان باشند، آنگاه $dx^I\wedge dx^J=0$. اگر I و J از یکدیگر متمایز باشند، آنگاه $dx^I\wedge dx^j=\pm dx^K$،که در آن $K=I\cup J$،و بر حسب اندیس های صعودی تجدید آرایش شده است. بنابراین،

$$\omega\wedge\tau=\sum_K\Bigg(\sum_{\substack{I\cup J=K\\ I\neq J}}\pm a_I b_J\Bigg)dx^K.$$

چون ضرایب dx^K، بر U، هموار می‌باشند، بنا به گزارهٔ ۱۸.۸، $\omega\wedge\tau$ نیز چنین است. □

۱۸.۱۲ گزاره (پولبک حاصلضرب گوه ای). اگر $F:N\to M$ یک نگاشت هموار بین منیفلد ها و ω و τ فرمهای دیفرانسیلی بر M باشند، آنگاه

$$F^*(\omega\wedge\tau)=F^*\omega\wedge F^*\tau.$$

برهان : مسالهٔ ۱۸.۱۸. □

[۱] wedge product

فضای برداری $\Omega^*(M)$ متشکل از فرمهای دیفرانسیلی بر منیفلد n بعدی M بصورت حاصل جمع مستقیم زیر تعریف می‌شود،

$$\Omega^*(M) = \bigoplus_{k=0}^{n} \Omega^k(M).$$

این بدین معنی است که هر عضو $\Omega^*(M)$، بصورت حاصلجمع یکتای $\sum_{k=0}^{n} \omega_k$، که در آن $\omega_k \in \Omega^k(M)$، بیان می‌شود. حاصلضرب گوه ای، از فضای برداری $\Omega^*(M)$ یک جبر مدرج می‌سازد، که درجهٔ آن بوسیلهٔ درجهٔ فرمهای دیفرانسیلی مشخص می‌شود.

بخش ۷.۱۸ فرمهای دیفراسیل بر یک دایره

نگاشت زیر را در نظر می‌گیریم،

$$h : \mathbb{R} \to \mathbb{S}^1, \qquad h(t) = (\cos t, \sin t)$$

چون به ازای هر t، مشتق $\dot{h}(t) = (-\sin t, \cos t)$ ناصفر است، نگاشت $h : \mathbb{R} \to \mathbb{S}^1$ یک سابمرشن است. بنا به مسالهٔ ۱۸.۲۳، نگاشت پولبک $h^* : \Omega^*(\mathbb{S}^1) \to \Omega^*(\mathbb{R})$ روی فرمهای دیفرانسیلی هموار انژکتیو (یک به یک) است. این مطلب این امکان را برای ما فراهم نموده که فرمهای دیفرانسیلی روی $\mathbb{S}^1$ را با زیر فضای فرمهای دیفرانسیلی بر $\mathbb{R}$ مشخص سازیم.

فرض کنید، $\omega = -ydx + xdy$ یک فرم همه جا نا صفر بر $\mathbb{S}^1$ مطابق مسالهٔ ۱۷.۲۲ باشد. در مسالهٔ ۱۷.۲۳، نشان دادیم $h^*\omega = dt$. چون ω همه جا ناصفر است، لذا یک کنج برای کلاف کتانژانت $T^*\mathbb{S}^1$ روی $\mathbb{S}^1$ می‌باشد، و هر 1 - فرم هموار، مانند α بر $\mathbb{S}^1$ را می‌توان بصورت، $\alpha = f\omega$ نوشت که در آن f تابعی بر $\mathbb{S}^1$ می‌باشد. پولبک آن $\bar{f} := h^* f$ نیز تابعی است که بر $\mathbb{R}$، هموار است. چون پولبک حافظ ضرب است،(گزارهٔ ۱۸.۱۲)

$$h^*\alpha = (h^* f)(h^*\omega) = \bar{f} dt. \qquad (۵.۱۸)$$

گوییم تابع g یا 1 - فرم gdt بر $\mathbb{R}$ متناوب با تناوب a است، اگر به ازای هر $t \in \mathbb{R}$، $g(t + a) = g(t)$.

۱۸.۱۳ گزاره. برای $k = 0, 1$، تحت نگاشت پولبک $h^* : \Omega^*(\mathbb{S}^1) \to \Omega^*(\mathbb{R})$، k-فرمهای هموار بر $\mathbb{S}^1$ بوسیلهٔ k-فرمهای متناوب هموار با دورهٔ تناوب 2π بر $\mathbb{R}$ مشخص می‌شود.

برهان : اگر $f \in \Omega^0(\mathbb{S}^1)$ باشد، آنگاه چون $h : \mathbb{R} \to \mathbb{S}^1$ متناوب با دورهٔ تناوب 2π است، پولبک $h^* f = f \circ h \in \Omega^0(\mathbb{R})$ نیز متناوب با دورهٔ تناوب 2π می‌باشد.
بر عکس، فرض کنید $\bar{f} \in \Omega^0(\mathbb{R})$ متناوب با دورهٔ تناوب 2π باشد. برای $p \in \mathbb{S}^1$، فرض کنید s وارون هموار از نگاشت دیفئومورفیسم موضعی h در همسایگی U از p باشد، $f = \bar{f} \circ s$ را بر U تعریف می‌کنیم. برای اینکه نشان دهیم که f خوش تعریف است، فرض می‌کنیم که s_1 و s_2 دو نگاشت وارون برای h بر U باشند. با توجه به خاصیت تناوبی سینوس و کسینوس داریم $s_1 = s_2 + 2n\pi$ به ازای $n \in \mathbb{Z}$.

چون $\bar{f}$ متناوب با دورهٔ تناوب 2π است، داریم $\bar{f}\circ s_1=\bar{f}\circ s_2$. این مطلب ثابت می‌کند که f بر U خوش تعریف است. علاوه بر آن داریم،

$$\text{بر } h^{-1}(U)\text{،}\qquad \bar{f}=f\circ\mathbb{S}^{-1}=f\circ h=h^*f$$

وقتی که p مقادیر خود را بر $\mathbb{S}^1$ اختیار می‌کند، تابع هموار و خوش تعریف f بر $\mathbb{S}^1$ به قسمی حاصل می‌شود که، $\bar{f}=h^*f$. بنابراین، تصویر $h^*:\Omega^0(\mathbb{S}^1)\to\Omega^0(\mathbb{R})$ دقیقا متشکل از توابع هموار و متناوب با دورهٔ تناوب 2π بر $\mathbb{R}$ می‌باشند.
توجه کنید که برای 1 - فرمی‌ها، روابط بصورت $\Omega^1(\mathbb{S}^1)=\Omega^0(\mathbb{S}^1)\omega$ و $\Omega^1(\mathbb{R})=\Omega^0(\mathbb{R})dt$ در می‌آیند.
پولبک $h^*:\Omega^1(\mathbb{S}^1)\to\Omega^1(\mathbb{R})$ با ضابطهٔ $h^*(f\omega)=(h^*f)dt$ بوده، و بنابراین می‌توان نتیجه گرفت که تصویر $h^*:\Omega^1(\mathbb{S}^1)\to\Omega^1(\mathbb{R})$ متشکل از 1 - فرمی‌های هموار و متناوب با دورهٔ تناوب 2π می‌باشد. □

بخش ۸.۱۸ فرمهای ناوردا بر یک گروه لی

همانطوریکه میدانهای برداری ناوردای چپ بر یک گروه لی وجود دارد، فرمهای دیفرانسیلی ناوردای چپ نیز موجود است. به ازای $g\in G$ فرض می کنیم که، $\ell_g:G\to G$ یک ضرب چپ توسط g باشد. یک k-فرم مانند ω بر G ناوردای چپ است، هرگاه به ازای هر $g\in G$، $\ell_g^*\omega=\omega$. این یعنی که به ازای هر $g,x\in G$ داشته باشیم

$$\ell_g^*(\omega_{gx})=\omega_x.$$

در نتیجه یک k-فرم ناوردای چپ بطور یکتا بوسیلهٔ مقدار خود در نقطهٔ همانی تعیین می‌شود، زیرا به ازای هر $g\in G$ داریم،

$$\omega_g=\ell_{g^{-1}}^*(\omega_e) \tag{۶.۱۸}$$

۱۸.۱۴ مثال (1 - فرمی ناوردای چپ بر $\mathbb{S}^1$). بنا به مسالهٔ ۱۷.۲۰، $\omega=-ydx+xdy$ یک 1 - فرمی ناوردای چپ بر $\mathbb{S}^1$ است.

۱۸.۱۵ گزاره. هر k-فرم ناوردای چپ مانند ω بر گروه لی G، هموار است.

برهان : بنا به گزارهٔ (۱۸.۸ پ)، کافی است ثابت کنیم که برای هر kمیدان برداری و هموار $X_1,\cdots,X_k$ بر G، تابع $\omega(X_1,\cdots,X_k)$ بر G، هموار است. فرض کنید $(Y_1)_e,\cdots,(Y_n)_e$ یک مبنا برای فضای مماس T_eG بوده، و $Y_1,\cdots,Y_n$ میدانهای برداری ناوردای چپ مولد آن باشند. آنگاه بنا به گزارهٔ (۸,۱۶) این میدانهای برداری مولد، تشکیل یک کنج هموار بر G می‌دهند. در نتیجه هر X_j را می‌توان بصورت ترکیب خطی $X_j=\sum a_j^iY_i$ نوشت. با توجه به گزارهٔ ۱۲.۳۰، توابع a_j^i همگی هموار می‌باشند. حال برای اثبات هموار بودن ω، کافی است که نشان دهیم که $\omega(Y_{i_1},\cdots,Y_{i_k})$ به ازای میدانهای برداری ناوردای

چپ $Y_{i_1},\cdots,Y_{i_k}$، هموار است. اما

$$\begin{aligned}(\omega(Y_{i_1},\cdots,Y_{i_k}))(g) &= \omega_g((Y_{i_1})_g,\cdots,(Y_{i_k})_g)\\ &= (\ell^*_{g^{-1}}(\omega_e))(\ell_{g^*}(Y_{i_1})_e,\cdots,\ell_{g^*}(Y_{i_k})_e)\\ &= \omega_e((Y_{i_1})_e,\cdots,(Y_{i_k})_e),\end{aligned}$$

که مستقل از g بوده و لذا ثابت است. در نتیجه تابع ثابت $\omega(Y_{i_1},\cdots,Y_{i_k})$ بر G، هموار می‌باشد. □

بطور مشابه، یک k−فرم ω بر G را ناوردای راست نامیم، هرگاه به ازای هر $g \in G$ داشته باشیم $r_g^*(\omega = \omega$.

مشابه گزارهٔ ۱۸.۱۵، هر فرم ناوردای راست بر یک گروه لی، هموار می‌باشد، و می‌توان برای آن اثباتی مشابه ارائه داد.

فرض کنید $\Omega^k(G)^G$ نشان دهندهٔ فضای برداری متشکل از k−فرمهای ناوردای چپ بر G باشد. نگاشت

$$\Omega^k(G)^G \to \wedge^k(\mathfrak{g}^\vee), \qquad \omega \mapsto \omega_e,$$

دارای یک وارون تعریف شده توسط (۶.۱۸) بوده و بنابراین یک ایزومورفیسم است. از این مطلب نتیجه می‌شود که $\dim \Omega^k(G)^G = \binom{n}{k}$.

بخش ۹.۱۸ تمرینات

۱۸.۱۶ مشخصهٔ یک k−فرم هموار. اثبات گزارهٔ ۱۸.۸ را برای (الف) ⇔ (ت) بنویسید.

۱۸.۱۷ خاصیت خطی پولبک. گزارهٔ ۱۸.۱۰ را ثابت کنید.

۱۸.۱۸ پولبک حاصلضرب گوه ای. گزارهٔ ۱۸.۱۲ را ثابت کنید.

۱۸.۱۹ *محمل جمع و حاصلضرب گوه ای. با تعمیم مفهوم محمل یک تابع، می‌توان **محمل**[۱] یک k−فرم $\omega \in \Omega^k(M)$ را تعریف کرد،

$$\operatorname{supp}(\omega) = \overline{\left\{p \in M \,\middle|\, \omega_p \neq 0\right\}} = \overline{Z(\omega)^c}$$

که در آن $Z(\omega)^c$ متمم مجموعهٔ صفر $Z(\omega)$ از ω در M بوده و منظور از علامت بار، بستار مجموعه می‌باشد. فرض کنید ω و τ فرمهای دیفرانسیلی بر منیفلد M باشند. ثابت کنید،

الف- $\operatorname{supp}(\omega+\tau) \subset \operatorname{supp}(\omega) \cup \operatorname{supp}(\tau)$

ب- $\operatorname{supp}(\omega\wedge\tau) \subset \operatorname{supp}(\omega) \cap \operatorname{supp}(\tau)$.

---

۱ support

۱۸.۲۰ ساپرت یک ترکیب خطی. ثابت کنید که اگر k-فرمهای $\omega^1, \cdots, \omega^r \in \Omega^k(M)$ در هر نقطهٔ منیفلد M مستقل خطی بوده، و نیز $a_1, \cdots, a_r$ توابع هموار بر M باشند، آنگاه

$$\operatorname{supp} \sum_{i=1}^{r} a_i \omega^i = \bigcup_{i=1}^{r} \operatorname{supp}(a_i)$$

۱۸.۲۱ *گردایه ای از محمل های موضعا متناهی. فرض کنید، $\{\rho_\alpha\}_{\alpha \in A}$ گردایه ای از توابع بر M و نیز ω یک k-فرم با محمل فشرده بر M باشد. اگر گردایه ای از محمل های $\{\operatorname{supp}(\rho_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ موضعا متناهی باشد، ثابت کنید که $\rho_\alpha \omega \equiv 0$ به ازای هر بجز تعداد متناهی از α ها بر قرار است.

۱۸.۲۲ حاصل جمع موضعا متناهی. گوییم حاصل جمع $\sum \omega_\alpha$ از k-فرمهای دیفرانسیلی تعریف شده بر منیفلد M، **موضعا متناهی** است، هرگاه گردایهٔ $\{\operatorname{supp}(\omega_\alpha)\}$ از محملها موضعا متناهی باشد. فرض کنید $\sum \omega_\alpha$ و $\sum \tau_\alpha$ حاصل جمع ها موضعا متناهی و f تابعی هموار بر منیفلد M باشد.

الف- نشان دهید که هر نقطهٔ $p \in M$ دارای همسایگی مانند U است که در آن $\sum \omega_\alpha$ حاصل جمعی متناهی است.

ب- نشان دهید که $\sum(\omega_\alpha + \tau_\alpha)$ حاصل جمعی موضعا متناهی است و

$$\sum(\omega_\alpha + \tau_\alpha) = \sum \omega_\alpha + \sum \tau_\alpha.$$

پ- نشان دهید که $\sum f\omega_\alpha$ حاصل جمعی موضعا متناهی بوده و رابطهٔ زیر نیز بر قرار است.

$$\sum f \cdot \omega_\alpha = f \cdot \left(\sum \omega_\alpha \right)$$

۱۸.۲۳ *پولبک یک نگاشت سابمرشن و پوشا. در زیر بخش (۵,۱۹)، نشان خواهیم داد که پولبک یک فرم هموار، خود هموار است. با فرض این حقیقت، ثابت کنید که اگر $\pi : \tilde{M} \to M$ یک سابمرشن پوشا باشد، آنگاه نگاشت پولبک $\pi^* : \Omega^*(M) \to \Omega^*(\tilde{M})$ یک همومورفیسم جبری یک به یک است.

۱۸.۲۴ فرمهای ناوردای دو طرفه بر یک گروه لی همبند و فشرده. فرض کنید G یک گروه لی n بعدی همبند و فشرده، با جبر لی $\mathfrak{g}$ باشد. این تمرین نشان می‌دهد که هر n - فرم ناوردای چپ بر G ناوردای راست نیز است.

الف- فرض کنید یک n - فرم ناوردای چپ بر G باشد. نشان دهید که به ازای هر $a \in G$، $r_a^*(\omega)$ نیز ناوردای چپ است، در آن $r_a : G \to G$ ضرب راست توسط a است.

ب- چون $\dim \Omega^n(G)^G = \dim \wedge^n(\mathfrak{g}^\vee) = 1$ و به ازای مقدار حقیقی و ناصفر $f(a)$ که به $g \in G$ بستگی دارد، $r_a^*\omega = f(a)\omega$. نشان دهید که $f : G \to \mathbb{R}^\times$ یک همومورفیسم گروهی است.

پ- نشان دهید که $f : G \to \mathbb{R}^\times$، هموار است. (راهنمایی: توجه کنید که $f(a)\omega_e = (r_a^*\omega)_e = r_a^*(\omega_a) = r_a^*\ell_{a^{-1}}^*(\omega_e)$. در نتیجه $f(a)$ پولبک نگاشت $Ad(a^{-1}) : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ است. مسالهٔ (۱۶.۱۱) را ببینید.)

ت- از آنجایی که تصویر مجموعهٔ فشرده و همبند G یعنی $f(G) \subset \mathbb{R}^\times$ تحت نگاشت پیوسته f، خود مجموعه ای فشرده و همبند است، ثابت کنید که $f(G) = 1$. نتیجه بگیرید به ازای هر $a \in G$، $r_a^*(\omega) = \omega$.

فصل ۱۹

مشتق خارجی

بر خلاف حسابان دورهٔ کارشناسی، که در آن اشیاء اصلی مورد مطالعه توابع بودند، اشیاء اصلی مورد مطالعه در حسابان روی منیفلد ها، فرم های دیفرانسیلی می‌باشند. هدف ما در اینجا چگونگی مشتق و انتگرال گیری از فرم های دیفرانسیل می‌باشد.

در اینجا لازم است یاد آوری کنیم که یک پاد مشتق[۱] بر جبر مدرج $A = \bigoplus_{k=0}^{\infty} A^k$ نگاشتی $\mathbb{R}$ - خطی مانند $D : A \to A$ است که

$$D(\omega \cdot \tau) = (D\omega) \cdot \tau + (-1)^k \omega \cdot D\tau$$

برای $\omega \in A^k$ و $\tau \in A^\ell$. بنا به تعریف در جبر مدرج A، عنصر A^k را عنصر همگن از درجهٔ k نامند. به ازای هر عضو همگن $\omega \in A$، پاد مشتق را از درجهٔ m گوییم، هرگاه

$$\deg D\omega = \deg \omega + m$$

فرض کنید که M یک منیفلد و $\Omega^*(M)$ جبری مدرج متشکل از فرم های C^∞ بر M باشد. بر جبر مدرج $\Omega^*(M)$ یک پاد مشتق بطور منحصر بفرد تعریف می‌شود، که آن را مشتق خارجی[۲] می‌نامیم. فرایند استفاده از مشتق خارجی را مشتقگیری خارجی نامند.

۱۹.۱ **تعریف.** منظور از مشتق خارجی بر منیفلد M، نگاشتی $\mathbb{R}$ - خطی چون $D : \Omega^*(M) \to \Omega^*(M)$ است که

الف- D یک پاد مشتق از درجهٔ 1 است.

ب- $D \circ D = 0$.

پ- اگر f یک تابع هموار و X یک میدان برداری هموار بر منیفلد M باشد، آنگاه $(Df)(X) = Xf$.

---

[۱] antiderivative [۲] exterior derivative

شرط (پ) ایجاب می‌کند که مقدار مشتق خارجی بر 0 − فرمی‌با دیفرانسیل تابع f یعنی df برابر است. بنابراین با توجه به (۲,۱۷) بر چارت مختصاتی $(U, x^1, \cdots, x^n)$ داریم،

$$Df = df = \sum \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i$$

در این بخش وجود ویکتایی مشتق خارجی را بر منیفلد ثابت می‌کنیم ، سپس با استفاده از سه خاصیت ارائه شده در تعریف مشتق خارجی نشان می‌دهیم که مشتق خارجی با پولبک خاصیت جابجایی دارند. این مطلب کمک می‌نماید تا ثابت کنیم که پولبک یک فرم هموار توسط یک نگاشت هموار ، خود هموار می‌باشد.

بخش ۱.۱۹ مشتق خارجی بر یک چارت مختصاتی

در زیر بخش ۴.۴ وجود و یکتایی یک مشتق خارجی را بر زیر مجموعهٔ بازی از $\mathbb{R}^n$ نشان دادیم. اثباتی مشابه آن می‌توان برای هر چارت مختصاتی بر یک منیفلد ارائه نمود.

بطور دقیقتر، فرض کنید $(U, x^1, \cdots, x^n)$ یک چارت مختصاتی بر منیفلد مفروض M باشد. آنگاه هر k − فرم مانند ω بر U را می‌توان بصورت ترکیب خطی منحصر بفرد

$$\omega = \sum a_I dx^I, \qquad a_I \in C^\infty(U)$$

نوشت.

اگر D مشتق خارجی بر U باشد، آنگاه

$$\begin{aligned} D\omega &= \sum (Da_I) \wedge dx^I + \sum a_I D dx^I, && \text{(بنا به (الف))} \\ &= \sum (Da_I) \wedge dx^I, && \text{(بنا به (ب) و (پ) و } Dd = D^2 = 0\text{)} \\ &= \sum_I \sum_j \frac{\partial a_I}{\partial x^j} dx^j \wedge dx^I && \text{(بنا به (پ))} \end{aligned} \tag{۱.۱۹}$$

بنابراین اگر مشتق خارجی D بر U موجود باشد، آنگاه با توجه به (۱.۱۹) این مشتق بطور یکتا تعریف می‌شود. برای اثبات وجود، D را مطابق (۱.۱۹) تعریف می‌نماییم. اثبات اینکه D در شرایط (الف)، (ب) و (پ) صدق می‌کند مشابه گزارهٔ (۷,۴) در حالت $\mathbb{R}^n$ می‌باشد. مشتق خارجی یکتا بر چارت (U, ϕ) را با d_U نشان می‌دهیم.

مشابه مشتق تابع بر $\mathbb{R}^n$، یک پاد مشتق D بر $\Omega^*(M)$ دارای این خاصیت است که برای یک k − فرم ω، مقدار $D\omega$ در نقطهٔ مفروض p تنها به مقادیر ω بر یک همسایگی p بستگی دارد. برای توضیح کامل آن، ابتدا می‌بایست در مورد عملگر های موضعی صحبت کنیم.

بخش ۲.۱۹ عملگر های موضعی

یک اندومورفیسم از فضای برداری W را اغلب یک عملگر بر W نامند. بعنوان مثال، اگر $W = C^\infty(\mathbb{R})$ فضای برداری متشکل از توابع هموار بر $\mathbb{R}$ باشد، آنگاه مشتق d/dx یک عملگر بر W می‌باشد.

$$\frac{d}{dx} f(x) = f'(x)$$

مشتق دارای این خاصیت است که مقدار $f'(x)$ در نقطهٔ p تنها به مقدار f در یک همسایگی کوچک از p بستگی دارد. بطور دقیقتر، اگر روی یک مجموعهٔ باز مانند U در $\mathbb{R}$، $f = g$، آنگاه بر U، $f' = g'$. از این روی گوییم که مشتق یک عملگر موضعی بر $C^\infty(\mathbb{R})$ است.

۱۹.۲ تعریف. یک عملگر $D : \Omega^*(M) \to \Omega^*(M)$ به ازای هر $k \geq 0$ موضعی است، هــرگاه وقـتیکه یـک k - فرم $\omega \in \Omega^k(M)$ بر یک مجموعهٔ باز U در M تحدید به صفر شود، آنگاه بر U، $D\omega \equiv 0$.
منظور از تحدید به 0 بر U، آن است که درهر نقطهٔ p متعلق به U، $\omega_p = 0$. یک محک ومعیار معادل برای آن که یک عملگر مانند D موضعی باشد آن است که به ازای هر $k \geq 0$، هنگامیکه دو k - فرم مانند $\omega, \tau \in \Omega^k(M)$ روی یک مجموعهٔ باز U باهم مساوی باشند، نتیجه بگیریم که بر مجموعهٔ U، $D\omega = D\tau$.

۱۹.۳ مثال. عملگر انتگرال $I : C^\infty([a,b]) \to C^\infty([a,b])$ را بصورت

$$I(f) = \int_a^b f(t)dt$$

تعریف می‌کنیم. در اینجا $I(f)$ یک عدد است، که ما آن را تابع ثابت بر $[a,b]$ در نظر می‌گیریم. انتگرال یک عملگر موضعی نیست، چون مقدار $I(f)$ در هر نقطهٔ p بستگی به مقدار f بر کل فاصلهٔ $[a,b]$ دارد.

۱۹.۴ گزاره. هر پاد مشتق D بر $\Omega^*(M)$ یک عملگر موضعی است.

برهان : فرض کنید $\omega \in \Omega^k(M)$ و روی یک زیر مجموعهٔ باز U، $\omega \equiv 0$. همچنین فرض کنید p نقطه ای دلخواه بر U باشد. کافی است ثابت کنیم که $(D\omega)_p = 0$. یک تابع مانند f، ضربه ای در نقطهٔ p و محمل در U را انتخاب می‌کنیم، در نتیجه بر M، $f\omega \equiv 0$ می‌باشد، زیرا اگر q نقطه ای متعلق به U باشد، داریم $\omega = 0$، و اگر q متعلق به U نباشد، آنگاه خواهیم داشت که، $f(q) = 0$. با بکار گیری خاصیت ضد مشتق D بر $f\omega$، داریم

$$0 = D(0) = D(f\omega) = (Df) \wedge \omega + (-1)^0 f \wedge (D\omega).$$

حاصل طرف راست در نقطهٔ p با توجه به، $\omega_p = 0$ و $f(p) = 1$، را محاسبه می‌کنیم، که عبارت است از $(D\omega)_p = 0$، و این همانی است که می‌خواستیم. □

۱۹.۵ یادداشت. با برهانی مشابه می‌توان نشان داد که مشتق بر $\Omega^*(M)$ نیز یک عملگر موضعی است.

بخش ۳.۱۹ وجود مشتق خارجی بر منیفلد

برای تعریف مشتق خارجی بر یک منیفلد مانند M، فرض می‌کنیم ω یک k - فرم بر M و $p \in M$. چارت $(U, x^1, \cdots, x^n)$ را حول نقطهٔ p در نظر می‌گیریم. فرض می‌کنیم $\omega = \sum a_I dx^I$ تعریف شده بر U باشد. مطابق زیر بخش (۱,۱۹) وجود یک مشتق خارجی d_U را بر U با خاصیت زیر نشان دادیم،

$$d_U \omega = \sum da_I \wedge dx^I, \qquad (U \text{ بر}) \tag{۲.۱۹}$$

تعریف می‌کنیم، $(d\omega)_p = (d_U \omega)_p$. حال نشان می‌دهیم که $(d_U \omega)_p$ مستقل از چارت U که شامل نقطهٔ p می باشد، است. اگر $(V, y^1, \cdots, y^n)$ چارت دیگری حول نقطهٔ p و $\omega = \sum b_J dy^J$ تعریف شده بر V باشد، آنگاه بر $U \cap V$،

$$\sum a_I dx^I = \sum b_J dy^J$$

بر $U \cap V$ یک مشتق خارجی منحصر بفرد بصورت زیر وجود دارد،

$$d_{U \cap V} : \Omega^*(U \cap V) \to \Omega^*(U \cap V)$$

بنا به خواص مشتق خارجی بر $U \cap V$ داریم،

$$d_{U \cap V} \left(\sum a_I dx^I \right) = d_{U \cap V} \left(\sum b_J dy^J \right)$$

و از آنجا،

$$\sum da_I \wedge dx^I = \sum db_J \wedge dy^J$$

مخصوصا،

$$\left(\sum da_I \wedge dx^I \right)_p = \left(\sum ab_J \wedge dy^J \right)_p .$$

نتیجه می‌گیریم، $(d\omega)_p = (d_U \omega)_p$ خوش تعریف و مستقل از چارت $(U, x^1, \cdots, x^n)$ می‌باشد. عملگر زیر هنگامی که p روی همهٔ نقاط M تغییر کند، تعریف می‌شود،

$$d : \Omega^*(M) \to \Omega^*(M)$$

برای آن که درستی خواص (الف)، (ب) و (پ)، بررسی شود کافی است این خواص را در هر نقطه از $p \in M$ مورد بررسی قرار دهیم. همانطوریکه در زیر بخش (۱,۱۹) دیدیم، بررسی آن مشابه محاسباتی است که در مشتق خارجی بر $\mathbb{R}^n$ در گزارهٔ ۷.۴ آمده است.

بخش ۴.۱۹ یکتایی مشتق خارجی

فرض کنید $D : \Omega^*(M) \to \Omega^*(M)$ یک مشتق خارجی باشد. می‌خواهیم نشان دهیم که D با مشتق خارجی d تعریف شده در زیر بخش (۳,۱۹) یکی است. اگر f تابعی هموار و X نیز یک میدان برداری هموار تعریف شده بر M باشد، آنگاه با توجه به خاصیت (پ) در تعریف ۱۹.۱ داریم،

$$(Df)(X) = Xf = (df)(X)$$

در نتیجه روی توابع $f \in \Omega^0(M)$، $Df = df$.

حال ضرب گوه ای 1 –فرمی دقیق $df^1 \wedge \cdots \wedge dx^k$ را در نظر گرفته،

$$\begin{aligned} D(df^1 \wedge \cdots \wedge df^k) &= D(Df^1 \wedge \cdots \wedge Df^k) && (\text{چون } Df^i = df^i) \\ &= \sum_{i=1}^{k} (-1)^{i-1} Df^1 \wedge \cdots \wedge DDf^i \wedge \cdots \wedge Df^k && (D \text{ یک پاد مشتق است}) \\ &= 0 && (\text{چون } D^2 = 0) \end{aligned}$$

بالاخره نشان می‌دهیم که، D با d بر هر k –فرم، $\omega \in \Omega^k(M)$ مساوی است. $p \in M$ را ثابت فرض کرده، و چارت $(U, x^1, \cdots, x^n)$ را حول p و $\omega = \sum a_I dx^I$ را بر U در نظر می‌گیریم. توابع $a_I, x^1, \cdots, x^n$ بر U را به توابع هموار، $\tilde{a}, \tilde{x}^1, \cdots, \tilde{x}^n$ بر M توسیع داده، بنا به گزارهٔ ۱۸.۹ این توابع با توابع $a_I, x^1, \cdots, x^n$ بر همسایگی V از نقطهٔ p یکی است. تعریف می‌کنیم،

$$\tilde{\omega} = \sum \tilde{a}_I d\tilde{x}^I \in \Omega^k(M).$$

آنگاه بر V، $D\omega = D\tilde{\omega}$. بنابراین داریم،

$$\begin{aligned} (D\omega)_p &= (D\tilde{\omega})_p \\ &= \left(D \sum \tilde{a}_I d\tilde{x}^I \right)_p \\ &= \left(\sum d\tilde{a}_I \wedge d\tilde{x}^I + \sum \tilde{a}_I \wedge d\tilde{x}^I \right)_p \\ &= \left(\sum d\tilde{a}_I \wedge d\tilde{x}^I \right)_p && (\text{چون } Dd\tilde{x}^1 = DD\tilde{x} = 0) \\ &= \left(\sum da_I \wedge dx^I \right)_p && (\text{چون } D \text{ یک عملگر موضعی است}) \\ &= (d\omega)_p \end{aligned}$$

و قضیهٔ زیر را ثابت کردیم،

۱۹.۶ قضیه. بر هر منیفلد M، یک مشتق خارجی یکتا بصورت، $d : \Omega^*(M) \to \Omega^*(M)$ با خواص تعریف شده در تعریف ۱۹.۱ وجود دارد.

بخش ۵.۱۹ مشتق گیری خارجی تحت پولبک

دیدم که پولبک فرم های دیفرانسیلی با مشتق خارجی جا بجا می‌شوند. این حقیقت همراه با گزارهٔ ۱۸.۱۲، که پولبک حافظ ضرب گوه ای است، کلید اصلی محاسبات با پولبک می‌باشد. با استفاده از این دو خاصیت، می‌توان این گزاره را، که پولبک هر فرم هموار ، تحت یک نگاشت هموار ، هموار است، را ثابت کرد.

۱۹.۷ گزاره (جابجایی پولبک با d). فرض کنید $F: N \to M$ یک نگاشت هموار از منیفلدها باشد. اگر $\omega \in \Omega^k(M)$، آنگاه $dF^*\omega = F^*d\omega$.

برهان : در حالت $k = 0$، ω یک تابع هموار بر M بوده، و حکم از گزارهٔ ۱۷.۱۰ نتیجه می‌شود. در حالت $k \geq 1$، کافی است تحقیق کنیم که در هر نقطهٔ دلخواه $p \in N$، داریم $dF^*\omega = F^*d\omega$. برای اینکار کافی است حکم را بر یک چارت مختصاتی ثابت کنیم. اگر $(V, y^1, \cdots, y^m)$ چارتی بر M حول نقطهٔ $F(p)$ باشد، در اینصورت،

$$\omega = \sum a_I dy^{i_1} \wedge \cdots \wedge dy^{i_k}, \qquad I = (i_1 < \cdots < i_k)$$

که در آن a_I توابعی هموار بر V می‌باشند، و

$$\begin{aligned} F^*\omega &= \sum (F^*a_I) F^*dy^{i_1} \wedge \cdots \wedge F^*dy^{i_k} && (\text{گزارهٔ ۱۸.۱۲}) \\ &= \sum (a_I \circ F) dF^{i_1} \wedge \cdots \wedge dF^{i_k} && (F^*dy^i = dF^*y^i = d(y^i \circ F) = dF^i) \end{aligned}$$

بنابراین

$$dF^*\omega = \sum (a_I \circ F) dF^{i_1} \wedge \cdots \wedge dF^{i_k}$$

از طرف دیگر،

$$\begin{aligned} F^*d\omega &= F^*\left(\sum da_I \wedge dy^{i_1} \wedge \cdots \wedge dy^{i_k} \right) \\ &= \sum F^*da_I \wedge F^*dy^{i_1} \wedge \cdots \wedge F^*dy^{i_k} \\ &= \sum d(F^*da_I) \wedge dF^{i_1} \wedge \cdots \wedge dF^{i_k} && (\text{حالت } k = 0) \\ &= \sum d(a_I \circ F) \wedge dF^{i_1} \wedge \cdots \wedge dF^{i_k}. \end{aligned}$$

بنابراین، $dF^*\omega = F^*d\omega$. □

۱۹.۸ نتیجه. اگر U زیر مجموعهٔ بازی از منیفلد M و $\omega \in \Omega^k(M)$ باشد، آنگاه $(d\omega)|_U = d(\omega|_U)$.

برهان : فرض کنید $i : U \hookrightarrow M$ نگاشت شمول باشد. آنگاه $\omega|U = i^*\omega$، و این نتیجه از دوباره نویسی رابطهٔ جابجایی برای d و i^* حاصل می‌شود. □

۱۹.۹ مثال. فرض کنید U، مجموعهٔ باز $]0,\infty[\times]0,2\pi[$ در صفحهٔ $\mathbb{R}^2$ با مختصات (r,θ) باشد. تابع $F : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ با ضابطهٔ $F(r,\theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$ تعریف می‌کنیم. اگر مختصات مجموعهٔ مقصد، مختصات استاندارد x و y باشد، پولبک $F^*(dx \wedge dy)$ را بیابید.

حل. ابتدا F^*dx را حساب می‌کنیم،

$$\begin{aligned} F^*dx &= dF^*x && \text{(گزارهٔ (۵,۱۹))} \\ &= d(x \circ F) && \text{(تعریف پولبک یک تابع)} \\ &= d(r\cos\theta) \\ &= (\cos\theta)dr - r\sin\theta d\theta \end{aligned}$$

بطور مشابه،

$$\begin{aligned} F^*dy &= dF^*y \\ &= d(r\sin\theta) \\ &= (\sin\theta)dr + r\cos\theta d\theta. \end{aligned}$$

چون پولبک با ضرب گوه ای جابجا می‌شوند (گزارهٔ ۱۸.۱۲)، پس داریم،

$$\begin{aligned} F^*(dx \wedge dy) &= (F^*dx) \wedge (F^*dy) \\ &= ((\cos\theta)dr - r\sin\theta d\theta) \wedge ((\sin\theta)dr + r\cos\theta d\theta) \\ &= (r\cos^2\theta + r\sin^2\theta)dr \wedge d\theta \quad (\text{چون } d\theta \wedge dr = -dr \wedge d\theta) \\ &= r dr \wedge d\theta \end{aligned}$$

۱۹.۱۰ گزاره. اگر $F : N \to M$ نگاشتی هموار از منیفلد ها ، و ω یک k - فرم هموار بر M باشد، آنگاه $F^*\omega$ یک k - فرم هموار بر N خواهد بود.

برهان : کافیست نشان دهیم که هر نقطه از N دارای همسایگی است که بر آن $F^*\omega$، هموار است. $p \in N$ را ثابت اختیار نموده و چارتی مانند $(V, y^1, \cdots, y^m)$ در M حول نقطهٔ $F(p)$ اختیار می‌کنیم. فرض کنید $F^i = y^i \circ F$، i امین مولفهٔ تحت نگاشت F از این چارت باشد. با توجه به پیوستگی F، چارتی مانند $(U, x^1, \cdots, x^n)$ بر N حول p وجود دارد، بقسمی است که $F(U) \subset V$. چون ω بر V، هموار است، پس

$$\omega = \sum_I a_I dy^{i_1} \wedge \cdots \wedge dy^{i_k}$$

به ازای توابع هموار ، $a_I \in C^\infty(V)$ (گزارهٔ (۱۸.۸) (الف) $\Leftarrow$ (ب)). حال بنا به خواص پولبک داریم،

$$\begin{aligned} F^*\omega &= \sum (F^*a_I)F^*(dy^{i_1}) \wedge \cdots \wedge F^*(dy^{i_k}) && \text{(گزاره های (۱۸.۱۰) و (۱۸.۱۲))} \\ &= \sum (F^*a_I) dF^*y^{i_1} \wedge \cdots \wedge dF^*y^{i_k} && \text{(گزارهٔ (۱۹.۷))} \\ &= \sum (a_I \circ F) dF^{i_1} \wedge \cdots \wedge dF^{i_k} && (F^*y^i = y^i \circ F = F^i) \\ &= \sum_{I,J} (a_I \circ F) \frac{\partial(F^{i_1}, \cdots, F^{i_k})}{\partial(x^{j_1}, \cdots, x^{j_k})} dx^J && \text{(گزارهٔ (۱۸.۳))} \end{aligned}$$

چون $a_I \circ F$ و $\partial(F^{i_1}, \cdots, F^{i_k})/\partial(x^{j_1}, \cdots x^{j_k})$، همگی هموار هستند، بنا به گزارهٔ (۱۸.۸) (پ) $\Leftarrow$ (الف)، $F^*\omega$، نیز هموار می‌باشد. □

بطور خلاصه، اگر $F : N \to M$ یک نگاشت هموار از منیفلد ها باشد، آنگاه پولبک $F^* : \Omega^*(M) \to \Omega^*(N)$ یک مورفیسم از دیفرانسیل جبر های مدرج می‌باشد، یعنی درجهٔ - حافظ جبر همومورفیسم که با دیفرانسیل جابجا می‌شود.

بخش ۶.۱۹ تحدید k - فرم به یک زیر منیفلد

تحدید یک k - فرم به یک زیر منیفلد ایمرس درست مانند تحدید 1–فرمی بوده، فقط روی k مولفه تکرار می‌شود. فرض کنید S یک زیر منیفلد منظم از منیفلد M باشد. اگر ω یک k - فرم بر M باشد، آنگاه تحدید ω به S، k - فرم $\omega|_S$ بر S بوده و با رابطهٔ زیر بیان می‌شود،

$$(\omega|_S)_p(v_1, \cdots, v_k) = \omega_p(v_1, \cdots, v_k)$$

که در آن $v_1, \cdots, v_k \in T_pS \subset T_pM$. در نتیجه $(\omega|_S)_p$ بوسیلهٔ ω_p با تحدید آن به دامنهٔ $T_pS \times \cdots \times T_pS$، ($k$ - بار) بدست می‌آید. با توجه به گزارهٔ ۱۷.۱۴، تحدید k - فرم درست مانند پولبک تحت نگاشت شمول $i : S \hookrightarrow M$ می‌باشد.

یک فرم ناصفر بر M را می‌توان به یک فرم صفر بر یک زیر منیفلد مانند S تحدید کرد. بعنوان مثال، اگر S یک منحنی هموار در $\mathbb{R}^2$ که بوسیلهٔ یک تابع غیر ثابت $f(x,y)$ تعریف شده باشد، آنگاه دیفرانسیل $df = (\partial f/\partial x)dx + (\partial f/\partial y)dy$ یک 1–فرم ناصفر بر $\mathbb{R}^2$ است، اما چون f بر S متحد با صفر است، لذا دیفرانسیل df نیز بر S متحد با صفر است. بنابراین، $(df)|_S \equiv 0$. مثال دیگری بر این مطلب مسالهٔ ۱۹.۲۱ می‌باشد.

می‌بایست بین فرم های ناصفر و فرم های همه جا ناصفر تمایز قائل شد. بعنوان مثال فرم xdy یک فرم ناصفر بر $\mathbb{R}^2$ بوده، هرچند این فرم همه جا ناصفر نمی‌باشد، چون فرم مذکور روی محور y برابر صفر است. می‌دانیم که dx و dy، 1–فرمی‌هایی ناصفر بر $\mathbb{R}^2$ می‌باشند.

۱۹.۱۱ نمادگذاری. چون پولبک و مشتق خارجی جابجا می‌شوند، $(df)|_S = d(f|_S)$، بنابراین می‌توان از نماد $df|_S$ برای هر دوی آن ها استفاده کرد.

بخش ۷.۱۹ $1-$فرمی‌های همه جا ناصفر بر دایره

در مثال ۱۷.۱۵ دیدیم که $1-$فرم $-ydx+xdy$ بر دایرهٔ واحد همه جا ناصفر است. بعنوان یک کاربرد از مشتق خارجی، می‌خواهیم به یک روش دیگر یک $1-$فرم همه جا ناصفر بر دایره تعریف کنیم. یکی از مزایای روش جدید تعمیم ساختار فرم خاص [۱] همه جا ناصفر روی ابر صفحه هموار بر $\mathbb{R}^{n+1}$ می‌باشد، که یک مجموعهٔ طراز منظم از یک تابع هموار $f:\mathbb{R}^{n+1}\to\mathbb{R}$ می‌باشد. در فصل ۲۱ خواهیم دید که یک فرم خاص همه جا ناصفر است که رابطهٔ نزدیکی با جهت پذیری روی منیفلد دارد.

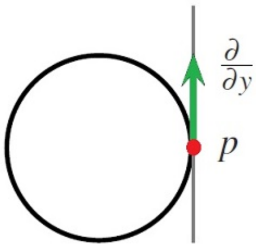
۱۹.۱۲ مثال. فرض کنید $\mathbb{S}^1=\{(x,y)|x^2+y^2=1\}$ دایرهٔ واحد در $\mathbb{R}^2$ باشد. $1-$فرم dx از $\mathbb{R}^2$ به $1-$فرم بر $\mathbb{S}^1$ تحدید می‌شود. در هر نقطهٔ $p\in\mathbb{S}^1$، دامنهٔ $(dx\,|_{\mathbb{S}^1})_p$ به جای $T_p(\mathbb{R}^2)$ عبارت از $T_p(\mathbb{S}^1)$ می‌باشد.

$$(dx\,|_{\mathbb{S}^1})_p : T_p(\mathbb{S}^1)\to\mathbb{R}.$$

در $p=(1,0)$، یک مبنا برای فضای مماس $T_p(\mathbb{S}^1)$ عبارتست از $\partial/\partial y$ (شکل ۷.۱۹) زیرا،

$$(dx)_p\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)=0$$

گر چه می‌بینیم که dx یک $1-$فرم همه جا ناصفر بر $\mathbb{R}^2$ است، اما وقتیکه به دایرهٔ $\mathbb{S}^1$ محدود می‌شود، در نقطهٔ $(1,0)$ صفر می‌شود. برای یافتن یک $1-$فرم همه جا ناصفر بر $\mathbb{S}^1$، از طرفین رابطه $x^2+y^2=1$



شکل ۱.۱۹: فضای مماس به $\mathbb{S}^1$ در $p=(1,0)$.

مشتق خارجی می‌گیریم. با استفاده از خاصیت d، داریم،

$$2xdx+2ydy=0 \qquad (۳.۱۹)$$

البته، این معادله تنها در نقطهٔ $(x,y)\in\mathbb{S}^1$ معتبر است. فرض کنید،

$$U_x=\left\{(x,y)\in\mathbb{S}^1\,\middle|\,x\neq 0\right\} \quad \text{و} \quad U_y=\left\{(x,y)\in\mathbb{S}^1\,\middle|\,y\neq 0\right\}.$$

---

[۱] Top Form

بنا به (۳.۱۹)، بر $U_x \cap U_y$،

$$\frac{dy}{x} = -\frac{dx}{y}.$$

یک 1−فرم ω بر $\mathbb{S}^1$ بصورت زیر تعریف می‌کنیم،

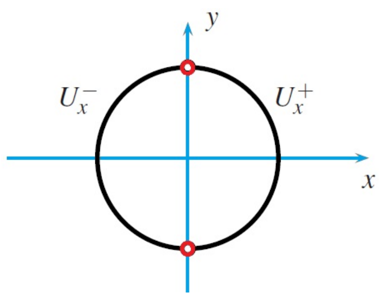
$$\omega = \begin{cases} \dfrac{dy}{x} & U_x \text{ بر}. \\ -\dfrac{dx}{y} & U_y \text{ بر}. \end{cases} \tag{۴.۱۹}$$

چون این دو 1−فرم بر $U_x \cap U_y$ با هم برابرند، ω یک 1−فرم خوش تعریف بر $\mathbb{S}^1 = U_x \cap U_y$ است.

برای اینکه نشان دهیم که ω همه جا ناصفر و هموار باشد، می‌بایست از چارت ها استفاده کنیم. فرض کنید،

$$U_x^+ = \left\{ (x,y) \in \mathbb{S}^1 \middle| x > 0 \right\}$$

و مشابها U_x^-, U_y^+, U_y^- مطابق (شکل ۷.۱۹) تعریف می‌شود. بر U_x^+، y یک مختص موضعی بوده و بنابراین dy یک مبنا برای فضای هم مماس $T_p^*(\mathbb{S}^1)$ در هر نقطهٔ $p \in U_x^+$ خواهد بود. چون بر U_x^+، $\omega = dy/x$ بوده، بنابراین هموار و همه جا بر U_x^+ ناصفر می‌باشد. با استدلالی مشابه می‌توان این نتیجه را برای dy/x بر U_x^- و $-dx/y$ بر U_y^+ و U_y^- گرفت. در نتیجه، ω، هموار و همه جا بر $\mathbb{S}^1$ ناصفر است.



شکل ۲.۱۹: دو چارت بر دایرهٔ واحد.

بخش ۸.۱۹ تمرینات

۱۹.۱۳ پولبک یک فرم دیفرانسیل. فرض کنید U مجموعهٔ باز بصورت $(0,\infty)\times(0,\pi)\times(0,2\pi)$ در فضای $\mathbb{R}^3$ با مختصات (ρ,ϕ,θ) باشد. $F : U \to \mathbb{R}^3$ را با ضابطهٔ زیر تعریف می‌کنیم

$$F(\rho,\phi,\theta) = (\rho\sin\phi\cos\theta, \rho\sin\phi\sin\theta, \rho\cos\theta).$$

اگر x,y,z مختصات استاندارد مجموعهٔ مقصد $\mathbb{R}^3$ باشد، نشان دهید

$$F^*(dx\wedge dy\wedge dz)=\rho^2\sin\phi\, d\rho\wedge d\phi\wedge d\theta.$$

۱۹.۱۴ پولبک یک فرم دیفرانسیل. فرض کنید $F:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ با ضابطهٔ زیر داده شده است،

$$F(x,y)=(x^2+y^2,xy)$$

اگر u,v مختصات استاندارد مجموعهٔ مقصد $\mathbb{R}^2$ باشد، مقدار $F^*(udu+vdv)$ را بیابید.

۱۹.۱۵ پولبک یک فرم دیفرانسیل بوسیلهٔ یک منحنی. فرض کنید τ یک 1–فرمی تعریف شده بصورت $\tau=(-ydx+xdy)/(x^2+y^2)$ بر $\mathbb{R}^2-\{0\}$ باشد. اکنون $\gamma:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2-\{0\}$ را با ضابطهٔ $\gamma(t)=(\cos t,\sin t)$ تعریف می‌کنیم. مطلوبست مقدار $\gamma^*\tau$. (این مساله در رابطه با مثال ۱۷.۱۷ است که در آن اگر $i:\mathbb{S}^1\hookrightarrow\mathbb{R}^2-\{0\}$ نگاشت شمول باشد، آنگاه $\gamma=i\circ c$ و $\omega=i^*\tau$).

۱۹.۱۶ پولبک یک تحدید. فرض کنید $F:N\to M$ یک نگاشت هموار از منیفلدها، U یک زیر مجموعهٔ باز از M و $F|_{F^{-1}(U)}:F^{-1}(U)\to U$ تحدید F به $F^{-1}(U)$ باشد. ثابت کنید که اگر $\omega\in\Omega^k(M)$، آنگاه $(F|_{F^{-1}(U)})^*(\omega|_U)=(F^*\omega)|_{F^{-1}(U)}$.

۱۹.۱۷ توابع مختصاتی و فرم های دیفرانسیلی. فرض کنید $f^1,\cdots,f^n$ توابع هموار بر همسایگی U شامل نقطهٔ p در منیفلدی با بعد n باشد. نشان دهید که همسایگی مانند W شامل نقطهٔ p است که $f^1,\cdots,f6n$ تشکیل یک دستگاه مختصات می‌دهد اگر و تنها اگر، $(df^1\wedge\cdots\wedge df^n)_p\neq 0$).

۱۹.۱۸ عملگر های موضعی. یک عملگر $L:\Omega^*(M)\to\Omega^*(M)$ با محل کاهشی (نزولی) است، هرگاه به ازای هر k – فرم $\omega\in\Omega^*(M)$ که $k\geq 0$ داشته باشیم، $\operatorname{supp}L(\omega)\subset\operatorname{supp}\omega$. نشان دهید که یک عملگر بر $\Omega^*(M)$ موضعی است، اگر و تنها اگر با محل کاهشی باشد.

۱۹.۱۹ مشتقات توابع هموار عملگرهای موضعی هستند. فرض کنید M یک منیفلد هموار باشد. تعریف عملگر مو ضعی D بر $C^\infty(M)$ مشابه تعریف عملگر موضعی بر $\Omega^*(M)$ است. D موضعی است هر وقت تابع $f\in C^\infty(M)$ بر یک زیر مجموعهٔ باز U متحد با صفر شود، آنگاه بر U، $Df\equiv 0$. ثابت کنید که مشتق $C^\infty(M)$ یک عملگر موضعی بر $C^\infty(M)$ می‌باشد.

۱۹.۲۰ 2 – فرمی‌های نا تباهیده. یک 2 – همبردار α بر یک فضای برداری $2n$–بعدی V را نا تباهیده نامیم، هرگاه $\alpha^n:=\alpha\wedge\cdots\wedge\alpha$، ($n$ بار) $2n$ –همبردار صفر نباشد. یک 2 – فرم ω بر یک منیفلد $2n$ –بعدی M را ناتباهیده گوییم، هرگاه در هر نقطهٔ $p\in M$، 2 – همبردار ω_p بر فضای مماس T_pM نا تباهیده باشد.

الف– ثابت کنید که بر$\mathbb{C}^n$ با مختصات حقیقی $x^1,y^1,\cdots,x^n,y^n$، 2 – فرم زیر نا تباهیده است،

$$\omega=\sum_{j=1}^n dx^j\wedge dy^j$$

ب- ثابت کنید که اگر λ فرم لیوویل بر فضای کلی T^*M از کلاف هم مماس یک منیفلد n - بعدی M باشد، آنگاه $d\lambda$ یک 2 - فرم نا تباهیده بر T^*M است.

۱۹.۲۱ *صفحهٔ قائم. فرض کنید x,y,z مختصات استاندارد بر $\mathbb{R}^3$ باشد. یک صفحه در $\mathbb{R}^3$ را قائم گوییم، هرگاه به ازای مقادیر $(a,b) \neq (0,0) \in \mathbb{R}^3$ بصورت $ax+by=0$ تعریف شود. ثابت کنید که با تحدید به یک صفحهٔ قائم، $dx \wedge dy = 0$.

۱۹.۲۲ فرم هیچ جا ناصفر بر $\mathbb{S}^1$. ثابت کنید که فرم همه جا ناصفر ω بر $\mathbb{S}^1$ که در مثال ۱۹.۱۲ ساخته شد به صورت $-ydx+xdy$ از مثال ۱۷.۱۵ می‌باشد. (راهنمایی: U_x و U_y را جداگانه در نظر بگیرید. بر U_x عبارت $dx=-(y/x)$ را در $-ydx+xdy$ جایگزین نمایید.)

۱۹.۲۳ فرم هموار هیچ جا ناصفر بر یک ابر صفحهٔ هموار.

الف- فرض کنید $f(x,y)$ یک تابع هموار بر $\mathbb{R}^2$ و فرض کنید 0 یک مقدار منظم f باشد. بنا به قضیهٔ مجموعهٔ طراز منظم، مجموعهٔ صفر M از $f(x,y)$ یک زیر منیفلد یک بعدی از $\mathbb{R}^2$ است. یک 1-فرم هموار همه جا ناصفر بر M بسازید.

ب- فرض کنید $f(x,y,z)$ یک تابع هموار بر $\mathbb{R}^3$ و فرض کنید 0 مقدار منظم f باشد. بنا به قضیهٔ مجموعهٔ طراز منظم، مجموعهٔ صفر M از $f(x,y,z)$ یک زیر منیفلد دو بعدی از $\mathbb{R}^3$ است. فرض کنید f_x, f_y, f_z مشتقات جزئی f به ترتیب نسبت به x,y,z باشند. نشان دهید که تساوی های زیر هر جا که بر M با معنی باشد، بر قرار است،

$$\frac{dx \wedge dy}{f_z} = \frac{dy \wedge dz}{f_x} = \frac{dz \wedge dx}{f_y}$$

در نتیجه سه 2 - فرم فوق باهم تشکیل یک 2 -فرم هموار همه جا ناصفر بر M می‌دهند.

پ- این مساله را به مجموعهٔ تراز منظم $f(x^1, \cdots, x^{n+1})$ در $\mathbb{R}^{n+1}$ تعمیم دهید.

۱۹.۲۴ میدان های برداری بصورت مشتق توابع هموار . در زیر بخش (۱,۱۴) مشاهده کردیم که یک میدان برداری هموار مانند X، بر یک منیفلد مفروض M یک مشتق بر $C^\infty(M)$ تعریف می‌کند. حال می‌خواهیم نشان دهیم که هر مشتق از $C^\infty(M)$ از یک و تنها یک میدان برداری که قبلا بیان کردیم، بدست می‌آید. برای تمایز مابین میدان برداری و مشتق، موقتا مشتق ناشی از میدان برداری X را با $\varphi(X)$ نشان می‌دهیم. در نتیجه، به ازای هر $f \in C^\infty(M)$ داریم،

$$(\varphi(X)f)(p) = X_p f \qquad \text{به ازای هر } p \in M$$

الف- فرض کنید $\mathcal{F} = C^\infty(M)$. ثابت کنید که $\varphi : \mathfrak{X} \to \mathrm{Der}(C^\infty(M))$ یک نگاشت $\mathcal{F}$ - خطی است.

ب- نشان دهید که φ یک به یک است.

پ- اگر D یک مشتق $C^\infty(M)$ و $p \in M$ باشد، $D_p : C_p^\infty(M) \to C_p^\infty(M)$ را بصورت،

$$D_p[f] = [D\tilde{f}] \in C_p^\infty(M)$$

تعریف می‌کنیم، که منظور از $[f]$ جرم f در p و $\tilde{f}$ توسیع فراگیر f، آن طوری که در گزارهٔ ۱۸.۹ آمده است، می‌باشند. نشان دهید که $D_p[f]$ خوش تعریف است.(راهنمایی: مسالهٔ ۱۹.۱۹ را بکار گیرید.)

ت- نشان دهید که D_p یک مشتق از $C_p^\infty(M)$ است.

ث- ثابت کنید که $\varphi : \mathfrak{X}(M) \to \mathrm{Der}(C^\infty(M))$ یک ایزومورفیسم از $\mathcal{F}$ - مدول ها است.

۱۹.۲۵ معادلات مکسول قرن بیستم. در نظریهٔ الکتریسیته و مغناطیسی مکسول، که در اواخر قرن نوزدهم توسعه یافت، میدان الکتریکی $\mathbf{E} = \langle E_1, E_2, E_3 \rangle$ و میدان مغناطیسی $\mathbf{B} = \langle B_1, B_2, B_3 \rangle$ در فضای خلا $\mathbb{R}^3$ که فاقد هرگونه جریانی بوده و در معادلات زیر نیز صدق می‌کند، را در نظر می‌گیریم.

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \qquad \operatorname{div} \mathbf{E} = 0,$$
$$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \qquad \operatorname{div} \mathbf{B} = 0.$$

با تناظر بیان شده در زیر بخش (۶,۴)، 1-فرم $E = E_1dx + E_2dy + E_3dz$ بر $\mathbb{R}^2$ متناظر با میدان برداری $\mathbf{E}$ و 2 - فرمی $B = B_1dy \wedge dz + B_2dz \wedge dx + E_3dx \wedge dy$ متناظر با میدان برداری $\mathbf{B}$ می‌باشد. فرض کنید $\mathbb{R}^4$ یک فضا - زمان با مختصات (x, y, z, t) باشد. آنگاه هم E و هم B را می‌توان به صورت فرم های دیفرانسیلی بر $\mathbb{R}^4$ در نظر گرفت. 2 - فرمی F را بر این فضا - زمان بصورت $F = E \wedge dt + B$ تعریف می‌کنیم. حال نشان دهید که کدامیک از دو دسته معادلات مکسول با رابطهٔ $dF = 0$ معادل است. برای ادعای خود دلیل بیاورید. (دو معادلهٔ دیگر با رابطهٔ $d \star F = 0$ معادل بوده که عمل ستاره در کتاب هندسهٔ دیفرانسیل [۲ ، بخش۱,۱۹، ص. ۶۸۹] آمده است.)

فصل ۲۰

مشتق لی و ضرب درونی

برای ادامه فصول بعدی کتاب، تنها زیر بخش لازم در این فصل، زیر بخش (۴.۲۰) در مورد ضرب درونی می‌باشد. باقی بخش ها را می‌توان در مطالعهٔ نخست حذف نمود. ساختار مشتق گیری خارجی در فصل ۱۹ موضعی بوده و به انتخاب مختصات بستگی دارد. اگر $\omega = \sum a_I dx^I$، آنگاه

$$d\omega = \sum dx^j \wedge dx^I$$

که در واقع این d مستقل از انتخاب مختصات موضعی می‌باشد. در حقیقت، برای یک 1 - فرمی C^∞، ω و میدان های برداری C^∞، X, Y بر منیفلد M، فرمول زیر را داریم،

$$(d\omega)(X,Y) = X\omega(Y) - Y\omega(X) - \omega\left(\left[X,Y\right]\right).$$

در این بخش می‌خواهیم یک فرمول ذاتی و فراگیر (سرتاسری) درست مانند مشتق خارجی k - فرم ها ارائه دهیم. اثبات آن بر مبنای استفاده از دو عمل ذاتی تعریف شده بر منیفلد ها، یعنی مشتق لی و ضرب درونی استوار است. مشتق لی روشی برای مشتق گیری از یک میدان برداری یا یک فرم دیفرانسیلی روی یک منیفلد در امتداد میدان برداری دیگر می‌باشد. برای هر میدان برداری X تعریف شده بر یک منیفلد، ضرب درونی ι_X یک پاد مشتق از درجهٔ -1 روی فرم های دیفرانسیلی است. همان طوریکه می‌دانید مشتق لی و ضرب درونی دو عمل ذاتی بسیار مهم در توپولوژی دیفرانسیل و هندسه می‌باشند.

بخش ۱.۲۰ خانوادهٔ میدان های برداری و فرم های دیفرانسیلی

یک گردایه $\{X_t\}$ یا $\{\omega_t\}$ از میدان های برداری یا فرم های دیفرانسیلی تعریف شده بر یک منیفلد را یک خانوادهٔ 1 - پارامتری نامیم، هرگاه پارامتر t روی یک زیر مجموعه از خط حقیقی تغییر کند. فرض کنید I یک فاصلهٔ باز در $\mathbb{R}$ و M یک منیفلد باشد. همچنین فرض کنید $\{X_t\}$ یک خانوادهٔ 1-پارامتری از میدان های برداری بر M تعریف شده به ازای هر $t \in I$ بجز $t_0 \in I$ باشد. گوییم حد $\lim_{t\to t_0} X_t$

موجود است، هرگاه هر نقطهٔ $p \in M$ دارای یک همسایگی مختصاتی مانند $(U, x^1, \cdots, x^n)$ باشد که $\lim_{t\to t_0} a^i(t,p)$ و $X_t|_p = \sum a^i(t,p)\partial/\partial x^i|_p$ به ازای هر i بر قرار باشند. در این حالت قرار می‌دهیم،

$$\lim_{t\to t_0} X_t\Big|_p = \sum_{i=1}^n \lim_{t\to t_0} a^i(t,p)\frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_p \tag{۱.۲۰}$$

در مسالهٔ (۱,۲۰) از خواننده می‌خواهیم که نشان دهداین تعریف حد X_t هنگامیکه $t \to t_0$ مستقل از انتخاب همسایگی مختصاتی $(U, x^1, \cdots, x^n)$ می‌باشد.

یک خانوادهٔ 1 - پارامتری $\{X_t\}_{t\in I}$ از میدان های برداری هموار بر M را بطور وابسته هموار به t نامیم، هرگاه در هر نقطهٔ M دارای یک همسایگی مختصاتی $(U, x^1, \cdots, x^n)$ به قسمی باشد که برای توابع C^∞، a^i تعریف شده بر $I \times U$،

$$(X_t)_p = \sum a^i(t,p)\frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_p, \qquad (t,p) \in I \times U. \tag{۲.۲۰}$$

در این حالت گوییم که $\{X_t\}_{t\in I}$ یک خانوادهٔ هموار از میدان های برداری بر M می‌باشد.

برای هر خانوادهٔ هموار از میدان های برداری بر M می‌توان مشتق آن را نسبت به t در $t = t_0$ بوسیلهٔ رابطهٔ زیر بیان نمود،

$$\left(\frac{d}{dt}\Big|_{t=t_0} X_t\right)_p = \sum \frac{\partial a^i}{\partial t}(t_0,p)\frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_p \tag{۳.۲۰}$$

بسادگی می‌توان تحقیق کرد که این تعریف مستقل از انتخاب چارت $(U, x^1, \cdots, x^n)$ شامل نقطهٔ p می‌باشد (مسالهٔ ۳,۲۰). واضح است که مشتق $d/dt|_{t=t_0} X_t$ یک میدان برداری هموار بر M است.

بطور مشابه، یک خانوادهٔ 1 - پارامتری $\{\omega_t\}_{t\in I}$ متشکل از k - فرم های هموار بر M را بطور وابسته هموار بر t نامیم، هرگاه هر نقطه از M دارای یک همسایگی مختصاتی مانند $(U, x^1, \cdots, x^n)$ باشد که به ازای توابع هموار، b_J بر $I \times U$ داشته باشیم،

$$(\omega_t)_p = \sum b_J\,(t,p)\,dx^J\Big|_p, \qquad (t,p) \in I \times U.$$

بعلاوه چنین خانواده $\{\omega_t\}_{t\in I}$ را خانوادهٔ k - فرم ها بر M نامیده و مشتق آن را نسبت t با رابطهٔ زیر نشان می‌دهیم،

$$\left(\frac{d}{dt}\Big|_{t=t_0} \omega_t\right)_p = \sum \frac{\partial b_J}{\partial t}\,(t_0,p)\,dx^J\Big|_p.$$

همانند میدان های برداری، این تعریف مستقل از انتخاب چارت بوده، و یک k - فرم هموار بصورت $d/dt\big|_{t=t_0}\omega_t$ بر M تعریف می‌کند. **نماد گذاری :** برای مشتق خانوادهٔ هموار از میدان های برداری یا فرم های دیفرانسیلی از نماد d/dt و برای مشتق جزئی توابع چند متغیره از نماد $\partial/\partial t$ استفاده می‌کنیم.

۲۰.۱ گزاره (قانون ضرب برای d/dt). اگر $\{\omega_t\}$ و $\{\tau_t\}$ خانواده هایی هموار به ترتیب متشکل از k - فرم ها و ℓ - فرم ها بر منیفلد M باشند، آنگاه

$$\frac{d}{dt}(\omega_t \wedge \tau_t) = \left(\frac{d}{dt}\omega_t\right) \wedge \tau_t + \omega_t \wedge \frac{d}{dt}\tau_t.$$

برهان : اگر آن را بر حسب مختصات موضعی بنویسیم، اثبات حکم به محاسبهٔ قانون ضرب در حسابان بر می‌گردد. توضیحات بیشتر آن را به خواننده واگذار می‌کنیم. (مسالهٔ ۴,۲۰). □

۲۰.۲ گزاره (جابجایی $d/dt|_{t=t_0}$ با d). اگر $\{\omega_t\}_{t\in I}$ یک خانوادهٔ هموار از فرم های دیفرانسیل بر منیفلد M باشد، آنگاه

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=t_0} d\omega_t = d\left(\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=t_0} \omega_t\right).$$

برهان : در این گزاره سه نوع عمل وجود دارد - مشتق گیری خارجی، مشتق گیری نسبت به t، و مقدار یابی آن در $t = t_0$. ابتدا نشان می‌دهیم که d با d/dt جابجا می‌شوند،

$$\frac{d}{dt}(d\omega_t) = d\left(\frac{d}{dt}\omega_t\right). \tag{۴.۲۰}$$

□

کافی است تساوی را در یک نقطهٔ دلخواه $p \in M$ تحقیق کنیم. فرض کنید $(U, x^1, \cdots, x^n)$ یک همسایگی از p چنان باشد که به ازای توابع هموار، b_J بر $I \times U$ داشته باشیم، $\omega = \sum_J b_J dx^J$. بر U،

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}(d\omega_t) &= \sum_{J,i} \frac{\partial b_J}{\partial x^i} dx^i \wedge dx^J && \text{(دقت کنیدکه هیچ جملهٔ } dt \text{ وجود ندارد)}\\
&= \sum_{i,J} \frac{\partial}{\partial x^i}\left(\frac{\partial b_J}{\partial t}\right) dx^i \wedge dx^J && \text{(چون } b_J \text{،هموار است)}\\
&= d\left(\sum_J \frac{\partial b_J}{\partial t} dx^J\right)\\
&= d\left(\frac{d}{dt}\omega_t\right).
\end{aligned}$$

آن را در نقطهٔ $t = t_0$ محاسبه نموده، چون d فقط مشتقات جزئی نسبت به متغیر های x^i می‌باشند، لذا

آن را با d نیز جابجا می‌نماییم، بطور صریح داریم،

$$\left(d\left(\frac{d}{dt}\omega_t\right)\right)\Big|_{t=t_0} = \left(\sum_{i,J}\frac{\partial}{\partial x^i}\frac{\partial}{\partial t}b_J dx^i \wedge dx^J\right)\Big|_{t=t_0}$$
$$= \sum_{i,J}\frac{\partial}{\partial x^i}\left(\frac{\partial}{\partial t}\Big|_{t=t_0} b_J\right)dx^i \wedge dx^J$$
$$= d\left(\frac{\partial}{\partial t}\Big|_{t_0}\omega_t\right).$$

با محاسبهٔ طرفین (۴,۲۰) در $t = t_0$ اثبات گزاره کامل می‌شود.

بخش ۲.۲۰ مشتق لی یک میدان برداری

در نخستین درس از حسابان، تعریف مشتق یک تابع حقیقی مقدار f بر $\mathbb{R}$ در نقطهٔ مفروض $p \in \mathbb{R}$ بصورت،

$$f'(p) = \lim_{t\to 0}\frac{f(p+t) - f(p)}{t}.$$

تعریف می‌شود. مشکلی که در تعمیم این تعریف برای مشتق میدان برداری Y روی منیفلد M وجود دارد آن است که در دو نقطهٔ نزدیک به هم مانند p و q در M، بردارهای مماس Y_p و Y_q که متعلق به دو فضای مماس متمایز T_pM و T_qM بوده، قابل تفریق از هم نمی‌باشند. یک روش برای غلبه براین مشکل استفاده از شار موضعی یک میدان برداری دیگر مانند X است که، سبب انتقال Y_q به فضای مماس T_pM در نقطهٔ p گردد. این کار ما را به تعریف مشتق لی هدایت می‌کند. با یاد آوری از زیر بخش (۳.۱۴) که برای هر میدان برداری هموار X بر M و نقطهٔ p در M، یک همسایگی از نقطهٔ P مانند U وجود دارد که میدان برداری X بر آن، واجد یک شار موضعی می‌باشد، یعنی عدد حقیقی مانند $\epsilon > 0$ و یک نگاشت

$$\varphi : (-\epsilon, \epsilon) \times U \to M,$$

به گونه ای است که، اگر قرار دهیم، $\varphi_t(q) = \varphi(t, q)$، آنگاه

$$\frac{\partial}{\partial t}\varphi_t(q) = X_{\varphi_t(q)}, \qquad \varphi_0(q) = q \quad (q \in U \text{ برای}) \tag{۵.۲۰}$$

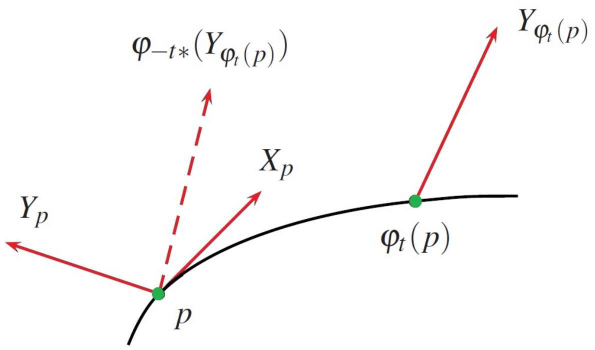
به بیان دیگر، برای هر q در U، منحنی $\varphi_t(q)$ یک منحنی انتگرال X با نقطهٔ آغازین q است. بنا به تعریف، $\varphi_0 : U \to U$ نگاشت همانی است. شار موضعی در خاصیت زیر صدق می‌کند

$$\varphi_s \circ \varphi_t = \varphi_{s+t}$$

مشروط بر اینکه طرفین رابطهٔ بالا تعریف شوند (۱۰,۱۴ را ببینید). بنابراین می‌توان نتیجه گرفت که، به ازای هر t نگاشت $\varphi_t : U \to \varphi_t(U)$ یک دیفئومورفیسم، بروی تصویر خود می‌باشد، که دارای وارون هموار، بصورت φ_{-t}، است و در روابط زیر صدق می‌کند

$$\varphi_{-t} \circ \varphi_t = \varphi_0 = \mathbf{1}, \qquad \varphi_t \circ \varphi_{-t} = \varphi_0 = \mathbf{1}$$

فرض کنید Y یک میدان برداری هموار بر M باشد. برای مقایسهٔ مقادیر Y در $\varphi_t(p)$ و در p، از دیفئومورفیسم $\varphi_{-t}: \varphi_t(U) \to U$ برای انتقال $Y_{\varphi_t(p)}$ به توی T_pM استفاده می‌کنیم. (شکل ۱,۲۰)



شکل ۱.۲۰: مقایسهٔ مقادیر Y در مجاورت نقاط

۲۰.۳ **تعریف.** برای $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$، و $p \in M$، فرض می‌کنیم که $\varphi :]-\epsilon, \epsilon[\times U \to M$ یک شار موضعی X بر یک همسایگی از نقطهٔ p مانند U باشد، مشتق لی میدان برداری Y، نسبت به میدان برداری X در نقطهٔ مفروض p برداری است که بصورت زیر تعریف می‌شود،

$$\begin{aligned}(\mathcal{L}_X Y)_p &= \lim_{t\to 0} \frac{\varphi_{-t*}\left(Y_{\varphi_t(p)}\right) - Y_p}{t} \\ &= \lim_{t\to 0} \frac{(\varphi_{-t*}Y)_p - Y_p}{t} \\ &= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} (\varphi_{-t*}Y)_p.\end{aligned}$$

در این تعریف، حد فوق در فضای برداری با بعدمتناهی T_pM گرفته شده است. برای وجود مشتق، کافی است که $\{\varphi_{-t*}Y\}$ خانواده ای هموار از میدان های برداری بر M باشد. برای نشان دادن همواری خانوادهٔ $\{\varphi_{-t*}Y\}$، آن را بر حسب مختصات موضعی $x^1, \cdots, x^n$ در یک چارت می‌نویسیم. فرض کنید φ_t^i و φ^i به ترتیب مولفه ای i ام φ_t و φ باشند. آنگاه،

$$(\varphi_t)^i(p) = \varphi^i(t,p) = (x^i \circ \varphi)(t,p).$$

بنا به گزارهٔ (۱۱,۸)، مربوط به کنج $\{\partial/\partial x^j\}$، دیفرانسیل φ_{t*} در نقطهٔ مفروض p بوسیلهٔ ماتریس ژاکوبین $\left[\partial(\varphi_t)^i/\partial x^j(p)\right] = \left[\partial\varphi^i/\partial x^j(t,p)\right]$ نمایش داده می‌شود. این یعنی

$$\varphi_{t*}\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\Big|_p\right) = \sum_i \frac{\partial \varphi^i}{\partial x^j}(t,p) \frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_{\varphi_t(p)}$$

بنابراین، اگر $Y = \sum b^j \partial/\partial x^j$، آنگاه

$$\begin{aligned}\varphi_{-t*}(Y_{\varphi_t(p)}) &= \sum_j b^j(\varphi(t,p))\varphi_{-t*}\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\Big|_{\varphi_t(p)}\right)\\ &= \sum_{i,j} b^j(\varphi(t,p))\frac{\partial \varphi^i}{\partial x^j}(-t,p)\frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_p.\end{aligned} \tag{۶.۲۰}$$

زمانیکه X و Y میدان های برداری هموار بر M باشند، آنگاه هر دو تابع φ^i و b^j توابع هموار خواهند بود. بنابراین فرمول (۶,۲۰) نیز نشان می‌دهد که $\{\varphi_{-t*}Y\}$ خانواده ای هموار از میدان های برداری بر M است. این مطلب حاکی از آن است که مشتق لی $\mathcal{L}_X Y$ موجود بوده و بر حسب مختصات موضعی بصورت زیر بیان می‌شود،

$$\begin{aligned}(\mathcal{L}_X Y)_p &= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0}\varphi_{-t*}(Y_{\varphi_t(p)})\\ &= \sum_{i,j}\frac{\partial}{\partial t}\Big|_{t=0}\left(b^j(\varphi(t,p)\frac{\partial \varphi^i}{\partial x^j}(-t,p)\right)\frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_p.\end{aligned} \tag{۷.۲۰}$$

از این مطلب بر می‌آید که مشتق لی از یک میدان برداری چیز تازه ای نمی‌دهد.

۴.۲۰ قضیه. اگر X و Y میدان های برداری هموار بر منیفلد M باشند، آنگاه مشتق لی $\mathcal{L}_X Y$ با براکت لی $[X,Y]$ برابر است.

برهان : کافی است تساوی $\mathcal{L}_X Y = [X,Y]$ را در هر نقطه تحقیق کنیم. برای این کار دو طرف را بر حسب مختصات موضعی بسط می‌دهیم. فرض کنید $\varphi :]-\epsilon,\epsilon[\times U \to M$ یک شار موضعی X و U چارت مختصاتی با مختصات $x^1,\cdots,x^n$ باشد. فرض کنید $X = \sum a^i\partial/\partial x^i$ و $Y = \sum b^j \partial/\partial x^j$ بر U تعریف شوند. شرط (۵,۲۰) که $\varphi_t(p)$ یک منحنی انتگرال از X است بصورت معادلات زیر ترجمه می‌شود،

$$\frac{\partial \varphi^i}{\partial t}(t,p) = a^i(\varphi(t,p)),\qquad i=1,\cdots,n,\qquad (t,p)\in(-\epsilon,\epsilon)\times U.$$

و در $t=0$ داریم، $\partial\varphi^i/\partial t(0,p) = a^i(\varphi(0,p)) = a^i(p)$.
حال با توجه به مسالهٔ (۱۲,۱۴)، براکت لی بر حسب مختصات موضعی عبارتست از،

$$[X,Y] = \sum_{i,k}\left(a^k\frac{\partial b^i}{\partial x^k} - b^k\frac{\partial a^i}{\partial x^k}\right)\frac{\partial}{\partial x^i}.$$

با بسط (۷.۲۰) بوسیلهٔ قانون ضرب و قانون زنجیری، می‌توان نتیجه گرفت که

$$\begin{aligned}\left(\mathcal{L}_X Y\right)_p &= \left[\sum_{i,j,k}\left(\frac{\partial b^j}{\partial x^k}(\varphi(t,p))\frac{\partial \varphi^k}{\partial t}(t,p)\frac{\partial \varphi^i}{\partial x^j}(-t,p)\right)\frac{\partial}{\partial x^i}\right.\\ &\qquad \left. - \sum_{i,j}\left(b^j(\varphi(t,p))\frac{\partial}{\partial x^j}\frac{\partial \varphi^i}{\partial t}(-t,p)\right)\frac{\partial}{\partial x^i}\right]_{t=0} \\ &= \sum_{i,j,k}\left(\frac{\partial b^j}{\partial x^k}(p)a^k(p)\frac{\partial \varphi^i}{\partial x^j}(0,p)\right)\frac{\partial}{\partial x^i} - \sum_{i,j}\left(b^j(p)\frac{\partial a^i}{\partial x^j}(p)\right)\frac{\partial}{\partial x^i}.\end{aligned} \tag{۸.۲۰}$$

چون $\varphi(0,p) = p$، φ_0نگاشت همانی بوده و بنابراین ماتریس ژاکوبین آن ماتریس همانی است. در نتیجه،

$$\frac{\partial \varphi^i}{\partial x^j}(0,p) = \delta^i_j, \qquad \text{(دلتای کرونکر)}$$

بنابراین (۸.۲۰) به صورت زیر ساده می‌شود،

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_X Y &= \sum_{i,k}\left(a^k\frac{\partial b^i}{\partial x^k} - b^k\frac{\partial a^i}{\partial x^k}\right)\frac{\partial}{\partial x^i}\\ &= \left[X,Y\right].\end{aligned}$$

□

گر چه مشتق لی یک میدان برداری مفروض چیز جدیدی نمی‌دهد، ولی تلفیق آن با مشتق لی فرم های دیفرانسیلی ابزاری توانا و مفیدی خواهد بود، برای مثال، می‌توان اثبات فرمول سرتاسری مشتق خارجی قضیهٔ (۱۴,۲۰) را مشاهده کرد.

بخش ۳.۲۰ مشتق لی یک فرم دیفرانسیلی

فرض کنید X یک میدان برداری و ω یک k − فرم هموار بر منیفلد M باشند. نقطهٔ p را ثابت نگه داشته، فرض می‌کنیم $\varphi_t : U \to M$ شار X در یک همسایگی U از نقطهٔ p باشد. تعریف مشتق لی یک فرم دیفرانسیلی مشابه تعریف آن بر میدان برداری است. تنها به جای به جلو راندن یک بردار از نقطهٔ $\varphi_t(p)$ به p توسط $(\varphi_{-t})_*$، این بار k − همبردار $\omega_{\varphi_t(p)}$ را توسط φ_t^* به نقطهٔ p به عقب می‌رانیم.

۲۰.۵ **تعریف.** برای میدان برداری هموار X و k - فرم هموار ω تعریف شده بر منیفلد M، مشتق لی[۱] $\mathcal{L}_X\omega$ در $p \in M$ عبارت است از،

$$\begin{aligned}(\mathcal{L}_X\omega)_p &:= \lim_{t\to 0}\frac{\varphi_t^*(\omega_{\varphi_t(p)})-\omega_p}{t}\\ &= \lim_{t\to 0}\frac{(\varphi_t^*\omega)_p-\omega_p}{t}\\ &= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0}(\varphi_t^*\omega)_p.\end{aligned}$$

با بحثی مشابه آن چه که برای وجود مشتق لی $\mathcal{L}_XY$ در بخش (۲,۲۰) آمد، می‌توان نشان داد که $\{\varphi_t^*\omega\}$ خانواده ای از k - فرم های هموار بر M بوده و می‌توان آن را نیز بر حسب مختصات موضعی نوشت، بنابراین وجود $(\mathcal{L}_X\omega)_p$ نتیجه می‌شود.

۲۰.۶ **گزاره.** اگر f یک تابع هموار، و X نیز یک میدان برداری هموار بر منیفلد M باشد، آنگاه $\mathcal{L}_Xf = Xf$.

برهان : فرض کنید p یک نقطهٔ ثابت در M و فرض کنید $\varphi_t : U \to M$ یک شار موضعی از میدان برداری x مانند بالا باشد. آنگاه

$$\begin{aligned}(\mathcal{L}_Xf)_p &= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0}(\varphi_t^*f)_p && (\text{تعریف } \mathcal{L}_Xf)\\ &= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0}(f\circ\varphi_t)(p) && (\text{تعریف } \varphi_t^*f)\\ &= X_pf && (\text{گزارهٔ } (۱۷,۸))\end{aligned}$$

چون $\varphi_t(p)$ یک منحنی گذرنده از p با بردار آغازین X_p است. □

بخش ۴.۲۰ ضرب درونی

ابتدا لازم است که ضرب درونی را برای یک فضای برداری مفروض تعریف نماییم. اگر β یک k - همبردار از فضای برداری V باشد و $v \in V$، برای $k \geq 0$، **ضرب درونی**[۱] **یا انقباض**[۲] β نسبت به v، یک $(k-1)$ - همبردار $\iota_v\beta$ است که بصورت زیر تعریف می‌شود،

$$(\iota_v\beta)(v_2,\cdots,v_k) := \beta(v,v_2,\cdots,v_k), \qquad v_2,\cdots,v_k \in V.$$

در اینجا لازم است که 1-همبردار β بر V، را بصورت $\iota_v\beta = \beta(v) \in \mathbb{R}$ و 0-همبردار (ثابت) β، بر V، را بصورت $\iota_v\beta = 0$ تعریف کنیم.

---

۱ Lie derivative ۱ interior multiplication ۲ contraction

۲۰.۷ گزاره. برای 1-همبردارهای $\alpha^1,\cdots,\alpha^k$ روی فضای برداری V و $v\in V$، داریم

$$\iota_v(\alpha^1\wedge\cdots\wedge\alpha^k)=\sum_{i=1}^{k}(-1)^{i-1}\alpha^i(v)\alpha^1\wedge\cdots\wedge\widehat{\alpha^i}\wedge\cdots\wedge\alpha^k.$$

که در آن علامت‌ $\widehat{}$ روی α^i بدین معنی است که α^i از حاصلضرب گوه ای حذف شده است.

اثبات:

$$\begin{aligned}
\left(\iota_v\left(\alpha^1\wedge\cdots\wedge\alpha^k\right)\right)(v_2,\cdots,v_k)&=\left(\alpha^1\wedge\cdots\wedge\alpha^k\right)(v,v_2,\cdots,v_k)\\
&=\det\begin{bmatrix}\alpha^1(v)&\alpha^1(v_2)&\cdots&\alpha^1(v_k)\\ \alpha^2(v)&\alpha^2(v_2)&\cdots&\alpha^2(v_k)\\ \vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\ \alpha^k(v)&\alpha^k(v_2)&\cdots&\alpha^k(v_k)\end{bmatrix} &&\text{گزارهٔ (۲۷,۳)}\\
&=\sum_{i=1}^{k}(-1)^{i+1}\alpha^i(v)\det[\alpha^\ell(v_j)]_{\substack{1\le\ell\le k,\ell\ne i\\ 2\le j\le k}} &&\text{(بسط نسبت به ستون اول)}\\
&=\sum_{i=1}^{k}(-1)^{i+1}\alpha^i(v)\left(\alpha^1\wedge\cdots\wedge\widehat{\alpha^i}\wedge\cdots\wedge\alpha^k\right)(v_2,\cdots,v_k) &&\text{(گزارهٔ ۲۷,۳) 2}
\end{aligned}$$

۲۰.۸ گزاره. برای هر v در یک فضای برداری مانند V، فرض کنید $\iota_v:\bigwedge^*(V^\vee)\to\bigwedge^{*^{-1}}(V^\vee)$ یک ضرب درونی در v باشد. آنگاه نشان دهید،

الف- $\iota_v\circ\iota_v=0.$

ب- برای $\beta\in\bigwedge^k(V^\vee)$ و $\gamma\in\bigwedge^\ell(V^\vee)$،

$$\iota_v(\beta\wedge\gamma)=(\iota_v\beta)\wedge\gamma+(-1)^K\beta\wedge\iota_v\gamma.$$

به بیان دیگر، ι_v یک پاد مشتق از درجهٔ -1 بوده، که مربع آن برابر صفر است.

برهان : (الف) فرض کنید $\beta\in\bigwedge^k(V^\vee)$. بنا به تعریف مشتق درونی،

$$(\iota_v(\iota_v\beta))(v_3,\cdots,v_k)=(\iota+v\beta)(v,v_3,\cdots,v_k)=\beta(v,v,v_3,\cdots,v_k)=0,$$

برای اینکه متناوب بوده β و یک عنصر منانند v در آرگومان آن تکرار شده است. (ب) چون طرفین معادله نسبت به β و α خطی است،می‌توان فرض کرد که،

$$\beta=\alpha^1\wedge\cdots\wedge\alpha^k,\qquad \gamma=\alpha^{k+1}\wedge\cdots\wedge\alpha^{k+\ell},$$

که در آن α^i همگی1-همبردار می‌باشند. حال داریم

$$\begin{aligned}\iota_v(\beta\wedge\gamma) &= \iota_v(\alpha^1\wedge\cdots\wedge\alpha^{k+\ell})\\ &= \left(\sum_{i=1}^{k}(-1)^{i-1}\alpha^i(v)\alpha^1\wedge\cdots\wedge\widehat{\alpha^i}\wedge\cdots\wedge\alpha^k\right)\wedge\alpha^{k+1}\wedge\cdots\wedge\alpha^{k+\ell}\\ &\quad +(-1)^k\alpha^1\wedge\cdots\wedge\alpha^k\wedge\sum_{i=1}^{k}(-1)^{i+1}\alpha^{k+i}(v)\alpha^{k+1}\wedge\cdots\wedge\widehat{\alpha^{k+i}}\wedge\cdots\wedge\alpha^{k+\ell}\\ &= (\iota_v\beta)\wedge\gamma+(-1)^k\beta\wedge\iota_v\gamma. \qquad \text{(بنا به گزارهٔ ۷,۲۰)}\end{aligned}$$

□

ضرب درونی روی منیفلد بصورت نقطه به نقطه تعریف می‌شود. اگر X یک میدان برداری هموار بر M باشد، و $\omega\in\Omega^k(M)$، آنگاه ι_X یک $(k-1)$-فرم بوده و بوسیلهٔ رابطهٔ $(\iota_X\omega)_p=\iota_{X_p}\omega_p$ به ازای هر $p\in M$ تعریف می‌شود. فرم $\iota_X(\omega)$ بر M هموار است، چون به ازای میدان های برداری هموار $X_2,\cdots,X_k$ بر M،

$$(\iota_X\omega)(X_2,\cdots,X_k)=\omega(X,X_2,\cdots,X_k)$$

یک تابع هموار است. (گزارهٔ ۷,۱۸ (پ) $\Leftarrow$ (الف)). البته، برای 1-فرمی ω، داریم $\iota_X\omega=\omega(X)$ و برای تابع f بر M، داریم $\iota_X f=0$. با توجه به خواص ضرب درونی در هر نقطهٔ $p\in M$ (گزارهٔ ۸,۲۰)، نگاشت $\iota_X:\Omega^*(M)\to\Omega^*(M)$ یک پاد مشتق از درجهٔ -1 است که $\iota_X\circ\iota_X=0$.

فرض کنید $\mathcal{F}$ یک حلقهٔ $C^\infty(M)$ متشکل از توابع هموار برمنیفلد M باشد. چون $\iota_X\omega$ یک عملگر نقطه ای است - یعنی، مقدار آن در p تنها به X_p و ω_p بستگی دارد - در واقع از منظر دیگر یک $\mathcal{F}$-خطی است. از این مطلب نتیجه می‌شود که $\iota_X\omega$ نسبت به هر یک از آرگومان های خود جمعی بوده و بعلاوه به ازای هر $f\in\mathcal{F}$،

الف- $\iota_{fX}\omega=f\iota_X\omega$.

ب- $\iota_X(f\omega)=f\iota_X\omega$.

اثباتی سر راست برای (الف) در زیر می‌آوریم. برای هر $p\in M$، داریم

$$(\iota_{fX}\omega)_p=\iota_{f(p)X_p}\omega_p=(f\iota_X\omega)_p.$$

در نتیجه، $\iota_{fX}\omega=f\iota_X\omega$. اثبات (ب) مشابه (الف) است. اثبات خاصیت جمعی کم و بیش آشکار و بدیهی است.

۲۰.۴.۱ مثال (ضرب درونی بر $\mathbb{R}^2$) فرض کنید $X=x\partial/\partial x+y\partial/\partial y$ یک میدان برداری رادیال، و $\alpha=dx\wedge dy$ مساحت 2-فرمی بر صفحهٔ $\mathbb{R}^2$ باشد. انقباض $\iota_X\alpha$ را محاسبه کنید. △

حل: ابتدا $\iota_X dx$ و $\iota_X dy$ را حساب می‌کنیم.

$$\iota_X dx = dx(X) = dx\left(x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}\right) = x,\qquad \iota_X dy = dy(X) = dy\left(x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}\right) = y.$$

حال با توجه به خاصیت پادمشتق ι_X، داریم

$$\begin{aligned}\iota_X\alpha &= \iota_X(dx\wedge dy)\\ &= (\iota_X dx)dy - dx(\iota_X dy)\\ &= xdy-ydx,\end{aligned}$$

که به 1-فرمی ω همه جا ناصفر بر دایرهٔ $\mathbb{S}^1$در مثال (۱۵,۱۷) محدود می‌شود.

بخش ۵.۲۰ خواص مشتق لی

در این بخش چند خاصیت اساسی مشتق لی بیان و اثبات می‌شود. همچنین رابطهٔ مشتق لی را با دو عملگر ذاتی بر فرم های دیفرانسیل و بر منیفلد، یعنی مشتق خارجی و ضرب درونی بیان می‌شود. رابطهٔ فی ما بین این سه عملگر نتیجهٔ فرمول های جالبی است که در پیش می‌آید.

۲۰.۹ قضیه. فرض کنید X یک میدان برداری هموار بر منیفلد M باشد.

الف- مشتق لی $\mathcal{L}_X:\Omega^*(M)\to\Omega^*(M)$ یک مشتق است، یعنی یک نگاشت $\mathbb{R}$-خطی است و اگر $\omega\in\Omega^k(M)$ و $\tau\in\Omega^\ell(M)$، آنگاه

$$\mathcal{L}_X(\omega\wedge\tau)=(\mathcal{L}_X\omega)\wedge\tau+\omega\wedge(\mathcal{L}_X\tau).$$

ب- مشتق لی $\mathcal{L}$ با مشتق خارجی d جابجا می‌شود.

پ- (فرمول هموتوپی کارتان) $\mathcal{L}_X = d\iota_X+\iota_X d$.

ت- (فرمول حاصلضرب) برای $\omega\in\Omega^k(M)$ و $Y_1,\cdots,Y_k\in\mathfrak{X}(M)$،

$$\mathcal{L}_X(\omega(Y_1,\cdots,Y_k))=(\mathcal{L}_X\omega)(Y_1,\cdots,Y_k)+\sum_{i=1}^k\omega(Y_1,\cdots,\mathcal{L}_XY_i,\cdots,Y_k).$$

برهان : برای اثبات فرض می‌کنیم $p\in M$ و نیز $\varphi_t:U\to M$ شار موضعی، میدان برداری X در همسایگی U از p باشد.

(الف) چون مشتق لی $\mathcal{L}_X$ به ازای تابع برداری مقدار t برابر d/dt است، خاصیت مشتق $\mathcal{L}$ دقیقا همان خاصیت ضرب d/dt می‌باشد (گزارهٔ ۱,۲۰). بطور دقیقتر

$$\begin{aligned}(\mathcal{L}_X(\omega\wedge\tau))_p &= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0}(\varphi_t^*(\omega\wedge\tau))_p\\ &= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0}(\varphi_t^*\omega)_p\wedge(\varphi_t^*\tau)_p\\ &= \left(\frac{d}{dt}\Big|_{t=0}(\varphi_t^*\omega)_p\right)\wedge\tau_p+\omega_p\wedge\frac{d}{dt}\Big|_{t=0}(\varphi_t^*\tau)_p \qquad (\text{قانون ضرب } d/dt)\\ &= (\mathcal{L}_X\omega)_p\wedge\tau_p+\omega_p\wedge(\mathcal{L}_X\tau)_p.\end{aligned}$$

(ب)

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_Xd\omega &= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0}\varphi_t^*d\omega && (\text{تعریف } \mathcal{L}_X)\\ &= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0}d\varphi_t^*\omega && (\text{جابجایی } d \text{ با پول بک})\\ &= d\left(\frac{d}{dt}\Big|_{t=0}\varphi_t^*\omega\right) && (\text{بنا به گزارهٔ ۲,۲۰})\\ &= d\mathcal{L}_X\omega.\end{aligned}$$

(پ) لازم است در ابتدا دو مطلب را بیان نموده تا مساله به حالت ساده تری تبدیل گردد. نخست، برای هر $\omega\in\Omega^k(M)$، تساوی $\mathcal{L}_X\omega=(d\iota_X+\iota_Xd)\omega$ را ثابت کنیم، برای اثبات آن کافی است که حکم را به ازای هر p تحقیق کنیم، که تبدیل به یک مسالهٔ موضعی می‌شود. در همسایگی مختصاتی $(U,x^1,\cdots,x^n)$ حول نقطهٔ مفروض p، می‌توان با توجه به خاصیت خطی نتیجه گرفت که ω برابر است با $\omega=s\,dx^{i_1}\wedge\cdots\wedge dx^{i_k}$.

دوم آن که، در طرف چپ فرمول هموتوپی کارتان و با استفاده از (الف) و (ب) می‌توان نتیجه گرفت که $\mathcal{L}_X$ یک مشتق بوده و با d جابجا می‌شود. در طرف راست، چون d و ι_X هر دو پاد مشتق هستند، با توجه به مسالهٔ (۷,۴)، $d\iota_X+\iota_Xd$ نیز یک مشتق است. واضح است که با d جابجا می‌شود. بنابراین نتیجه می‌گیریم که، طرفین فرمول هموتوپی کارتان مشتق بوده و لذا با d جابجا می‌شوند. اگر فرمول برای فرم های دیفرانسیلی ω و τ نیز برقرار باشد، آنگاه می‌توان نتیجه گرفت که این حکم نیز برای حاصلضرب گوه ای $\omega\wedge\tau$ و همچنین $d\omega$ بر قرار است. این دو مطلب باعث می‌گردد که تحقیق در مورد درستی (پ) تنها موکول به درستی رابطهٔ زیر گردد،

$$\mathcal{L}_Xf=(d\iota_x+\iota_Xd)f,\qquad \text{برای } f\in C^\infty(U)$$

که به سادگی می‌توان آن را نتیجه گرفت،

$$\begin{aligned}(d\iota_X + \iota_X d)f &= \iota_X df && (\text{چون } \iota_X f = 0)\\ &= (df)(X) && (\text{تعریف } \iota_X)\\ &= Xf \\ &= \mathcal{L}_X f && (\text{گزارهٔ ۶,۲۰})\end{aligned}$$

(ت) با وجود اینکه در فرمول $\omega(Y_1, \cdots, Y_k)$ ضربی انجام نمی‌گیرد، ولی ترجیح می‌دهیم که نام آن را فرمول ضرب بگذاریم، علت این نام‌گذاری آن است که درست خاصیت عمل ضرب در این تساوی تداعی می‌شود. حتی باید اقرار کرد که اثبات ان شبیه فرمول ضرب در حسابان است. برای اثبات، فرض کنید $k = 2$. فرض کنید $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ و $\omega \in \Omega^2(M)$. اثبات به نظر مشکل می‌آید، اما ایدهٔ آن کاملا ساده است. برای مقایسهٔ مقدار $\omega(Y, Z)$ در دو نقطهٔ $\varphi_t(p)$ و p ، مقدار آن را در p از مقدار آن در $\varphi_t(p)$ کم می‌کنیم. نکتهٔ جالب و برجستهٔ این روش آن است که جملات را جمع و تفریق نموده و در نتیجه هر بار تنها یکی از سه متغیر ω، Y و Z از یک نقطه به نقطهٔ دیگر می‌روند. با توجه به تعریف مشتق لی و پول بک تابع داریم

$$(\mathcal{L}_X(\omega(Y,Z)))_p = \lim_{t\to 0} \frac{(\varphi_t^*(\omega(Y,Z)))_p - (\omega(Y,Z))_p}{t}$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{\omega_{\varphi_t(p)}(Y_{\varphi_t(p)}, Z_{\varphi_t(p)}) - \omega_p(Y_p, Z_p)}{t}$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{\omega_{\varphi_t(p)}(Y_{\varphi_t(p)}, Z_{\varphi_t(p)}) - \omega_p(\varphi_{-t*}(Y_{\varphi_t(p)}), \varphi_{-t*}(Z_{\varphi_t(p)}))}{t} \qquad (۹.۲۰)$$

$$+ \lim_{t\to 0} \frac{\omega_p(\varphi_{-t*}(Y_{\varphi_t(p)}), \varphi_{-t*}(Z_{\varphi_t(p)}) - \omega_p(Y_p, \varphi_{-t^*}(Z_{\varphi_t(p)}))}{t} \qquad (۱۰.۲۰)$$

$$+ \lim_{t\to 0} \frac{\omega_p(Y_p, \varphi_{-t^*}(Z_{\varphi_t(p)})) - \omega_p(Y_p, Z_p)}{t} \qquad (۱۱.۲۰)$$

در این جمع خارج قسمت اولین حد (۹,۲۰) عبارتست از

$$\frac{(\varphi_t^*\omega_{\varphi_t(p)})(\varphi_{-t^*}(Y_{\varphi_t(p)}), \varphi_{-t^*}(Z_{\varphi_t(p)}) - \omega_p(\varphi_{-t^*}(Y_{\varphi_t(p)}), \varphi_{-t^*}(Z_{\varphi_t(p)}))}{t} =$$

$$= \frac{\varphi_t^*(\omega_{\varphi_t(p)}) - \omega_p}{t}(\varphi_{-t^*}(Y_{\varphi_t(p)}), \varphi_{-t^*}(Z_{\varphi_t(p)}))$$

طرف راست این تساوی یعنی تفاضل خارج قسمت در $t=0$ دارای حد بوده که همان مشتق لی $(\mathcal{L}_X\omega)_p$ است. بنا به (۶٫۲۰) دو آرگومان تفاضل خارج قسمت، توابع هموار در t می‌باشند. بنابراین، طرف راست تابعی پیوسته از t است و حد آن هنگامیکه t به 0 میل می‌کند برابر $(\mathcal{L}_X\omega)_p(Y_p,Z_p)$ خواهد بود. (مسالهٔ (۲٫۲۰)).

چون ω_p دو خطی است، دومین جملهٔ (۱۰٫۲۰) عبارتست از،

$$\lim_{t\to 0}\omega_p\left(\frac{\varphi_{-t^*}(Y_{\varphi_t(p)})-Y_p}{t},\varphi_{-t^*}(Z_{\varphi_t(p)})\right)=\omega_p((\mathcal{L}_XY)_p,Z_p)$$

مشابها، سومین جملهٔ (۱۱٫۲۰) عبارتست از $\omega_p(Y_p,(\mathcal{L}_XZ)_p)$. در نتیجه

$$\mathcal{L}_X(\omega(Y,Z))=(\mathcal{L}_X\omega)(Y,Z)+\omega(\mathcal{L}_XY,Z)+\omega(Y,\mathcal{L}_XZ).$$

حالت کلی نیز بطور مشابه اثبات می‌شود. □

۲۰.۱۰ **یادداشت.** بر خلاف ضرب درونی، مشتق لی $\mathcal{L}_X\omega$ نسبت به تک تک آرگومان ها $\mathcal{F}$-خطی نمی‌باشد. بنا به خاصیت مشتق لی (قضیهٔ ۱۰٫۲۰ (الف))،

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_X(f\omega) &= (\mathcal{L}_Xf)\omega+f\mathcal{L}_X\omega\\ &= (Xf)\omega+f\mathcal{L}_X\omega.\end{aligned}$$

بسط $\mathcal{L}_{fX}\omega$ را بعنوان تمرین به خواننده واگذار می‌کنیم(مسالهٔ ۷٫۲۰).

از قضیهٔ (۱۰٫۲۰) می‌توان برای محاسبهٔ مشتق لی یک فرم دیفرانسیلی استفاده کرد.

۲۰.۱۱ **مثال (مشتق لی بر یک دایره).** فرض کنید ω یک1-فرمی بصورت $-ydx+xdy$ و X میدان برداری مماس $-y\partial/\partial x+x\partial/\partial y$-روی دایره واحد $\mathbb{S}^1$ مانند مسالهٔ (۱۵٫۱۷) باشد. مشتق لی $\mathcal{L}_X\omega$ را بیابید. **حل:** بنا به گزارهٔ (۶٫۲۰)،

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_X(x)&=Xx\\ &=\left(-y\frac{\partial}{\partial x}+x\frac{\partial}{\partial y}\right)x\\ &=-y\end{aligned}\qquad\qquad\begin{aligned}\mathcal{L}_X(y)&=Xy\\ &=\left(-y\frac{\partial}{\partial x}+x\frac{\partial}{\partial y}\right)y\\ &=x\end{aligned}$$

حال $\mathcal{L}_X(-ydx)$ را محاسبه می‌کنیم،

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_X(-ydx)&=-(\mathcal{L}_Xy)dx-y\mathcal{L}_Xdx && (\text{یک مشتق است } \mathcal{L}_X)\\ &=-(\mathcal{L}_Xy)dx-yd\mathcal{L}_Xx && (d \text{ با } \mathcal{L}_X \text{ جابجا می‌شود})\\ &=-xdy+ydx.\end{aligned}$$

مشابها، $\mathcal{L}_X(xdy)=-ydy+xdx$. در نتیجه، $\mathcal{L}_X\omega=\mathcal{L}_X(-ydx+xdy)=0$.

بخش ۶.۲۰ فرمول سرتاسری برای مشتق لی و مشتق خارجی

تعریف مشتق لی $\mathcal{L}_X\omega$ موضعی است، زیرا زمانی معنا پیدا می‌کند که در همسایگی یک نقطه تعریف شود. با وجود اینکه فرمول ضرب از قضیهٔ (۲۰,۱۰)(ت)، یک فرمول سرتاسری برای مشتق لی ارائه می‌دهد.

۲۰.۱۲ قضیه (فرمول سرتاسری برای مشتق لی). برای یک k-فرم هموار مانند ω و میدان های برداری هموار $X, Y_1, \cdots, Y_k$ بر یک منیفلد،

$$(\mathcal{L}_X\omega)(Y_1,\cdots,Y_k) = X(\omega(Y_1,\cdots,Y_k)) - \sum_{i=1}^{k}\omega(Y_1,\cdots,[X,Y_i],\cdots,Y_k).$$

برهان : در قضیهٔ (۲۰,۱۰)(ت)، $\mathcal{L}_X(\omega(Y_1,\cdots,Y_k)) = X(\omega(Y_1,\cdots,Y_k))$ و بنا به گزارهٔ (۶,۲۰)، و $\mathcal{L}_XY_i = [X,Y_i]$ و بنا به قضیهٔ (۴,۲۰). □

تعریف مشتق خارجی d نیز موضعی است. با استفاده از مشتق لی یک فرمول سرتاسری مفید برای مشتق خارجی بدست می‌آوریم. ابتدا فرمولی سرتاسری برای مشتق خارجی 1-فرمی ارائه داده، که این حالت کاربرد بیشتری در هندسهٔ دیفرانسیل دارد.

۲۰.۱۳ گزاره. اگر ω یک 1-فرمی و X و Y میدان های برداری هموار بر منیفلد M باشند، آنگاه

$$d\omega(X,Y) = X\omega(Y) - Y\omega(X) - \omega([X,Y]).$$

برهان : کافی است که درستی فرمول را بر یک چارت $(U, x^1,\cdots,x^n)$، تحقیق کنیم. بنابراین می‌توان فرض اضافی $\omega = \sum a_i dx^i$ را داشت. چون طرفین معادله نسبت به ω، $\mathbb{R}$-خطی اند، می‌توان فرض کرد که $\omega = fdg$، در آن $f,g \in C^\infty(U)$.

در این حالت، $d\omega = d(fdg) = df\wedge dg$ و

$$\begin{aligned} d\omega(X,Y) &= df(X)dg(Y) \\ &= df(Y)dg(X) \\ &= (Xf)Yg - (Yf)Xg, \end{aligned} \qquad \begin{aligned} X\omega(Y) &= X(fdg(Y)) \\ &= X(fYg) \\ &= (Xf)Yg + fXYg, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Y\omega(X) &= Y(fdg(X)) \\ &= Y(fXg) \\ &= (Yf)Xg + fYXg, \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \omega([X,Y]) &= fdg([X,Y]) \\ &= f(XY-YX)g. \end{aligned}$$

که نتیجه می‌شود،

$$\begin{aligned} X\omega(Y) - Y\omega(X) - \omega([X,Y]) &= (Xf)Yg - (Yf)Xg \\ &= d\omega(X,Y). \end{aligned} \tag{۱۲.۲۰}$$

□

۲۰.۱۴ قضیه (فرمول سرتاسری برای مشتق خارجی). فرض کنید $k \geq 1$. برای یک k- فرم ω و میدان های برداری $Y_0, Y_1, \cdots, Y_k$ بر یک منیفلد M،

$$(d\omega)(Y_0, \cdots, Y_k) = \sum_{i=0}^{k}(-1)^i Y_i \omega(Y_0, \cdots, \widehat{Y_i}, \cdots, Y_k) + \sum_{o \leq i \leq j \leq k} (-1)^{i+j}\omega([Y_i, Y_j], Y_0, \cdots, \widehat{Y_i}, \cdots, \widehat{Y_j}, \cdots, Y_k).$$

برهان : وقتیکه $k = 1$، فرمول فوق مطابق گزارهٔ (۱۳,۲۰) ثابت می‌شود.
فرض می‌کنیم که حکم برای فرم هایی با درجهٔ $k - 1$ بر قرار باشد، می‌خواهیم به استقرا حکم را برای فرم هایی با درجهٔ k ثابت کنیم. بنا به تعریف ι_{Y_0} و فرمول هموتوپی کارتان (قضیهٔ ۱۰,۲۰ (پ))،

$$(d\omega)(Y_0, Y_1, \cdots, Y_k) = (\iota_{Y_0} d\omega)(Y_1, \cdots, Y_k) = (\mathcal{L}_{Y_0}\omega)(Y_1, \cdots, Y_k) - (d\iota_{Y_0}\omega)(Y_1, \cdots, Y_k).$$

اولین جمله این عبارت را به کمک فرمول سرتاسری مشتق لی $\mathcal{L}_{Y_0}\omega$ و دومین جمله را می‌توان به کمک فرمول سرتاسری d از یک فرم با درجهٔ $k - 1$ ثابت نمود. این روش مفیدی است که بررسی آن را به خواننده واگذار می‌کنیم.(مسالهٔ ۶,۲۰). □

بخش ۷.۲۰ تمرینات

۲۰.۱ تمرین (حد یک خانواده از میدان های برداری). فرض کنید I یک فاصلهٔ باز، M یک منیفلد، و $\{X_t\}$ یک خانوادهٔ 1−پارامتری از میدان های برداری بر M تعریف شده به ازای هر $t \neq t_0 \in I$ باشد. نشان دهید که تعریف $\lim_{t \to t_0} X_t$ در (۱,۲۰)، در صورت وجود، مستقل از انتخاب چارت مختصاتی است.

۲۰.۲ تمرین (حد خانواده از میدان های برداری و فرم های دیفرانسیلی). فرض کنید I یک فاصلهٔ باز شامل 0 باشد. فرض کنید $\{\omega - t\}_{t \in I}$ و $\{Y_t\}_{t \in I}$ خانوا ده هایی 1−پارامتری به ترتیب متشکل از 1−فرم ها و میدان های برداری بر منیفلد M باشند. ثابت کنید که اگر $\lim_{t \to 0} \omega_t = \omega_0$ و $\lim_{t \to 0} \omega_t = \omega_0$، آنگاه $\lim_{t \to 0} \omega_t(Y_t) = \omega_0(Y_0)$.

۲۰.۳ *تمرین (مشتق یک خانواده هموار از میدان های برداری). نشان دهید که تعریف (۳,۲۰) از مشتق یک خانوادهٔ هموار از میدان های برداری بر M مستقل از چارت $(U, x^1, \cdots, x^n)$ شامل p می‌باشد.

۲۰.۴ تمرین (قانون ضرب برای d/dt). ثابت کنید که اگر $\{\omega_t\}$ و $\{\tau_t\}$ خانواده هایی هموار به ترتیب از k−فرم ها و ℓ−فرم ها بر منیفلد M باشند، آنگاه

$$\frac{d}{dt}(\omega_t \wedge \tau_t) = \left(\frac{d}{dt}\omega_t\right) \wedge \tau_t + \omega_t \wedge \frac{d}{dt}\tau_t.$$

۲۰.۵ تمرین (خانواده های هموار از میدان های برداری و فرم ها). اگر $\{\omega_t\}_{t\in I}$ یک خانوادهٔ هموار متشکل از 2-فرمی‌ها و $\{Y_t\}_{t\in I}$ و $\{Z_t\}_{t\in L}$ خانواده های هموار‌ی از میدان های برداری بر منیفلد M باشند، ثابت کنید که $\omega_t(X_t, Y_t)$ تابعی هموار بر $I\times M$ است.

۲۰.۶ تمرین (*فرمول سرتاسری برای مشتق خارجی). اثبات قضیهٔ (۱۴,۲۰) را کامل کنید.

۲۰.۷ تمرین ($\mathcal{F}$-خطی و مشتق لی). فرض کنید ω یک فرم دیفرانسیلی، X یک میدان برداری، و f یک تابع هموار بر منیفلد M باشند. مشتق لی $\mathcal{L}_X\omega$ نسبت به هیچیک از متغیر ها $\mathcal{F}$-خطی نیست، اما ثابت کنید که در رابطهٔ زیر صدق می‌کند،

$$\mathcal{L}_{fX}\omega = f\mathcal{L}_X\omega + df\wedge\iota_X\omega.$$

(راهنمایی : از فرمول هموتوپی کارتان $\mathcal{L}_X = d\iota_X + \iota_X d$ استفاده کنید)

۲۰.۸ تمرین (براکت مشتق لی و ضرب درونی). اگر X و Y میدان های برداری هموار بر منیفلد M باشند، ثابت کنید که بر فرم های دیفرانسیلی بر M،

$$\mathcal{L}_X\iota_Y - \iota_Y\mathcal{L}_X = \iota_{[X,Y]}.$$

(راهنمایی : فرض کنید $\omega\in\Omega^k(M)$ و $Y, Y_1, \cdots, Y_{k-1}\in\mathfrak{X}(M)$. از فرمول سرتاسری برای $\mathcal{L}_X$ در

$$(\iota_Y\mathcal{L}_X\omega)(Y_1,\cdots,Y_{k-1}) = (\mathcal{L}_X\omega)(Y, Y_1,\cdots,Y_{k-1})$$

استفاده کنید.

۲۰.۹ تمرین (ضرب درونی بر $\mathbb{R}^n$). فرض کنید $\omega = dx^1\wedge\cdots\wedge dx^n$ فرم حجمی و $X=\sum x^i\partial/\partial x^i$ یک میدان برداری شعاعی بر $\mathbb{R}^n$ باشند. انقباض $\iota_X\omega$ را حساب کنید.

۲۰.۱۰ تمرین (مشتق لی بر 2-کره). فرض کنید $\omega = x dy\wedge dz - y dx\wedge dy + z dx\wedge dy$ و همچنین $X = -y\partial/\partial x + x\partial/\partial y$ بر 2-کرهٔ واحد $\mathbb{S}^2$ در $\mathbb{R}^3$ باشد. مشتق لی $\mathcal{L}_X\omega$ را حساب کنید.

فصل ۲۱

جهتدهی

بر منیفلدها اغلب از فرم دیفرانسیلی انتگرال گرفته می‌شود، نه مانند در حسابان بر $\mathbb{R}^n$ که از تابع انتگرال می‌گرفتیم. عملا دو نظریه برای انتگرالگیری بر منیفلدها وجود دارد، یکی انتگرالگیری بر یک زیرمنیفلد، و دیگری انتگرالگیری بر چیزی که ما آن را زنجیره تکین می‌نامیم. ایده زنجیره تکین امکان انتگرالگیری بر چیزهایی شبیه به یک مستطیل بسته در $\mathbb{R}^2$ را فراهم می‌سازد:

$$[a,b]\times[c,d] := \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,|\, a\le x\le b,\, c\le y\le d\}.$$

البته، این یک زیرمنیفلد $\mathbb{R}^2$ نیست، چرا که گوشه دارد!

به جهت سهولت در بحث، تنها انتگرالگیری از فرمهای دیفرانسیلی هموار بر زیرمنیفلدها را مورد مطالعه قرار می‌دهیم. خواننده جهت مطالعه انتگرالگیری از فرمهای غیر پیوسته روی مجموعه‌های کلی‌تر، به بخش VI.۲ از [۳]، بخش ۸٫۲ از [۷] و یا فصل ۱۴ از [۲۵] می‌توان مراجعه نماید.

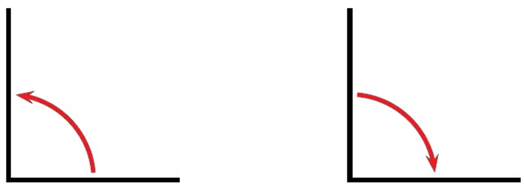
برای اینکه انتگرالگیری بر منیفلد با معنی باشد، لازم است منیفلد جهتدار باشد. بر این ساس، در آغاز به معرفی مفهوم جهت بر منیفلد می‌پردازیم. در ادامه به گسترش کاتگوری منیفلدها به یک کاتگوری بزرگتر، که در آن مرز منیفلد پذیرفته می‌شود، می‌پردازیم. یکی از اهداف اصلی این بحث، آن است که در نهایت بتوانیم قضیه استوکس برای منیفلدهای $n-$بعدی مطرح کنیم. قضیه استوکس برای سطوح مرزدار در $\mathbb{R}^3$ اول بار در غالب مسابقه جایزه اسمیت در دانشگاه کمبریج در سال ۱۲۳۳ شمسی مطرح گردید. مشخص نیست که دانشجویی موفق به حل آن شد یا خیر. بر اساس صفحه ۲۱ از [۱۵۰]، این قضیه چهار سال قبل در نامه‌ای از لرد کلوین به استوکس ظاهر شده بود، و این خود مبین مشکل تعیین اصالت مطالب ریاضی است. قضیه استوکس برای منیفلد دلخواه، نتیجه کار مشترک ریاضیدانان بود، نظیر ویتو ولترا (۱۲۶۸)، هانری پوانکاره (۱۲۶۹)، ادوارد گورسا (۱۲۹۶)، و الی کارتان (۱۲۷۸ و ۱۳۰۱). در ابتدا، حالتهای خاص فراوانی وجود داشت، آنگاه بیانی کلی بر اساس دستگاه مختصات بیان شد، و دست آخر بیانی کلی بر اساس فرمهای دیفرانسیلی ارائه گردید. کارتان را می‌توان پیشرو اصلی در نظریه فرمهای دیفرانسیلی دانست، چرا که او عملا توانست فرمولی تمیز از قضیه استوکس بر اساس فرمهای دیفرانسیلی ارائه دهد.

همه می‌دانند که انتگرال خط و انتگرال سطح که در حسابان (ریاضی ۲) مطرح می‌گردند، عملا برای منحنی و یا رویه جهتدار قابل تعریف می‌باشند: با تعویض جهت، علامت انتگرال تغییر خواهد نمود. هدف از این فصل، تعریف جهت برای یک منیفلد n−بعدی و بیان انواع روشهای معرفی جهت بر آن می‌باشد.
فرض بر این است که همه فضاهای برداری مورد استفاده در این فصل، با بعد متناهی هستند. منظور از یک جهت بر یک فضای برداری با بعد متناهی حقیقی مفروض، مشخص نمودن یک کلاس از بین دو کلاس همارزی از پایه‌ها می‌باشد: دو پایه را در صورتی همارز گوییم که دترمینان ماتریس گذر بین آنها، مثبت باشد. به بیانی معادل، تعیین یک فرم با درجه حداکثر بر آن فضای برداری می‌تواند همین کار را برای ما انجام دهد. در ادامه ارتباط طبیعی بین این دو مفهوم مطرح خواهد شد.
منظور از جهت بر یک منیفلد مفروض، تعیین جهت برای هر یک از فضاهای مماس به نقاط مختلف آن منیفلد است، البته به گونه‌ای پیوسته! فراگیر نمودن مفهوم n−همبردار به یک منیفلد، منجر به طرح مفهوم n−فرم دیفرانسیلی می‌گردد. جهت بر منیفلد را با مشخص نمودن یک کلاس همارزی از n−فرمهای هموار همه جا ناصفر می‌توان معرفی نمود: دو چنین فرمی را همارز گوییم هرگاه یکی مضرب مثبتی از دیگری باشد. سرانجام، راه سومی برای بیان جهت بر یک منیفلد وجود دارد، یعنی معرفی یک اطلس جهتدار بر آن منیفلد، یعنی اطلسی که دترمینان ژاکوبی تبدیل هر یک از توابع گذر بین چارتهای مختلفش، در همه نقاط مثبت هستند.

بخش ۱.۲۱ جهت بر فضای برداری

منظور از جهت بر $\mathbb{R}^1$، انتخاب یکی از دو جهت «راست به چپ» و یا «چپ به راست» است (به شکل ۲.۲۱ توجه شود).
منظور از جهت بر $\mathbb{R}^2$، انتخاب یکی از دو جهت «ساعتگرد[۱]»، یعنی دوران در جهت عقربه‌های ساعت» و یا «پادساعتگرد[۲]، یعنی دوران در جهت عکس عقربه‌های ساعت» است (به شکل ۲.۲۱ توجه شود).

شکل ۱.۲۱: جهت بر یک خط

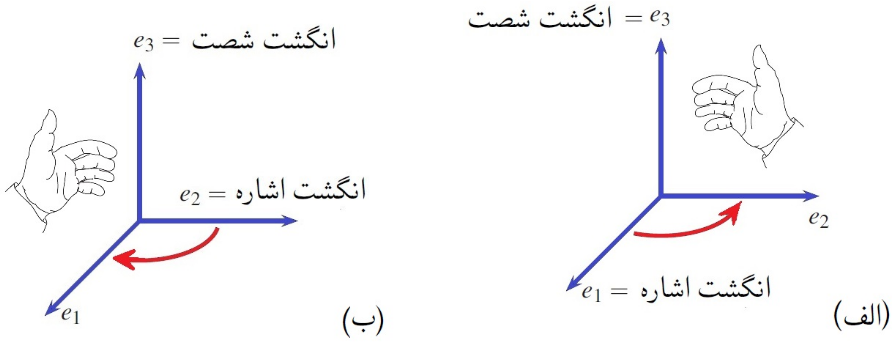


شکل ۲.۲۱: جهت بر یک صفحه

جهت بر $\mathbb{R}^3$ یا راستگرد است (به شکل ۳.۲۱ − الف توجه شود) و یا چپگرد است (به شکل ۳.۲۱ −ب توجه شود). جهت راستگرد در $\mathbb{R}^3$ در صورتی اتفاق می‌افتد که دستگاه مختصات دکارتی را طوری

[۱] clockwise [۲] counterclockwise

انتخاب کنیم که وقتی انگشت اشاره در جهت بردار e_1 در راستای x-محور را نشان دهد و بخواهیم دوران آن برداری به سمت بردار e_2 در راستای y-محور را بیان کند، آنگاه انگشت شصت برداری e_3 در راستای z-محور را نشانه رود.



شکل ۳.۲۱: الف) دستگاه مختصاتی (e_1,e_2,e_3) راستگرد ب) دستگاه مختصاتی (e_1,e_2,e_3) چپگرد

چگونه بر $\mathbb{R}^4$، $\mathbb{R}^5$ و یا بعد بالاتر از آن می‌توان جهت تعریف نمود؟ اگر سه نمونه بالا را بررسی کنیم، قادر به تعریف جهت برای $\mathbb{R}^n$ نیز خواهیم شد. گیریم $(e_1,\cdots,e_n)$ پایه استاندارد برای $\mathbb{R}^n$ باشد. جهت برای $\mathbb{R}^1$ را انتخاب e_1 و یا $-e_1$ می‌شود تعبیر نمود. جهت ساعتگرد برای $\mathbb{R}^2$ را با انتخاب (e_1,e_2) و جهت پادساعتگرد را با انتخاب (e_2,e_1) می‌شود تعبیر نمود. جهت راستگرد برای $\mathbb{R}^3$ را با انتخاب (e_1,e_2,e_3) و جهت چپگرد را با انتخاب (e_2,e_1,e_3) می‌شود تعبیر نمود.

به ازای دو پایه جهتدار (u_1,u_2) و (v_1,v_2) برای $\mathbb{R}^2$، ماتریس 2×2 نامنفردی $A=[a^i_j]$ چنان وجود دارد که

$$u_j=\sum_{i=1}^{2} v_i a^i_j, \qquad j=1,2,$$

این را اصطلاحا، ماتریس تغییر پایه[۱] از (u_1,u_2) به (v_1,v_2) می‌نامند. در نماد ماتریسی، اگر فرض شود که بردارهای در پایه‌های مرتب، سطری هستند، مثلا $[u_1,u_2]$ برای پایه اول و $[v_1,v_2]$ برای پایه دوم، آنگاه رابطه زیر برقرار است:

$$[u_1,u_2]=[v_1,v_2]A.$$

در صورتی می‌گوییم دو پایه هم‌ارزند که دترمینان ماتریس تغییر پایه A مثبت باشد. بسادگی می‌شود نشان داد که این یک رابطه هم‌ارزی بر مجموعه همه پایه‌های مرتب برای $\mathbb{R}^n$ تعریف می‌کند. این رابطه دارای دو دسته هم‌ارزی است. منظور از جهت بر $\mathbb{R}^n$، یعنی انتخاب یکی از این دو دسته هم‌ارزی. دسته هم‌ارزی شامل پایه استاندارد (e_1,e_2) را جهت ساعتگرد، و دسته هم‌ارزی دیگر (که قاعدتا شامل پایه (e_1,e_2) است) را جهت پادساعتگرد بر $\mathbb{R}^2$ می‌نامیم.

حالت کلی شبیه به همین است.

---

۱ change-of-basis matrix

۲۱.۱ **تعریف.** فرض کنید V یک فضای برداری با بعد متناهی باشد. دو پایه مرتب $u = [u_1, \cdots, u_n]$ و $v = [v_1, \cdots, v_n]$ از فضای برداری V را در صورتی هم‌ارز گوییم، و می‌نویسیم $u \sim v$، که به ازای یک ماتریس A با دترمینان مثبتی، رابطه $u = vA$ برقرار باشد. منظور از جهت برای V، انتخاب یکی از دسته‌های هم‌ارزی از پایه‌های مرتب می‌باشد. هر فضای برداری با بعد متناهی دارای دو جهت است. اگر μ را یک جهت برای فضای برداری با بعد متناهی V بدانیم، جهت دیگر را با $\mu-$ نشان داده و به آن جهت مخالف با μ می‌گوییم.

فضای برداری صفر−بعدی $\{0\}$ حالت خاصی دارد، در این مورد پایه‌ای وجود ندارد. جهت بر $\{0\}$ را به صورت انتخاب یکی از دو علامت + یا − تعریف می‌کنیم.

۲۱.۲ **قرارداد.** اغلب برای نمایش پایه برای یک فضای برداری، اعضاء آن را به راحتی فهرست می‌کنیم، نظیر $v_1, \cdots, v_n$، و از پرانتز و یا کروشه در دو سوی آن استفاده نمی‌کنیم. در مورد پایه‌های مرتب از پرانتز در دو سوی آن استفاده می‌کنیم: $(v_1, \cdots, v_n)$. همچنین، در نماد ماتریسی، پایه‌ها را به صورت بردار سطری معرفی می‌کنیم: $[v_1, \cdots, v_n]$. به این ترتیب، جهت به معنی یک دسته هم‌ارزی از پایه‌های مرتب است، و لذا از نماد $[(v_1, \cdots, v_n)]$ برای نشان دادن آن استفاده می‌کنیم، که براکت در این صورت به معنی همدسته است.

بخش ۲.۲۱ جهت و n−همبردار

در بسیاری از موارد، بجای استفاده از پایه مرتب برای مشخص نمودن جهت بر یک فضای برداری n−بعدی V، از n−همبردار نیز استفاده می‌گردد. این روش بر این اساس استوار است که فضای $\wedge^n(V^*)$ همه n−همبردارهای بر V یک−بعدی است.

۲۱.۳ **لم.** گیریم $u_1, \cdots, u_n$ و $v_1, \cdots, v_n$ بردارهایی در فضای برداری V باشند. فرض کنید

$$u_j = \sum_{i=1}^{n} v_i a^i_j, \qquad j = 1, \cdots, n,$$

که $A = [a^i_j]$ ماتریسی از اعداد حقیقی است. اگر β یک n−همبردار بر V باشد، آنگاه

$$\beta(u_1, \cdots, u_n) = (\det A)\beta(v_1, \cdots, v_n).$$

برهان : بنا به فرض $u_j = \sum_{i=1}^{n} v_i a^i_j$، چون β نگاشتی n−خطی است، در نتیجه

$$\begin{aligned} \beta(u_1, \cdots, u_n) &= \beta\Big(\sum_{i=1}^{n} v_i a^{i_1}_1, \cdots, \sum_{i=1}^{n} v_i a^{i_n}_n\Big) \\ &= \sum_{i=1}^{n} a^{i_1}_1 \cdots a^{i_n}_n \beta(v_{i_1}, \cdots, v_{i_n}). \end{aligned}$$

برای اینکه $\beta(v_{i_1},\cdots,v_{i_n})$ مخالف صفر باشد، لازم است همه اندیسهای $i_1,\cdots,i_n$ متفاوت باشند. هر n−تایی مرتب $I=(i_1,\cdots,i_n)$ با درایه‌های متفاوت، با یک جایگشت σ_I از اعداد $1,\cdots,n$ متناظر است: $\sigma_I(j)=i_j$ برای $j=1,\cdots,n$. چون β یک n−تانسور نوسانی است، پس

$$\beta(v_{i_1},\cdots,v_{i_n})=(\operatorname{sgn}\sigma_I)\beta(v_1,\cdots,v_n).$$

بنابراین

$$\begin{aligned}\beta(u_1,\cdots,u_n) &= \sum_{\sigma_I\in S_n} a_1^{i_1}\cdots a_n^{i_n}\beta(v_{i_1},\cdots,v_{i_n})\\ &= (\det A)\beta(v_1,\cdots,v_n),\end{aligned}$$

و به این ترتیب، برهان تمام است. □

پس در مجموع، در حالت پایه‌های مرتب، اثبات شده است که:

۲۱.۴ نتیجه. گیریم $u_1,\cdots,u_n$ و $v_1,\cdots,v_n$ پایه‌هایی مرتب برای فضای برداری V باشند، در این صورت احکام زیر معادلند:

(۱) $\beta(u_1,\cdots,u_n)$ و $\beta(v_1,\cdots,v_n)$ هم علامتند،

(۲) $0<\det A$،

(۳) پایه‌های مرتب $(u_1,\cdots,u_n)$ و $(v_1,\cdots,v_n)$ هم‌ارزند.

در صورتی می‌گوییم n−همبردار β جهت $(v_1,\cdots,v_n)$ را مشخص می‌کند که $0<\beta(v_1,\cdots,v_n)$. بنابه نتیجه قبل، این مفهوم خوشتعریف است، یعنی به انتخاب پایه مرتب از جهت مورد نظر بستگی ندارد. بعلاوه، دو n−بردار β و β' بر V وقتی و تنها وقتی یک جهت را مشخص می‌کنند که $\beta=a\beta'$، برای یک عدد مثبت a. بر این اساس، رابطه‌ی هم‌ارزی زیر را در بین n−همبرداری غیر صفر بر فضای برداری n−بعدی دلخواه V تعریف می‌کنیم:

$$\beta\sim\beta' \quad\Leftrightarrow\quad \beta=a\beta' \text{ برای یک } 0<a \text{ ای}$$

بنابراین،

۲۱.۵ نتیجه. بجای معرفی جهت برای V با استفاده از یک دسته هم‌ارزی از پایه‌های مرتب، به صورت معادل می‌توان یک n−همبردار بر V را معرفی نمود.

با استفاده از ایزومورفیسم خطی $\bigwedge^n(V^*)\simeq\mathbb{R}$، مجموعه n−بردارهای ناصفر بر V را با $\mathbb{R}-\{0\}$ می‌شود یکی گرفت، که دارای دو مولفه همبندی است. دو n−همبردار غیر صفر β و β' وقتی و تنها وقتی در یک مولفه قرار می‌گیرند که به ازای یک عدد مثبت a ای $\beta=a\beta'$. بنابراین، هر مولفه از $\bigwedge^n(V^*)-\{0\}$ یک جهت بر V را مشخص می‌نماید.

۲۱.۶ **نتیجه.** بجای معرفی جهت برای V با استفاده از یک دسته هم‌ارزی از پایه‌های مرتب، به صورت معادل می‌توان یکی از دو مولفه $\bigwedge^n(V^*) - \{0\}$ را مشخص نمود.

۲۱.۷ **مثال.** گیریم e_1, e_2 پایه استاندارد برای $\mathbb{R}^2$ بوده و α_1, α_2 پایه دوگان آن باشد. در این صورت، 2−همبردار $\alpha^1 \wedge \alpha^2$ جهت پادساعتگرد بر $\mathbb{R}^2$ را معرفی می‌کند، زیرا

$$(\alpha^1 \wedge \alpha^2)(e_1, e_2) = 1 > 0.$$

۲۱.۸ **مثال.** گیریم $\partial/\partial x|_p, \partial/\partial y|_p$ پایه استاندارد برای $T_p\mathbb{R}^2$ بوده و $(dx)_p, (dy)_p$ پایه دوگان آن باشد. در این صورت، 2−همبردار $(dx \wedge dy)_p$ جهت پادساعتگرد بر $T_p(\mathbb{R}^2)$ را معرفی می‌کند.

بخش ۳.۲۱ جهت بر منیفلد

یادآور می‌شویم که هر فضای برداری n−بعدی دو جهت دارد، متناظر به دو دسته هم‌ارزی از پایه‌های مرتب یا متناظر به دو دسته هم‌ارزی از n−همبردارهای غیر صفرش. برای جهتدار کردن یک منیفلد، باید فضای مماس در تمام نقاط آن را جهتدار کنیم، و البته لازم است که جهت بر نقاط نزدیک، به تعبیری سازگار باشند. به این معنی که با تغییرات جزئی در نقطه، جهت تغییر نکند.

همان طور که در بخش ۵.۱۲ دیدیم، کنج[۱] بر مجموعه باز $U \subseteq M$، عبارت است از یک n−تایی $(X_1, \cdots, X_n)$ از میدانهای برداری احتمالا ناپیوسته بر U، طوری که به ازای هر نقطه $p \in U$، n−تایی $(X_{1,p}, \cdots, X_{n,p})$ از بردارها، یک پایه مرتب برای فضای برداری مماس T_pM تشکیل دهد. کنج فراگیر[۲]، کنجی است که بر سرتاسر M تعریف می‌گردد، در حالی که کنج موضعی[۳] حول p، تنها بر یک همسایگی باز از p تعریف می‌گردد. رابطه‌ای هم‌ارزی بر مجموعه کنجهای بر U تعریف می‌کنیم:

۲۱.۹ **تعریف.** فرض کنید $(X_1, \cdots, X_n)$ و $(Y_1, \cdots, Y_n)$ دو کنج بر U باشند. تعریف می‌کنیم

$$(X_1, \cdots, X_n) \sim (Y_1, \cdots, Y_n) \Leftrightarrow (X_{1,p}, \cdots, X_{n,p}) \sim (Y_{1,p}, \cdots, Y_{n,p}) \text{ ای } p \in U$$

به بیان دیگر، اگر $Y_j = \sum_i a^i_j X_i$، آنگاه کنجهای $(X_1, \cdots, X_n)$ و $(Y_1, \cdots, Y_n)$ وقتی و تنها وقتی هم‌ارزند که ماتریس تغییر پایه $A = [a^i_j]$ در همه نقاط U مثبت باشد.

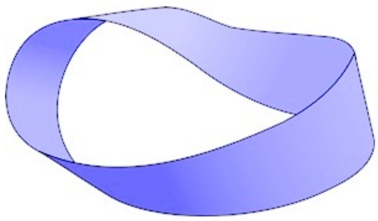
۲۱.۱۰ **تعریف.** جهت نقطه‌−به‌−نقطه بر منیفلد M، یعنی تابعی μ که به هر نقطه $p \in M$ یک جهت μ_p برای فضای مماس T_pM را نسبت می‌دهد.

اگر بخواهیم تعریف بالا را بر اساس کنجها بیان کنیم، خواهیم دید که جهت نقطه‌−به‌−نقطه بر منیفلد M درست به معنی انتخاب یکی از دسته‌های هم‌ارزی از کنجهای احتمالا ناپیوسته بر M می‌باشد. جهت نقطه‌−به‌−نقطه μ بر منیفلد M را در صورتی پیوسته در p گوییم که یک همسایگی باز U از p چنان یافت شود که μ بر آن با یک جهت پیوسته نمایش داده شود؛ بعبارت دیگر، میدانهای برداری پیوسته $Y_1, \cdots, Y_n$ بر U چنان یافت شوند که $\mu_q = [(Y_{1,q}, \cdots, Y_{n,q})]$ به ازای هر $q \in U$. جهت نقطه‌−به‌−نقطه μ بر منیفلد M را در صورتی پیوسته گوییم که در هر نقطه $p \in M$ ای پیوسته باشد. توجه شود که لزومی ندارد هر جهت نقطه‌−به‌−نقطه μ بر منیفلد M به توسط یک کنج فراگیر نمایش داده شود، و عملا به صورت موضعی توسط کنجهای موضعی پیوسته نمایش داده می‌شود.

---
[۱] frame [۲] global frame [۳] frame local

۲۱.۱۱ **تعریف.** منظور از جهت بر منیفلد M، معرفی یک جهت نقطه–به–نقطه μ پیوسته بر منیفلد M می‌باشد. منیفلد را در صورتی جهتپذیر[۴] گوییم که حد اقل یک جهت برای آن وجود داشته باشد. منیفلد به همراه یک جهت بر آن را اصطلاحا منیفلد جهتدار می‌گوییم.

۲۱.۱۲ **مثال.** فضای اقلیدسی $\mathbb{R}^n$ با جهت پیوسته مشخص شده توسط کنج فراگیر $(\partial/\partial r^1, \cdots, \partial/\partial r^n)$، جهتپذیر است.



شکل ۴.۲۱: نوار موبیوس

۲۱.۱۳ **مثال (نوار موبیوس باز).** گیریم R مستطیل

$$R := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | 0 \leq x \leq 1, -1 < y < 1\},$$

باشد. نوار موبیوس[۱] باز M به صورت خارج قسمت مستطیل R بر رابطه هم‌ارزی

$$(0,y) \sim (1,-y), \qquad -1 < y < 1, \tag{۱.۲۱}$$

تعریف می‌گردد (به شکل ۴.۲۱ توجه شود). داخل R مستطیل باز

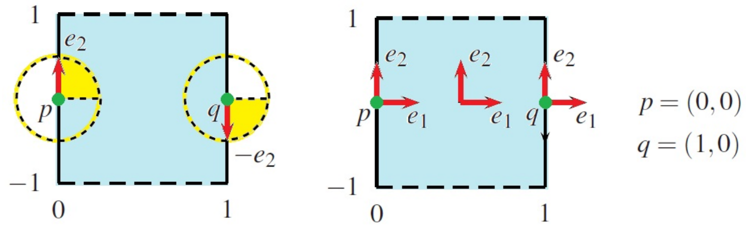
$$U := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | 0 < x < 1, -1 < y < 1\},$$

است. فرض کنید نوار موبیوس M جهتپذیر باشد. پس جهت بر M، جهتی بر U را القاء می‌کند. فرض کنیم جهت بر U توسط کنج $\langle e_1, e_2 \rangle$ نمایش داده شده باشد. درنتیجه، بنابه فرض پیوستگی جهت، جهتهای در نقاط $(0,1)$ و $(0,0)$ نیز توسط $\langle e_1, e_2 \rangle$ معرفی می‌گردند. اما بر اساس یکی‌گیری (۱.۲۱)، پایه مرتب $\langle e_1, e_2 \rangle$ در $(1,0)$ به پایه مرتب $\langle e_1, -e_2 \rangle$ در $(0,0)$ نگاشته می‌شود. بنابراین در نقطه $(0,0)$ جهت با دو زوج $\langle e_1, e_2 \rangle$ و $\langle e_1, -e_2 \rangle$ معرفی می‌گردد، که تناقض است! فرض اینکه جهت بر U توسط کنج $\langle e_1, -e_2 \rangle$ نمایش داده شده باشد نیز به تناقض می‌انجامد. این اثبات می‌کند که «نوار موبیوس جهتپذیر نیست.» به شکل ۵.۲۱ توجه شود.

۲۱.۱۴ **گزاره.** هر منیفلد جهتپذیر M دقیقا دو جهت ممکن دارد.

---

[۴] orientable [۱] Möbius band



شکل ۵.۲۱: جهت ناپذیری نوار موبیوس

برهان : گیریم μ و ν دو جهت بر M باشند. در هر نقطه $p \in M$، دو جهت μ_p و ν_p برای T_pM داریم. یا آن دو یکی اند، و یا در غیر این صورت مخالف هم هستند. تابع

$$f : M \longrightarrow \{-1,1\} \qquad f(p) = \begin{cases} 1 & \mu_p = \nu_p \text{ برای } \\ -1 & \mu_p = -\nu_p \text{ برای } \end{cases}$$

را تعریف می‌کنیم. به ازای هر $p \in M$ خاص، به دلیل پیوستگی جهتهای مورد نظر، میدانهای برداری پیوسته X_i و Y_j بر یک همسایگی باز U از p به گونه‌ای وجود دارند که $\mu = [(X_1, \cdots, X_n)]$ و $\nu = [(Y_1, \cdots, Y_n)]$ بر U. در این صورت تابع ماتریس–مقداری $A = [a^i_j] : U \to \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ چنان وجود دارد که $Y_j = \sum_i a^i_j X_i$. بنابه گزاره ۱۲.۳۰ و یادداشت ۱۲.۳۱، درآیه‌های a^i_j همگی پیوسته‌اند، و لذا دترمینان $\det A : U \to \mathbb{R}^+$ نیز پیوسته می‌باشد. اکنون، بر اساس قضیه پایداری علامت توابع پیوسته، نتیجه می‌گیریم که تابع همه جا ناصفر $\det A$ بر مجموعه همبند U یا در همه جا مثبت است و یا در همه جا منفی می‌باشد. بنابراین $\mu = \nu$ یا $\mu = -\nu$ بر U. این اثبات می‌کند که تابع $f : M \longrightarrow \{-1,1\}$ موضعا ثابت است. چون هر تابع موضعا ثابت بر هر مجموعه همبند ثابت است (مساله ۲۱.۱)، پس $\mu = \nu$ یا $\mu = -\nu$ بر M. □

بخش ۴.۲۱ جهت و فرم دیفرانسیلی

در حالی که تعریف جهت بر منیفلد n–بعدی M با استفاده از جهت نقطه–به–نقطه پیوسته از نظر شهود هندسی بسیار موفق است، اما در عمل استفاده از n–فرمهای همه جا ناصفری که جهت نقطه–به–نقطه را مشخص می‌کنند، ساده‌تر می‌باشد. در این بخش نشان می‌دهیم که شرط پیوستگی بر جهت نقطه–به–نقطه را به شرط هموراری بر n–فرمهای همه جا ناصفر می‌شود ترجمه نمود.

اگر f تابعی حقیق–مقدار بر مجموعه M باشد، از نماد $f \gg 0$ به این معنی استفاده می‌کنیم که f بر M مثبت است.

۲۱.۱۵ لم. جهت نقطه–به–نقطه $[(X_1, \cdots, X_n)]$ بر منیفلد M وقتی و تنها وقتی پیوسته است که به ازای هر $p \in M$، یک دستگاه مختصات $(U, x^1, \cdots, x^n)$ وجود داشته باشد که تابع $(dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n)(X^1, \cdots, X^n)$ بر آن مثبت باشد.

برهان : ($\Longleftarrow$) فرض کنیم جهت نقطه–به–نقطه $\mu = [(X_1, \cdots, X_n)]$ بر منیفلد M پیوسته باشد. این

به معنی پیوستگی کنج فراگیر $(X_1, \cdots, X_n)$ نیست. این بدان معنی است که به ازای هر نقطه $p \in M$، یک همسایگی W از آن نقطه وجود دارد که μ بر آن توسط یک کنج پیوسته $(Y_1, \cdots, Y_n)$ نمایش داده می‌شود. یک دستگاه مختصات همبند $(U, x^1, \cdots, x^n)$ حول p و مشمول در W انتخاب کرده و فرض می‌کنیم $\partial_i = \partial/\partial x^i$. در این صورت، یک تابع ماتریس-مقداری $[b^i_j] : U \to \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ وجود دارد که $Y_j = \sum_i b^i_j \partial_i$؛ این همان ماتریس تغییر پایه در نقاط مختلف است. بنابه لم ۲۱.۳،

$$\begin{aligned}(dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n)(Y^1, \cdots, Y^n) &= (\det[b^i_j])(dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n)(\partial_1, \cdots, \partial_n) \\ &= \det[b^i_j],\end{aligned}$$

که در همه جا ناصفر می‌باشد، زیرا $[b^i_j]$ نامنفرد است. $(dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n)(Y^1, \cdots, Y^n)$ به عنوان یک تابع همه جا نا صفر پیوسته بر یک مجموعه همبند، یا در همه جا بر U مثبت است و یا در همه جا بر U منفی می‌باشد. اگر منفی باشد، آنگاه با قرار دادن $\tilde{x}^1 = -x^1$، به یک چارت $(U, \tilde{x}^1, \cdots, x^n)$ می‌رسیم، که بر آن

$$(dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n)(Y^1, \cdots, Y^n) \gg 0.$$

با اسمگذاری $\tilde{x}^1$ به صورت x^1 می‌توانیم فرض کنیم $(U, x^1, \cdots, x^n)$ چارتی است که بر آن

$$(dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n)(Y^1, \cdots, Y^n) \gg 0.$$

چون $\mu = [(X_1, \cdots, X_n)] = [(Y_1, \cdots, Y_n)]$ بر U، ماتریس تغییر پایه $C = [c^i_j]$ با دترمینان مثبت چنان وجود دارد که $X_j = \sum_i c^i_j Y_i$. باز هم بنابه لم ۲۱.۳، بر U داریم

$$(dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n)(X^1, \cdots, X^n) = (\det C)(dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n)(Y_1, \cdots, Y_n) \gg 0.$$

$(\Longrightarrow)$ فرض کنیم $X_j = \sum_i a^i_j \partial_i$ بر چارت $(U, \tilde{x}^1, \cdots, x^n)$. مانند قبل، داریم

$$\begin{aligned}(dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n)(X^1, \cdots, X^n) &= (\det[a^i_j])(dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n)(\partial_1, \cdots, \partial_n) \\ &= \det[a^i_j].\end{aligned}$$

بنابه فرض، سمت چپ تساوی بالا مثبت است. بنابراین، $\det[a^i_j] > 0$ بر U و

$$[(X_1, \cdots, X_n)] = [(\partial_1, \cdots, \partial_n)],$$

که ثابت می‌کند جهت نقطه-به-نقطه μ در p پیوسته می‌باشد. چون p دلخواه است، پس μ بر کل M پیوسته می‌باشد. □

۲۱.۱۶ قضیه. منیفلد M وقتی و تنها وقتی جهتپذیر است که یک n-فرم هموار همه جا ناصفر بر M وجود داشته باشد.

برهان : ($\Longleftarrow$) فرض کنید $[(X_1,\cdots,X_n)]$ یک جهت بر منیفلد M است. بنابه لم ۲۱.۱۵، هر نقطه $p\in M$ دارای یک همسایگی مختصاتی $(U,\tilde{x}^1,\cdots,x^n)$ است که بر آن

$$(dx^1\wedge\cdots\wedge dx^n)(X^1,\cdots,X^n)\gg 0. \qquad (۲.۲۱)$$

گیریم $\{(U_\alpha,x^1_\alpha,\cdots,x^n_\alpha)\}$ گردایه‌ای از این چارتها باشد که M را می‌پوشاند، و $\{\rho_\alpha\}$ یک افراز یکانی زیردست پوشش باز $\{U_\alpha\}$ است. n–فرم $\omega=\sum_\alpha\rho_\alpha\, dx^1_\alpha\wedge\cdots\wedge dx^n_\alpha$ به دلیل اینکه مجموع در آن موضعا متناهی است، بر M خوشتعریف و هموار می‌باشد. یک $p\in M$ ثابت در نظر بگیرید. چون به ازای هر α ای $\rho_\alpha(p)\geq 0$ و به ازای حد اکثر تعدادی متناهی از α ها $\rho_\alpha(p)>0$، بنابه (۲.۲۱)، داریم

$$\omega_p(X_{1,p},\cdots,X_{n,p})=\sum_\alpha\rho_\alpha(p)\,(dx^1_\alpha\wedge\cdots\wedge dx^n_\alpha)_p(X_{1,p},\cdots,X_{n,p})>0.$$

بنابراین، n–فرم ω بر M هموار و در همه جا ناصفر است.

($\Longrightarrow$) فرض کنیم ω یک n–فرم هموار و در همه جا ناصفر بر M است. در هر نقطه $p\in M$، یک پایه مرتب $(X_{1,p},\cdots,X_{n,p})$ برای T_pM چنان انتخاب می‌کنیم که $\omega_\alpha(X_{1,p},\cdots,X_{n,p})>0$. یک $p\in M$ ثابت در نظر گرفته و فرض می‌کنیم $(U,x^1,\cdots,x^n)$ یک همسایگی مختصاتی همبند از p باشد. در این صورت تابع هموار و همه جا ناصفر f بر U چنان یافت می‌گردد که $\omega=f\,dx^1\wedge\cdots\wedge dx^n$. چون f بر مجموعه‌ای همبند همه جا ناصفر است، پس یا بر کل U مثبت است و یا بر کل آن منفی می‌باشد. اگر $f\gg 0$، آنگاه بر چارت $(U,x^1,\cdots,x^n)$ داریم

$$(dx^1\wedge\cdots\wedge dx^n)(X^1,\cdots,X^n)\gg 0.$$

اگر $f\ll 0$، آنگاه بر چارت $(U,-x^1,\cdots,x^n)$ داریم

$$(d(-x^1)\wedge\cdots\wedge dx^n)(X^1,\cdots,X^n)\gg 0.$$

بنابراین، بنابه لم ۲۱.۱۵، $\mu=[(X_1,\cdots,X_n)]$ یک جهت نقطه–به–نقطه پیوسته بر M می‌باشد. □

۲۱.۱۷ مثال (جهتپذیری یک مجموعه صفرهای منظم). بنابه قضیه مجموعه تراز منظم، اگر 0 یک مقدار منظم تابع هموار $f(x,y,z)$ بر $\mathbb{R}^3$ باشد، آنگاه مجموعه صفرهای $f^{-1}(0)$ منیفلدی هموار است. در مساله ۱۹.۲۳ یک 2–فرم همه جا ناصفر بر مجموعه صفرهای منظم یک تابع $\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ معرفی شد. بنابراین، بر اساس قضیه ۲۱.۱۶، مجموعه صفرهای منظم هر تابع هموار بر $\mathbb{R}^3$ جهتپذیر است.

به عنوان مثال، کره واحد $\mathbb{S}^2$ در $\mathbb{R}^3$ جهتپذیر است. به عنوان مثال دیگر، چون نوار موبیوس جهتپذیر نیست (مثال ۲۱.۱۳)، آن را به صورت مجموعه صفرهای منظم هیچ تابع هموار بر $\mathbb{R}^3$ نمی‌شود بیان نمود.

بر اساس قضیه‌ای کلاسیک از توپولوژی جبری، هر میدان برداری پیوسته بر هر کره با بعد زوج، بایستی در جایی صفر شود [صفحه ۱۳۵ ، قضیه ۲٫۲۸ از ۱۸]. بنابراین، با اینکه کره $\mathbb{S}^2$ دارای جهت نقطه–به–نقطه پیوسته است، اما هر کنج فراگیر (X_1,X_2) سازگار با یک جهت بر کره، لزوما ناپیوسته است.

اگر ω و ω' دو $n-$فرم همه جا ناصفر هموار بر منیفلد مفروض $n-$بعدی M باشد، آنگاه تابعی هموار f و همه جا ناصفر بر M به گونه‌ای یافت می‌گردد که $\omega = f\omega'$. موضعا، بر هر چارت $(U, x^1, \cdots, x^n)$، توابع هموار و همه جا ناصفر h و g چنان وجود دارند که

$$\omega = h\,dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n, \quad \omega' = g\,dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n.$$

بنابراین، $f = h/g$ نیز بر U هموار و همه جا ناصفر است. چون چارت U دلخواه بود، پس f در کل M هموار و همه جا نا صفر می‌باشد. چنانچه منیفلد M همبند باشد، چنین تابعی f یا در همه جا مثبت است و یا در همه جا منفی می‌باشد. به این ترتیب، مجموعه $n-$فرمهای هموار و همه جا ناصفر بر یک منیفلد همبند M به دو کلاس هم‌ارزی افراز می‌گردد؛ کافی است تعریف کنیم:

$$\omega \sim \omega' \quad \Longleftrightarrow \quad \omega = f\omega' \text{ به ازای یک } f \gg 0 \text{ ای}$$

به ازای هر جهت $\mu = [(X_1, \cdots, X_n)]$ بر یک منیفلد جهتپذیر همبند M، یک دسته هم‌ارزی از $n-$فرمهای هموار همه جا ناصفر $[\omega]$ بر M چنان می‌توانیم نسبت بدهیم که $\omega(X_1, \cdots, X_n) \gg 0$. (چنین ω ای بر اساس اثبات قضیه ۲۱.۱۶ وجود دارد.) اگر $\mu \mapsto [\omega]$، آنگاه $-\mu \mapsto [-\omega]$. این تناظر، بر هر منیفلد جهتپذیر همبند یک تناظر دوسویی فراهم می‌سازد:

$$(۳.۲۱) \qquad \text{دسته‌های هم‌ارزی شامل } n\text{–فرمهای همه جا ناصفر بر } M \quad \longleftrightarrow \quad \text{جهتهای بر } M$$

و هر سمت دو عضو دارد. با در نظر گرفتن هر مولفه همبندی از یک منیفلد مفروض، در می‌یابیم که تناظر (۳.۲۱) همچنان برای هر منیفلد چهتپذیر دلخواه برقرار است، با این توضیح که بر هر مولفه همبندی دقیقا دو جهت ممکن وجود دارد که متناظر با دو دسته هم‌ارزی از $n-$فرمهای هموار همه جا ناصفر می‌باشند.

۲۱.۱۸ تعریف. در صورتی که ω $n-$فرمی هموار و همه جا ناصفر باشد که $\omega(X_1, \cdots, X_n) \gg 0$، اصطلاحا می‌گوییم ω جهت $[(X_1, \cdots, X_n)]$ را مشخص می‌کند، و در این حالت می‌گوییم ω یک فرم جهت بر M می‌باشد. هر منیفلد جهتدار را با یک جفت $(M, [\omega])$ می‌توان معرفی نمود، که $[\omega]$ دسته هم‌ارزی از $n-$فرم معرف جهت بر M می‌باشد.

چنانچه جهت بر M مشخص باشد، بجای $(M, [\omega])$ تنها از M استفاده می‌کنیم. مثلا، همیشه جهت بر $\mathbb{R}^n$ توسط $dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n$ تعیین می‌گردد، مگر آنکه خلافش اثبات گردد.

۲۱.۱۹ یادداشت (جهت بر منیفلدهای صفر بعدی). منیفلد صفر بعدی همبند، عملا از تنها یک نقطه تشکیل می‌گردد. دسته هم‌ارزی شامل $0-$فرمی همه جا ناصفر بر مجموعه تک نقطه‌ای، $[-1]$ است و یا $[1]$. بنابراین، هر منیفلد صفر بعدی همبندف جهتپذیر است، و جهت بر آن را با اعداد ± 1 می‌شود مشخص نمود. در کل، هر منیفلد صفر بعدی M اجتماعی شمارا از مولفه‌های همبندی است، و لذا مجموعه‌ای حداکثر شمارا از نقاط تشکیل می‌گردد (مثال ۵.۱۵)، و بنابر این، هر جهت بر M با تابعی $f : M \to \{\pm 1\}$ مشخص می‌گردد که به هر نقطه جهت در آن نقطه را نظیر می‌سازد.

۲۱.۲۰ تعریف. دیفئومورفیسم $F : (N, \omega_N) \to (M, \omega_M)$ بین منیفلدهای جهتدار را در صورتی حافظ-جهت گوییم که $[F^*\omega_M] = [\omega_N]$؛ و در صورتی جهت-برگردان گوییم که $[F^*\omega_M] = [-\omega_N]$.

۲۱.۲۱ گزاره. گیریم U و V زیرمجموعه‌هایی باز از $\mathbb{R}^n$ باشند و هر دو با جهت استاندارد جهتدار شده باشند. دیفئومورفیسم $F : U \to V$ وقتی و تنها وقتی حافظ-جهت است که دترمینان ژاکوبی آن $\det[\partial F^i/\partial x^j]$ بر سرتاسر U مثبت باشد.

برهان : گیریم $(x^1, \cdots, x^n)$ و $(y^1, \cdots, y^n)$ مختصات استاندارد بر $U \subseteq \mathbb{R}^n$ و $V \subseteq \mathbb{R}^n$ باشند. در این صورت

$$\begin{aligned}
F^*(dy^1 \wedge \cdots \wedge dy^n) &= d(F^*y^1) \wedge \cdots \wedge d(F^*y^n) && \text{(بنابه گزاره ۱۸.۱۲ و ۱۹.۷)} \\
&= d(y^1 \circ F) \wedge \cdots \wedge d(y^n \circ F) && \text{(تعریف پولبک)} \\
&= dF^1 \wedge \cdots \wedge dF^n \\
&= \det\left[\frac{\partial F^i}{\partial x^j}\right] dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n && \text{((۲) - ۱۸.۴ بنابه نتیجه).}
\end{aligned}$$

بنابراین، F وقتی و تنها وقتی حافظ-جهت است که $\det[\partial F^i/\partial x^j]$ بر سرتاسر U مثبت باشد. □

بخش ۵.۲۱ جهت و اطلس

با استفاده از تشخیص دیفئومورفیسمهای حافظ-جهت از روی علامت دترمینات ژاکوبیشان، جهتپذیری منیفلدها را بر اساس اطلس می‌توانیم توصیف کنیم.

۲۱.۲۲ تعریف. اطلس بر منیفلد M را در صورتی جهتدار گوییم که به ازای هر دو چارت همپوشای $(U, x^1, \cdots, x^n)$ و $(V, y^1, \cdots, y^n)$ از اطلس، دترمینان ژاکوبی $\det[\partial y^i/\partial x^j]$ بر سرتاسر $U \cap V$ مثبت باشد.

۲۱.۲۳ قضیه. منیفلد M وقتی و تنها وقتی جهتپذیر است که اطلس جهتدار بپذیرد.

برهان : $(\Longleftarrow)$ فرض کنید $\mu = [(X_1, \cdots, X_n)]$ یک جهت بر منیفلد M است. بنابه لم ۲۱.۱۵، هر نقطه $p \in M$ دارای یک همسایگی مختصاتی $(U, x^1, \cdots, x^n)$ است که بر آن

$$(dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n)(X^1, \cdots, X^n) \gg 0.$$

ادعا می‌کنیم که گردایه $\mathcal{U} = \{(U, x^1, \cdots, x^n)\}$ این چارتها یک اطلس جهتدار است.
اگر $(U, x^1, \cdots, x^n)$ و $(V, y^1, \cdots, y^n)$ دو چارت همپوشا از $\mathcal{U}$ باشند، آنگاه بر $U \cap V$ داریم

$$\begin{aligned}
(dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n)(X^1, \cdots, X^n) &\gg 0, \\
(dy^1 \wedge \cdots \wedge dy^n)(X^1, \cdots, X^n) &\gg 0.
\end{aligned} \tag{۴.۲۱}$$

چون $dy^1 \wedge \cdots \wedge dy^n = (\det[\partial y^i/\partial x^j]) dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n$، از (۴.۲۱) نتیجه می‌گردد که $\det[\partial y^i/\partial x^j] \gg 0$ بر $U \cap V$. بنابراین، اطلس $\mathcal{U}$ جهتدار است.

($\Longrightarrow$) فرض کنیم $\{(U,x^1,\cdots,x^n)\}$ یک اطلس جهتدار باشد. به ازای هر $p\in U$، μ_p را به صورت دسته همارزی شامل پایه مرتب $(\partial/\partial x^1|_p,\cdots,\partial/\partial x^n|_p)$ برای T_pM تعریف می‌کنیم. اگر دو چارت $(U,x^1,\cdots,x^n)$ و $(V,y^1,\cdots,y^n)$ در اطلس جهتدار، نقطه p را شامل شوند، آنگاه بنابه تعریف جهتداری اطلس، داریم $\det[\partial y^i/\partial x^j]>0$، و در نتیجه $(\partial/\partial x^1|_p,\cdots,\partial/\partial x^n|_p)$ و $(\partial/\partial y^1|_p,\cdots,\partial/\partial y^n|_p)$ هم ارزند. این اثبات می‌کند که μ یک جهت نقطه–به–نقطه و خوشتعریف بر M می‌باشد. این جهت پیوسته است، زیرا به ازای هر p یک دستگاه مختصاتی $(U,x^1,\cdots,x^n)$ چنان وجود دارد که بر آن $\mu=[(\partial/\partial x^1,\cdots,\partial/\partial x^n)]$ با یک کنج پیوسته نمایش داده می‌شود. □

۲۱.۲۴ تعریف. دو اطلس جهتدار $\{U_\alpha,\phi_\alpha\}$ و $\{V_\beta,\psi_\beta\}$ بر منیفلد M را در صورتی همارز گوییم که به ازای هر α و هر β ای تابع گذر

$$\phi_\alpha\circ\psi_\beta^{-1}:\psi_\beta(U_\alpha\cap V_\beta)\longrightarrow\phi_\alpha(U_\alpha\cap V_\beta)$$

با دترمینان ژاکوبی مثبت باشند.

براحتی می‌شود نشان داد که رابطه مطرح شده در تعریف بالا، یک رابطه همارزی بر خانواده همه اطلسهای جهتدار بر منیفلد مفروض M می‌باشد (مساله ۲۱.۳).
در اثبات قضیه ۲۱.۲۳، هر اطلس جهتدار $\{(U,x^1,\cdots,x^n)\}$ بر منیفلد مفروض M، یک جهت بر M تعریف می‌کند:

$$U\ni p\longmapsto\Big[\Big(\frac{\partial}{\partial x^1}\Big|_p,\cdots,\frac{\partial}{\partial x^n}\Big|_p\Big)\Big],$$

و بالعکس، هر جهت $[(X_1,\cdots,X_n)]$ بر M، یک اطلس جهتدار $\{(U,x^1,\cdots,x^n)\}$ بر منیفلد M ارائه می‌کند، طوری که $(dx^1\wedge\cdots\wedge dx^n)(X^1,\cdots,X^n)\gg 0$ بر U. بر خواننده استکه به عنوان تمرین نشان دهد که بر هر منیفلد جهتپذیر M، تناظر دوسویی به شرح زیر را داریم:

دسته‌های همارزی شامل اطلسهای جهتدار بر M $\longleftrightarrow$ جهتهای بر M

بنابراین، یک راه دیگر برای تعیین جهت بر یک منیفلد مفروض، مشخص نمودن یک دسته همارزی از اطلهای جهتدار بر آن می‌باشد.
چنانچه M منیفلدی جهتدار باشد، از نماد $-M$ بر ای نمایش همان منیفلد با جهت وارون استفاده می‌کنیم. اگر $\{(U,\phi)\}=\{(U,x^1,\cdots,x^n)\}$ یک اطلس جهتدار بر M باشد که جهت آن را مشخص نموده است، آنگاه $\{(U,\tilde{\phi})\}=\{(U,-x^1,x^2,\cdots,x^n)\}$ اطلس جهتدار بر $-M$ است و جهت آن را مشخص می‌نماید.

بخش ۶.۲۱ تمرینات

۲۱.۱ نگاشت موضعا ثابت بر فضای همبند. نگاشت $f : S \to Y$ بین فضاهای توپولوژی را در صورتی موضعا ثابت گوییم که به ازای هر $p \in S$ یک همسایگی U از p وجود داشته باشد که f بر آن ثابت باشد. نشان دهید که هر تابع $f : S \to Y$ موضعا ثابت بر هر فضای همبند غیر تهی S، ثابت است. (راهنمایی: نشان دهید که به ازای هر $y \in Y$، پیشنگاره $f^{-1}(y)$ باز است. در این صورت $S = \cup_{y\in Y} f^{-1}(y)$ می‌تواند S را به صورت اجتماعی از زیر مجموعه‌های باز توصیف کند.)

۲۱.۲ پیوستگی جهت نقطه‌–به–نقطه. ثابت کنید که شرط لازم و کافی برای اینکه جهت نقطه–به–نقطه $[(X_1, \cdots, X_n)]$ بر منیفلد M پیوسته باشد، این است که به ازای هر $p \in M$، همسایگی مختصاتی $(U, \phi) = (U, x^1, \cdots, x^n)$ چنان وجود داشته باشد که به ازی هر $q \in U$ ای دیفرانسیل $\phi_{*,q} : T_qM \to T_{f(q)}\mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^n$ جهت T_qM را به جهت استاندارد بر $\mathbb{R}^n$ ببرد؛ به این معنی که

$$(\phi_* X_{1,q}, \cdots, \phi_* X_{n,q}) \sim (\partial/\partial r^1, \cdots, \partial/\partial r^n).$$

۲۱.۳ هم‌ارزی اطلسهای جهتدار. نشان دهید که رابطه در تعریف ۲۱.۲۴ یک رابطه هم‌ارزی می‌باشد.

۲۱.۴ دیفئومورفیسمهای حافظ–جهت. گیریم $F : (N, [\omega_N]) \to (M, [\omega_M])$ دیفئومورفیسم حافظ–جهت باشد. نشان دهید که اگر $\{(V_\alpha, y^1_\alpha, \cdots, y^n_\alpha)\}$ یک اطلس جهتدار بر M باشد که جهت بر آن را مشخص نموده است، آنگاه $\{F^{-1}V_\alpha, F^*\psi_\alpha\} = \{(F^{-1}V_\alpha, F^1_\alpha, \cdots, F^n_\alpha)\}$ یک اطلس جهتدار بر N است و جهت بر آن را مشخص می‌نماید، که در آن $F^i_\alpha = y^i_\alpha \circ F$.

۲۱.۵ دیفئومورفیسمهای حافظ–جهت و جهت–برگردان. گیریم U مجموعه باز $(0, \infty) \times (0, 2\pi)$ در (r, θ)–صفحه $\mathbb{R}^2$ است. تابع $F : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ را به صورت $F(r, \theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$ تعریف می‌کنیم. مشخص کنید که آیا F بروی نگاره‌اش، حافظ–جهت است و یا جهت–برگردان؟

۲۱.۶ جهتپذیری یک مجموعه تراز منظم در $\mathbb{R}^{n+1}$. فرض کنید $f(x^1, \cdots, x^{n+1})$ تابعی هموار بر $\mathbb{R}^{n+1}$ است و 0 یک مقدار منظم آن می‌باشد. نشان دهید که مجموعه صفرهای f زیر منیفلدی جهتپذیر از $\mathbb{R}^{n+1}$ می‌باشد. بخصوص، n–کره واحد $\mathbb{S}^n$ در $\mathbb{R}^{n+1}$ جهتپذیر است.

۲۱.۷ جهتپذیری یک گروه لی. با ساختن یک فرم دیفرانسیلی مرتبه بالا، مستقیما نشان دهید که هر گروه لی G جهتپذیر است.

۲۱.۸ جهتپذیری یک منیفلد توازی‌پذیر. نشان دهید که هر منیفلد توازی‌پذیر، جهتپذیر است. (بخصوص، هر گروه لی، جهتپذیر است.) با ذکر یک مثال نشان دهید که عکس این مطلب در حالت کلی غلط است.

۲۱.۹ جهتپذیری فضای کلی کلاف مماس. گیریم M منیفلدی هموار و $\pi : TM \to M$ کلاف مماس آن باشد. نشان دهید که اگر $\{(U, \phi)\}$ اطلسی بر M باشد، آنگاه اطلس $\{TU, \tilde{\phi}\}$ بر TM جهتدار است، که $\tilde{\phi}$ در معادله (۱.۱۲) معرفی شده است. این اثبات می‌کند که فضای کلی TM کلاف مماس همواره جهتپذی است، چه خود M جهتپذیر باشد یا نباشد.

۲۱.۱۰ اطلسهای جهتدار بر دایره. در مثال ۵.۱۷ اطلسی $\mathcal{U} = \{(U_i, \phi_i)\}_{i=1}^4$ بر دایره واحد $\mathbb{S}^1$ معرفی شد. آیا اطلس $\mathcal{U}$ جهتدار است؟ اگر نه، توابع مختصاتی ϕ_i در $\mathcal{U}$ را طوری تغییر دهید که اطلس حاصل، جهتدار باشد.

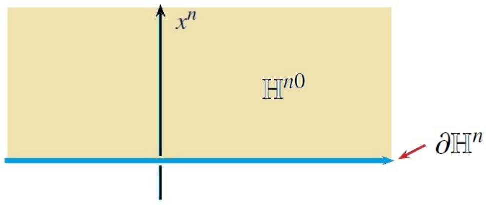
فصل ۲۲

منیفلد مرزدار

ساده‌ترین نمونه از منیفلد مرزدار، نیم صفحه بسته بالایی[۱] است:

$$\mathbb{H}^n := \{(x^1, \cdots, x^n) \in \mathbb{R}^n \,|\, x^n \geq 0\},$$

که توپولوژی بر آن را توپولوژی القایی از $\mathbb{R}^n$ در نظر می‌گیریم. نقاط $(x^1, \cdots, x^2)$ در $\mathbb{H}^n$ که در آنها $x^n > 0$، نقاط داخلی $\mathbb{H}^n$ نامیده شده، و نقاط با $x^n = 0$، نقاط مرزی نامیده می‌شود. مجموعه متشکل از این دو نوع نقطه را بترتیب با $\mathbb{H}^{n0}$ و $\partial\mathbb{H}^n$ نشان می‌دهیم (به شکل ۱.۲۲ توجه شود).



شکل ۱.۲۲: نیم صفحه بالایی

در برخی منابع، مجموعه باز $\{(x^1, \cdots, x^n) \in \mathbb{R}^n \,|\, x^n > 0\}$ را نیم فضای بالایی می‌گویند. اینکه لبه $\mathbb{H}^n$ به آن متعلق باشد، لازم است، تا آن را به عنوان مدلی برای منیفلدهای مرزدار بتوانیم استفاده کنیم.

اگر M منیفلد مرزدار باشد، مرزش را با ∂M نشان می‌دهیم، که عملا منیفلدی با یک واحد بعد پایین‌تر می‌باشد. بعلاوه، هر جهت بر منیفلد M، جهتی بر مرزش ∂M القاء می‌نماید. انتخاب جهت القایی به گونه‌ای است که بکمک آن می‌توان یک نوع قضیه استوکس مستقل از علامت را ارائه نمود. روشهای متعددی بر ای معرفی جهت بر مرز منیفلد وجود دارد، و به جهت سهولت در بحث تنها دو نمونه از ساده‌ترین آنها را مطرح می‌نماییم:

---

[۱] closed upper half-space

(۱) انقباض فرم جهت بر M با میدان برداری برونسوی بر ∂M و

(۲) اولین بردار برونسوی.

بخش ۱.۲۲ ناوردایی همواری بعد در $\mathbb{R}^n$

برای بررسی توابع هموار بر یک منیفلد مرزدار، نیاز به تعمیم مفهوم تابع هموار به حالت بر دامنه‌های غیر باز می‌باشد.

۲۲.۱ **تعریف.** گیریم $S \subseteq \mathbb{R}^n$ زیرمجموعه‌ای دلخواه باشد. تابع $f : S \to \mathbb{R}^m$ را در صورتی هموار در نقطه p از S گوییم که یک همسایگی باز U از p در $\mathbb{R}^n$ و تابعی هموار $\tilde{f} : U \to \mathbb{R}^m$ چنان وجود داشته باشند که $\tilde{f} = f$ بر $U \cap S$.

نظر به این تعریف، اکنون از دیفئومورف بودن زیرمجموعه دلخواه $S \subseteq \mathbb{R}^N$ با زیرمجموعه دلخواه $T \subseteq \mathbb{R}^m$ می‌توان سخن گفت؛ این بدان معنی است که توابع هموار $f : S \to T \subseteq \mathbb{R}^m$ و $g : T \to S \subseteq \mathbb{R}^n$ یافت شوند که معکوس یکدیگر باشند.

۲۲.۲ **تمرین (توابع هموار بر مجموعه‌های غیر باز).** با استفاده از افراز یکانی نشان دهید که تابع $f : S \to \mathbb{R}^m$ بر $S \subseteq \mathbb{R}^N$ وقتی و تنها وقتی هموار است که یک زیرمجموعه باز U در $\mathbb{R}^n$ شامل S و تابعی هموار $\tilde{f} : U \to \mathbb{R}^m$ چنان وجود داشته باشند که $f = \tilde{f}|_S$.

قضیه زیر مشابه هموار برای قضیه‌ای کلاسیک در کاتگوری توپولوژی است. از آن در اثبات اینکه نقاط درونی و نقاط مرزی نسبت به دیفئومورفیسمهای بر زیرمجموعه‌های باز در $\mathbb{H}^n$ ناوردا هستند، استفاده می‌کنیم.

۲۲.۳ **قضیه (ناوردایی هموار دامنه).** گیریم $U \subseteq \mathbb{R}^n$ زیرمجموعه‌ای باز، و $S \subseteq \mathbb{R}^n$ زیرمجموعه‌ای دلخواه، و $f : U \to S$ دیفئومورفیسم باشد. در این صورت S در $\mathbb{R}^n$ باز است.

به دیگر سخن، دیفئومورفیسم بین یک زیرمجموعه باز U از $\mathbb{R}^n$ و یک زیرمجموعه دلخواه S از $\mathbb{R}^n$، ایجاب می‌کند که S در $\mathbb{R}^n$ باز باشد. اثبات قضیه سر راست نیست. هر دیفئومورفیسم به شکل $f : \mathbb{R}^n \supseteq U \to S \subseteq \mathbb{R}^n$، زیرمجموعه باز U را به زیرمجموعه بازی از S می‌نگارد. بنابراین، از پیش می‌دانیم که $f(U)$ در S باز است، اما این به معنی باز بودن آن در $\mathbb{R}^n$ نیست. در اینجا همبعد بودن دو فضای اقلیدسی در دو طرف تابع، بسیار با اهمیت است. مثلا، دیفئومورفیسمی بین بازه باز $(0,1)$ از $\mathbb{R}^1$ و پاره‌خط باز $S = (0,1) \times \{0\}$ در $\mathbb{R}^2$ وجود دارد، اما S در $\mathbb{R}^2$ باز نیست!

برهان : گیریم $f(p)$ نقطه‌ای دلخواه از S با $p \in U$ باشد. چون $f : U \to S$ دیفئومورفیسم است، مجموعه‌ای باز $V \subseteq \mathbb{R}^n$ شامل S و نگاشتی هموار $g : V \to \mathbb{R}^n$ چنان وجود دارند که $g|_S = f^{-1}$. بنابراین، $U \xrightarrow{f} V \xrightarrow{g} \mathbb{R}^n$ در رابطه

$$g \circ f = \mathbb{1}_U : U \to U \subseteq \mathbb{R}^n.$$

صدق می‌کنند. با استفاده از قاعده زنجیره‌ای مشتق، به نگاشت همانی بر فضای برداری T_pU می‌رسیم:

$$g_{*,f(p)} \circ f_{*,p} = \mathbb{1}_{T_pU} : T_pU \to T_pU \simeq T_p(\mathbb{R}^n).$$

در نتیجه، $f_{*,p}$ یکبیک است. چون U و V همبعدند، بنابراین $f_{*,p} : T_pU \to T_{f(p)}V$ یکبیک است. با استفاده از قضیه تابع وارون، نتیجه می‌گیریم که f در p دیفئومورفیسم موضعی است. این بدان معنی است که همسایگی باز U_p از p در U، و همسایگی باز $V_{f(p)}$ از $f(p)$ در V چنان وجود دارند که $f : U_p \to V_{f(p)}$ دیفئومورفیسم می‌باشد. در نتیجه

$$f(p) \in V_{f(p)} = f(U_p) \subseteq f(U) = S.$$

چون V در $\mathbb{R}^n$ باز است و $V_{f(p)}$ در V نیز باز می‌باشد، بنابراین، مجموعه $V_{f(p)}$ در $\mathbb{R}^n$ باز است. چون باز بودن موضعی است (لم ؟؟)، پس S در $\mathbb{R}^n$ باز می‌باشد. □

۲۲.۴ گزاره. گیریم V و U زیرمجموعه‌هایی باز از نیم فضای بالایی $\mathbb{H}^n$ بوده و $f : U \to V$ دیفئومورفیسم باشند. در این صورت f نقاط درونی را به نقاط درونی و نقاط مرزی را به نقاط مرزی می‌نگارد.

برهان : گیریم $p \in U$ یک نقطه درونی باشد. در این صورت p درگوی بازی B قرار دارد، که عملا در $\mathbb{R}^n$ نیز باز می‌باشد (نه فقط در $\mathbb{H}^n$). بنابه ناوردایی هموار دامنه، $f(B)$ در $\mathbb{R}^n$ باز است (باز هم نه فقط در $\mathbb{H}^n$). بنابراین، $f(B) \subset \mathbb{H}^{n0}$. چون $f(p) \in f(B)$، پس $f(p)$ یک نقطه درونی از $\mathbb{H}^n$ می‌باشد.
اگر p نقطه مرزی در $U \cap \partial\mathbb{H}^n$ باشد، آنگاه $f^{-1}(f(p)) = p$ نقطه مرزی است. چون $f^{-1} : V \to U$ دیفئومورفیسم است، بنابه آن چه که در قسمت اول اثبات دیدیم، $f(p)$ نمی‌تواند نقطه درونی باشد. در نتیجه، $f(p)$ یک نقطه مرزی است. □

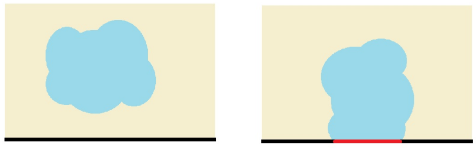
با تعویض فضاهای اقلیدسی با منیفلدها در این بخش، خواهیم دید که همه اثباتها کم و بیش برقرارند؛ بخصوص، ناوردایی هموار دامنه برای منیفلدها نیز درست است:

> اگر دیفئومورفیسمی بین یک مجموعه باز U از منیفلد $n-$بعدی N و مجموعه دلخواه S از منیفلد $n-$بعدی M برقرار باشد، آنگاه S در M باز است.

بخش ۲.۲۲ منیفلد مرزدار

در نیم صفحه بالایی $\mathbb{H}^n$ دو نوع زیرمجموعه باز می‌شود تشخیص داد، بسته به اینکه مجموعه نقاط مرزی را قطع نمی‌کند و یا اینکه با آن برخورد دارد (به شکل ۲.۲۲ توجه شود). دامنه هر چارت از هر منیفلدی، تنها مجموعه‌های باز از نوع اول می‌باشند.

با تغییر در تعریف منیفلد به نحوی که دامنه چارتها بتوانند باز از نوع دوم نیز باشند، می‌توان مفهوم منیفلد را به حالت منیفلد مرزدار تعمیم داد. فضای توپولوژی M را در صورتی موضعا $\mathbb{H}^n$ گوئیم که به ازای هر نقطه $p \in M$، یک همسایگی باز U از p وجود داشته باشد که با زیر مجموعه‌ای باز از $\mathbb{H}^n$ همئومورف باشد.



شکل ۲.۲۲: دو نوع زیر مجموعه باز در نیم صفحه بالایی $\mathbb{H}^n$

۲۲.۵ تعریف. منیفلد توپولوژی مرزدار[۱] n بعدی M، عبارت است از یک فضای توپولوژی شمارای دوم، هاوسدورف و موضعا $\mathbb{H}^n$.

گیریم M یک $n-$منیفلد توپولوژی مرزدار باشد. برای $n \geq 2$، منظور از چارت بر M، روج مرتبی است (U, ϕ) شامل یک زیر مجموعه باز U در M و یک دیفئومورفیسم

$$\phi : U \to \phi(U) \subseteq \mathbb{H}^n,$$

از U با زیر مجموعه‌ای باز $\phi(U)$ از $\mathbb{H}^n$. همان طورکه در مثال ۲۲.۱۰ نشان داده خواهد شد، در حالت $n = 1$ باید کمی تامل کرده و تغییری جزئی انجام داد: لازم است تا دو مدل داشته باشیم، یکی نیم خط راست $\mathbb{H}^1$ و دیگری نیم خط چپ

$$\mathbb{L}^1 := \{x \in \mathbb{R} \,|\, x \leq 0\}.$$

چارت (U, ϕ) در بعد ۱، از یک زیرمجموعه باز در M و یک دیفئومورفیسم ϕ از U بروی زیر مجموعه‌ای باز از $\mathbb{H}^1$ و یا $\mathbb{L}^1$ تشکیل می‌گردد. به این ترتیب، به ازای هر $n \geq 0$، اگر $(U, x^1, \cdots, x^n)$ چارتی از یک $n-$ منیفلد توپولوژی مرزدار باشد، آنگاه $(U, -x^1, \cdots, x^n)$ نیز چارتی برای آن منیفلد خواهد بود. منیفلد مرزدار حد اقل یک بعدی است، زیرا هر منیفلد صفر بعدی، زیر مجموعه‌ای گسسته از نقاط است، و لذا مرز آن تهی است!

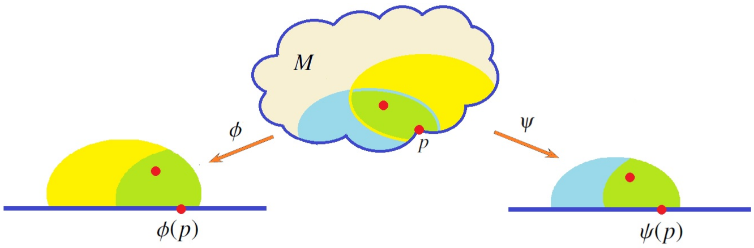
گردایه چارتهای $\{(U, \phi)\}$ در صورتی اطلس هموار نامیده می‌شود که به ازای هر دو چارت همپوشای (U, ϕ) و (V, ψ)، نگاشت گذر

$$\psi \circ \phi^{-1} : \phi(U \cap V) \longrightarrow \psi(U \cap V) \subseteq \mathbb{H}^n,$$

دیفئومورفیسم باشد. منیفلد مرزدار هموار، عبارت است از یک منیفلد توپولوژی مرزدار به همراه یک اطلس هموار ماکسیمال.

نقطه p از M را در صورتی نقطه درونی نامند که چارتی (U, ϕ) وجود داشته باشد که در آن $\phi(p)$ نقطه‌ای درونی از $\mathbb{H}^n$ باشد. به صورت مشابه، p را نقطه مرزی M گویند هر گاه نسبت به یک چارتی، $\phi(p)$ نقطه مرزی $\mathbb{H}^n$ باشد. این مفاهیم خوشتعریفند، یعنی از انتخاب چارت مستقلند، زیرا اگر (V, ψ) چارت دیگری حول p باشد، آنگاه دیفئومورفیسم $\psi \circ \phi^{-1}$ نقطه $\phi(p)$ را به $\psi(p)$ می‌نگارد، و لذا بر اساس گزاره ۲۲.۴، یا هر دو نقطه $\phi(p)$ و $\psi(p)$ درونی هستند و یا هر دو مرزی می‌باشند (به شکل ۳.۲۲ توجه شود). مجموعه نقاط مرزی M را با نماد ∂M نشان می‌دهند.

[۱] with boundary



شکل ۳.۲۲: چارتها و نقاط مرزی و درونی

بسیاری از مفاهیم مطرح در منیفلدها را کلمه به کلمه به حالت منیفلدهای مرزدار می‌توان تعمیم داد، تنها کافی است توجه شود که در این موارد همواره نقاط در دامنه چارت به دو گروه درونی و مرزی تقسیم می‌گردند، و مدل موضعی آنها $\mathbb{H}^n$ (یا $\mathcal{L}^1$) می‌باشد. مثلا، تابع $f: M \to \mathbb{R}$ در صورتی بر نقطه مرزی $p \in \partial M$ هموار است که چارتی (U, ϕ) حول p چنان وجود داشته باشد که $f \circ \psi^{-1}$ در $\phi(p) \in \mathbb{H}^n$ هموار باشد. این خود بدین معنی است که $f \circ \phi^{-1}$ را به تابعی هموار بر یک همسایگی باز از p در $\mathbb{R}^n$ می‌توان توسیع داد.

۲۲.۶ یادداشت. در توپولوژی عمومی، مفاهیم نقطه درونی و مرزی به معنی دیگری است. این مفاهیم برای هر زیر مجموعه A از یک فضای توپولوژی S تعریف می‌گردند. نقطه $p \in S$ را در صورتی یک نقطه درونی برای A گویند که مجموعه بازی U در S شامل p و مشمول در A وجود داشته باشد؛ یعنی $p \in U \subseteq A$. نقطه $p \in S$ را در صورتی یک نقطه خارجی برای A گویند که مجموعه بازی U از S چنان وجود داشته باشد که $p \in U \subseteq S - A$.

سر انجام نقطه $p \in S$ را در صورتی نقطه مرزی برای A گویند که به ازای هر همسایگی باز U از p، هم U مجموعه A را قطع کند و هم مجموعه $S - A$ را قطع نماید. مجموعه نقاط درونی، بیرونی و مرزی A را بترتیب با $\operatorname{int}(A)$، $\operatorname{ext}(A)$ و $\operatorname{bd}(A)$ نشان می‌دهیم. به وضوح، فضای توپولوژی S به اجتماع مجزای این سه زیر مجموعه افراز می‌گردد:

$$S = \operatorname{int}(A) \bigsqcup \operatorname{ext}(A) \bigsqcup \operatorname{bd}(A).$$

در حالتی که S منیفلد مرزدار باشد و $A \subseteq S$، زیر مجموعه‌های $\operatorname{int}(A)$ و $\operatorname{bd}(A)$ را بترتیب درون توپولوژیک و مرز توپولوژیک A می‌نامیم، و قاعدتا با درون منیفلدی A^0 و مرز منیفلدی ∂A متفاوتند.

توجه شود که درون و مرز توپولوژیک یک مجموعه، به فضای پیرامونی آن بستگی دارند، در حالی که درون و مرز منیفلدی، ذاتی هستند و تنها به خود مجموعه بستگی دارند.

۲۲.۷ مثال (مرز توپولوزیک و مرز منیفلدی). گیریم A قرص واحد در $\mathbb{R}^2$ باشد، بعبارت دیگر $A = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|1\| < 1\}$. در این صورت، مرز توپولوژیک $\operatorname{bd}(A)$ در $\mathbb{R}^2$ همان دایره واحد $\mathbb{S}^1$ است، حال آنکه مرز منیفلدی ∂A آن مجموعه تهی است (به شکل ۴.۲۲ توجه شود).

اما اگر B قرص واحد بسته در $\mathbb{R}^2$ باشد، آنگاه، مرز توپولوژیک و مرز منیفلدی آن هر دو برابر دایره واحدند.

۲۲.۸ مثال (درون توپولوزیک و درون منیفلدی). گیریم S نیم صفحه بالایی $\mathbb{H}^2$ و D نوار بسته $D = \{(x,y) \in \mathbb{H}^2 | y \leq 1\}$ است (به شکل ۴.۲۲ توجه شود). در این صورت، درون توپولوژیک D عبارت است از

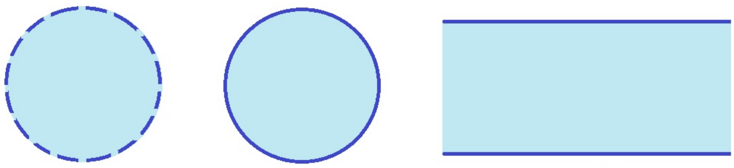
$$\operatorname{int}(D) = \{(x,y) \in \mathbb{H}^2 | 0 \leq y < 1\}, \qquad (۱.۲۲)$$

که x−محور را در بر دارد، اما درون منیفلدی D مجموعه

$$D^0 = \{(x,y) \in \mathbb{H}^2 | 0 < y < 1\}, \qquad (۲.۲۲)$$

است که x−محور را در بر ندارد.

گاهی برای اینکه وابستگی درون توپولوزیک به فضای پیرامونی را نشان دهیم، از نماد $\operatorname{int}_S(A)$ بجای $\operatorname{int}(A)$ استفاده می‌کنیم. پس در این مثال، $\operatorname{int}_{\mathbb{H}^2}(D)$ برابر (۱.۲۲) است و $\operatorname{int}_{\mathbb{R}^2}(D)$ برابر (۲.۲۲) می‌باشد.



شکل ۴.۲۲: درون و مرز

بخش ۳.۲۲ مرز منیفلد مرزدار

گیریم M منیفلدی n بعدی با مرز ∂M باشد. اگر (U,ϕ) چارتی برای M باشد، تحدید ϕ نگاشت مختصاتی به مرز را با نماد $\phi' := \phi|_{U\cap\partial M}$ نشان می‌دهیم. چون ϕ نقاط مرزی را به نقاط مرزی می‌نگارد، بنابراین

$$\phi' : U \cap \partial M \longrightarrow \partial\mathbb{H}^n = \mathbb{R}^{n-1}.$$

بعلاوه، اگر (U,ϕ) و (V,ψ) دو چارت همپوشا از M باشند، آنگاه نگاشت گذر

$$\psi' \circ (\phi')^{-1} : \phi'(U \cap V \cap \partial M) \longrightarrow \psi'(U \cap V \cap \partial M)$$

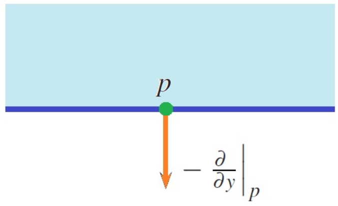
هموار است. در نتیجه، هر اطلس $\{(U_\alpha,\phi_\alpha)\}$ برای M، اطلسی $\{(U_\alpha \cap \partial M, \phi_\alpha|_{U_\alpha\cap\partial M})\}$ برای ∂M القاء می‌کند، که ∂M به همراه آن یک منیفلد $n-1$ بعدی بدون مرز می‌گردد.

۲۲.۹ قضیه. گیریم M منیفلدی n−بعدی و مرزدار باشد، در این صورت ∂M ساختار یک منیفلد $(n-1)$−بعدی و بدون مرز می‌پذیرد.

بخش ۴.۲۲ بردار مماس، فرم دیفرانسیلی و جهت برای منیفلد مرزدار

گیریم M منیفلدی مرزدار و $p \in \partial M$. همانند در بخش ۲.۲، دو تابع هموار $f : U \to \mathbb{R}$ و $g : V \to \mathbb{R}$ تعریف شده بر همسایگی‌های U و V از p در M را در صورتی هم‌ارز گوییم که بر یک همسایگی W از p مشمول در $U \cap V$ با هم برابر باشند. منظور از یک جرم از توابع هموار در p، یک دسته هم‌ارزی از چنین توابعی می‌باشد. مجموعه $C_p^\infty(M)$ همه جرمهای در p از توابع هموار، به همراه جمع، ضرب و ضرب اسکالر معمولی توابع، تشکیل یک $\mathbb{R}$–جبر می‌دهد. در این صورت، فضای مماس T_pM در p به صورت فضای برداری همه نقطه–مشتقات بر جبر $C_p^\infty(M)$ تعریف می‌گردد.

مثلا، برای حالتی که p بر مرز نیم صفحه بالایی $\mathbb{H}^2$ باشد، $\partial/\partial x|_p$ و $\partial/\partial y|_p$ هر دو نقطه–مشتقاتی از $\mathbb{R}$–جبر $C_p^\infty(\mathbb{H}^2)$ هستند. فضای مماس $T_p(\mathbb{H}^2)$ را با فضای برداری دو بعدی گذرنده از مبداء می‌توان توصیف نمود. چون $\partial/\partial y|_p$ برداری مماس به $\mathbb{H}^2$ در p است، منفی آن $-\partial/\partial y|_p$ نیز برداری مماس به $\mathbb{H}^2$ در p است (به شکل ۵.۲۲ توجه شود)، البته هیچ خمی در $\mathbb{H}^2$ وجود ندارد که از p بگذرد و سرعت اولیه‌اش $-\partial/\partial y|_p$ باشد.



شکل ۵.۲۲: بردار مماس در مرز

فضای مماس دوگان T_p^*M به صورت دوگان فضای مماس تعریف می‌گردد:

$$T_p^*M := \operatorname{Hom}(T_pM, \mathbb{R}).$$

منظور از k–فرم دیفرانسیلی بر M همانند قبل، برشی از کلاف برداری $\bigwedge^k(T^*M)$ می‌باشد. یک k–فرم دیفرانسیلی در صورتی هموار است که به عنوان برشی از کلاف برداری $\bigwedge^k(T^*M)$ هموار باشد. مثلا، $dx \wedge dy$ یک 2–فرم دیفرانسیلی هموار بر $\mathbb{H}^2$ است. در این حالت نیز، منظور از جهت بر منیفلد n–بعدی M، یک جهت نقطه–به–نقطه پیوسته بر M می‌باشد.

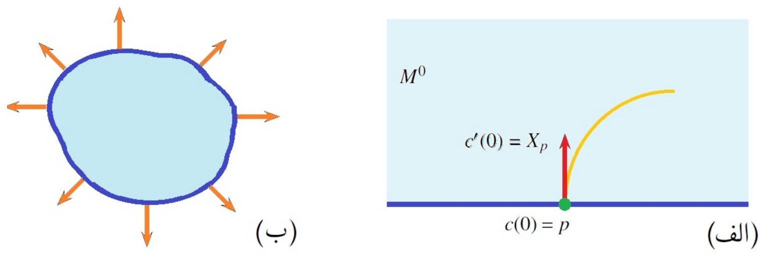
بحث در فصل ۲۱ در خصوص جهت بر منیفلدها، کلمه به کلمه در مورد منیفلدهای مرزدار صحیح می‌باشد. بنابراین، جهتپذیری منیفلد مرزدار معادل با وجود یک فرم هموار، مرتبه بالا و همه جا ناصفر بر آن می‌باشد، و آن نیز معادل با وجود یک اطلس جهتدار می‌باشد. در جایی از اثبات لم ۲۱.۱۵، لازم شد تا چارت $(U, x^1, x^2, \cdots, x^n)$ با $(U, -x^1, x^2, \cdots, x^n)$ تعویض شود. این برای $n = 1$ ممکن نیست، و به همین دلیل است که در حالت یک بعدی $\mathbb{L}^1$ را نیز به عنوان مدل منیفلد مرزدار اضافه نمودیم.

۲۲.۱۰ مثال. بازه بسته $[0,1]$ نمونه‌ای از یک منیفلد مرزدار است. اطلسی با دو چارت (U_1, ϕ_1) و (U_2, ϕ_2) دارد، که در آن $U_1 = [0,1)$، $U_2 = (0,1]$، $\phi_1(x) = x$ و $\phi_2(x) = 1 - x$. $[0,1]$ به همراه

d/dx به عنوان یک جهت نقطه‌-به-نقطه پیوسته، منیفلدی مرزدار است. اما اطلس $\{(U_1,\phi_1),(U_2,\phi_2)\}$ جهتدار نیست، زیرا دترمینان ژاکوبی تابع گذر آن $x-1=(x)(\phi_2\circ\phi_1^{-1})$ منفی است. با تعویض علامت در ϕ_2، به یک اطلس جهتدار $\{(U_1,\phi_1),(U_2,-\phi_2)\}$ می‌رسیم. توجه کنید که $-\phi_2(x)=x-1$ بازه $(0,1]$ را به نیم خط چپ $\mathbb{L}^1\subset\mathbb{R}$ می‌نگارد. پس اگر تنها $\mathbb{H}^1$ را به عنوان مدل برای منیفلد مرزدار یک بعدی می‌پذیرفتیم، آنگاه دیگر منیفلد مرزدار یک بعدی $[0,1]$ اطلس جهتدار نمی‌داشت.

بخش ۵.۲۲ میدان برداری برونسوی

گیریم M منیفلد مرزدار با $p\in\partial M$ باشد. بردار مماس $X_p\in T_p(M)$ را در صورتی درونسوی[۱] گوییم که $X_p\notin T_p(\partial M)$ و عدد مثبتی ε و منحنی هموار $c:[0,\varepsilon)\to M$ چنان وجود داشته باشند که $c(0)=p$، $c((0,\varepsilon))\subseteq M^0$ و $c'(0)=X_p$. بردار مماس $X_p\in T_p(M)$ را در صورتی برونسوی[۲] گوییم که $-X_p$ درونسوی باشد (به شکل ۶.۲۲ - الف توجه شود). مثلا، بردار مماس $\partial/\partial y|_p$ به $\mathbb{H}^2$ در p، یک بردار درونسوی است و حال آنکه $-\partial/\partial y|_p$ برونسوی می‌باشد.



شکل ۶.۲۲: (الف) بردار مماس درونسوی (ب) میدان برداری برونسوی

میدان برداری در امتداد ∂M، تابعی است X که به هر نقطه $p\in\partial M$ یک بردار X_p در فضای مماس T_pM (نه لزوما در $T_p\partial M$) را نظیر می‌سازد. هر چنین میدانی بر یک همسایگی مختصاتی $(U,x^1,x^2,\cdots,x^n)$ از $p\in M$ به صورت ترکیب خطی

$$X_q=\sum_{i=1}^n a^i(q)\frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_q,\qquad q\in\partial M,$$

نوشته می‌شود. میدان برداری X در امتداد ∂M را در صورتی در p هموار گوییم که یک دستگاه مختصاتی موضعی حول p وجود داشته باشد که نسبت به آن، توابع a^i بر ∂M در p هموار باشند. چنانچه X در همه نقاط هموار باشد، می‌گوییم X هموار است. بر اساس دستگاه مختصات موضعی، بردار X_p وقتی و تنها وقتی برونسوی است که $a^n(p)<0$ (به شکل ۶.۲۲ - ب و تمرین ۲۲.۳ توجه شود).

۲۲.۱۱ گزاره. بر هر منیفلد مفروض M با مرز ∂M، یک میدان برداری هموار برونسوی در امتداد ∂M وجود دارد.

---
[۱] inward-pointing [۲] outward-pointing

برهان : ابتدا ∂M را با مجموعه‌های باز مختصاتی $(U_\alpha, x_\alpha^1, \cdots, x_\alpha^n)$ در M می‌پوشانیم. بر هر U_α، میدان برداری $X_\alpha = \partial/\partial x_\alpha^n$ در امتداد $U_\alpha \cap \partial M$ هموار و برونسوی است. یک افراز یکانی $\{\rho_\alpha\}_{\alpha\in A}$ بر ∂M زیردست پوشش باز $\{U_\alpha \cap \partial M\}_{\alpha\in A}$ انتخاب می‌کنیم. در این صورت براحتی می‌شود نشان داد که $X := \sum \rho_\alpha X_\alpha$ یک میدان برداری هموار برونسوی و در امتداد ∂M می‌باشد (مساله ۲۲.۴). □

بخش ۶.۲۲ جهت بر مرز

۲۲.۱۲ گزاره. گیریم M منیفلد n بعدی، مرزدار و جهتدار باشد. گیریم ω فرم جهتی بر M بودن و X یک میدان برداری برونسوی هموار بر ∂M باشد، در این صورت $\iota_X\omega$ یک $(n-1)$–فرم هموار و همه جا ناصفر بر ∂M است. در نتیجه، ∂M جهتپذیر است.

برهان : چون ω و X هر دو بر ∂M هموارند، پس انقباض $\iota_X\omega$ نیز هموار می‌باشد (بخش ۴.۲۰). اکنون نشان می‌دهیم که فرم حاصل همچنان در همه جا ناصفر است. فرض کنیم $\iota_X\omega$ در نقطه‌ای $p\in\partial M$ صفر شود. این بدان معنی است که $(\iota_X\omega)_p(v_1, \cdots, v_{n-1}) = 0$ برای هر $v_1, \cdots, v_{n-1} \in T_p\partial M$. گیریم $e_1, \cdots, e_{n-1}$ پایه‌ای برای $T_p\partial M$ باشد. در این صورت، $X_p, e_1, \cdots, e_{n-1}$ پایه‌ای برای T_pM است، و بنابراین

$$\omega_p(X_p, e_1, \cdots, e_{n-1}) = (\iota_X\omega)_p(e_1, \cdots, e_{n-1}) = 0.$$

با توجه به مساله ۲۱.۵، نتیجه می‌گیریم که $\omega_p \equiv 0$ بر T_pM، و این تناقض است. بنابراین، $\iota_X\omega$ بر ∂M در همه جا ناصفر است. بنابه قضیه ۲۱.۱۶، ∂M جهتپذیر است. □

۲۲.۱۳ تعریف. با نمادهای درگزاره ۲۲.۱۲، جهت تعریف شده توسط فرم $\iota_X\omega$ بر ∂M را جهت مرزی بر ∂M تعریف می‌کنیم.

برای بررسی خوشتعریفی جهت مرزی، لازم است نشان داده شود که جهت تعریف شده از انتخاب فرم ω مشخص کننده جهت و همچنین میدان برداری برونسوی X مستقل است. این کار خواننده را در تمرین ۲۲.۵ انجام خواهد داد.

۲۲.۱۴ گزاره. گیریم M یک n–منیفلد جهتدار و مرزدار است. گیریم p نقطه‌ای از مرز ∂M است و X_p یک بردار برونسوی در T_pM می‌باشد. پایه مرتب $(v_1, \cdots, v_{n-1})$ برای $T_p\partial M$ وقتی و تنها وقتی جهت مرزی در p را مشخص می‌کند که پایه مرتب $(X_p, v_1, \cdots, v_{n-1})$ برای T_pM جهت بر M در p را مشخص نماید.

برهان : برای $p\in\partial M$، گیریم $(v_1, \cdots, v_{n-1})$ پایه‌ای مرتب برای فضای مماس $T_p\partial M$ باشد. در این صورت

$(v_1, \cdots, v_{n-1})$ جهت مرزی بر ∂M در p را مشخص می‌کند.

$$\iff \quad (\iota_{X_p}\omega_p)(v_1, \cdots, v_{n-1}) > 0,$$

$$\iff \quad \omega_p(X_p, v_1, \cdots, v_{n-1}) > 0,$$

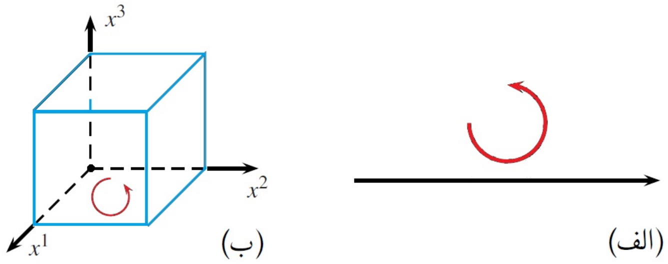
$\iff$ $(X_p, v_1, \cdots, v_{n-1})$ جهت بر M در p را مشخص می‌کند

و برهان تمام است. □

۲۲.۱۵ مثال (جهت مرزی بر $\partial\mathbb{H}^n$). $\omega = dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n$ فرم جهتی برای جهت استاندارد بر نیم صفحه بالایی $\mathbb{H}^n$ است. $-\partial/\partial x^n$ یک میدان برداری برونسوی بر $\partial\mathbb{H}^n$ است. بنابه تعریف، فرم جهتی برای جهت مرزی بر $\partial\mathbb{H}^n$ عبارت است از فرم حاصل از انقباض

$$\begin{aligned} \iota_{-\partial/\partial x^n}(\omega) &= -\iota_{\partial/\partial x^n}(dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^{n-1} \wedge dx^n) \\ &= -(-1)^{n-1} dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^{n-1} \wedge \iota_{\partial/\partial x^n}(dx^n) \\ &= (-1)^n dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^{n-1}. \end{aligned}$$

بنابراین، جهت مرزی بر $\partial\mathbb{H}^1 = \{0\}$ عبارت است از -1؛ جهت مرزی بر $\partial\mathbb{H}^2$ توسط dx^1 مشخص می‌گردد، یعنی همان جهت استاندارد بر خط حقیقی $\mathbb{R}^1$ (به شکل ۷.۲۲ - الف توجه شود)؛ و جهت مرزی بر $\partial\mathbb{H}^3$ توسط $-dx^1 \wedge dx^2$ مشخص می‌گردد، یعنی همان جهت ساعتگرد در $(x^1, x^2)-$صفحه $\mathbb{R}^2$ (به شکل ۷.۲۲ - ب توجه شود).



شکل ۷.۲۲: (الف) جهت مرزی بر $\partial\mathbb{H}^2 = \mathbb{R}^1$ (ب) جهت مرزی بر $\partial\mathbb{H}^3 = \mathbb{R}^2$

۲۲.۱۶ مثال. بازه بسته $[a,b]$ در خط حقیقی با مختصات x دارای جهت استانداردمشخص شده توسط میدان برداری d/dx، با فرم جهتی dx می‌باشد. در نقطه سمت راستی b، بردار برونسوی d/dx می‌باشد. در نتیجه، جهت مرزی در b به صورت $\iota_{d/dx}(dx) = +1$ تعریف می‌گردد. به صورت مشابه، در نقطه سمت چپی a، بردار برونسوی $-d/dx$ می‌باشد. در نتیجه، جهت مرزی در a به صورت $\iota_{-d/dx}(dx) = -1$ تعریف می‌گردد.

۲۲.۱۷ مثال. فرض کنید $c : [a,b] \to M$ ایمرشنی هموار باشد که نگاره آن منیفلد $1-$بعدی مرزدار C است. هر جهت بر $[a,b]$، جهتی بر C را القاء می‌نماید، این امر توسط نگاشت دیفرانسیل $c_{*,p} : T_p[a,b] \to T_pC$ به ازای $p \in [a,b]$ صورت می‌پذیرد. در این حالت نیز، با انتخاب جهت استاندارد بر $[a,b]$، جهتی بر C تعریف می‌گردد. جهت مرزی بر مرز C به این صورت است که بر نقطه انتهایی $c(b)$ برابر $+1$ و در نقطه انتهایی $c(a)$ برابر -1 می‌باشد.

بخش ۷.۲۲ تمرینات

۲۲.۱ **مرز توپولوژیک و مرز منیفلدی.** گیریم M زیرمجموعه $[0,1)\cup\{2\}$ از خط حقیقی است. مرز توپولوژیک $\mathrm{bd}(M)$ و مرز منیفلدی ∂M آن را مشخص نمایید.

۲۲.۲ **توپولوژی مرزی بر اشتراک.** گیریم A و B دو زیر مجموعه از فضای توپولوژی S باشند. ثابت کنید $\mathrm{bd}(A\cap B)\subseteq \mathrm{bd}(A)\cup\mathrm{bd}(B)$.

۲۲.۳ **میدانهای برداری درونسوی در مرز.** گیریم M منیفلدی مرزدار بوده و $p\in\partial M$ است. نشان دهید که $X_p\in T_pM$ وقتی و تنها وقتی درونسوی است که به ازای هر چارت مختصاتی $(U,x^1,\cdots,x^n)$ به مرکز در p، ضریب $(\partial/\partial x^n)_p$ در X_p مثبت باشد.

۲۲.۴ **میدان برداری برونسوی هموار در امتداد مرز.** نشان دهید که میدان برداری $X=\sum\rho_\alpha X_\alpha$ در اثبات گزاره ۲۲.۱۱، برونسوی و هموار در امتداد ∂M می‌باشد.

۲۲.۵ **جهت مرزی.** گیریم M منیفلدی مرزدار و جهتدار است، ω فرم جهتی برای M، و X یک میدان برداری هموار و برونسوی در امتداد ∂M می‌باشد.

(الف) اگر τ یک فرم جهتی دیگر بر M باشد، آنگاه $\tau=f\omega$ برای یک تابع هموار همه جا نا صفر f بر M. نشان دهید که $\iota_X\tau=f\iota_X\omega$ و بنابراین $\iota_X\omega\sim\iota_X\tau$ بر ∂M. (در اینجا $\sim$ به معنی هم‌ارزی تعریف شده در بخش ۴.۲۱ است.)

(ب) ثابت کنید که اگر Y میدان برداری هموار برونسوی در امتداد ∂M دیگری باشد، در این صورت $\iota_X\omega\sim\iota_Y\omega$ بر ∂M.

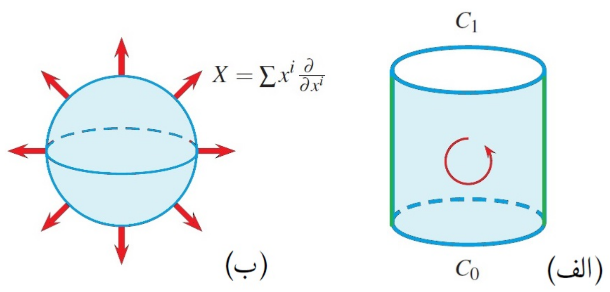
۲۲.۶ **اطلس القائی بر مرز.** فرض کنید $n\geq 2$ و (U,ϕ) و (V,ψ) دو چارت در اطلس جهتدار از یک $n-$منیفلد جهتدار و مرزدار M هستند. ثابت کنید که اگر $U\cap V\cap\partial M\neq/\!\!\downarrow 1mm\downarrow$، آنگاه تحدید تابع گذر $\psi\circ\phi^{-1}$ به مرز $B:=\phi(U\cap V)\cap\partial\mathbb{H}^n$،

$$(\psi\circ\phi^{-1})|_B:\phi(U\cup V)\cap\partial\mathbb{H}^n\longrightarrow\psi(U\cup V)\cap\partial\mathbb{H}^n,$$

دارای دترمینان ژاکوبی مثبت است. (راهنمایی: گیریم $\phi=(x^1,\cdots,x^n)$ و $\psi=(y^1,\cdots,y^n)$. نشان دهید که ماتریس ژاکوبی تابع گذر $\psi\circ\phi^{-1}$ در مختصات موضعی به شکل بلوکی مثلثی است و بلوکهای بر قطر آن $J(\psi\circ\phi^{-1})|_B$ و $\partial y^n/\partial x^n$ می‌باشند، و بعلاوه $\partial y^n/\partial x^n>0$.)

بنابراین، اگر $\{(U_\alpha,\phi_\alpha)\}$ اطلسی جهتدار برای منیفلد جهتدار و مرزدار M باشد، آنگاه اطلس القایی $\{(U_\alpha\cap\partial M,\phi_\alpha|_{(U_\alpha\cap\partial M)})\}$ برای ∂M نیز جهتدار است.

۲۲.۷ **جهت مرزی برای نیم فضای چپ.** گیریم M نیم فضای پائینی $\{(x^1,\cdots,x^n)\in\mathbb{R}^n\,|\,x^1\leq 0\}$ با فرم جهتی $dx^1\wedge\cdots\wedge dx^n$ باشد. نشان دهید که $dx^2\wedge\cdots\wedge dx^n$ فرم جهتی بر مرز ∂M است و عملا همان جهت مرزی بر آن را مشخص می‌نماید.



شکل ۸.۲۲: (الف) استوانه جهتدار (ب) میدان برداری شعاعی بر کره

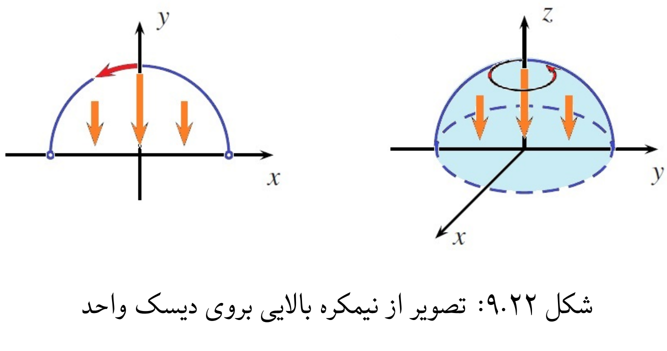
۲۲.۸ جهت مرزی بر یک استوانه. گیریم M استوانه $\mathbb{S}^1 \times [0,1]$ است که وقتی از بیرون دیده می‌شود، جهت بر آن پادساعتگرد بنظر آید (به شکل ۸.۲۲ - الف توجه شود). جهت مرزی بر $C_0 = \mathbb{S}^1 \times \{0\}$ و $C_1 = \mathbb{S}^1 \times \{1\}$ را مشخص کنید.

۲۲.۹ جهت مرزی بر یک کره. کره واحد $\mathbb{S}^n$ در $\mathbb{R}^{n+1}$ را به عنوان مرزگوی بسته واحد، جهتدار کنید. نشان دهید که

$$\omega = \sum_{i=1}^{n+1} (-1)^{i-1} x^i \, dx^1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx^i} \wedge \cdots \wedge dx^{n+1},$$

یک فرم جهتی بر $\mathbb{S}^n$ است، که $\widehat{\ }$ بر dx^i به معنی حذف جمله dx^i در این عبارت است. (راهنمایی: میدان برداری شعاعی $X = \sum x^i \partial/\partial x^i$، یک میدان برداری برونسوی بر SS^n می‌باشد. به شکل ۸.۲۲ - ب توجه شود.)

۲۲.۱۰ جهت بر نیم کره بالایی. کره واحد $\mathbb{S}^n$ در $\mathbb{R}^{n+1}$ را به عنوان مرزگوی بسته واحد، جهتدار کنید. گیریم $U = \{x \in \mathbb{S}^n | x^{n+1} > 0\}$ نیم کره بالایی باشد. آن را به عنوان دامنه چارتی مختصاتی از کره با مختصات $(x^1, \cdots, x^n)$ می‌توان در نظر گرفت.



شکل ۹.۲۲: تصویر از نیمکره بالایی بروی دیسک واحد

(الف) فرم جهتی بر U را بر اساس دستگاه مختصات $(x^1, \cdots, x^n)$ بیابید.

(ب) نشان دهید که نگاشت تصویر $\pi : U \to \mathbb{R}^n$ با ضابطه $\pi(x^1, \cdots, x^n, x^{n+1}) = (x^1, \cdots, x^n)$ وقتی و تنها وقتی حافظ-جهت است که n فرد باشد (به شکل ۹.۲۲ توجه شود).

۲۲.۱۱ نگاشت متقاطر بر کره و جهتپذیری $\mathbb{RP}^n$. (الف) نگاشت متقاطر $a : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$ بر n-کره به صورت $a(x^1, \cdots, x^{n+1}) = (-x^1, \cdots, -x^{n+1})$ تعریف می‌گردد. نشان دهید نگاشت متقاطر وقتی و تنها وقتی حافظ-جهت است که n فرد باشد.
(ب) با استفاده از قسمت (الف) و مساله ۲۱.۶ ثابت کنید که هر فضای تصویری حقیق با بعد فرد $\mathbb{RP}^n$ جهتپذیر است.

فصل ۲۳

انتگرالگیری بر منیفلدها

در این فصل ابتدا انتگرال ریمن برای توابع بر مستطیلهای بسته در فضاهای اقلیدسی را یادآوری می‌کنیم. بر اساس قضیه لبگ، این نظریه را برای دامنه‌های کراندار دلخواه از فضاهای اقلیدسی که مرزشان با اندازه صفر است می‌شود تعمیم داد.

انتگرال یک n−فرم با محمل فشرده در یک زیر مجموعه باز از $\mathbb{R}^n$ به صورت انتگرال ریمن تابع نظیرش تعریف می‌گردد. با استفاده از افراز یکانی، انتگرال هر n−فرم دلخواه با محمل فشرده بر یک منیفلد دلخواه را با نوشتن آن به صورت مجموع فرمهایی که هر یک از آنها در دستگاه مختصات با محمل فشرده هستند، می‌توانیم تعمیم دهیم. سپس، قضیه استوکس را برای یک منیفلد جهتدار دلخواه اثبات نموده و نشان می‌دهیم که آن عملا تعمیم قضیه بنیادی انتگرالهای خط است، قضیه‌ای که بنام قضیه گرین در حسابان معروف می‌باشد.

بخش ۱.۲۳ انتگرال ریمن برای توابع بر $\mathbb{R}^n$

فرض می‌کنیم خواننده با نظریه انتگرل ریمن در $\mathbb{R}^n$ آشنا است، آن طوری که مثلا در [۲۶] و یا [۳۵] مطرح شده است. در ادامه به اختصار نظریه انتگرالگیری ریمن برای توابع کراندار بر زیر مجموعه‌های کراندار از $\mathbb{R}^n$ را یادآوری می‌کنیم.

مستطیل بسته در $\mathbb{R}^n$، به صورت حاصلضرب دکارتی $R = [a^1, b^1] \times \cdots \times [a^n, b^n]$ از بازه‌های بسته در $\mathbb{R}$ تعریف می‌گردد، که $a^i, b^i \in \mathbb{R}$. گیریم $f : R \to \mathbb{R}$ تابعی کراندار تعریف شده بر مستطیل بسته R باشد. حجم $\mathrm{vol}(R)$ مستطیل بسته R را به صورت

$$\mathrm{vol}(R) := \prod_{i=1}^{n} (b^i - a^i) \qquad (۱.۲۳)$$

تعریف می‌کنیم. افراز[۱] برای بازه بسته $[a, b]$، گردایه‌ای است $P = \{p_1, \cdots, p_n\}$ از اعداد حقیقی،

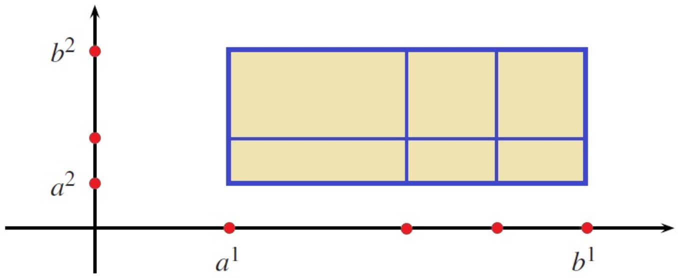
[۱] partition

به گوه‌ای که $a = p_0 < p_0 < \cdots < p_n = b$. افراز برای مستطیل بسته R، گردایه‌ای است مانند $P = \{P_1, \cdots, P_n\}$، که P_i افرازی برای $[a^1, b^i]$ می‌باشد. هر افراز P برای مستطیل بسته R، آن را به زیر مستطیلهایی بسته تقسیم می‌کند که آنها را با R_j نشان می‌دهیم (به شکل ۱.۲۳ توجه شود).

مجموع بالایی[۱] و مجموع پائینی[۲] f نسبت به افراز P را بترتیب به صورت

$$\begin{aligned} U(f,P) &:= \sum (\sup_{R_j} f)\, \mathrm{vol}(R_j), \\ L(f,P) &:= \sum (\inf_{R_j} f)\, \mathrm{vol}(R_j), \end{aligned}$$

تعریف می‌کنیم، که مجموعهای مورد نظر بر همه زیر افرازهای P محاسبه می‌گردد. به ازای هر افراز P ای $L(f,P) \le U(f,P)$. در واقع، بیشتر از این نیز درست است: به ازای هر دو افراز P و P' از مستطیل R، داریم $L(f,P) \le U(f,P')$.



شکل ۱.۲۳: افرازی برای یک مستطیل بسته

افراز $P' = \{P'_1, \cdots, P'_n\}$ را در صورتی ظریفتر[۳] از افراز $P = \{P_1, \cdots, P_n\}$ گوییم که به ازای هر $i = 1, \cdots, n$ ای $P_i \subseteq P'_i$. اگر P' افرازی برای P باشد، آنگاه هر زیر مستطیل R_j از P به تعدادی زیر مستطیل R'_{jk} از P' تقسیم می‌گردد، و بسادگی دیده می‌شود که

$$L(f,P) \le L(f,P'), \tag{۲.۲۳}$$

زیرا اگر $R'_{jk} \subseteq R_j$ ، آنگاه $\inf_{R_j} f \le \inf_{R'_{jk}} f$. به صورت مشابه، اگر P' افرازی برای P باشد، آنگاه

$$U(f,P') \le U(f,P). \tag{۳.۲۳}$$

هر دو افراز P و P' برای مستطیل R، دارای یک افراز مشترک $Q = \{Q_1, \cdots, Q_n\}$ است که $Q_i = P_i \cup P'_i$. بنابه (۲.۲۳) و (۳.۲۳)، داریم

$$L(f,P) \le L(f,Q) \le U(f,Q) \le U(f,P').$$

[۱] lower sum [۲] upper sum [۳] refinement

نتیجه اینکه، سوپریموم مجموعهای پائینی $L(f,P)$ برای همه افرازهای P دلخواه از R، کمتر از اینفیموم مجموعهای بالایی $U(f,P)$ برای همه افرازهای P دلخواه از R می‌باشد. این دو عدد را بترتیب انتگرال پائینی[۴] و انتگرال بالایی[۵] می‌نامند:

$$\underline{\int_R} f := \sup_P L(f,P),$$
$$\overline{\int_R} f := \inf_P U(f,P).$$

۲۳.۱ **تعریف.** گیریم R مستطیلی بسته در $\mathbb{R}^n$ باشد. تابع کراندار $f : R \to \mathbb{R}$ را در صورتی انتگرالپذیر ریمن[۱] گویند که $\underline{\int}_R f = \overline{\int}_R f$؛ در این حالت، این عدد را انتگرال ریمن f نامیده و با $\int_R f(x)\, dx^1 \cdots dx^n$ نشان می‌دهند، که $x^1, \cdots, x^n$ مختصات استاندارد بر $\mathbb{R}^n$ می‌باشد.

۲۳.۲ **یادداشت.** وقتی از مستطیل بسته $[a^1,b^1] \times \cdots \times [a^n,b^n]$ در $\mathbb{R}^n$ سخن می‌گوییم، پیش از n تا محور مختصاتی با توابع مختصاتی $x^1, \cdots, x^n$ انتخاب نموده‌ایم. بنابراین، تعریف انتگرال ریمن به انتخاب دستگاه مختصات $x^1, \cdots, x^n$ بستگی دارد.

در ادامه، اگر $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$، آنگاه توسیع f به صورت صفر بر مابقیه $\mathbb{R}^n$ را با نماد $\tilde{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ نشان می‌دهیم:

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & x \in A \text{ برای} \\ 0 & x \notin A \text{ برای} \end{cases}$$

حال فرض کنید $f : A \to \mathbb{R}$ تابعی کراندار بر مجموعه‌ای کراندار A از $\mathbb{R}^n$ باشد. A را در مستطیلی بسته R محدود نموده و انتگرال ریمن f بر A را به صورت

$$\int_A f(x)\, dx^1 \cdots dx^n := \int_R \tilde{f}(x)\, dx^1 \cdots dx^n,$$

تعریف می‌کنیم، مشروط به آنکه انتگرال سمت راست وجود داشته باشد. به این ترتیب امکان تعریف انتگرال توابع کرانداری که بر مجموعه‌های کراندار تعریف می‌شوند فراهم گردید.

حجم $\mathrm{vol}(A)$ زیر مجموعه $A \subset \mathbb{R}^n$ را به صورت مقدار انتگرال $\int_A dx^1 \cdots dx^n$ تعریف می‌کنیم، به شرط آنکه وجود داشته باشد. این مفهوم، تعمیم مستطیل بسته است که در (۱.۲۳) آورده شد.

بخش ۲.۲۳ شرایط انتگرالپذیری

در این بخش برخی از شرایط برای وجود انتگرال ریمن توابع تعریف شده بر زیر مجموعه‌های باز از $\mathbb{R}^n$ را مطرح می‌کنیم.

---
[۴] lower integral [۵] upper integral [۱] Riemann integrable

۲۳.۳ **تعریف.** مجموعه $A \subset \mathbb{R}^n$ را در صورتی با اندازه صفر[۲] گوییم که به ازای هر $\varepsilon > 0$، یک پوشش شمارا $\{R_i\}_{i=1}^{\infty}$ از مستطیلهای بسته R_i چنان وجود داشته باشد که $\sum_{i=1}^{\infty} \mathrm{vol}(R_i) < \varepsilon$.

جالبترین شرط انتگرالپذیری از قضیه لبگ [قضیه ۸,۳,۱، صفحه ۴۵۵ از ۲۶] نتیجه می‌گردد:

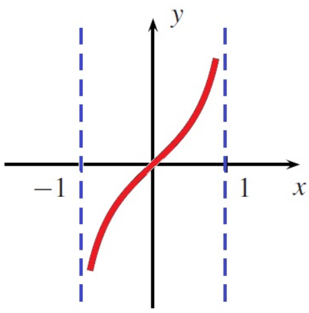
۲۳.۴ **قضیه (قضیه لبگ[۱]).** تابع کراندار $f : A \to \mathbb{R}$ بر مجموعه کراندار $A \subset \mathbb{R}^n$ وقتی و تنها وقتی انتگرالپذیر ریمن است که مجموعه $\mathrm{Disc}(\tilde{f})$ ناپیوستگی‌های تابع توسیع یافته $\tilde{f}$ با اندازه صفر باشد.

۲۳.۵ **گزاره.** اگر تابع پیوسته $f : U \to \mathbb{R}$ تعریف شده بر زیر مجموعه باز U از $\mathbb{R}^n$ دارای محمل فشرده باشد، آنگاه f بر U انتگرالپذیر ریمن است.

برهان : چون تابع f بر مجموعه‌ای فشرده پیوسته است، پس کراندار می‌باشد. چون محمل f فشرده است، بنابراین $\mathrm{supp}(f)$ در $\mathbb{R}^n$ بسته و کراندار می‌باشد. ادعا می‌کنیم که توسیع $\tilde{f}$ پیوسته است.

چون $\tilde{f}$ بر U با f برابر است، تابع توسیع یافته $\tilde{f}$ بر U پیوسته است، و بر متمم U در $\mathbb{R}^n$ خوشتعریف می‌باشد. اگر $p \notin U$، آنگاه $p \notin \mathrm{supp}\, f$. چون $\mathrm{supp}(f)$ زیر مجموعه‌ای بسته از $\mathbb{R}^n$ است، گوی بازی B شامل p وجود دارد که از $\mathrm{supp}(f)$ مجزا می‌باشد. بر این گوی باز $\tilde{f} \equiv 0$، که ایجاب می‌کند $\tilde{f}$ در $p \notin U$ پیوسته باشد. در نتیجه $\tilde{f}$ بر $\mathbb{R}^n$ پیوسته است. بنابه قضیه لبگ، تابع f بر U انتگرالپذیر ریمن می‌باشد. □

۲۳.۶ **مثال.** تابع پیوسته $f : (-1, 1) \to \mathbb{R}$ با ضابطه $f(x) = \tan(\pi x/2)$ بر مجموعه‌ای باز و بطول متناهی از $\mathbb{R}$ تعریف می‌گردد، ولی کراندار نیست (به شکل ۲.۲۳ توجه شود). محمل f بازه باز $(-1, 1)$ است، که فشرده نیست. بنابراین، تابع f در مفروضات قضیه لبگ یا گزاره ۲۳.۵صدق نمی‌کند. توجه کنید که f انتگرالپذیر ریمن نیست.



شکل ۲.۲۳: تابع $f(x) = \tan(\pi x/2)$ بر بازه $(-1, 1)$

۲۳.۷ **یادداشت.** محمل تابع حقیقی-مقدار $f : A \to B$ برابر بستار مجموعه نقاطی است که تابع بر آنها صفر نمی‌شود $C := \{x \in \mathrm{Dom}(f) \,|\, f(x) \neq 0\}$، نسبت به دامنه‌اش. یعنی، مقطع همه مجموعه‌های

[۱] Lebesgue's theorem [۲] measure zero

بسته ای D از دامنه تابع که $C \subseteq D$. در مثال ۲۳.۶، محمل f بازه باز $(-1,1)$ است نه بازه بسته $[-1,1]$، زیرا دامنه f برابر $(-1,1)$ است نه $\mathbb{R}$.

۲۳.۸ **تعریف.** زیر مجموعه $A \subseteq \mathbb{R}^n$ را در صورتی دامنه انتگرالپذیر گوییم که مرز توپولوژیک آن $\mathrm{bd}(A)$ با اندازه صفر باشد.

شکلهای آشنای هندسی، نظیر مثلث، مستطیل، و دیسکهای دوار همگی نمونههایی از دامنههای انتگرالگیری در $\mathbb{R}^2$ هستند.

۲۳.۹ **گزاره.** *هر تابع پیوسته کراندار f تعریف شده بر یک دامنه انتگرالگیری A در $\mathbb{R}^n$، بر A انتگرالپذیر ریمن است.*

برهان : گیریم $\tilde{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ توسیع f به کل $\mathbb{R}^n$ با صفر گرفتن باشد. چون f بر A پیوسته است، توسیع $\tilde{f}$ لزوما بر کلیه نقاط داخلی A پیوسته است. به وضوح، $\tilde{f}$ بر تمام نقاط خارجی A نیز پیوسته است، زیرا بر همسایگی‌ای از هر یک از آن نقاط برابر صفر می‌باشد. بنابراین، مجموعه ناپیوستگی‌های $\tilde{f}$ زیر مجموعه‌ای از $\mathrm{bd}(A)$ می‌باشد، که با اندازه صفر است. بنابه قضیه لبگ، f بر A انتگرالپذیر ریمن می‌باشد. □

بخش ۳.۲۳ انتگرال n–فرم بر $\mathbb{R}^n$

اگر یک دستگاه مختصات $x^1, \cdots, x^n$ بر $\mathbb{R}^n$ انتخاب گردد، هر n–فرم بر $\mathbb{R}^n$ را با تابعی بر $\mathbb{R}^n$ یکی می‌توان گرفت، چرا که هر n–فرم را برای f ای یکتا به صورت $\omega = f(x)\,dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n$ می‌توان نوشت. به این طریق، نظریه انتگرال ریمن برای توابع بر $\mathbb{R}^n$ را به n–فرمهای بر $\mathbb{R}^n$ می‌شود تعمیم داد.

۲۳.۱۰ **تعریف.** گیریم $\omega = f(x)\,dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n$ یک n–فرم هموار بر زیر مجموعه باز $U \subseteq \mathbb{R}^n$ با مختصات استاندارد $x^1, \cdots, x^n$ است. انتگرال ω بر زیر مجموعه $A \subseteq U$ را به صورت انتگرال ریمن تابع $f(x)$ تعریف می‌کنیم:

$$\begin{aligned}\int_A \omega &= \int_A f(x)\,dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n \\ &:= \int_A f(x)\,dx^1 \cdots dx^n,\end{aligned}$$

مشروط به اینکه انتگرال ریمن وجود داشته باشد.

۲۳.۱۱ **یادداشت.** در این تعریف لازم است که n–فرم بر اساس فرم $dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n$ و با همین ترتیب نوشته شود. برای انتگرالگیری از مثلا $\tau = f(x)\,dx^2 \wedge dx^1$ بر A، بایستی چنین عمل کنیم:

$$\begin{aligned}\int_A \tau &= \int_A -f(x)\,dx^1 \wedge dx^2 \\ &= -\int_A f(x)\,dx^1 dx^2.\end{aligned}$$

۲۳.۱۲ مثال. اگر f تابع پیوسته و کرانداری بر دامنه انتگرال‌گیری A در $\mathbb{R}^n$ باشد، آنگاه بنابه گزاره ۲۳.۹ انتگرال $\omega = f(x)\,dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n$ وجود دارد.

ببینیم انتگرال یک n–فرم $\omega = f(x)\,dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n$ بر زیر مجموعه‌ای باز $U \subseteq \mathbb{R}^n$ نسبت به تغییر متغیر چگونه رفتار می‌کند. هر تغییر متغیر بر U توسط یک دیفئومورفیسم $T : \mathbb{R}^n \supset V \to U \subset \mathbb{R}^n$ تعریف می‌گردد. گیریم $x = (x^1, \cdots, x^n)$ مختصات استاندارد بر U و $y = (y^1, \cdots, y^n)$ بر مختصات استاندارد بر V باشد. در این صورت $T^i := x^i \circ T = T^*(x^i)$ درآیه i ام T می‌باشد. فرض کنیم U و V همبند بوده و ماتریس ژاکوبی $[\partial T^i / \partial y^j]$ را با نماد $J(T)$ نشان دهیم. بنابه نتیجه ۱۸.۴، داریم

$$\begin{aligned}
\int_V T^*\omega &= \int_V (T^*f)\, T^*dy^1 \wedge \cdots \wedge dy^n && \text{(بنابه گزاره ۱۸.۱۲)}\\
&= \int_V (f\circ T)\, dT^1 \wedge \cdots \wedge dT^n && (\text{چون } T^*d = dT^*)\\
&= \int_V (f\circ T)\, \det(J(T))\, dy^1 \wedge \cdots \wedge dy^n\\
&= \int_V (f\circ T)\, \det(J(T))\, dy^1 \cdots dy^n. && (۴.۲۳)
\end{aligned}$$

از سوی دیگر، فرمول تغییر متغیر مطرح شده در حسابان پیشرفته را به صورت

$$\begin{aligned}
\int_U \omega &= \int_U f\, dx^1 \cdots dx^n && (۵.۲۳)\\
&= \int_V (f\circ T) \left|\det(J(T))\right| dy^1 \cdots dy^n, && (۶.۲۳)
\end{aligned}$$

می‌شود نوشت، که در آن یک قدر مطلق از دترمینان ژاکوبی گرفته شده است. ملاحظه می‌گردد که معادلات (۴.۲۳) و (۵.۲۳) در علامت دترمینان $\left|\det(J(T))\right|$ متفاوتند. بنابراین

$$\int_V T^*\omega = \pm \int_U \omega, \qquad (۷.۲۳)$$

بسته به اینکه دترمینان ژاکوبی $\det(J(T))$ مثبت باشد یا منفی.

بنابه گزاره ۲۱.۲۱، دیفئومورفیسم $T : \mathbb{R}^n \supset V \to U \subset \mathbb{R}^n$ وقتی و تنها وقتی حافظ–جهت است که دترمینان ژاکوبی $\det(J(T))$ بر همه جای V مثبت باشد. معادله (۷.۲۳) نشان می‌دهد که

۲۳.۱۳ نتیجه. انتگرال یک فرم دیفرانسیلی نسبت به دیفئومورفیسمهای از V به U ناوردا نیست، اما در حالت دیفئومورفیسمهای حافظ–جهت، ناوردا می‌باشد.

بخش ۴.۲۳ انتگرال فرم دیفرانسیل بر منیفلد

انتگرال n–فرم بر $\mathbb{R}^n$ چندان تفاوتی با انتگرال یک تابع بر $\mathbb{R}^n$ نداشت. روشی که برای انتگرال‌گیری از فرمها برای حالت منیفلدهای دلخواه در پیش می‌گیریم، تا حدودی متفاوت است. پیش از شروع بحث، نکات زیر را مورد توجه قرار دهید:

(۱) منیفلد بایستی جهتدار باشد (در واقع، $\mathbb{R}^n$ با جهت استاندارد فرض شده بود).

(۲) بر منیفلدی با بعد n تنها از n−فرم می‌شود انتگرال گرفت، نه از یک تابع.

(۳) n−فرمهای مورد بررسی باید با محمل فشرده باشند.

گیریم M منیفلدی جهتدار و با بعد n بوده و $\{(U_\alpha, \phi_\alpha)\}$ یک اطلس جهتدار بر M باشد. فضای برداری k−فرمهای هموار با محمل فشرده بر M را با $\Omega_c^k(M)$ نشان می‌دهیم. فرض کنید (U, ϕ) چارتی از این اطلس باشد. اگر $\omega \in \Omega_c^k(U)$ یک n−فرم با محمل فشرده بر U باشد، آنگاه چون $\phi : U \to \phi(U)$ دیفئومورفیسم است، $(\phi^{-1})^* \omega$ نیز یک n−فرم با محمل فشرده بر زیر مجموعه باز $\phi(U) \subseteq \mathbb{R}^n$ می‌باشد. انتگرال ω بر U را به صورت

$$\int_U \omega := \int_{\phi(U)} (\phi^{-1})^* \omega, \tag{۸.۲۳}$$

تعریف می‌کنیم.

اگر (U, ψ) چارت دیگری از این اطلس با همان دامنه U باشد، آنگاه $\phi \circ \psi^{-1} : \psi(U) \to \phi(U)$ دیفئومورفیسم حافظ−جهت است، و بنابراین

$$\begin{aligned} \int_{\phi(U)} (\phi^{-1})^* \omega &= \int_{\psi(U)} (\phi \circ \psi^{-1})^* (\phi^{-1})^* \omega \\ &= \int_{\psi(U)} (\psi^{-1})^* \omega. \end{aligned}$$

بنابراین، انتگرال $\int_U \omega$ بر دامنه مختصاتی U از اطلس خوشتعریف است، و به انتخاب دستگاه مختصات بر U بستگی ندارد. بنابه خطی بودن انتگرال بر $\mathbb{R}^n$، اگر $\omega, \tau \in \Omega_c^k(U)$، آنگاه

$$\int_U \omega + \tau = \int_U \omega + \int_U \tau.$$

حال فرض کنیم $\omega \in \Omega_c^k(U)$. یک افراز یکانی $\{\rho_\alpha\}$ زیردست پوشش باز $\{U_\alpha\}$ انتخاب می‌کنیم. چون ω با محمل فشرده است و افراز یکانی دارای خاصیت محمل موضعا متناهی است، بنابه مساله ۱۸.۲۱، همه $\rho_\alpha \omega$ ها بجز تعدادی متناهی از آنها صفرند. پس، عملا مجموع

$$\omega = \sum_\alpha \rho_\alpha \omega,$$

متناهی است. چون بنابه مساله ۱۸.۲۱، داریم $\operatorname{supp}(\rho_\alpha \omega) \subseteq \operatorname{supp} \rho_\alpha \cap \operatorname{supp} \omega$، پس $\operatorname{supp}(\rho_\alpha \omega)$ زیر مجموعه‌ای بسته از مجموعه فشرده $\operatorname{supp} \omega$ است، و بنابراین فشرده می‌باشد. چون $\rho_\alpha \omega$ یک n−فرم با محمل فشرده در چارت U_α است، انتگرالش $\int_{U_\alpha} \rho_\alpha \omega$ تعریف می‌گردد. بنابراین، انتگرال ω بر M را به صورت مجموع

$$\int_M \omega := \sum_\alpha \int_{U_\alpha} \rho_\alpha \omega, \tag{۹.۲۳}$$

تعریف می‌کنیم. برای اینکه این انتگرال خوشتعریف باشد، باید نشان دهیم که از انتخاب اطلس جهتدار و همچنین انتخاب افراز یکانی مستقل می‌باشد. گیریم $\{(V_\beta,\psi_\beta)\}$ اطلس جهتدار دیگری برای M باشد که همان جهت بر M را مشخص می‌کند، و $\{\chi_\beta\}$ یک افراز یکانی زیردست برای $\{\chi_\beta\}$ باشد. در این صورت $\{(U_\alpha\cap V_\beta,\phi_{U_\alpha\cap V_\beta})\}$ و $\{(U_\alpha\cap V_\beta,\psi_{U_\alpha\cap V_\beta})\}$ اطلسهایی برای M هستند که جهت بر آن را نیز مشخص می‌کنند، و بعلاوه

$$\begin{aligned}\sum_\alpha\int_{U_\alpha}\rho_\alpha\omega &= \sum_\alpha\int_{U_\alpha}\rho_\alpha\Big(\sum_\beta\chi_\beta\Big)\omega && (\text{چون } \textstyle\sum_\beta\chi_\beta=1)\\ &= \sum_\alpha\sum_\beta\int_{U_\alpha}\rho_\alpha\chi_\beta\,\omega && (\text{این مجموعها متناهی هستند})\\ &= \sum_\alpha\sum_\beta\int_{U_\alpha\cap V_\beta}\rho_\alpha\chi_\beta\,\omega,\end{aligned}$$

تساوی اخر به این دلیل است که محمل $\rho_\alpha\chi_\beta$ مشمول در $U_\alpha\cap V_\beta$ می‌باشد. به دلیل تقارن $\sum_\beta\int_{V_\beta}\chi_\beta\omega$ نیز با همان نتیجه برابر است. در نتیجه

$$\sum_\alpha\int_{U_\alpha}\rho_\alpha\omega = \sum_\beta\int_{V_\beta}\chi_\beta\omega,$$

که این به معنی خوشتعریفی انتگرال (۹.۲۳) است.

۲۳.۱۴ گزاره. گیریم ω $n-$فرم با محمل فشرده بر $n-$منیفلد جهتدار M باشد. اگر $-M$ همان منیفلد با جهت برعکس باشد، آنگاه $\int_{-M}\omega=-\int_M\omega$. بعبارت دیگر، با تعویض جهت بر M، علامت انتگرال بر M تغییر می‌کند.

برهان : بنابه تعریف انتگرال ((۸.۲۳) و (۹.۲۳))، کافی است نشان دهیم که به ازای هر چارت $(U,\phi)=(U,x^1,\cdots,x^n)$ و هر فرم دیفرانسیلی $\tau\in\Omega_c^k(U)$، اگر $(U,\bar\phi)=(U,-x^1,\cdots,x^n)$ چارتی با جهت وارون باشد، آنگاه

$$\int_{\bar\phi(U)}(\bar\phi^{-1})^*\tau = -\int_{\phi(U)}(\bar\phi^{-1})^*\tau.$$

گیریم $r^1,\cdots,r^n$ مختصات استاندارد بر $\mathbb{R}^n$ باشد. در این صورت $x^i=r^i\circ\phi$ و $r^i=x^i\circ\phi^{-1}$. چون $\bar\phi$ با ϕ تنها در $i=1$ متفاوت است، یعنی

$$-x^1=r^1\circ\bar\phi \qquad \text{و} \qquad r^1=-x^1\circ\bar\phi^{-1}$$

فرض کنید $\tau=f\,dx^1\wedge\cdots\wedge dx^n$ بر U، در این صورت

$$\begin{aligned}(\bar\phi^{-1})^*\tau &= (f\circ\bar\phi^{-1})\,d(x^1\circ\bar\phi^{-1})\wedge d(x^2\circ\bar\phi^{-1})\wedge\cdots\wedge d(x^n\circ\bar\phi^{-1})\\ &= -(f\circ\bar\phi^{-1})\,dr^1\wedge dr^2\wedge\cdots\wedge dr^n\end{aligned} \tag{۱۰.۲۳}$$

به صورت مشابه

$$(\phi^{-1})^*\tau = (f\circ\phi^{-1})\,dr^1\wedge dr^2\wedge\cdots\wedge dr^n.$$

چون $\phi\circ\bar{\phi}^{-1}:\bar{\phi}(U)\to\phi(U)$ با ضابطه

$$(\phi\circ\bar{\phi}^{-1})(a^1,a^2,\cdots,\cdots,a^n) = (-a^1,a^2,\cdots,\cdots,a^n),$$

است، در نتیجه دترمینان ماتریس ژاکوبی آن یک است:

$$\left|J(\phi\circ\bar{\phi}^{-1})\right| = |-1| = 1. \tag{۱۱.۲۳}$$

بنابراین

$$\begin{aligned}
\int_{\bar{\phi}(U)}(\bar{\phi}^{-1})^*\tau &= -\int_{\bar{\phi}(U)}(f\circ\bar{\phi}^{-1})\,dr^1\cdots dr^n && \text{(بنابه ۱۰.۲۳)}\\
&= -\int_{\bar{\phi}(U)}(f\circ\bar{\phi}^{-1})\circ(\phi\circ\bar{\phi}^{-1})\left|J(\phi\circ\bar{\phi}^{-1})\right|dr^1\cdots dr^n && \text{(بنابه ۱۱.۲۳)}\\
&= -\int_{\phi(U)}(f\circ\phi^{-1})\,dr^1\cdots dr^n && \text{(بنابه فرمول تغییر متغیر از حسابان)}\\
&= -\int_{\phi(U)}(\phi^{-1})^*\tau,
\end{aligned}$$

و برهان تمام است. □

بحث انتگرالگیری مشروح در بالا را کلمه به کلمه به حالت منیفلدهای مرزدار جهتدار می‌شود تعمیم داد. در ادامه از این مطلب استفاده خواهیم نمود. واقعیت این است که محاسبه انتگرالها به شیوه‌ای که مطرح شد بسیار دشوار است؛ اگر n−فرم را در افراز یکانی ضرب کنیم، فرمولهای عجیبی برای انتگرالگیری ظاهر می‌شود. استفاده از مفهوم مجموعه‌های پیمایش شده برای محاسبه انتگرال بر منیفلد جهتدار، بهتر جواب می‌دهد.

۲۳.۱۵ تعریف. منظور از مجموعه پیمایش شده در n−منیفلد جهتدار مفروض M، مجموعه‌ای A به همراه نگاشتی هموار $F:D\to M$ از یک دامنه انتگرالگیری فشرده $D\subset\mathbb{R}^n$ به M است، به گونه‌ای که $A=F(D)$ و F وقتی به $\operatorname{int}(D)$ تحدید می‌گردد، دیفئومرفیسمی حافظ−جهت از $\operatorname{int}(D)$ به $F(\operatorname{int}(D))$ باشد. توجه کنید که بنابه ناوردایی هموار دامنه برای منیفلدها (یادداشت ۲۲.۶)، $F(\operatorname{int}(D))$ زیر مجموعه‌ای باز از M است. نگاشت هموار $F:D\to M$ را یک پیمایش برای A می‌نامند.

۲۳.۱۶ تعریف. در صورتی که A زیر مجموعهای پیمایش شده از M توسط پیمایش $F:D\to A$ باشد و ω یک n−فرم هموار بر M باشد (با محمل نه لزوما فشرده)، در این صورت $\int_A\omega$ را به صورت $\int_D F^*\omega$ تعریف می‌کنیم.

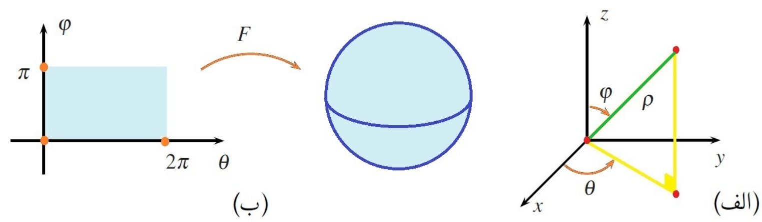
می‌شود نشان داد که تعریف $\int_A\omega$ مشروح در بالا، مستقل از پیمایش است و در حالتی که A منیفلد باشد، این با تعریف قبلی برای انتگرال فرم بر منیفلد مطابقت دارد. با تقسیم نمودن یک منیفلد جهتدار به

اجتماع مجموعه‌های پیمایش شده، روشی موثر برای محاسبه انتگرال بر منیفلد بدست می‌آید. هدف این نیست که بیشتر از این وارد این بحث شویم، خواننده علاقه‌مند را به [قضیه ۲۵,۴، صفحه ۲۱۳ از ۳۱] یا [گزاره ۱۴,۷، صفحه ۳۳۶ از ۲۵] ارجاع می‌دهیم. به یک مثال بسنده می‌کنیم.

۲۳.۱۷ (انتگرال بر کره). در مختصات کروی، ρ نمایشگر فاصله $\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ از نقطه (x,y,z) تا مبداء است، φ زاویه بین بردار $\langle x,y,z\rangle$ و نیم خط مثبت x−محور است، و θ زاویه بین بردار$\langle x,y\rangle$ در (x,y)−صفحه با نیم خط مثبت x−محور است (به شکل ۳.۲۳ - الف توجه شود). گیریم ω 2−فرم هموار

$$\omega=\begin{cases}(1/x)\,dy\wedge dz & x\neq 0 \text{ اگر}\\ (1/y)\,dz\wedge dx & y\neq 0 \text{ اگر}\\ (1/z)\,dx\wedge dy & z\neq 0 \text{ اگر}\end{cases}$$

بر کره $\mathbb{S}^2$ در $\mathbb{R}^3$ باشد. $\int_{\mathbb{S}^2}\omega$ را می‌خواهیم محاسبه کنیم.



شکل ۳.۲۳: (الف) مختصات کروی در $\mathbb{R}^3$ (ب) پیمایش توسط مختصات کروی

سوای ضریب ۲، ω همان 2−فرمی از مساله ۱۹.۲۳ − (ب) بر کره $\mathbb{S}^2$ است. در هندسه ریمانی نشان داده می‌شود که ω فرم حجمی برای کره $\mathbb{S}^2$ نسبت به متر اقلیدسی القایی بر آن می‌باشد. بنابراین، انتگرال $\int_{\mathbb{S}^2}\omega$ حجم کره واحد را محاسبه می‌کند.

*

حل: کره را با مختصات کروی می‌شود پیمایش نمود (به شکل ۳.۲۳ - الف توجه شود):

$$F(\varphi,\theta)=(\sin\varphi\cos\theta,\sin\varphi\sin\theta,\cos\varphi),$$

بر $D=\{(\varphi,\theta)\in\mathbb{R}^2\,|\,0\leq\varphi\leq\pi,\,0\leq\theta\leq 2\pi\}$. چون

$$F^*x=\sin\varphi\cos\theta,\qquad F^*y=\sin\varphi\sin\theta,\qquad F^*z=\cos\varphi,$$

بنابراین

$$\begin{aligned}F^*dy &= dF^*y\\ &= \cos\varphi\sin\theta\,d\varphi+\sin\varphi\cos\theta\,d\theta,\\ F^*dz &= dF^*z\\ &= -\sin\varphi\,d\varphi,\end{aligned}$$

پس به ازای $x \neq 0$، داریم

$$\begin{aligned} F^*\omega &= \frac{F^*dy \wedge F^*dz}{F^*x} \\ &= \sin\varphi\, d\varphi \wedge d\theta. \end{aligned}$$

برای $y \neq 0$ و $z \neq 0$ با محاسبه $F^*\omega$ نتایج مشابه بدست می‌آید. بنابراین، $F^*\omega = \sin\varphi\, d\varphi$ بر کل D، و در نتیجه

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{S}^2} \omega &= \int_D F^*\omega \\ &= \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} \sin\varphi\, d\varphi\, d\theta \\ &= 2\pi\big[-\cos\varphi\big]_0^{2\pi} \\ &= 4\pi. \end{aligned}$$

در تمام بحث انتگرل مطرح شده در بالا، منیفلد M صراحتا با بعد بزرگتر یا مساوی یک در نظر گرفته شده بود. اکنون، به انتگرالگیری بر منیفلدهای صفر-بعدی می‌پردازیم.

۲۳.۱۸ تعریف (انتگرال گیری بر منیفلد صفر بعدی). هر منیفلد صفر بعدی، جهتدار و فشرده M، مجموعه‌ای متناهی از نقاط است، که هر نقطه دارای جهت $+1$ و یا -1 می‌باشد. این را به صورت $M = \sum p_i - \sum q_j$ می‌نویسیم. در این صورت، انتگرال 0-فرم $f : M \to \mathbb{R}$ را به شکل زیر تعریف می‌کنیم:

$$\int_M f := \sum f(p_i) - \sum f(q_j).$$

بخش ۵.۲۳ قضیه استوکس

گیریم M منیفلدی جهتدار، n بعدی و مرزدار باشد. مرز آن ∂M را با جهت مرزی همراه نموده و فرض می‌کنیم $i : \partial M \hookrightarrow M$ نگاشت احتوی آن باشد. اگر ω یک $(n-1)$-فرم هموار بر M باشد، بهتر در ادامه، بجای $\int_{\partial M} i^*\omega$ از $\int_{\partial M}\omega$ استفاده شود.

۲۳.۱۹ قضیه استوکس[۱]. به ازای هر $(n-1)$-فرم هموار و با محمل فشرده بر منیفلد n بعدی و جهتدار M، رابطه زیر بر قرار است:

$$\int_M d\omega = \int_{\partial M} \omega.$$

[۱] Stokes's Theorem

برهان : اطلسی $\{(U_\alpha,\phi_\alpha)\}$ برای M انتخاب می‌کنیم که هر یک از U_α ها توسط دیفئومورفیسمس حافظ-جهت با $\mathbb{R}^n$ و یا با $\mathbb{H}^n$ دیفئومورف می‌باشد. این ممکن است، زیرا هر گوی باز با $\mathbb{R}^n$ و هر نیم دیسک با قطرش بعنوان مرز، با $\mathbb{H}^n$ دیفئومورف است (به تمرین ۱.۵ توجه شود). گیریم $\{\rho_\alpha\}$ یک افراز یکانی زیردست پوشش باز $\{U_\alpha\}$ باشد. همان طور که در فصل قبل دیدیم، $(n-1)$-فرم $\rho_\alpha\omega$ دارای محمل فشرده در U_α است.

فرض کنیم قضیه استوکس برای $\mathbb{R}^n$ و $\mathbb{H}^n$ برقرار باشد؛ حکم اول در حسابان اثبات شده است (مساله ۲۳.۴)، و حکم دوم را به عنوان یک لم جداگانه اثبات می‌کنیم. بنابراین، حکم برای همه چارتهای U_α از اطلس مورد نظر درست است، زیرا هر کدام با $\mathbb{R}^n$ و یا $\mathbb{H}^n$ دیفئومورفند. همچنین توجه شود که $(\partial M)\cap U_\alpha=\partial M$. بنابراین

$$\begin{aligned}
\int_M d\omega &= \int_{\partial M}\sum_\alpha \rho_\alpha\omega && (\text{چون } \textstyle\sum_\alpha\rho_\alpha=1)\\
&= \sum_\alpha\int_{\partial M}\rho_\alpha\omega && (\text{بنابه مساله ۱۸.۲۱، مجموع } \textstyle\sum_\alpha\rho_\alpha\omega \text{ متناهی است})\\
&= \sum_\alpha\int_{\partial U_\alpha}\rho_\alpha\omega && (\text{زیر } \operatorname{supp}(\rho_\alpha\omega)\subseteq U_\alpha)\\
&= \sum_\alpha\int_{U_\alpha}d(\rho_\alpha\omega) && (\text{قضیه استوکس برای } U_\alpha)\\
&= \sum_\alpha\int_M d(\rho_\alpha\omega) && (\text{زیر } \operatorname{supp}(d(\rho_\alpha\omega))\subseteq U_\alpha)\\
&= \int_M d\Big(\sum_\alpha\rho_\alpha\omega\Big) && (\text{مجموع } \textstyle\sum_\alpha\rho_\alpha\omega \text{ متناهی است})\\
&= \int_M d\omega,
\end{aligned}$$

و به این ترتیب، برهان تمام است. □

۲۳.۲۰ لم. حکم قضیه استوکس برای $\mathbb{H}^n$ درست است.

برهان : حکم را برای حالت $n=2$ اثبات می‌کنیم، حالت کلی مشابه است. گیریم x,y مختصات بر $\mathbb{H}^2$ باشد. در این صورت جهت استاندارد بر $\mathbb{H}^2$ توسط فرم $dx\wedge dy$ مشخص می‌گردد، و جهت مرزی بر $\partial\mathbb{H}^2=\mathbb{R}$ توسط فرم $\iota_{-\partial/\partial y}(dx\wedge dy)=dx$ مشخص می‌شود.

فرم ω ترکیبی خطی به شکل

$$\omega=f(x,y)\,dx+g(x,y)\,dy \qquad (۱۲.۲۳)$$

است، که f و g توابعی هموار بر $\mathbb{H}^2$ هستند. چون محمل توابع f و g فشرده‌اند، عددی حقیقی $0 < a$ باندازه کافی بزرگ چنان می‌توانیم بیابیم که محمل توابع f و g در داخل مستطیل بسته $[-a,a]\times[0,a]$ قرار بگیرند. حال چنانچه از نمادهای f_x و f_y برای نشان دادن مشتقات چزئی f نسبت به x و y استفاده کنیم، آنگاه

$$d\omega = \left(\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y}\right) dx \wedge dy = (g_x - f_y)\, dx \wedge dy,$$

و بنابراین

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{H}^2} d\omega &= \int_{\mathbb{H}^2} g_x dx\, dy - \int_{\mathbb{H}^2} f_y dx\, dy \\ &= \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty g_x\, dx\, dy - \int_{-\infty}^\infty \int_0^\infty f_y\, dx\, dy \\ &= \int_0^a \int_{-a}^a g_x\, dx\, dy - \int_{-a}^a \int_0^a f_y\, dx\, dy. \end{aligned} \qquad (۱۳.۲۳)$$

در این عبارت

$$\int_{-a}^a g_x(x,y)\, dx = g(x,y)\Big|_{x=-a}^{x=a} = 0,$$

زیرا $\operatorname{supp} g$ در درون مستطیل بسته $[-a,a]\times[0,a]$ قرار دارد. به صورت مشابه

$$\begin{aligned} \int_0^a f_y(x,y)\, dx &= f(x,y)\Big|_{y=0}^{y=a} \\ &= -f(x,0), \end{aligned}$$

زیرا $f(x,a) = 0$. اکنون، از (۱۳.۲۳) نتیجه می‌شود که

$$\int_{\mathbb{H}^2} d\omega = \int_{-a}^a f(x,0)\, dx.$$

از سوی دیگر، $\partial\mathbb{H}^2$ برابر $x-$محور است و بر آن $dy = 0$. بنابراین از (۱۲.۲۳) نتیجه می‌گیریم که تحدید ω به $\partial\mathbb{H}^2$ برابر $f(x,0)\, dx$ است، و

$$\int_{\partial\mathbb{H}^2} \omega = \int_{-a}^a f(x,0)\, dx.$$

این قضیه استوکس را برای نیم صفحه بالایی اثبات می‌کند. □

بخش ۶.۲۳ انتگرال خط و قضیه گرین

در این بخش نشان می‌دهیم که چطور قضیه استوکس برای منیفلدها، در حالت خاص $\mathbb{R}^2$ به قضیه‌ای کلاسیک از حسابان تبدیل می‌شود. برای شروع، یادآور می‌شویم که اگر $\mathbf{F} = \langle P, Q, R\rangle$ و $\mathbf{r} = (x, y, z)$، آنگاه با نمادهای در حسابان، داریم $\mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = P\,dx + Q\,dy + R\,dz$. مثل در حسابان، در این بخش فرض می‌کنیم تمام میدانهای برداری و توابع باندازه کافی مشتقپذیرند و در همه موارد انتگرالهای مطرح شده وجود دارند.

ابتدا نشان می‌دهیم که قضیه بنیادی انتگرال خط، نتیجه‌ای (یا بعبارت دیگر، حالت خاصی) از قضیه استوکس است.

۲۳.۲۱ قضیه بنیادی انتگرالهای خط. گیریم C یک منحنی هموار در فضا $\mathbb{R}^3$ پیمایش شده توسط نگاشت $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ که $a \le t \le b$ باشد و $\mathbf{F}$ میدانی برداری بر $\mathbb{R}^2$ باشد. اگر برای تابع اسکالر f ای $\mathbf{f} = \operatorname{grad} f$، آنگاه

$$\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = f(\mathbf{r}(b)) - f(\mathbf{r}(a)).$$

برهان : در قضیه استوکس فرض کنیم M منحنی C پیمایش شده توسط نگاشت $\mathbf{r}()$ باشد، که $a \le t \le b$، و ω تابع f بر C باشد، در این صورت، بنابه حکم قضیه استوکس، داریم

$$\begin{aligned}\int_C \omega &= \int_C df\\ &= \int_C \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz\\ &= \int_C \operatorname{grad} f\cdot d\mathbf{r},\end{aligned}$$

در حالی که

$$\begin{aligned}\int_{\partial C} \omega &= f\Big|_{\mathbf{r}(a)}^{\mathbf{r}(b)}\\ &= f(\mathbf{r}(b)) - f(\mathbf{r}(a)),\end{aligned}$$

که حکم را اثبات می‌نماید. □

۲۳.۲۲ قضیه گرین[۱]. اگر D ناحیه مسطحه با مرز ∂D بوده و P و Q توابعی هموار بر D باشد، آنگاه

$$\int_{\partial D} P\,dx + Q\,dy = \int_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dA.$$

[۱] Green's theorem

برهان : در این گزاره dA نماد استاندارد در حسابان برای نشان دادن $dxdy$ است. برای بدست آوردن حکم، کافی است فرض کنیم $M = D$، که مرزش ∂D می‌شود، و ω یک-فرم $P\,dx + Q\,dy$ بر D می‌باشد. در این صورت،

$$\int_{\partial D} \omega = \int_{\partial D} P\,dx + Q\,dy,$$

در حالی که

$$\begin{aligned}
\int_D d\omega &= \int_D P_y\,dy \wedge dx + Q_x\,dx \wedge dy \\
&= \int_D (Q_x - P_y)\,dx \wedge dy \\
&= \int_D (Q_x - P_y)\,dx\,dy \\
&= \int_D (Q_x - P_y)\,dA.
\end{aligned}$$

یعنی، قضیه گرین نیز حالت خاص قضیه استوکس می‌باشد. □

بخش ۷.۲۳ تمرینات

۲۳.۱ مساحت بیضی. با استفاده از فرمول تغییر متغیر استاندارد در حسابان، مساحت ناحیه محدود به بیضی $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ در $\mathbb{R}^2$ را محاسبه کنید.

۲۳.۲ ویژگی اساس کرنداری در $\mathbb{R}^n$. ثابت کنید که زیر مجموعه $A \subset \mathbb{R}^n$ وقتی و تنها وقتی کراندار است که بستارش $\bar{A}$ در $\mathbb{R}^n$ فشرده باشد.

۲۳.۳ رفتار انتگرال نسبت به دیفئومورفیسم. فرض کنید M و N دو منیفلد n بعدی، جهتدار و همبند بوده و $F : N \to M$ دیفئومورفیسم باشد. ثابت کنید که به ازای هر $\omega \in \Omega_c^k(M)$ ای

$$\int_N F^*\omega = \pm \int_M \omega,$$

علامت در فرمول به اینکه F حافظ-جهت باشد یا جهت-برگردان بستگی دارد.

۲۳.۴ قضیه استوکس. قضیه استوکس را برای $\mathbb{R}^n$ و $\mathbb{H}^n$ اثبات کنید.

۲۳.۵ فرم مساحت بر کره واحد. ثابت کنید که فرم مساحت ω مطرح شده در مثال ۲۳.۱۷ با فرم جهت بر کره واحد که در مساله ۲۲.۹ مطرح گردید، برابر $x\,dy \wedge dz - y\,dx \wedge dz + z\,dx \wedge dy$ است.

کتاب‌نامه

[۱] م. نجفی‌خواه، ریاضی عمومی ۱، سات، ۱۳۸۵.

[۲] م. نجفی‌خواه، ریاضی عمومی ۲، سات، ۱۳۸۷.

[۳] م. نجفی‌خواه، معادلات دیفرانسیل معمولی، سات، ۱۳۹۰.

[۴] م. اسپیوک، حسابان بر خمینه‌ها، ترجمه م. نجفی خواه، سات، ۱۳۸۸. (چهارکتاب اخیر را از این آدرس می‌شود تهیه نمود: http://webpages.iust.ac.ir/m_nadjafikhah/NDEB.htm)

[5] V. I. Arnold, Mathematical Methods of Classical Mechanics, 2nd ed., Springer, New York, 1989.

[6] P. Bamberg and S. Sternberg, A Course in Mathematics for Students of Physics, Vol. 2, Cambridge University Press, Cambridge, UK, 1990.

[7] W. Boothby, An Introduction to Differentiable Manifolds and Riemannian Geometry, 2nd ed., Academic Press, Boston, 1986.

[8] R. Bott and L.W. Tu, Differential Forms in Algebraic Topology, 3rd corrected printing, Graduate Texts in Mathematics, Vol. 82, Springer, New York, 1995.

[9] É. Cartan, Sur certaines expressions différentielles et le problème de Pfaff, Ann. E.N.S. (3), vol. XVI (1899), pp. 239–332 (= Oeuvres compl‘etes, vol. II, Gauthier-Villars, Paris, 1953, pp. 303–396).

[10] C. Chevalley, Theory of Lie Groups, Princeton University Press, Princeton, 1946.

[11] L. Conlon, Differentiable Manifolds, 2nd ed., Birkhäuser Boston, Cambridge, MA, 2001.

[12] G. de Rham, Sur l'analysis situs des variétés à n−dimension, Journal Math. Pure et Appl. (9) 10 (1931), pp. 115–200.

[13] G. de Rham, Über mehrfache Integrale, Abhandlungen aus dem Mathematischen Hansischen Universität (Universität Hamburg) 12 (1938), pp. 313–339.

[14] G. de Rham, Variétés différentiables, Hermann, Paris, 1960 (in French); Differentiable Manifolds, Springer, New York, 1984 (in English).

[15] D. Dummit and R. Foote, Abstract Algebra, 3rd ed., John Wiley and Sons, Hoboken, NJ, 2004.

[16] T. Frankel, The Geometry of Physics: An Introduction, 2nd ed., Cambridge University Press, Cambridge, UK, 2003.

[17] F. G. Frobenius, Über lineare Substitutionen und bilineare Formen, Journal für die reine und angewandte Mathematik (Crelle's Journal) 84 (1878), pp. 1–63. Reprinted in Gesammelte Abhandlungen, Band I, pp. 343–405.

[18] C. Godbillon, Géométrie diff´erentielle et mécanique analytique, Hermann, Paris, 1969.

[19] E. Goursat, Sur certains systèmes d'équations aux diff´erentielles totales et sur une généralisation du probl'eme de Pfaff, Ann. Fac. Science Toulouse (3) 7 (1917), pp. 1–58.

[20] M. J. Greenberg, Lectures on Algebraic Topology, W. A. Benjamin, Menlo Park, CA, 1966.

[21] V. Guillemin and A. Pollack, Differential Topology, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1974.

[22] A. Hatcher, Algebraic Topology, Cambridge University Press, Cambridge, UK, 2002.

[23] I. N. Herstein, Topics in Algebra, 2nd ed., John Wiley and Sons, New York, 1975.

[24] M. Karoubi and C. Leruste, Algebraic Topology via Differential Geometry, Cambridge University Press, Cambridge, UK, 1987.

[25] V. Katz, The history of Stokes' theorem, Mathematics Magazine 52 (1979), pp. 146–156.

[26] V. Katz, Differential forms, in History of Topology, edited by I. M. James, Elsevier, Amsterdam, 1999, pp. 111–122.

[27] M. Kervaire, A manifold which does not admit any differentiable structure, Commentarii Mathematici Helvetici 34 (1960), pp. 257–270.

[28] M. Kervaire and J. Milnor, Groups of homotopy spheres: I, Annals of Mathematics 77 (1963), pp. 504–537.

[29] W. Lawvere and S. Schanuel, Conceptual Mathematics: A First Introduction to Categories, Cambridge: Cambridge University Press, 1997.

[30] J.M. Lee, Introduction to Smooth Manifolds, Graduate Texts inMathematics, Vol. 218, Springer, New York, 2003.

[31] S. Mac Lean, Categories for the Working Mathematician, GTM 5, 2nd ed, Springer, 1998.

[32] J. E. Marsden and M. J. Hoffman, Elementary Classical Analysis, 2nd ed., W. H. Freeman, New York, 1993.

[33] J. Milnor, On manifolds homeomorphic to the 7−sphere, Annals of Mathematics 64 (1956), pp. 399–405.

[34] J. Milnor, Topology from the Differentiable Viewpoint, University Press of Virginia, Charlottesville, VA, 1965.

[35] J. Munkres, Topology, 2nd ed., Prentice–Hall, Upper Saddle River, NJ, 2000.

[36] J. Munkres, Elements of Algebraic Topology, Perseus Publishing, Cambridge, MA, 1984.

[37] J. Munkres, Analysis on Manifolds, Addison–Wesley, Menlo Park, CA, 1991.

[38] H. Poincaré, Sur les résidus des intégrales doubles, Acta Mathematica 9 (1887), pp. 321–380. Oeuvres, Tome III, pp. 440–489.

[39] H. Poincaré, Analysis situs, Journal de l' École Polytechnique 1 (1895), pp. 1–121; Oeuvres 6, pp. 193–288.

[40] H. Poincaré, Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste, vol. III, Gauthier-Villars, Paris, 1899, Chapter XXII.

[41] W. Rudin, Principles of Mathematical Analysis, 3rd ed., McGraw–Hill, New York, 1976.

[42] M. Spivak, A Comprehensive Introduction to Differential Geometry, Vol. 1, 3rd ed., Publish or Perish, Houston, 2005.

[43] L. W. Tu, An Introduction to Manifolds, 2nd ed., Springer, New York, 2011.

[44] O. Veblen and J. H. C. Whitehead, A set of axioms for differential geometry, Proceedings of National Academy of Sciences 17 (1931), pp. 551–561. The Mathematical Works of J. H. C. Whitehead, Vol. 1, Pergamon Press, 1962, pp. 93–104.

[45] F. Warner, Foundations of Differentiable Manifolds and Lie Groups, Springer, New York, 1983.

[46] M. Zisman, Fibre bundles, fibre maps, in History of Topology, edited by I. M. James, Elsevier, Amsterdam, 1999, pp. 605–629.