بسمه تعالی

دانشگاه آزاداسلامی واحد آزادشهر

عنوان:

ریاضیات

و

کاربردآن

درمدیریت

شامل:
- انتگرال و کاربرد آن
- توابع چند متغیری
- معادلات دیفرانسیل

گرد آورنده: محسن جهان تیغ

بسم الله الرحمن الرحیم

عنوان جزوه:ریاضیات وکاربردآن درمدیریت

مباحث:انتگرال وکاربرد آن/توابع چند متغیری/معادلات دیفرانسیل

گرد آورنده: محسن جهانتیغ

شماره ی دانشجویی:۹۰۱۱۲۱۰۵۴

استاد مربوطه:خانم زهره باقری

پاییز ۱۳۹۲

انتگرال

انتگرال تابع f(x) یعنی کدام تابع بودکه من ازآن مشتق گرفتم وجواب آن f(x) شده است.یعنی $\int 2x\,dx$ کدام تابع بوده است که جوابش $2x$ شده است که آن x^2 است.

اگربالاوپایین نمادانتگرال($\int$) هیچ عددی نباشدانتگرال مانامعین است. ودرآخراین جواب ها $(+c)$

اضافه می کنیم. واگربالاوپایین نماد انتگرال عددوجودداشت($\int_1^2$)انتگرال مامعین می باشدودیگرنیازی نیست درجوابش $+c$ اضافه کنیم.

فرمول های انتگرال

1) $\int k\,dx = kx + c$:

$$\int 5\,dx = 5x + c$$

$$\int 7\,dt = 7t + c$$

2) $$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$$

$$\int x^5\,dx = \frac{x^{5+1}}{5+1} + c = \frac{x^6}{6} + c$$

$$\int x^7 dx = \frac{x^{7+1}}{7+1} + c = \frac{x^8}{8} + c$$

$$\int x^{\frac{1}{3}}\,dx = \frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}} + c$$

$$\int x^{-7}\,dx = \frac{x^{-7+1}}{-7+1} + c = \frac{x^{-6}}{-6} + c$$

$$\int x^{\frac{-5}{3}}\,dx = \frac{-3}{2}x^{\frac{-2}{3}} + c$$

$$\int \sqrt[7]{x^5}\,dx = \int x^{\frac{5}{7}}\,dx = \frac{7}{12}x^{\frac{12}{7}} + c$$

$$\int \frac{1}{x^5}\,dx = \int x^{-5}\,dx = \frac{x^{-5+1}}{-5+1} + c = \frac{x^{-4}}{-4} + c$$

3) $\int x^{-1}\,dx = ln|x| + c$

$$\int \frac{1}{x}dx = ln|x| + c$$

4) $\int a^x\,dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + c$

$$\int 5^x\,dx = \frac{5^x}{ln5} + c$$

$$\int 7^x\,dx = \frac{7^x}{ln7} + c$$

5) $\int e^x\,dx = e^x + c$

6) $\int \sin x = -\cos x + c$

7) $\int \cos x = \sin x + c$

8) $\int (1 + \log x^2)\,dx = \log x + c$

9) $\int (1 + \cot x^2)dx = -\cot x + c$

10) $\int \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}\,dx = sinx^{-1} + c$

$$11)\int\frac{1}{1+x^2}dx=log\,x^{-1}+c$$

$$12)\int\frac{1}{\sqrt{a-x^2}}dx=\sin^{-1}\tfrac{x}{\sqrt{a}}+c$$

$$\int\frac{1}{\sqrt{9-x^2}}dx=\sin^{-1}\frac{x}{\sqrt{9}}+c=\sin^{-1}\frac{x}{3}+c$$

$$13)\int\frac{1}{a+x^2}dx=\frac{1}{\sqrt{a}}log^{-1}\tfrac{x}{\sqrt{a}}+c$$

$$\int\frac{1}{9+x^2}dx=\frac{1}{3}log^{-1}\left(\tfrac{x}{3}\right)+c$$

$$\int\frac{1}{5+x^2}dx=\frac{1}{\sqrt{5}}\ log^{-1}\left(\frac{x}{\sqrt{5}}\right)+c$$

$$\int\frac{1}{3+x^2}dx=\frac{1}{\sqrt{3}}log^{-1}\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)+c$$

قوانین انتگرال:

$$1)\int(x)\pm g(x)=\int f\,(x)\pm\int g\,(x)$$

$$\int(x^9+e^x-\sin x\,)\,dx=\frac{x^{10}}{10}+e^x-(-\cos x)+c$$

$$2)\int k\,f(x)\,dx=k\int f\,(x)dx$$

$$\int 5\sin x=5(-\cos x\,)+c$$

$$\int 7\cos x+5^x+x^6=7(\sin x)+\frac{5^x}{ln5}+\frac{x^7}{7}+c$$

نکته:اگرداخل انتگرال ضرب دوتابع بودطوری که می توانستیم آن دوتابع رادرهم ضرب کنیم ابتداعمل ضرب راانجام داده سپس بعدازساده کردن ازتک تک توابع جداگانه انتگرال می گیریم.

مثال)

$$\int (x^3+3x)\,(x^2-1)dx = \int (x^5-x^3+3x^3-3x)dx = \int (x^5+2x^3-3x)dx =$$

$$\gg \int \frac{x^6}{6} + 2\frac{x^4}{4} - 3\frac{x^2}{2} + c$$

نکته:اگرداخل انتگرال تقسیم دوعبارتی بودکه می توانستیم آن دورابرهم تقسیم کنیم نخست عمل تقسیم راانجام داده سپس ساده کرده،حال ازتک تک جملات جداگانه انتگرال می گیریم.

مثال)

$$\int \frac{x^5+x^2+x^3}{x^3}dx = \int (x^2+x^{-1}+1)\,dx = \frac{x^3}{3} + ln|x| + x + c$$

روش های انتگرال گیری:

۱)روش تغییرمتغییر:

$$\int \ (3x^2+3)(x^3+3x)^{15}dx = \frac{u^{n+1}}{n+1} + c = \frac{(x^3+3x)^{16}}{16} + c$$

$$\int \cos x \ \ sin^7 x\ dx = \frac{sin^8 x}{8} + c$$

اگرداخل انتگرال ضرب دوتابع بودکه یکی ازآنهاتوان بزرگ وکلی داشت آن تابع رابدون درنظرگرفتن توان کلی برابر(u)می گیریم.سپس نگاه می کنیم مشتق(u)کنارتابع است یانه اگربودآنرا$(u")$نام گذاری کرده سپس ازفرمول زیربهره می گیریم.

$$\int u"\ u^n dx = \frac{u^{n+1}}{n+1} + c$$

نکته:اگردروش تغییرمتغیرمشتق عددکم داشت" تنها یک عدد" ،عدد رابه آن اضافه می کنیم،سپس معکوس آن عددراپشت انتگرال می نویسیم ومانندتغییرمتغییرعمل می کنیم.

$$\int x\,(x^2+7)^4 dx = \frac{1}{2} \rightarrow \int 2x(\,x^2+7)^4 dx = \frac{1}{2}(\frac{x^2+7}{5})^5 + c$$

نکته:هرگاه داخل انتگرال تقسیم دوعبارت بودبه طوری که مشتق مخرج دقیقادرصورت وجودداشت،مخرج را(u)نامیده وصورت را$(u")$.سپس ازفرمول زیراستفاده می کنیم:

$$\int \frac{u"}{u} dx = ln|u| + c$$

$$\int \frac{3x^2 + e^x}{x^3 + e^x} = ln|x^3 + e^x| + c$$

$$\int \frac{\sin x + \cos x}{-\cos x + \sin x} dx = ln|-\cos x + \sin x| + c$$

اگردرنکته ی قبل(u)توان کلی داشت کافی است پس ازاسم گذاریu و$u"$، u باتوان کلی رابالا می آوریم(علامت توان تغییرمی کند)سپس ازفرمول زیراستفاده می کنیم.

$$\int \frac{8x + 1}{(4x^2 + x)^3} dx = \int (4x^2 + x)^{-3} (8x + 1) dx = \frac{(4x^2 + x)^{-2}}{-2} + c$$

[رابطه ی مهم]

$$\int u"\, u^n dx = \frac{u^{n+1}}{n + 1} + c$$

$$\int \frac{u"}{u^3} dx = \int u"\ u^{-3}\ dx = \int \frac{u^{-3+1}}{-3 + 1} + c$$

مثال ها:

$$\int \frac{5x^4 + 3}{\sqrt[3]{x^5 + 3x}} dx = \int \frac{5x^4 + 3}{(x^5 + 3x)^{\frac{1}{3}}} dx$$

$$\int \frac{u"}{u^{\frac{1}{3}}} dx = \int u"\ u^{\frac{-1}{3}} dx$$

$$\int (\frac{1}{1 + x^2} + 5^x - e^x) dx = log^{-1}x + \frac{5^x}{ln5} - e^x + c$$

$$\int \frac{x^4}{x^5 + 2} dx = \frac{1}{5} \int \int \frac{5x^4}{x^5 + 2} dx = \frac{1}{5} ln|x^5 + 2| + c$$

$$\int \cot x \, dx = \int \frac{\cos x}{\sin x} dx = ln|\sin x| + c$$

$$\int \log x \, dx = -\int \frac{-\sin x}{\cos x} = -ln|\cos x| + c$$

نکته:اگرداخل انتگرال یک تابع کسری وجودداشت بطوری که مخرج توان کلی داشت به عبارت مخرج بدون توان کلی نگاه کنید.اگرمشتق آن درصورت بودمخرج رابه صورت برده(لازم به توجه است علامت توان تغییرمی کند).

$$\int \frac{3x^2}{(x^3+5)^3} dx = dx \int 3x^2 \, (x^3+5)^{-3} dx = \frac{(x^3+5)^{-2}}{-2} + c$$

نکته:هرگاه داخل انتگرال(e)وجودداشت به توان آن نگاه کرده،اگرغیرX بود دقت می کنیم مشتق توان کنار eهست یا نه.اگربودازطریق فرمول زیرحل می گردد.

$$\int u" \, e^u dx = e^u + c$$

نکته ی مهم:اگرداخل انتگرال sin یا cos وجودداشته باشدبه کمان آن توجه می کنیم اگرغیرX بود،دقت می کنیم که آیامشتق آن داخل انتگرال وجوداردیا نه اگربودازرابطه ی زیراستفاده می کنیم:

$$\int u" \, \sin u \, dx = -\cos u + c$$

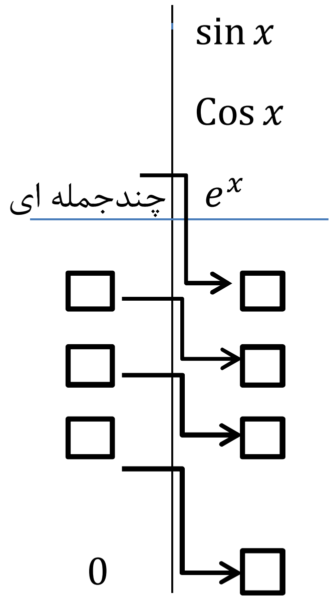
$$\int u" \, \cos u \, dx = \sin u + c$$

$$\int x \, sin\,(x^2+7) dx = \frac{1}{2}\int 2x \, sin(x^2+7) dx = \frac{1}{2}(-\cos(x^2+7)) + c$$

$$\int (2x+3)\cos(3x+x^2)\, dx = \sin(3x+x^2) + c$$

۲)روش جزء به جزء:

روش جدولی:اگردرون انتگرال ضرب دوتابع دیدید به طوری که یکی ازآنهاچندجمله ای ودیگری$\langle \sin x ، \cos x ، e^{x}\rangle$ باشدازروش زیراستفاده می گیریم.



«درسمت راست آنقدرانتگرال می گیریم تابه روبه روی صفربرسیم ودرسمت چپ آنقدرمشتق گرفته تابه صفر برسیم»

در پایان حذف صفر وتوابع $\left(\sin x، \cos x, e^{x}\right)$

مثال ۱:

$$\int x \sin x \, dx = ?$$

x	$\sin x$
1	$-\cos x$
0	$-\sin x$

$$= -x \cos x + \sin x + c$$

مثال ۲:

$$\int x^2 \, e^x dx = ?$$

x^2	e^x
$2x$	e^x
2	e^x
0	e^x

$$= x^2 e^x - 2x e^x + 2e^x + c$$

مثال۳)

$$\int x^3 cos\, x\, dx =$$

x^3	$\cos x$
$3x^2$	$\sin x$
$6x$	$-\cos x$
6	$-\sin x$
0	$-(-\cos x)$

$$= x^3 \sin x + 3x^2 \cos x - 6x \sin x - 6 \cos x + c$$

روش اصلی جزء به جزء:

ابتدابرای تعیین انتگرال $\int f\,(x)g(x)dx$ به روش جزءبه جزء ابتدایکی ازتوابع رابرابر u بر فرض $(f(x) = u)$وتابع دیگری راهمراه با dx رامساوی (dv)قرارمی دهیم $(g(x)dx = dv)$ حال از تساوی نخست دیفرانسیل پرانتز (مشتق) گرفته و از تساوی دوم انتگرال می گیریم یعنی :

$$f(x) = u \rightarrow f(x)dx = du$$

$$g(x)dx = dv \rightarrow \int g(x)dx = v$$

سپس ازفرمول $uv - \int v\,du$ استفاده کرده وانتگرال خودراتبدیل به یک ساده ترمی کنیم.

مثال ۱:

$$\int x \sin x\; dx = -x \cos x - \int -\cos x\; dx =$$

$$= -x \cos x + \int \cos x\;\; dx = -x\; cos + \sin x + c$$

$$\boxed{\begin{array}{c} x = u \rightarrow 1dx = du \\ \sin x\, dx = dv \rightarrow -\cos x = v \end{array}}$$

مثال ۲:

$$\int x\; lnx\; dx =$$

$$=\frac{x^2}{2}\ln x-\int\left(\frac{x^2}{2}\right)\left(\frac{1}{x}\right)dx=\frac{x^2}{2}\ln x-\frac{1}{2}\int x\,dx=\frac{x^2}{2}\ln x-\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{x^2}{2}\right)+c$$

$$=\frac{x^2}{2}\ln x-\frac{1}{4}x^2+c$$

$$\boxed{\begin{array}{c} \ln x=u\rightarrow\frac{1}{x}dx=du \\ xdx=dv\rightarrow\frac{x^2}{2}=v \\ uv-\int v\,du \end{array}}$$

۳)کسری(گویا):

۱)ابتدامخرج کسرراتجزیه کرده وریشه هارابه دست می آوریم.

⁕حالت نخست:اگرریشه هامتفاوت بودند

۲)کسرداخل انتگرال رانوشته ومساوی می گذاریم به تعدادریشه هاخط کسری گذاشته وبین آنهاعلامت جمع می گذاریم وهریک ازعامل هارادرمخرج کسرهاگذاشته ودرصورت همA,B,C می گذاریم.

۳)مخرج مشترک گرفته بدین صورت :

$$\text{کسرسوال صورت}=\cdots+\text{دیگر کسرهای مخرج}\times B+\text{دیگر کسرهای مخرج}\times A$$

۴)ریشه هارابه ترتیب زیریکدیگرنوشته سپس عددهاراتک تک به جای Xدرتساوی شماره ی۳قرارمی دهیم تاA,B,C بدست آید،حال بجای کسرسوال درانتگرال،کسرهای معادلش درتساوی شماره ی۲را قرارمی دهیم سپس انتگرال هارابا استفاده ازفرمول $\int\frac{u''}{u}dx=\ln|u|$ بدست می آوریم.

مثال: $\int\frac{5x+2}{x^2-1}dx=\int\frac{\frac{3}{2}}{X+1}dx+\int\frac{\frac{7}{2}}{x-1}dx=\frac{3}{2}\ln|x+1|+\frac{7}{2}\ln|x-1|+c$

$$1)x^2-1=0\begin{cases} x-1=0\rightarrow x=1 \\ x+1=0\rightarrow x=-1 \end{cases}$$

$$2)\ \frac{5x+2}{x^2-1}=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{X-1}$$

$$3) A(x-1)+B(x+1)=5x+2$$

$$4)\ x=-1 \to A(-1-1)+B(-1+1)=5(-1)+2$$

$$x=1 \to A(1-1)+B(1+1)=5(1)+2$$

$$-2A=-3 \to A=\frac{3}{2} \quad ,,,,,,,,,,2B=7 \to B=\frac{7}{2}$$

حالت دوم:ریشه هایکی وتکراری باشند:

مثال:

$$\int \frac{X^2+2}{(X-1)^3}dX =$$

$$1)\ (x-1)^3=0 \to x=1$$

$$2)\ \frac{x^2+2}{(x-1)^3}=\frac{A}{(x-1)^3}+\frac{B}{(x-1)^2}+\frac{C}{x-1}$$

$$3)\ A+B(X-1)+C(X-1)^2=X^2+2$$

$$4) x=1 \to A+B(1-1)+C(1-1)^2=(\quad ^2+2) \to A=3$$

$$x=2 \to A+B+C=6 \ **** \ B+C=6-3 \to B+C=3$$

$$x=0 \to A-B+C=2 \ **** \ -B+C=-1$$

$$\begin{array}{l} B+C=3 \\ -B+C=-1 \\ \hline 2C=2 \to C=1 \\ B+C=3 \to B=2 \end{array}$$

$$\int \frac{3}{(x-1)^3}dx+\int \frac{2}{(x-1)^2}dx+\int \frac{1}{x-1}\mathrm{dx}$$

$$=3\int (x-1)^{-3}\,\mathrm{dx}+2\int (x-1)^{-2}\,\mathrm{dx}+\int \frac{1}{x-1}$$

$$=3\frac{(x-1)^{-2}}{-2}+2\frac{(x-1)^{-1}}{-1}+\ln|x-1|+c$$

انتگرال معین:

برای تعیین مساحت سطح محصور بین منحنی $y = f(x)$ ومحورایکس ها ودوخط $x = a$ و $x = b$ ازفرمول زیراستفاده می کنیم.

$$s = \int_a^b |f(x)|dx = f(x)\begin{cases} b \\ a \end{cases} = f(b) - f(a)$$

مثال ۱:مساحت سطح محصور بین منحنی $y = x^2 - 2x$ ومحورایکس هاودوخط $x = 3$ و $x = 4$ راتعیین کنید.

$$\int_3^4 |x^2 - 2x|\,dx \to \int_3^4 (x^2 - 2x)dx = \frac{x^3}{3} - 2\frac{x^2}{2}\begin{cases} 4 \\ 3 \end{cases} = \left(\frac{64}{3} - \frac{16}{1}\right) - (9 - 9)$$
$$= \frac{64}{3} - \frac{48}{3} = \frac{16}{3}$$

مثال ۲:مقدارانتگرال $\int_0^1 \frac{1}{x+1}\,dx$ رابدست آورید.

$$= ln|x + 1|\begin{cases} 1 \\ 0 \end{cases} = ln|1 + 1| - ln|0 + 1| = ln2 - ln1$$

مثال ۳:مساحت سطح محصوربین منحنی $y = -x^3 + 3x$ ومحورایکس هارابدست آورید.

$$-x^3 + 3x = 0 \to x(-x^2 + 3) = 0\begin{cases} x = 0 \\ -x^2 + 3 = 0 \to x^2 = 3 \to x = \pm\sqrt{3} \end{cases}$$

$\sqrt{3}$ و 0 و $-\sqrt{3}$

$$s_1 = \int_{-\sqrt{3}}^0 (-x^3 + 3x)dx = \frac{-x^4}{4} + \frac{3x^2}{2}\begin{cases} 0 \\ -\sqrt{3} \end{cases} = 0 - \left(\frac{-9}{4} + \frac{9}{2}\right) = \left|\frac{-9}{4}\right| = \frac{9}{4}$$

$$s_2 = \int_0^{\sqrt{3}} (-x^3 + 3x)dx = \frac{-x^4}{4} + \frac{3x^2}{2}\begin{cases} \sqrt{3} \\ 0 \end{cases} = \left(\frac{-9}{4} + \frac{9}{2}\right) - 0 = \frac{9}{4}$$

$$\boxed{s = s_1 + s_2 = \frac{9}{4} + \frac{9}{4} = \frac{18}{4} = \frac{9}{2}}$$

مثال ۴:مساحت محصوربین منحنی $x^2 + 4x$ ومحورایکس هارابدست آورید.

$$y = x^2 + 4x = 0 \to x(x + 4) = 0 \to \begin{cases} x = 0 \\ x + 4 = 0 \to x = -4 \end{cases}$$

$$s = \int_{-4}^{0} (x^2+4)dx = \frac{x^3}{3} + \frac{4x^2}{2} \Big\{ {0 \atop -4} = 0 - \left(\frac{-64}{3} + 32\right) = \left|\frac{-32}{3}\right| = \frac{32}{3}$$

مثال۵:مساحت سطح محصوربین دومنحنی$y = x^2 + 2x$ و $y = x$ رابدست آورید.

$$\begin{matrix} y = f(x) \\ y = g(x) \end{matrix} \rightarrow s = \int_a^b |f(x)| - |g(x)| dx \Longleftarrow$$ رابطه ی مورد استفاده

$$\begin{matrix} y = x^2 + 2x \\ y = x \end{matrix} \Longrightarrow x^2 + 2x = x \rightarrow x^2 + 2x - x = 0 \rightarrow x^2 + x = 0 \rightarrow x(x+1) = 0$$

$$\begin{cases} x = 0 \\ x = -1 \end{cases}$$

$$s = \int_{-1}^{0} |(x^2 + 2x - x)| dx = \int_{-1}^{0} x^2 + x\, dx = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} \Big\{ {0 \atop -1} = 0 - \left(\frac{-1}{3} + \frac{1}{2}\right)$$

$$= 0 - \left(\frac{-2+3}{6}\right) = \left|\frac{-1}{6}\right| = \frac{1}{6}$$

معادلات دیفرانسیل:

معادله ای است شامل<u>Y,X</u>ومشتقات Y ،که وجودمشتقات Y الزامی است.مرتبه ی یک معادله دیفرانسیل بالاترین مرتبه ی مشتق موجوددرمعادله می باشد.

$y" + x + 2 = 0$ معادله دیفرانسیل مرتبه اول

$(y)^2 + (3x)y = 0$ معادله دیفرانسیل مرتبه دوم

۱)معادله دیفرانسیل مرتبه ی اول جداشدنی:

به صورت$f(x)dx + g(y)dy = 0$ می باشدکه برای حل آن کافیست ازطرفین آن انتگرال بگیریم.

$$\int f(x)\, dx + \int g(y)\, dy = c$$

مثال:

$$(x+1)dx + (2y)dy = 0$$

$$\int (x+1)dx + \int (2y)dy = c \to \frac{x^2}{2} + x + 2\left(\frac{y^2}{2}\right) = c \to \frac{x^2}{2} + x + y^2 = c$$

۲)معادله ی دیفرانسیل کامل:

برای تشخیص اینکه معادله$M\,dx + Ndy = 0$ کامل است کافیست ازM نسبت به Y مشتق بگیریم، سپس ازNنسبت برXمشتق می گیریم.اگرجواب ها برابرشده اند،معادله ی داده شده کامل است.سپس برای حل کافیست ازتوابعی که کنار dx می باشنداما Y ندارندنسبت به X انتگرال بگیریم(یعنی انتهای انتگرال dx گذاشته)به علاوه تمام تابعی که کنارdy است،نسبت به Y انتگرال می گیریم ومساویC قرار می دهیم.

$$(2 + 2xy + 12x)dx + (x^2 + 8)dy = 0$$

$$\frac{d\,m"}{dy} = \frac{d\,n"}{dx}$$

کامل $\Longleftarrow$ $\quad (2x + 0) = 2x + 0 \to 2x = 2x$

$$\int (2 + 12x)\,dx + \int (x^2 + 8)dy = c \to 2x + \frac{12x^2}{2} + x^2y + 8y = c$$

$(6x^2 + 5y^2)dx + 10xy\,dy = 0 \;\; \to$ کامل

$$(2xy + y^2)dx + (x^2 + 2xy - y)dy = 0$$

$$e^x dx + \sin y \;\; dy = 0$$

$$\frac{dx}{1 + x^2} + \frac{3dy}{y} = 0$$

$$3x^2dx + 5^y\,dy = 0$$

توابع چند متغیری:

۱)تابع دومتغیری تابعی است که درآن دو متغیروجود دارد.

$$f(x, y) = x + y + 5$$

۲)تابع سه متغیری تابعی است که درآن سه متغیروجود دارد.

$$f(x, y, z) = 3xyz$$

مشتقات جزئی (نسبی):

شرح مطلب	نسبت به X	نسبت به Y
۱-تابع فقط X دارد←	مشتق می گیریم	0
۲-تابع فقط Y دارد←	0	مشتق می گیریم
۳-تابع هم X داردوهم Y←	آنهایی که X داردمشتق می گیریم سپس Y رامی نویسیم	آنهایی که Y داردمشتق گرفته وسپس X رامینویسیم

مثال ۱:

$$f(x,y) = x^2 + 2y \rightarrow \begin{cases} f_x = 2x + 0 \\ f_y = 0 + 2 \end{cases}$$

مثال ۲:

$$f(x,y) = x^2 + y^3 + x^3y^2 + 7 \rightarrow \begin{cases} f_{x=}2x + 3x^2y^2 \\ f_y = 3y^2 + 2yx^3 \end{cases}$$

دیفرانسیل کل:

برای تعیین دیفرانسیل کل تابع f ازفرمول $df = f"x\ dx + f"y\ dy$ استفاده می کنیم.

مثال:

$$f(x,y) = 3x^2 \sin y + 2y\, e^{3x}$$

$$df = (6x \sin y + 2y(3e^{3x}))dx + (3x^2 \cos y + 2e^{3x})dy \;{*}{*}\; e^{ax} \rightarrow ae^{ax}$$

تعیین نقاط بحرانی وکاربردآن:

برای تعیین نقاط بحرانی نخست دستگاه $\begin{cases} f"x = 0 \\ fy = 0 \end{cases}$ راتشکیل می دهیم،سپس دستگاه راحل می کنیم.

جواب های دستگاه نقاط بحرانی تابع می باشد.برای تعیین نوع نقطه بحرانی ابتدا مشتقات مرتبه ی دوم تابع (fyy, fxy, fxx) رابدست می آوریم سپس ماتریس زیر رابدست آورده .

$$D\begin{vmatrix} fxx & fxy \\ fxy & fyy \end{vmatrix} \rightarrow fxx(fyy) - (fxy)^2$$

سه حالت ممکن است رخ دهد:

۱)اگر $D > 0$ ← نقطه ی بحرانی یا ماکسیم است یامینیمم | اگر fxx منفی باشد نقطه ماکسیم است / اگر fxx مثبت باشد نقطه مینیمم است

۲)گر $D < 0$ ←

۳)اگر $D = 0$ ← اظهارنظرنمی توان کرد.

مثال: نقاط بحرانی ونوع نقاط بحرانی توابع زیررامحاسبه کنید.

الف)$f\ (x,y) = 4x + 2y - x^2 + xy - y^2$

$$\begin{cases} fx = 4 - 2x + y = 0 \\ fy = 2 + x - 2y = 0 \end{cases} \Longrightarrow x2\begin{cases} -2x + y = -4 \\ x - 2y = -2 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} -2x + y = -4 \\ 2x - 4y = -4 \end{cases}$$

$$-3y = -8$$

$$y = \frac{8}{3}$$

$$x - 2y = -2 \rightarrow x = -2 + 2y$$

$$x = -2 + 2\left(\frac{8}{3}\right) \rightarrow x = \frac{10}{3}$$

$$D\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} \rightarrow (-2)(-2) - (1)(1) = 4 - 1 = 3 \qquad \begin{cases} fxx = -2 \\ fyy = -2 \\ fxy = 1 \end{cases}$$

چون$D = 3$ است ومثبت پس نقاط بحرانی ماماکسیمم یامینیمم است

وچون $fxx = -2$ است پس نقاط بحرانی ما ماکسیمم است .

ب)$f(x,y) = y^3 - 12y - x^2 + 6x + 5$

$$\begin{cases} fx = 0 \\ fy = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} -2x + 6 = 0 \rightarrow -2x = -6 \rightarrow x = 3 \\ 3y^2 - 12 = 0 \rightarrow 3y^2 = 12 \rightarrow y^2 = 4 \rightarrow y = \pm 2 \end{cases}$$

نقاط بحرانی ← $(3,-2)$و$(3,2)$

$$\begin{cases} fxx=-2 \\ fxy=0 \\ fyy=6y \end{cases} \qquad D\begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 6y \end{vmatrix}=-2(6y)-0=-12y$$

حال می توان گفت:

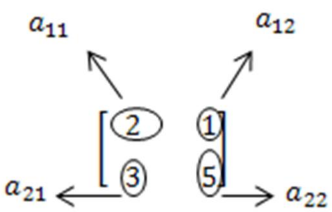
۱= (۳و۲) نقطه ی بحرانی ماست $D=-12y$ پس D مربوط به نقطه مامی شود $D=-12(2)=-24$
پس چون$D<0$ است درنتیجه فقط(۳و۲)........ .است .

۲=(۳و۲)نقطه بحرانی است$D=-12Y$ پسD مربوط به نقطه ی مامی شود$D=-12(-2)=24$ پس
چون $D>0$ است درنتیجه(۳و۲)با توجه به اینکه $fxx=-2$ است ،درنتیجه نقطه ماماکسیمم است.

$$\begin{cases} f(x,y)=x^2+xy+y^2-6x+2 \\ f(x,y)=x^2-3xy+y^3 \\ f(x,y)=xy-3x^2+5y^2 \end{cases}$$

حل دستگاه:

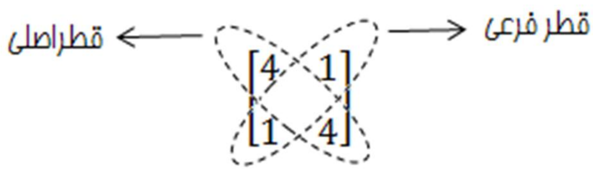
یادآوری ها: ۱) هر عضویک ماتریس رابه صور(ajJ) می نویسیم که (j) نمایانگرسطر(عدد)است و(J) نشانگرستون است.



۲)هرگاه تعدادسطرهاوستون های یک ماتریس برابرباشد.آن ماتریس رایک ماتریس مربعی گویند مثل ماتریس زیر:

$$\begin{bmatrix} 4 & 0 & 6 \\ 5 & 2 & 9 \\ 3 & 1 & 8 \end{bmatrix} 3\times 3$$

۳)هرماتریس مربعی شامل دوقطراصلی وفرعی است:



۴)ماتریس پایین مثلثی← ماتریسی است مربعی که همه ی اعدادبالای قطراصلی آن صفراست،(بابقیه کاری نداریم).

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

دترمینان:

$$\begin{bmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = 1\overset{\underline{A}}{\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}} - 5\overset{\underline{B}}{\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}} + 2\overset{\underline{C}}{\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}$$

$$= 1(1-2) - 5(3-0) + 2(3-0) = -1 - 15 + 6 = -10$$

مراحل:

A) اولین درایه رانوشته وستون اول حذف می گردد.

B) قرینه ی دومین درایه رانوشته وستون دوم حذف می گردد.

C) سومین درایه رانوشته وستون سوم حذف می گردد.

روش کرامر: مثال:

$$\begin{cases} 2x + 3y + 5z = 9 \\ 2x + 5y + 13z = 35 \\ x + 2y + 5z = 14 \end{cases} \quad \leftarrow \quad \text{روش کرامر}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 2 & 5 & 13 \\ 1 & 2 & 5 \end{vmatrix} = 2(25-26) - 3(10-13) + 5(4-5) \rightarrow -2 + 9 - 5 = 2 \rightarrow \Delta = 2$$

$$\Delta x = \begin{vmatrix} 9 & 3 & 5 \\ 35 & 5 & 13 \\ 14 & 2 & 5 \end{vmatrix} = 9(25-26) - 3(175-182) + 5(70-70) \rightarrow -9 + 21 + 0 = 12 \rightarrow \Delta x = 12$$

$$\Delta y = \begin{vmatrix} 2 & 9 & 5 \\ 2 & 35 & 13 \\ 1 & 14 & 5 \end{vmatrix} = 2(175-182) - 9(10-13) + 5(28-35) \rightarrow -14 + 27 - 35 = -22 \rightarrow \Delta y = -22$$

$$\Delta z = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 9 \\ 2 & 5 & 35 \\ 1 & 2 & 14 \end{vmatrix} = 2(70-70) - 3(28-35) + 9(4-5) \rightarrow +21 - 9 = 12 \rightarrow \Delta z = 12$$

$$x = \frac{\Delta x}{\Delta} = \frac{12}{2} = 6 \qquad y = \frac{\Delta y}{\Delta} = \frac{-22}{2} = -11 \qquad z = \frac{\Delta z}{\Delta} = \frac{12}{2} = 6$$

ماتریس افزوده:

مثال: $\begin{cases} 2x + 3y + 5z = 9 \\ 2x + 5y + 13z = 35 \\ x + 2y + 5z = 14 \end{cases}$

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 & 9 \\ 2 & 5 & 13 & 35 \\ 1 & 2 & 5 & 14 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 & 9 \\ 0 & 2 & 8 & 26 \\ 1 & 2 & 5 & 14 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 & 9 \\ 0 & 2 & 8 & 26 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{5}{2} & \frac{19}{2} \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 & 9 \\ 0 & 2 & 8 & 26 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 3 \end{bmatrix}$$