فصل ششم

تنش

مقدمه

انواعی از ساختارها را می شناسیم که می‌توانند در نتیجه دگرشکلی شکنا و شکل پذیر[۱] در سنگ ایجاد شوند. با شناخت نوع ساختار، بطور طبیعی این سوال پیش می‌آید که چرا آنها بوجود آمده اند؟ چه چیزی باعث تشکیل آنها شده است؟ آیا وجود آنها اطلاعاتی درباره فرایندهایی که باعث تشیکل ساختارها در درون زمین می‌شود، نشان می‌دهد؟

تجربه نشان می‌دهد وقتی که نیروهای زیادی به اجسام وارد می‌شود اجسام شکسته می شوند. بنابراین باید این موضوع را مطرح نماییم که وقتی نیرویی به مجموعه سنگی اعمال می‌شود چه اتفاقی برای آن رخ می‌دهد. مطرح نمودن این موضوع ما را به سمت مفهوم تنش رهنمون می‌سازد که حالت فیزیکی مواد همراه با نیروهای اعمال شده را توصیف می‌کند.

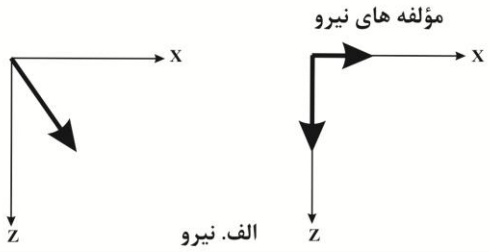
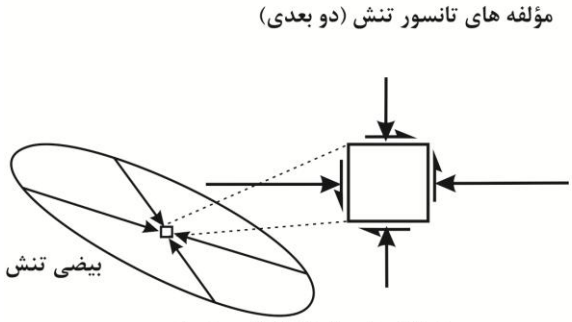
مفهوم تنش[۲] ممکن است در ابتدا گیج کننده باشد بخشی ازآن به این دلیل است که برخی از کمّیت‌های مورد نیاز برای توصیف آن بصورت ملموس نیستند و بخشی دیگر از آن به این دلیل است که علائم مورد استفاده برای نمایش آنها بصورت ناشناخته هستند. در حقیقت، ایده‌های فیزیکی تنش خیلی پیچیده نیستند. با استفاده از هندسه دو بُعدی، ایده‌های فیزیکی سوق دهنده به سمت مفهوم تنش را مطرح می‌نماییم(جدول ۱-۶ را ملاحظه نمایید).

بحث را با ایده نیرو[۳] شروع می‌نماییم به دلیل این که یک مفهوم پایه‌ای است و همه ما یک درک فیزیکی از نیروهایی داریم که با آن اجسام را هل می‌دهیم یا می‌کشیم. نیرو، کمّیتی برداری است که دارای بزرگی و جهت است و به وسیله پیکان نمایش داده می شود(الف درجدول ۱-۶). در دستگاه مختصات (X,Z) بردار نیرو را می‌توان به وسیله مؤلفه‌های موازی با هر یک از محورهای مختصات نمایش داد.(کادر ۱-۶ را ملاحظه نمایید).

شدت نیرو وابسته به وسعت سطحی است که نیرو بر روی آن توزیع شده است. به این شدت، اثر نیرو[۴] می‌گویند و واحد آن نیرو بر سطح است(ب درجدول ۱-۶). اگر وسعت سطحی که یک نیروی مشخص در آن توزیع شده است، بیشتر شود اثر نیرو بر روی آن سطح کمتر می‌شود. بنابراین وزن یک گالن آب که سطح مقطع آن نیم متر مربع است نسبت به گالن آب دیگری که سطح مقطع آن یک متر مربع است شدت نیروی بیشتری بر زمین وارد می‌کند. اثر نیرو معمولا به وسیله مؤلفه‌های عمود بر سطح و موازی با سطحی که بر روی آن عمل می‌کنند، نشان داده می‌شود. برای ایجاد تعادل مورد نیاز، هر سطح باید دارای یک زوج اثر نیرو مساوی و در خلاف جهت سطح مقابل داشته باشد. این زوج اثر نیرو، تنش سطحی را بوجود می‌آورند که معمولاً به وسیله دو مؤلفه مساوی و خلاف جهت هم که عمود بر سطح عمل می‌کنند و دو مؤلفه دیگر که موازی با سطح عمل می‌کنند، نشان داده می‌شوند. (ج در جدول۱-۶).

۱- Brittle and Ductile deformation
۲-Stress
۳-Force
۴-Traction

جدول ۱-۶ . مفهوم تنش

تعریف	دیاگرام
کشش یا فشارش	
نیرو بر واحد سطح بر روی صفحه ای که دارای جهت گیری معینی است (اندازه گیری شدت نیرو)	
زوج قدرت مساوی و در خلاف جهت هم که بر روی یک صفحه دارای جهت گیری خاص عمل می کنند	
تنش سطحی بر روی صفحات دارای جهت گیری مختلف که از یک نقطه می گذرند (بوسیله بیضی تنش نشان داده شده است) برای تعیین بیضی تنش فقط تنش های سطحی که بر روی دو صفحه عمود بر هم عمل می کنند کافی است	

برای سیستم مشخصی از نیروهای اعمال شده بر مجموعه مشخصی از مواد، تنش سطحی در یک نقطه خاص با تغییر جهت‌گیری صفحه ای که بر روی آن عمل می‌کنند، تغییر می‌کند. برای شناخت اثر کلیه نیروها عمل کننده بر روی جسم در یک نقطه خاص باید بتوانیم تنش های سطحی بر روی کلیه صفحاتی که از آن نقطه می‌گذرند را تعیین نماییم. برای مثال مکعبی را تصوّر نمایید که به وسیله سه نیروی دارای مقادیر مختلف و عمود بر سطح مکعب فشرده می‌شود. تنش سطحی بر روی هر زوج از صفحات مکعب نسبت به زوج صفحه دیگر متفاوت بوده ومستقل از تنش سطحی بر روی زوج صفحات دیگر است. تنش سطحی بر روی هر صفحه با هر جهت‌گیری ممکن که از مرکز این مکعب می‌گذرد را می‌توان به وسیله این سه تنش سطحی مستقل بدست آورد. در حقیقت اگر تنش‌های سطحی سه صفحه عمود بر هم که از یک نقطه می‌گذرند را بشناسیم می‌توانیم تنش‌های سطحی بر روی هر صفحه ای که از آن نقطه می‌گذرد را تعیین نماییم. مؤلفه‌های این سه تنش سطحی که بصورت عمود و موازی با سطوح اندازه‌گیری می‌شوند، مؤلفه‌های تنسور تنش را تشکیل می‌دهند. بنابراین تنسور تنش، [۱] کمیّتی است که بصورت ساده‌ای محاسبه تنش‌های سطحی بر روی صفحه‌ای با هر جهت‌گیری ممکن در یک نقطه مشخص را امکان‌پذیر می‌سازد.

در دو بُعد، اگر تنش‌های سطحی کلیه صفحات دارای جهت‌گیری‌های مختلف که از یک نقطه می‌گذرند را نسبت به یک مرجع عمومی رسم نماییم یک بیضی بوجود می‌آید(د در جدول ۱-۶) که یک نمایش کامل از تنسور تنش دو بُعدی است. اگر تنش‌های سطحی بر روی هر زوج صفحه عمود بر هم که از یک نقطه می‌گذرند را بشناسیم اندازه، شکل و جهت‌گیری بیضی بطور کامل تعیین می‌شوند.

۱-Stress tensor

مؤلفه‌های این دو تنش سطحی، مؤلفه‌های تنسور تنش دو بُعدی هستند. (د در جدول ۱-۶). کلیه این مسائل در محدوده مباحث تنش قرار می‌گیرند. دراین فصل مفاهیم و نکته‌های مربوط به این مباحث را بررسی خواهیم نمود.

نیرو، اثر نیرو و تنش

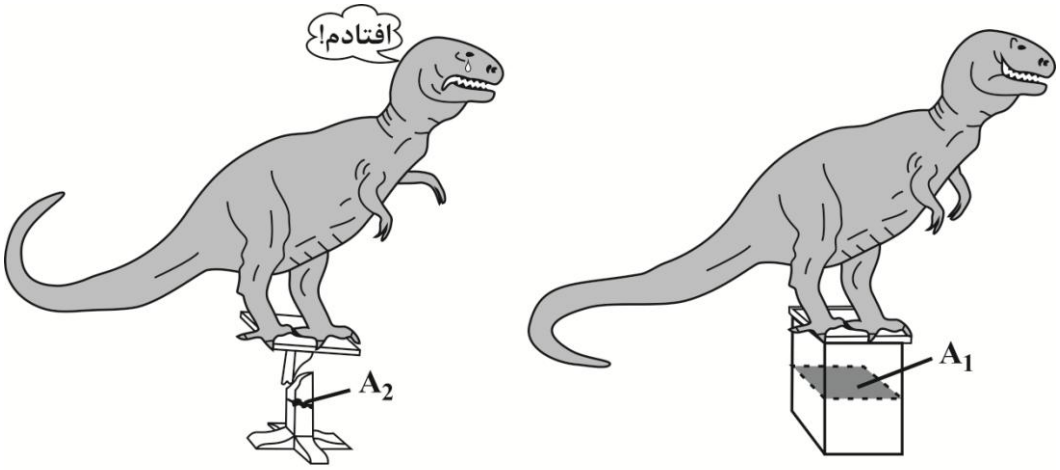
به دلیل این که با کمیّت‌های برداری مانند نیرو سر و کار داریم در کادر ۸-۱، برخی از ویژگی‌های اساسی بردارها را مرور نموده‌ایم. نیروهایی که بر یک مجموعه وارد می شود وآن را از حالت خود خارج می‌سازند دو نوع هستند:

۱. نیروهای درونی[۱] که بر هر جزء از ماده وارد می‌شوند و مستقل از مواد احاطه کننده هستند. مهمترین نیروی درونی برای زمین‌شناسان ساختاری نیروی ثقل زمین است. مقدار این نیرو بر روی هر حجمی از سنگ متناسب با جرم آن حجم است.

۲. نیروهای سطحی[۲] که ناشی ازاعمال نیرو از یک جسم دیگر به مجموعه در طول سطح تماس بین آنها و یا از یک بخش از جسم به بخش دیگر در طول سطوح داخلی است. برای مثال اگر با دست به انتهای یک بلوک سنگی فشار دهیم یک نیروی سطحی در طول سطح تماس بین سنگ و دست خودمان به آن وارد می‌نماییم. بعلاوه در طول هرصفحه داخلی با جهت‌گیری اختیاری که بلوک را به دو بخش تقسیم می‌کند، یک بخش از بلوک به بخش دیگر نیروی سطحی وارد می‌کند.

اثر نیرو[۳]، یک اندازه‌گیری از شدت نیرو

نیروهای بزرگ‌تر نسبت به نیروهای کوچک‌تر بصورت مشخصی تأثیر بیشتری بر روی جسم می‌گذارند. اما فقط دانستن مقدار نیروی وارد شده بر یک مجموعه تمام اطلاعات مورد نیاز برای مشخص کردن چگونگی واکنش مجموعه دگرشکل شونده را ارائه نمی‌دهد. برای مثال یک ستون چوبی کلفت نیروهای وارد شده از یک جرم بزرگ را به راحتی تحمل می‌کند.(شکل ۱-۶ الف) اما پایه چوبی نازک یک میز ممکن است همان نیرو را تحمل نکند و شکسته شود(شکل ۱-۶ب). به دلیل این که جنس مواد درهر دو مورد یکسان است، انتظار می‌رود که شدت نیرو بر روی پایه میز بیشتر از ستون چوبی باشد حتی باوجود این که بزرگی نیروهای وارده بر آنها یکسان است.



شکل ۱-۶- شدت نیروی بکار رفته با افزایش وسعت صفحه ای که نیرو بر آن وارد می‌شود، کاهش می‌یابد. (الف) تیرانوزوروس خوشحال است زیرا ستون چوبی با سطح مقطع، A وزن آن را تحمل می‌کند.(ب) تیرانوزوروس ترسیده است زیرا پایه میز با سطح مقطع A_2 نتوانسته است وزن آن را تحمل کند.

اثر نیرو (Σ)، شدت نیرو است و به وسیله نیروی وارد شده بر سطح (F) تقسیم بر فضای سطحی (A) که بر آن عمل می‌کند، بدست می‌آید. بنابراین واحد فیزیکی آن نیرو بر واحد سطح است. شکل ۲-۶ الف نشان می‌دهد که نیروی $\mathrm{F^{top}}$ بر سمت فوقانی سطح وارد می شود که فضای سطح آن A است و F^{bottom}بر سمت تحتانی آن صفحه وارد می‌شود. شکل ۲-۶ ب، اثر نیروهای متناظر $\Sigma^{\mathrm{bottom}}, \Sigma^{\mathrm{top}}$ که بر روی سمت‌های مخالف صفحه عمل می‌کنند را نشان می‌دهد. در برخی منابع، اثر نیرو را به عنوان بردار

۱-Stress tensor
۲-Body forces
۳-Traction

تنش[۱] نامیده‌اند. ما از این عبارت استفاده نمی‌نماییم زیرا همانطور که در ادامه خواهیم دید این کمیّت یک کمیّت برداری صحیح نیست و استفاده از عبارت مشابه برای اثر نیرو و تنش امکان تشخیص بین آنها را از بین می‌برد.

برای سادگی اثر نیرو را به دو مؤلفه عمود بر سطح و موازی با سطحی که بر روی آن عمل می‌کنند تجزیه می‌نماییم. این مؤلفه‌ها بترتیب به عنوان مؤلفه اثر نیرو نرمال (σ_n) و مؤلفه اثر نیرو برشی (σ_s)نامیده می‌شوند (شکل ۲-۶ ب).اگر نیرو بصورت یکنواخت بر روی سطح A توزیع شود و F مجموع نیروها را نشان دهد بنابراین اثر نیرو بر روی کل سطح بصورت زیر بدست می‌آید.

$$\Sigma = \frac{F}{\mathrm{A}} \qquad (۶-۱)$$

اگر نیرو بصورت غیر یکنواخت بر روی سطح توزیع شده باشد در نتیجه جهت و بزرگی آن در طول سطح تغییر می‌کندو تنها می‌توانیم اثر نیرو را در یک نقطه از سطح تعیین نماییم. نقطه را به عنوان یک سطح بینهایت کوچک با مساحت dA از سطحی در نظر می‌گیریم که یک جزء بینهایت کوچک از نیروی کل dF بر روی آن عمل می‌کند(شکل ۲-۶ ج).

$$\Sigma = \frac{dF}{d\mathrm{A}} \qquad (۶-۲)$$

در نتیجه بزرگی و جهت اثر نیرو بر روی اینگونه صفحات می‌تواند از یک نقطه به نقطه دیگر متفاوت باشد.

تنش سطحی

برای تعیین تنش سطحی به صفحه‌ای نیاز داریم که درحالت تعادل مکانیکی باشد بدین معنی که نمی‌تواند بصورت مستقل از موادی که در آنها قرار دارد، شتاب گیرد. برای این که این موضوع طبق قانون دوم نیوتن صحت داشته باشد باید نیروهای مخالف هم در طرفین سطح وجود داشته باشد به گونه‌ای که مجموع نیروهای وارده بر صفحه برابر با صفر گردد.

($F^{top} + F^{\mathrm{bottom}} = 0$ ، شکل ۲-۶ الف). می‌توان تعادل نیروها را با استفاده از اثر نیرو و بوسیله تقسیم نیروها بر سطح مقطعی که بر آن عمل می‌کنند، نشان داد.

$$\frac{F^{top}}{\mathrm{A}} + \frac{\mathrm{F^{bottom}}}{\mathrm{A}} = 0, \Sigma^{\mathrm{top}} + \Sigma^{\mathrm{bottom}} = 0 \quad , \Sigma^{\mathrm{top}} = -\Sigma^{bottom} \qquad (۶-۳)$$

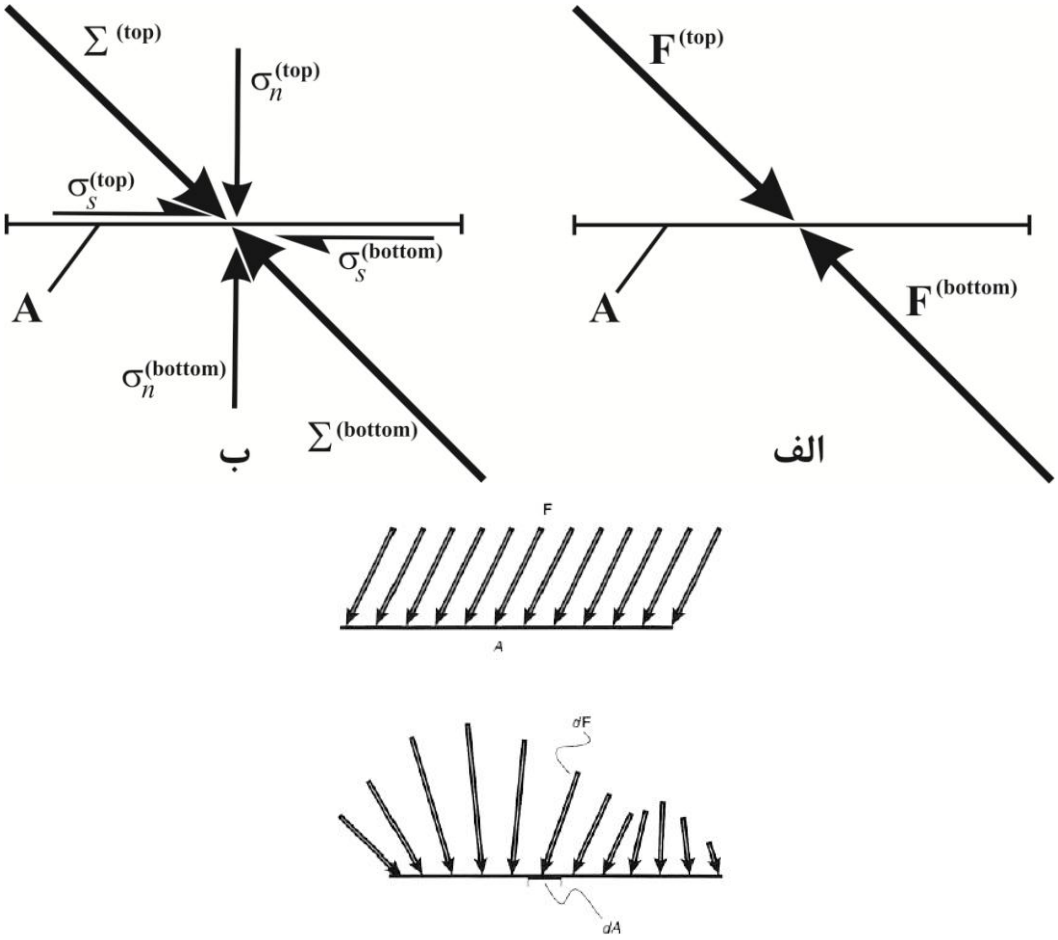
روابط ۳-۶ بیانگر این هستند که اثر نیروهای بالا و پایین سطح باید مساوی و درخلاف جهت هم باشند. در نتیجه، برای مؤلفه های نرمال و برشی اثر نیرو نیز باید روابط مشابهی بکار برده شود (شکل ۲-۶ب).

$$\sigma_{\mathrm{n}}^{\mathrm{top}} = -\sigma_{\mathrm{n}}^{\mathrm{bottom}} \qquad \sigma_{\mathrm{s}}^{\mathrm{top}} = -\sigma_{\mathrm{s}}^{\mathrm{bottom}} \qquad (۶-۴)$$

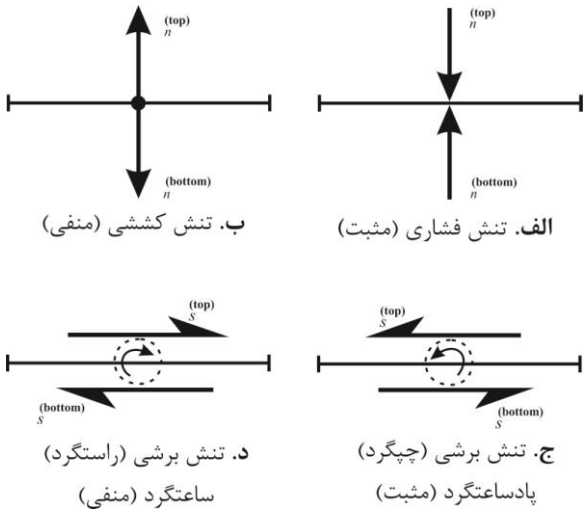
تنش سطحی یا هر یک از مؤلفه‌های آن شامل یک زوج اثر نیرو یا یک زوج مؤلفه اثر نیرو مساوی و در خلاف جهت هم هست که به روی سطح عمل می‌کنند. اگر دو مؤلفه نرمال اثر نیرو $(\sigma_n^{bottom}, \sigma_n^{top})$ بصورت مساوی و به سمت یکدیگر باشند به عنوان تنش فشاری[۲]نامیده می شوند و تمایل به فشرده کردن جسم در عرض سطح دارد(شکل ۳- ۶الف). اگر دو مؤلفه نرمال اثر نیرو از هم دور شوند به عنوان تنش کششی[۳] نامیده می‌شوند و تمایل به کشیدن جسم در عرض سطح دارند(شکل۳-۶ ب). تنش فشاری را بصورت مثبت و تنش کششی را بصورت منفی در نظر می‌گیریم.

دو مؤلفه برشی اثر نیرو $(\sigma_s^{bottom}, \sigma_s^{top})$ به عنوان تنش برشی[۴] یا زوج برشی[۵] نامیده می‌شوند. وابسته به این که اگر یک توپ را بین دو پیکان تنش برشی قرار دهیم به کدام جهت می‌چرخد تنش برشی ممکن است ساعتگرد یا پادساعتگرد باشد (شکل های ۳-۶ ج و د). زوج پادساعتگرد را بصورت مثبت و زوج ساعتگرد را بصورت منفی در نظر می‌گیریم.

۱-Stress vector
۲-Compressive stress
۳-Tensile stress
۴-Shear stress
۵-Shear couple



شکل۲-۶- نیرو، اثر نیرو و تنش سطحی(الف) نیروی F^{top} که بر سمت فوقانی صفحه A وارد می‌شود توسط F^{bottom} که به سمت تحتانی صفحه وارد می‌شود تعادل می‌یابد. (ب) شدت نیرو به وسیله اثر نیروهای متناظر Σ^{top} و Σ^{bottom} نشان داده شده است که مساوی و عکس هم هستند. هر اثر نیرو می‌تواند بوسیله σ_s, σ_n نشان داده شود. زوج اثر نیروهای تعادل یافته، تنش سطحی هستند.(ج) نیروی F می تواند بر سطح A دارای بزرگی و جهت گیری ثابتی باشد و می تواند دارای جهت گیری و بزرگی متنوعی باشد.هر جزئ سطح dA تحت تاثیر نیروی df قرار می گیرد.



شکل۳-۶ : علائم قراردادی برای مؤلفه‌های تنش در یک نقطه.

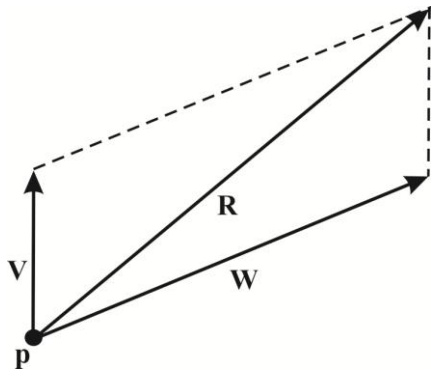
برای اشاره به اثر نیرو و تنش سطحی معمولاً از علامت Σ و برای اشاره به مؤلفه‌های هر دو کمیّت از σ_n, σ_s استفاده می‌نماییم. با اینحال، باید بدانیم که تنش سطحی به وسیله زوج مؤلفه‌های مساوی و در خلاف جهت هم اثر نیرو عمل کننده بر روی سطح تعیین

می‌گردد.مقادیر مطلق مؤلفه های اثر نیرو و مؤلفه‌های تنش سطحی مطابق با آن بصورت یکسان هستند اما دو تفاوت در علائم قراردادی مؤلفه های آنها وجود دارد. برای مثال تنش سطحی فشاری بصورت مثبت است اما این تنش به وسیله یک اثر نیرو مثبت و یک اثر نیرو منفی ایجاد شده است. در مباحث بخش‌های بعدی به بررسی مؤلفه‌های تنش خواهیم پرداخت اگر چه مهم است که بدانید یکی از زوج اثر نیروها می‌تواند تنش را مشخص کند. در اینگونه موارد می‌توانیم اثر نیروها را با استفاده از اندیس bottom , top مشخص نماییم .

بردار چیست؟

بردار کمیّتی است که دارای بزرگی و جهت است. درطرف دیگر، اسکالر کمیّتی است که فقط بزرگی دارد. دما، چگالی و جرم از کمیّت‌های فیزیکی اسکالر هستند. هر کدام از این کمیّت‌ها به وسیله یک عدد نشان داده می‌شوند که هیچ گونه جهتی ندارند مانند ۳۵°C یا $۲۵۰۰\ kg / m^3$. از نمونه‌های شناخته شده کمیّت‌های برداری می‌توان سرعت و نیرو را نام برد. بردارها را تنها به وسیله بزرگی و جهتی که عمل می‌کنند بطور کامل می‌توان شناخت مانند صفحهA با سرعت $۴۰۰\ km / h$ درجهت شمال منتقل می‌شود. بردارها بصورت هندسی با پیکان نمایش داده می شوند. طول تنه پیکان متناسب با بزرگی برداربوده و جهت پیکان نیز جهت بردار رانشان می دهد.

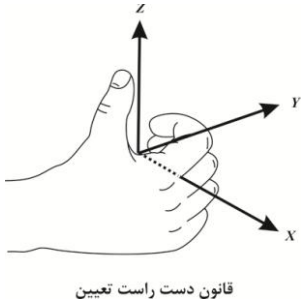
بردارها را می‌توان با استفاده از قانون متوازی الاضلاع با هم دیگر جمع کرد. برای مثال اگر بخواهیم دونیروی W,V که بر نقطه p عمل می‌کنند را جمع نماییم از انتهای هر پیکان یک خط به اندازه پیکان دیگر و با همان زاویه رسم می‌نماییم که بصورت متوازی الاضلاع خواهد شد(شکل ۴-۶). مجموع نیروها برابر با R خواهد شد. بنابراین درمجموع اثر نیروهای W,V بر نقطه P مشابه اثر نیروی R است.



شکل ۴-۶- قانون متوازی الاضلاع برای جمع بردارها

جهت گیری محورهای دستگاه مختصات کارتزین

برای نشان داده جهت، تعدادی چارچوب مرجع مانند شمال جغرافیایی لازم است تا بتوانیم جهت‌گیری را نسبت به آن نشان دهیم. چارچوب مرجع در فضای سه بُعدی معمولاً دستگاه مختصات اورتوکونالی است و فرض می‌نماییم جهت‌گیری آنها مشخص است. محورهای x_1 و x_2 و x_3 را با قانون دست راست تعیین می‌نماییم. بوسیله این قانون اگر انگشت شصت دست راست را به سمتی قرار دهیم که بتوانیم سایر انگشتان را از x_1 به سمت x_2 بچرخانیم انگشت ما جهت x_2 را نشان می‌دهد (شکل ۵-۶). این محورها همچنین به وسیله z,y,x نیز نمایش داده می شوند اما ساده‌تر آن است که از آنها به عنوان اندیس استفاده شوند.

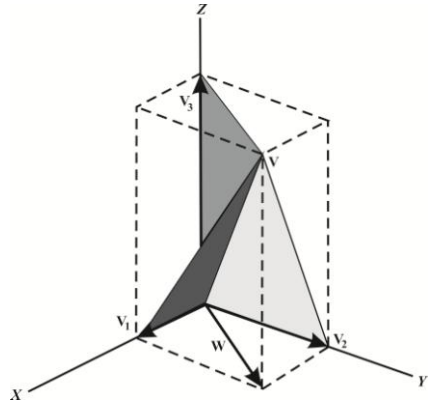


شکل ۵-۶- قانون دست راست تعیین

برای مثال اگر بخواهیم بردار V را برای نمایش نیرو در فضای سه بُعدی استفاده نماییم (شکل ۶-۶). استفاده از قانون متوازی الاضلاع نشان می دهد که می‌توان آن را به وسیله V_2 که موازی با محور x_2 است و W که بر روی صفحه $x_1 - \mathrm{x}_2$ قرار داد نشان داد.

استفاده از قانون متوازی الاضلاع برای W نیز نشان می‌دهد که می‌توان آن را با V_2, V_1 نشان داد که بترتیب به موازات محورهای x_2, x_1 هستند.

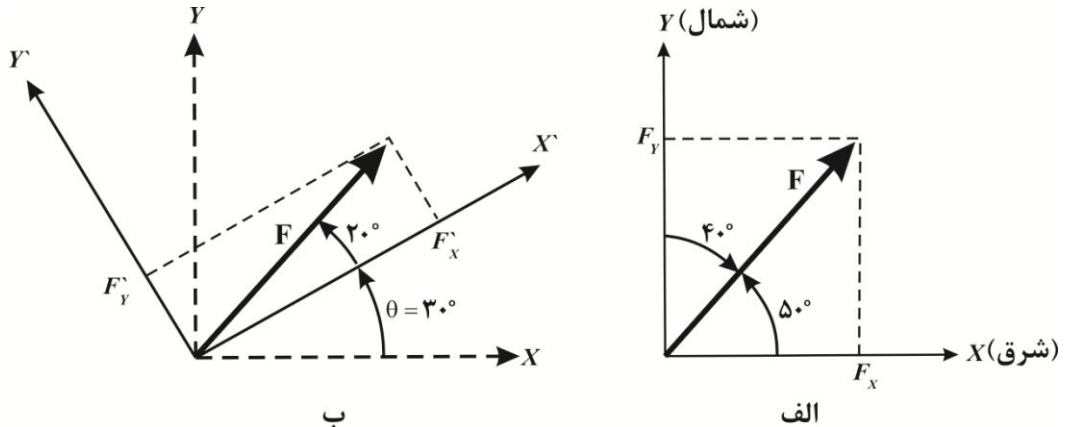
$V_3, \mathrm{V}_2, \mathrm{V}_1$مؤلفه‌های بردار V هستند اگر طول این مؤلفه‌ها را بترتیب با $V_3, \mathrm{V}_2, \mathrm{V}_1$ مشخص نماییم مؤلفه‌های اسکالر بردار یا مؤلفه‌های بردار V در دستگاه مختصات نامیده می‌شوند.بنابراین بردار Vمی‌تواند به وسیله سه مؤلفه اسکالر نشان داده شود.



شکل ۶-۶- بردار V ومؤلفه‌های آن $(V_3, \mathrm{V}_2, \mathrm{V}_1)$ در فضای سه بُعدی. W تصویرV بر روی صفحه $x_1 - \mathrm{x}_2$ است.

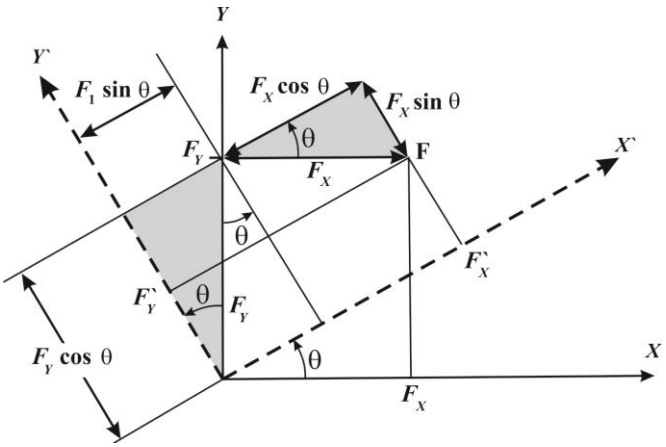
برای یک کمیّت برداری ثابت مانند نیرو مقادیر مؤلفه‌ها نشان می‌دهند که کمیّت برداری تنها وابسته به بزرگی و جهت آن نیست بلکه به جهت گیری دستگاه مختصاتی که درآن قرار دارد نیز وابسته است.

این مسأله مشابه حالت دو بُعدی است که محور مختصات x مثبت است بدلیل این که به سمت شرق می‌باشد و محور y نیز مثبت است چون به سمت شمال می‌باشد(شکل ۷-۶- الف). اگر F یک نیروی ۱۰۰ نیوتنی باشد که در زاویه ۴۰° از شمال به سمت شرق باشد بردار نیروی آن بطور کامل بوسیله مؤلفه‌های F_y, F_x دردستگاه مختصات $X - Y$ ترسیم و معرفی می شوند.در حالت دیگر محور x' در زاویه ۳۰° در جهت پادساعتگرد نسبت به محورx چرخش می کند. مؤلفه‌های نیروی F در دو حالت الف و ب در شکل ۷-۶ بصورت زیر خواهند بود.



شکل۷-۶- وابستگی مؤلفه‌های اسکالر بردار به جهت‌گیری دستگاه مختصات. (الف) مؤلفه‌های (F_y, F_x) بردار F در دستگاه مختصات $\mathrm{x} - \mathrm{y}$. (ب) مؤلفه‌های $(\acute{F}_y, \acute{F}_x)$ بردار F در دستگاه مختصات $\mathrm{x}' - \mathrm{y}'$.

مؤلفه‌های بردار F در دستگاه‌های مختصات مختلف بصورت سیستماتیک به هم مرتبط هستند.اگر در شکل۸-۶ زاویه بین x', x و همچنین زاویه بین y', y را با θ نشان دهیم می توانیم از مثلث‌های سایه خورده استفاده نماییم.



شکل ۸-۶- ارتباط هندسی بین مؤلفه‌های اسکالر یک بردار با دو جهت گیری متفاوت در دستگاه مختصات. اضلاع مثلث‌های سایه خورده می‌توانند برای استنباط مقادیر مؤلفه‌های $(\acute{F}_y, \acute{F}_x)$ ازمؤلفه‌های (Fy, Fx) مورد استفاده قرار گیرند.

حالت مشابهی نیز در حالت سه بعدی وجود دارد.اگر چه معادلات کمی پیچیده‌تر هستند اما اصول آنها یکسان است. بردار F یک کمیّت فیزیکی است که می‌تواند به وسیله مجموعه های متفاوتی از مؤلفه‌ها در دستگاه‌های مختصات مختلف نشان داده شود.به دلیل این که معادلات بالا ما را قادر می‌سازند تا مقدار مؤلفه‌های یک دستگاه مختصات شناخته شده را به یک دستگاه مختصات شناخته نشده تبدیل نماییم به آنها معادلات انتقالی می گویند. برای این که یک کمیّت بصورت برداری باشد باید به وسیله این فرمول درحالت دو بُعدی یا به وسیله فرمولی مشابه برای حالت سه بُعدی قابل تبدیل باشد.

مثال های عددی

می‌خواهیم مؤلفه‌های تنش سطحی عمل کننده بر روی دو صفحه مختلف از ستون شکل ۱-۶ الف که تیرانوزوروس بر روی آن قرار دارد را محاسبه نماییم. ابتدا مؤلفه‌های تنش سطحی بر روی نیمرخ افقی ستون راتعیین می‌نماییم (شکل ۱-۶ الف و شکل ۴-۶ الف). سطح مقطع ستون $A = L \times L = 2m^2$ و وزن تیرانوزوروس W=80000 N است که بزرگی نیروی عمل کننده به سمت پایین است. نیرویی که بر واحد سطح بخش فوقانی ستون وارد می‌شود یک اثر نیرو است که باعث اعمال یک اثر نیرو مساوی و خلاف جهت آن بر بخش تحتانی ستون می‌شود. بزرگی تنش سطحی فقط برابر با بزرگی اثر نیرو است (شکل ۴-۶- ب). علائم مؤلفه‌های تنش سطحی را بر اساس علائم قرار دادی دایره مور انتخاب می نماییم.

$$\Sigma = \frac{W}{A} = \frac{80{,}000\text{N}}{A} = 40{,}000\ \text{pa} = 0.04\ \text{MPa} \qquad (۶-۵)$$

در اینجا فقط بزرگی بردار و تنش‌های سطحی را مطرح می‌نماییم بنابراین از حروف درشت استفاده نمی‌نماییم.به دلیل این که نیرو و در نتیجه، تنش سطحی تقریباً بصورت عمود بر سطح A عمل می‌کند.مؤلفه نرمال تنش (σ_n) برابر با بزرگی تنش سطحی (Σ) مربوطه و مؤلفه برشی تنش (σ_s) برابر با صفر است. بنابراین

$$\sigma_n = \frac{W}{A} = \Sigma = 40{,}.000\ \text{Pa} \qquad \sigma_s = 0 \qquad (۶-۶)$$

حالا می‌خواهیم بزرگی تنش سطحی $\acute{\Sigma}$ را که بر روی صفحه ای که با محور عمودی زاویه $\theta = 30^\circ$ به سمت چپ می سازد و سطح مقطع A' دارد را محاسبه نماییم. (شکل ۸-۴. ج). بنابراین:

$$\Sigma = \frac{W}{\acute{A}} = \frac{W}{A/cos\,\theta} = \frac{80{,}000\ N}{2.309m^2} = 34{,}640\ Pa \qquad (۶-۷)$$

در اینجا A و A' به وسیله رابطه زیر به هم مرتبط هستند.

$$A = LL \qquad A' = L\left(\frac{L}{cos\theta}\right) = \frac{A}{cos\theta} \qquad (۶-۸)$$

باتوجه به رابطه ۸-۷ اگر چه وزن یکسان است اما بزرگی تنش سطحی بر روی سطح A' نسبت به A کوچک‌تر است زیرا سطح A'بزرگتر از سطح A است (شکل ۸-۴. د).مؤلفه‌های عمود و مورب بر سطح نیرو $(\acute{F}_s, \acute{F}_n)$ برابر هستند با

$$\acute{F}_n = W\cos\theta \qquad \acute{F}_s = W\sin\theta \qquad (۶-۹)$$

مؤلفه‌های تنش نرمال و تنش برشی $(\acute{\sigma}_s, \acute{\sigma}_n)$ بصورت ساده متناظر با مؤلفه‌های نیرو تقسیم بر سطحی هستند که بر روی آن عمل می‌کنند.

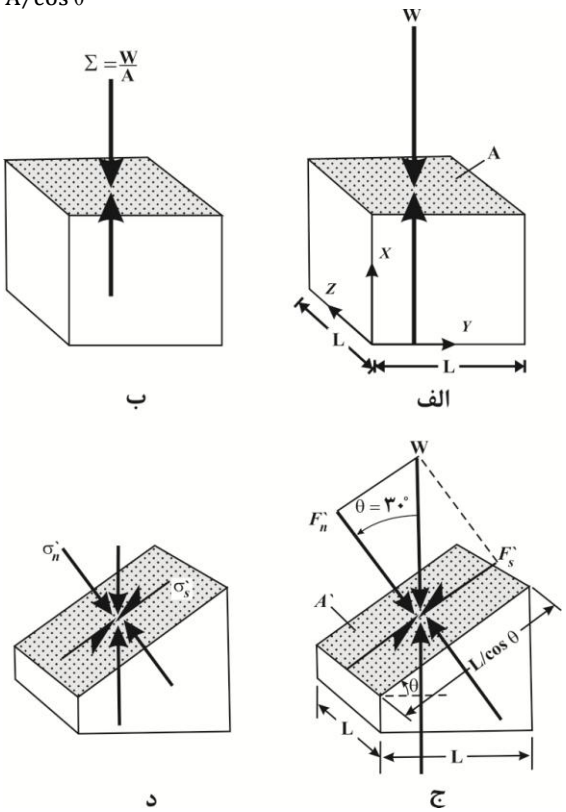
$$\acute{\sigma}_n = \frac{\acute{F}_n}{\acute{A}} = \frac{W\cos\theta}{\acute{A}} = \acute{\Sigma}\cos\theta = 30{,}000\ Pa = 0.03MPa \qquad (۶-۱۰)$$

$$\acute{\sigma}_s = \frac{\acute{F}_s}{\acute{A}} = \frac{W\sin\theta}{\acute{A}} = \acute{\Sigma}\sin\theta = 17{,}320\ Pa = 0.01732MPa \qquad (۶-۱۱)$$

میتوانیم مؤلفه‌های $\acute{\sigma}_s, \acute{\sigma}_n$ بر روی A' را با مؤلفه تنش نرمال (σ_n) بر روی A مرتبط سازم. در روابط ۶-۱۰ و ۶-۱۱ سطح A' را با استفاده از سطح A مورد استفاده در رابطه ۸-۶ نوشته و سپس با استفاده از رابطه ۸-۶ داریم.

$$\acute{\sigma}_n = \frac{W\cos\theta}{\acute{A}} = \frac{W\cos\theta}{A/\cos\theta} = \sigma_n\cos^2\theta \qquad (۶-۱۲)$$

$$\acute{\sigma}_s = \frac{W\sin\theta}{\acute{A}} = \frac{W\sin\theta}{A/\cos\theta} = \sigma_n\sin\theta\cos\theta \qquad (۶-۱۳)$$



شکل ۹-۶- تعیین مؤلفه‌های تنش بر روی سطوحی با جهت‌گیریهای مختلف.(الف) وزن W بر سطح ستون چوبی وارد می‌شود و عمود بر سطح مقطع A و به موازات محور ستون است. (ب) بزرگی تنش سطحی Σ بر روی سطح مقطع A برابر با نیرو تقسیم بر سطح است. نیرو وتنش سطحی بصورت عمود بر سطح هستند بطوری که مؤلفه تنش برشی وجود ندارد (ج) یک صفحه که با شیب ۳۰ درجه از ستون عبور کرده است که دارای سطح A' است و نیروی یکسان W بر آن وارد می‌شود. مؤلفه‌های نیروی عمود و موازی با سطح F_s, F_n هستند. (د) بزرگی تنش سطحی Σ' برابر با نیروی W تقسیم بر سطح مقطع A' است بزرگی مؤلفه‌های نرمال و برشی تنش برابر با مؤلفه‌های نیروی عمود بر سطح و موازی با سطح تقسیم بر سطح مقطع A' است.

این نمونه نشان میدهد که اثر نیرو و تنش سطحی از کمیّت‌های برداری نیستند زیرا قابل جدا شدن از فضا و در نتیجه، قابل جدا شدن از جهت‌گیری صفحه‌ای که بر روی آن عمل می‌کنند می باشند. معادله انتقالی که مؤلفه‌های نرمال و برشی تنش سطحی بر روی دو صفحه دارای جهت‌گیری‌های متفاوت(روابط ۱۲-۶ و۱۳-۶) را به هم مرتبط می‌سازد. بسیار متفاوت‌تر از معادله انتقالی ارتباط دهنده مؤلفه‌های مماسی و نرمال بردار نیرو (رابطه ۹-۶) است.روابط ۱۲-۶ و ۱۳-۶ شامل معادلات انتقالی بردار نیرو (صورت کسر) و معادله توجیه کننده تغییر سطح با تغییر جهت‌گیری (مخرج کسر) است. این دو اثر بیشتر ناشی از ضرب و مجذور توابع سینوس و کوسینوسی

است تا این که فقط ناشی از بخش‌های مرتبه اول این توابع مانند رابطه ۹-۶ باشد.بنابراین اثر نیرو دارای شاخصهای برداری است تنها زمانی که صفحه دارای جهت‌گیری ثابتی باشد. با اینحال، بردار نیرو مستقل از جهت‌گیری صفحه‌ای است که بر روی آن عمل می‌کند. این تفاوت مهمترین تفاوت بین اثر نیرو یا تنش با نیرو است.

تنش دو بُعدی در یک نقطه

اگر بتوانیم مؤلفه‌های تنش نرمال و تنش برشی (σ_s, σ_n) بر روی صفحه‌ای با هر جهت گیری ممکن که از یک نقطه می‌گذرد را تعیین نماییم. تنش درآن نقطه از مجموعه را می‌شناسیم. البته تعداد بیشماری از اینگونه صفحات وجود دارند که دانستن حداقل اطلاعات ما را قادر می‌سازد تا مؤلفه‌های تنش بر روی هر یک از آنها را تعیین نماییم.

برای حالت دو بُعدی اگر مؤلفه‌های تنش نرمال بر روی صفحات بصورت تماماً کششی یا تماماً فشاری باشند تصوّر تنش خیلی ساده خواهد بود زیرا می‌توان آن را به وسیله یک بیضی نشان داد. اگر کلیه تنش‌های سطحی ممکن را به وسیله پیکان‌هایی ازنقطه منشأ رسم نماییم. انتهای این پیکان‌ها منطبق بر یک بیضی خواهد بود که به آن بیضی تنش[۱] می‌گویند(شکل ۱۰-۶ الف). درحالاتی که بعضی از تنش‌های نرمال بصورت فشاری و بعضی دیگر بصورت کششی هستند بیضی تنش مشخص نمی‌شود. در بخش بر روی موارد ساده‌ای تمرکز می‌نماییم که بیضی تنش بطور کامل حالت تنش (σ) در یک نقطه را نشان می‌دهد.

تنش‌های سطحی عموماً بصورت عمود بر صفحاتی نیستند که بر روی آنها عمل می‌کنند. بنابراین مؤلفه‌های تنش نرمال و تنش برشی (σ_s, σ_n) بر روی یک صفحه اختیاری برابر با صفر نیستند و تنها برای تنش های سطحی که به موازات محورهای کوچک وبزرگ بیضی تنش هستند، صفر می‌شوند (شکل ۸-۶ الف). این دو تنش سطحی،تنش‌های اصلی[۲] σ_3, σ_1 هستند (شکل ۱۰-۶ الف). صفحاتی که تنش‌های اصلی بر روی آنها عمل می‌کنند صفحات اصلی[۳] هستند و محورهای مختصات موازی با تنش‌های اصلی، محورهای اصلی[۴] $\hat{X}_3, \hat{X}_1$ یا دستگاه مختصات اصلی هستند. تنش های اصلی بصورت بزرگ‌ترین و کوچک‌ترین تنش‌های سطحی هستند که بر روی صفحاتی که از یک نقطه می گذرند، عمل می‌کنند و به وسیله علائم قرار دادی بصورت زیر نشان داده می‌شوند.

$$\hat{\sigma}_1 \geq \hat{\sigma}_3 \qquad (۶-۱۴)$$

بزرگی و جهت‌گیری تنش‌های اصلی بصورت کاملی بیضی تنش و در نتیجه تنش(σ) در یک نقطه را مشخص می‌سازد.

تنش‌های اصلی بصورت عمود بر صفحات اصلی هستند که بر روی آنها عمل می‌کنند بطوری که مؤلفه برشی تنش بر روی صفحات اصلی برابر با صفر است. بنابراین بزرگی تنش‌های سطحی اصلی بطور کامل بوسیله مؤلفه نرمال تنش‌های $\hat{\sigma}_3, \hat{\sigma}_1$ تعیین می‌شود عکس این حالت نیز برقرار است یعنی هر صفحه‌ای که تنش برشی بر روی آن صفر است(مانند صفحه A در شکل ۹-۶ الف) باید صفحه اصلی باشد و تنش نرمالی که بر روی آن عمل می‌کند باید تنش اصلی باشد. به دلیل این که تنش‌های برشی بر روی صفحات اصلی برابر با صفر هستند استفاده از تنش‌های اصلی روش خیلی ساده‌ای برای تعیین تنش در یک نقطه است.

یک نقطه در مجموعه دو بُعدی را به عنوان یک مربع بینهایت کوچک از ماده در نظر می‌گیریم. ضلع های مقابل به هم مربع نشان‌دهنده دو طرف صفحه‌ای است که از آن نقطه می‌گذرد و درنتیجه دو جفت ضلع عمود بر هم مربع نشان دهنده دو صفحه عمود بر هم است که از آن نقطه می‌گذرند. شکل ۱۴-۶ ب، مربع مختصات در دستگاه مختصات اصلی همراه با $\hat{\sigma}_3, \hat{\sigma}_1$ محورهای اصلی $\hat{X}_3, \hat{X}_1$ و صفحات اصلی که ضلع‌های مربع هستند را نشان می‌دهد.

یک تنش سطحی به تنهایی حالت کامل تنش در یک نقطه را مشخص نمی‌کند همانند حقیقتی که طول پیکان یکی از تنشهای سطحی در بیضی تنش نمی‌تواند شکل کامل بیضی را مشخص کند اما دو تنش اصلی می‌توانند شکل بیضی تنش را بطور کامل مشخص کنند. با اینحال، تنش‌های سطحی عمل کننده بر روی هر دو صفحه عمود بر هم که از نقطه یک می‌گذرند نیز شکل بیضی تنش را بطور کامل مشخص می‌کنند.

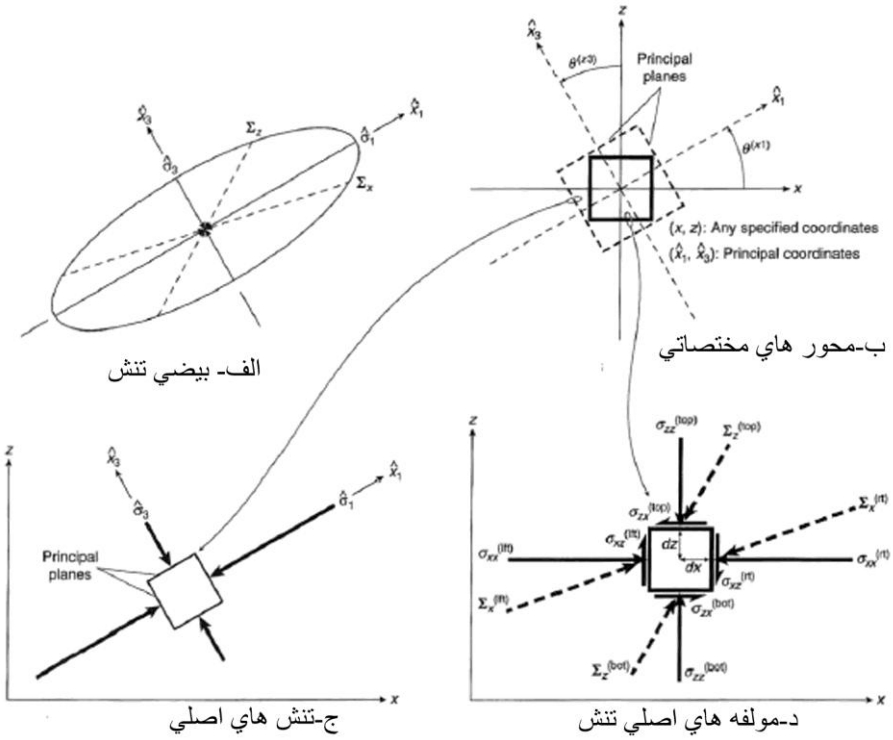
دستگاه مختصات عمومی Z,X را بصورت عمود بر دو ضلع مربع دارای جهت‌گیری اختیاری تعیین می‌نماییم. صفحات عمود بر محور X را به عنوان صفحات X و صفحات عمود بر محور Z به عنوان صفحه Z در نظر می‌گیریم. در نتیجه می‌توانیم مؤلفه‌های تنش را بر

۱-Stress ellipse
۲-principal stress
۳-Principal planes
۴-Principal axis

اساس صفحه‌ای که بر روی آن عمل می‌کنند و محوری که با آن موازی هستند، علامت گذاری نماییم(شکل ۱۰-۶ ج). مؤلفه‌های تنش سطحی (Σ_x) عمل کننده بر روی صفحه x مربع مختصات σ_{xz}, σ_{xx} هستند. اندیس اول (x) نشان دهنده این است که تنش سطحی بر روی صفحه x عمل می کند و اندیس دوم (z,x) نشان دهنده این است که σ_{xz}, σ_{xx} بترتیب به موازات محورهای z,x هستند. بنابراین σ_{xx} مؤلفه تنش نرمال و σ_{xz} مؤلفه تنش برشی است (در شکل ۱۰-۶ ج. هر یک از اثر نیروها و مؤلفه‌های اثر نیرو بطور مجزا علامت‌گذاری شده‌اند). بصورت مشابهی برای تنش سطحی (Σ_z) عمل کننده بر روی صفحه z، σ_{zz} مؤلفه تنش نرمال و σ_{zx} مؤلفه تنش برشی است. بنابراین تنش (σ) در یک نقطه بوسیله تنش‌های اصلی $(\hat{\sigma}_3, \hat{\sigma}_1)$ و جهت‌گیری آنها و یا در دستگاه مختصات عمومی x-z بوسیله تنش‌های سطحی Σ_z, Σ_x یا مؤلفه‌های آنها $(\sigma_{xz}, \sigma_{xx})$ و $(\sigma_{zz}, \sigma_{zx})$ بطور کامل مشخص می‌شود.

$$\sigma = \begin{cases} \hat{\sigma}_1 \\ \hat{\sigma}_3 \end{cases} \quad \text{یا} \quad \sigma = \begin{cases} \Sigma_1 : (\sigma_{xx}, \sigma_{xz}) \\ \Sigma_3 : (\sigma_{zz}, \sigma_{zx}) \end{cases} \qquad (۱۵-۸)$$

تنها در یک مورد یک تنش سطحی برای تعیین تنش در یک نقطه کافی است وآن فشار هیدروستاتیک است که بیضی تنش آن بصورت دایره است.



شکل ۱۰-۶ : نمایش حالت تنش دو بُعدی در یک نقطه. (الف) بیضی تنش، مکان هندسی کلیه تنش‌های سطحی عمل کننده بر روی تمامی صفحات دارای جهت‌گیری‌های مختلف است که از یک نقطه می‌گذرند، کلیه مؤلفه‌های تنش نرمال باید دارای علامت‌های یکسان باشند تا بیضی تنش مشخص شود. محورهای مختصات اصلی به موازات محورهای بزرگ و کوچک بیضی و در نتیجه، به موازات بزرگ‌ترین و کوچک‌ترین تنش اصلی هستند و صفحات عمود بر تنش‌های اصلی، صفحات اصلی هستند.(ب) دو سیستم مختصاتی متفاوت یکی سطوح اصلی تنش و دیگری محور های مختصاتی جغرافیایی(x,z) را تعریف می کند (ج) تنش در یک نقطه بصورت کامل می‌تواند در یک دستگاه مختصات اصلی $\hat{x}_1 - \hat{x}_2$ به وسیله دو تنش اصلی $\hat{\sigma}_3, \hat{\sigma}_1$ عمل کننده بر روی دو صفحه مختصات اصلی و عمود بر هم تعیین گردد نقطه را به وسیله یک مربع بینهایت کوچک نمایش می‌دهیم. (د) همچنین تنش در یک نقطه می‌تواند بصورت کامل در هر دستگاه مختصات x-z به وسیله تنش‌های سطحی Σ_z, Σ_x و یا به وسیله مؤلفه‌های آنها $\sigma_{zz}, \sigma_{zx}, \sigma_{xx}, \sigma_{xz}$ که بر روی دو صفحه عمود بر هم عمل می‌کنند، تعیین شود.

برای تعیین تنش به مربع مختصاتی نیاز داریم که درتعادل مکانیکی باشد یعنی شتاب آن به موازات هر یک از محورهای مختصات و شتاب زاویه‌ای آن برابر با صفر باشد بنابراین هم نیروها و هم گشتاور این نیروهای عمل کننده بر روی دو ضلع مربع باید برابر با صفر باشد. با توجه به رابطه ۴-۶ می‌دانیم که مؤلفه‌های نرمال و برشی اثر نیرو بر روی طرفین صفحه باید مساوی و در خلاف جهت هم باشند (شکل ۲-۶ ب). بنابراین با توجه به شکل ۵-۶ ج رابطه زیر حاصل می‌شود.

$$\sigma_{xx}^{rt} = -\sigma_{xx}^{lft} \quad , \sigma_{zz}^{top} = -\sigma_{zz}^{bot} \qquad (۶-۱۶)$$

حاصلضرب مؤلفه‌های اثر نیرو در سطح مقطعی که بر روی آن عمل می‌کنند مؤلفه نیروی عمل کننده بر روی مربع مختصات را مشخص می‌سازد. با استفاده از شکل ۸-۵. ج. مجموع کلیه مؤلفه‌های نیروی موازی با محور x را بدست می‌آوریم و بصورت جداگانه کلیهٔ مؤلفه‌های نیروی موازی با محور z را نیز جمع می‌نماییم. بنابراین نیازمند این هستیم که

$$\|x: \qquad \sigma_{xx}^{rt}\,A_x + \sigma_{xx}^{lft}\,A_x + \sigma_{zx}^{top}\,A_z + \sigma_{zx}^{bot}\,A_z = 0 \qquad (۶-۱۷)$$

$\|z:$

اگر از رابطه ۸-۱۶ استفاده نماییم تا یکی از زوج مؤلفه اثر نیرو را از رابطه ۸-۱۷ حذف نماییم مشاهده می‌شود که نتیجه بصورت ۰=۰ است. اگر نیروها جمع گردند تا برابر با صفر شوند بنابراین رابطه ۱۶-۶ بدست خواهد آمد.تعیین گشتاور نیروها حول منشأ آن و یا حول محور y تنها شامل مؤلفه برشی اثر نیرو است زیرا گشتاور مؤلفه نرمال اثر نیرو برابر با صفر است. با توجه به شکل۱۰-۶ ج، ابعاد بینهایت کوچک مربع برابر با $2dz$, $2dx$ هستند که موجب بدست آوردن کلیه گشتاورها و صفر شدن مجموع آنها می‌شوند.

$$\sigma_{xz}^{rt}\,A_x dx + \sigma_{xz}^{lft}\,A_x(-dx) + \sigma_{zx}^{top}\,A_z dz + \sigma_{zx}^{bot}\,A_z(-dz) = 0 \quad (۶-۱۸)$$

به دلیل این که $dx = dz, A_x = A_z$ است میتوانیم این کمیت ها را به وسیله تقسیم رابطه بر این کمیّت‌ها حذف نموده و با استفاده از رابطه ۱۶-۶ نشان دهیم که اثر نیروهای برشی و در نتیجه، تنش‌های برشی بترتیب روابط زیر با هم مرتبط هستند.

$$\sigma_{xz}^{lft} = -\sigma_{zx}^{bot} \qquad , \sigma_{xz} = -\sigma_{zx} \qquad (۶-۱۹)$$

بنابراین از چهار مؤلفه تنش در دستگاه مختصات x-z (رابطه دوم ۸-۲) تنها سه مؤلفه آن بصورت مستقل هستند که عبارتند از: $\sigma_{zz}, \sigma_{xz} = -\sigma_{zx}, \sigma_{xx}$.

تنش سه بُعدی در یک نقطه

توصیف تنش در سه بُعد یک روند مستقیم از توصیف آن در دو بُعد است. در موارد ساده‌ای که کلیه مؤلفه‌های نرمال تنش دارای علامت یکسانی هستند تنش در یک نقطه به وسیله بیضوی تنش نشان داده می‌شود(شکل ۸-۶ الف). محورهای اصلی بزرگ، متوسط و کوچک بیضوی تنش به موازات محورهای مختصات اصلی هستند. این محورها بترتیب بزرگترین تنش اصلی، تنش اصلی متوسط و کوچک‌ترین تنش اصلی را نشان می‌دهند که آنها را بر اساس قرار داد با علامتهای زیر نشان می‌دهیم.

$$\hat{\sigma}_1 \geq \hat{\sigma}_2 \geq \hat{\sigma}_3 \qquad (۶-۲۰)$$

تنش‌های اصلی در واقع تنش‌های سطحی عمل کننده بر روی سه صفحه اصلی عمود بر هم هستند که از یک نقطه می‌گذرند. تنش نرمال بر روی صفات اصلی دارای بالاترین مقدار و تنش برشی بر روی آنها برابر با صفر است. نقطه را بصورت یک مکعب بینهایت کوچک در نظر می‌گیریم که سطوح آن به موازات سطوح اصلی و بصورت عمود بر محورهای اصلی $\hat{X}_3, \hat{X}_2, \hat{X}_1$ هستند (شکل ۱۱-۶ ب).

بیضوی تنش همچنین می‌تواند بوسیله تنش‌های سطحی $\Sigma_z, \Sigma_y, \Sigma_x$ و مؤلفه‌های آن تعیین شود که بر روی سه سطح عمود بر هم عبور کننده از نقطه عمل می کنند. (شکل۱۱-۶ ج). محورهای مختصات z,y,x به موازات تقاطع دو طرفه این سه صفحه هستند. و نقطه بوسیله یک مکعب بینهایت کوچک نشان داده می‌شود که سطوح آن به موازات این سه صفحه است. تنش‌های سطحی عمل کننده بر روی هر یک از سطوح این مکعب دارای سه مؤلفه هستند که هر مؤلفه به موازات یکی از سه محور مختصات است (شکل ۶-۶). یکی از این مؤلفه‌ها بصورت نرمال و دوتای دیگر بصورت برشی هستند. هر مؤلفه تنش ترکیبی از یک زوج مؤلفه اثر نیرو مساوی و در خلاف جهت هم است که بر روی سطوح مقابل به هم مکعب عمل می‌کنند . مؤلفه‌های این سه تنش سطحی را با علائم قرار دادی مورداستفاده در علامت گذاری مؤلفه‌های تنش دو بُعدی علامت‌گذاری می‌نماییم. مؤلفه‌های دارای دو اندیس مشابه، تنش نرمال و دارای دو اندیس نامشابه، تنش برشی هستند.

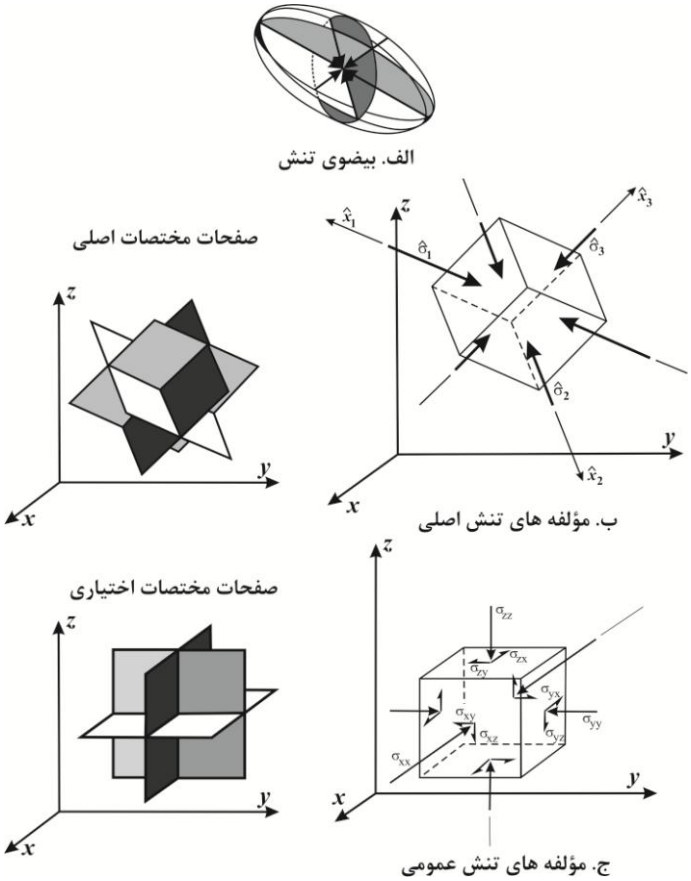
بیضوی تنش که تنش در یک نقطه را مشخص می‌کند بوسیله سه تنش اصلی $\hat{\sigma}_3, \hat{\sigma}_2, \hat{\sigma}_1$ و جهت‌گیری آنها (شکل ۱۱-۶ ب) یا بوسیله سه تنش سطحی $\Sigma_z, \Sigma_y, \Sigma_x$ یا مؤلفه های عمل کننده آنها ب رروی سه صفحه عمود بر هم در یک نقطه توصیف می‌شود (شکل ۱۱-۶ ج).

$$\sigma = \begin{cases} \hat{\sigma}_1 \\ \hat{\sigma}_2 \\ \hat{\sigma}_3 \end{cases} \quad \text{یا} \quad \sigma = \begin{cases} \Sigma_1: & (\sigma_{xx}, \sigma_{xy}, \sigma_{xz}) \\ \Sigma_2: & (\sigma_{yy}, \sigma_{yx}, \sigma_{yz}) \\ \Sigma_3: & (\sigma_{zz}, \sigma_{zx}, \sigma_{zy}) \end{cases} \qquad (۶-۲۱)$$

بطور کلی ۹ مؤلفه برای تعیین تنش سه بُعدی در یک نقطه مورد نیاز است. با این حال، از این ۹ مؤلفه تنها ۶ مؤلفه بصورت مستقل هستند. زیرا گشتاور نیروهای عمل کننده بر روی مکعب درحول هر محور مختصات درمجموع باید برابر با صفر باشد. (روابط ۱۸-۶ و ۱۹-۶ را مقایسه نمایید) بنابراین

$$\sigma_{xy} = -\sigma_{yx} \qquad \sigma_{xz} = -\sigma_{zx} \qquad \sigma_{yz} = -\sigma_{zy} \qquad (۶-۲۲)$$

برای تحلیل مسألهای مانند تنش دو بُعدی، صفحه ای که تحلیل مسأله بر روی آن صورت می‌گیرد باید صفحه اصلی باشد که حاوی دو تنش اصلی (مانند $\hat{\sigma}_2, \hat{\sigma}_1$) است و باید بصورت عمود بر سومین تنش اصلی (مانند $\hat{\sigma}_2$) باشد.



شکل ۱۱-۶- حالت تنش سه بُعدی در یک نقطه. (الف) بیضوی تنش به وسیله تنش های سطح عمل کننده بر روی کلیه صفحات دارای جهت‌گیری‌های مختلف که از یک نقطه می‌گذرند، تعیین می‌شود. صفحات سایه زده صفحات اصلی هستند مؤلفه‌های تنش بصورت تنش‌های اصلی هستند. برای نمایش تنش بصورت بیضوی باید مؤلفه‌های نرمال تنش های سحطی تمام فشاری یا کششی باشند. جهت‌گیری صفحه‌ای که هر تنش سطحی خاصی بر روی آن عمل می‌کند به راحتی از روی بیضوی تنش بدست نمی‌آید. تنش‌های اصلی $\hat{\sigma}_3, \hat{\sigma}_2, \hat{\sigma}_1$ موازی با محورهای اصلی بیضوی تنش هستند. (ب)تنش سه بُعدی در دستگاه مختصات اصلی و (ج) در دستگاه مختصات عمومی را نشان می‌دهد.

علامت‌گذاری تنسور[۱] تنش

تنش در مکانی کوانتوم بوسیله کمیّت ریاضی که به عنوان تنسور تنش نامیده می‌شود تعیین می‌گردد. مؤلفه‌های تنسور تنش دارای مقادیر عددی مشابه با مؤلفه‌های تنش دایره مور هستند اما علائم مؤلفه‌ها بوسیله قرار دادهای متفاوتی تعیین می‌شود. خصوصاً علائم مؤلفه‌های تنش برشی ممکن است متفاوت باشد. برای تمایز مؤلفه‌های تنسور تنش از مؤلفه‌های تنش دایره مور که قبلاً مطرح شده، سه محور دستگاه مختصات اورتوگونالی را با $\hat{x}_3, \hat{x}_2, \hat{x}_1$ بجای z,y,x و مؤلفه‌های تنسور تنش را با اندیس عددی علامت‌گذاری

۱-Tensor

می‌نماییم. اندیس اول نشان‌دهنده محور مختصات عمود بر صفحه مختصاتی است که مؤلفه تنش بر روی آن عمل می‌کند و اندیس دوم نشان‌دهنده محور مختصاتی است که مؤلفه تنش به موازات آن است. برای مثال σ_{12}، مؤلفه تنش برشی است که بر روی صفحه x_1 عمل می‌کند (اندیس اول) و به موازات محور x_2 است (اندیس دوم). و مؤلفه تنش σ_{11}، مؤلفه تنش نرمال است که بر روی صفحه x_1 عمل می‌کند و به موازات محور x_1 است. همانطور قبلاً گفته شد مؤلفه‌های تنش نرمال دارای دو اندیس مشابه و مؤلفه‌های تنش برشی دارای دو اندیس نامشابه هستند.

مؤلفه‌های تنسور تنش با نظم خاصی بصورت یک ماتریس نوشته می‌شوند. تنش‌های سطحی عمل کننده بر روی سه صفحه مختصات در یک ستون نوشته می‌شوند که اندیس آنها از بالا به پایین بزرگتر می‌شود. مؤلفه‌های هر یک از تنش‌های سطحی در یک ردیف نوشته می شوند. بنابراین اندیس اول هر ردیف یکسان است و مقدار آن از بالا به پایین ستون افزایش می‌یابد. اندیس دوم هر ردیف از چپ به راست افزایش می‌یابد. مؤلفه‌های تنسور تنش سه بُعدی در دستگاه مختصات $\hat{x}_3, \hat{x}_2, \hat{x}_1$ یا دستگاه مختصات عمومی $\hat{x}_3, \hat{x}_2, \hat{x}_1$ بترتیب بصورت زیر هستند.

$$\sigma = \begin{cases} \widehat{\Sigma}_1 \\ \widehat{\Sigma}_2 = \\ \widehat{\Sigma}_3 \end{cases} \begin{bmatrix} \hat{\sigma}_1 & 0 & 0 \\ 0 & \hat{\sigma}_2 & 0 \\ 0 & 0 & \hat{\sigma}_3 \end{bmatrix} \text{ یا } \quad \sigma = \begin{cases} \Sigma_1: \\ \Sigma_2: = \\ \Sigma_3 \end{cases} \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \qquad (۶-۲۳)$$

مؤلفه‌های تنش نرمال در طول قطر اصلی ماتریس ومؤلفه‌های تنش برشی در موقعیت‌های غیر قطری قرار می‌گیرند. با درنظر گرفتن علائم قراردادی تنسور تنش، رابطه ۸-۲۲ بصورت زیر خواهد شد.

$$\sigma_{12} = \sigma_{21} \quad , \quad \sigma_{13} = \sigma_{21} \quad , \quad \sigma_{23} = \sigma_{32} \qquad (۶-۲۴)$$

سه معادله موجود در رابطه ۲۴-۶ تقارن تنسور تنش[۱] را مشخص می‌کنند که اشاره به مساوی بودن مؤلفه‌های تنش برشی دارد که بصورت متقارن نسبت به قطر اصلی ماتریس(رابطه ۲۳-۶) قرار می‌گیرند. توجه نمایید که با این علائم قراردادی، مؤلفه‌های تنش برشی متقارن بصورت مساوی هستند اما در خلاف جهت هم نیستند(با رابطه ۲۲-۶ مقایسه نمایید) حتی اگر از تنش‌های برشی بصورت ساعتگرد ودیگری بصورت پادساعتگرد باشد (شکل ۱۱-۶ ج). علامت‌گذاری تنش‌های اصلی تغییری ندارد اما ماتریس بطور صریح نشان می‌دهد که کلیه مؤلفه‌های تنش برشی همراه با تنش‌های اصلی برابر با صفر هستند.

در حالت دو بُعد فقط دو جهت مختصاتی وجود دارد که معمولا با $\hat{x}_3, x_1$ یا $\hat{x}_3, \hat{x}_1$ نشان داده می‌شوند و در این موارد، صفحه $x_1 - x_3$ باید بصورت عمود بر محور تنش اصلی متوسط $(\hat{x}_2)$ باشد.بنابراین تنش دو بُعدی تنها به وسیله دو تنش سطحی عمل کننده بر روی دو سطح مختصات تعیین می‌شود که هر تنش سطحی آنها دو مؤلفه دارد. بنابراین ماتریس نشان دهنده تنش دو بُعدی تنها دارای چهار مؤلفه است.

$$\sigma = \begin{cases} \widehat{\Sigma}_1 = \\ \widehat{\Sigma}_3 \end{cases} \begin{bmatrix} \hat{\sigma}_1 & 0 \\ 0 & \hat{\sigma}_3 \end{bmatrix} \text{ یا } \qquad \sigma = \begin{cases} \Sigma_1: = \\ \Sigma_3: \end{cases} \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{13} \\ \sigma_{31} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \qquad (۶-۲۵)$$

این ماتریس نیز متقارن است، زیرا $\sigma_{31} = \sigma_{13}$. برای کاربردهای تنش در مطالعه دگرشکلی زمین دراین کتاب از علامت‌گذاری تنسور تنش استفاده می‌نماییم. جدول ۲-۶ قراردادهای مرجع را نشان می‌دهد که برای علامت‌گذاری تنش از آنها استفاده نموده‌ایم.

۱-Symmetry of the stress tensor

جدول ۲-۶- علامت‌گذاری تنش

مؤلفه های تنش در یک نقطه، این مؤلفه ها مشابه مؤلفه های سه تنش سطحی یا قدرت Σ_k است که بر روی سه صفحه مختصات عمل میکنند. برای هر مقدار ۳ و ۲ و ۱ =k، اندیس k دارای مقادیر ۱ و ۲ و ۳ است که سه مؤلفه هر تنش سطحی را نشان میدهد. X_k عمود بر صفحه مختصاتی است که مؤلفه بر روی آن عمل میکند. X_1 به موازارت جهت مؤلفه است. مؤلفه های نرمال دارای مقادیر k =۱ هستند اما برای مؤلفه های برشی $k \neq 1$ است. تنها فرق این مؤلفه ها با مؤلفه های تنش دایره مور در علامت آنهاست. مؤلفه های تانسور با علائم قراردادی تانسوری زمین شناسی دارای علائم مشابه با علائم مؤلفه های قدرت عمل کننده بر روی صفحات منفی دستگاه مختصات هستند.	σ_{k1}	**قدرت یا تنش سطحی عمل کننده بر روی سطح مسطح دارای جهت گیری خاص.**	Σ
		مؤلفه های نرمال و برشی تنش سطحی و قدرت.	σ_n , σ_s
		تنش های سطحی یا قدرت های عمل کننده بر روی سطح مختصاتی که به ترتیب بر محورهای x و y و z عمود هستند (یا بر محورهای x_k عمود هستند و k دارای مقادیر ۱ و ۲ و ۳ است).	Σ_y Σ_x Σ_k , Σ_z
		تنش های اصلی که مؤلفه های تنش نرمال عمل کننده بر روی صفحات مختصات دستگاه مختصات اصلی $\hat{x}_k$ هستند. مؤلفه های برشی این صفحات برابر با صفر هستند. به دلیل این که این مقادیر برابر با طول محورهای بیضوی تنش هستند تنش در یک نقطه را مشخص می سازد.	$\hat{\sigma}_k$
تنش تفریقی. کمیت اسکالر مثبت که برابر با تفریق بین بزرگ ترین و کوچک ترین تنش اصلی است.	D^{σ}	مؤلفه های تنش دایره مورد که تنش در یک نقطه از دستگاه مختصات (x و y و z) را مشخص می سازند. هر ردیف شامل مؤلفه های یکی از تنش های سطحی یا قدرت Σ_y و Σ_x و Σ_z است. اندیس اول محور عمود بر صفحه مختصاتی است که مؤلفه بر روی آن عمل می کند و اندیس دوم، محور موازی با مؤلفه است. در تعیین تنش، تنش نرمال فشاری و مؤلفه تنش برشی پادساعتگرد به صورت مثبت هستند و تنش نرمال کششی و مؤلفه تنش برشی ساعتگرد به صورت منفی هستند.	$\sigma_{xx}\ \sigma_{xy}\ \sigma_{xz}$ $\sigma_{yx}\ \sigma_{yy}\ \sigma_{yz}$ $\sigma_{zx}\ \sigma_{zy}\ \sigma_{zz}$
تنش نرمال میانگین. میانگین مؤلفه های تنش نرمال تانسور تنش در هر دستگاه مختصات است. تنش نرمال میانگین یکی از ثابت های اسکالر تانسور تنش است.	$\overline{\sigma}_n$		
مؤلفه های تنش انحرافی که برابر با مؤلفه های تانسور تنش است و میانگین تنش ها از هر یک از مؤلفه های نرمال آن کم شده است.	$\Delta\sigma_{k1}$		
مؤلفه های تنش مؤثر که برابر با مؤلفه های تانسور تنش است و مقدار فشار مایع منفذی از هر یک از مؤلفه های آن کم شده است.	$E\sigma_{k1}$		

دیاگرام مور برای حالت تنش دو بُعدی

در این بخش برای سهولت بحث را بر روی تنش دو بُعدی محدود می‌نماییم. بیضی کرنش نشان می‌دهد که مؤلفه‌های تنش نرمال و تنش برشی بر روی صفحه با تغییر جهت‌گیری صفحه باید بصورت پیشرونده تغییر کنند. استخراج ارتباط بین جهت‌گیری صفحه با مقادیر تنش نرمال و تنش برشی از روی بیضی کرنش مشکل است(راهنمای همراه با شکل ۱۱-۶ الف). با اینحال، زمانی که تنش بر روی دیاگرام مور[1] رسم می‌شود استخراج ارتباط مورد نظر بطور قابل ملاحظه‌ای آسان تر خواهد شد زیرا محور افقی دیاگرام مقدار تنش نرمال (σ_n) و محور عمودی دیاگرام مقدار تنش برشی (σ_s) را مشخص می‌سازد. برای یک تنش مشخص می‌توانیم با استفاده از دیاگرام مور مقادیر تنش نرمال و تنش برشی بر روی هر صفحه دارای جهت‌گیری اختیاری ممکن که از درون دایره مور[2] می‌گذرد را نشان دهیم. مرکزدایره مور بر روی محور تنش نرمال قرار می‌گیرد. تنش نرمال فشاری و زوج برشی پادساعتگرد را مثبت در نظر می‌گیریم. شاخص‌های دایره مور چگونگی ارتباط بین تنش در یک نقطه با تنش‌های سطحی صفحاتی که از آن نقطه می‌گذرند را نشان می‌دهند. در ادامه، تعدادی از این شاخص‌ها ذکر خواهیم نمود.

۱)دیاگرام مور

دیاگرام مور دارای محورهای نشان‌دهنده مقادیر تنش است. بنابراین تمایز دیاگرام مور از دیاگرام فضای فیزیکی که محورهای آن دستگاه مختصات فضایی می‌باشد،مهم است. همیشه لازم است تا دیاگرام فضای فیزیکی جداگانه ای درکنار دیاگرام مور رسم شود و اطلاعات به دقت از روی یک دیاگرام به روی دیاگرام دیگر منتقل شود. (شکل ۱۲-۶)

[1] -Mohr diagram
[2] -Mohr circle

دیاگرام مور نمایش کاملی از تنش در یک نقطه است زیرا مؤلفه‌های تنش نرمال و تنش برشی تنش های سطحی بر روی صفحات دارای هر گونه جهت‌گیری ممکن که از یک نقطه می‌گذرند، در درون دایره مور قرار می‌گیرند. هر نقطه‌ای روی دایره مور نشان‌دهنده تنش سطحی بر روی صفحات متفاوت است.

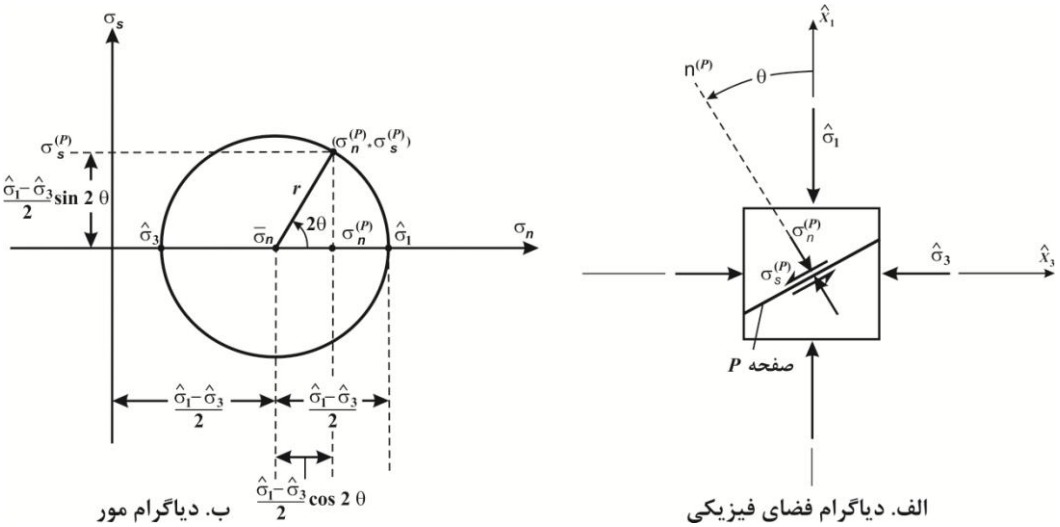
۲)تنش‌های اصلی

بزرگ‌ترین و کوچک‌ترین تنش نرمال دارای مقادیری هستند که به وسیله تقاطع دایره مور با محور σ_{n} مشخص می‌شود (شکل ۱۲-۶ ب). توجه نمایید که این دو نقطه تنها تنش‌های سطحی بر روی دایره مور هستند که مقدار تنش برشی آنها صفر است.

۳)تنش سطحی و جهت گیری صفحات

جهت‌گیری صفحه در فضای فیزیکی به وسیله جهت‌گیری خط عمود بر صفحه نسبت به محورهای مختصات شناخته شده (نه بوسیله جهت‌گیری خود صفحه) تعیین می‌شود (شکل ۱۲-۶الف). برای مثال زاویه θ در فضای فیزیکی (شکل ۱۲-۶الف) زاویه اندازه گیری شده بین محور مختصات $\hat{x}_1$ و خط عمود بر صفحه P تعیین می‌شود. همچنین θ زاویه بین مؤلفه تنش نرمال صفحه $\mathrm{P}(\sigma_{\mathrm{n}}^{\mathrm{P}})$ و تنش نرمال صفحه مختصات $(\sigma_1)\hat{\mathrm{x}}_1$ نیز هست زیرا σ_1 به موازات محور $\hat{\mathrm{x}}_1$ هم به موازات خط n است.

زاویه اندازه‌گیری شده در فضای فیزیکی (θ) هنگامی که بر روی دیاگرام مور رسم می‌شود دو برابر (2θ) می‌گردد. زوایا بر روی دیاگرام مور در جهتی مشابه با فضای فیزیکی اندازه‌گیری می‌شوند. از آنجایی که θ دارای مقادیری بین صفر تا ۱۸۰ درجه سانتی گراد است زوایای رسم شده بر روی دیاگرام مور (2θ) دارای مقادیر صفر تا ۳۶۰ درجه سانتی گراد هستند و کل دایره مور را پوشش می‌دهند. کلیه صفحات دارای دو خط عمود بر صفحه هستند که اختلاف زاویه‌ای آنها ۱۸۰ درجه است در نتیجه زوایای ۱۸۰ درجه سانتی گراد تا ۳۶۰ درجه سانتی گراد در فضای فیزیکی اضافی هستند. زیرا این زوایا، المثنی زوایایی هستند که جهت‌گیری صفحات آنها به وسیله زوایای صفر تا ۱۸۰ درجه سانتی گراد تعیین می‌شود.

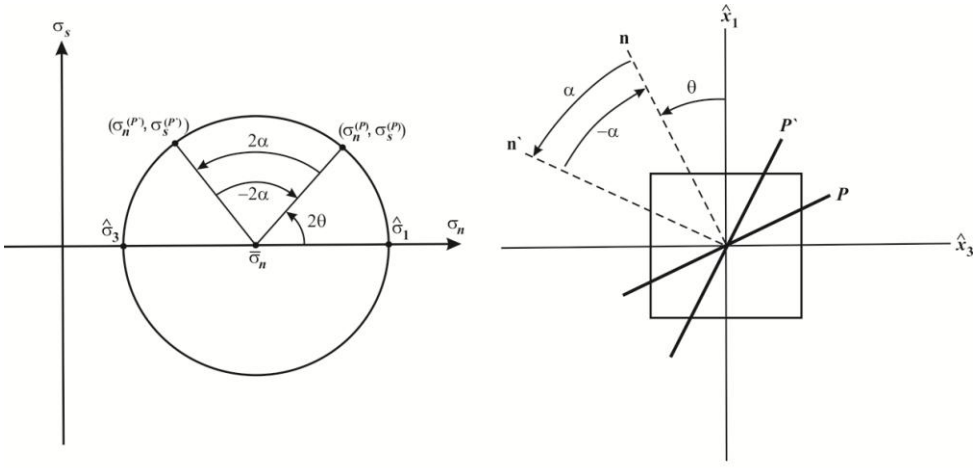


شکل ۱۲-۶رسم دیاگرام مور برای تنش در یک نقطه. (الف) ارتباط مؤلفه‌های تنش با محورهای دستگاه مختصات اصلی و صفحه P با خط عمود بر آن (n) در فضای فیزیکی. (ب) تنش در یک نقطه در دیاگرام مور به وسیله دایره مور نشان می‌شود. اندیس P نشان دهنده آن است که مؤلفه‌های تنش بر روی صفحه P عمل می‌کنند.

مؤلفه‌های تنش نرمال و تنش برشی (σ_s^P, σ_n^P) عمل کننده بر روی صفحه P بر روی دیاگرام مور با جهت‌گیری خط n در فضای فیزیکی دارای ارتباط ساده‌ای هستند. در فضای فیزیکی فرض می‌شود که خط n (یا σ_n^P) زاویه‌ای برابر θ با محور بزرگترین تنش اصلی $\hat{x}_1$ (یا $\hat{\sigma}_1$) می‌سازد (شکل ۱۲-۶الف). در دیاگرام مور مؤلفه‌های تنش سطحی بر روی صفحه P (σ_n^P, σ_s^P) در انتهای شعاعی از دایره مور رسم می‌شوند که با جهت بزرگ‌ترین تنش اصلی $(\hat{\sigma}_1, 0)$ زاویه 2θ می سازد.

اگر دو صفحه اختیاری $\acute{P}, \mathrm{P}$ در فضای فیزیکی دارای خط عمود بر صفحه $\acute{n}, \mathrm{n}$ باشند (شکل ۱۳-۶ الف) و اگر زاویه بین $n, \hat{x}_1$ بصورت پادساعتگرد برابر با θ و زاویه بین $\acute{n}, \mathrm{n}$ بصورت پادساعتگر برابر با a باشد در نتیجه، دونقطه در روی دیاگرام مور بر روی دایره با مشخصات (σ_n^P, σ_s^P) و $(\sigma_n^{\acute{P}}, \sigma_s^{\acute{P}})$ وجود دارد که مؤلفه‌های تنش نرمال و تنش برشی بر روی صفحات $\acute{P}, \mathrm{P}$ را مشخص

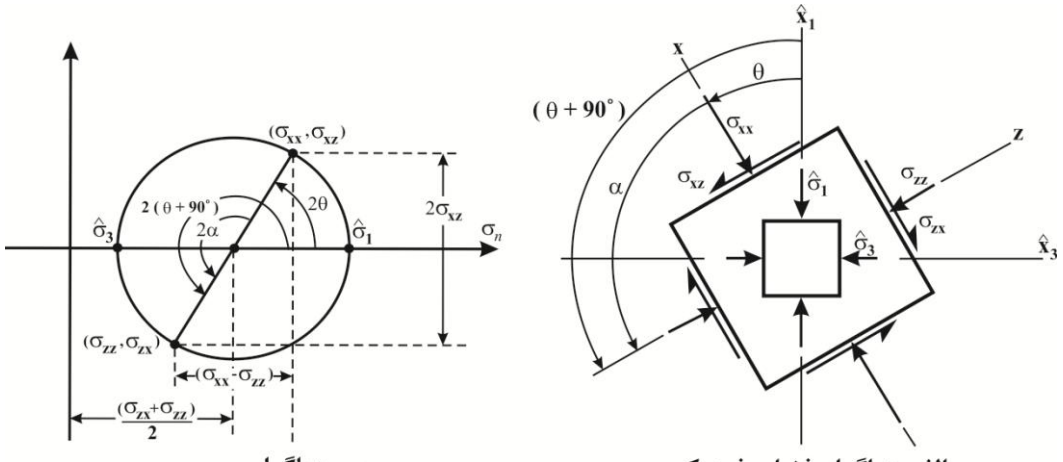
می‌سازند(شکل ۱۳-۶ب). زاویه بین شعاع‌های این دو نطقه برابر با 2α است که بصورت پادساعتگرد از نقطه(σ_n^P, σ_s^P) تا نقطه $(\sigma_n^{\acute{P}}, \sigma_s^{\acute{P}})$ اندازه گیری می‌شود. اگر زاویه در فضای فیزیکی از $\acute{n}$ تا n اندازه‌گیری شود بصورت ساعتگرد بوده و در نتیجه بصورت زاویه منفی برابر $-\alpha$ است که در موارد ساعتگرد (منفی) زاویه $2\alpha-$ بر روی دایره مور از شعاع $(\sigma_n^{\acute{P}}, \sigma_s^{\acute{P}})$ تا شعاع (σ_n^P, σ_s^P) رسم می‌شود.



ب. دیاگرام مور **الف. دیاگرام فضای فیزیکی**

شکل ۱۳-۶- ارتباط هندسی صفحات یا مؤلفه‌های تنش بر روی آنها در فضای فیزیکی (الف) جهت گیری صفحات $\acute{P}, \mathrm{P}$ در فضای فیزیکی به وسیله خطوط $\acute{n}, \mathrm{n}$ تعیین شده است.(ب)هندسه دیاگرام مور مؤلفه‌های تنش عمل کننده بر روی صفحات بخش (الف) را نشان می‌دهد. توجه نمایید که زوایای رسم شده دو برابر زوایای اندازه‌گیری شده بین صفحات در فضای فیزیکی است اما جهت چرخش در اندازه‌گیری زوایا یکسان است.

مؤلفه‌های تنش سطحی که در دو انتهای مخالف هر قطر از دایره مور قرار دارد $(2\alpha = 180^0)$ مؤلفه‌هایی هستند که در فضای فیزیکی بر روی دو صفحه عمود برهم عمل می‌کنند. $(\alpha = 90^\circ)$، شکل‌های ۱۴-۶ الف و ب).بنابراین تنش های اصلی $\hat{\sigma}_2, \hat{\sigma}_1$ که بر روی صفحات عمود بر هم عمل می‌کنند. بر روی دو انتهای یک قطر از دایره مور رسم می‌شوند و دارای مؤلفه‌های تنش $(\sigma_{zz}, \sigma_{zx}), (\sigma_{xx}, \sigma_{xz})$ هستند که تنش‌های سطحی عمل کننده بر روی صفحات مختصات عمود بر هم درهر دستگاه مختصات اختیاری را مشخص می‌سازند. در اصل این حالت نتیجه حقیقتی است که زوایای اندازه‌گیری شده در فضای فیزیکی هنگام رسم بر روی دیاگرام مور دو برابر می‌شوند.

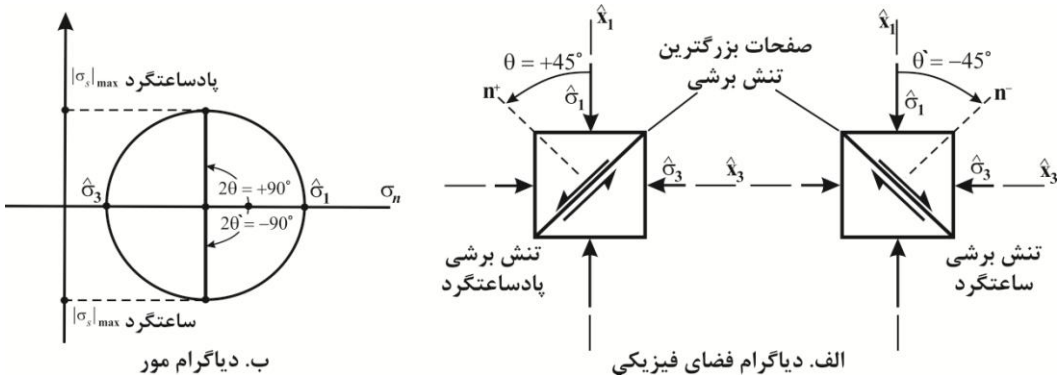


ب. دیاگرام مور **الف. دیاگرام فضای فیزیکی**

شکل ۱۴-۶- انتقال مؤلفه‌های تنش ازدیاگرام فضای فیزیکی به دیاگرام مور. (الف) دیاگرام فضای فیزیکی مؤلفه‌های تنش در دو دستگاه مختصات $(x-z), (\hat{X}_1 - \hat{X}_3)$ را نشان می‌دهد . مجموعه‌های مختلف مؤلفه های تنش نشان دهنده تنش‌های یکسانی هستند و برای سادگی بر روی دو مربع مختصات نمایش داده شده‌اند. (ب)تنش‌های اصلی و مؤلفه‌های تنش دستگاه مختصات عمومی بخش (الف) را بر روی دیاگرام مور نشان می‌دهد. مؤلفه‌های تنش عمل کننده بر روی صفحات عمود برهم در فضای فیزیکی، در دیاگرام مور بر روی دو انتهای یک قطر از دایره مور رسم شده اند . دو ثابت اسکالر تنش شامل مرکز دایره (میانگین تنش‌های نرمال دو انتهای قطر دایره) و قطر آن (تفاضل تنش‌های نرمال دو انتهای قطر دایره) است.

٤)صفحات مزدوج بزرگ‌ترین تنش برشی

بر روی صفحاتی که خط عمود بر آن صفحات در فضای فیزیکی در زاویه $\theta = 45^{\circ}$ نسبت به بزرگ‌ترین تنش اصلی $(\hat{\sigma}_1)$ قرار دارند (شکل ۱۵-۶ الف). بر روی دیاگرام مور در زاویه $2\theta = \pm 90^{\circ}$ از $(\hat{\sigma}_1 , 0)$ قرار می‌گیرند (شکل ۱۵-۶ ب) مقدار مطلق تنش برشی $|\sigma_s|$ دارای بیشترین مقدار است. این صفحات، صفحات مزدوج بزرگ‌ترین تنش برشی هستند که در فضای فیزیکی در زاویه $\pm 45^{\circ}$ نسبت به بزرگ‌ترین تنش فشاری $(\hat{\sigma}_1)$ قرار می‌گیرند. تنش‌های موجود بر روی این صفحات در دو انتهای یک قطر از دایره مور قرار می‌گیرند و در نتیجه، خطوط عمود بر صفحات نیز بصورت بر هم عمود هستند.



شکل ۱۵-۶- صفحات بزرگ‌ترین تنش برشی. (الف) ارتباط صفحات بزرگ‌ترین تنش برشی مطلق با تنش‌های اصلی در فضای فیزیکی را نشان میدهد. این دو صفحه به عنوان صفحات برشی مزدوج نامیده می‌شوند. (ب)دیاگرام مور، رسم بزرگ‌ترین تنش‌های برشی مطلق و ارتباط آنها با تنش‌های اصلی را نشان می‌دهد.

٥)ثابت‌های اسکالر تنش

بزرگی تنش در یک نقطه منحصراً به وسیله دو ثابت اسکالر تنش تعیین می‌شود که یکی از آنها بوسیله موقعیت مرکز دایره مور که به آن میانگین تنش نرمال $(\bar{\sigma}_n)$ می‌گویند، تعیین شده و دیگری به وسیله شعاع دایره مور (r) تعیین می‌شود که اندازه آن برابر با بزرگ‌ترین مقدار مطلق تنش برشی است $(|\sigma_s|_{\max})$، شکل ۱۲-۶ ب). این دو کمیّت بترتیب برابر با نصف مجموع و نصف تفاضل تنش‌های اصلی هستند.

$$\bar{\sigma}_n = \frac{\hat{\sigma}_1 + \hat{\sigma}_2}{2} \quad , \quad r = |\sigma_s|_{\max} = \frac{\hat{\sigma}_1 + \hat{\sigma}_2}{2} \qquad (۶-۲۶)$$

$r, \bar{\sigma}_n$ به عنوان ثابت‌های اسکالر نامیده می‌شوند زیرا کمیّت‌های اسکالری هستند که برای هر مجموعه از مؤلفه‌های $(\sigma_{zz}, \sigma_{zx}), (\sigma_{xx}, \sigma_{xz})$ که تنش های یکسانی را مشخص می‌کنند، دارای مقادیر یکسان هستند. به عبارت دیگر، اگر نقاط انتهایی هر قطر از دایره مور را بدانیم می‌توانیم دایره مور کامل را رسم نماییم زیرا می‌توان $r, \bar{\sigma}_n$ را از روی آنها بدست آورد. برای نقاط انتهایی یک قطر اختیاری از دایره مور $(\sigma_{xx}, \sigma_{xz})$ و $(\sigma_{zz}, \sigma_{zx})$، $r, \bar{\sigma}_n$ از رابطه‌های زیر بدست می‌آید.

$$\bar{\sigma}_n = \frac{\hat{\sigma}_{xx} + \hat{\sigma}_{zz}}{2} \quad , \quad r = 0.5[(\sigma_{xx} + \sigma_{zz})^2 + (2\sigma_{xz})^2]^{1/2} \qquad (۶-۲۷)$$

رابطه r به این صورت حاصل می‌شود که در شکل ۱۴-۶ ب یک مثلث با ضلع‌هایی موازی با محورهای مختصات رسم می‌شود که وتر مثلث به عنوان قطر دایره درنظر گرفته می‌شود. سپس اندازه قطر دایره با استفاده از قانون فیثاغورث بدست می‌آید که دو برابر شعاع دایره است. در دستگاه مختصات اصلی،تنش های نرمال برابر با تنش‌های اصلی و تنش های برشی برابر با صفر هستند. بطوری که رابطه ۲۷-۶ به صورت رابطه ۲۶-۶ نوشته می شود.توانایی ما برای رسم کامل دایره مور به شناخت مؤلفه‌های تنش سطحی در دو انتهای یک قطر از دایره بستگی دارد که نشان دهنده این است که تنش بطور کامل به وسیله مؤلفه‌های تنش سطحی هر دو صفحه عمود بر همه تعیین می‌شود. ثابت‌های اسکالر تنش، شاخص‌های هندسی اساسی بیضی تنش را توصیف می‌کنند.(شکل ۱۰-۶ الف).

میانگین مجموع تنش های نرمال $(\overline{\sigma_n})$ متناسب با میانگین مجموع شعاع‌های بیضی و مربع شعاع دایره مور (r^2) متناسب با مساحت بیضی است.

٦)معادلات دایره مور

فرمول های مؤلفه‌های تنش نرمال و تنش برشی بر روی هر صفحه در فضای فیزیکی که خط n آن در زاویه θ از بزرگ‌ترین تنش اصلی قرار دارد، به آسانی از هندسه دایره مور بدست می‌آید(شکل ۱۲-۶ب).

(۶-۲۸)

$$\sigma_n = \bar{\sigma}_n + r\cos 2\theta =$$

توجه نمایید که رابطه ۲۸-۶ با استفاده از ثابت‌های اسکالر تنش نوشته شده است.دایره مور، روش کامل وآسانی برای حل مسائل تنش ارائه میدهد.

اثبات تنش‌های اصلی در دو بُعد

برای نشان دادن این که تنش‌های اصلی برای هر تنسور تنش وجود دارند نیازمند استفاده از مؤلفه های تنش در سیستم مختصات کلی هستیم. برای این منظور فقط بر روی صفحات موازی با $\hat{x}_2$ تمرکز می‌نماییم بطوری که دیاگرام‌های فضای فیزیکی ما فقط بر روی صفحه $\hat{x}_1 - \hat{x}_2$ قرار دارند. فرض می‌کنیم که جهت‌گیری محورهای مختصات مرجع x_2, x_1 را می‌دانیم که بصورت عمود بر $\hat{x}_2$ هستند. تنش نرمال و تنش برشی بر روی سطوح مربع مختصات عمل می‌کنند (شکل ۱۶-۶- الف). خط n عمود بر صفحه P که مؤلفه‌های تنش نرمال و تنش برشی (σ_n, σ_s) را بر روی آن تعیین می‌نماییم. زاویه α با محور x_1 می‌سازد. تمام مؤلفه‌های تنش و زاویه α بصورت مثبت هستند.

حال قسمت سایه زده شده راجدا کرده و دیاگرام نیروهای عمل کننده بر روی این مثلث را رسم می‌نماییم. با توجه به شکل روابط زیر برقرار است.

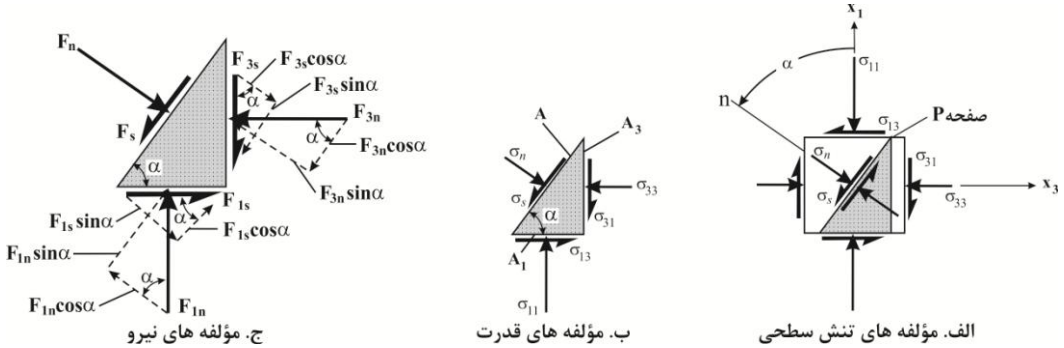
$$F_{1n} = \sigma_{11} A_1 \quad , F_{3n} = \sigma_{33} A_3 \, , \quad F_n = \sigma_n A \qquad (۶-۲۹)$$

F_{1}

و

$$A_1 = A\cos\alpha \quad , \quad A_3 = A\sin\alpha \quad (۶-۳۰)$$

هر یک از بردارهای نیرو را به دو مؤلفه موازی با F_s, F_n تجزیه می‌نماییم و تعادل مورد نیاز به وسیله جمع کردن نیروهای هر یک از دو جهت که مساوی با صفر است، برقرار می‌شود.



الف. مؤلفه های تنش سطحی ب. مؤلفه های قدرت ج. مؤلفه های نیرو

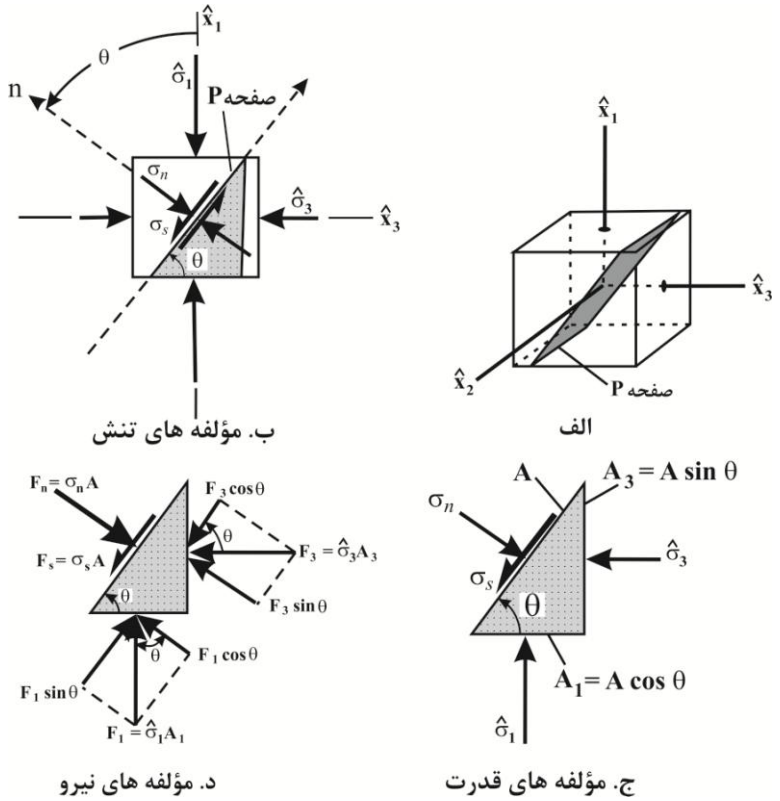
شکل ۱۶-۶-روابط هندسی برای استنباط روابط انتقالی مؤلفه‌های تنش دو بُعدی. (الف)مربع بینهایت کوچک در دستگاه مختصات اختیاری،مؤلفه‌های تنش بر روی صفحات مختصات و صفحه اختیاری p را نشان می‌دهد. کلیه کمیّت‌ها بصورت مثبت هستند.(ب) مؤلفه‌های اثر نیرو عمل کننده بر روی سطوح بیرونی مثلث سایه خورده در (الف) را نشان می‌دهد. اثر نیروها باعلائم مؤلفه‌های تنش علامت‌گذاری شده‌اند زیرا می‌خواهیم رابطه انتقالی را با استفاده از مؤلفه های تنش نشان بدست آوریم. سطوح A_1, A_2, A_3می‌توانند سطوح یک منشور سه ضلعی باشند که بُعد واحد بصورت عمود بر دیاگرام است. (ج)مؤلفه‌های نیروی عمل کننده بر روی مثلث نشان می‌دهد که مؤلفه‌های آن بصورت موازی و عمود بر سطح P عمل می‌کنند.

سپس در رابطه ۲۹-۶ که نیروها را با استفاده از تنش نشان می‌دادیم با آرایش مجدد روابط برای جدا کردن σ_n, σ_s و تقسیم کردن رابط ۳۰-۶ بر A برای حذف A_3, A_1خواهیم داشت:

$$\sigma_n = \sigma_{11} cos^2\alpha - 2\sigma_{13}\cos\alpha\sin\alpha + \sigma_3 sin^2\alpha \quad (۶\text{-}۳۱)$$

$$\sigma_s = (\sigma_{11-}\sigma_{33})\sin\alpha\cos\alpha + \sigma_{13}(cos^2\alpha - sin^2\alpha) \quad (۶\text{-}۳۲)$$

برای بدست آوردن ارتباط بین مؤلفه‌های تنش نرمال و تنش برشی با جهت‌گیری صفحه‌ای که بر روی آن عمل می‌کنند این سؤال را مطرح می‌نماییم: اگر جهت‌گیری محورهای اصلی و مقادیر تنش های اصلی در یک نقطه را بدانیم چگونه می‌توانیم مؤلفه‌های تنش سطحی بر روی صفحه‌ای را بدست بیاوریم که با جهت‌گیری اختیاری از آن نقطه می‌گذرد؟ یک مکعب بینهایت کوچک را درنظر بگیرید که مرکز آن بر روی مبدأ محورهای اصلی قرار گرفته و سطوح آن به موازات اصلی است (شکل ۱۷-۶الف). صفحهP به موازات محور $\hat{x}_2$ بوده اما نسبت به سایر محورها دارای جهت‌گیری اختیاری است. با توجه به این هندسه می‌توانیم از تحلیل دو بُعدی برای تعیین تنش سطحی بر روی صفحه P استفاده نماییم. شکل ۱۷-۶ ب دیاگرام مؤلفه‌های تنش را نشان می‌دهد. قراردادهای استفاده شده در شکل ۱۷-۶ ب نقش مهمی در تعیین ارتباط بین مؤلفه‌های تنسور تنش و مقادیر رسم شده بر روی دیاگرام مور دارند.



شکل ۱۷-۶- هندسه موردنیاز برای تعیین تنش نرمال وتنش برشی بر روی صفحه P دارای جهت‌گیری اختیاری که از یک نقطه می گذرد(الف) صفحه P که از درون مکعب مختصاتی عبور می‌کند به موازات محور $\hat{x}_2$ است اما نسبت به محورهای دیگر دارای جهت‌گیری اختیاری است. (ب) نمای دو بُعدی هندسه (الف) است که توزیع مؤلفه‌های تنش بر روی آن را نشان می‌دهد. کلیه مؤلفه‌های تنش و زوایا بصورت مثبت هستند. (ج) بخش مثلثی سایه خورده(ب) است که تنها مؤلفه‌های اثر نیرو عمل کننده بر روی اضلاع بیرونی مثلث را نشان میدهد. (د) دیاگرام، نیروها و مؤلفه‌های نیروی بدست آمده از مؤلفه‌های اثر نیرو بخش (ج) را نشان می‌دهد.

قرار داد ۱: قرار داد عمومی برای جهت‌گیری هر زوج از محورهای مختصات عمومی نیازمند این است که یک چرخش ساعتگرد از محور مختصات مثبت موازی با بزرگ‌ترین مؤلفه تنش نرمال به سمت محور مختصات مثبت موازی با کوچک‌ترین مؤلفه تنش نرمال صورت گیرد. بدون توجه به این که برای مثال σ_{11} یا σ_{33} بزرگ‌تر است. این قرار داد جهت مشاهده دیاگرام را تثبیت می‌کند و در نتیجه، ابهام ساعتگرد یا پادساعتگرد بودن زوج برشی را می‌زداید. بنابراین محورهای اصلی طوری رسم شده‌اند که چرخش 90° از محور $\hat{X}_1$ مثبت به سمت محور $\hat{x}_3$ مثبت بصورت چرخش ساعتگرد است.

قرار داد۲: جهت گیری صفحه P به وسیله زاویه θ_2 بین محور $\hat{x}_1$ مثبت و خط n تعیین می‌شود. دراینجا n یک بردار دارای طول واحد است که عمود بر صفحهP است. زوایای مثبت بصورت پادساعتگرد اندازه‌گیری شده و دیاگرام مور با استفاده از زوایای مثبت θ_2 رسم می‌شوند. اندیس ۲ زاویهθ_2 بیانگر این است که زاویه با چرخش حول محور $\hat{x}_2$ اندازه گیری شده است.

قرار داد۳: دیاگرام را با استفاده از مؤلفه‌های تنسور تنش مثبت و بر اساس علائم قرار دادی زمین‌شناسی رسم می‌نماییم. مؤلفه‌های تنش نرمال وتنش برشی بر روی صفحه P بصورت مؤلفه‌های تنسور تنش مثبت رسم شده و با توجه به این که بردارهای P,n (بترتیب عمود وموازی با صفحه p هستند) دارای جهت‌های مختصاتی مثبت هستند وقتی $\theta_2 = 0$ باشد به جهت‌گیری محورهای مثبت $\hat{x}_1$ و $\hat{x}_3$ منطبق خواهند شد. (شکل ۱۷-۶ب).

توجه نمایید که باتوجه به این قرارداد، مؤلفه‌های تنش برشی مثبت بدون توجه به مقدار θ_2 بطور اتوماتیک بصورت زوج برشی پادساعتگرد هستند. بنابراین بر روی هر دو صفحه عمود بر هم که θ_2 دارای اختلاف 90° است زوج‌های برشی پادساعتگرد همیشه بصورت مثبت هستند. این نتیجه با علائم قراردادی تنسور تنش متضاد است(شکل‌های ۱۵- ۶د و ۱۵-۶و) که بیان می‌کند که زوج‌های برشی بر روی صفحات عمود بر هم دارای مقدار مساوی ونوع برش معکوس هستند. بنابراین علائم قرار دادی تنش برشی برای دایره مور و تنسور تنش متفاوت است. به همین دلیل زمانی که مؤلفه‌های تنسور تنش را بر روی دایره مور رسم می‌نماییم یا از روی آن تعیین می‌نماییم به تبدیل علائم قرار دادی از یک قرارداد به قرارداد دیگر احتیاج است که این تبدیل، منشاء متداول اشتباهات است.

می‌خواهیم مؤلفه‌های تنش نرمال و تنش برشی (σ_s, σ_n) تنش سطحی عمل کننده بر روی صفحه P را تعیین نماییم. برای این منظور مثلث سایه زده شده شکل ۱۷-۶ ج را که در شکل ۱۷-۶ ب نشان داده شده است جدا می‌نماییم و فقط مؤلفه‌های اثر نیرو هایی را رسم می‌نماییم که بر روی مثلث عمل می‌کنند. به دلیل این که مربع بینهایت کوچک در شکل ۱۷-۶ ب درحال تعادل است مثلث شکل ۱۷-۶ ب نیز باید در حال تعادل باشد و می‌توانیم مؤلفه‌های تنش سطحی بر روی صفحه P را با استفاده از قانون اول نیوتن تعیین نماییم که نیازمند این است که نیروهای عمل کننده بر روی مثلث در تعادل باشند.

مؤلفه‌های اثر نیرو را به وسیله ضرب هر اثر نیرو در سطح مقطعی که بر روی آن عمل می‌کنند. به مؤلفه‌های نیرو تبدیل می‌نماییم(شکل ۱۷-۶ د). اگر چه در این راستا با اثر نیرو ها سر وکار داریم اما با توجه به جهت‌گیری اثر نیروها زمانی که نیروها را جمع یا تفریق می‌بندیم می‌توانیم از مؤلفه‌ها و علائم قراردادی تنش‌های سطحی استفاده نماییم. در این روش، تحلیل‌های ما می‌توانند مقادیر مناسبی برای تنش‌های سطحی عمل کننده بر روی صفحه P ارائه کنند. فضای سطح مقطع صفحهP و اضلاع مثلث عمود بر $\hat{x}_3, \hat{x}_1$ بترتیب برابر با A_3, A_1, A هستند بطوری که نیروهایی عمل کننده بر روی مثلث بصورت زیر خواهند بود.

$$F_n = \sigma_n A \quad , F_s = \sigma_s A \qquad , F_1 = \hat{\sigma}_1 A_1 \ , F_3 = \hat{\sigma}_3 A_3 \qquad (۶-۳۳)$$

نیرویی عمل کننده بر سطح A_1 می‌تواند به زوج مؤلفه‌های موازی با F_s, F_n تجزیه شود که بترتیب نیروی عمود بر صفحه P و نیروی موازی با آن هستند (شکل ۱۷-۶ د). چنین حالتی برای نیروهای عمل کننده بر روی سطح A_3 نیز صادق است. اگر مجموع کلیه نیروهای عمود بر P و مجموع کلیه نیروهای موازی با P برابر با صفر گردد مثلث به حالت تعادل در می‌آید. با توجه به شکل ۱۷-۶ ب. این شرایط بیانگر این است که

$$F_n - F_1 \cos\theta_2 - F_3 \sin\theta_2 = 0 \quad , F_s - F_1 \sin\theta_2 + F_3 \cos\theta_2 = 0 \ , \quad (۶-۳۴)$$

در اینجا نیروهای عمل کننده در جهت F_nیاF_s شکل ۱۷-۶ د با همدیگر جمع شده و نیروهای عمل کننده درخلاف جهت آنها از معادله کم می‌شوند. بازسازی رابطه ۳۴-۶ برای جدا قرار دادن F_n وF_s در سمت چپ معادله و جایگذاری مؤلفه‌های نیرو بااستفاده از رابطه ۳۳-۶ منجر به رابطه زیر خواهد شد.

$$\sigma_n A = \hat{\sigma}_1 A_1 \cos\theta_2 + \hat{\sigma}_3 A_3 \sin\theta_2 \quad , \ \sigma_s A = \hat{\sigma}_1 A_1 \sin\theta_2 - \hat{\sigma}_3 A_3 \cos\theta_2 \quad (۶-۳۵)$$

با استفاده از تقسیم کردن رابطه ۳۵-۶ به روابط زیر می‌توانیم فضای سطح A را از روابط بالا حذف نماییم. (شکل۱۷-۶ ج)

$$A_1 = A \cos\theta_2 \ , A_3 = A \sin\theta_2 \qquad (۶-۳۶)$$

این روابط را در رابطه ۳۵-۶ قرار داده و بر سطح مقطع A تقسیم می‌نماییم و با استفاده از مؤلفه‌های تنش، تعادل نیرو را مستقیماً بوسیله مؤلفه‌های تنش نشان می دهیم بطوری که رابطه زیر حاصل می‌شود.

$$\sigma_n = \hat{\sigma}_1 \cos^2\theta_2 + \hat{\sigma}_3 \sin^2 \quad \theta_2 \quad , \ \sigma_s = (\hat{\sigma}_1 - \hat{\sigma}_2) \sin\theta_2 \cos\theta_2 \quad (۶-۳۶)$$

توجه نمایید که کلیه بخش‌های دارای θ_2 شامل ضرب توابع سینوسی و کسینوسی است. یکی از بخش های مثلثاتی حاصل تجزیه بردارهای نیرو (رابطه ۳۴-۶) و دیگری حاصل تجزیه سطح مقطع‌ها (رابطه ۳۶-۶) است. ضرورت تجزیه این دو کمیّت برای تعیین تنش مشخص می‌کند که تنش بصورت یک کمیّت دو جهتی است که آن را از کمیّت برداری یک جهتی مانند نیرو متمایز می‌سازد.

بنابراین مشخص است که جهت گیری هر صفحه بوسیله θ_2 تعیین می‌شود و اگر فقط تنش های اصلی را بشناسیم می‌توانیم مؤلفه‌های تنش نرمال و تنش برشی بر روی هر صفحه را محاسبه نماییم. در نتیجه، این روابط فرضیه ابتدایی ما که مؤلفه‌های تنسور تنش در یک نقطه برای تعیین مؤلفه‌های تنش نرمال و تنش برشی بر روی هر صفحه با هر جهت‌گیری ممکن که ا زآن نقطه می‌گذرد، ضروری و کافی است را تایید می‌کند. می توانیم روابط را با استفاده از اتحادهای مثلثاتی بصورت تفسیر ساده‌تری بنویسیم.

$$cos^2\theta_2 = 0.5(1 + \cos 2\theta_2) \quad (۶-۳۷)$$

جایگذاری رابطه ۶-۳۶ در رابطه با ۶-۳۷ وبازسازی آن نشان می‌دهد که

$$\sigma_n = \left[\frac{\hat{\sigma}_1+\hat{\sigma}_3}{2}\right] + \left[\frac{\hat{\sigma}_1-\hat{\sigma}_3}{2}\right]\cos 2\theta_2 \quad , \quad \sigma_s = \left[\frac{\hat{\sigma}_1-\hat{\sigma}_3}{2}\right]\sin 2\theta_2 \qquad (۶-۳۸)$$

در اینجا $\frac{\hat{\sigma}_1+\hat{\sigma}_3}{2}$ میانگین تنشهای نرمال است و $\frac{\hat{\sigma}_1-\hat{\sigma}_3}{2}$ بزرگترین تنش برشی ممکن را نشان می دهد بطوری که این حقیقت در رابطه دوم نیز مشاهده می‌شود زیرا $\sin 2\theta$ بیشتر از ۱نیست.

رابطه ۶-۴۵ مشابه رابطه ۶-۲۸ است که از هندسه دایره مور بدست می آید. بنابراین رابطه ۶-۳۸ یک رابطه پارامتریکی برای دایره مور است که σ_n و σ_s به عنوان متغیرها و θ_2 به عنوان پارامتر هستند.

می‌توانیم با حذف θ_2، فرم آشناتری برای معادله دایره بدست آوریم. با بازنویسی رابطه اول ۶-۴۶ رابطه زیر را خواهیم داشت.

$$\sigma_n - \left[\frac{\hat{\sigma}_1+\hat{\sigma}_3}{2}\right] = \left[\frac{\hat{\sigma}_1-\hat{\sigma}_3}{2}\right]\cos 2\theta_2 \qquad (۶-۳۹)$$

هر دو رابطه ۶-۳۷ و ۶-۳۸ را به توان ۲ می‌رسانیم و سپس با هم جمع می‌نماییم. با استفاده از اتحاد مثلثاتی زیر:

$$sin^2\theta_2 + \cos^2\theta_2 = 1 \qquad (۶-۴۰)$$

در نتیجه خواهیم داشت:

$$\left[\sigma_n - \left[\frac{\hat{\sigma}_1+\hat{\sigma}_3}{2}\right]\right]^2 + \sigma_s^2 = \left[\frac{\hat{\sigma}_1-\hat{\sigma}_3}{2}\right]^2 \qquad (۶-۴۱)$$

این رابطه دارای فرم مشابه با رابطه زیر است:

$$(x-a)^2 + y^2 = r^2$$

که معادله دایره‌ای است که مرکز آن بر روی محور x دارای فاصله a و شعاع r می‌باشد.

برای رسم مؤلفه‌های تنسور تنش بر روی دیاگرام روش زیر را طی می‌نماییم. دیاگرام مربع مختصاتی در فضای فیزیکی را رسم می‌نماییم که محورهای مختصات آن نسبت به یکدیگر بر اساس قرار داد ۱ جهت‌گیری کرده و مؤلفه‌های تنش آن بصورت مناسبی بر اساس علائم قراردادی تنسوری جهت گیری کرده‌اند. جدولی رسم نموده و مقادیر مؤلفه‌های تنسور تنش و سپس مقادیر هر مؤلفه معکوس را بر اساس علائم قرار دادی دیاگرام مور لیست می‌نماییم. مؤلفه‌های تنش نرمال دارای علایم مشابه با مؤلفه‌های تنسور تنش هستند. علائم مؤلفه‌های تنش برشی با استفاده از دیاگرام مربع مختصاتی تعیین می‌شوند.اگر زوج برشی بر روی مربع مختصاتی پادساعتگرد باشد مؤلفه تنش برشی بصورت مثبت بوده و اگر زوج برشی ساعتگرد باشد بصورت منفی خواهند بود. در نهایت مقادیر مؤلفه‌های تنش تعیین شده را بر روی دیاگرام مور رسم می‌نماییم.

دیاگرام مور برای تنش سه بُعدی

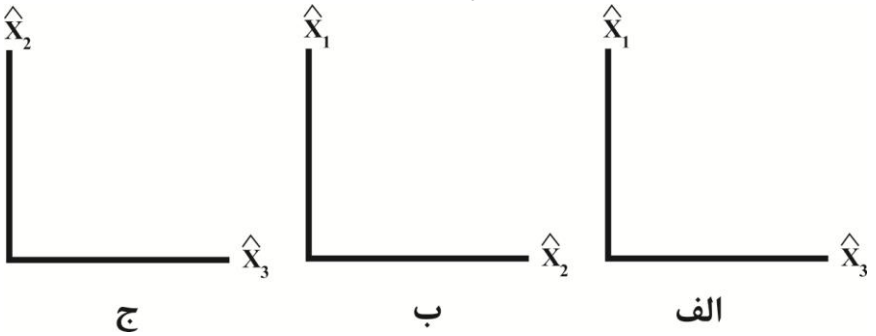
مؤلفه‌های تنش دو بُعدی به موازات صفحه $\hat{x}_1 - \hat{x}_2$ هستند. برای تنش بر روی سایر صفحات مختصات، خواص کاملاً مشابه با آنچه که در بخش قبل بررسی شده است بکار می‌رود. برای صفحات موازی با هر یک از محورهای اصلی $\hat{x}_k$، دیاگرام دو بُعدی صفحه $\hat{x}_i - \hat{x}_j$ استفاده می‌شود جایی که $k \neq i < j \neq k$ است. بنابراین (I,j,k) می‌توانند یکی از مقادیر ۲ و ۳ و ۱(در شکل ۱۸-۶ الف)، ۳ و ۲و ۱(در شکل ۱۸-۶ب) و ۱و ۳ و ۲(در شکل ۱۸-۶ ج)را داشته باشند. فرم کلی این روابط نظیر تغییر روابط۳۹-۶و ۴۱-۶ است.

$$(i,j,k) = (1,3,2),(1,2,3),(2,3,1) \quad (۶-۴۲)$$

$$\sigma_n = \frac{\hat{\sigma}_i+\hat{\sigma}_j}{2} + \frac{\hat{\sigma}_i-\hat{\sigma}_j}{2}\cos 2\,\theta_k \quad , \quad \sigma_s = \frac{\hat{\sigma}_i-\hat{\sigma}_j}{2}\sin 2\theta_k \qquad (۶-۴۳)$$

$$\left[\sigma_n - \frac{\hat{\sigma}_i+\hat{\sigma}_j}{2}\right]^2 + \sigma_s^2 = \left[\frac{\hat{\sigma}_i-\hat{\sigma}_j}{2}\right]^2 \qquad (۶-۴۴)$$

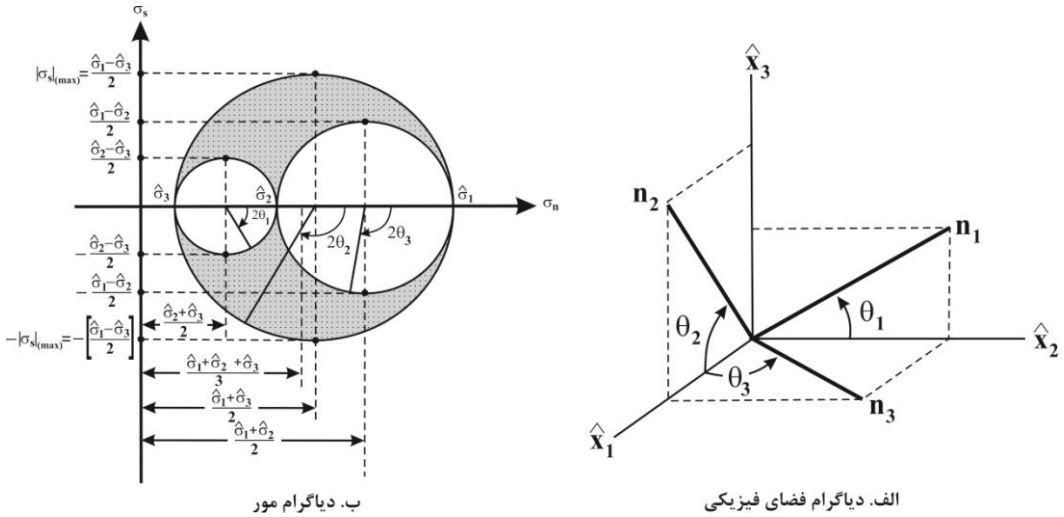
θ_k در این روابط بصورت مثبت بوده و از $\hat{x}_i$ بر روی صفحه $\hat{x}_i - \hat{x}_j$ بصورت پادساعتگرد حول محور $\hat{x}_k$ اندازه‌گیری می شود.



شکل ۱۸-۶- جفت محورهای مختصات اصلی برای سه دایره مور تنش سه بُعدی

۱)دیاگرام مور

تنش سه بُعدی بر روی دیاگرام مور با استفاده از سه دایره مور رسم می‌شود که هر کدام تصور مؤلفه‌های تنش سطحی بر روی مجموعه‌ای از صفحات موازی با یکی از محورهای اصلی هستند (شکل ۱۹-۶) . که هر کدام شامل یک زوج از تنش‌های اصلی هستند. کلیه ویژگی های ارائه شده که برای تنش دو بعدی مطرح شد برای هر یک از این دایره‌ها نیز به کار می‌روند.



ب. دیاگرام مور

الف. دیاگرام فضای فیزیکی

شکل۱۹-۶- هندسه تنش سه بُعدی بر روی دیاگرام مور. (الف) n_3, n_2, n_1 سه خط عمود بر سه صفحه مختلف هستند که بترتیب به موازات محورهای $\hat{x}_3, \hat{x}_2, \hat{x}_1$ هستند. θ_1وθ_2وθ_3 زاویه بین محورهای اصلی وخطوط عمود بر صفحات هستند. (ب) دایره‌های مور، تنش سه بُعدی را نشان می‌دهند. زوایای رسم شده همان زوایای اندازه‌گیری شده در (الف) هستند. مؤلفه‌های تنش های سطحی بر روی صفحاتی که خط عمود بر آنها در (الف) نشان داده شده است. بر روی محیط دایره متناظر آنها رسم شده‌اند.

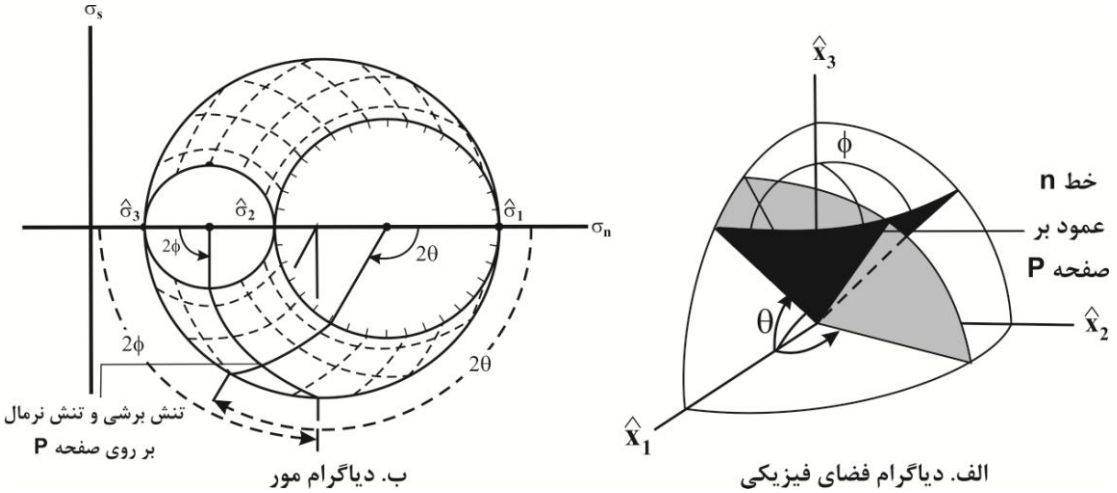
۲)تنش‌های اصلی

سه تنش اصلی بر روی محور σ_n رسم می‌شوند. هر یک از تنش‌های اصلی در نقطه‌ای از محور σ_n رسم می شوند که معمولاً عضو دو دایره مور هستند. اگر کلیه تنش‌های اصلی مساوی باشند هیچ نقطه‌ای دیگر در دورن دایره قرار نمی‌گیرد زیرا خود دایره مور به شکل نقطه در می‌آید. هرکدام از تنش‌های اصلی نسبت به دو تنش اصلی دیگر در نقاط انتهایی طرفین یک قطر از دایره قرار می‌گیرند که بر اساس این حقیقت است که سه تنش اصلی در فضای فیزیکی بر روی صفحاتی عمل می‌کنند که بصورت عمود بر هم هستند.

۳)تنش سطحی و جهت‌گیری صفحات

صفحاتی که به موازات یکی از محورهای اصلی تنش نیستند خط عمود بر آنها به موازات هیچ کدام از محورهای مختصات نخواهد بود (شکل ۲۰-۶). مؤلفه‌های تنش سطحی بر روی اینگونه صفحات باید بر روی دیاگرام موردر شکل ۲۳-۶ ب در داخل بزرگ‌ترین دایره و درخارج از دو دایره کوچک و در فضای سایه زده رسم شوند. چگونگی ترسیم دیاگرام مور برای تعیین مؤلفه های تنش سطحی بر روی اینگونه صفحات برای هندسه فضای فیزیکی در شکل ۲۰-۶ الف در شکل۲۰-۶ ب نشان داده شده است. پیچیدگی این نوع از مسائل

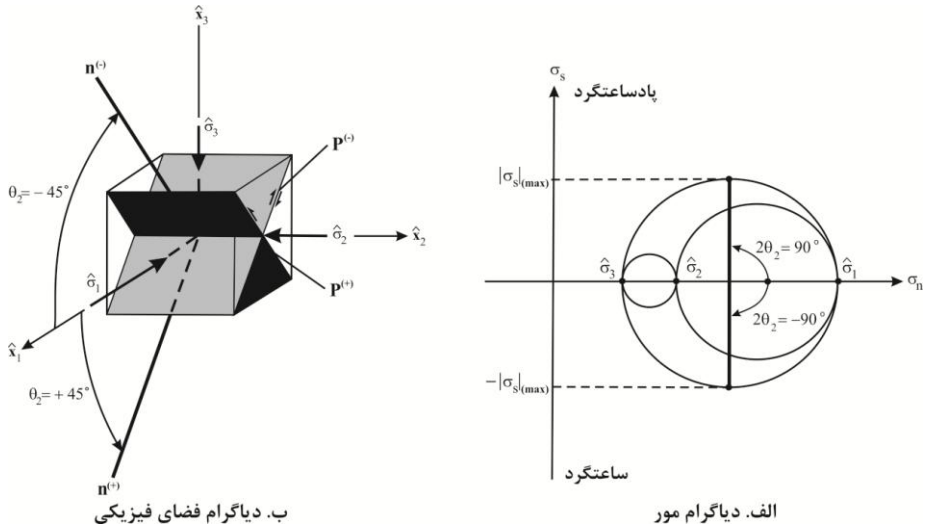
تنش سه بُعدی خارج از موضوع این درس است و بحث ما فقط بر روی مسائلی محدود است که صفحات به موازات یکی از محورهای اصلی هستند.



شکل ۲۰-۶- دیاگرام مور مؤلفه های تنش بر روی صفحه دارای جهت‌گیری اختیاری در سه بُعد (الف) خط n عمود بر صفحه P (نشان داده نشده است) به وسیله زاویه θ از محور $\hat{x}_1$ و زاویه Φ از محور $\hat{x}_3$ مشخص می‌شود. زاویه θ در هر دو صفحه $\hat{x}_1,\hat{x}_3$ و $\hat{x}_1,\hat{x}_2$ بصورت منفی (ساعتگرد) است. (ب) زوایای نشان داده شده در دیاگرام فضای فیزیکی(الف) به دیاگرام مور منتقل می‌شوند تا تنش نرمال برشی عمل کننده بر روی صفحهP تعیین شود. منحنی‌های خط چین، دایره‌های متحدالمرکز با دوایر کوچک هستند.

٤)صفحات مزدوج بزرگ‌ترین تنش برشی

بیشترین مقدار مطلق تنش برشی بر روی هر صفحه در فضای سه بُعدی، بر روی دایره مور $\hat{\sigma}_1 - \hat{\sigma}_2$ در زاویه $\pm 2\theta = 90^\circ$ رسم می‌شود(شکل ۲۱-۶ ب). این تنش‌ها در فضای فیزیکی بر روی مجموعه‌ای از صفحات مزدوج رخ می‌دهند که به موازات $\hat{x}_2$بوده و خطوط عمود بر آنها در روی صفحه $\hat{x}_1 - \hat{x}_3$ با محور $\hat{x}_1$ زاویه $\pm\theta = 45^\circ$ می سازند(شکل ۲۱-۶ ب). بنابراین اگر چه هر دایره مور بصورت مجزا دارای یک مقدار مطلق بیشینه از تنش برشی است(شکل ۲۱-۶الف) اما بیشترین مقدار مطلق تنش برشی برای دایره$\hat{\sigma}_1 - \hat{\sigma}_2$ و دایره $\hat{\sigma}_1 - \hat{\sigma}_3$بیشتر مقدار متعلق به مجموعه خاصی از صفحاتی است که به ترتیب به موازات محور $\hat{x}_3$ و$\hat{x}_1$ هستند. بزرگ‌ترین تنش برشی صحیح برای کلیه جهت‌گیری های ممکن از صفحات تنها بر روی دایره مور $\hat{\sigma}_1 - \hat{\sigma}_3$ رخ می‌دهد(شکل ۲۱-۶ الف).



شکل ۲۱-۶-صفحات بزرگترین تنش برشی در سه بُعد .(الف) مقادیر مطلق بزرگ‌ترین تنش برشی را بر روی دیاگرام مور نشان میدهد. (ب) صفحات مزدوج بزرگ‌ترین تنش برشی و ارتباط آنها با تنش‌های اصلی را بر روی نمودار فضای فیزیکی نشان میدهد.

۵)ثابت‌های اسکالر تنش

سه ثابت اسکالر برای تنسور تنش سه بُعدی وجود دارد که تنش در یک نقطه را مشخص می‌کنند. با استفاده از بیضوی تنش (شکل ۱۱-۶ الف) این سه ثابت متناظر با میانگین سه شعاع بیضوی، مجموع فضای سطح سه صفحه اصلی بیضوی و حجم بیضوی هستند. هر یک از این ثابت‌ها یک اندازه‌گیری مستقل از اندازه بیضوی و در نتیجه، یک اندازه‌گیری از بزرگی تنش را ارائه می‌دهند.

با اضافه شدن پیچیدگی های حالت سه بُعدی تنش، هیچ یک از این ثابت‌ها با استفاده از دایره مور دارای تفسیر هندسی ساده‌ای نیستند که ما برای دو ثابت اسکالر دایره مور دوبُعدی پیدا کردیم. در نتیجه، بیشتر در مورد اولین ثابت بحث می‌نماییم که میانگین تنش های نرمال است وازطریق رابطه زیر محاسبه می‌شود.

$$\bar{\sigma}_{\mathrm{n}} = \frac{\sigma_{11}+\sigma_{22}+\sigma_{33}}{3} = \frac{\hat{\sigma}_1+\hat{\sigma}_2+\hat{\sigma}_3}{3} \qquad (۶\text{-}۴۵)$$

در این رابطه، بخش اول برای مؤلفه‌های سیستم مختصات کلی و بخش دوم برای مؤلفه های سیستم مختصات اصلی است . توجه نمایید که دراین مورد، تنش نرمال میانگین مرکز هیچ یک از سه دایره مور نیست.

واژه شناسی حالت‌های تنش

تعدادی از واژه‌ها اشاره به برخی از حالات خاص تنش دارند. کلیه آنها دارای شاخص‌های خاصی هستند که توصیف آنها بوسیله مؤلفه‌های تنسور تنش و دیاگرام دایره مور ساده است(شکل ۲۲-۶).

فشار هیدروستاتیک:[۱] همه تنش‌های اصلی بصورت فشاری و مساوی هستند $(\hat{\sigma}_1 = \hat{\sigma}_2 = \hat{\sigma}_3 = P)$ تنش برشی بر روی هیچ صفحه‌ای وجود ندارد بطوری که کلیه دستگاه‌های مختصات اورتوگونالی، دستگاه مختصات اصلی هستند.دایره مور این حالت بر روی محور تنش نرمال به یک نقطه تبدیل می‌شود (شکل ۲۲-۶الف).

تنش تک محوری:[۲] دایره مور حالت سه بُعدی در مبدا دیاگرام بر محور عمودی مماس است برای این مورد دو حالت ممکن وجود دارد:

۱-فشار تک محوری[۳]: نها تنش اعمال شده در این حالت بصورت فشارش در یک جهت است $\hat{\sigma}_1 > \hat{\sigma}_2 = \hat{\sigma}_3 = 0$ شکل ۲۲-۶ب). این حالت معمولا برای آزمایش مقاومت نمونه‌های سنگی در آزمایشگاه‌ها استفاده می‌شود.

۲-کشش تک محوری[۴]: تنها تنش اعمال شده در این حالت بصورت کشش در یک جهت است. $\hat{\sigma}_1 = \hat{\sigma}_2 = \hat{\sigma}_3 = p$ ، شکل ۲۲-۶ ج). مهندسان از این حالت غالباً برای آزمایش ویژگی‌های مکانیکی فلزات استفاده می‌کنند.

فشار محوری[۵]یا فشار همه جانبه:[۶] دراین حالت، یک فشار تک محوری با بزرگی $\hat{\sigma}_1 - \hat{\sigma}_2$ بر فشار هیدروستاتیک $\hat{\sigma}_2 = \hat{\sigma}_3$اضافه می‌شود.($\hat{\sigma}_1 > \hat{\sigma}_2 = \hat{\sigma}_3 > 0$، شکل ۲۲-۶ د). این حالت غالباً در آزمایشات آزمایشگاهی بر روی خواص دما بالا و فشار بالای سنگ استفاده می‌شود.

انبساط محوری[۷] یا تنش انبساطی[۸] یا کشیدگی[۹]: در این حالت یک کشش تک محوری با بزرگی $\hat{\sigma}_1 - \hat{\sigma}_3$ بر فشار هیدروستاتیک $\hat{\sigma}_1 = \hat{\sigma}_2$ اضافه می‌شود ($\hat{\sigma}_1 = \hat{\sigma}_2 > \hat{\sigma}_3 > 0$، شکل ۲۲-۶ و). از این حالت گاهی اوقات در آزمایشات دگرشکلی آزمایشگاهی دما بالا –فشار بالا استفاده می‌شود. این موضوع مایع تاسف است. که وقتی از واژه کشیدگی برای کرنش استفاده می‌شود معنی متفاوتی دارد و تفاوت این دو باید همیشه بطور واضح مشخص شوند.

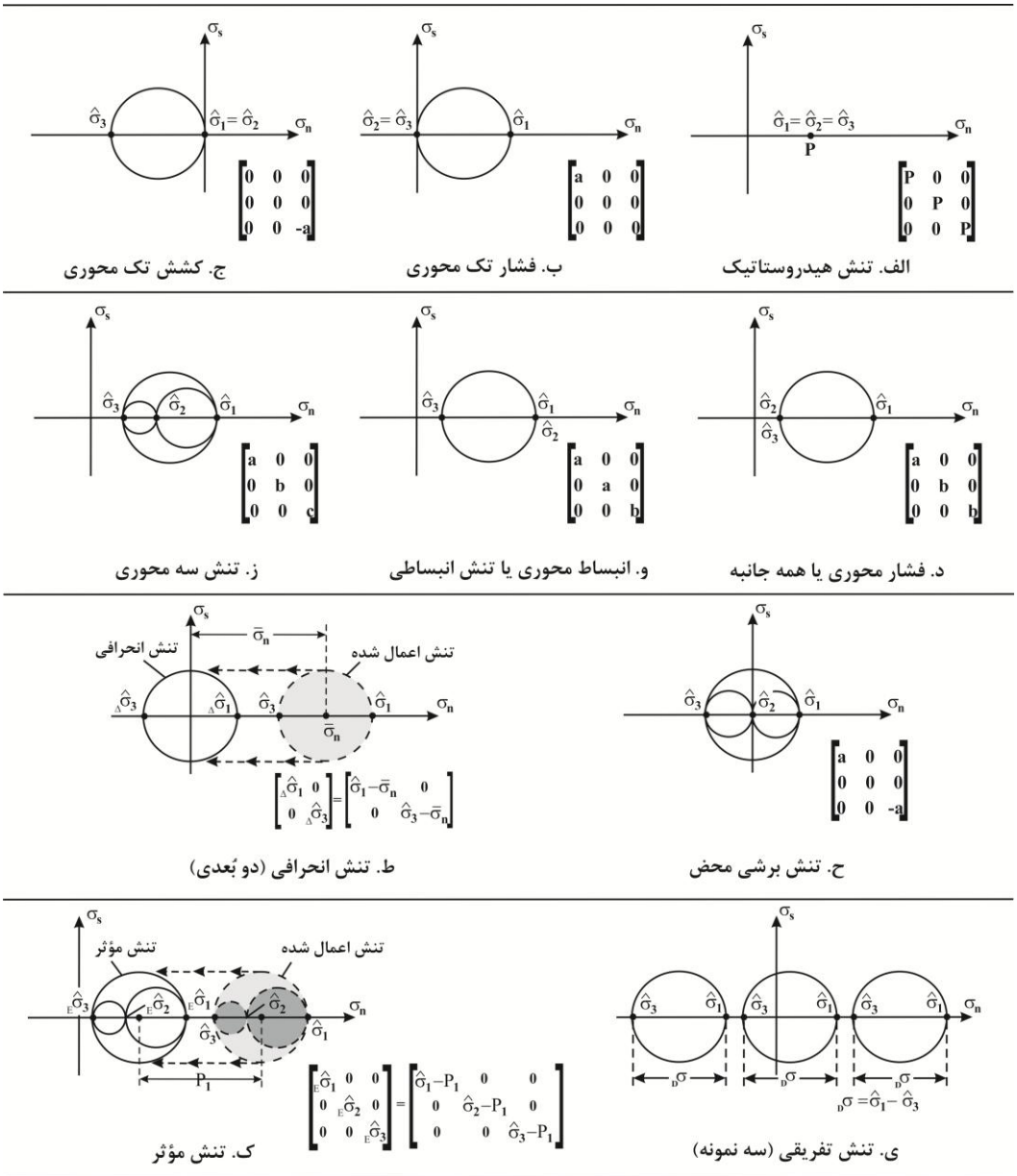
تنش سه محوری[۱۰]: تنشهای اصلی همگی بصورت نامساوی هستند و می‌تواند هر علامتی داشه باشند ($\hat{\sigma}_1 > \hat{\sigma}_2 > \hat{\sigma}_3 >$ شکل ۲۲-۶ ز). تنش بر روی دیاگرام مور بصورت سه دایره مجزا رسم می‌شود.

۱-Hydrostatic pressure
۲-Uniaxial stress
۳-Uniaxial compression
۴-Uniaxial tension
۵-Axial compression
۶-Confined compression
۷-Uniaxial extension
۸-Extensional stress
۹-Extension
۱۰-Triaxial stress

تنش برشی محض[۱] یا برش محض[۲]: بزرگ‌ترین و کوچک ترین تنش برشی برابر با صفر است. دایره مور در وسط دیاگرام قرار می‌گیرد. وقتی که تنش برشی برای کرنش بکار برده می‌شود دارای معنای متفاوتی است و این ابهام می‌تواند باعث اشتباه گردد.

تنش انحرافی[۳]: مؤلفه‌های تنش انحرافی $(\Delta^{\sigma}kI)$ بوسیله تفریق تنش نرمال میانگین $(\bar{\sigma}_n)$ از هر یک از مؤلفه‌های تنش نرمال درحالت دو بُعدی یا سه بُعدی بدست می‌آید. (شکل ۲۵-۶ ط.) در حالت سه بُعدی این تنش بصورت زیر خواهد بود.

$$\Delta^{\sigma}\mathrm{KI} = \begin{bmatrix}\sigma_{11}\sigma_{12}\sigma_{13}\\ \sigma_{21}\sigma_{22}\sigma_{23}\\ \sigma_{31}\sigma_{32}\sigma_{33}\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}\bar{\sigma}_{\mathrm{n}} & 0 & 0\\ 0 & \bar{\sigma}_{\mathrm{n}} & 0\\ 0 & 0 & \bar{\sigma}_{\mathrm{n}}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\sigma_{11}-\bar{\sigma}_{\mathrm{n}} & \sigma_{12} & \sigma_{13}\\ \sigma_{21} & \sigma_{22}- & \sigma_{23}\\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33}-\bar{\sigma}_{\mathrm{n}}\end{bmatrix} \qquad (۶-۵۴)$$



شکل ۲۲-۶: دیاگرام مور برای حالات خاص تنش. مؤلفه‌های تنسور همراه با تنش های اصلی در دستگاه مختصات اصلی نشان داده شده‌اند. در این شکل‌ها c,b,a,p تماماً مقادیر مثبت دارند و فرض شده است که $a>b>c$ می‌باشد.

۲-pure shear stress
۳-pure shear
۴-Deviatoric stress

$$\bar{\sigma}_n = \frac{\sigma_{11}+\sigma_{22}+\sigma_{23}}{3} \qquad (۶-۴۶)$$

در حالت دو بُعدی بر روی صفحه مختصات $x_1 - x_2$ ، مؤلفه‌های تنسور تنش انحرای با استفاده از رابطه زیر بدست می‌آیند.

$$\Delta^{\sigma}kI = \begin{bmatrix} \sigma_{11} - \bar{\sigma}_n & \sigma_{13} \\ \sigma_{31} & \sigma_{31} - \bar{\sigma}_n \end{bmatrix} \qquad (۶-۴۷)$$

در اینجا

$$\bar{\sigma}_n = \frac{\sigma_{11}+\sigma_{33}}{2} \qquad (۶-۴۸)$$

برای تنش انحرافی دو بُعدی، مرکز دایره مور به مبداء دیاگرام منتقل می‌شود بطوری که بصورت تنش برشی محض طاهر می‌شود (شکل۲۲-۶ ط). تنش انحرافی برای توصیف رفتار موادی بکار می رود که رفتار آنها تنها به اندازه دایره مور (که اندازه‌گیری بزرگ‌ترین تنش برشی است) و نه به محل دایره مور بر روی محور تنش نرمال (که اندازه‌گیری فشار میانگین است) وابسته است.

تنش تفریقی[۱]: تفاوت بین بزرگ‌ترین و کوچک‌ترین تنش اصلی است(D^{σ}، شکل ۲۲-۶ ی).

$$D^{\sigma} = \hat{\sigma}_1 - \hat{\sigma}_3 \qquad (۶-۴۹)$$

تنش تفریقی همیشه بصورت کمیّت اسکالر مثبت است که دو برابر شعاع بزرگ ترین دایره مور و در نتیجه، دو برابر بزرگ‌ترین تنش برشی است. مقدارآن برای تنش دو بُعدی برابر با اندازه قطر دایره مور است و درنتیجه، یک کمیّت اسکالر از تنسور تنش است . برای حالت فشار محوری یا کشش محوری (شکل‌های ۲۲-۶د و ۲۲-۶و) برابر با همان تنش تک محوری اعمال شده است که به تنش هیدروستاتیک اضافه می‌شود.

تنش موثر[۲]**:** مؤلفه‌های تنسور تنش مؤثر($E^{\sigma}KI$) در سه بُعد بوسیله تفریق فشار مایع منفذی از مؤلفه های تنش نرمال بدست می‌آیند(۲۲-۶ ک).

$$E^{\sigma}KI = \begin{bmatrix} \sigma_{11}\sigma_{12}\sigma_{13} \\ \sigma_{21}\sigma_{22}\sigma_{23} \\ \sigma_{31}\sigma_{32}\sigma_{33} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} P_f & 0 & 0 \\ 0 & P_f & 0 \\ 0 & 0 & P_f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} - P_f & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} - P_f & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} - P_f \end{bmatrix} \qquad (۶-۵۰)$$

$E^{\sigma}KI$ مؤلفه‌های تنش موثر اعمال شده و P_f فشار مایع منفذی در سنگ است. همانطور که در نمودار نشان داده شده است تنش موثر باعث جابجایی دایره مور به سمت مقادیر کمتر تنش های نرمال به اندازه فشار مایع منفذی می‌شود و مشخص است که رفتار مکانیکی مواد شکنا به تنش اعمال شده بر آنها وابسته نیست بلکه به تنش موثر بستگی دارد.

۱-Differential stress
۲-Effective stress