Year. Month. Day. Subject.

«بنام او که یکتاست»

تذکر:

در بعضی از مطالب این جزوه، ممکن است اشکالات و نواقصی وجود داشته باشد که

لازم به ذکر است این اشکالات و نواقص مربوط به نویسنده‌ی این جزوه (اسماعیل بهشتی) می‌باشد و هیچ ربطی به گوینده‌ی آن مطالب (دکتر حاج موسی) ندارد.

درصورت مشاهده‌ی هرگونه اشکال احتمالی، آن را از طریق ایمیل زیر به ما اطلاع دهید تا برطرف گردد.

E_mail:

ibm_ruby@yahoo.com

Webbg:

Mec20.blogfa.com

Site:

Sames.ir

این جزوه مربوط به نیمسال اوّل سال تحصیلی 89-1388 می‌باشد.

اسماعیل بهشتی

اردیبهشت 89

New Classic

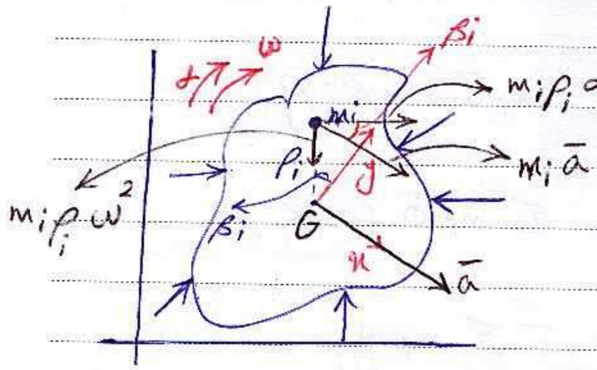
Subject:
Year. ۸۸ Month. ۸ Date. ۳۰

شنبه

Dr Hajmusa

«سینتیک اجسام صلب»

سینتیک اجسام صلب در فضا:



G مرکز جرم جسم صلب است

ذره‌ای نمونه m به فاصله ρ از G در نظر می‌گیریم و داریم:

$$a_i = \bar{a} + \underbrace{\omega \times (\omega \times r)}_{\rho_i \omega^2} + \underbrace{\dot{\omega} \times r}_{\rho_i \alpha}$$

حال اگر بخواهیم برآیند نیروهای وارد بر ذره را نشان دهیم، می‌توانیم در قالب ۳ مولفه نشان دهیم

برای ذره i

$$\sum \vec{F}_i = m_i \rho_i \vec{\alpha} + m_i \vec{\bar{a}} + m_i \rho_i \vec{\omega}^2$$

برای کلیه ذرات

$$\sum F_i = \sum m_i \rho_i \alpha + \sum m_i \bar{a} + \sum m_i \rho_i \omega^2$$

$$\sum F = \alpha \cancel{\sum m_i \rho_i} + \bar{a} \sum m_i + \omega^2 \cancel{\sum m_i \rho_i}$$

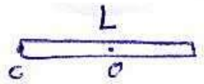
نکته:

$$\sum m_i \rho_i = m \bar{\rho} = 0$$

$\bar{\rho}$: فاصله مرکز جرم تا مبدا مختصات است

$$\Rightarrow \sum F = m \bar{a}$$

ممان اینرسی اجسام مختلف:

1) میله  $\Rightarrow I_o = \frac{1}{12} ML^2 \Rightarrow I_E = \frac{1}{3} ML^2$

Subject:

Year. Month. Date.

2) دیسک $\odot$ $I_o = \frac{1}{4} Mr^2$

جسم صلب، هر نقطه اش، شتاب خودش را دارد اما مبنای کار ما، شتاب مرکز جرم است.

* علامت بار (−)، مختصه را منسوب به مرکز جرم می کند

$\bar{M}_i$:

گشتاور وارده بر ذره i حول مرکز جرم

$$\bar{M}_i = \Sigma \bar{m}_i = m_i \rho_i^2 \alpha + m_i \bar{a} \cos\beta_i \rho_i$$

$$\Sigma \bar{M}_i = \Sigma m_i \rho_i^2 \alpha + \Sigma m_i \bar{a} \cos\beta_i \rho_i$$

$$\Sigma \bar{M} = \alpha \Sigma m_i \rho_i^2 + \bar{a} \Sigma m_i y_i$$

داریم:

$$\Sigma m_i \rho_i^2 = \bar{I} \quad , \quad \Sigma m_i y_i = m\bar{y} = 0$$

$$\Sigma \bar{M} = \bar{I} \alpha$$

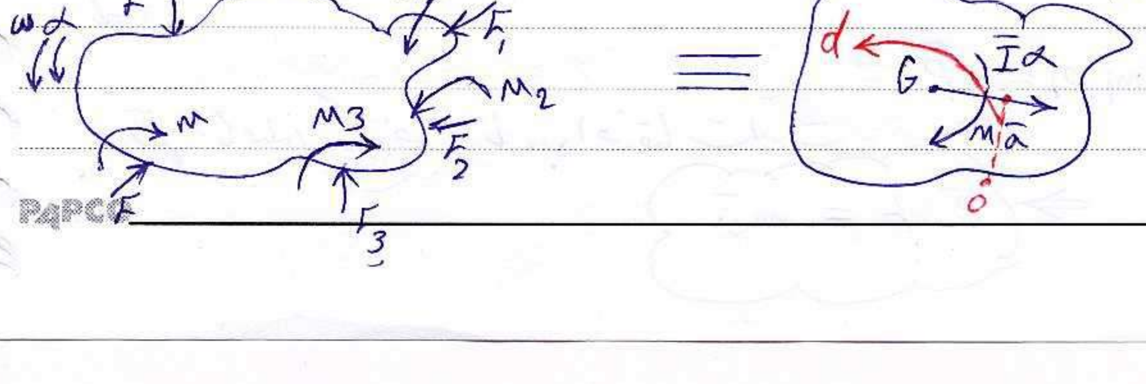
$\bar{I}$: ممان اینرسی (گشتاور لختی) مرکز جرم است؛ $I = \int r^2 dm$

مقاومت جسم در برابر تغییر سرعت زاویه ای را ممان اینرسی گویند

نکته:

گشتاورگیری ما حول مرکز جرم است ولی این برای ما محدودیت ایجاد می کند

اما داریم:



3) شکل هندسی نامشخص $\Rightarrow \bar{I} = m \times \bar{k}^2$ $\bar{k}$: شعاع ژیراسیون

Subject:
Year. Month. Date. ( )

$$\Rightarrow \sum M_o = \pm \bar{I}\alpha \pm m\bar{a}d$$

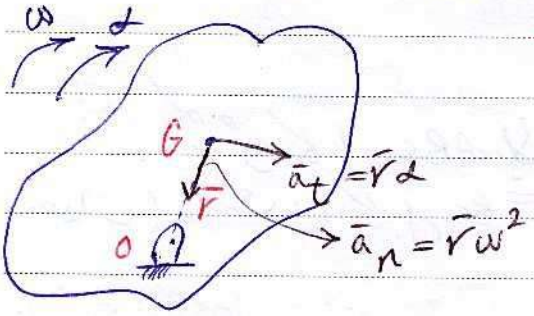
که محدودیت گشتاورگیری حول نقطه‌ی خاص (مرکز جرم) از بین رفت !!

حال داریم:

1) برای جسم صلبی که تنها انتقال دارد:

$$\sum \bar{M} = 0 \quad , \quad \sum M_o = m\bar{a}d$$

2) جسم صلبی که دارای مرکز دائمی دوران است (نقطه‌ی O، شتاب ندارد)

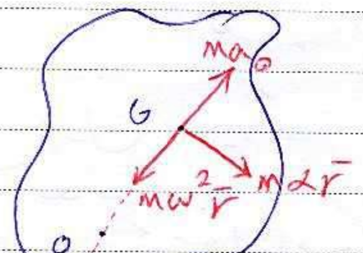


$$\sum F = m\bar{a} \begin{cases} \sum F_t = m\bar{a}_t = m\bar{r}\alpha \\ \sum F_n = m\bar{a}_n = m\bar{r}\omega^2 \end{cases}$$

$$\sum M_o = \bar{I}\alpha + m\bar{r}^2\alpha$$

$$\rightarrow \sum M_o = \alpha(\bar{I} + m\bar{r}^2) = I_o\alpha$$

3) اگر نقطه‌ای روی جسم صلب داشته باشیم که شتابش صفر نباشد آنگاه:
شتابش از مرکز جرم بگیریم داریم:



$$\bar{a} = a_o + \omega \times (\omega \times r) + \dot{\omega} \times r$$

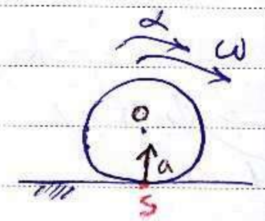
$$\rightarrow \sum M_o = \bar{I}\alpha + m\alpha\bar{r}^2 = \alpha(\bar{I} + m\bar{r}^2) = I_o\alpha$$

[redacted]

Subject:
Year. Month. Date. ( )

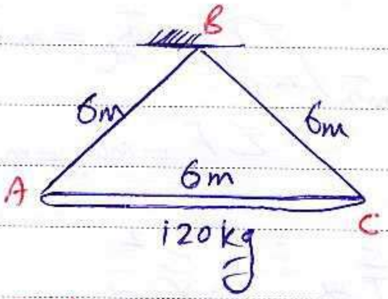
برای حالت سوم می‌توان مثالی آورد:

اگر دیسک بالانسی (مرکز جرم و مرکز هندسی یکی هستند) داشته باشیم
که روی سطح غلتش دارد

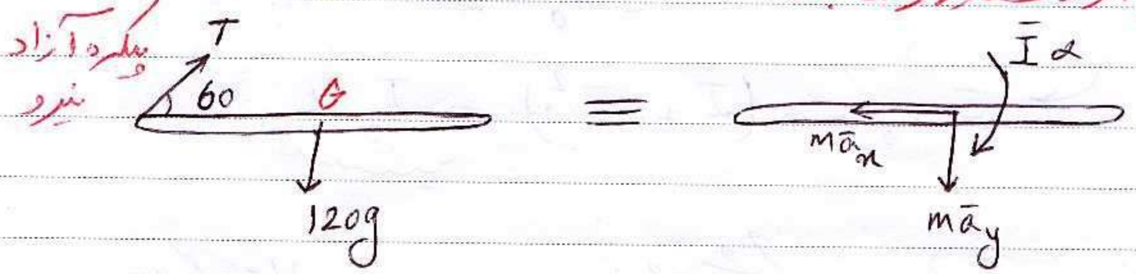


$$\rightarrow \sum M_S = I_S \, \alpha$$

مثال: کشش کابل AB، بلافاصله
بعد از پاره شدن کابل BC



پیکره آزاد گشتاور و شتاب



چون مسیر حرکت مرکز جرم را نمی‌دانیم، این قدر مجهول واسه ما به وجود آمد
که چون مسیر حرکت A را می‌دانیم (دایره‌ای به مرکز A و شعاع 6m)

⇐

با قرار دادن دستگاه روی A و بررسی شتاب مرکز جرم داریم:
دستگاه را به AC جوش می‌دهیم

[redacted]

Subject:
Year. Month. Date. ( )

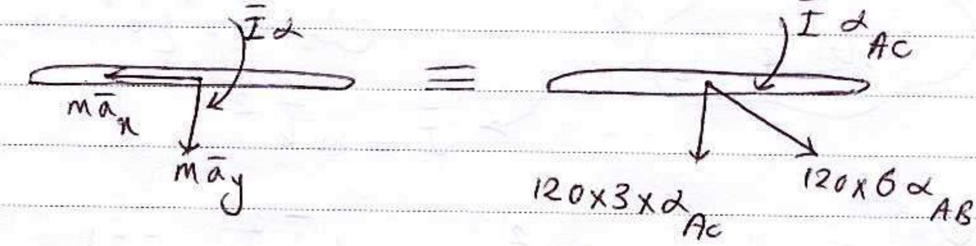
$$\bar{a} = a_A + \omega \times (\omega \times r) + \dot{\omega} \times r$$

$$\rightarrow \quad \bar{a} = a_{A_n} + a_{A_t} + \omega_{AC} \times (\omega_{AC} \times r_{AG}) + \dot{\omega}_{AC} \cdot r_{AG}$$

چون در صورت سوال: بلافاصله قید شده است ⇐ تنها در لینک AB, AC
α ایجاد شده است و فرصت نکرده که ω ایجاد کند!!

$$\rightarrow \quad \bar{a} = a_{A_t} + \dot{\omega}_{AC} \cdot r_{AG}$$

$\Rightarrow$



مسیر حرکت A مشخص است زیرا:

if: کابل تحت کشش باشد ⇐ مسیر حرکت مشخص است

else; کابل تحت فشار باشد ⇐ T منفی است و مسیر حرکت نامشخص است.

لذا: ما فرض را بر تحت کشش بودن طناب و ⇐ مشخص بودن مسیر حرکت می گذاریم

⇐ 3 معادله و 3 مجهول ⇐ مجهولات را می‌یابیم

در میله‌ی یکنواخت، ممان اینرسی حول مرکزش برابر است با $\frac{1}{12} mL^2$

L: طول میله است

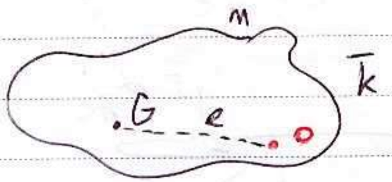
همچنین، ممان اینرسی میله یکنواخت حول نقطه‌ی ابتدایی = $\frac{1}{3} mL^2$

در دیسک یکنواخت، ممان اینرسی حول مرکز برابر است با $\frac{1}{2} mr^2$

r: شعاع دیسک است

همچنین:

k: شعاع ژیراسیون



$$\bar{I} = m\bar{k}^2$$

همچنین

$$I_o = \bar{I} + me^2 = m(\bar{k}^2 + e^2)$$

حال اگر به جای $\bar{k}$، k_o را مساله به ما بدهد ⇐ $I_o = m k_o^2$

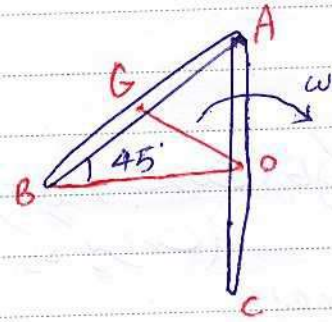
حال به ادامه‌ی مثال می‌پردازیم:

$$\Sigma \bar{M} = \bar{I}\alpha \Rightarrow -T\sin 60 \times 3 = \frac{1}{12} \times 120 \times 6^2 \times \alpha_{AC}$$

$$\Sigma F_y = m\bar{a}_y \Rightarrow T\sin 60 - 120g = -360\alpha_{AC} - 720\alpha_{AB}\sin 30$$

$$\Sigma F_x = m\bar{a}_x \Rightarrow T\cos 60 = 720\alpha_{AB}\cos 30$$

مثال:



$AB = 0.2\,m \;,\; m_{AB} = 3\,kg$

$\omega_{AC} = 10\,rad/s$

شکل در صفحه افقی قرار دارد

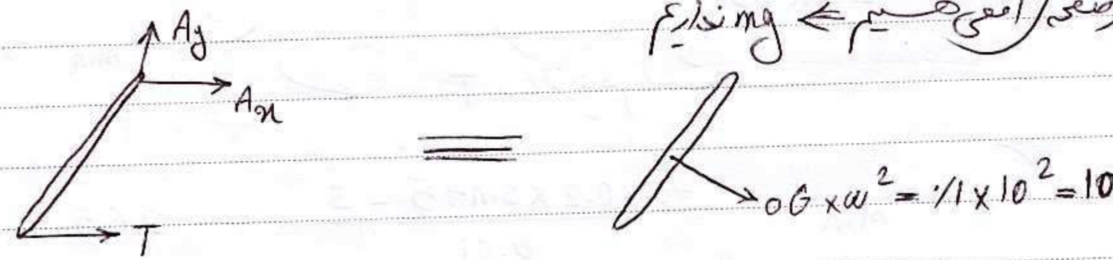
لینک AC با سرعت زاویه‌ای $10\,rad/s$ می‌چرخد

(سرعت زاویه‌ای ثابت)

لینک AB در نقطه A به لینک AC مفصل شده است.

⇐ کشش طناب $OB = ?$

در صفحه افقی هستیم ⇐ mg نداریم

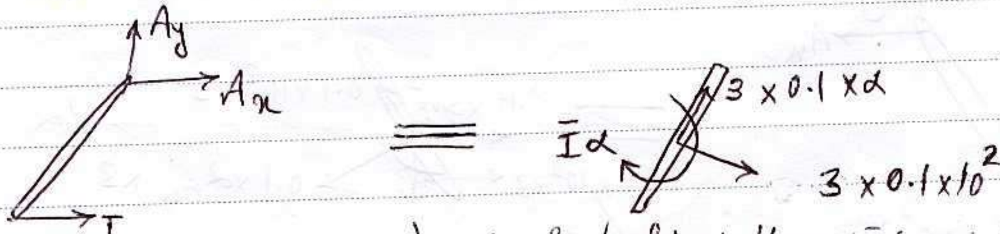


$\Rightarrow \sum M_A = \cancel{\bar{I}\alpha} + m\bar{a}d \Rightarrow T \times 0.2 \sin 45 = 3 \times 10 \times 0.1$

$\Rightarrow T = 21.21\,N$

حال α را طوری تعیین کنید که جسم یکپارچه عمل کند:

$\alpha_{min} < \alpha < \alpha_{max}$



فرض می‌کنیم سرعت در حال افزایش باشد ⇐ α

$\Rightarrow \sum M_A = \bar{I}\alpha + m\bar{a}d \Rightarrow T \times 0.2 \sin 45 = \frac{1}{12} \times 3 \times (0.2)^2 \times \alpha + 30 \times 0.1$

$$\Rightarrow T = \frac{3 - 0.01\alpha}{0.2\sin 45} \Rightarrow$$

اگر α_{max} باشد ← T صفر است

$$\Rightarrow 3 - 0.01\alpha = 0 \Rightarrow \alpha_{max} = 300$$

حال اگر سرعت در حال کاهش باشد ← α ↶ (جهت α و ω معکوس یکدیگر است)

$$\Rightarrow T \times 0.2\sin 45 = \frac{1}{12}\times 3 \times (0.2)^2\alpha + 30\times 0.1$$

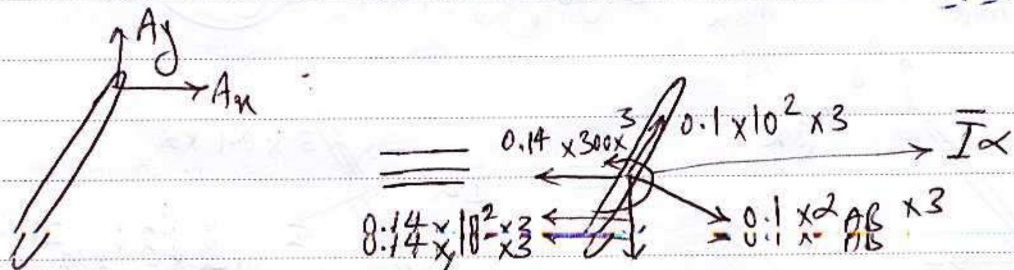
$$\Rightarrow T = \frac{3 + 0.01\alpha}{0.2\sin 45}$$

اگر α_{min} باشد ← T ماکزیمم است.

$$\Rightarrow \alpha_{min} = \frac{40\times 0.2\times \sin 45 - 3}{0.01} = -265.6$$

$$\Rightarrow -۲۶۵/۶ < \alpha < 300$$

حال اگر: $\alpha = -300$ ← شتاب زاویه‌ای لینک AB و همچنین A_x، A_y را بیابید:



برای به دست آوردن a_G، چون سیستم یکپارچه نیست، به راحتی نمی‌توان a_G را نوشت ← دستگاه را روی A گذاشته، و G را بررسی می‌کنیم (به لینک AB حرکت می‌دهیم)

از A به O

$$a_G = a_{A_t} + a_{A_n} + \omega_{AC}\times(\omega_{AC}\times r) + \dot{\omega}_{AB}\times r$$

$\Rightarrow \bar{a} = a_G$ ⟶ در شکل صفحه‌ی قبل این 4 مولفه را نشان دادیم

(α_{AB} پاد ساعتگرد فرض شد)

چون در لحظه‌ی پاره شدن طناب متوقف است ⇐ ω ها ω_{AC} است

$$\Rightarrow \Sigma M_A = \bar{I}\alpha + m\bar{a}d \Rightarrow$$

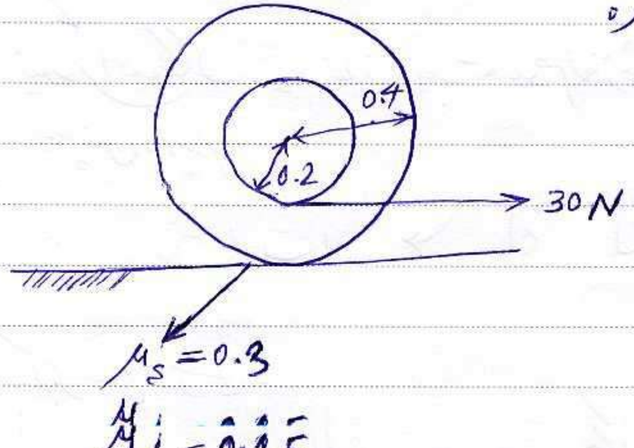
$$0 = \frac{1}{12}\times 3\times(0.2)^2\times\alpha + 0.3\,\alpha_{AB}\times 0.1 + 42\times 0.15\sin 45$$

$$-126\times 0.1\cos 45 \Rightarrow \alpha_{AB} =$$

مثال:

بعد از 1.2m جابه‌جایی قرقره

سرعت مرکز قرقره و ω = ?



$m = 10kg$

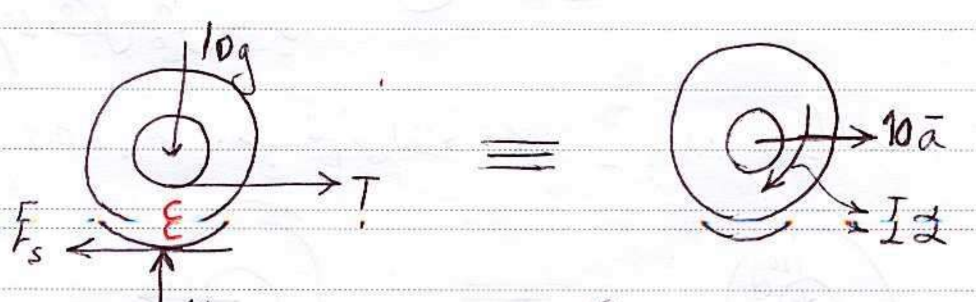
$\bar{k} = 0.3$

جرم طناب ناچیز است.

$\mu_s = 0.3$

$\mu_d = 0.15$

برای حل این مساله داریم:



⇐ 4 مجهول و 3 معادله، امّا:

(چون سطح صاف است ⇐ ρ بی‌نهایت می‌شود ⇐ a_n صفر می‌شود)

با فرض غلتش کامل داریم (البته شکل نیز باید بالانس باشد)

حال $I\alpha$ دیگر مجهول نیست زیرا α به $\bar{a}$ مرتبط می‌شود

$$\rightarrow \alpha = \frac{\bar{a}}{r}$$

$$\rightarrow \sum M_c = I_c \alpha \Rightarrow 30 \times 0.2 = (10 \times 0.3^2 + 10 \times 0.4^2) \times \frac{\bar{a}}{0.4}$$

$$\Rightarrow \bar{a} = 0.96 \qquad I_o = \bar{I} + md^2$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow N = 10g$$

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow 30 - F_s = 10 \times 0.96 \Rightarrow F_s = 30 - 9.6 = 20.4$$

نیروی اصطکاک مورد نیاز جهت عدم لغزش

همچنین داریم:

$$F_{s_{max}} = 0.3 \times 10g = 3g \rightarrow$$ فرض درست است!

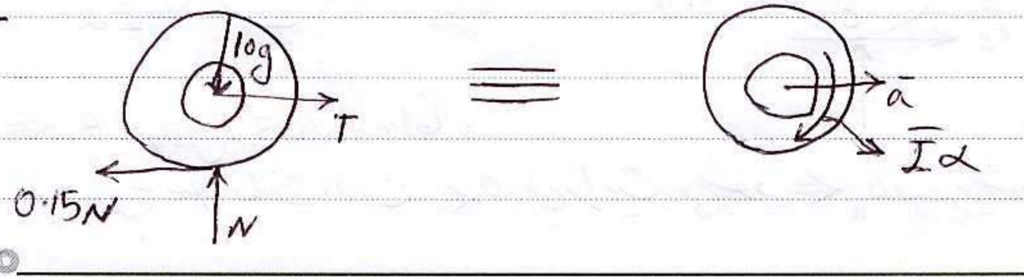
دکتر حاج موسی:

با این μ_s هیچ مشکلی پیش نمی‌آید $\Leftarrow$ μ_s را برابر 0.2

می‌گیریم تا مشکل پیش بیاید:

با $\mu_s = 0.2$ ، جسم می‌لغزد $\Leftarrow$ F_s به N مربوط است!

$\Rightarrow$



$\Rightarrow \sum F_y = 0 \Rightarrow N = 10g$

$\sum \bar{M} = \bar{I}\alpha \Rightarrow -0.15 \times 10g \times 0.4 + 30 \times 0.2 = -10 \times 0.3^2 \times \alpha$

$\Rightarrow \alpha = -0.13 \Rightarrow$ جهت را اشتباه در نظر گرفتیم

$\sum F_x = m\bar{a}_x \Rightarrow 30 - 0.15 \times 10g = 10\bar{a} \Rightarrow \bar{a} = 1.52$

$v^2 = 2\bar{a}x \Rightarrow v = \sqrt{2 \times 1.2 \times 1.52}$

برای بدست آوردن ω ، از فرمول

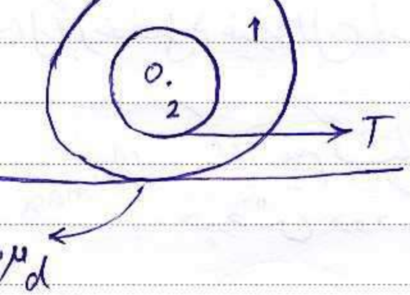
$\omega^2 = 2\alpha\theta$ نمی‌توان استفاده کرد چون تکلیف

θ مشخص نیست (چون لغزش داریم) ⇐ حال باید t را از فرمول $v = at$

بدست می‌آوریم سپس

از فرمول $\omega = \alpha t$ ، ω را می‌یابیم

مثال:



حال اگر در همان مثال قبلی
دو دیسک به هم جوش نداده شده باشد
(روی هم مفصل شده باشند و مفصل نیز
روان باشد)

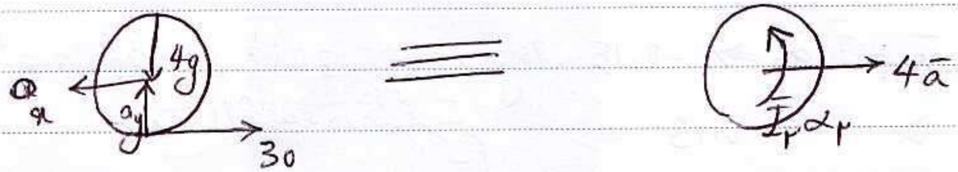
$m_1 = 6\,kg \quad r_1 = 0.4 \quad k_1 = 0.25$

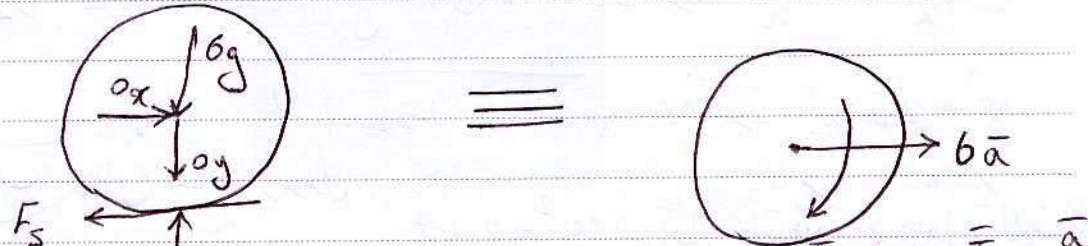
$m_2 = 4\,kg \quad r_2 = 0.2 \quad k_2 = 0.15$

$\mu_s = 0.2 \quad \mu_d = 0.15$

$\Leftarrow$ ω دو دیسک و

پیکره آزاد دو دیسک را رسم می‌کنیم (با فرض غلتش)



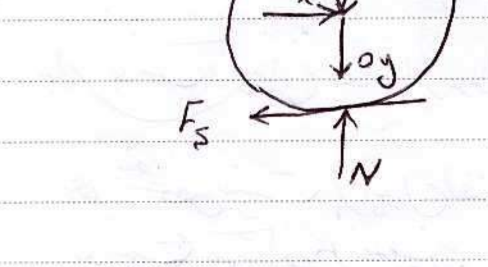


$\bar{I}_1 \alpha_1 = \bar{I}_1 \times \frac{\bar{a}}{0.4}$

⟸ ۶ معادله و ۶ مجهول (o_x , o_y , $\bar{a}$, α_2 , N , F_s)

مانند مثال قبل حل می‌شود!.....

حال اگر مفصل ۲ غیر روان باشد ⟸



$M_{s_{max}}$: ماکزیمم گشتاور جهت عدم چرخش دو دیسک نسبت به هم

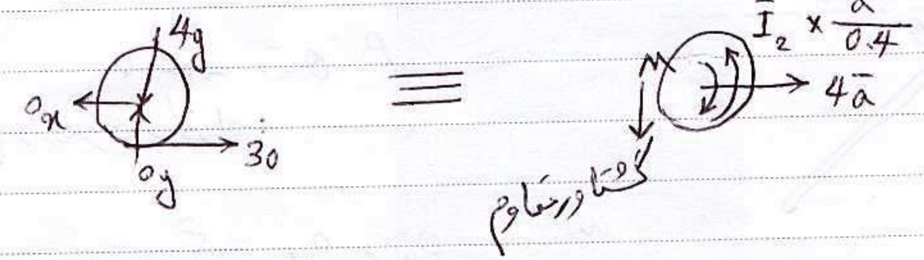
حال اگر در این مثال داشته باشیم:

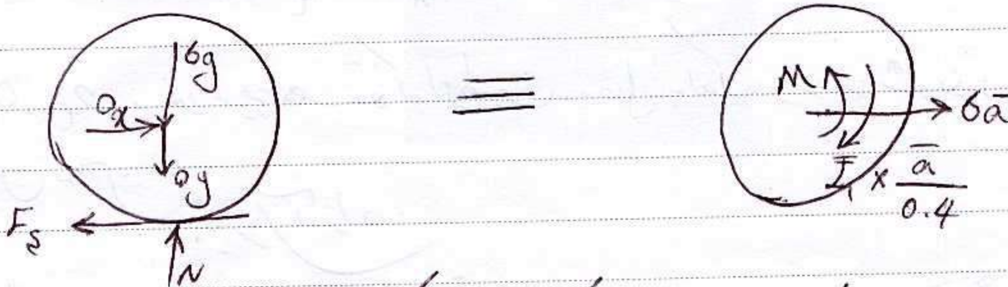
$M_{s_{max}} = 2\ N.m$, $M_{s_d} = 0.18$

حل:

نمی‌دانیم که سیستم یکپارچه عمل می‌کند (دو دیسک نسبت به هم نمی‌چرخند) یا نه!

⇐ با فرض غلتش کامل و یکپارچه عمل کردن سیستم داریم:





⇐ 4 حالت امکان دارد رخ دهد که باید بررسی گردد!!!!

1) غلتش و یکپارچه بودن سیستم　　2) لغزش و یکپارچه بودن سیستم

3) غلتش و یکپارچه نبودن سیستم　　4) لغزش و یکپارچه نبودن سیستم

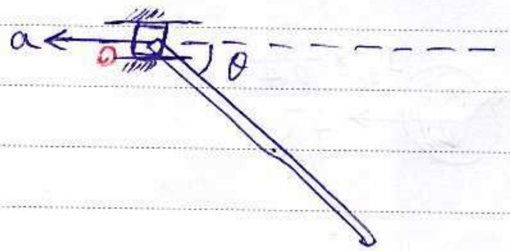
حال اگر در فرض اول (غلتش و یکپارچه بودن سیستم): $F_s > F_{s_{max}}$ ⇐

فرض غلتش بودن اشتباه است و اگر $M > M_{s_{max}}$ (گشتاور مقاوم) ⇐

فرض یکپارچه بودن سیستم را اشتباه است و ..... به همین ترتیب مسائل را حل می‌کنیم

ex) حال اگر T را مسأله به ما نداده باشد ⇐ T را طوری تعیین کنید که سیستم در آستانه عدم یکپارچگی باشد؟

مثال:



$\Rightarrow$ if $\theta = 0 \Rightarrow \omega = 0$

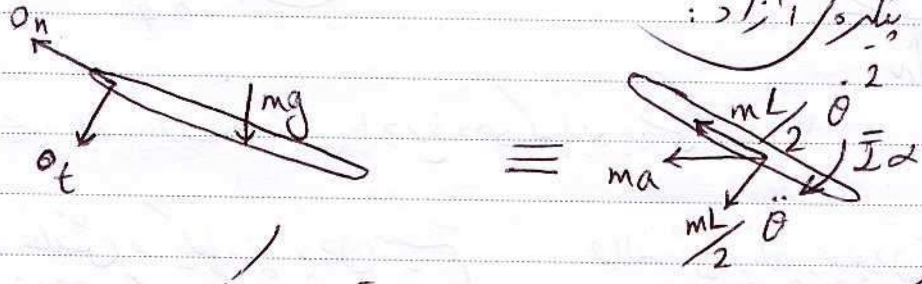
حال در هر θ دلخواه:

$\omega , \alpha , O_n , O_t = ?$

O_n و O_t: نیروهایی هستند که از طرف مفصل به لینک وارد می‌شوند:

اولین قدم:

پیکره‌ی آزاد:



نکته:

وقتی مرکز دائمی دوران داریم، $\bar{a}_t$ ، $\bar{a}_n$ تعریف می‌کنیم نه $\bar{a}_y$ ، $\bar{a}_x$

$$\vec{a}_G = \vec{a}_o + \omega \times (\omega \times r) + \vec{\dot{\omega}} \times r$$

دستگاه را در O قرار داده و به لینک جوش می‌دهیم

O: مرکز دائمی دوران نیست.

$$\curvearrowright \sum M_o = \bar{I}\alpha + m\bar{a}d$$

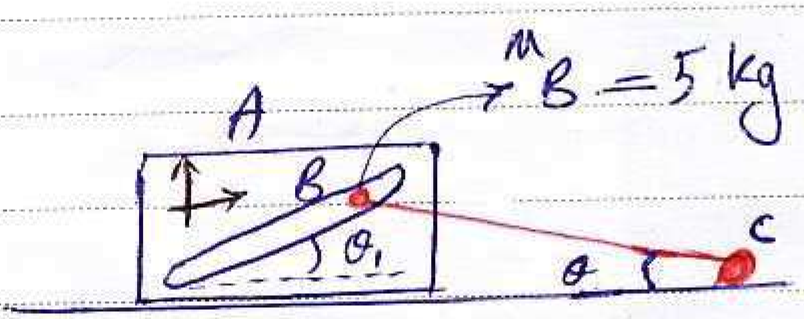
$$\Rightarrow mg\frac{L}{2}\cos\theta = \frac{1}{12}mL^2\ddot{\theta} + \frac{mL^2}{4}\ddot{\theta} + ma\frac{L}{2}\sin\theta$$

$\Leftarrow$ $\ddot{\theta}$ برحسب θ یافت می‌شود $\Leftarrow$ با استفاده از فرمول $\omega d\omega = \alpha d\theta$

$\dot{\theta}$ برحسب θ یافت می‌شود

$\sum F_t = ma_t \Rightarrow O_t =$ پیدا میشه! ، $\sum F_n = ma_n \Rightarrow O_n =$ پیدا میشه

Month .   Date .   (   )



$m_B = 5\,kg$, $\theta_1 = 37$; $m_C = 1\,kg$

$m_A = 5\,kg$

$L_{BC} = 0.5\,m$, $\theta = 60$

جرم میله ناچیز است ،

اصطکاک ناچیز است .

موانعی داریم که سیستم تعادل استاتیکی دارد ← حال با برداشتن موانع حرکت آغاز می شود و θ در حال کم شدن است

در موقعیتی که $\theta = 30^\circ$ ← $V_A , V_C = ?$

اصطکاک ناچیز ←

$E_1 = E_2$

$$\Rightarrow 0 = -5g \times \frac{1}{2}(\sin 60 - \sin 30) + \frac{1}{2} \times 2 \times V_A^2 + \frac{1}{2} \times 5 \times V_B^2 + \frac{1}{2} \times 1 \times V_C^2$$

در راستای x هیچ نیرویی به سیستم وارد نمی شود ← بقای اندازه حرکت خطی

$$\rightarrow \Delta G_x = 0 \Rightarrow G_{1_x} = G_{2_x} \Rightarrow$$

$$0 = 1 \times V_C - 2 \times V_A + 5\,V_{B_x}$$

جهت ها کاملاً فرضی هستند .

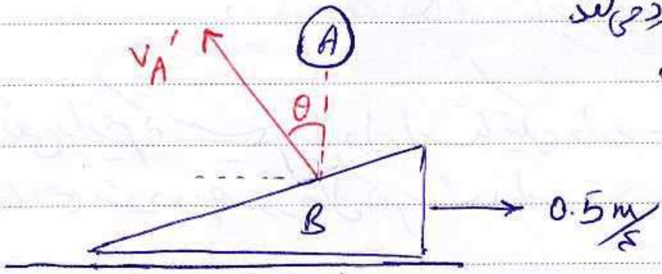
دستگاه را روی A می گذاریم ←

$$\ddot{V}_B = \overset{\checkmark}{V_A} + \overset{\checkmark}{V_{rel}}$$

حال دستگاه را روی c می‌گذاریم.

$$\ddot{v}_B = \dot{v}_C + \dot{\omega} \times r$$

مثال:



پس از اینکه A به B برخورد می‌کند
قبل از برخورد، B ثابت است
بعد از برخورد نیز، B در راستای
y نمی‌تواند حرکت کند

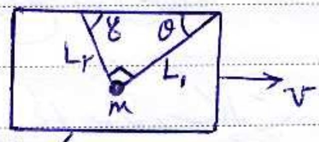
بعد از برخورد B با سرعت 0.5 m/s به سمت راست حرکت می‌کند

سوالات امتحان میان ترم درس دینامیک دانشگاه سمنان (دانشکده مهندسی مکانیک)
سینتیک ذرات

تاریخ آزمون: 12 آذر ۸۸
13-16
استاد: دکتر محمد علی حاج حسنی

تذکر: تمامی سوالات به صورت عددی بودند که توسط من به صورت پارامتری تغییر یافت
به علت در دسترس نبودن سوالات

1) max شتاب ترمز و max شتاب پیشرو را به گونه ای بیابید که شکل هندسی درون قاب تغییر نکند.

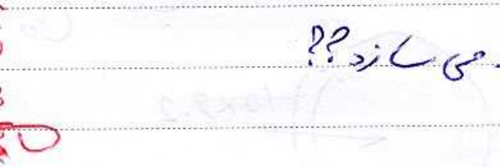


قاب

L_1 و L_2 و θ و γ مشخص هستند

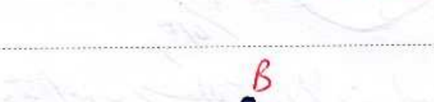
ب) حال اگر قاب با 1.5 برابر max شتاب ترمز، ترمز کند ⇐ شتاب زاویه‌ای یکی از این 2 طناب را بیابید:

2) پس از برخورد گوی با سطح (با سرعت V_0) سطح به اندازه d متر جابجا می‌شود

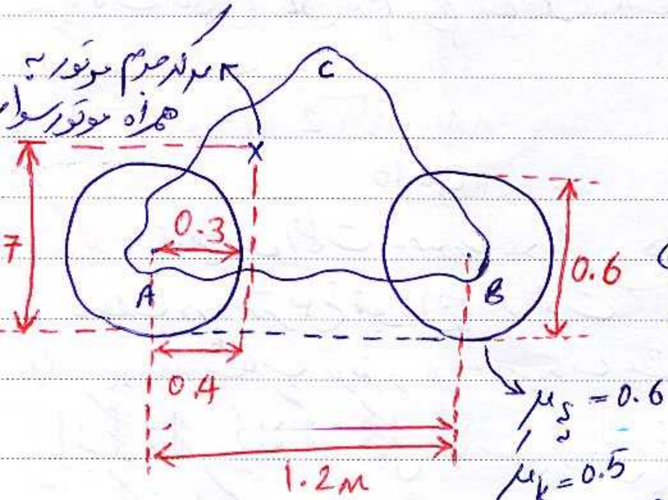


θ و k ضریب هم معلوم هستند مطلوبست:
الف) ⇐ سرعت گوی پس از برخورد با سطح ??
ب) زاویه‌ای که گوی با سطح افق پس از برخورد می‌سازد؟؟
پ) ضریب برخورد سطح؟ ($e=?$)

3) در A، B و C مفصل‌های غیر روان قرار دارد. ابتدا سیستم تعادل دارد.
حال دستگاه رها می‌شود و θ_1 و θ_2 به θ_1' و θ_2' تبدیل می‌شوند ⇐ α و ω لینک‌های AB و BC در وضعیت جدید??



مثال:



موتورسیکلت با سرعت 120 km/h در حال حرکت است. ناگهان مانعی به فاصله 60m از خود می‌بیند (در لحظه‌ای که عکس‌العمل نشان می‌دهد فاصله‌اش از مانع همان 60m است)

ترمزهای موتورسیکلت دیسکی است (موتور هیچ محدودیتی از نظر ترمز ندارد)

همچنین موتورسیکلت ما، ترمز عقب ندارد!! (⇐ گشتاور مقاومی از طرف ترمز در چرخ آزاد وجود ندارد)

جرم بدنه موتورسیکلت به جز چرخ‌ها، به همراه جرم شخص

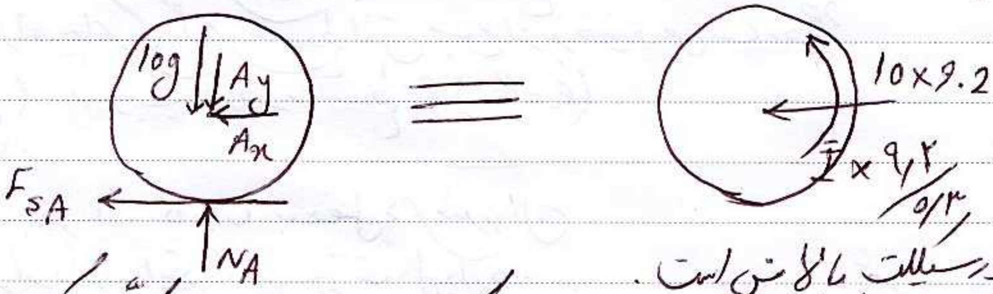
$m_A = m_B = 10 kg$ $m_C = 170 kg$

$\bar{k}_A = \bar{k}_B = 0.25 m$, $k_C = 0.5$

$V = 120 \frac{m}{s} \Rightarrow v^2 - v_0^2 = -2a\Delta x \Rightarrow$ ترمز $a = -9.26 \frac{m}{s^2}$

شتاب ترمز (حداقل شتاب ترمز، جهت برخورد نکردن با مانع)

چرخ عقب:



چرخ عقب موتورسیکلت بالانس است.

با فرض اینکه حرکت کند شدن موتورسیکلت نرمال باشد (نه کله می‌کند و نه سُر می‌خورد) ⇐ حرکت بدنه موتورسیکلت انتقالی است ⇐

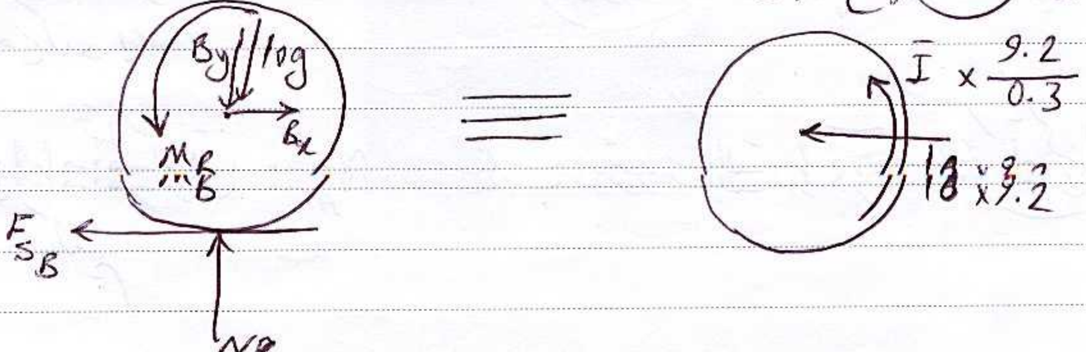
~~سرعت و شتاب تمام نقاط بدنه با هم یکی است ⇐ نقطه A از چرخ نیز همان شتاب~~

همچنین چون چرخ عقب علتش دارد ⇐ a و α به هم مرتبط هستند

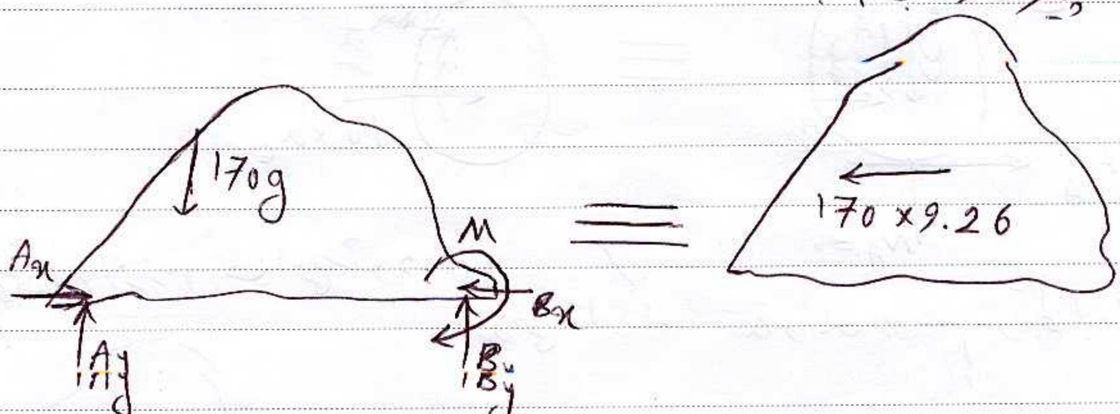
اما: چرخ عقب علتش توام با لغزش داشته باشد ⇐ دو مجهول داریم (a و α)

اما: در چرخ های عقب ترمز وجود داشت ⇐ یک گشتاور متعادل در پیکره آزاد نیز بر روی چرخ قرار داده می شد

پیکره آزاد چرخ جلو:



پیکره آزاد بدنه:



حال: 9 معادله داریم و 9 مجهول:

اما:

چون F_{s_B} نیرویی است که شتاب ترمز را ایجاد می کند ⇐ باید محاسبه ی F_{s_B}

⇐

اگر $F_{s_B} < F_{s_{Max}}$ ⇐ نیروی اصطکاک جهت توقف موتور تامین می شود

else ⇐ " " " " نمی شود

⇐ موتورسیکلت به مانع برخورد می کند

همچنین N_A نیز باید مثبت شود تا موتورسیکلت کله نکند!

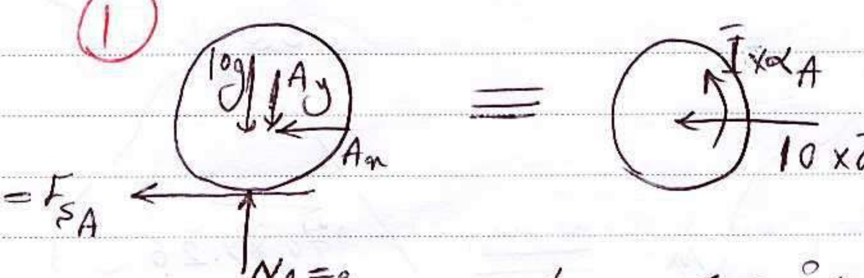
همچنین ترمز نیز باید توانایی ایجاد گشتاور M_B را داشته باشد (در اطلاعات مسئله باید حداکثر گشتاور مقاوم ترمز را به ما بدهند)

سوال:

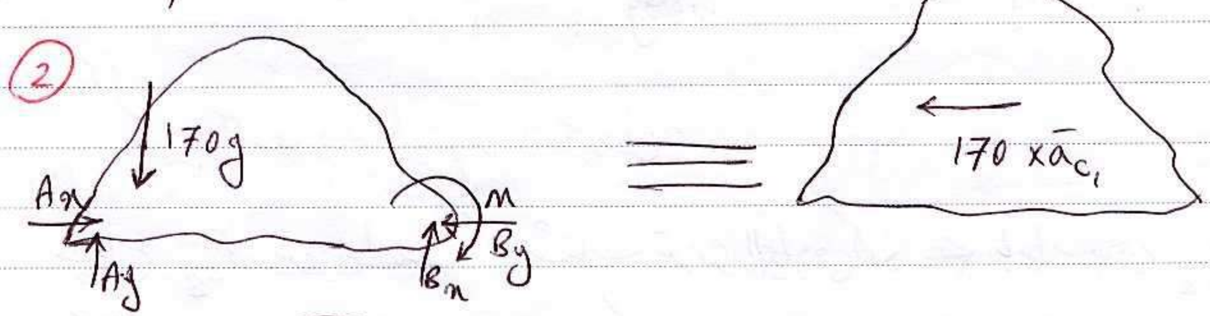
اگر $N_A=0$ شود ⇐ بدنه موتورسیکلت با چه سرعت زاویه‌ای کله می‌کند!؟

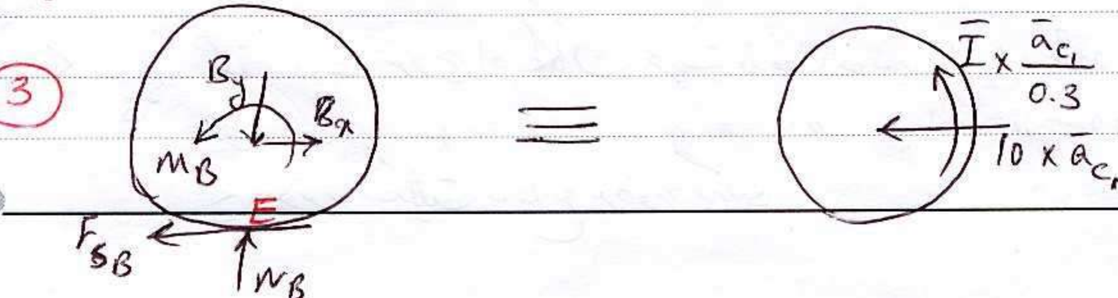
ابتدا با در نظر گرفتن $N_A=0$، شتاب موتورسیکلت را در آستانه کله کی! پیدا می‌کنیم

⇐



وقتی چرخ از زمین جدا می‌شود ⇐ لزومی ندارد که $\bar{a}$ و α به هم مرتبط باشند





!$\bar{a}_{c_1}$; $\bar{a}$ از چه به ازای کله شدن رخ می‌دهد!

① $\sum \bar{M} = \bar{I}\alpha \Rightarrow 0 = \bar{I}\alpha \Rightarrow \alpha_A = 0$

$\sum F_y = 0 \Rightarrow -A_y - 10g = 0 \Rightarrow A_y = -10g$

$\sum \bar{F}_x = m a_x \Rightarrow \dot{A}_x = 10\,\bar{a}_{c_1} \Rightarrow \bar{a}_{c_1} = \frac{\ddot{A}_x}{10}$

② $\sum F_y = 0 \Rightarrow A_y + B_y = 170g \xRightarrow{A_y = -10g} B_y = 180g$

$\sum F_x = m\bar{a}_{c_1} \Rightarrow A_x - B_x = -170\,\bar{a}_{c_1} \Rightarrow B_x = 180\,\bar{a}_{c_1}$

$\sum \bar{M}_B = m\bar{a}d \Rightarrow M_B - 10g \times 1.2 - 170g \times 0.8 = -170\bar{a}_{c_1} \times 0.4$

فاصله مرکز چرخ تا مرکز جرم

$\Rightarrow M_B = 148g - 68\,\bar{a}_{c_1}$

③ $\sum F_y = m\bar{a}_y \Rightarrow N_B - 10g - B_y = 0 \Rightarrow N_B = 10g + 180g = 190g$

$\sum M_E = I_E \alpha \Rightarrow -148g + 68\bar{a}_{c_1} + 180\,a_{c_1} \times 0.3 = 10\left((0.25)^2 + (0.3)^2\right) \times \frac{a_{c_1}}{0.3}$

$\Rightarrow a_{c_1} = -12.42\,\mathrm{m/s^2} \rightarrow$ شتابی که باعث کله شدن می‌شود است!

چون $۱۲٫۴ > ۹٫۲۶$ ⇐ کله نمی‌کند

همچنین:

$\sum F_x = m\bar{a}_x \Rightarrow -F_{s_B} + ۱۸۰\,\bar{a}_{c_1} = -10 \times ۱۲٫۴۲$

$\Rightarrow F_{s_B} = ۲۳۵۹٫۱۸\,N$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

$F_{s_{max}} = 0.6 \times 190\, g = ۱۱۱۸/۴$

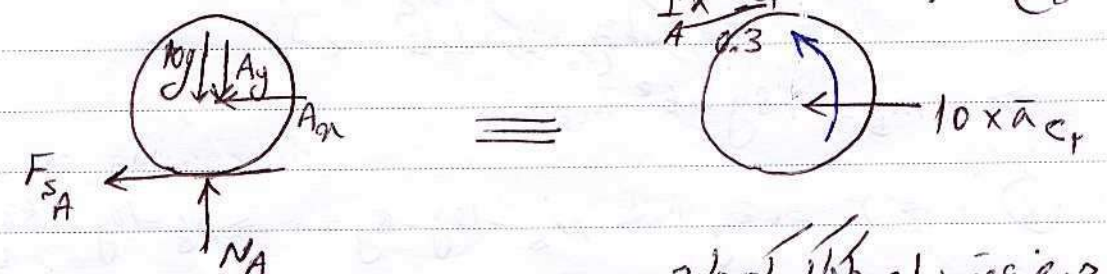
کاملاً محال است که موتور در آستانه کله کردن قرار بگیرد
چون F_{s_B} که نیاز داریم تامین نمی‌شود.

$\Rightarrow 2359.8 = \mu_s \times 190g \Rightarrow \mu_{s_{Min}} = ۱/۲۶$

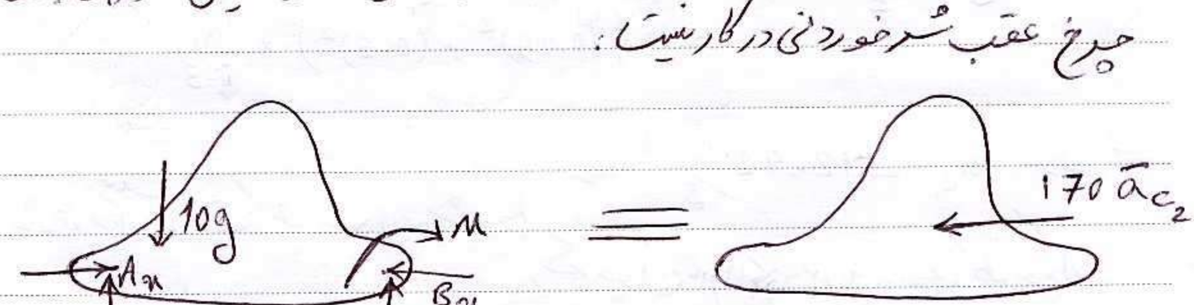
پس:
برای اینکه در آستانه کله کردن باشیم $\mu_s > ۱/۲۶$

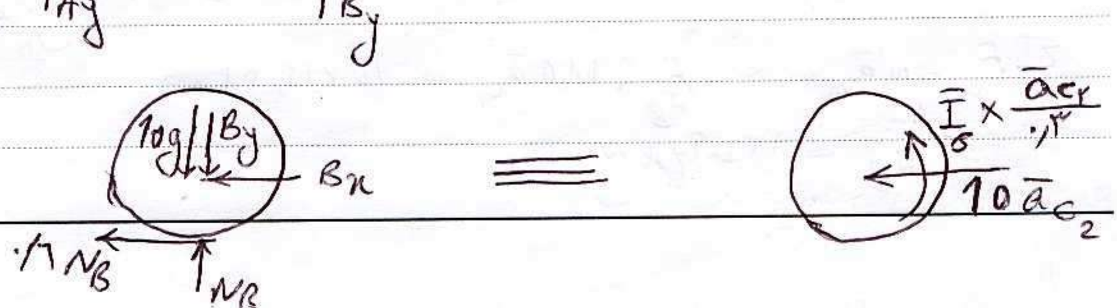
داریم:
Tex در شتابی کمتر از ۱۲/۳۲ موتور شروع به سر خوردن می‌کند. این
شتاب چقدر است؟

چرخ عقب:



چرخ عقب اصطکاک کمی دارد پس:
به راحتی می‌توان آنرا تامین کرد پس برای
چرخ عقب سرخوردنی در کار نیست:





حال اگر $\bar{a}_{c_2} > ۹٫۲۶$ بود ⇐ آن گاه موتور به مانع برخورد نمی‌کند

else:

به مانع برخورد می‌کند

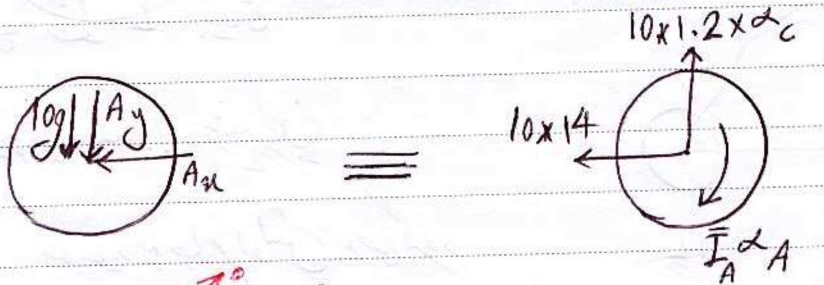
ex) ⇐ در این شرایط سرعت آن در برخورد با مانع = ?

ex) شتاب ترمزی مرکز جرم چرخ جلو

حال اگر $\mu_s = ۱٫۸$ ، $\bar{a} = 14\ \frac{m}{s^2}$ ⇐ بدنه موتور سیکلت با چ...

شتاب زاویه‌ای شروع به کار کردن می‌کند:

چرخ عقب:

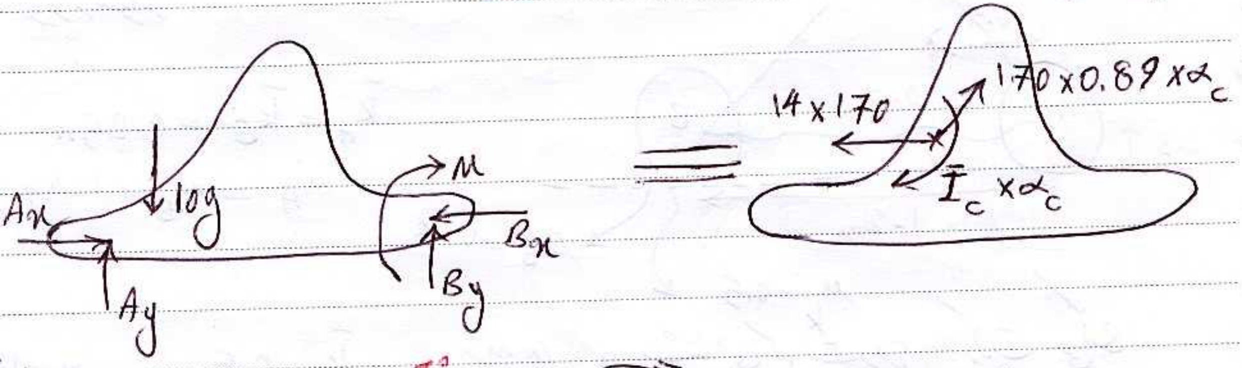


به لاین چ...

$$a_A = a_B + \cancel{\omega \times (\omega \times r)} + \dot{\omega} \times r_{AB}$$

چون شتاب زاویه‌ای را در لحظه شروع به کار کردن می‌خواهد ⇐ ω ز...

بدنه موتور:

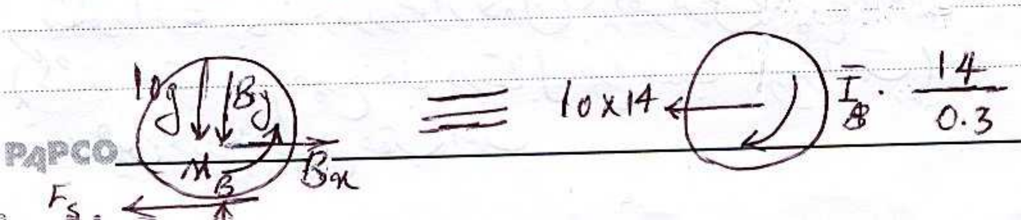


به لاین

$$a_G = a_B + \omega \times \cancel{(\omega \times r)} + \dot{\omega} \times r_{BC}$$

عمود بر BC

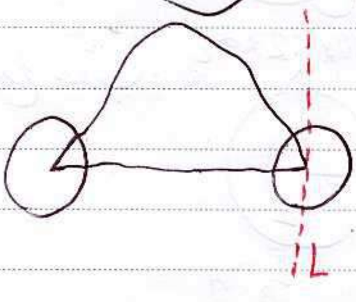
چرخ جلو:



⇐ ۹ معادله و ۹ مجهول ⇐ α_c را می‌یابیم

سوال:
حال با این شتاب وقتی کله می‌کند، آیا موتورسیکلت به حالت اولیه برمی‌گردد یا به جلو برمی‌گردد...... ؟

به وسیله‌ی α ای که به دست آوردیم، باید θ ماکزیمم را به دست بیاوریم سپس اگر به ازای آن max زاویه‌ی کله‌گی! مرکز جرم بدنه‌ی موتورسیکلت سمت چپ خط L بیفتد

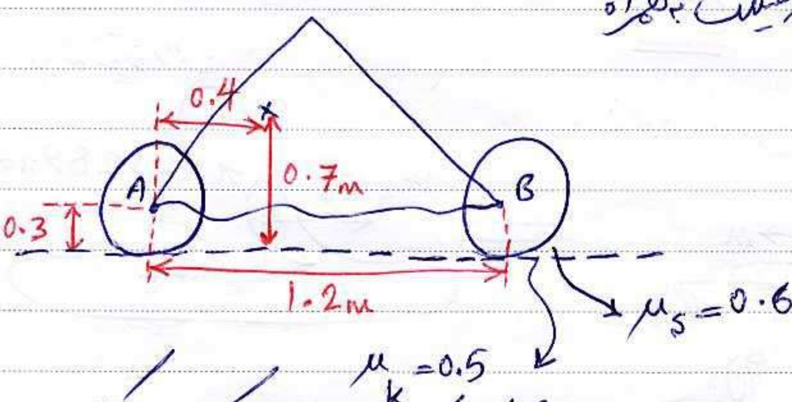


که موتور می‌افتد!! در غیر این صورت: موتور به جای اولش برمی‌گردد

حل شده در کلاس بعد از ظهر!

مثال:

x : مرکز جرم موتورسیکلت به همراه موتورسوار



$\bar{k}_A = \bar{k}_B = 0.25m$

$m_A = m_B = 10kg$

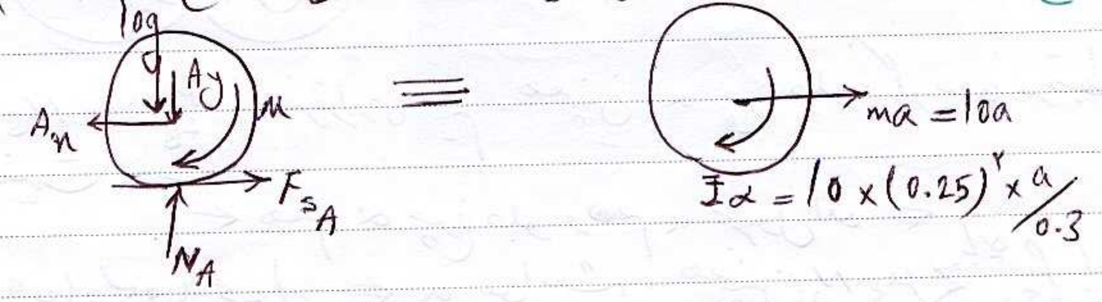
$m_c = 170$ ، $\bar{k}_c = 0.5m$ ، $a = 10\,m/s^2$ شتابی که شروع به حرکت می‌کند

منظور از c بدنه و موتورسوار بدون در نظر گرفتن چرخ‌ها است.
(گشتاور تماس جرم چرخ جلو در مقابل چرخ عقب ناچیز است)
موتور: دیفرانسیل عقب است

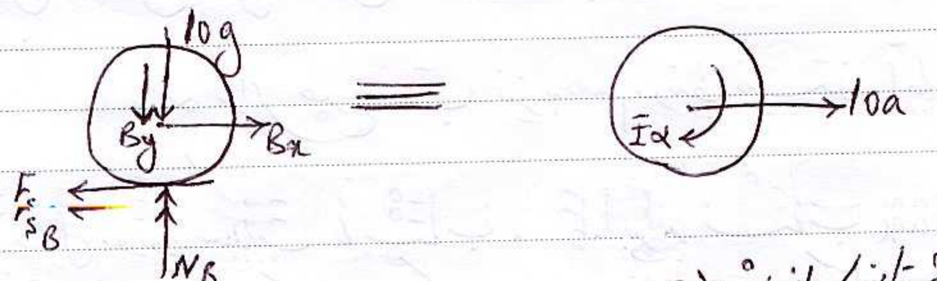
ex) فرض بدون اینکه حرکتی به بدن خود بدهد موفق به بلند کردن جلو موتورسیکلت می‌شود یا نه؟

پیکره آزاد تک تک اجزا را می‌کشیم:

چرخ عقب: (با فرض غلتش کامل و اینکه موتورسوار موفق به تک چرخ زنی شده است)

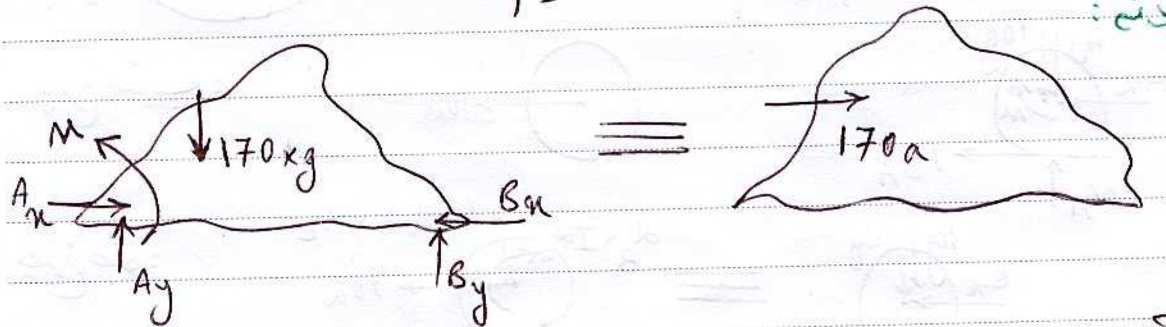


چرخ جلو:



(نکته: آستانه بلند شدن $N_B = 0$، همچنین F_{s_B} نداریم)

بدنه:



⇐ ۹ معادله و ۹ مجهول ⇐ F_{s_A} و N_A پیدا میشه ⇐ باید $F_{s_A} < \mu_s N_A$ تا فرض غلتش کامل درست باشد.

همچنین:

if: N_B منفی بشود، موتورسوار موفق به تکچرخ زنی شده

else: موتورسوار موفق به زدن تک چرخ نشده است!

ex) حداکثر شتابی که موتورسیکلت می تواند در آستانه حرکت داشته باشد برای اینکه جلوی آن بلند نشود را بیابید:

N_B و f_{s_B} را صفر قرار می دهیم، همچنین α چرخ جلو دیگر به a مرتبط نیست ⇐

هم α چرخ جلو و هم a مجهول اند ⇐

۹ معادله و ۹ مجهول ⇐ a پیدا میشه، همچنین باید $f_{s_A} < \mu_s N_A$ باشد

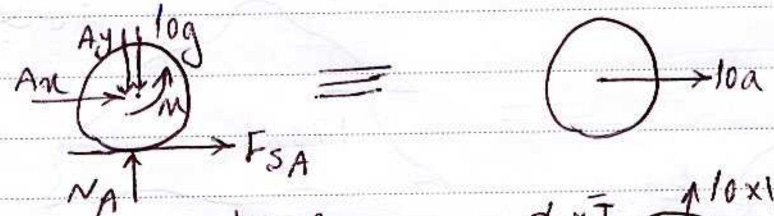
تا فرض غلتش کامل داشتن، درست باشد

else:

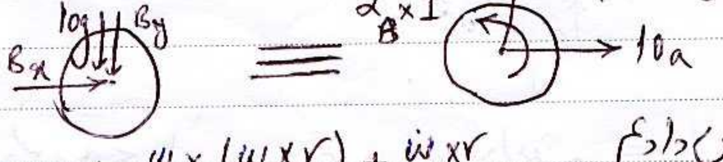
a و α برای چرخ عقب نیز به هم مرتبط نیستند اما $f_{s_B} = \mu_s N_B$

ex) حال موتورسیکلت با شتاب ۱/۵ برابر شتاب Max که در مثال قبل یافتیم شروع به حرکت می کند ⇐ بدنه موتورسیکلت با چه شتاب زاویه ای شروع به حرکت می کند?? α_c را می یابیم:

چرخ عقب:



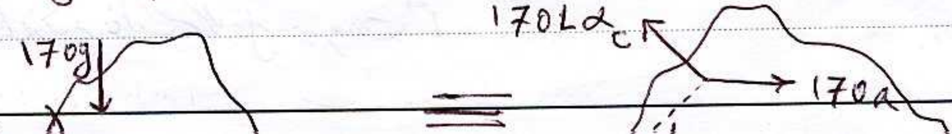
چرخ جلو:



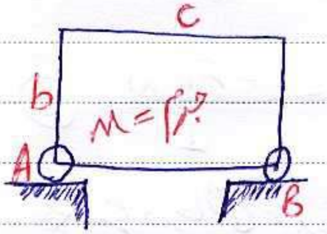
$a_B = a_A + \omega \times (\omega \times r) + \dot{\omega} \times r$

دستگاه را به بدنه جوش دادیم

بدنه:

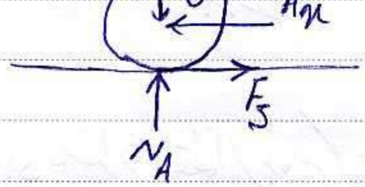


مثال:



جعبه روی دو غلتک روان با جرم ناچیز قرار دارد
به یکباره سکوی B فرو می‌ریزد
بلافاصله پس از فرو ریختن سکوی B عکس‌العمل تکیه‌گاهی در A را بیابید:

نکته:
غلتک روان با جرم ناچیز، حکم سطح صیقلی (سطح بدون اصطکاک) را دارد)
زیرا:



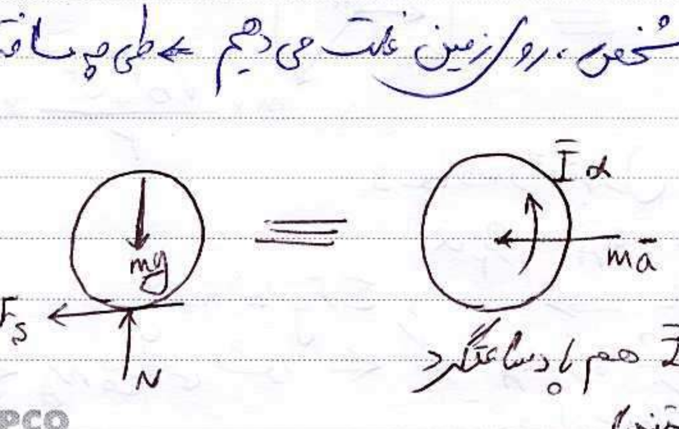
$$\sum \bar{M} = \bar{I}\alpha \Rightarrow F_s \times r = 0 \times \alpha \Rightarrow F_s = 0$$

اما:
اگر روان نباشد:

$$\sum \bar{M} = I\alpha = 0 \rightarrow F_s \times r - M = 0 \Rightarrow F_s = \frac{M}{r} \neq 0$$

(ex

غلتک صلبی با جرم مشخص، روی زمین غلت می‌دهیم که طی چه مسافتی متوقف می‌شود:



$\bar{a}$: شتاب توقف است
چون $\bar{a}$ به سمت چپ است
با توجه به اینکه غلتش داریم پس $\bar{I}\alpha$ هم پادساعتگرد است (a و α هم مرتبط هستند)

$\sum F_x = m\bar{a}_x \Rightarrow +F_s = +m\bar{a} \Rightarrow \bar{a} = \frac{F_s}{m}$ ①

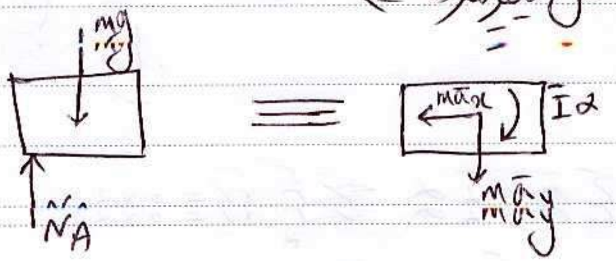
$\sum \bar{M} = \bar{I}\alpha \Rightarrow -F_s \times r = \bar{I}\,\frac{\bar{a}}{r} \Rightarrow \bar{a} = \frac{-F_s \times r}{\bar{I}}$ ②

⇐ تنها در حالتی، روابط ① و ② همزمان برقرار هستند که $F_s = 0$ باشد

$\bar{a} = 0$ ⇐ تا ابد به حرکت خود ادامه می‌دهد

حال به حل مثال می‌پردازیم:

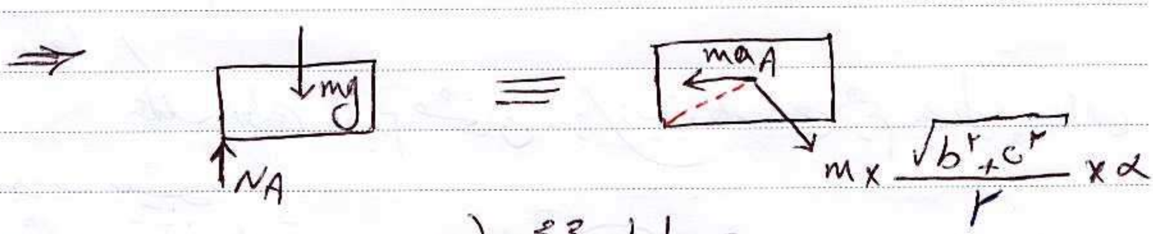
چونکه گفته "بلافاصله" پس هندسه شکل تغییر نکرده ⇐ (ω نیز صفر است)



⇒ 3 معادله و 4 مجهول

باید به سراغ نقطه‌ای برویم که اطلاعاتی را از آن داشته باشیم ⇐ چون مسیر حرکت نقطه A مشخص است ⇐ دستگاه را روی A می‌گذاریم

$a_G = a_A + \cancel{\omega \times (\omega \times r)} + \dot{\omega} \times r_{AG}$



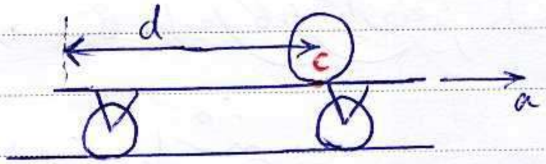
⇒ 3 معادله و 3 مجهول

$\to \sum F_x = m\bar{a}_x \Rightarrow a_A = \frac{b}{2}\alpha$

$\sum \hat{M}_A = \bar{I}\alpha \pm m\bar{a}d \Rightarrow \dots, \quad \sum F_y = m\bar{a}_y$

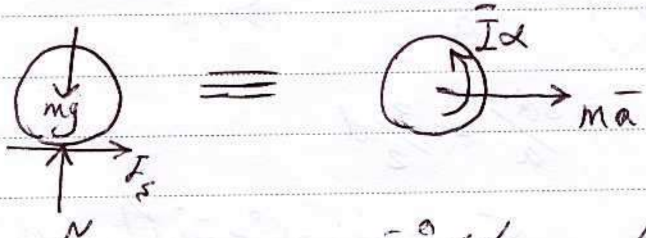
مثال:

کامیونی با شتاب a به حرکت درمی‌آید



⇐ وقتی لوله فاصله d را طی می‌کند، کامیون چه مسافتی را طی کرده است

(فرض: غلتش کامل)



دستگاه را روی c که متعلق به غلتک است گذاشتیم:

$$\bar{a} = a_c + \omega\times(\omega\times r) + \dot{\omega}\times r$$

$$\Rightarrow \quad \bar{a}\,i = a_c\,i + a_c\,j - r\omega^2\,j - r\alpha\,i \Rightarrow \bar{a} = a - r\alpha$$

⇐ 3 معادله و 3 مجهول

$$\Rightarrow \quad \Sigma F_x = m\bar{a}_x \Rightarrow F_s = m(a - r\alpha)$$

$$\Sigma \bar{M} = \bar{I}\alpha \Rightarrow F_s \times r = \tfrac{1}{2} m r^2 \times \alpha \Rightarrow F_s = \tfrac{1}{2} m r\alpha$$

$$\Rightarrow \tfrac{1}{2} m r\alpha = m(a - r\alpha) \Rightarrow \tfrac{3}{2} r\alpha = a \Rightarrow \alpha = \frac{2}{3r} a$$

$$\bar{a} = a - r\alpha \Rightarrow \bar{a} = \tfrac{1}{3} a$$

a_{rel} اگوی نسبت به گاری ا همان $r\alpha$ است زیرا:

اگر دستگاه را روی گاری قرار دهیم، داریم:

$$\bar{a} = a - a_{rel}$$

همچنین داشتیم:

$$\bar{\bar{a}} = a - \ddot{r}\alpha$$

$$\Rightarrow a_{rel} = r\alpha = r \times \frac{2}{3r} a = \frac{2}{3} a$$

$$d = \frac{1}{2} a_{rel} \cdot t^2 \Rightarrow t^2 = \frac{3d}{a} \Rightarrow$$

$$s = \frac{1}{2} a t^2 = \frac{1}{2} a \times \frac{3d}{a} = \frac{3}{2} d$$

جهت ها در نظر گرفته شده فرضی هستند

سوال:

حداقل ضریب اصطکاک برای داشتن غلتش کامل:

$$\Sigma F_y = m\bar{a}_y = 0 \Rightarrow N = mg$$

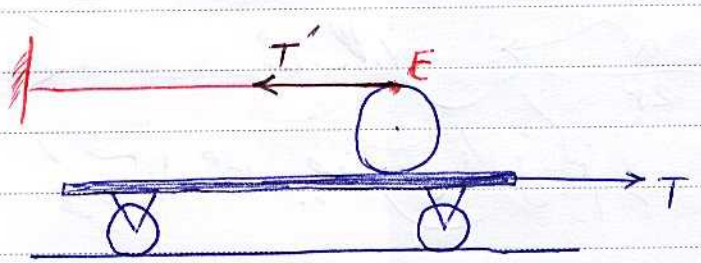
$$F_s = \frac{1}{2} m r \times \alpha = \frac{1}{2} m r \times \frac{2a}{3r} \Rightarrow F_s = \frac{ma}{3}$$

در آستانه لغزش $\Rightarrow \frac{ma}{3} = \mu_s N \Rightarrow \mu_{s_{min}} = \frac{a}{3g}$

حال اگر $\mu_s < \mu_{s_{min}} \Leftarrow$ لغزش داریم $\Leftarrow$ بین $\bar{a}$ و α هیچ رابطه ای نیست

مثال:

طناب به موازات سطح است



فرض: غلتش کامل

m_1 = جرم غلتک m_2 = جرم بدنه گاری m_3 = جرم هر چرخ

r_1 = شعاع غلتک   شعاع هر چرخ: r_2

اگر:

$$T = 1500\,N \;,\; m_1 = 100\,kg \;,\; m_2 = 80\,kg \;,\; m_3 = 20\,kg$$
$$r_1 = 0.15\,m \;,\; r_2 = 0.1\,m$$

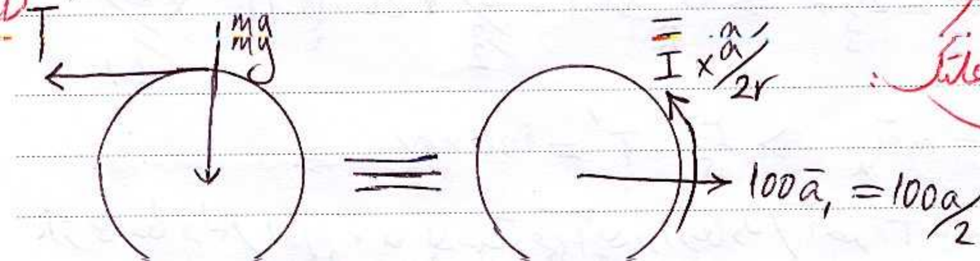
← شتاب حرکت گاری و $T' = ?$

اگر فرض را بر غلتش کامل نمی گذاشت ⇐ باید تعیین می کردیم که لغزش داریم یا غلتش (با توجه به ضریب اصطکاک ها و ......)

اما:

چون غلتک در حال حرکت است و N در همه جای گاری یکسان نیست ⇐ μ_s هم در طول گاری متفاوت است ⇐ ممکن است در یک بازه، لغزش و در بازه ای دیگر غلتش داشته باشیم

پیکره آزاد غلتک:



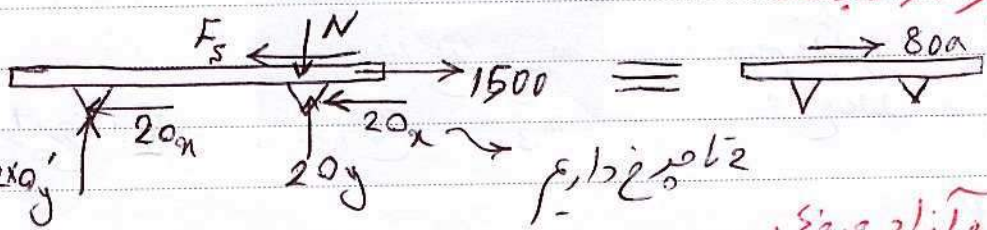
نقطه E، نقطه‌ای است که هم مرکز آنی دوران است. هم نقطه شتاب تا ثابت صفر

$\alpha = \frac{\bar{a}}{r}$, $\alpha = \frac{a}{2r}$ ⟶ شتاب گاری ⟸

$\Rightarrow \bar{a} = a/2$ $\Rightarrow$ پیکره آزاد شتاب صفحه قبل را کامل می‌کنیم

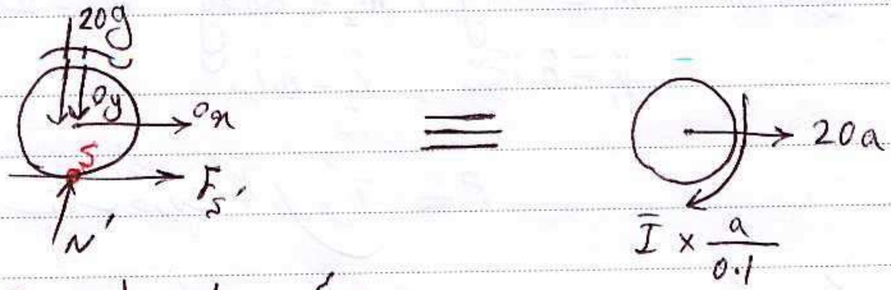
پیکره آزاد بدنه:

(2)



پیکره آزاد چرخ:

(3)



جهت F_s دیمی است (البته می‌شه حدس زد)

(1): $\sum M_E = I_E \alpha \Rightarrow F_s \times 0.3 = 3/2 \times 100 \times 0.15^2 \times \frac{a}{2 \times 0.15}$

(2): $\sum F_x = m\bar{a}_x \Rightarrow 1500 - F_s - 4 \times O_x = 80a$

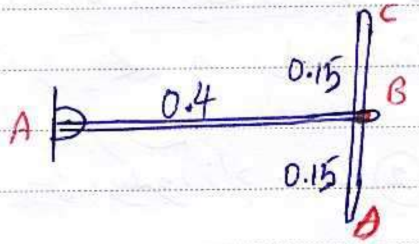
(3): $\sum M_S = I_S \alpha \Rightarrow O_x \times 0.1 = 3/2 \times 20 \times (0.1)^2 \times a/0.1$

(1): $\sum F_x = m\bar{a}_x \Rightarrow F_s - T' = 100 \times a/2 \Rightarrow$

از 3 معادله اول a بدست می‌آید و از معادله آخر T' یافت می‌شود

بقیه معادلات باقی‌ها نده که خرج نکردیم، برای چک کردن داده‌ها بدست آمده است

مثال:

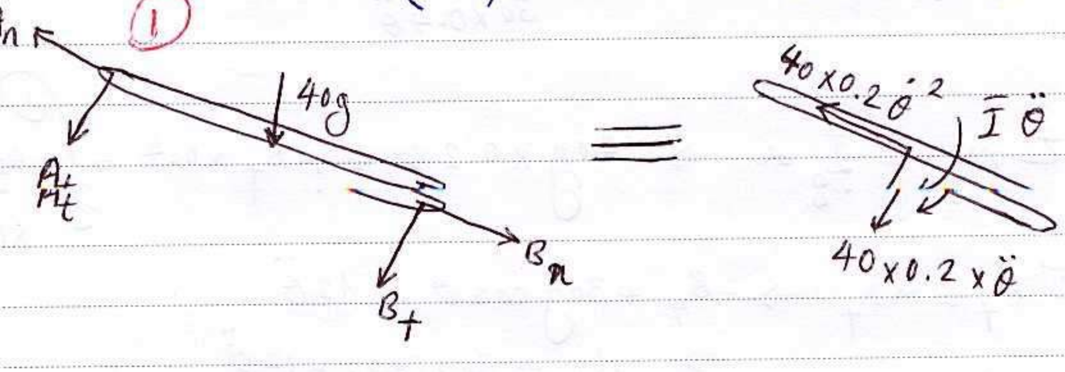


در B مفصل هستند
تمامی مفاصل روان هستند
و مقاومت هوا ناچیز است
و $m = 100\ kg/m$

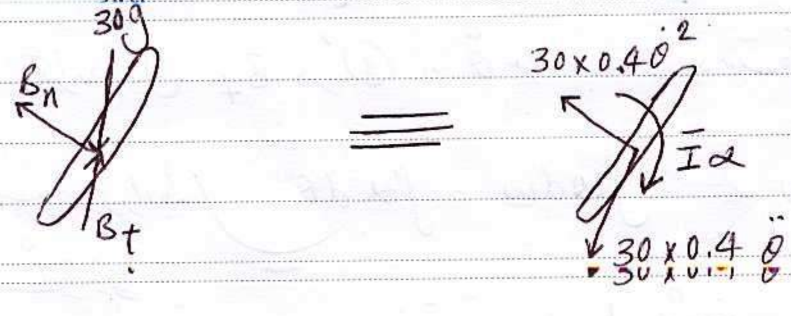
وقتی AB با افق زاویه θ ساخت، سازه را تجزیه و تحلیل کنید

(حالت اولیه: AB افقی است و CD قائم است)

(1)



(2)



(2): $\sum \bar{M} = \bar{I}\alpha \ , \ \sum \bar{M} = 0 \Rightarrow \bar{I}\alpha = 0 \Rightarrow \alpha = 0$

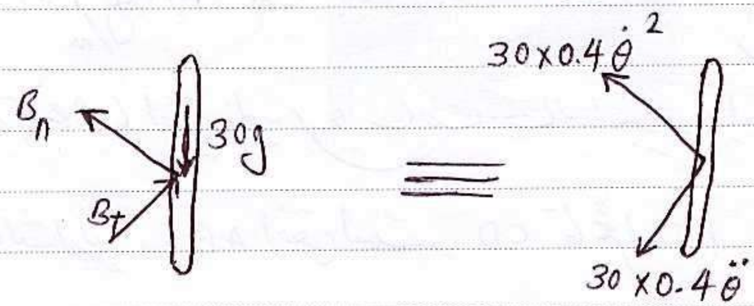
$\Leftarrow$ ω ثابت است

که هر ω ای که در ابتدا دارد ...

یعنی لینک CD نیز به همان صورت قائم خواهند ماند یعنی تنها انتقال دارد

اما اگر: لینک CD به AB جوش نخورد ⇐ CD، همراه AB حرکت خواهد
کرد ⇐ تتا خواهد داشت

پس، پیکره آزاد حالت ② تصحیح می‌کنیم:



①'

① $\sum M_o = I_o\alpha \Rightarrow 40g\times0.2\cos\theta + B_t\times0.4 = \frac{1}{3}\times40\times(0$

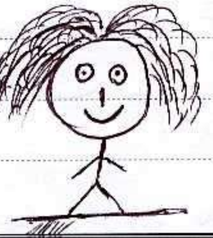
② $\sum F_t = m\bar{a}_t \Rightarrow -B_t + 30g\cos\theta = 12\ddot\theta$

$\Rightarrow B_t = 30g\cos\theta - 12\ddot\theta$

$\Rightarrow$ با قرار دادن B_t در ①'، $\ddot\theta$ برحسب θ بدست می‌آید

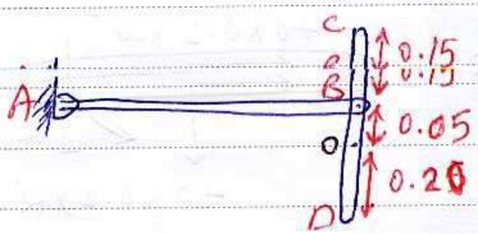
سپس از رابطه $\int\omega d\omega = \int\alpha d\theta$ ⇐ ω هم برحسب θ یافت می‌شود

بقیه هم به همین ترتیب پیدا می‌شوند



اگه به مشکل برخوردید، بعداً از من بپرسید!!!

حال مرکز جرم لینک CD را منطبق با لینک AB در نظر نمی گیریم یعنی:



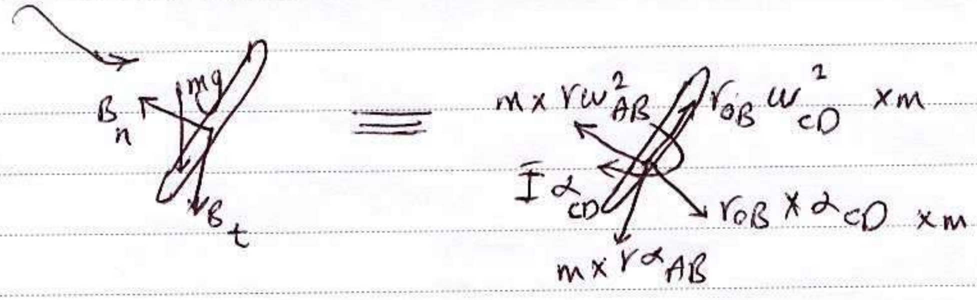
حال با همان (اطلاعات قبلی) مسئله را تجزیه و تحلیل کنید:

ابتدا دستگاه را روی A گذاشته و به لینک AB جوش می دهیم و B را بررسی می کنیم ⇐

$$a_B = r\omega_{AB}^2 + r\alpha_{AB}$$

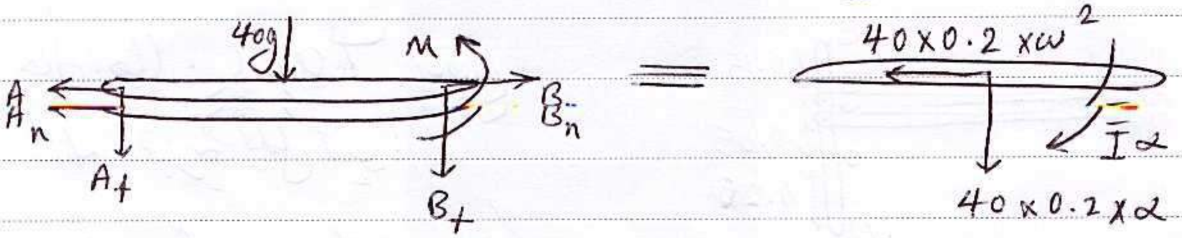
سپس با قرار دادن دستگاه روی B و جوش دادن به لینک CD داریم:

$$a_O = a_B + r\omega_{CD}^2 + r\alpha_{CD}$$



$$\Rightarrow \sum M_B = \bar{I}\alpha \pm mad$$

ex) حال مسأله اول را با فرض اینکه مفاصل غیرروان باشند حل کنید:



نکته:

α ، ω ، دو مجهول نیستند زیرا می‌توانیم از فرمول‌های $\omega = \alpha t + \omega_0$ و یا $\alpha d\theta = \omega d\omega$ یکی را برحسب دیگری یافت

Year. ۸۸ Month. ۹ Date. ۱۶

۲ شنبه

متد انرژی در سینتیک اجسام صلب:

Energy Method

داشتیم:

$$u = E_2 - E_1$$

$$E = V_e + V_g + T$$

V_g: مبنای سطح پتانسیل، مرکز جرم است.

$$V_g = mgh$$

V_e:

$$V_e = \frac{1}{2} k x^2$$

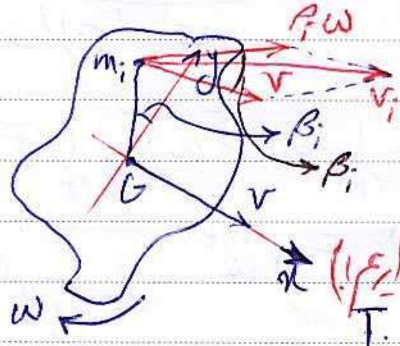
x: انحراف نسبت به طول آزاد

T:

جسم صلب هر نقطه اش، سرعت خاص خودش را دارا است ⇐

در سینتیک اجسام صلب: $T \neq \frac{1}{2} m v^2$

داریم:



$$T_i = \frac{1}{2} m_i v_i^2$$

می توان نوشت:

$$v_i = \bar{v} + \omega \times r + \cancel{v_{rel}}$$

۰ (چون با جسم صلب سروکار داریم!)

پس داریم:

$$T_i = \frac{1}{2} m_i \left(\bar{v}^2 + (\rho_i \omega)^2 + 2 \times \bar{v} \times \rho_i \omega \cos\beta_i\right)$$

$\rho_i \cos\beta_i$: تصویر ρ_i است بر روی محور y ها ⇐ $\rho_i \cos\beta_i = y_i$

$$\rightarrow T = \sum \frac{1}{2} m_i v_i^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow T = \sum \frac{1}{2} m_i \left(\bar{v}^2 + (\rho_i \omega)^2 + 2 \bar{v} y_i \omega \right)$$

$$\Rightarrow T = \sum \frac{1}{2} m_i \bar{v}^2 + \sum \frac{1}{2} m_i \rho_i^2 \omega^2 + \sum m_i \bar{v} y_i \omega$$

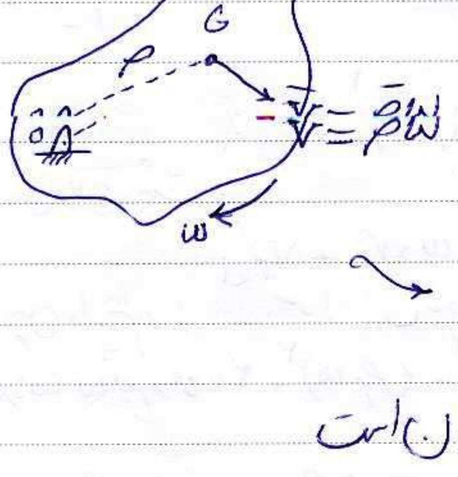
$$\Rightarrow T = \frac{1}{2} m \bar{v}^2 + \frac{1}{2} \bar{I} \omega^2 + \bar{v} \omega \cancel{\sum m_i y_i}$$

$$T = \underbrace{\frac{1}{2} m \bar{v}^2}_{\text{ناشی از انتقال جسم صلب است}} + \underbrace{\frac{1}{2} \bar{I} \omega^2}_{\text{مربوط به دوران جسم صلب است}}$$

ناشی از انتقال جسم صلب است

مربوط به دوران جسم صلب است

نکته: جسم صلبی که تنها انتقال دارد ⇐ این Term حذف می‌شود و $T = \frac{1}{2} m$ می‌توان آن‌را در مبحث سینتیک ذرات تجزیه و تحلیل کرد



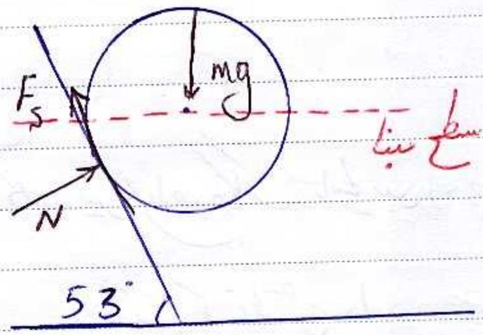
O : مرکز دائمی دوران یا مرکز آنی دوران است.

$$\Rightarrow T = \frac{1}{2} m (\bar{\rho} \omega)^2 + \frac{1}{2} \bar{I} \omega^2$$

$$T = \frac{1}{2} (m \bar{\rho}^2 + \bar{I}) \omega^2 = \frac{1}{2} I_o \omega^2$$

I حول مرکز دائمی یا مرکز آنی دوران است

مثال:



$m_{دیسک} = 5\,kg$

$r_{دیسک} = 0.1\,m$

دیسک یکنواخت است

غلتش کامل است.

دستمال زیر دیسک است

پس از اینکه دستمال را می‌کشیم

دیسک شروع به حرکت می‌کند

که پس از 1.2m جابه‌جایی، ω را بیابید:

اگر ما دینامیکی را مساله به ما بدهد ⇐ تکلیف ما از اینکه غلتش داریم یا غلتش همراه لغزش! مشخص نیست ⇐ بهترین روش: روش نیرو

درصورتی که در این مساله غلتش داشته باشیم (درصورت مساله ذکر شده باشد که غلتش داریم) ⇐ بهترین روش: روش انرژی است

⇐

F_s برای ما کار انجام نمی‌دهد!! می‌پرسی چرا؟؟!

چون که غلتش داریم ⇐ در محل تماس بین دیسک و سطح، سرعت در آن نقطه صفر است ⇐ جابه‌جایی F_s صفر است زیرا ملاک جابه‌جایی نیرو سرعت در جهت نیرو است.

$$W = E_2 - E_1 \Rightarrow 0 = E_2 - E_1 \Rightarrow 0 = E_2 - 0$$

$$\Rightarrow E_2 = 0 \rightarrow E_2 = -mgh + \frac{1}{2} I_0 \omega^2$$

$$v = r\omega$$

$$\Rightarrow 0 = -5g \times 1.2 \sin 53 + \frac{1}{2} \times \frac{3}{2} \times 5 \times 0.1^2 \times \omega^2$$

$$\omega =$$

(ex

نکته:

کار نیروی اصطکاک ایستایی (در صورت لغزش جسم روی سطح)

نکته:

ماشینی که غلتش دارد ⇐ کار نیروی اصطکاک صفر است ⇐ پس چه عاملی باعث حرکت ماشین می‌شود؟

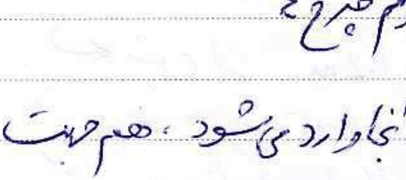
گشتاور مقاوم چرخ‌ها

نکته:

if: نیرو و سرعت در نقطه‌ای که نیرو به آنجا وارد می‌شود، هم جهت باشند ⇐ کار آن نیرو، مثبت است

else: کار آن نیرو، منفی است.

نکته:



if: غلتش کامل

$\rightarrow \bar{v} = r\omega$

if: غلتش توأم با لغزش

$\rightarrow r\omega > \bar{v}$

Take off

$v_c = \bar{v} + r\omega = \bar{v} i - r\omega i$

$\Rightarrow v_c = \bar{v} - r\omega \Rightarrow$ کار F_s در بوکس و باد، منفی است.

هم در غلتش و هم در غلتش همراه لغزش:

Subject:

Year. Month. Date. ( )

چون تنها نیرویی که به ماشین از خارج وارد می‌شود، نیروی اصطکاک چرخ‌های محرک است

F_s (نیرویی که زمین به چرخ‌ها وارد می‌کند) چرخ‌های محرک ← به سمت شتاب ماشین است

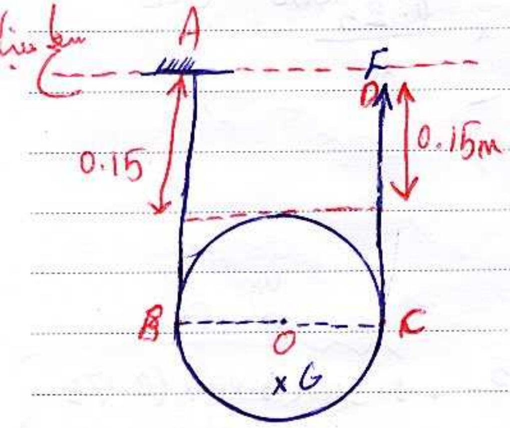
سوال: کار نیروی اصطکاک در ترمز کردن چیست؟ (غلتش توأم با لغزش)

در این حالت:

$\bar{v} > r\omega$ ← v_c به سمت راست است

اما در این حالت (ترمز کردن) نیروی اصطکاک به سمت چپ است ⇐

باز هم کار نیروی اصطکاک منفی است.



ex)

m دیسک $= 5\,kg$ $\quad$ r دیسک $= 0.1$

جرم طناب $= 7\,kg/m$

$F = 300\,N$

پس از اینکه مرکز دیسک $0.1\,m$ جابه‌جا شود ← سرعت مرکز جرم = ؟

فرض: G، مرکز جرم نیم حلقه پایینی است که فاصله‌اش از O برابر $\frac{2r}{\pi}$

لغزشی بین طناب و دیسک وجود ندارد.

نکته:

مجموع کار نیروی اصطکاک بین طناب و دیسک که به صورت زوج عمل و عکس العمل

هستند صفر است چون:
غلتش داریم ⇐ دیسک و طناب نسبت به هم سرعتی ندارند ⇐ جابه‌جایی آنها یکسان است ← کار این دو نیروی اصطکاک (عمل و عکس العمل) یکی است و در خلاف جهت هم

نکته: B مرکز آنی دوران ⇐ $v_C = 2v_0$ ⇐ جابه‌جایی طناب
۲ برابر جابه‌جایی مرکز دیسک است.

$$\rightarrow u = 300 \times (2 \times 0.1) = 60\ N.m \qquad (u = F.d)$$

$$E_1 = \underbrace{-5g \times 0.25}_{V_{g_O}} \underbrace{- 2 \times \underbrace{0.25 \times 6}_{m} \times g \times \frac{0.25}{2}}_{V_{g_{AB}} + V_{g_{CD}}}$$

$$\underbrace{-\pi \times 0.1 \times 6 \times g \times \left(0.25 + \frac{2 \times 0.1}{\pi}\right)}_{V_{g_{BC}}}$$

$$E_1 = mgh + \cancel{T}^{\,0}$$

$$E_2 = \underbrace{-5g \times 0.15}_{V_{g_O}} \underbrace{- 0.15 \times 6 \times g \times \frac{0.15}{2}}_{V_{g_{AB}}} + \underbrace{0.35 \times 6 \times g \times (0.175 - 0.15}_{V_{g_{CD}}}$$

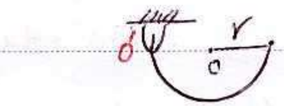
$$\underbrace{-\pi \times 0.1 \times 6 \times g \times \left(\frac{2 \times 0.1}{\pi} + 0.15\right)}_{V_{g_{BC}}}$$

$$+ \underbrace{\frac{1}{2} \times \frac{3}{2} \times 5 \times (0.1)^2 \times \omega^2}_{T_O} + \underbrace{0}_{T_{AB}} + \underbrace{\frac{1}{2} \times 0.35 \times 6 \times (2 \times 0.1 \times \omega)}_{T_{CD}}$$

T_{AB} ↓

طناب AB دوران ندارد، همچنین: $v_B = 0$ ؛ در طول طناب AB: $v = 0$

T_{CD} :



$I_o = mr^2 \Rightarrow I_{o'} = 2mr^2$

$$\Rightarrow \underbrace{+\frac{1}{2} \times \left[2 \times (0.1 \times \pi \times 6) \times (0.1)^2\right] \times \omega^2}_{T_{BC}}$$

فرمول ۱۶ به کار رفته شده :

نیم حلقه است ←

$m_{BC} = \frac{2\pi r}{2} \times 6 \quad , \quad E_1 = mgh = m_{\text{دیسک}}\, g h + m_{BC}\, g h + 2 m_{AB}\, g h$

$m_{AB}\, g h = m_{CD}\, g h$

$E_2 = mgh + T \quad , \quad T_{CD} = \frac{1}{2} m v_c^2 = \frac{1}{2} m (2r\omega)^2$

$T_o = \frac{1}{2} I_B\, \omega^2$

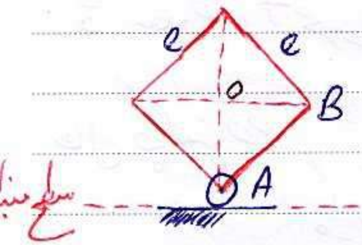
ex) plate ای با جرم m و ابعاد exe موجود است

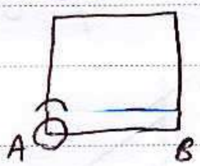
غلتک روان است و جرم ندارد

غلتک روان و بی جرم حکم سطح بدون اصطکاک را دارا است

در لحظه‌ی قبل از برخورد نقطه‌ی B با زمین

سرعت نقطه‌ی A = ?





$\ddot{u} = 0 \quad , \quad E_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} mge$

$$E_2 = mg\frac{e}{2} + \frac{1}{2} m \times \bar{v}^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{12} m (2e^2)\right)\omega^2$$

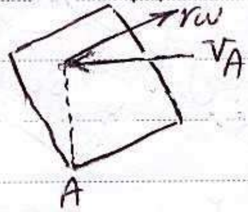
$$I_o = \frac{1}{12} m (a^2 + b^2)$$

یک معادله و 2 مجهول ← از سینماتیک کمک می‌گیریم. داریم:

: Dr Hajmusa

برای 1000 اُمین بار: به سراغ نقطه‌ای می‌رویم که بیشترین اطلاعات را راجع به آن داشته باشیم (از مسیر حرکت که از همه مهم‌تر است گرفته تا زن و بچه و ...... !!)

در حالت میانی داریم: دستگاه را روی A گذاشته و به plate جوش می‌دهیم پس:



$$\vec{v} = \vec{v}_A + r \times \vec{w}$$

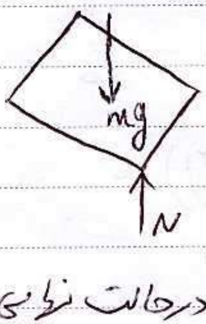
پس:
در حالت ثانویه (حالت نهایی) داریم:

$$\bar{v}_x = v_A + \frac{\sqrt{2}}{2} r\omega \times \cos 45 = v_A + r\omega$$

$$\bar{v}_y = \frac{\sqrt{2}}{2} r\omega \times \sin 45 \Rightarrow \bar{v}_y = \frac{r\omega}{2}$$

3 معادله و 4 مجهول ($\bar{v}_x$ ، $\bar{v}_y$ ، v_A ، ω)

حال چه کنیم؟؟
پیکره آزاد نیرو را برای حالت میانی می‌کشیم:



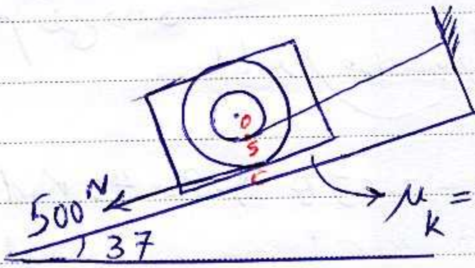
$$\Rightarrow \sum F_x = m\bar{a}_x \Rightarrow m\bar{a}_x = 0 \Rightarrow$$
$$\bar{a}_x = 0 \Rightarrow$$
$\bar{v}_x$ ثابت است

چون $\bar{v}_x$ در حالت ابتدایی صفر است ⇐ $\bar{v}_x$ در حالت نهایی هم صفر است ⇐

$$v_A + \frac{r\omega}{2} = 0$$

دوشنبه: 13-16 بعدازظهر !!

مثال: هیچ لغزشی بین طناب و قرقره وجود ندارد.



$\mu_k = 0.1$

جرم جعبه بدون قرقره $m_1 = 10\,kg$

جرم قرقره $m_2 = 3\,kg$

$r_1 = 0.05\,m$

$r_2 = 0.15\,m$

شعاع ژیراسیون قرقره $\bar{k} = 0.1\,m$

گشتاور مقاوم دینامیکی قرقره $M_k = 3\,N.m$

" " استاتیکی قرقره $M_s = 3.5\,N.m$

فرض براین است ⇐ قرقره حتماً می چرخد!!

مرکز هندسی قرقره، همان سرعت جعبه را داراست و از آنجایی مرکز آنی در نقطه c است (طناب بالایی، سرعت ندارد) ⇐ سرعت مرکز قرقره به سمت راست است ⇐ جعبه به سمت بالا حرکت می کند

با اعمال نیروی 500N که در طول حرکت ثابت است ⇐ سرعت جعبه پس از 2 متر جابجایی جعبه به سمت بالا بدست آورید؟
قرقره حتماً می چرخد (فرض مسأله)

$U = E_2 - E_1$

* برای محاسبه کار، جابجایی نیرو مد نظر است ⇐ کار نیروی 500N مثبت است

$v_c = (0.15 - 0.05)\times\omega \;,\; v_o = 0.05\times\omega \Rightarrow \frac{v_c}{v_o} = 2$

جابجایی نیروی 500N به سمت چپ است چون v در نقطه c به سمت چپ است

جابجایی نیروی 500 نیوتنی، 2 برابر جابجایی جعبه است ⇐

$U = 500\times 4 - 0.1\times 13g\cos 37\times 2 - \underbrace{3\times 40}_{M\theta}$

گشتاور مقاومی به جعبه وارد می‌شود که با گشتاور مقاومی که به قرقره وارد می‌شود زوج عمل و عکس العمل هستند که چون جعبه نمی‌چرخد ⇐ گشتاورش، کار انجام نمی‌دهد

اما برای محاسبه کار گشتاور قرقره داریم:

$W = M\theta$

پس طناو قرقره غلتش داریم $S = r\theta \Rightarrow 2 = 0.05\,\theta \Rightarrow \theta = 40\,rad$

$E_1 = 0$

داریم:

$E_2 = mgh + \frac{1}{2} m v_0^2 + \frac{1}{2}[\bar{I} + md^2] \times \omega^2$

$\rightarrow E_2 = 2 \times 13g \times \sin 37 + \frac{1}{2} m v_0^2 + \frac{1}{2}\left(3 \times \left(\underbrace{0.1^2 + 0.05^2}_{k^2}\right)\right)\left(\frac{\ }{\ }\right.$

$\rightarrow$ v_0 یافت می‌شود !!

(new ex

اگر در همان مثال قبلی، الکتروموتور را در o قرار دهیم که گشتاوری پادساعتگرد به اندازه $750\,N.m$ را روی قرقره اعمال می‌کند

⇐ چون گشتاور نیروی $500N$ حول o برابر $75N.m$ است ⇐

گشتاور الکتروموتور به گشتاور نیروی $500N$ می‌چربد ⇐ w کل، پادساعتگرد خواهد بود

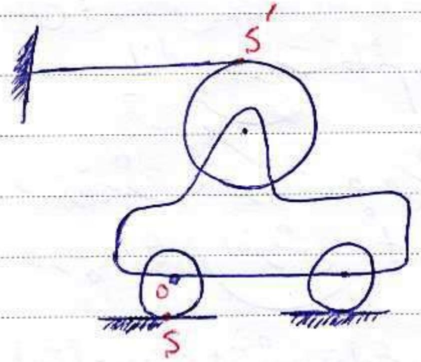
⇐ سرعت در نقطه c به سمت راست خواهد بود

⇐ کار نیروی $500N$، منفی است (چون جابه‌جایی اش، خلاف جهت نیرو است)

همچنین چون جهت سرعت در θ_0 به سمت چپ است ⇐ جعبه به سمت پایین حرکت می‌کند

Year. Month. Date. ( )

مثال:



$$قرقره: m_1 = 100kg$$
$$r_1 = 0.4m$$
$$\bar{K}_1 = 0.3m$$

$$جرم چرخ = m_2 = 40kg$$
$$r_2 = 0.3m$$
$$\bar{K}_2 = 0.15$$

$$500kg = m_3 = جرم بدنه$$

فرضیات:

مرکز جرم بدنه به گونه‌ای است که گم کردن منتفی است

گشتاوری که موتور به چرخ عقب وارد می‌کند $M = 600_{N.m}$ است

بعکس و باد هم منتفی است ؛ سیستم اتلافاتی ندارد.

بعد از 20m جابه‌جایی اتومبیل ، سرعت اتومبیل چقدر است.

غلتش داریم ⇐ کار نیروی اصطکاک صفر است

$$u = M\theta , \ \theta = \frac{S}{r} = \frac{20}{0.3} \Rightarrow u = ٦٠٠ \times ٦٦,٦$$

$$E_1 = ٠$$

$$E_2 = \frac{1}{٢} m_٣ v^٢ + \frac{1}{٢}\left(m_1\left(\bar{k}_1^٢ + r_1^٢\right)\right)\left(\frac{v}{0.4}\right)^٢$$

$$+ 4 \times \frac{1}{٢}\left(M_٢\left(\bar{k}_٢^٢ + r_٢^٢\right)\right)\left(\frac{v}{0.3}\right)^٢$$

در S و S' ، $V = ٠$ ⇐ حکم مرکز آنی دوران را دارند

$$I_S = I_O + mr^2$$
$$I_O \rightarrow k^٢ m$$

Subject:

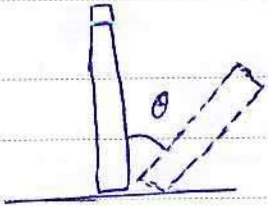
Year. Month. Date. ( )

مثال:

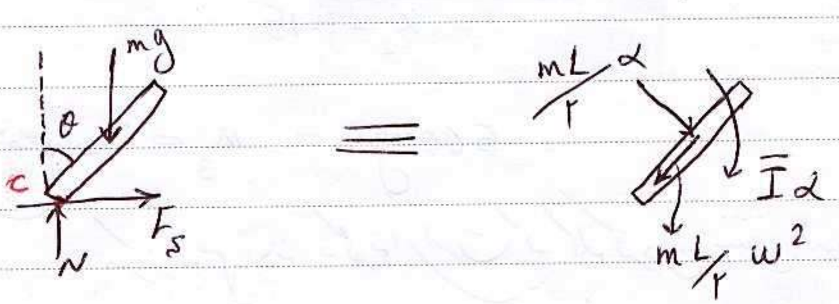
میله ای به صورت قائم داریم به طول L و جرم m با ضریب اصطکاک μ_s

سرنوشت حرکت چه می شود؟

در چه θ ای لغزش start می خوره؟



در ابتدا زمانی که لغزش نداریم:



$$\sum M_c = I_c \alpha \Rightarrow mg\frac{L}{2}\sin\theta = \frac{1}{12}mL^2\alpha + \frac{mL^2}{4}\alpha$$

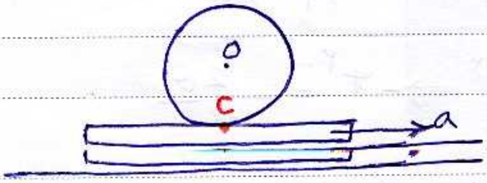
$$\rightarrow mg\frac{L}{2}\sin\theta = \frac{1}{3}mL^2\alpha$$

$$\sum F_y = m\bar{a}_y \Rightarrow mg - N = \frac{mL}{2}\alpha\cdot\cos\theta + \frac{mL}{2}\omega^2\cdot\sin\theta$$

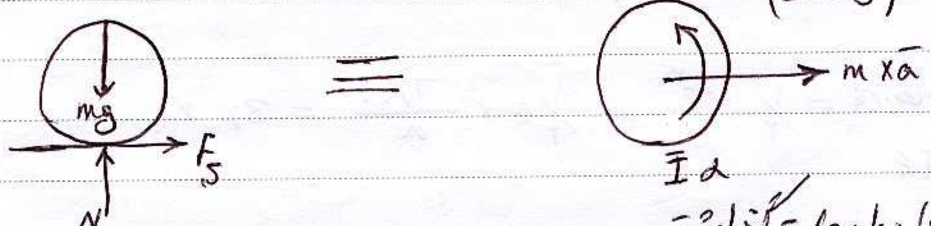
$$\sum F_x = m\bar{a}_x \Rightarrow F_s = \frac{mL}{2}\alpha\cdot\sin\theta - \frac{mL}{2}\omega^2\cdot\cos\theta$$

مثال:

دیسکی روی plate قرار دارد. plate را با شتاب a می‌کشیم (غلتش کامل بین دیسک و قطعه) ← کار نیروی اصطکاک روی دیسک طی 360° دوران دیسک چقدر است؟



داریم: (نیروی اصطکاک به نقطه‌ای وارد می‌شود که آن نقطه سرعت دارد ⇐ F_s برای ما کار انجام می‌دهد)



دستگاه را روی c گذاشته و به plate جوش می‌دهیم

$$\bar{a}\, i = a_c\, j + a_c\, i - r\omega^2 j - r\alpha\, i$$

$$\rightarrow \bar{a} = a - r\alpha$$

مسیر حرکت plate یک خط افقی است ← $\bar{a}_n$ نداریم

حال داریم:

$$\Sigma F_n = m\bar{a}_n \Rightarrow F_s = m(a - r\alpha)$$

$$\Sigma \bar{M} = \bar{I}\alpha \Rightarrow +F_s \times r = +\frac{1}{2} m r^2 \alpha \rightarrow \alpha = \frac{2F_s}{mr}$$

$$\rightarrow F_s = m\left(a - \frac{2F_s}{m}\right) \Rightarrow F_s = \frac{ma}{3}$$

ان غلتش کامل داریم پس :

جابجایی دیسک و plate یکی است .

می پرسی چرا ؟؟؟؟

 !! .... زیرا به دلیل اینکه

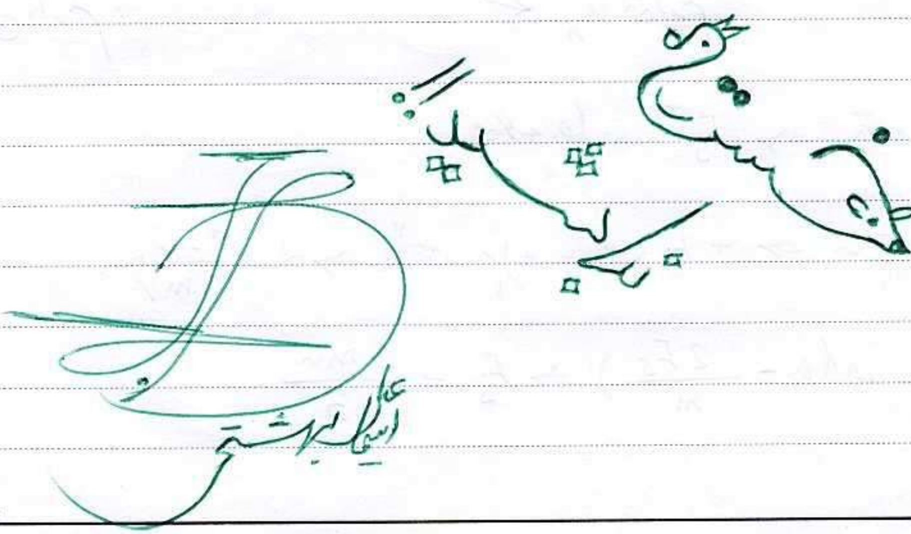
$$\Rightarrow \alpha = \frac{+2F_s}{mr} \quad \left(F_s = \frac{ma}{3}\right) \Rightarrow \alpha = +\frac{2}{3}\,\frac{a}{r}$$

$$s = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t \Rightarrow \theta = \frac{1}{2}\alpha t^2 \Rightarrow t^2 = \frac{2\theta}{\alpha}$$

$$\rightarrow t^2 = \frac{2 \times 2\pi}{\frac{2}{3} \times \frac{a}{r}} = \frac{6\pi r}{a} \Rightarrow$$

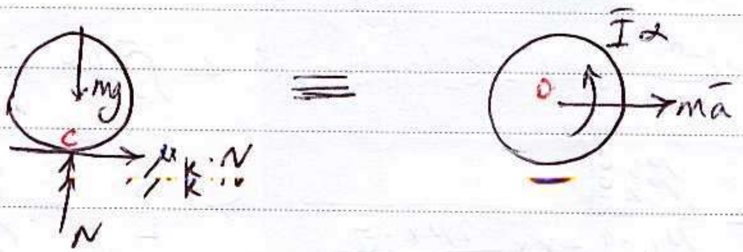
جابجایی plate $d = \frac{1}{2}at^2 = \frac{1}{2}a \times \frac{6\pi r}{a} = 3\pi r$

$\rightarrow$ کار نیروی اصطکاک $= F_s \cdot d = \pi r m a$



مثال:

همان مثال قبلی را با فرض اینکه بین قطعه و Plate لغزش وجود داشته باشد حل کنید.



$$\sum F_y = 0 \Rightarrow N = mg \Rightarrow F_s = \mu_k\, mg$$

$$\sum F_x = m\bar{a}_x \Rightarrow \mu_k \cdot mg = m\bar{a} \Rightarrow \bar{a} = \mu_k \cdot g$$

$$\sum \bar{M} = \bar{I}\alpha \Rightarrow \mu_k \cdot mg \times r = \frac{1}{2} m r^2 \alpha \Rightarrow \alpha = \frac{2\mu_k g}{r}$$

برای یافتن مسافت پیموده شده قطعه پایینی (در واقع همان جابه‌جایی نیروی اصطکاک) داریم:

ابتدا جابه‌جایی مرکز دیسک را می‌یابیم:

برای این کار: دستگاه o را روی مرکز دیسک قرار داده و نقطه c را بررسی می‌کنیم:

$$v_c = \bar{v} + r\omega \quad , \quad a_c = \bar{a} + r\alpha$$

$$\theta = \frac{1}{2}\alpha t^2 \Rightarrow 2\pi = \frac{1}{2} \times \frac{2\mu_k \cdot g}{r} \times t^2 \Rightarrow t^2 = \frac{2\pi r}{\mu_k \cdot g}$$

$$S = \frac{1}{2} \times \mu_k \cdot g \times \frac{2\pi r}{\mu_k \cdot g} = \pi r$$

ل داریم: اگر L جابه‌جایی قطعه زیری باشد (جابه‌جایی F_s)

$$\rightarrow \frac{s}{L} = \frac{\bar{v}}{v_c} = \frac{\bar{a}}{a_{c_t}}$$

چون v_0 نداریم ⇐ نسبت جابه‌جایی‌ها با نسبت شتاب‌ها برابر است

$$\Rightarrow \frac{s}{L} = \frac{\mu_k g}{\mu_k \cdot g + 2 \times \frac{2\mu_k \cdot g}{2}} \rightarrow \frac{s}{L} = \frac{1}{3}$$

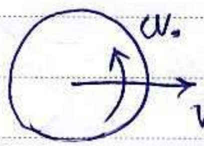
$$\Rightarrow L = 3s = 3\pi r$$

L در حالتی که غلتش داشتیم با حالتی که لغزش داشتیم یکی شد پس می‌توان
که گرفت که:

L هیچ ربطی به μ_k ندارد؛ چون که:

با افزایش μ_k ⇐ F_s زیاد می‌شود ⇐ α زیاد می‌شود اما از طرفی t^2
هش می‌یابد

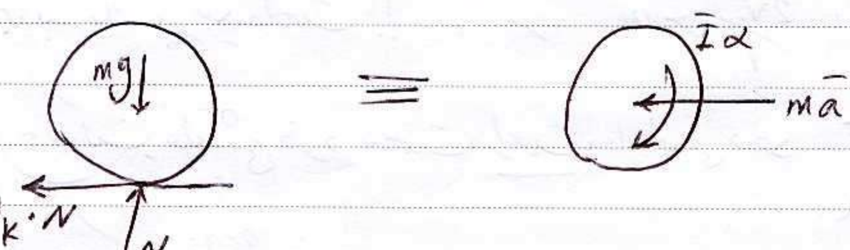
مثال:



دیسکی را با دست خود چرخانده سپس با سرعت v به سمت جلو پرتابش می‌کنیم که دیسک بر روی سطحی با μ_s ، μ_k قرار می‌گیرد ⇐ سرنوشت حرکت را بلافاصله پس از تماس با سطح را تجزیه و تحلیل کنید.

وقتی لغزش نداریم، هیچ لزومی ندارد که جهت اصطکاک را درست انتخاب کنیم و دقت به خرج بدهیم چون: F_s مجهول است

حال:



ω پادساعتگرد است و v به سمت راست است که دیسک تمایل دارد که به سمت چپ حرکت کند (مخالفت با حرکت کند)

$\Rightarrow$

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow N = mg$$

$$\Sigma F_x = m\bar{a}_x \Rightarrow +\mu_k \cdot mg = m\bar{a} \Rightarrow \bar{a} = \mu_k \cdot g$$

$$\Sigma \bar{M} = \bar{I}\alpha \Rightarrow \mu_k \cdot mg \times r = \frac{1}{2} m r^2 \Rightarrow \alpha = \frac{2\mu_k \cdot g}{r}$$

$v = v_0 - at \Rightarrow v = v_0 - \mu_k g t$

$\Rightarrow$

$\omega = \omega_0 - \frac{2\mu_k g}{r} t$

حرکت تا زمانی ادامه دارد که لغزش تبدیل به غلتش شود

زمانی که دیگر بوکس و یا درگردش تمام می شود و به حرکت خود ادامه می دهد
حرکت دورانی گوی تمام می شود و حرکت انتقالی اش شروع می شود.

$\Rightarrow$

$r\omega = v_0 - \mu_k g t_c \quad , \quad \omega = \omega_0 - \frac{2\mu_k g}{r} t_c$

$\rightarrow \omega = \omega_0 - \frac{2}{r}(v_0 - r\omega) \Rightarrow \omega = \frac{2v_0}{r} - \omega_0$

$\Rightarrow$

if: $\frac{2v_0}{r} > \omega_0 \Rightarrow$ v به با ω جهت بدیده است !!

$\rightarrow$ گوی به حرکتِ غلتشی خود به سمت راست ادامه می دهد

else:

گوی به حرکت غلتشی خود " چپ " "

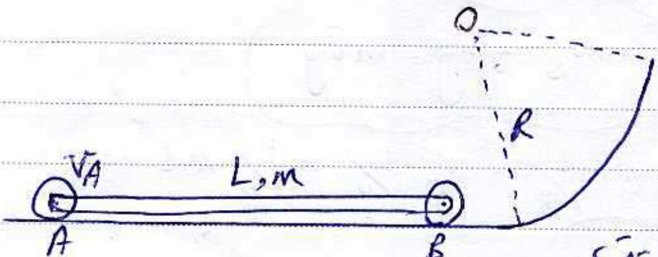
$0 - t_c$; (بوکس و یا دا) لغزش داشتیم
$t_c - \infty$; غلتش داریم

Subject:
Year. Month. Date. ( )

New example:

مثال:

بلافاصله پس از ورود چرخ جلو به قوس

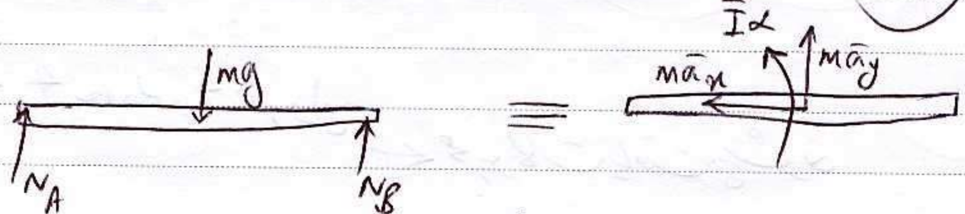


→ N_B ، $N_A = ?$

A دارای سرعت ثابتی است؛

اگه موتور به چرخ عقب متصل است.

میله‌ی آزاد:



A دارای سرعت ثابتی است و در حال حرکت به سمت راست است.

B نیز مسیر حرکتش مشخص است

حال: دستگاه را روی A گذاشته و به میله جوش می‌دهیم:

$$\bar{a} = \cancel{a_A}^{\,0} + \omega\times(\cancel{\omega\times r}) + \dot{\omega}\times r \Rightarrow \bar{a}_y = \frac{L}{2}\alpha\, j$$

$$\Rightarrow \bar{a}_x = 0$$

0 (بلافاصله پس از ورود به قوس α داریم اما ω نداریم)

حال: دستگاه را روی B گذاشته و به میله جوش می‌دهیم:

$$\bar{a} = a_B + \omega\times(\cancel{\omega}^{\,0}\times r) + \dot{\omega}\times r \Rightarrow$$

$$\bar{a}_y = a_{B_t}\, i + \frac{v_A^2}{R}\, j - r\alpha\, j \qquad \left(a_B = a_{B_t} + \cancel{a_{B_n}}\right)$$

$\frac{v_B^2}{\ldots}$

$$\Rightarrow a_{B_t} = 0 \quad , \quad \bar{a}_y = \frac{V_A^2}{R} - \frac{L}{2}\alpha$$

$$\Sigma F_y = m\bar{a}_y \Rightarrow N_A + N_B - mg = m\bar{a}_y$$

$$\Sigma \bar{M} = \bar{I}\alpha \Rightarrow N_B \times \frac{L}{2} - N_A \frac{L}{2} = \frac{1}{12} mL^2 \alpha$$

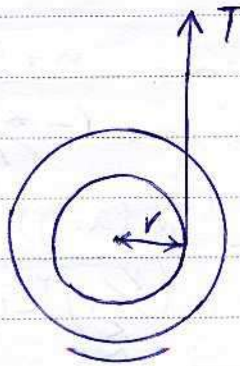
$$\rightarrow N_B - N_A = 6mL\alpha$$

4 معادله، 4 مجهول ← مجهولات یافت می‌شوند

یکشنبه

مثال:

تحلیل حرکت یویو:



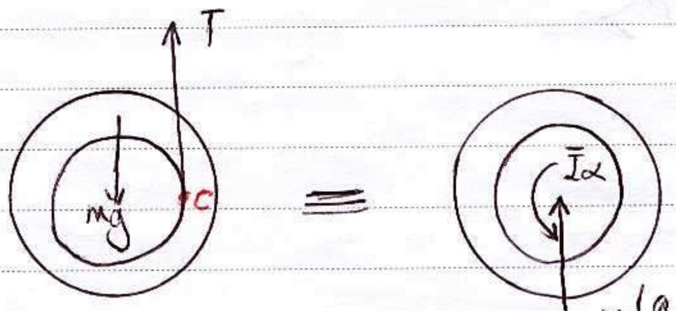
جرم یویو = m

شعاع یویو = r

شعاع ژیراسیون یویو = $\bar{k}$

شتاب دست ما: a است که می‌تواند به سمت بالا یا پایین باشد

۱) a به سمت بالا:



دستگاه را روی c قرار داده و به یویو جوش می‌دهیم ⟸ مرکز جرم را بررسی می‌کنیم.

$$\bar{a} = \bar{a}_{c_y}\,\vec{j} + \bar{a}_{c_x}\,\vec{i} + \omega \times (\omega \times r) + \dot{\omega} \times r$$

$$\bar{a}_y = a_{c_y} + \dot{\omega} \times r \Rightarrow \bar{a}_y = a - r\alpha$$

با $\bar{a}_x$ کاری نداریم!!

$$\sum F_x = m\bar{a}_x \Rightarrow 0 = m\bar{a}_x \Rightarrow \bar{a}_x = 0$$

$$\sum F_y = m\bar{a}_y \Rightarrow mg - T = m(a - r\alpha)$$

$$\Sigma \bar{M} = \bar{I}\alpha \Rightarrow T \times r = \bar{I}\alpha = m\bar{k}^2\alpha$$

$$\Rightarrow T = \frac{m\bar{k}^2\alpha}{r}$$

$$\Rightarrow -m\frac{\bar{k}^2}{r}\alpha + mg = m(a - r\alpha) \Rightarrow \alpha = \frac{a+g}{r - \frac{\bar{k}^2}{r}}$$

$$\rightarrow T = \frac{m\bar{k}^2}{r}\left(\frac{a+g}{r - \frac{\bar{k}^2}{r}}\right) \Rightarrow \quad T = \frac{m(a+g)}{\left(\frac{r}{\bar{k}^2}\right)^2 - 1}$$

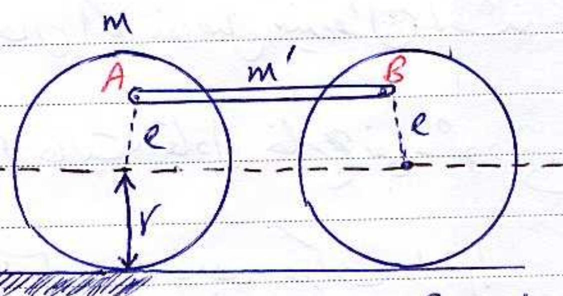
$\Rightarrow$

if $|-a| > g \Rightarrow T < 0$ طناب شل می‌شود

else

$T > 0$

مثال:



میله در نقطه A و B به 2 دیسک مفصل شده است و تمامی نقاط مفصل روان هستند

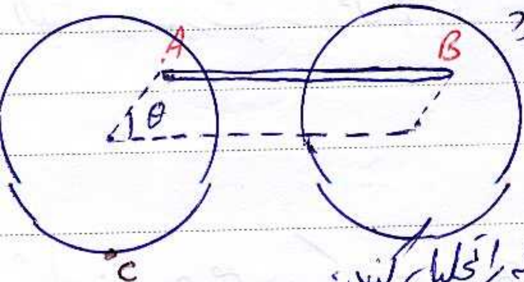
اصطکاک به اندازه کافی داریم

با یک انحراف جزئی سیستم از حالت تعادل خارج می شود

پس از اینکه سیستم از حالت تعادل خارج شود و به حالت روبه رو در بیاید

(جرم دیسک ها m است و دارای شعاع r هستند

طول لینک L است و دارای جرم m' است) مسئله را تحلیل کنید:



$$E_2 - E_1 = u \rightsquigarrow u = 0 \Rightarrow E_1 = E_2$$

$$E_1 = m'ge$$

لینک AB تنها انتقال دارد ← $T = \frac{1}{2} m v^2$ و تمامی نقاطش دارای سرعت یکسانی هستند

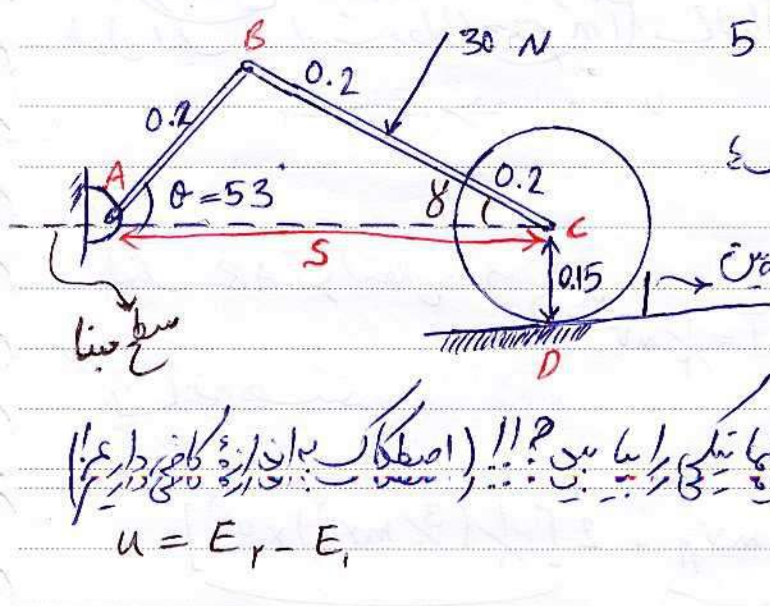
$$E_2 = \underbrace{m'ge\sin\theta}_{V_g \text{ لینک}} + \underbrace{\frac{1}{2} m v_A^2}_{T \text{ لینک}} + 2\underbrace{\left[\frac{1}{2}\left(\frac{3}{2} m r^2\right)\times \omega^2\right]}_{T \text{ دیسک ها}}$$

c: مرکز آنی دوران است (غلتش داریم) ←

$$v_A = s\omega \rightsquigarrow v_A = \sqrt{e^2 + r^2 + 2er\sin\theta}\ \omega$$

ل اگر مفاصل غیدرهال باشند ⇐
با یک انحراف جزئی دیگر سیستم
حالت تعادل خارج نمی شود ⇐ critical θ را می یابیم ⇐
ان θ به بعد حرکت داریم!

بته در صورت مسئله باید M_s و M_d را بدهند



ل: جرم دیسک = 5 kg
A و B و C مفصل
هستند و لینک ها m=10 kg/m
برداشتن پین ،
ی
θ = 20
⇐

کلیه اطلاعات سینماتیکی را بیابید؟!! (اصطکاک به اندازه کافی داریم!)

عال داریم:

$u = E_2 - E_1$

$E_1 = 0.1 \sin 53 \times 2g + 0.1 \sin 53 \times 4g$

$0.1 \sin\theta = 0.2 \sin 8_1 \Rightarrow 8_1 = 23.57°$

$E_2 = 0.1 \sin 20 \times 2g + 0.1 \sin 20 \times 4g + \overbrace{\frac{1}{2} (\underbrace{\frac{3}{2} \times 5 \times 0.15}_{I_D}}^{T_c}$

^{1}Bc

$+\frac{1}{2} \times 4 \times \bar{v}_{Bc}^{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{12} \times 4 \times 0.4^{2} \times \omega_{Bc}^{2}$

$(\bar{v}_x^2 + \bar{v}_y^2)$

$+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3} \times 2 \times 0.2^{2}\right) \omega_{AB}^{2}$

⇐ ایعادله، 5 مجهول ⇐ از سینماتیک کمک می‌گیریم !!

دستگاه را روی B قرار داده و به لینک Bc جوش می‌دهیم و c را بررسی می‌کنیم.

$V_c = V_B + \omega \times r \rightarrow 0.15\,\omega_c i = 0.2\,\omega_{AB}(\sin 20 i - \cos 20 j) + 0.4\,\omega_{Bc}(\sin 9.85 i + \cos 9.85 j)$

داشتیم:

$0.2 \sin 20 = 0.4 \sin \gamma_2 \Rightarrow \gamma_2 = 9.85$

$\rightarrow 0.15\,\omega_c = 0.2\,\omega_{AB} \sin 20 + 0.4\,\omega_{Bc} \sin 9.85$

$0 = 0.2\,\omega_{AB}(-\cos 20 j) + 0.4\,\omega_{Bc}(\cos 9.85)$

حال دستگاه را روی B قرار داده و مرکز جرم CB را بررسی می‌کنیم و به لینک Bc جوش می‌دهیم.

$\bar{v}_x i - \bar{v}_y j = 0.2\,\omega_{AB}(\sin 20 i - \cos 20 j) + \omega_{Bc} \times 0.2(\sin 9.85 i + \cos 9.85 j)$

$\Rightarrow \bar{v}_x = 0.2\,\omega_{AB} \cdot \sin 20 + 0.2\,\omega_{Bc} \cdot \sin 9.85$

$\bar{v}_y = 0.2\,\omega_{AB} \cos 20 - 0.2\,\omega_{Bc} \cos 9.85$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

برای محاسبه‌ی u داریم:
نیروی $30N$ را به نقطه‌ی c منتقل می‌کنیم ⇐
پل ایجاد شده را نیز در c قرار می‌دهیم.
ن کار را به این دلیل انجام دادیم که:
مسیر نقطه‌ای که نیروی $30N$ روی آن
ت، مشخص نیست!

کار نیروی $30N$ و کوپل مربوطه را محاسبه می‌کنیم:

$$u = +6 \times \underbrace{\frac{(23.57 - 9.85)}{180}} - \underbrace{\int 30 \sin \gamma \, ds}$$

کار کوپل مربوطه ... کار نیروی $30N$

ت:

$$\text{کار } M = \int M \, d\theta = M\theta$$

ر $30 \sin \gamma$ کار را انجام می‌دهد

کوپل $M = F \times r = 30 \times 0.2 = 6N$

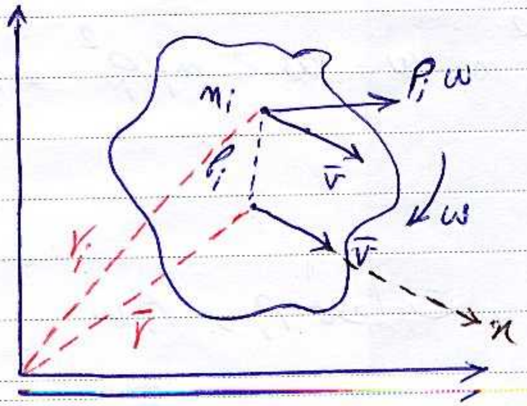
$$S = 0.2 \cos\theta + 0.4 \cos\gamma \quad ,$$

$$\frac{0.4}{\sin\theta} = \frac{0.2}{\sin\gamma} \Rightarrow \sin\theta = 2\sin\gamma \Rightarrow \cos\theta = \sqrt{1-4\ldots}$$

$$\rightarrow S = 0.2\sqrt{1 - 4\sin^2\gamma} + 0.4\cos\gamma$$

دوشنبه ۷ صبح

Momentom method: متد اندازه حرکت:



جسم صلب هم دارای انتقال است هم دارای دوران

اندازه حرکت m_i برابر است با:

$$G_i = m_i V_i \Rightarrow G = \Sigma m_i V_i = \frac{d}{dt} \Sigma m_i r_i$$

$$= \frac{d}{dt} m\bar{r} = m\bar{v}$$

$\bar{r}$: بردار موقعیت مرکز جرم است

$$\Rightarrow \int \Sigma F . dt = \Delta G \quad \begin{cases} \int \Sigma F_x dt = \Delta G_x \\ \int \Sigma F_y dt = \Delta G_y \end{cases}$$

حال برای اندازه حرکت زاویه‌ای داریم:

$$H_i = \underbrace{\rho_i \times m_i V_i}_{\text{ضرب خارجی}} = \rho_i \times m_i (\vec{\bar{v}} + \vec{\rho_i \omega})$$

(سرعت ذره m_i را با قرار دادن دستگاه برروی مرکز جرم می‌یابیم)

$$\Rightarrow \bar{H} = \Sigma \rho_i \times m_i (\bar{v} + \rho_i \omega)$$

داریم:

$$\Sigma \rho_i \times m_i \bar{v} = -\bar{v} \times \Sigma m_i \rho_i = -\bar{v} \times m\bar{\rho}$$

؛ فاصله مبدا تا مرکز جرم است ⇐ $(o = \bar{\rho}\ )\ o = m\bar{\rho}\times\bar{v}$

$$\sum \rho_i \times m_i(\rho_i\omega) = \sum \rho_i^2 m_i \omega = \omega\sum m_i\rho_i^2 =$$

$$\longrightarrow \quad \bar{H} = \bar{I}\omega$$

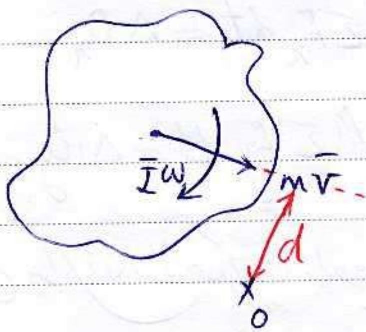
ت:

$\rho_i\omega$ بر ρ_i عمود است و $m_i\rho_i^2 = I_i$

در حالت کلی:

$$\int \sum \bar{M}\,dt = \Delta\bar{H}$$

فرمول محدودیت دارد چون گشتاور گیری حول مرکز جرم است
رفع این محدودیت داریم:



$$\Rightarrow H_o = \pm\bar{I}\omega \pm m\bar{v}d$$

خطر!

در این روش جهت ها بسیار مهم هستند

روش انرژی:
دیدیم که اندازه ای بود اما در این روش باید بردار باشد!

در ادامه آن محدودیت داریم:

$$\int \sum M_B\,dt = \Delta H_B$$

ما باز خودِ نقطه‌ی O محدودیت دارد زیرا برای اینکه بتوانیم از این فرمول استفاده
کنیم ⇐

shoulde:

$$\bar{V}_o = 0 \quad \text{یا} \quad \bar{V}_o \parallel \bar{V}$$

یا اصلاً داشته باشیم:

$\bar{V} = 0$ (مرکز جرم، مرکز دوران هم باشد)

نکته:

در این روش، همانند سینتیک ذرات،

نکته:

سیستمی متشکل از چند عضو داشته باشیم، می‌توانیم، اندازه حرکت خطی یا زاویه‌ای را برای تک تک اعضای سیستم بنویسیم یا برای کل سیستم بنویسیم زیرا:

در نقاطی که اعضای سیستم به هم متصل هستند، اندازه حرکت خطی یا زاویه‌ای، زوج عمل و عکس العمل هستند

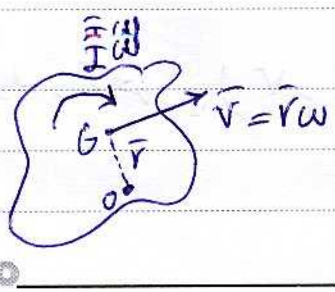
همچنین اگر در نقاط اتصال گشتاور نیز داشته باشیم (مفاصل غیر روان)

⇐ G و H را باز هم می‌توان برای تک تک اعضا نوشت یا برای کل سیستم زیرا:

در اینجا dt یعنی زمان اثرگذاری نیرو مهم است

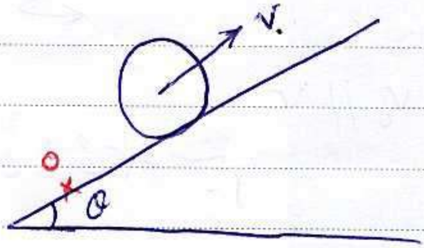
برعکس: در بحث انرژی، جابه‌جایی (کار نیرو!) مهم بود!!

اگر مرکز آنی یا دائمی دوران داشته باشیم:



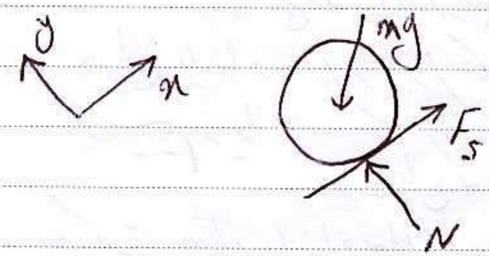
$$\Rightarrow H_o = \bar{I}\omega + m\bar{r}^2\omega \Rightarrow H_o = I_o\,\omega$$

example:



...ب را روی سطح شیب دار
...سرعت اولیه v_0 ، به سمت
...غلت می دهیم

...سرعت دیسک را برحسب
...ی از زمان بیابید (با فرض
...تن غلتش کامل)
...م دیسک m و شعاع آن r است.



$$\Rightarrow (F_s - mg\sin\theta)t = \Delta G$$

$$\left[\Delta G = \int_0^t F_x\,dt\right]$$

...حالت داریم:

در زمان t گوی هنوز در حال بالا رفتن است

" " در حال پایین آمدن است

...ر زمان توقف را t_c بنامیم که با فرض $t > t_c$

$$\rightarrow (F_s - mg\sin\theta)t = -mV - mV_0 = -m(V + V_0)$$

$$\rightarrow (mg\sin\theta - F_s)t = m(V + V_0)$$

...دله و 2 مجهول (F_s ، V) که از اندازه حرکت زاویه‌ای کمک می گیریم

Subject:

Year. Month. Date. ( )

$$\int_0^t \sum M_0 \, dt = \Delta H_0$$

$$\Rightarrow mg \sin\theta \times r \times t = \Delta H_0$$

$\cos\theta \times mg = N \Rightarrow$ گشتاور نشان حول O ، همدیگر را خنثی می کنند

$$\Rightarrow mg \sin\theta \times r \times t = \overbrace{\underbrace{\pm \frac{1}{2} m r^2 \omega}_{\bar{I}\omega} \pm \underbrace{m r \omega \times r}_{m\bar{v}d}}^{H_{o_2}}$$

$$- \left[-\frac{1}{2} m r^2 \omega_0 - m r^2 \omega_0 \right] \qquad \left(\omega_0 = \frac{V_0}{r} \right)$$

$$\rightarrow (g \sin\theta) . t = \frac{3}{2} r\omega + \frac{3}{2} r \omega_0 \Rightarrow$$

$$\omega = \frac{2}{3r} g \sin\theta \times t - \omega_0 \Rightarrow$$

$$\text{if } \omega = 0 \Rightarrow \frac{2}{3r} g \sin\theta . t - \omega_0 = 0 \Rightarrow$$

$$t_c = \frac{3 r \omega_0}{2 g \sin\theta} \Rightarrow t_c = \frac{3 V_0}{2 g \sin\theta}$$

از مقاومت هوا صرف نظر کردیم

در حالت اول:

اگر $\omega < 0 \Leftarrow$ دیسک در حال پایین آمدن است (فرض

بر این بود که دیسک در حال پایین آمدن است)

else : دیسک همچنان در حال بالا رفتن است (خلاف فرض)

$\rightarrow$ t برحسب V یافت شد

Subject:
Year. Month. Date. ( )

New example:

همان مثال قبلی، اما با فرض لغزش

در این حالت، $\bar{v}$ را هم داریم $\Leftarrow$?? $\bar{v}=f(t)$

$$\int_0^t \Sigma M_o\, dt = \Delta H_o \Rightarrow \frac{1}{2} m r^2 \omega^2 + m \bar{v} \times r$$
$$-\left[-\frac{1}{2} m r^2 \omega_0 - m \bar{v}_0 \times r\right] = mg \sin\theta \times r \times t$$

همچنین:

$$\int_0^t \Sigma F_x\, dt = \Delta G_x \Rightarrow$$

$$(\mu_k\, mg \cos\theta - mg \sin\theta)\, t = -mv - mv_0$$

$\Leftarrow$ 2 معادله و 2 مجهول (ω, v)

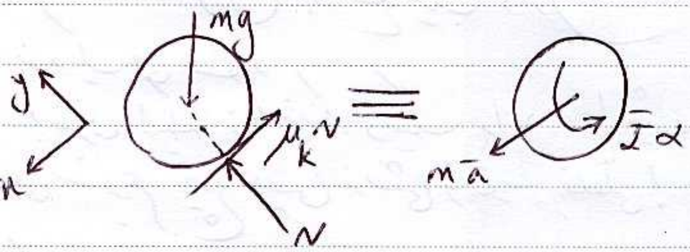
t_c': زمانی است که حرکت جسم به سمت پایین آغاز می‌شود و این حالت در زمانی اتفاق می‌افتد که:

لغزش تبدیل به غلتش بشود

if $t > t_c$ $\Rightarrow$ غلتش خواهیم داشت

New example:

آیا در همان مثال قبلی، در نیمه راه، لغزش به غلتش تبدیل می‌شود؟
(یعنی در ابتدا غلتش توام با لغزش داشته باشیم آیا حرکت تا ابد ادامه پیدا می‌کند؟)



$$\sum F_x = m\bar{a}_x \Rightarrow$$
$$-\mu_k mg\cos\theta + mg\sin\theta = m\bar{a}$$
$$\Rightarrow \bar{a} = g(\sin\theta - \mu_k\cos\theta)$$

$$\sum \bar{M} = \bar{I}\alpha \Rightarrow \mu_k \cdot mg\cos\theta \times r = \tfrac{1}{2} m r^2 \alpha$$

(ابتدا با فرض لغزش، شروع به حل کردن مسأله کردیم)

$$\Rightarrow \quad \alpha = \frac{2\mu_k g\cos\theta}{r}$$

داریم:

$$\bar{V} = \bar{V}_0 + g(\sin\theta - \mu_k \cdot \cos\theta)t \qquad (v = v_0 + at)$$
$$\omega = \omega_0 + \left(\frac{2}{r}\mu_k g\cos\theta\right)t \qquad (\omega = \omega_0 + \alpha t)$$

هر وقت این دو به هم برسند، غلتش آغاز می‌شود

$$\Rightarrow \bar{V}_0 + g(\sin\theta - \mu_k \cos\theta)t_c = r\left(\omega_0 + \left(\frac{2}{r}\mu_k g\cos\theta\right)t_c\right)$$

$$\rightarrow t_c = \frac{V_0 - r\omega_0}{g(3\mu_k \cdot \cos\theta - \sin\theta)}$$

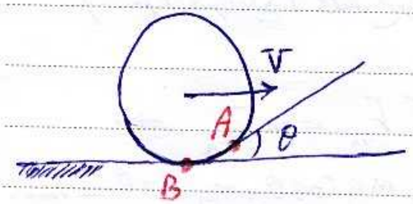
$$\rightarrow \text{if } V_0 > r\omega_0 \Rightarrow 3\mu_k \cdot \cos\theta - \sin\theta > 0 \xrightarrow{\text{باید}} \mu_k > \frac{\tan\theta}{3}$$

که تحت این شرایط لغزش تبدیل به غلتش می‌شود

else: $\mu_k < \frac{\tan\theta}{3}$

example:

دیسکی در حال غلتش با سرعت v
است ناگهان به سطح شیب دار

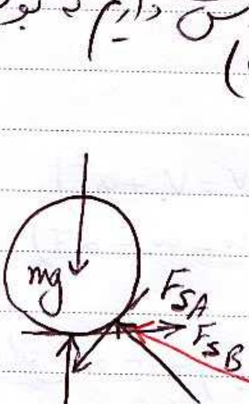


... دیسک می شود
با فرض اینکه زمانی که دیسک وارد سطح شیب دار
می شویم هیچ پرش زنشی (تعجب، قلقلی! نره هوا!!) نداشته باشیم سرعت

... دیسک را پس از ورود به سطح شیب دار بیابید:

قبل از ورود به سطح شیب دار، مرکز آنی دوران نقطه B است اما در لحظه ای که
وارد سطح شیب دار می شود با فرض اینکه نه پرش زنش داریم نه بوکس و باد
کردن (در لحظه $t \to 0$ که بسیار کوتاه است)

$$\int_0^t \Sigma M_A \, dt = \Delta H_A$$



$Q_A = \int_0^t F_A \, dt$

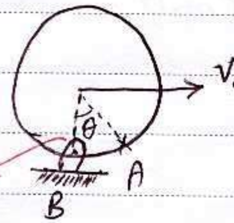
گشتاور mg و N_B حول A گشتاور معمولی است (با گشتاور وزن متقابل
می شوند!!) که زمان نیز بسیار کوتاه است

$$\rightsquigarrow \Delta H_A = 0 \Rightarrow$$

$$H_{A_1} = H_{A_2} \Rightarrow$$

① :

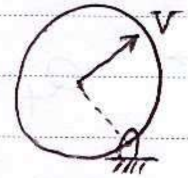
در لحظه صفر



مرکز آنی دوران

② :

در لحظه t



①:

$$H_{A_1} = \frac{1}{2} m r^2 \times \frac{v_0}{r} + m V_0 \times r\cos\theta$$

$$\Longrightarrow$$

②:

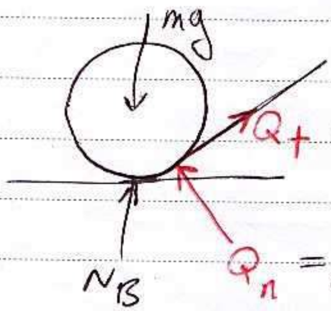
$$H_{A_2} = \frac{3}{2} m r^2 \omega$$

$$\omega = \frac{2}{3r}\left(\frac{1}{2}V_0 + V_0\cos\theta\right) = \frac{2V_0}{3r}\left(\frac{1}{2} + \cos\theta\right)$$

برای اطمینان از درستی مسئله، به سراغ نقطه‌ای می‌رویم که تکلیف اش مشخص است

در $\theta = 0$ داریم: $\omega = \frac{V_0}{r}$ ✓

حال برای یافتن Q داریم:



$$Q_t = \int_0^t \Sigma F_t \, dt$$

$$Q_n = \int \Sigma F_n \, dt$$

$$\int \Sigma F_n \, dt = \Delta G_n \quad , \quad Q_n = G_{n_2} - G_{n_1}$$

$$\Rightarrow Q_n = 0 - (-m V_0 \sin\theta) = m V_0 \sin\theta$$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

ثانویه ↗ اولیه ↗

$$Q_t = \frac{2mV_0}{3}\left(\frac{1}{2}+\cos\theta\right) - mV_0\cos\theta$$

$$\Rightarrow Q_t = \frac{mV_0}{3}\left[1-\cos\theta\right]$$

$$\Rightarrow Q = \sqrt{Q_t^2 + Q_n^2}$$

در طراحی‌ها، Q_{max} مهم است نه Q متوسط !!

$$\frac{Q_t}{Q_n} = \frac{\int_0^t F_t\,dt}{\int_0^t F_n\,dt} \simeq \frac{F_t}{F_n} = \frac{F_s}{N} = \mu_{s_{min}}$$

← نیروی اصطکاک مورد نیاز جهت عدم لغزش را تأمین شود

حداقل ضریب اصطکاکی که باید داشته باشیم تا

این مسأله تا θ های کمتر از 10°، این گونه حل می‌شود زیرا در θ های بزرگ، فرض عدم پس زنش، غلط است!

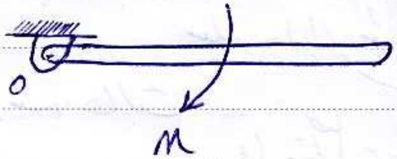
بعد از ظهر

دوشنبه:

تکانه اندازه حرکت:

example)

لینکی داریم که در نقطه O مفصل شده است که طول آن L و جرمش m است

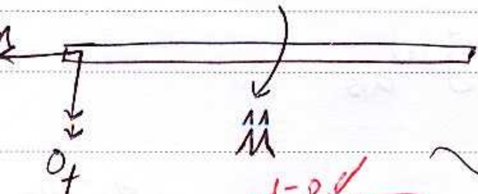


حالت اولیه میله افقی است و همچنین در صفحه افقی قرار داریم. به میله گشتاور ثابت M وارد می‌کنیم که ω لینک را بر حسب تابعی از زمان بیابید:

فرضیات:

مقاومت هوا و گشتاور مقاوم لینک ناچیز است.

داریم:



$$\to \sum M_O\, dt = \Delta H_O$$

$$\to Mt = I_O\,\omega = \frac{1}{3} mL^2\omega$$

گشتاور

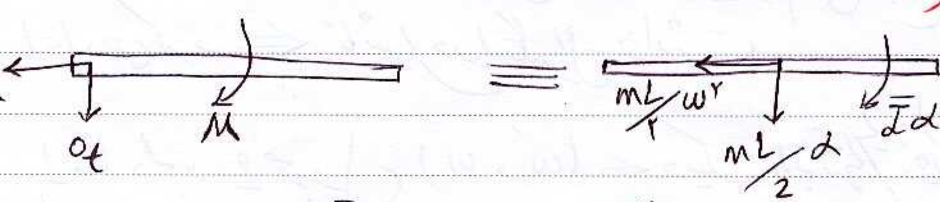
$$\Rightarrow \omega = \frac{3Mt}{mL^2}$$

جرم

$$\int \sum F_t\, dt = \Delta G_t \to \int_0^t O_t\, dt = m\bar{v} = m \times \frac{L}{2} \times \frac{3Mt}{mL^2}$$

$$\to O_t \cdot t = \frac{3Mt}{2L} \to O_t = \frac{3M}{2L}$$

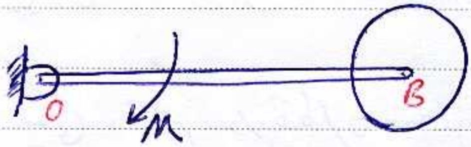
تحلیل از نظر نیرو:



New example)

به میله گشتاور M وارد می‌شود

که اگر دیسک دارای شعاع r و جرم m' باشد و



میله دارای طول L و جرم m باشد

در سه حالت

1) مفصل روان 2) مفصل غیر روان 3) دیسک و لینک جوش شده

ω_{OB} را بیابید (در صفحه افقی هستیم و مقاومت هوا ناچیز است)

حالت 3: در این حالت، لینک و دیسک تبدیل به یک عضو می‌شوند

$$\int \sum M_O \, dt = \Delta H_O \Rightarrow Mt = (I_{\text{میله حول } O} + I_{\text{دیسک حول } O})\,\omega$$

$$Mt = \left[\frac{1}{3} mL^2 + \frac{1}{2} m'r^2 + m'L^2\right] \omega_{OB}$$

حالت 1:

$$\bar{I}\omega + m\bar{v}d$$

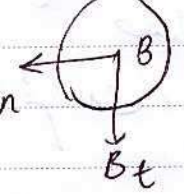
$$\int \sum M_O \, dt = \Delta H_O \Rightarrow$$

$$Mt = \frac{1}{3} mL^2\omega + \frac{1}{2} m'r^2\omega' + m' \times L\omega \times L$$

منظور سرعت زاویه‌ای مطلق دیسک است

اگر مفصل B روان نبود که چون گشتاور مقاوم آن، زوج عمل و عکس‌العمل ایجاد می‌کرد ⇐ تاثیری در انتگرال نداشت

1 معادله و 2 مجهول (ω و ω') ⇐ دیسک را به تنهایی نشان می‌دهیم



$$\int \Sigma \bar{M}\, dt = \Delta H_B \Longrightarrow 0 = \Delta H_B$$

$$\rightarrow H_{B_1} = H_{B_2} \Rightarrow 0 = \frac{1}{2} m' r^2 \omega' \Rightarrow \omega' = 0$$

دیسک فقط انتقال دارد (دوران ندارد)

حالت 2 : اگر گیر مفاصل زیاد باشد (منظور مفصل B است) ⇐ مثل حا

از روش نیرو حداقل M' لازم برای یکپارچه حرکت کردن سیستم را می‌یابیم

با فرض اینکه M' کوچک است و سیستم یکپارچه عمل نمی‌کند داریم:

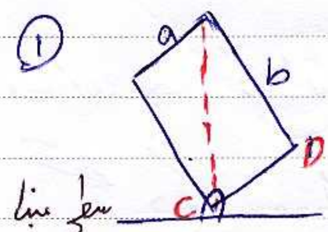
$$Mt = \frac{1}{3} mL^2 \omega + \frac{1}{2} m' r^2 \omega' + m' L^2 \omega$$

داریم:

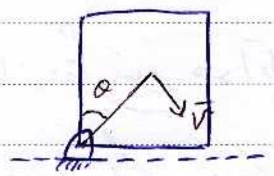
$$\int \Sigma \bar{M}\, dt = \Delta H_0 \rightarrow$$

$$M' t = \frac{1}{2} m' r^2 \omega'$$

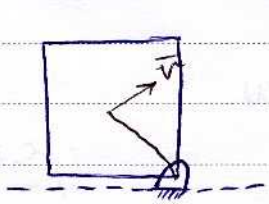
مثال:



جعبه‌ای با ابعاد $a\times b$ داریم، قطر آن به صورت
قائم است.
انحراف جزئی ایجاد می‌کنیم، حول c
شروع به دوران می‌کند
ضریب اصطکاک در c، جهت عدم لغزش به
اندازه‌ی کافی است
داریم:



② لحظه‌ی قبل از برخورد گوشه‌ی D با زمین
(پرش زدن هم نداریم)



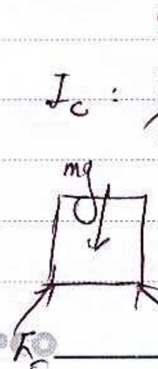
③ لحظه‌ی بعد از برخورد گوشه‌ی D با زمین
← که کله کردن حول نقطه‌ی D با چه ωای آغاز می‌شود؟

حل:
فاصله‌ی زمانی بین ② و ③ خیلی کوتاه است.

بین ① و ② اتلاف انرژی نداریم (کار خارجی نداریم) پس: $E_1=E_2$

$$\Rightarrow mg\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{2} = mg\frac{b}{2} + \frac{1}{2}\left[\frac{1}{3}m(a^2+b^2)\right]\omega_2^2$$

نکته: $I_c: \frac{1}{12}(a^2+b^2)m + m(a^2+b^2)/4 = \frac{1}{3}m(a^2+b^2)$



بین ② و ③ F_D ضربه‌ای است و F_c به صفر میل می‌کند

$F_D \Rightarrow Q=\int_0^t F_D\,dt$

$$\Rightarrow \int_0^t \Sigma M_D \, dt = \Delta H_D$$

از گشتاور mg و N نیز به علت
معمولی بودن آن در مقابل نیروی ضربه ای F_D صرف نظر می کنیم

$$\Delta H_D = 0 \Rightarrow H_{D_2} = H_{D_3}$$

$$-\frac{1}{12} m(a^2+b^2)\omega_2 - \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{2}\omega_2 \times \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \times \frac{b}{2} \times m$$

$$+ \frac{m\sqrt{a^2+b^2}}{2} \times \omega_2 \times \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \times \frac{a}{2} = -\frac{1}{3} m(a^2+b^2)\omega_3$$

$\Leftarrow$ ω_3 یافت می شود!!

$\Leftarrow$ حال می توانیم Q و همچنین $\mu_{s_{min}}$ جهت عدم لغزش در D را یابیم

$$\Rightarrow \int_0^t \Sigma F_x \, dt = \Delta G_x \Rightarrow$$

$$-Q_x = \frac{m\sqrt{a^2+b^2}}{2}\omega_3 \times \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} - \frac{m\sqrt{a^2+b^2}}{2}\omega_2 \times \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

$$\int_0^t \Sigma F_y \, dt = \Delta G_y \Rightarrow$$

$$+Q_y = \frac{m\sqrt{a^2+b^2}}{2} \times \omega_3 \times \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} - \frac{-m\sqrt{a^2+b^2}}{2}\omega_2 \times \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

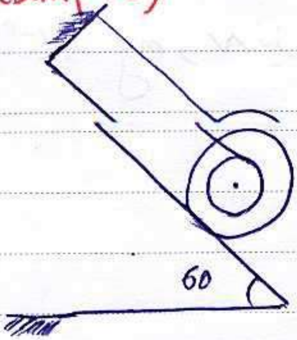
$$\Rightarrow Q = \sqrt{Q_x^2 + Q_y^2}$$

داریم:

$$\frac{Q_x}{Q_y} \simeq \frac{F_x}{F_y} = \frac{F_s}{N} = \mu_s$$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

example)



$m = 5\,kg$ $r_1 = 0.1\,m$

$r_2 = 0.15\,m$

$\bar{k} = 0.11\,m$

$\mu_s = 0.05$, $\mu_d = 0.04$

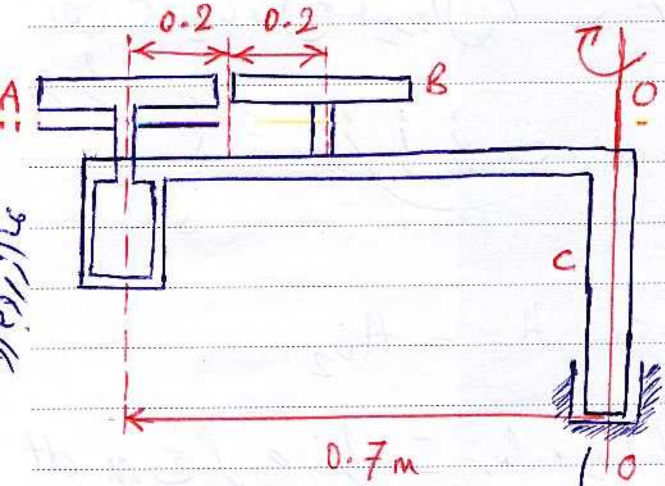
سرعت مرکز دیسک برحسب تابعی از زمان = ?

فرض مسئله:

طناب نسبت به قرقره لغزش ندارد.

Subject:
Year. ۸۸ Month. ۹ Date. ۲۸

ششم



این یاتاقان روان است

$$\bar{m}_A = 18\,kg \qquad \bar{k}_A = 85\,mm \qquad r_A = 0.2\,m$$

$$m_B = 5\,kg \qquad \bar{k}_B = 0.14\,m \qquad r_B = 0.2\,m$$

$m_c = 24\,kg \qquad k_{oo} = 0.45$

شعاع ژیراسیون c حول oo

$$\omega_{1c} = \frac{2\pi \times 38}{60}\ rad/s$$

$$\omega_{A/c} = \frac{2\pi \times 1720}{60}\ rad/s$$

A: شامل چرخ‌دنده، روتور و یک محور است

c: شامل لینک L شکل و استاتور الکتروموتور است

c حول oo می‌چرخد و الکتروموتور خاموش است (A, B نسبت به c دوران ندارند) حال:
کلید الکتروموتور را می‌زنیم. هنگامی که دور الکتروموتور به 1720 دور بر دقیقه برسد ← ω_c را در این حالت بیابید:

(دور الکتروموتور، دوری است که روتور نسبت به استاتور دارد)

Subject:
Year. Month. Date. ( )

اگر در C یاتاقان غیر روان باشد، با زهم برای ما مشکلی ایجاد نمی کند

زیرا، گشتاوری را B به C و C به B وارد می کند که زوج عمل و عکس العمل

هستند

$$\int \sum M_o \, dt = \Delta H_o \Rightarrow H_{o_1} = H_{o_2}$$

$\sum M_o$ را صفر است زیرا، یاتاقان اصلی را روان فرض کردیم و از

تفاوت هوا صرف نظر کردیم !!

نکته: گشتاوری که روتور به استاتور وارد می کند و برعکس، استاتور به روتور وارد می کند، زوج عمل و عکس العمل هستند که دارای چرخش یکسان نیستند

که کار آنها همدیگر را خنثی نمی کند $\Leftarrow E_1 \neq E_2$

حال ادامه مسأله:

$H_{o_1} = {}^{کل}I_{oo} \cdot \omega \leftarrow$ چون سیستم یکپارچه عمل می کند

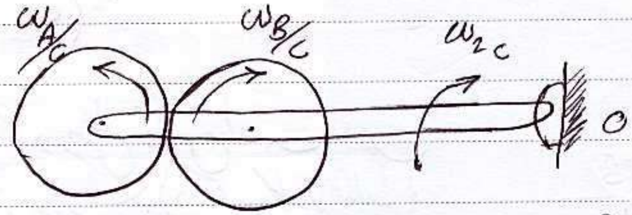
$$\rightarrow H_{o_1} = \pi \big(\underbrace{24 \times 0.45^2}_{I_{c_{oo}}} + \underbrace{5 \times 0.14^2 + 5 \times 0.3^2}_{\bar{I}_{B_{oo}}} + \underbrace{18(0.085^2 + \ldots}_{I_{A_{oo}}}$$

با فرض اینکه جهت ω_c عوض نشود داریم:

$H_o = 24 \times 0.45^2 \, \omega_{\ldots} + \bar{I}\omega + m\bar{v}d$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

تمارین ۸۱ :



$\omega_{A/C} = \omega_{B/C}$ ⇐ چون بین دو دیسک غلتش داریم و شعاع دو دیسک برابر است

$$+\bar{I}\omega = \underbrace{5\times 0.14^2(57\pi+\omega_{2c})+5\times 0.3\,\omega_{2c}\times 0.3}_{H_{O_B}}$$

$$H_{O_A} = \bar{I}\omega + m\bar{v}d$$

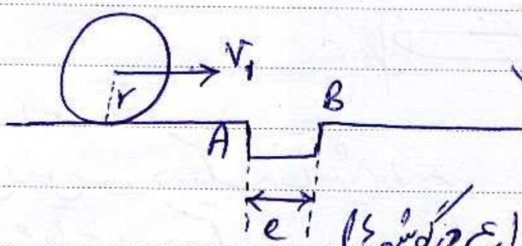
$$H_{O_A} = 18\times 0.085^2(\omega_{2c}-57\pi)+18\times 0.7^2\,\omega_{2c}$$

$$\longrightarrow H_{O_2} = 24\times 0.45^2\,\omega_{2c} + H_{O_A} + H_{O_B}$$

$\longrightarrow$ معادله یک مجهول ⇐ ω_{2c} یافت می‌شود.

4 هندسه شکل تغییر کند (زمان کوتاه نباشد) ←

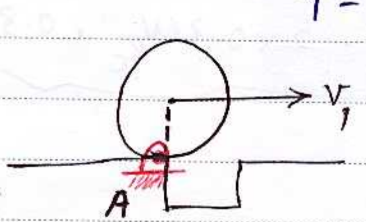
important) (example



دیسک که در حال غلتش است به چاله ای می رسد (دیسک کاملاً صلب)

مساله را تجزیه و تحلیل کنید (لغزش نداریم در گوشه ها) V_4 را بیابید! (پرش هم نداریم)

1:



در وضعیت 1، دیسک حول O می چرخد!

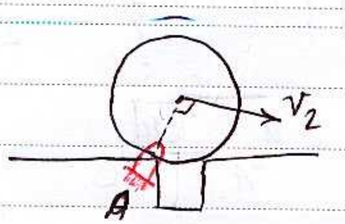
زمان قابل توجه $t_2 - t_1$ و

زمان بسیار کوچک $t_3 - t_2$

زمان قابل توجه $t_4 - t_3$

زمان ها نسبت به هم سنجیده می شوند

2:

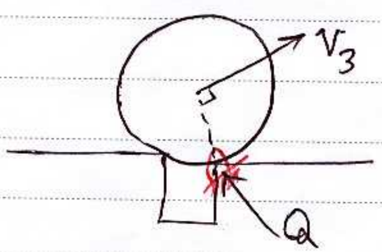


در وضعیت 2، دیسک مماس بر گوشه دوم است (B)

بین ① و ② اتلاف انرژی نداریم

$\Rightarrow E_1 = E_2$ → V_2 یافت می شود

3:

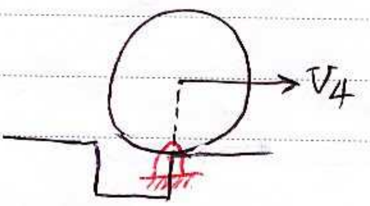


بین ② و ③، چون به مرور زمان N_A، کاهش و N_B افزایش می یابد ⇐ در B ضربه خواهیم داشت

$\Rightarrow \int \sum M_B \, dt = \Delta H_B$

زمان بسیار کوتاه است ← 0

4:



$\Rightarrow H_{O_2} = H_{O_3} \Rightarrow$ V_3 یافت می شود

Subject :

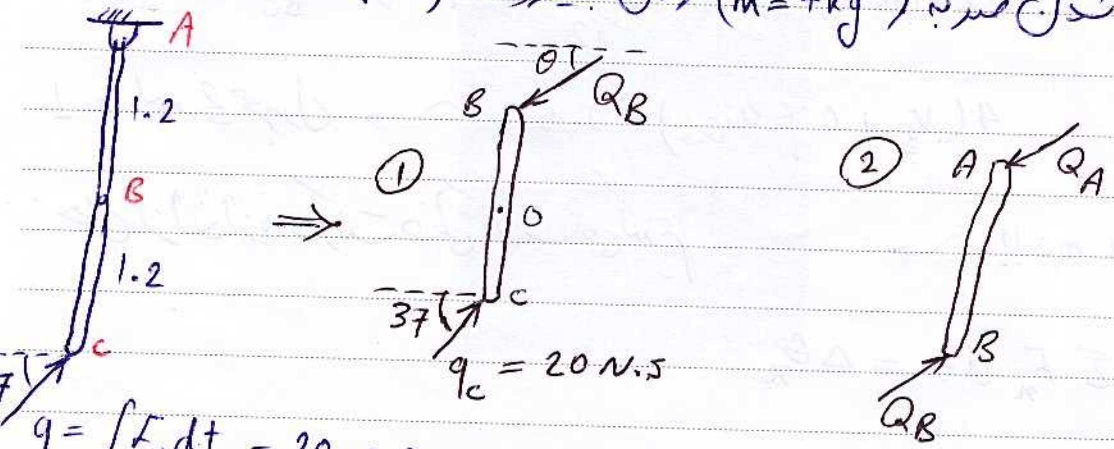
Year . ۸۸ Month . ۹ Date . ۲۹ ( )

[illegible] :

example)

ω هر کدام از لینک ها پس از وارد شدن ضربه ($m = 4kg$ } زمان بسیار کوتاه است (t-0)

حل :



$$q = \int F.dt = 20 \, N.s$$

حال داریم :

① $\int_0^t \Sigma M_B \, dt = \Delta H_B$

* وقتی تکانه را به c وارد می‌کنیم یک α نجومی در لینک ایجاد می‌شود، چون زمان بسیار کوتاه است که ω نجومی نیست ⇐ این ω نمی‌تواند θ را تغییر دهد ⇐ هندسه شکل تغییر نمی‌کند (طی زمان t-0)

(جابجایی میله متأثر از ω است نه α)

پس :

با قرار دادن دستگاه بر روی B داریم :

$\bar{V}_{Bc} = V_B + \omega_{Bc} \times r_{OB}$ ⇒

چون میله نچرخیده است که V_B در راستای x است

همچنین $\omega \times r$ نیز در راستای x است که ⇐ $\bar{V}$ در راستای x است.

Subject:
Year. Month. Date. ( )

$\Rightarrow \int_0^t \Sigma M_B \, dt = \Delta H_B$ ✓ برقرار است !!

$+20\cos 37 \times 1.2 = \frac{1}{12} \times 4 \times (1.2)^2 \omega_{BC} +$

$4(V_B + 0.6\,\omega_{BC}) \times 0.6$ ⟶ 1 معادله و 2 مجهول

help me!! ⟶ حال از اندازه حرکت خطی کمک می گیریم

$\int \Sigma F_x \, dt = \Delta G_x \Rightarrow$

$20\cos 37 - Q_{B_x} = 4(V_B + 0.6\,\omega_{BC})$

②: $\int_0^t \Sigma M_A \, dt = \Delta H_A \Rightarrow$

$Q_{B_x} \times 1.2 = \frac{1}{3} \times 4 \times 1.2^2 \times \frac{V_B}{1.2}$

⟸ 3 معادله و 3 مجهول $(\omega_{BC}, Q_{B_x}, V_B)$

همچنین با خرج کردن معادله بعد $(\int_0^t \Sigma F_x \, dt = \Delta G_x)$ می توانیم Q_{A_x}

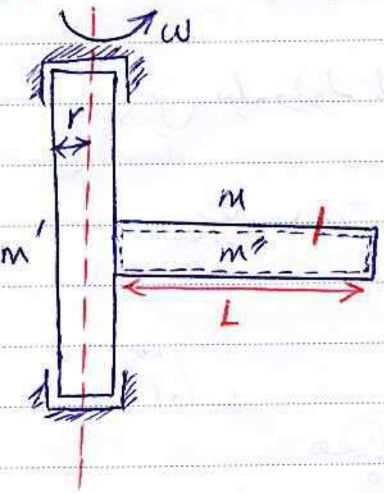
را نیز بدست آوریم که اگر این کار را انجام دهیم، خواهیم دید که:

$Q_{C_x} > Q_{B_x} > Q_{A_x}$

همچنین:

① $\Sigma F_y \, dt = \Delta G_y \longrightarrow (\Delta G_y = 0)\ \Sigma F_y \, dt = 0$

New example)



پین مانع حرکت لوله با جرم m'' داخل لوله m می باشد!

به یکباره پین می شکند، حال اگر میله به اندازه $L/2$ از داخل لوله بیرون بیاید
⇐ سرعت نسبی که میله نسبت به لوله دارد و همچنین ω میله را بیابید.

فرضیات مسئله: یاتاقان ها روان هستند و مقاومت هوا ناچیز است

Solve:

$$\int \Sigma M_o \, dt = \Delta H_o$$

$$\Delta H_o = 0 \Leftarrow \int \Sigma M_o \, dt = 0$$ ⇐ با توجه به فرضیات مسئله

$$\rightarrow H_{o_1} = H_{o_2} \Rightarrow$$ (1: حالتی است که پین می شکند)

$$\rightarrow \frac{1}{2} m' r^2 \omega_0 + \left(\frac{1}{12} m L^2 + m\left(\frac{L}{2}+r\right)^2\right)\omega_0 +$$

$$\left(\frac{1}{12} m'' L^2 + m''\left(\frac{L}{2}+r\right)^2\right)\omega_0 = H_{o_1}$$

$$H_{o_2} = \frac{1}{2} m' r^2 \omega + \left(\frac{1}{12} m L^2 + m\left(\frac{L}{2}+r\right)^2\right)\omega +$$

$$\frac{1}{12} m'' L^2 \omega + \underbrace{m''(L+r)\omega \times (L+r)}_{m'' \bar{v} d}$$

$$\vec{v} = \vec{v}_{rel} + \overrightarrow{(L+r)\omega}$$

$\Rightarrow H_{O_1} = H_{O_2} \Rightarrow$ ω بدست می آید

چون بین میله و لوله، اصطکاک وجود ندارد $\Leftarrow E_1 = E_2$

$\Leftarrow$ v_{rel} بدست می آید

if: بین میله و لوله، اصطکاک وجود داشته باشد:

$\Rightarrow E_1 \neq E_2$

اما:

همچنان: $H_{O_1} = H_{O_2}$ زیرا

نیروی اصطکاک بین لوله و میله زوج عمل و عکس العمل هستند $\Leftarrow$ گشتاورشان حول O همدیگر را خنثی می کنند

حال برای محاسبه v_{rel} داریم:

$$E_1 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} m' r^2\right)\omega_1^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{12} m L^2 + m\left(r + \frac{L}{2}\right)^2\right)\omega_1^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{12} m'' L^2 + m''\left(r + \frac{L}{2}\right)^2\right)\omega_1^2$$

$$E_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} m' r^2\right)\omega^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{12} m L^2 + m\left(r + \frac{L}{2}\right)^2\right)\omega^2 + \underbrace{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{12} m'' L^2\right)\omega^2}_{\frac{1}{2}\bar{I}\omega^2} + \underbrace{\frac{1}{2} m''\left(v_{rel}^2 + ((L+r)\omega)^2\right)}_{\frac{1}{2} m\bar{v}^2 ,\quad \bar{v}^2 = v_{rel}^2 + ((L+r)\omega)^2}$$

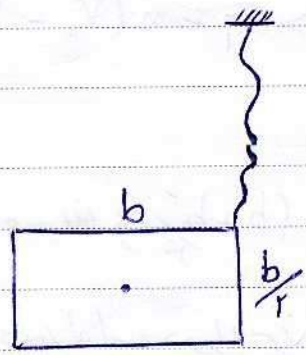
$\rightsquigarrow E_1 = E_2 \Rightarrow$ v_{rel} یافت می شود

نکته: اگر یاتاقان ها غیر روان باشند اما گشتاور مقاوم ثابتی داشته باشد

Subject:
Year. ۸۸ Month. ۹ Date. ۳۰

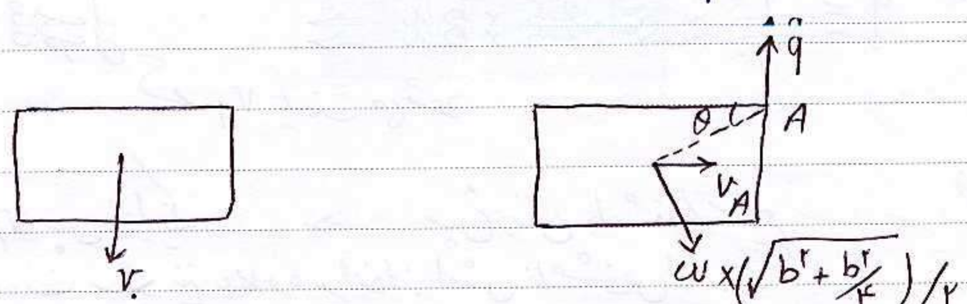
دوشنبه ۷ صبح

مثال:



جرم جعبه m است و در ابتدا
طناب شل است

سرعت مرکز جعبه پس از اینکه طناب کاملاً
سفت شد؟
(پیش زنش هم نداریم)

① 

$$\bar{V} = \bar{V}_A + \bar{\omega} \times \bar{r}$$

چون پس زنش نداریم ← سرعت نقطه A عمود بر طناب است چون جعبه
پس از سفت شدن طناب با فرض عدم پس زنش، حول نقطه A می‌چرخد

حال داریم:

$$\int_0^t \sum \cancel{F_x}\, dt = \Delta G_x \Rightarrow \left(\sin\theta = \frac{b}{2\sqrt{b^2+\frac{b^2}{4}}} \right)$$

$$0 = m \left(V_A + \omega b \times \frac{\sqrt{1.25}}{2} \times \frac{1}{2\sqrt{1.25}} \right) \Rightarrow V_A = \frac{-\omega b}{4}$$

حال 2 مجهول داریم و 1 معادله!!

$$\int^t \sum F_y\, dt = \Delta G_y$$

نیروی وزن در مقابل q، معمولی است

Subject:
Year. Month. Date. ( )

$$\Rightarrow q = m\left(-\frac{\omega b\sqrt{1.25}}{2} \times \frac{1}{\sqrt{1.25}} + V_0\right) \Rightarrow q = m\left(V_0 - \frac{\omega b}{2}\right)$$

$$\int \Sigma \bar{M}\, dt = \Delta \bar{H} \Rightarrow q \times \frac{b}{2} = \frac{1}{12} m \left(b^2 + \frac{b^2}{4}\right)\omega - 0$$

در لحظه اول، دوران نداریم (فقط انتقال داریم) $\Leftarrow$ ω صفر است

$$\Rightarrow q = \frac{1}{7} m \times 1.25 \times b\omega \Rightarrow$$

3 معادله و 3 مجهول $\leftarrow$ V_A یافت می‌شود

iL: جهت V_A پس از اینکه طناب سفت شد نیز علاوه بر اندازه‌اش نامشخص است $\Rightarrow$ پیش‌ زنش داشته باشیم

یک مجهول دیگر به معادلات ما اضافه خواهد شد $\Leftarrow$ 3 معادله و 4 مجهول

در ادامه حل این مسأله داریم:

$$\ldots \Rightarrow \omega = \frac{V_0}{0.7b} \quad , \quad V_A = -0.35 V_0$$

$$\bar{V} = \left(-0.35V_0 + \frac{V_0}{4\times 0.7}\right)i - \frac{V_0}{1.4} j = \frac{-V_0}{1.4} j$$

$$\Rightarrow E_1 = \frac{1}{2} m V_0^2 \quad , \quad E_2 = \frac{1}{2} m \bar{V}^2 + \frac{1}{2} \bar{I} \omega$$

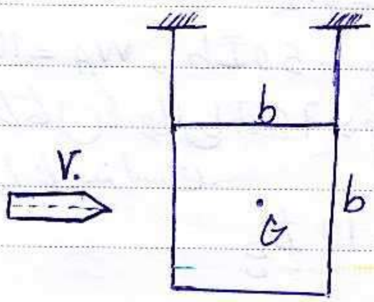
$$\rightarrow E_2 = \frac{1}{2} m \frac{V_0^2}{1.96} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{12} m \left(b^2 + \frac{b^2}{4}\right)\right) \frac{V_0^2}{b^2 \times 0.49}$$

$$\rightarrow E_2 = 0.36 m V_0^2 \Rightarrow E_1 \neq E_2$$

example)

good!!

گلوله‌ای با جرم m و با سرعت اولیه V_0 به جعبه‌ای با ابعاد $b \times b$ و جرم M برخورد می‌کند

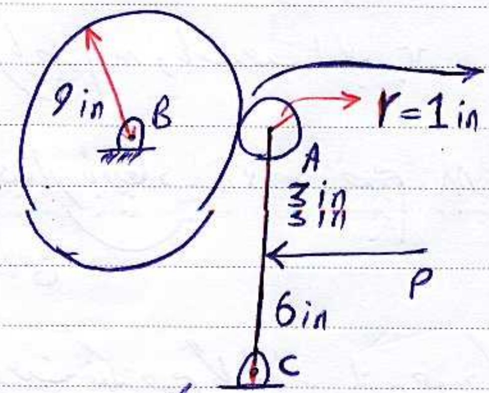


که سرعت مرکز جرم گلوله را پس از برخورد گلوله بیابید:

زمان برخورد گلوله با جعبه بسیار کوتاه است ⇐ هندسه شکل تغییر نمی‌کند

Subject:
Year. Month. Date. ( )

~ New example ~



$\mu_k = 0.2$

$W_B = 50\,Lb \,,\; W_A = 10\,\ldots$

یاتاقان‌ها روان هستند و مقاومت هوا ناچیز است.

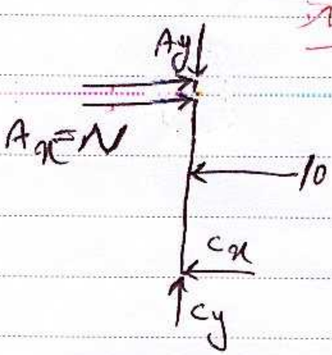
$P = 10\,Lb$

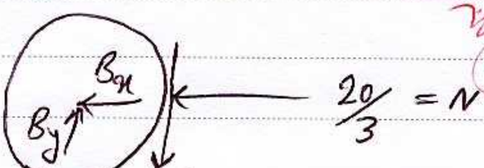
(الکتروموتور به A متصل است) ثابت است $\omega_A = \dfrac{1200 \times 2\pi}{60} = 40\pi \ rad/s$

در ابتدا 2 دیسک باهم تماس ندارند ⇐ با اعمال نیروی P، دو دیسک را به هم تماس می‌دهیم ⇐ سازه را تجزیه و تحلیل کنید!! (هر چیزی را که می‌توانید بدست بیاورید)

در ابتدا:

لغزش داریم و سپس با افزایش ω_B ⇐ لغزش به غلتش تبدیل می‌شود و دو دیسک با سرعت ثابت نسبت به هم خواهند چرخید؛





$F_s = 0.2 \times \frac{20}{3}$

$N \times 9 = 10 \times 6 \Rightarrow N = \frac{20}{3} \Leftarrow \Sigma M_c = 10 \times 6$

⇐ پس از 10 s، سرعت زاویه‌ای دیسک بزرگ را بیابید:

Subject:
Year. Month. Date. ( )

ابتدا زمان تبدیل لغزش به غلتش را می‌یابیم ⇐

if: $t_c < 10$ ⟹ w دیسک بزرگ، w ای است که غلتش داریم

else: ⟶ باید محاسبه کنیم!! (hard!)

$$\Rightarrow \int_0^t \sum M_B \, dt = \Delta H_B \Rightarrow$$

$$\left(\tfrac{4}{3} \times \tfrac{9}{12}\right) t = \tfrac{1}{2} \times \frac{50}{32.2} \times \left(\frac{9}{12}\right)^2 \omega_2 \qquad (1)$$

وقتی لغزش تبدیل به غلتش می‌شود ⇐ w تغییر نخواهد کرد ⇐ f_s باید صفر شود زیرا شتاب زاویه‌ای مان صفر خواهد شد!

البته اگر حالت ایده‌آل را در نظر نگیریم (یا تمام ۴ روان و تفاوت هوا ناچیز!)

⇐ حتی اگر لغزش به غلتش تبدیل شود باز هم f_s خواهیم داشت
یعنی به طور کلی:
f_s مرتبط با گیر سیستم است (پس از لغزش)
f_s در غلتش می‌تواند بین 0 و $f_{s_{max}}$ تغییر کند. ok!!

در لحظه‌ای که غلتش آغاز خواهد شد ⇐ $\omega_1 = \omega_2$

$$\Rightarrow r_1 \omega_1 = r_2 \omega_2 \Rightarrow \omega_2 = \frac{1200 \times 2\pi}{60 \times 9}$$

$$\rightarrow \left(\tfrac{4}{3} \times \tfrac{9}{12}\right) t_c = \tfrac{1}{2} \times \frac{50}{32.2} \times \left(\tfrac{9}{12}\right)^2 \times \frac{1200 \times 2\pi}{60 \times 90}$$

$1200 \times 2\pi$

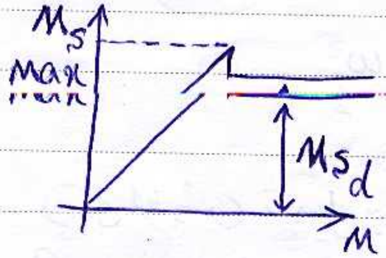
Subject:
Year. Month. Date. ( )

if $t < t_c \Rightarrow$ زمان را مستقیماً در معادله ۱ گذاشته و ω را محاسبه می کنیم

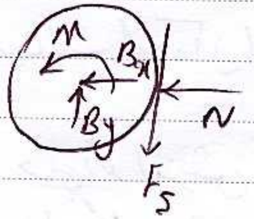
good example)

حال در ادامه همان مثال، اگر مفصل B غیر روان باشد $\Leftarrow$ مسأله را تحلیل کنید!

نمودار گشتاور مقاوم مفصل B



$$\Sigma M_B = M \Rightarrow F_s \cdot r = M$$



$$M = \frac{4}{3} \times \frac{9}{12} = 1 \ Lb.Ft$$

if $M > M_s \Rightarrow$ دیسک بزرگ خواهد چرخید
else,

دیسک بزرگ نخواهد چرخید

$\Leftarrow$ با در نظر گرفتن،

$M_{s_d} = 0.7$, $M_{s_{max}} = 0.8$ جلو می رویم!!

$$\int_0^t \Sigma M_B \, dt = \Delta H_B \Rightarrow$$

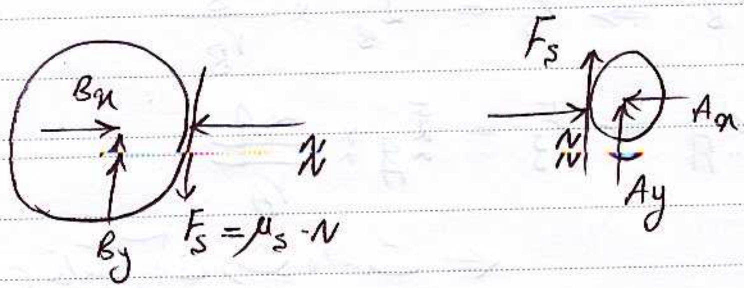
$$\left(\frac{4}{3} \times \frac{9}{12} - 0.7\right) t = \frac{1}{2}\left(\frac{50}{32.2}\right)\left(\frac{3}{4}\right)^2 \omega_2$$

WOW example) $\Rightarrow$ اگر $\mu_s \to 0$ $\Leftarrow$ مسأله گولاخ می شود!!

$2 | \frac{\mu}{\mu_s}$

حال اگر در همان مثال اول، اگر ω_A ثابت نباشد (الکتروموتور به A متصل نباشد) که با تجزیه و تحلیل مسأله، هرچیزی را که می توانید (تا پتانسیل اش را داریم!!) بیابید:

ω_A ثابت نیست $\Leftarrow$ ω_A قبل از برخورد دو دیسک با هم، همان ω_A ای است که در مثال به ما داده اند



حال:

$$\sum M_C = 0 \Rightarrow N = \frac{20}{3}$$

$$\int_0^t \sum M_A \, dt = \Delta H_A \Rightarrow$$

$$\left(\frac{4}{3} \times \frac{1}{12}\right) t = \frac{1}{2}\left(\frac{10}{32.2}\right)\left(\frac{1}{12}\right)^2 \omega_A + \frac{1}{2}\left(\frac{10}{32.2}\right)\left(\frac{1}{12}\right)^2 \times 40\pi$$

همچنین:

$$\int_0^t \sum M_B \, dt = \Delta H_B \rightarrow \left(\frac{4}{3} \times \frac{1}{12}\right) t = \frac{1}{12}\left(\frac{50}{32.2}\right)\left(\frac{3}{4}\right)^2 \omega_B$$

حال اگر بخواهیم t_c را بیابیم داریم:

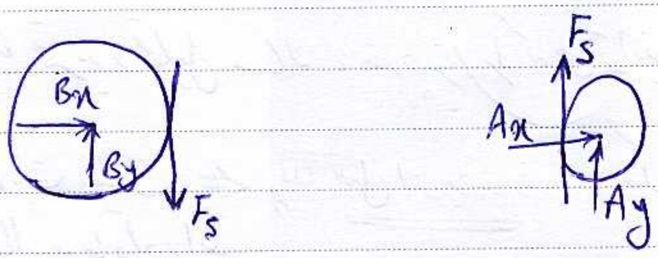
$$1 \times \omega_A = 9 \times \omega_B$$

t_c پیدا می شود!!

question)

چرا وقتی غلتش آغاز می‌شود، $F_s = 0$

زیرا:



$$F_s \times r_B = \bar{I}_B \alpha_B \Rightarrow F_s = \bar{I}_B \times \frac{\alpha_B}{r_B}$$

$$F_s \times r_A = \bar{I}_A \alpha_A \Rightarrow F_s = \bar{I}_A \times \frac{\alpha_A}{r_A}$$

چون غلتش آغاز شده است ⇐ $r_A \alpha_A = r_B \alpha_B$

$$\rightarrow \bar{I}_B \frac{r_A \alpha_A}{r_B^2} = \bar{I}_A \frac{\alpha_A}{r_A} \Rightarrow$$

$$\frac{\bar{I}_B}{\bar{I}_A} = \frac{r_B^2}{r_A^2} \Rightarrow \frac{\frac{1}{2} m_B r_B^2}{\frac{1}{2} m_A r_A^2} \Rightarrow m_B = m_A$$

لزومی ندارد که $m_B = m_A$ ⇐

F_s باید صفر باشد

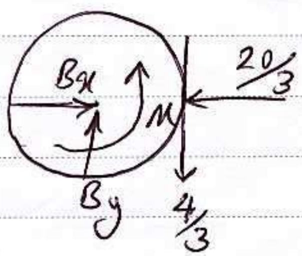
تذکر: در مهندسی، بررسی نقطه یا لحظه یا شرایط خاص، ملاکی برای حل مسأله نیست

Subject:
Year. Month. Date. ( )

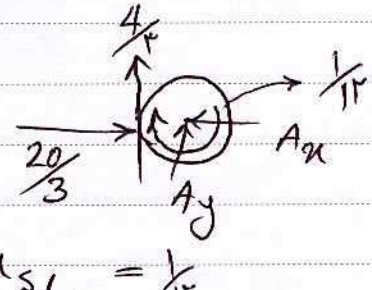
top example)

دوباره درهمان مثال ! اگر در مفاصل A و B گشتاور مقاوم وجود داشته باشد (غیر روان باشند) ← زمان توقف سیستم را بیابید (آیا ۲ دیسک باهم متوقف می شوند؟)

B:



A:



$M_{sd_A} = \frac{1}{12}$

Solve:

(B): $\int_0^t \Sigma M_B \, dt = \Delta H_B \Rightarrow$

$$\left(\frac{4}{3} \times \frac{9}{12} - 0.7\right) t = \frac{1}{2}\left(\frac{50}{32.2}\right)\left(\frac{9}{12}\right)^2 \omega_B$$

(A): $\int_0^t \Sigma M_A \, dt = \Delta H_A \Rightarrow$

$$\left(\frac{4}{3} \times \frac{1}{12} + \frac{1}{12}\right) t = -\frac{1}{2} \times \left(\frac{10}{32.2}\right)\left(\frac{1}{12}\right)^2 \omega_A +$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{10}{32.2}\right)\left(\frac{1}{12}\right)^2 \times 40\pi$$

با فرض ، تبدیل لغزش به غلتش ←

$1 \times \omega_A = 9\,\omega_B$

با هم متوقف خواهند شد!

else:

حال این زمان توقف را چگونه بیابیم؟؟

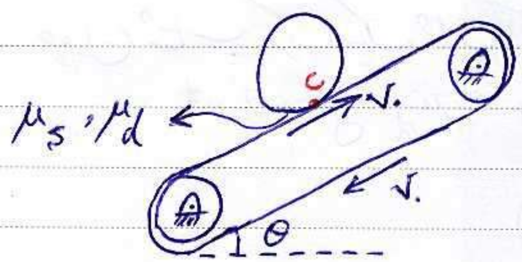
Subject:
Year. ۸۸ Month. ۹ Date. ۳۰

13-16 بعد از ظهر

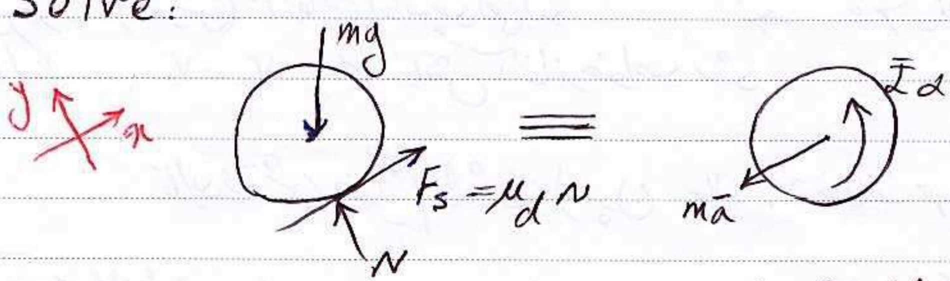
دوشنبه:

مثال:

دیسکی به جرم و شعاع: m و r
بر روی تسمه نقاله ای قرار گرفته است
که تسمه با سرعت ثابت می‌چرخد
← بررسی حرکت دیسک :



solve:



قطعاً در ابتدا لغزش داریم چون در ابتدا سرعت دیسک صفر است اما سرعت تسمه v_0 است اما از لحظه ای که سرعت دیسک برابر $\bar{v}$ شود ← غلتش خواهیم داشت

با فرض لغزش:

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow N = mg\cos\theta$$

$$\Sigma F_x = m\bar{a}_x \Rightarrow \mu_d \times mg\cos\theta - mg\sin\theta = -m\bar{a}$$

$$\Rightarrow \bar{a} = g(\sin\theta - \mu_d \cos\theta)$$

$$\Sigma \bar{M} = \bar{I}\alpha \rightarrow \mu_d\, mg\cos\theta \times r = \frac{1}{2} m r^2 \alpha$$

$$\Rightarrow \alpha = (2\mu_d\, g\cos\theta)/r$$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

$V_c = \bar{V} + \omega \times r$

با فرض $\sin\theta > \mu_d \cos\theta$:

$V_c = -\bar{V} + r\omega$

چون شتاب مرکز دیسک ثابت است ($\bar{a} = cte$ ، $\alpha = cte$) $\Leftarrow$ $\bar{V} = \bar{a} t \;,\; \omega = \alpha t$

$V_c = -g(\sin\theta - \mu_d \cos\theta)t + 2\mu_d\, g\cos\theta \,.\, t$

$\rightsquigarrow V_c = g t (3\mu_d \cos\theta - \sin\theta)$

if: $V_c > 0 \Rightarrow$ این حرکت (لغزش) تا زمانی ادامه پیدا می‌کند
تا اینکه $V_c = V_0 \Leftarrow$ غلتش آغاز خواهد شد

else:

تا ابد لغزش خواهیم داشت (چون V_c و V_0 خلاف جهت هم هستند)

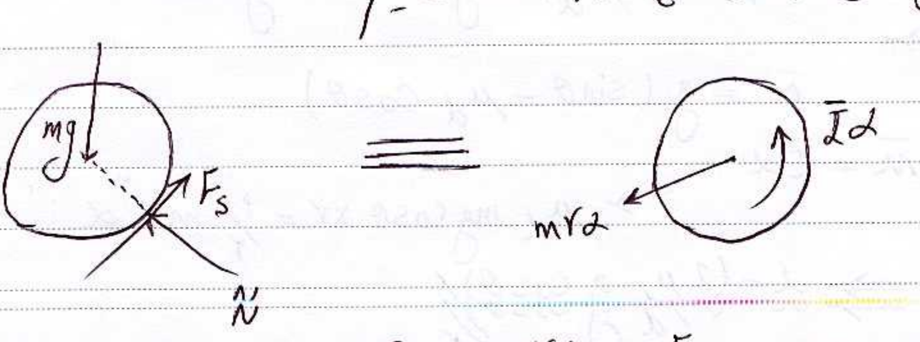
$\Leftarrow$ با افزایش زمان V_c همان طور افزایش خواهد یافت (غلتش نداریم)

حال در حالت ۱ ، زمانی که لغزش به غلتش تبدیل می‌شود (ما می‌خواهیم این گونه بشود)

$V_c = V_0 \rightsquigarrow \quad t_c = \dfrac{V_0}{g(3\mu_d \cos\theta - \sin\theta)}$

$\Rightarrow 3\mu_d \cos\theta > \sin\theta$

حال زمان بعد از t_c را بررسی می‌کنیم.



$\sum F = m\bar{a} \Rightarrow F_s - mg\sin\theta = -mr\alpha \Rightarrow F_s = -mr\alpha + mg\sin\theta$

3: لحظه‌ای که غلتش داریم

$$\sum \bar{M} = \bar{I}\alpha \Rightarrow F_s \cdot r = \frac{1}{2} m r^2 \alpha \Rightarrow F_s = \frac{1}{2} m r \alpha$$

$$\rightarrow \frac{1}{2} r\alpha = -r\alpha + g\sin\theta \Rightarrow \frac{3}{2} r\alpha = g\sin\theta \Rightarrow \alpha = \frac{2}{3r} g \sin\theta$$

$$\rightarrow F_s = \frac{1}{2} m \times \frac{2}{3} g \sin\theta \Rightarrow F_s = \frac{mg}{3} \sin\theta$$

حال سرعت مرکز دیسک را در لحظه ابتدایی غلتش (لحظه آخر لغزش) را می‌یابیم

$$\bar{v} = r\omega - v_c = r\omega - v_0 \ , \quad \omega = \alpha t_c \ , \ \alpha = \frac{2\mu_d g \cos\theta}{r}$$

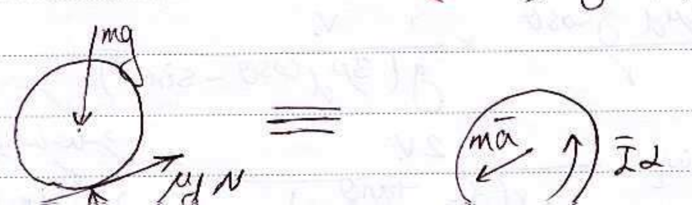
$$\rightarrow \bar{v}_2 = v_0 \left(-1 + \frac{2\mu_d \cos\theta}{3\mu_d \cos\theta - \sin\theta}\right)$$

حال $\bar{v}$ را در موقعیت 3 می‌یابیم:

$$\bar{v}_3 = v_0 + r\omega \ , \quad \omega = \omega_2 + \alpha t \Rightarrow \bar{v}_3 = v_0 + (\omega_2 + \alpha t) r$$

نیروی اصطکاک بین 1-2 و 2-3 باهم کاملاً متفاوت است.

۵۲ حاج موسی مثال را دوباره حل کرد: ⇐ 112/صفحه ۸۸ نو



$\Rightarrow N = mg\cos\theta$,

$\sum F_x = m\bar{a}_x \Rightarrow \mu_d \cdot mg\cos\theta - mg\sin\theta = -m\bar{a}$

$\rightarrow \bar{a} = g(\sin\theta - \mu_d \cos\theta)$ بافرض: $\sin\theta > \mu_d \cos\theta$

$\sum \bar{M} = I\alpha \Rightarrow \mu_d \cdot mg\cos\theta \times r = \frac{1}{2} m r^2 \alpha \Rightarrow$

$\alpha = \dfrac{2\mu_d \cdot g\cos\theta}{r}$

حال در پایان لغزش:

$V_c = \bar{V} + \omega \times r \Rightarrow V_c = g(\sin\theta - \mu_d \cos\theta)t + (2\mu_d\, g\cos\theta)t$

$V_c = at + V_0 \Rightarrow V_c = gt(-\sin\theta + 3\mu_d \cos\theta)$

بافرض: $3\mu_d \cos\theta > \sin\theta$

if $V_c = V_0 \rightarrow$ غلتش آغاز می‌شود

else: هیچ‌گاه غلتش آغاز نخواهد شد!

$\Rightarrow V_0 = V_c \Rightarrow \underset{\text{criticle}}{t_c} = \dfrac{V_0}{g(3\mu_d \cos\theta - \sin\theta)}$

① لغزش داریم ② غلتش آغاز می‌شود ③ غلتش داریم

$\Rightarrow \omega_2 = \alpha t_c = \dfrac{2\mu_d\, g\cos\theta}{r} \times \dfrac{V_0}{g(3\mu_d \cos\theta - \sin\theta)}$

$(\omega_2 = \alpha t + \omega_1) \Rightarrow \omega_2 = \dfrac{2V_0}{(3 - \tan\theta \ldots}$ ↑ چون که پادساعتگرد

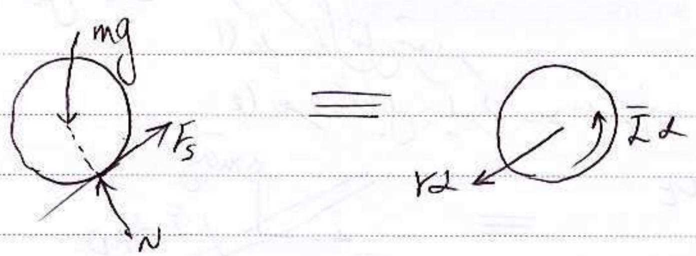
$\bar{v}_2 = \bar{a}t + \cancel{\bar{v}_1}^{\,0} \rightarrow \bar{v}_2 = g(\sin\theta - \mu_d\cos\theta)\dfrac{v_0}{g(3\mu_d\cos\theta - \sin\theta)}$

$\rightarrow \bar{v}_2 = v_0 \dfrac{\sin\theta - \mu_d\cos\theta}{3\mu_d\cos\theta - \sin\theta} \Rightarrow \bar{v}_2 = v_0 \dfrac{\tan\theta - \mu_d}{3\mu_d - \tan\theta}$

چون $\bar{a}$ به سمت پایین بدست آمد ←

← $\bar{v}_2$ هم به سمت پایین است.

حال وضعیت 3



$\Sigma F_x = m\bar{a}_x \Rightarrow F_s - mg\sin\theta = -mr\alpha$

$\Sigma \bar{M} = \bar{I}\alpha \Rightarrow F_s \, . \, r = \frac{1}{2} m r^2 \alpha$

$\Rightarrow$

$\frac{1}{2} m r\alpha - mg\sin\theta = -mr\alpha \Rightarrow$

$\frac{3}{2} r\alpha = g\sin\theta \Rightarrow \alpha = \frac{2}{3r} g\sin\theta$

$\Rightarrow$

$\omega_3 = \omega_0 + \alpha t \Rightarrow \omega_3 = \dfrac{2v_0}{r\left(3 - \frac{\tan\theta}{\mu_d}\right)} + \frac{2}{3r} g\sin\theta \, . \, t$

$\Rightarrow \bar{v}_3 = v_0 - r\omega_3 \rightarrow \bar{v}_3 = v_0 - \left(\dfrac{2v_0}{3 - \frac{\tan\theta}{\mu_d}}\right) - \frac{2}{3} g\sin\theta \times t$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

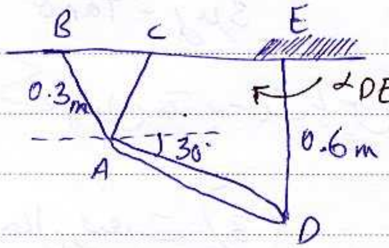
example)

میله توسط 3 کابل مهار شده است، طول میله 1.2m و m=12kg

⇐ یکی از 3 کابل را به دلخواه پاره می‌کنیم

وضعیت حرکت پس از پاره شدن یکی از کابل‌ها

(بحث پاره شدن دو کابل دیگر منتفی است)

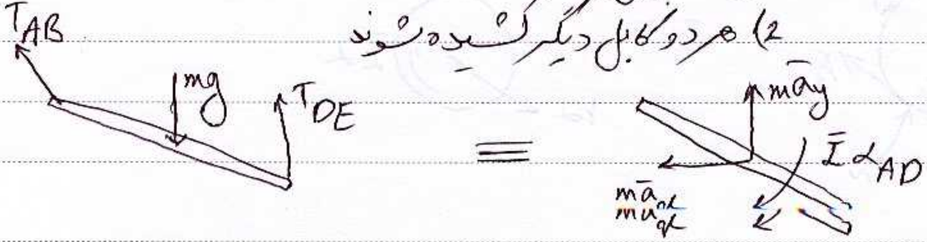


کابل Ac را پاره می‌کنیم:

2 فرض محتمل است:

1) یک کابل شل شود

2) هر دو کابل دیگر کشیده شوند



⇐ 3 معادله و 5 مجهول

$$\bar{a} = a_{A_t} + \dot{\omega} \times r \Rightarrow$$

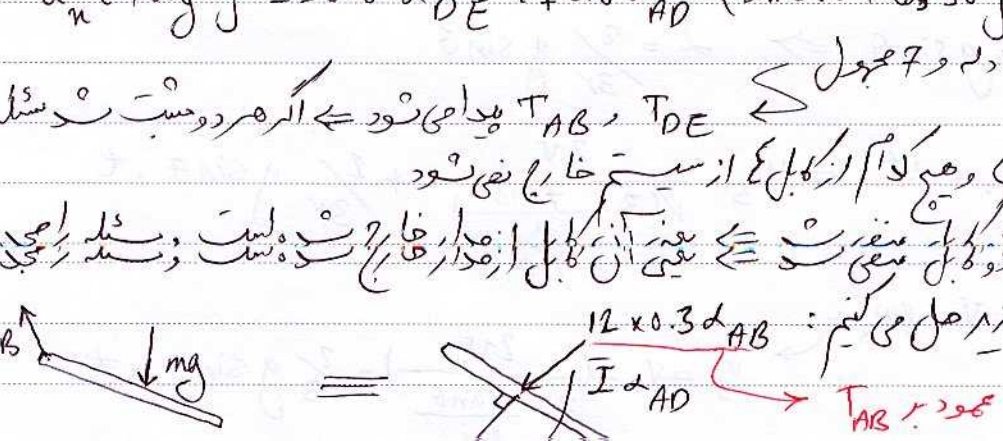
$$\bar{a} = 0.3\,\alpha_{AB}(-\cos 30\, i - \sin 30\, j) + 0.6\,\alpha_{AD}(-\sin 30\, i - \cos 30\, j)$$

$$\bar{a}_x\, i + \bar{a}_y\, j = -0.6\,\alpha_{DE}\, i + 0.6\,\alpha_{AD}(\sin 30\, i + \cos 30\, j)$$

⇐ 7 معادله و 7 مجهول

T_{DE} ، T_{AB} پیدا می‌شود ⇐ اگر هر دو مثبت شد مسئله تمام است و هیچ کدام از کابل‌ها از سیستم خارج نمی‌شود

اما اگر T یکی از دو کابل منفی شد ⇐ یعنی آن کابل از مدار خارج شده است و مسئله را مجددا به صورت زیر حل می‌کنیم:



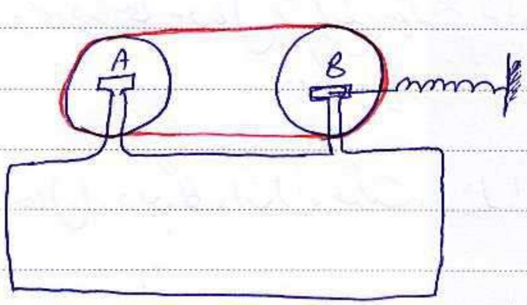
Subject:

Year. Month. محرم Date. 12

صبح 7-10

example)

تسمه و چرخ دنده‌ی مطلوب است
2 پولی و یک تسمه و دو دیسک یکنواخت
که وزن آنها معلوم است. توسط یک
فنر کشش اولیه در تسمه‌ی ایجاد می‌شود



$W_A = W_B = 30\ Lb$

فنر $F = 15\ Lb \qquad r = 1.5\ Ft$

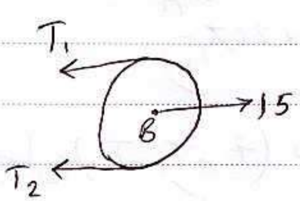
گشتاور $M_A = 20\ Lb.Ft$

$\Rightarrow \begin{cases} t = ? \\ \omega = 600\ rpm \end{cases}$ دور سیستم

کشش در دو طرف تسمه $\begin{cases} T_1 = ? \\ T_2 = ? \end{cases}$

فرض: جرم تسمه ناچیز است؛

./solve/.

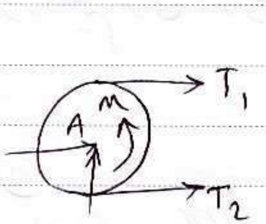


$\Rightarrow \quad \Sigma M_B = 0 \Rightarrow T_1 r - T_2 r = 0$

$\Rightarrow T_1 = T_2 = T.$

$\Rightarrow \quad 15 = 2T. \Rightarrow T. = 7.5$

حال دستگاه را روشن می‌کنیم (الکتروموتور روی A می‌باشد):



$\Sigma M_A = M + T_2 r - T_1 r = 0$

* اگر دور ثابت باشد در نهایت $\alpha = 0$ می‌شود و
عبارت بالا برابر صفر خواهد شد

$\Rightarrow$

$M = (T_1 - T_2) r \rightsquigarrow$ زمانی صحیح است که دور ثابت باشد

* هرچه M بیشتر $\Rightarrow T_1 - T_2$ بیشتر می‌شود یعنی T_1 همین طور بیشتر از T_2 می‌شود
تقریباً شبیه به زنجیر دوچرخه، که البته حالت خوبی نیست چون امکان دررفتن وجود دارد

Subject:
Year. Month. Date. ( )

وسیستم از کار بیفتد.

ولی در اینجا به دنبال شرایطی می‌گردیم که دور ثابت نشده، یعنی

$M + T_2 r - T_1 r = \bar{I}\alpha$

دیدگاه بیرون ←

حال از دیدگاه اندازه حرکت، مسئله را بررسی می‌کنیم:

$$\int_0^t \Sigma M_A \, dt = \Delta H_A$$

$$\Rightarrow (M + T_2 r - T_1 r)\, t = H_{2A} - \cancel{H_{1A}}^{\,0}$$

در سیستم انگلیسی هیچگاه جرم را نمی‌دهند ←

$$(M + T_2 r - T_1 r)\, t = H_{2A} \quad , \quad H_{2A} = \frac{1}{2} \times \underbrace{\frac{30}{32.2}}_{m_A} \times \underbrace{(1.5)}_{r}{}^2 \times \underbrace{\left(\frac{2\pi \times 600}{60}\right)}_{\omega}$$

$$\Rightarrow \left(20 + 1.5(T_2 - T_1)\right) t = \frac{15}{32.2} \times 1.5 \times 20\pi \quad (1)$$

یک معادله و 3 مجهول (t و T_2 و T_1) پس به سراغ B می‌رویم و همین معادله را تکرار می‌کنیم

* باید ببینیم که در B مصرف کننده داریم که در این صورت باید گشتاور مقاوم در B قرار دهیم ولی در غیر این صورت گشتاور مقاوم نداریم.

$$\int_0^t \Sigma M_B \, dt = \Delta H_B \Rightarrow$$

$$(T_1 r - T_2 r)\, t = H_{2B} = \frac{1}{2} \times \frac{30}{32.2} \times (1.5)^2 \times \left(\frac{2\pi}{60} \times 600\right) \quad (2)$$

ω ها برابر است زیرا شعاع‌ها یکسان است و بین تسمه و چرخ تسمه لغزش وجود ندارد ←

2 معادله و 3 مجهول ⇐ باید به دنبال معادله سوم باشیم ⇐

Subject:
Year. Month. Date. ( )

*** در شرایط دینامیکی، چرخ دنده B در راستای x دارای شتاب نیست پس $\Sigma F_x = 0$

- تا زمانی معتبر است که T_2 صفر نشود. $\Leftarrow$ $\rightarrow T_1 + T_2 = 15$ (3)

3 معادله و 3 مجهول

* حال اگر دور را مجهول قرار دهیم (گشتاور تقاوم متناسب دور می باشد)

بین تسمه و چرخ دنده لغزش نداریم. برای این کار نیاز به حداقل اصطکاک داریم:

static: $\frac{T_1}{T_2} = e^{\mu\beta}$ β: زاویه ی بین T_1 و T_2 که برحسب رادیان است

$T_1 > T_2$ باشد

$\Rightarrow \ln \frac{T_1}{T_2} = \mu\beta \Rightarrow$

هرچی اختلاف T_1، T_2 بیشتر باشد $\Leftarrow$ Ln بزرگتر $\Leftarrow$ $\mu\beta$ برای عدم لغزش باید بیشتر

که باید یا μ را زیاد کنیم یا β، که این اوصاف در شرایط استاتیکی بود و در دینامیک اگر وزن تسمه مطرح شود $\Leftarrow$ کار کمی فرق می کند

* گشتاور انتقالی به اختلاف T_1 و T_2 بستگی دارد.

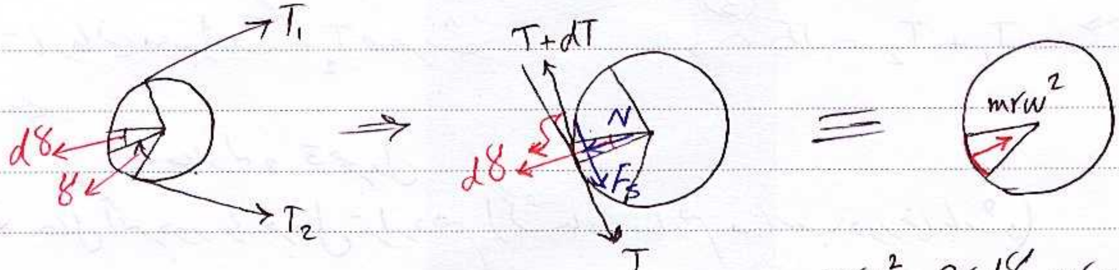
اگر یک pulley اندازه اش فرق داشته باشد، شکل به صورت روبه رو تبدیل می شود (ماکزیمم)

$\Leftarrow$ لغزش در پولی اتفاق می افتد که زاویه تماس کمتری داشته باشد

continue on the next page $\Rightarrow$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

جیکره آزاد تکه کوچک از تسمه را رسم می کنیم.



$$mr\omega^2 = \rho r d\theta \times r\omega^2$$

* شکل را در صفحه افق می گیریم تا از وزن صرف نظر کنیم
هدف : max گشتاور انتقالی را می خواهم پیدا کنیم

محدودیت : max گشتاور انتقالی در لغزش و یا دکردن می باشد یعنی در آستانه لغزش
پس $F_s = \mu_s N$

زمانی که هنوز به دور نهایی نرسیده است و یا رسیده (2 حالت)

1) ابتدا دور ثابت ⇐ $\alpha = 0$ پس فقط شتاب نرمال داریم. ρ (kg/m) جرم واحد طول تسمه است

⇒ اگر چگالی را دادند ⇒ $kg/m^3 \times m^2 = kg/m = \rho$

اصل دالامبر:
در پیکره آزاد هر چی وجود دارد برعکس می کنیم و در پیکره نیرو قرار می دهیم و می گوییم در پیکره نیرو، یک نیروی گریز از مرکز وارد می شود و پیکره آزاد شتاب را حذف می کنیم.

Continue on the next page

Subject:
Year. Month. Date. ( )

دیگر بحث ذره می باشد چون المان کوچک می باشد:

$\sum F_t = m a_t$

$$\Rightarrow (T+dT)\cos \frac{d\theta}{2} - T\cos\frac{d\theta}{2} - F_s = 0$$

دور ثابت است!

$$\Rightarrow dT = \mu_s N \quad ①$$

$$\sum F_n = m a_n \Rightarrow N - (T+dT)\sin\frac{d\theta}{2} - T\sin\left(\frac{d\theta}{2}\right) = r^2 \omega^2 \rho\, d\theta$$

هم ارز بینهایت کوچک: $\sin\frac{d\theta}{2} = \tan\frac{d\theta}{2} = \frac{d\theta}{2} \qquad \frac{d\theta}{2} \to 0$

$$\Rightarrow N - T d\theta = (r\omega)^2 \rho\, d\theta \Rightarrow N = (T + \rho (r\omega)^2)\, d\theta \quad ②$$

$$①, ② \Rightarrow dT = (T + \rho(r\omega)^2)\, d\theta \times \mu_s$$

$$\Rightarrow \int_{T_2}^{T_1} \frac{dT}{T + \rho(r\omega)^2} = \int_0^\beta \mu_s\, d\theta \xrightarrow[\text{می گیریم}]{\text{انتگرال}}$$

β را از هندسه شکل بدست می آوریم

$$\Rightarrow \operatorname{Ln}\left(T + \rho(r\omega)^2\right)\Big|_{T_2}^{T_1} = \mu_s \beta \Rightarrow \operatorname{Ln}\frac{T_1 + \rho(r\omega)^2}{T_2 + \rho(r\omega)^2} = \mu_s \beta$$

$$\Rightarrow \frac{T_1 - \rho(r\omega)^2}{T_2 - \rho(r\omega)^2} = e^{\mu_s \beta}$$

لازم

منفی درست است

$\Leftarrow$ اگر لازم از اختیار کمتر بود، عملی است

در غیر این صورت عملی نیست

(منفی درست است چون جهت $\sum$ را اشتباه گرفته بودیم)

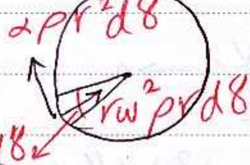
P4PCO

حال به ازای یک T_1 و T_2 ثابت، هرچی $\rho(r\omega)^2$ بیشتر شود کسر در کل بزرگتر می شود یعنی

۲. β پلی بیشتری نیازمند هستیم. هرچی تسمه سنگین تر باشد نیاز به β پلی بیشتری داریم
یعنی هرچی جرمش را کمتر کنیم مناسب تر می باشد

رابطه با θ در کتاب طراحی اجزا آنرا می خوانیم (صفحه قبلی)

* حال اگر دور ثابت نباشد، در پیکره شتاب داریم:



$$\Rightarrow \sum F_t = m a_t \Rightarrow$$

$$(T+dT)\cos\frac{d\theta}{2} - T\cos\frac{d\theta}{2} - F_s = \rho r^2 \alpha\, d\theta$$

$$\rightsquigarrow \boxed{\cancel{dT - F_s = \rho r^2 \alpha\, d\theta}}$$

اگر در شرایط max گشتاور باشیم ⇐

$$dT - \mu_s N = \rho r^2 \alpha\, d\theta \quad (1)$$

$$\sum F_n = m a_n \Rightarrow -N + (T+dT)\sin\frac{d\theta}{2} + T\sin\frac{d\theta}{2} = \rho r^2 \omega^2 d\theta$$

$$\rightsquigarrow N = -\rho r^2\omega^2 d\theta + T\, d\theta \quad (2)$$

$$(1), (2) \Rightarrow dT = \mu_s(T - \rho r^2\omega^2)\, d\theta + \rho r^2 \alpha\, d\theta$$

$$\Rightarrow dT = d\theta(\mu_s T - \mu_s \rho r^2\omega^2 + \rho r^2\alpha)$$

$$\Rightarrow \frac{dT}{\mu_s T - \mu_s \rho r^2 \omega^2 + \rho r^2 \alpha} = d\theta \xRightarrow{\text{می گیریم}}$$

$$\ln\frac{\mu_s T_1 - \mu_s \rho r^2 \omega^2 + \rho r^2 \alpha}{\mu_s T_2 - \mu_s \rho r^2 \omega^2 + \rho r^2 \alpha} = \mu_s \beta$$

چون در هر دو طرف μ_s داریم ⇐ نمی توانیم زیاد روی آن بحث کنیم

μ_s پلی ای که داریم باید در این رابطه صدق کند وگرنه به این مرحله نخواهیم رسید.

Subject:
Year. Month. Date. ( )

جمع بندی:

* اگر نیروی خواسته شد ⇐ روش نیرو
* شتاب = ? ⇐ روش نیرو

*

بعد از طی مسافت مشخص یا بعد از طی زمان مشخص یا زاویه مشخص ⇐ سرعت خواسته شود ⇐ روش اندازه حرکت ، Energy Method
زمان ← ... → مسافت

* بعد از طی مسافت مشخص ← سرعت چند نقطه یا سرعت زاویه ای ⇐ روش انرژی ⇐
$\mathcal{N}$ کار عامل خارجی بود

اگر بحث کار نیروی اصطکاک پیش بیاید، موقعی که نیروی اصطکاک به نقطه ای وارد شود و در نقطه سرعت داشته باشیم البته در راستای نیروی اصطکاک، در لغزش معمولاً این گونه است اما اگر لغزش نداشتیم دقت می خواهد

وقتی بحث لغزش پیش می آید $F_s = \mu_k N$ ، اگر N ثابت باشد کار راحت است ولی اگر ثابت نبود، دو حالت پیش می آید که N تابع موقعیت یا تابع طول باشد چون از متد انرژی استفاده می کنیم، طول و زاویه در روابط ظاهر می باشد پس برای محاسبه ی کار نیروی اصطکاک مشکلی به وجود نمی آید اما اگر N تابع سرعت باشد (بدترین حالت) که چنین حالتی در اکثر موارد زمانی پیش می آید که حرکت در مسیر منحنی می باشد که حتماً به معادله دیفرانسیل می رسیم.

۱۲/اسفند/۸۸

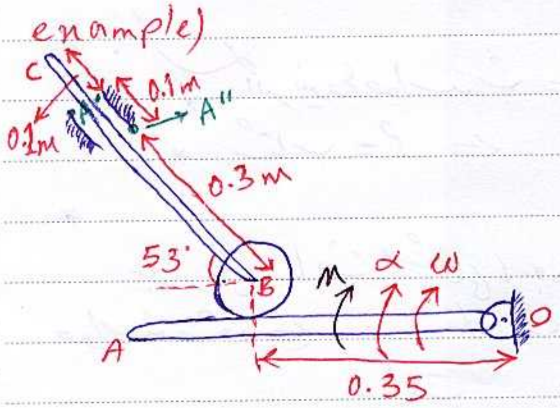
اسماعیل بهشتی

PAPCO

Subject:
Year. Month محرم Date. 12 ( )

13-16 بعدازظهر دوشنبه

example)



تحلیل نیروها در قسمت های مختلف :

$$\begin{cases} m_{OA} = 10\,kg \\ OA = 0.5m \end{cases} \qquad \begin{cases} m_B = 4kg \\ r_B = 0.1m \end{cases}$$

$$m_{CB} = 8kg \qquad \begin{cases} \alpha = 10\, rad/s^2 \\ \omega = 4\, rad/s \end{cases}$$

شکل در صفحه قائم قرار دارد. گشتاور M را بیابید که ω و α داده شده را ایجاد کند
(راهنما (میله راهنما) صیقلی است)

:or

نیروی O چه نیرویی را تحمل می کند

:or

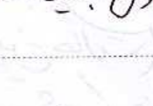
اگر غلتش کامل باشد حداقل اصطکاک را بیابید.

:or

نیروی موجود در مفصل B

* راه حل:

چون می خواهیم از متد نیرو استفاده کنیم و α, ω را داریم ⇐ اول باید α, ω
هر جزء را مشخص کنیم:



$$V_E = V_B + \omega \times r$$

$$\Rightarrow (0.35 \times 4) j = V_B(-\cos 53 i + \sin 53 j) + \omega_{دیسک} \times 0.1$$

با فرض پادساعتگرد بودن ω_B

$$\Rightarrow 1.4 = 0.8 V_B \Rightarrow V_B = 1.75$$

$$0 = -1.75 \times 0.6 + 0.1\omega_B \Rightarrow \omega_B = 10.5\, rad/s$$

$a_E = a_B + \omega\times(\omega\times r) + \dot{\omega}\times r$

سرعت E و E′ یکی است ولی شتابشان با هم متفاوت است.

$\ddot{a}_E = a_B + \omega\times(\omega\times r) + \dot{\omega}_B\times r$

حال دستگاه را روی o قرار می‌دهیم و E را بررسی می‌کنیم

$\ddot{a}_E = \cancel{a_0} + \omega_{OA}\times(\omega_{OA}\times r_{OE}) + \dot{\omega}_{OA}\times r_{OE} + \cancel{2\omega}\times v_{rel} + a_{rel}$

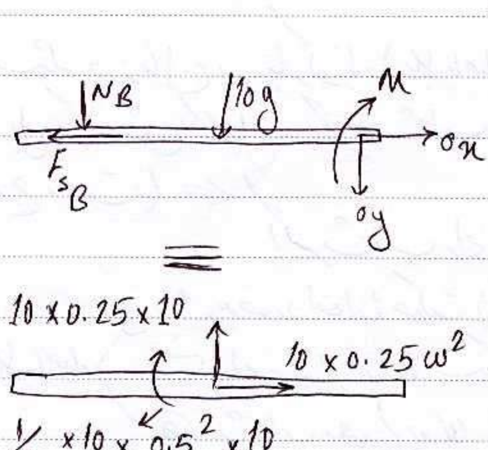
سرعتی که E′ نسبت به دستگاه دارد صفر است (E، دستگاه، هر دو روی دیسک هستند)
سرعت E نسبت به E′ هم صفر است (غلتش کامل داریم) پس v_{rel} صفر است
اما:

$a_{rel} = a_{E/E'} + \cancel{a_{E'/O}}$

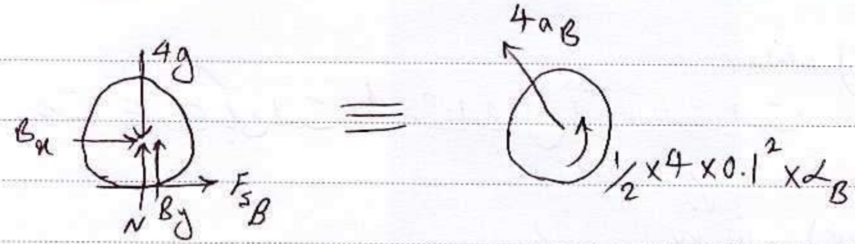
$a_{E/E'}$ فقط در جهت نرمال داریم چون غلتش کامل داریم

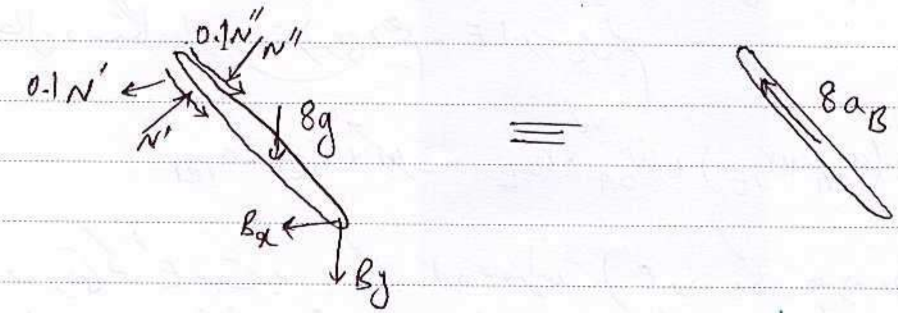
$\rightarrow \quad a_E = (0.35\times 4^2)\,i + 0.35\times 10\,j + 0.1(10.5+4)^2$

$\Leftarrow$ a_E را داریم که با گذاشتن در معادله بالا a_{Bt} پیدا می‌شود. نقطه B شتاب لینک BC است. لینک صرفاً دارای انتقال است.



داریم:
چون در صفحه قائم هستیم
پس وزن داریم
مفصل P روان است
چپ یا راست بودن F_s را نمی‌دانیم
دلبخواه قرار دادیم!





7 معادله و 7 مجهول ......

با فرض وجود اصطکاک:
در اثر چرخش، نیروهای تماس ها، در نقطه A' و A'' است (به دلیل وجود دلقی)

نکات کلی:

اگر نیروهای وارده به قسمت های مختلف مکانیزم را خواستند ← سن نیرو
اگر نیروها را دادند و شتاب را خواهند ⇐ سن نیرو

مسئله در زمان بسیار کوتاه (بلافاصله) انجام می شود (مثلاً بلافاصله پس از پاره شدن کابل، کشش کابل دیگر یا شتاب زاویه ای لینک چقدر است که البته بحث برخورد مطرح نیست) ⇐
اگر شتاب را خواهند، سن نیرو و اگر نیرو را خواهند، باز هم سن نیرو

بلافاصله:
① بحث برخورد اندازه حرکت (نیروی مجهولی که خود نیرو را نمی توان یافت ولی ضربه آن را می توان محاسبه کرد)
② شتاب معمولی و ω ناچیز، ثابت ماندن ω و عدم تغییر هندسه

متد نیرو: رسم پیکره آزاد تک تک اجزاء و فقط باید از سینماتیک بهره برد (از نقاطی که مسیر حرکت مشخص دارند غافل نشوید!)

سوالاتی که صرفاً بحث سرعت دوران در آن مطرح است متد انرژی یا اندازه حرکت

متد انرژی:

زمانی مطرح می‌شود که بحث فاصله و زاویه مطرح است

در متد اندازه حرکت:

بحث زمان مطرح است.

متد انرژی:

$u = E_2 - E_1$ ، زمانی از این متد استفاده می‌کنیم که محاسبه u آسان است، از مواردی که پیدا کردن u را مشکل می‌سازد، کار نیروی اصطکاک است

اصطکاک زمانی کار انجام می‌دهد که نقطه‌ی اثر کننده در راستای نیروی اصطکاک دارای مولفه‌ی سرعت هست یا نه؟

اگر بود کار انجام می‌دهد، اگر نبود نه!

اگر اصطکاک لغزشی باشد قطعاً نیروی اصطکاک کار انجام می‌دهد، اما اگر لغزش نباشد کار اصطکاک در اکثر موارد صفر است.

در موارد زیر صفر نیست:

دیسک روی سطح می‌غلتد اما خود سطح هم سرعت داشته باشد.

در مواردی که N ثابت است محاسبه‌ی کار نیروی اصطکاک سخت نیست اما اگر N تغییر کند (N تابعی از موقعیت باشد (زاویه یا طول)) خیلی سخت نیست! انتگرالی می‌شود اما اگر تغییرات N تابع سرعت باشد به معادله دیفرانسیل برخورد می‌کنیم و بهتر است از متد نیرو استفاده کنیم.

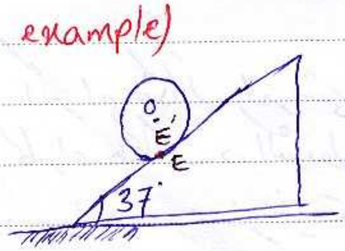
متد انرژی و اندازه حرکت، همزمان استفاده می‌شود:

لغزش نداریم پس کار اصطکاک صفر است
(نیروی اصطکاک زوج عمل و عکس العمل اند
⇐ سرعت‌ها یکی است، جابه‌جایی‌ها یکسان
پس کار آنها همدیگر را خنثی می‌کند)
اما اگر لغزش داشته باشیم ← زوج عمل و عکس العمل با جابه‌جایی غیر یکسان، پس کار
داریم ⇐ اگر لغزش بود از متد نیرو می‌رویم.

بعد از استفاده از بقاء انرژی مکانیکی و رابطه سینماتیکی ⇐ تعداد مجهولات نمی‌خواند
⇐ در جهت x، کل سیستم بقاء اندازه حرکت خطی دارد

بحث برخورد: اندازه حرکت مثل  !

example)



اگر بگویید
ضریب اصطکاک چقدر نیاز به منظور عدم لغزش وجود دارد
به سراغ متد انرژی و اندازه حرکت می‌رویم. چون غلتش کامل
است و اصطکاک صفر

← برای 0.3m جابه‌جایی، مسئله را تحلیل کنید. $r_o = 0.2m$

راه‌حل:
فقط در راستای x بقاء اندازه حرکت دارد نه در راستای کل (به خاطر N وارده از زمین)

$\Rightarrow E_1 = E_2 \Rightarrow$

دوران

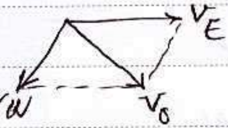
$$0 = -0.3\times 4g\sin 37^\circ + \frac{1}{2}\times 3\times V_E^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\times 4\times 0.2^2\right)\omega^2$$

$$+ \frac{1}{2}\times 4\times\left[(V_E - 0.2\,\omega\cos 37)^2 + (0.2\,\omega\sin 37)^2\right]$$

انتقالی

دستگاه را روی o قرار می دهیم و داریم:

$$V_E = V_0 + \omega \times r \Rightarrow \vec{V_0} = \vec{V_E} - \vec{\omega \times r}$$

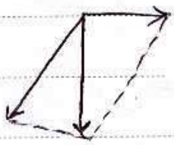


مطلق $V_0 = V_E - r\omega\cos 37$

حال در ادامه داریم:

$$Q_{1x} = Q_{2x} \Rightarrow 0 = +3V_E + 4(V_E - 0.2\,\omega\cos 37)$$

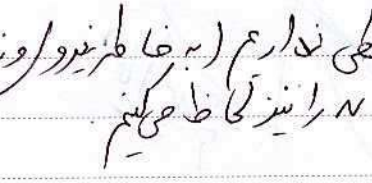
البته شکل صحیح تر به این صورت است



چون:
دیسک به راست و صفحه به چپ می رود

* اگر μ_s و μ_k را بدهند که باید تشخیص دهیم که لغزش داریم یا غلتش (که البته باید از شرط بدست) از مقدار نیرو استفاده کنیم

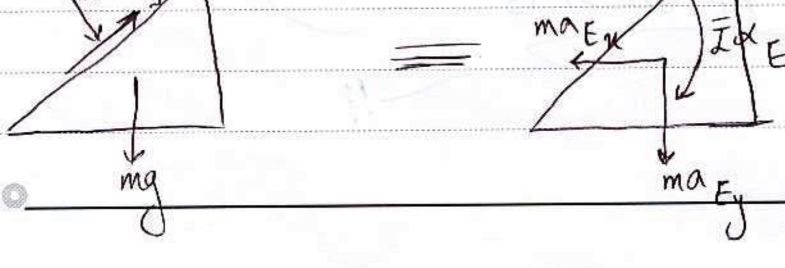
example/



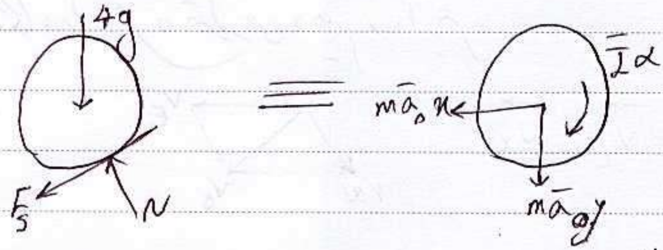
اگر در مثال قبل، سطح زیری فرو بریزد، بعد از ۱ یا ۲ ثانیه، هر کدام از اینها دارای چه سرعتی است؟

solve/

در راستای x بقای اندازه حرکت خطی نداریم (به خاطر نیروی وزن)
بر مبنای اینکه همچنان دیسک و صفحه تماس دارد، N را نیز لحاظ می کنیم



Subject:
Year. Month. Date. ( )



چون فرض را بر تماس دو جرم گرفتیم و با فرض غلط حل کردیم ⇐

از سینماتیک کمک می‌گیریم ⇐ بلافاصله پس از فرو ریختن:

$$a_o = a_{E'} + \omega \times (\omega \times r) + \dot{\omega} \times r + \cancel{2\omega \times V_{rel}} + \cancel{a_{rel}}$$

$$a_{E'} = a_E + r\omega_o^2$$

13 / اسفند ۸۸

!!

اشکال بزرگ