



مدرسایان شریف

کارشناسی ارشد

ریاضیات عمومی (۲)

- ✓ ۱۲۰۰ پرسش چهار گزینه ای شامل ۸۵۰ مسئله حل شده و ۳۵۰ مسئله با پاسخ کلیدی
- ✓ ارائه مطالب به روش‌های کاملاً خلاصه ، ساده و فرمول بندی شده
- ✓ ارائه روش های سریع و کوتاه جهت تعیین جواب‌ها
- ✓ ارائه ۱۰ آزمون خود سنجی جهت آمادگی هر چه بهتر دانشجویان
- ✓ قابل استفاده دانشجویان دوره‌های کارشناسی به عنوان کتاب مرجع دانشگاهی جهت موفقیت در امتحانات پایان ترم

مؤلفین : مهندس حسین نامی – علیرضا عشقی

خلاصه درس ، نکات مهم به همراه سؤالات و پاسخهای
تشریحی کنکورهای سراسری و آزاد ۸۷-۷۵

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

خدایا چنان کن سرانجام کار

تو خوشنود باشی و ما رستگار

چه کسم من؟ چه کسم من؟ که بسی وسوسه مندم

که از این سوی کشندم، که از آن سوی کشندم

نفسی آتش سوزان، نفسی سیل گریزان

زجه اصلم؟ زجه فصلم؟ زجه بازار خرندم؟

نفسی رهزن و غولم، نفسی تند و ملولم

نفسی زین دو برونم، که بر آن بام بلندم

(دیوان شمس)

« به نام خدا »

تقدیم به روح پرفتوح شهدا و رهبر کبیر جمهوری اسلامی ایران امام خمینی (ره)

زندگی امروزه جز با همراهی مستمر دانش و اطلاعات روز میسر نیست و اگر زیستن به معنای دانش اندوزی یک هدف والا و مقدس برای بشریت بوده و هست، طی مدارج علمی دانشگاهی نیز یکی از راههای سهل الوصول برای دستیابی به این خاصه فطرت آدمی است. نهادینه شدن علوم در طبقات اختصاصی آکادمیک انگیزه و رغبت جهت نیل به اهداف والا را افزایش می‌دهد. آزمون‌های تستی با تمام انتقادهایی که به همراه خود دارد در حال حاضر بهترین نوع گزینش دانشجویان می‌باشد، لذا مؤسسه علمی - فرهنگی مدرسان شریف در راستای اهداف علمی - آموزشی خود اقدام به ارایه سری کتب آمادگی کنکور کارشناسی ارشد نموده است. کتاب‌های فوق مبتنی بر تجربیات چندین ساله اساتید در دانشگاه‌ها و مراکز آموزشی و بخصوص فعالیت‌های مستمر تدریس، تألیف و تحقیق در مؤسسه مدرسان شریف می‌باشد. با توجه به این که این مجموعه‌ها قبل از چاپ در کلاس‌های آمادگی آزمون کارشناسی ارشد مؤسسه بارها تدریس شده و با ملاحظه نقاط قوت و ضعف دانشجویان گرامی تهیه شده است، لذا امید است بتواند راهگشای ورود دانشجویان به دوره‌های کارشناسی ارشد باشد. کتاب «ریاضی عمومی (۲)» تقدیم به دانشجویان و اساتید محترم می‌گردد.

مدیریت مؤسسه مدرسان شریف

سرشناسه : نامی، حسین.

عنوان و پدیدآور : ریاضی عمومی (۲) / مؤلفین حسین نامی / علیرضا عشقی :

مشخصات نشر : تهران: مدرسان شریف، ۱۳۸۷.

مشخصات ظاهری : ۲۸۸ ص.

شابک : 0 - 37 - 2838 - 964 - 978

یادداشت: فیبا

یادداشت : چاپ سوم

یادداشت : عنوان عطف: ریاضیات عمومی (۲) کارشناسی ارشد.

یادداشت : عنوان روی جلد: مدرسان شریف کارشناسی ارشد ریاضیات عمومی (۲) ...

عنوان دیگر: ریاضیات عمومی (۲) کارشناسی ارشد.

عنوان دیگر: مدرسان شریف: کارشناسی ارشد ریاضیات عمومی (۲) ...

موضوع : دانشگاهها و مدارس عالی -- ایران -- آزمونها.

موضوع : ریاضیات -- آزمونها و تمرینها (عالی).

موضوع : آزمون دوره‌های تحصیلات تکمیلی -- ایران.

شناسه افزوده : عشقی، علیرضا.

شناسه افزوده : مؤسسه علمی - فرهنگی مدرسان شریف.

رده بندی کنگره : ۹۲۲۲ ر ۱۸۳ ن LB ۲۲۵۲/

رده بندی دیویی : ۳۷۸/۱۶۶۴

شماره کتابخانه ملی : ۴۲۵۱۱ - ۸۵ م

نام کتاب: ریاضی عمومی (۲)

مؤلفین: مهندس حسین نامی - علیرضا عشقی

ناشر: انتشارات مدرسان شریف

تیراژ: ۲۰۰۰ نسخه

تاریخ چاپ اول: مهرماه ۱۳۸۵

تاریخ چاپ سوم: مهرماه ۱۳۸۷

حروف چینی: واحد تایپ مؤسسه مدرسان شریف

چاپ و صحافی: مهدی - مینو

قیمت: ۵۸۰۰ تومان

شابک: 0 - 37 - 2838 - 964 - 978

تمام حقوق محفوظ و مخصوص سفارش دهنده مؤسسه مدرسان شریف می‌باشد.

هر گونه کپی، چاپ و نسخه برداری از مطالب این کتاب پیگرد قانونی دارد.

خدایا، مرا آن ده که آن به

افزایش روزافزون فارغ التحصیلان دوره‌های کارشناسی و اشتیاق آنها برای ورود به دوره‌های کارشناسی ارشد و کمبود کتب آمادگی مناسب آزمونهای کارشناسی ارشد هدف اصلی نگارش این کتاب می‌باشد.

با توجه به این که درس «ریاضی عمومی (۲)» معمولاً در سال اول تحصیلی توسط دانشجویان دوره‌های کارشناسی گذرانده می‌شود و پس از گذشت دو سال از آن مطالب فرا گرفته شده تقریباً به فراموشی سپرده شده، لذا کتاب با نگارش ساده و اجتناب از بیان مطالب غیر ضروری (اثبات فرمول‌ها و ...) سعی بر این داشته که دانشجویان جهت موفقیت در آزمون کارشناسی ارشد در کمترین زمان بهترین نتیجه‌گیری را داشته و دیگر نیازی به مراجعه به کتب دیگر نداشته باشند، از ویژگی‌های بارز این کتاب نسبت به دیگر کتب موجود در این زمینه موارد زیر را می‌توان نام برد:

(۱) مطالب به صورت خلاصه و فرمول‌بندی شده و حتی المقدور حل مسائل با روشهای تستی بیان گردیده است.
(۲) هر فصل کتاب دارای سه بخش کلی است که بخش اول شامل خلاصه درس همراه با مثالهای حل شده می‌باشد که این مثالها عیناً سوالات دوره‌های گذشته، سوالات تألیفی و یا سوالاتی است که در آزمونهای آزمایشی موسسه مدرسان شریف سؤال بوده‌اند. بخش دوم شامل صرفاً سوالات به همراه پاسخنامه تشریحی مربوط به آزمونهای دوره‌های گذشته در رشته‌های مختلف از سال ۱۳۷۸ تا ۱۳۸۴ است. در بخش سوم هر فصل تستهای تکمیلی مربوط به آن فصل آورده شده است که بعضاً سوالات مشکلی نسبت به سوالات دوره‌های قبل در این تستها مشاهده می‌شود. (که به عقیده مؤلفین و دپارتمان ریاضی موسسه مدرسان شریف می‌تواند سوالاتی جالب جهت طرح در آزمونهای آینده باشد.)

(۳) کتاب مجموعاً شامل حدود ۸۵۰ تست با پاسخ‌های کاملاً تشریحی و تقریباً ۳۵۰ تست با پاسخ‌های کلیدی است که جمعاً حدود ۱۲۰۰ مسئله غیر تکراری در کتاب گنجانده شده که از این حیث می‌توان کتاب را در بین کتب ریاضی دیگر که برای این منظور تهیه شده‌اند، بی‌نظیر دانست.

(۴) در حل بعضی تستها نوآوری‌های خاص این کتاب (روش‌های حل سریع و کوتاه) مشاهده می‌شود.

(۵) کلیه سوالات مربوط به آزمونهای دانشگاه سراسری از سال ۷۸ تا ۸۴ مربوط به اکثر رشته‌ها و همچنین سوالات منتخب دانشگاه آزاد از سال ۸۰ تا ۸۴ به صورت طبقه‌بندی شده در انتهای فصول مختلف کتب گنجانده شده است.

(۶) سوالات مربوط به قبل از سال ۷۸ در کتاب به عنوان مثالهای حل شده در هر فصل و یا تحت عنوان تستهای تکمیلی در کتاب آورده شده است.

(۷) در انتهای کتاب سوالات آزمون سال ۱۳۸۵ و ۱۳۸۶ و ۱۳۸۷ دانشگاه سراسری (اسفند ۸۴ و ۸۵ و ۸۶) به همراه پاسخ‌های کاملاً تشریحی ارائه شده است.

(۸) جهت خودسنجی و آمادگی هر چه بهتر دانشجویان عزیز ۱۰ مرحله آزمون در سه سطح A (سخت)، B (متوسط) و C (آسان) تنظیم شده، که با توجه به مدت زمان پیشنهادی و سطح آزمون دانشجویان عزیز می‌توانند شرایط خود را از لحاظ مقدار آمادگی مورد سنجش قرار دهند.

(۹) مطالب کتاب به گونه‌ای تدوین گردیده که می‌تواند به عنوان مرجع کامل جهت درس ریاضی عمومی (۲) جهت موفقیت در امتحانات پایان ترم دانشگاهها مورد استفاده قرار می‌گیرد.

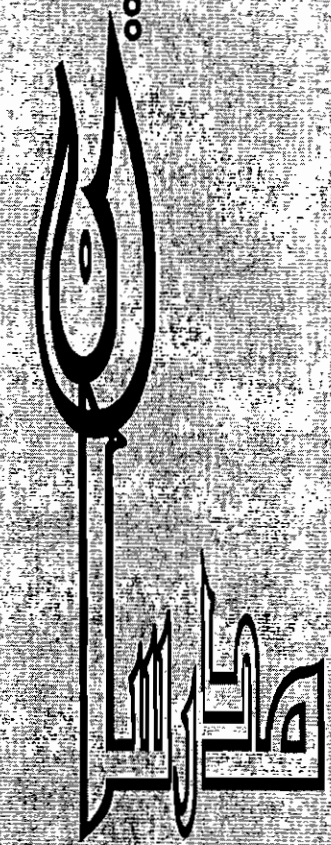
با توجه به اینکه هیچ تألیفی خالی از اشکال نیست لذا از همه اساتید و دانشجویان انتظار داریم عنایت فرمایند و اشکالات این کتاب را به آدرس: فلکه دوم صادقیه روبه‌روی مسجد امام جعفر صادق (ع) - بلوار شهدا - بلاک ۳۵ - آموزشگاه مدرسان شریف ارسال کنند و یا با شماره تلفن ۱۳۸۴۸۶۱ - ۰۹۱۲ تماس حاصل فرمایند. در خاتمه جا دارد از خانم فاطمه هلیلی که تایپ و صفحه‌آرایی این مجموعه را به عهده داشتند، نهایت سپاسگزاری را داشته باشیم.

مهندس حسین نامی - علیرضا عشقی

مهر ماه ۱۳۸۷



انتشارات افکار



عنوان	صفحه
فصل اول : توابع چند متغیره	۱
توابع دو یا چند متغیره	۱
حد و پیوستگی توابع دو متغیره	۱
تعریف مشتق جزئی	۲
دیفرانسیل یک تابع	۴
مشتق جزئی در توابع چند متغیره	۵
قاعده مشتق‌گیری از توابع مرکب با تعداد متغیرهای بیشتر	۶
مشتق‌گیری ضمنی	۸
قضیه اویلر	۹
محاسبه مشتقات جزئی یک دستگاه با استفاده از ژاکوبین	۱۰
به دست آوردن نقاط بحرانی و اکسترممهای توابع دو متغیره	۱۱
به دست آوردن ماکزیمم و مینیمم توابع مقید با استفاده از ضرایب لاگرانژ	۱۲
گرادیان	۱۵
دیورژانس	۱۵
کرل	۱۵
لابلاسیان	۱۶
مشتق سونی	۱۶
تست‌های طبقه‌بندی شده فصل اول	۱۸
پاسخنامه تشریحی تست‌های طبقه‌بندی شده فصل اول	۳۶
تست‌های تکمیلی فصل اول	۶۲
فصل دوم : رویه‌ها، خم‌ها و توابع برداری	۶۶
رویه‌ها	۶۶
رویه‌های درجه دوم	۶۶
سطح حاصل از دوران	۶۸
توابع برداری	۶۸
طول قوس منحنی‌های فضایی	۶۹
تعریف بردارهای سرعت، شتاب بردارهای یکانی مماس و قائم	۷۰
انحنای خمیدگی منحنی C	۷۱
دایره بوسان	۷۲
تاب منحنی	۷۳
حرکت در مختصات قطبی	۷۳
تست‌های طبقه‌بندی شده فصل دوم	۷۴
پاسخنامه تشریحی تست‌های طبقه‌بندی شده فصل دوم	۷۷
تست‌های تکمیلی فصل دوم	۸۱
فصل سوم : انتگرال توابع چند متغیره	۸۲
انتگرال‌های دوگانه	۸۲
نمویض ترتیب انتگرال‌گیری	۸۴
تعبیر انتگرالهای دوگانه به صورت حجم	۸۶
محاسبه انتگرال دوگانه در مختصات قطبی	۸۷
فرمول‌های حجم و سطح در مختصات قطبی	۸۹
تغییر متغیر در انتگرال دوگانه (استفاده از ژاکوبین)	۹۰
مقدار متوسط تابع f	۹۲
جرم، مرکز ثقل و گشتاور ماند یک صفحه مسطح	۹۲

صفحه	عنوان
۱۹۴	تست‌های طبقه‌بندی شده فصل پنجم
۲۰۲	پاسخنامه تشریحی تست‌های طبقه‌بندی شده فصل پنجم
۲۰۹	تست‌های تکمیلی فصل پنجم
۲۱۴	آزمون‌های خودسنجی (۱ تا ۱۰)
۲۲۴	پاسخنامه آزمون‌های خودسنجی (۱ تا ۱۰)
۲۲۵	تست‌های سراسری ۱۳۸۵
۲۳۳	پاسخنامه تست‌های سراسری ۱۳۸۵
۲۴۷	تست‌های سراسری ۱۳۸۶
۲۵۴	پاسخنامه تست‌های سراسری ۱۳۸۶
۲۶۴	تست‌های سراسری ۱۳۸۷
۲۷۰	پاسخنامه تست‌های سراسری ۱۳۸۷
۲۷۶	پاسخنامه تست‌های تکمیلی
۲۷۷	منابع و مراجع



شیراز



مطالعات

صفحه	عنوان
۹۳	انتگرال‌های سه‌گانه
۹۵	محاسبه انتگرال‌های سه‌گانه با استفاده از مختصات استوانه‌ای
۹۵	محاسبه انتگرال‌های سه‌گانه با استفاده از مختصات کروی
۹۶	مقدار متوسط تابع $f(x, y, z)$
۹۶	جرم، گشتاور ماند و مرکز ثقل اجسام (دارای حجم)
۹۸	تست‌های طبقه‌بندی شده فصل سوم
۱۰۷	پاسخنامه تشریحی تست‌های طبقه‌بندی شده فصل سوم
۱۱۸	تست‌های تکمیلی فصل سوم
۱۲۵	فصل چهارم: میدانهای برداری و انتگرال گیری روی مسیرها و سطوح
۱۲۵	انتگرال روی خم
۱۲۶	محاسبه جرم و گشتاور
۱۲۷	انتگرال خط میدانهای برداری
۱۳۰	استقلال از مسیر و میدانهای پایستار (کنسرواتیو یا ایفایی)
۱۳۰	تعیین پتانسیل برای میدانهای پایستار
۱۳۳	شار گذرنده از یک خم واقع در صفحه
۱۳۳	قضیه گرین
۱۳۸	انتگرال‌های رویه‌ای (انتگرال روی سطح)
۱۳۸	تعریف و روش محاسبه انتگرال رویه‌ای
۱۴۱	انتگرال میدان برداری روی سطوح (شار)
۱۴۲	قضیه دیورژانس (قضیه گاوس یا قضیه واگرایی)
۱۴۶	قضیه استوکس
۱۴۸	تست‌های طبقه‌بندی شده فصل چهارم
۱۵۷	پاسخنامه تشریحی تست‌های طبقه‌بندی شده فصل چهارم
۱۶۹	تست‌های تکمیلی فصل چهارم
۱۷۴	فصل پنجم: بردار
۱۷۴	دستگاه مختصات قائم
۱۷۵	حاصل ضرب داخلی دو بردار (حاصلضرب اسکالر)
۱۷۶	حاصل ضرب خارجی دو بردار
۱۷۷	ضرب مختلط به بردار
۱۷۸	ضرب برداری به بردار (حاصلضرب سه‌گانه)
۱۷۹	استقلال و وابستگی خطی
۱۷۹	معادله خط
۱۸۱	معادله صفحه
۱۸۲	ماتریس
۱۸۶	دترمینان
۱۸۸	ماتریس وارون و (معکوس) یک ماتریس مرتبه n
۱۸۹	حل دستگاه معادلات خطی
۱۹۰	مقادیر ویژه و بردار ویژه
۱۹۲	ماتریس‌های قطری شدنی
۱۹۲	ماتریس معین مثبت و معین منفی



شیراز



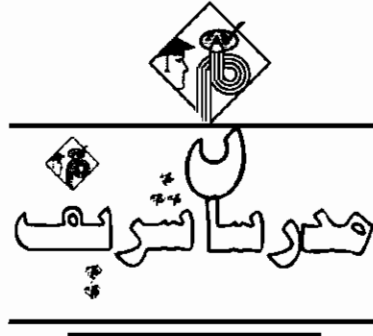
مطالعات

اولین و قویترین مرکز برگزاری کلاسهای کنکور و دوره‌های مکاتبه‌ای کارشناسی ارشد و کاردانی به کارشناسی در سطح ایران

مؤسسه علمی - فرهنگی **مدرسان شریف** برای آمادگی هر چه بیشتر دانشجویان عزیز جهت آزمونهای کارشناسی ارشد و کاردانی به کارشناسی کلاسهای حضوری زیر را با زمانبندی ذیل هر ساله برگزار می‌کند.

تاریخ شروع ثبت‌نام در هر سال	تاریخ شروع ثبت‌نام در هر سال
کلاسهای آمادگی کارشناسی به کارشناسی	کلاسهای آمادگی آزمون کارشناسی ارشد
دوره اول: بیستم آذر ماه لغایت بیستم دی‌ماه (دوره عادی ویژه دانشگاه سراسری)	دوره اول: بیستم اردیبهشت ماه لغایت بیستم تیر ماه
دوره دوم: بیست و پنجم دی ماه لغایت بیست و پنجم فروردین ماه (دوره فشرده ویژه دانشگاه سراسری)	دوره دوم: بیستم مرداد ماه لغایت بیستم مهر ماه
دوره سوم: بیستم فروردین ماه لغایت بیستم خرداد ماه (دوره عادی ویژه دانشگاه آزاد)	دوره سوم: سی‌ام مهر ماه لغایت دهم دی ماه
دوره چهارم: بیستم خرداد ماه لغایت بیستم تیرماه (دوره عادی ویژه دانشگاه آزاد)	مراکز تشکیل کلاسها: سیدخندان - انقلاب - آریاشهر ونک - کرج تلفنهای مشاوره و ثبت‌نام: ۵-۶۶۹۴۶۹۶۰
دوره پنجم: بیستم تیرماه لغایت بیستم مرداد ماه (دوره فشرده ویژه دانشگاه آزاد)	
دوره ششم: بیستم مرداد ماه لغایت اول مهر ماه (دوره فشرده ویژه دانشگاه آزاد)	

تذکر: با توجه به استقبال بی‌نظیر دانشجویان گرامی از کلاسهای مذکور کلاسهای فوق در کدهای مجزای زمانی روزهای زوج، روزهای فرد و همچنین کلاسها صرفاً پنج‌شنبه و جمعه ویژه شاغلین و داوطلبین شهرستانی در نقاط مختلف تهران و کرج برگزار می‌گردد.



فصل اول « توابع چند متغیره »

توابع دو یا چند متغیره

مقادیر بسیاری از توابع به کمک بیش از یک متغیر مستقل معین می‌شوند. برای مثال حجم استوانه از رابطه $V = \pi r^2 h$ که r شعاع قاعده و h ارتفاع استوانه است، تعیین می‌گردد.

دامنه و برد توابع دو متغیره

در تعیین دامنه تابع $Z = f(x, y)$ مجموعه نقاطی مانند $A(x, y)$ در صفحه xoy می‌توانند به عنوان دامنه در نظر گرفته شوند و حوزه مقادیر تابع نیز با توجه به ضابطه آن تعیین می‌گردد.

مثال ۱: دامنه و برد تابع $f(x, y) = \sqrt{y - x^2}$ را به دست آورید.

پاسخ:

$$y - x^2 \geq 0 \Rightarrow y \geq x^2$$

دامنه f شامل تمام نقاطی است که در بالا و روی سهمی $y = x^2$ قرار می‌گیرند. برد f نیز شامل تمام مجموعه اعداد مثبت و صفر می‌باشد.

مثال ۲: برد تابع دو متغیره $z = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$ کدام است؟

- (۱) R (۲) R^+ (۳) $[0, 3]$ (۴) $R - \{0\}$

پاسخ:

گزینه «۳» ملاحظه می‌گردد چون $z = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$ همواره کوچکتر یا مساوی صفر می‌باشد. پس مقدار زیر رادیکال کوچکتر یا حداکثر مساوی ۹ خواهد بود لذا مقدار Z از عدد ۳ نمی‌تواند بیشتر باشد.

حد و پیوستگی توابع دو متغیره

تابع دو متغیره $f(x, y)$ را در نظر بگیرید، برای وجود حد $\lim_{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)} f(x, y)$ باید مقدار این حد مستقل از روش میل کردن (x, y) به سمت (x_0, y_0) باشد، عبارت دیگر اگر با چند روش مختلف میل کردن، جوابهای مختلف بدست آید آنگاه می‌توان نتیجه گرفت که حد موجود نیست.

معمولاً برای بررسی وجود حد توابع دو متغیره مسیره‌های $y = mx$ را انتخاب می‌کنیم، اگر مقدار حد به m بستگی داشته باشد، تابع قطعاً حد ندارد و اگر حد به m بستگی نداشته، نمی‌توانیم در مورد وجود حد اظهار نظر کنیم.

مثال ۳: حد تابع $f(x, y) = \frac{x}{x+y}$ در نقطه $(0, 0)$ کدام است؟

- (۱) حد ندارد (۲) صفر (۳) ۱ (۴) ۲

پاسخ:

گزینه «۱» چون حد به m بستگی دارد، لذا تابع حد ندارد.

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y = mx}} f(x, y) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x + mx} = \frac{1}{m+1}$$

توضیح: نوع دیگر بررسی حد اینگونه توابع (البته زمانی که مقدار حد برابر ۰ شود) استفاده از مختصات قطبی می‌باشد. با توجه به اینکه $x = r \cos \theta$ و $y = r \sin \theta$ می‌توانیم $f(x, y)$ را در مختصات قطبی نمایش داده، وقتی $r \rightarrow 0$ مقدار حد را محاسبه می‌کنیم اگر مستقل از θ بود مقدار بدست آمده، حد تابع می‌باشد در غیر این صورت حد موجود نمی‌باشد.

کج مثال ۴: مقدار $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$ کدام است؟

- (۱) دارای حد نیست (۲) ۱ (۳) صفر (۴) $\frac{1}{2}$

پاسخ: گزینه «۳» $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{r^2 \sin \theta \cos \theta}{r} = 0$

در مورد محاسبه حد توابع چند متغیره می توان از موارد زیر در حل تستها استفاده کرد:
(۱) اغلب اگر درجه صورت از درجه مخرج بیشتر باشد حد وجود دارد و اگر درجه صورت و مخرج برابر باشد، حد وجود ندارد.

(۲) در تابع $\frac{x^m y^n}{x^k + y^w}$ مسیر $x^m = ky^n$ را بررسی کنید.

شرط پیوستگی توابع دو متغیره

اگر حد تابع $f(x,y)$ در (x_0, y_0) برابر $f(x_0, y_0)$ باشد، آنگاه گوئیم تابع در (x_0, y_0) پیوسته می باشد.

کج مثال ۵: تابع $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2 y^2}{x^2 + y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$ در نقطه $(0,0)$ از لحاظ پیوستگی کدام است؟

- (۱) پیوسته است. (۲) پیوسته نیست. (۳) فقط پیوستگی چپ دارد. (۴) فقط پیوستگی راست دارد.

پاسخ: گزینه «۱» ابتدا توجه کنید که: $0 \leq \frac{x^2 y^2}{x^2 + y^2} = \frac{x^2}{x^2 + y^2} \times y^2 \leq y^2$

حال توجه کنید که $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} y^2 = 0$. بنابراین طبق قضیه ساندویچ $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y^2}{x^2 + y^2} = 0$ و چون $f(0,0) = 0$ بنابراین f در مبدأ پیوسته است.

تعریف مشتق جزئی

اگر $z = f(x,y)$ با فرض اینکه y مقدار ثابتی باشد، داریم:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x+\Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x} = f'_x(x, y)$$

که $\frac{\partial z}{\partial x}$ مشتق جزئی تابع z نسبت به متغیر x است، به همین ترتیب $\frac{\partial z}{\partial y}$ مشتق جزئی تابع z نسبت به متغیر y نامیده می شود، برای به دست آوردن مشتقات جزئی می توان از روابط عادی بیان شده در مشتق گیری استفاده کرد.

کج مثال ۶: مقادیر $\frac{\partial z}{\partial x}$ و $\frac{\partial z}{\partial y}$ را برای تابع $z = \ln \operatorname{tg} \frac{x}{y}$ تعیین کنید.

پاسخ: برای بدست آوردن $\frac{\partial z}{\partial x}$ ، y را مقداری ثابت در نظر می گیریم: $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{y} \frac{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{y}}{\operatorname{tg} \frac{x}{y}} = \frac{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{y}}{y \operatorname{tg} \frac{x}{y}}$

برای بدست آوردن $\frac{\partial z}{\partial y}$ ، x را مقداری ثابت در نظر می گیریم: $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{-\frac{x}{y^2} (1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{y})}{\operatorname{tg} \frac{x}{y}} = -\frac{x(1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{y})}{y^2 \operatorname{tg} \frac{x}{y}}$

تذکره ۱: اگر $z = f(x,y)$ آنگاه $\frac{\partial z}{\partial x}$ را به صورت $f'_x, f_x, z'_x, z_x, f'_1, f_1$ و نیز در کتابهای مختلف نمایش می دهند.

مشتق جزئی مرتبه های بالاتر

مشتق های جزئی مرتبه دوم از تابع $z = f(x,y)$ برابر «مشتق های جزئی از مشتق های جزئی مرتبه اول تابع z » می باشد:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) = f''_{xx} = z''_{xx}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right) = f''_{xy} = z''_{xy}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right) = f''_{yy} = z''_{yy}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) = f''_{yx} = z''_{yx}$$

* تذکره ۲: وقتی تمام مشتق های جزئی تابعی پیوسته باشند، نتیجه نهائی مشتق به ردیف (ترتیب) مشتق گیری بستگی ندارد یعنی $z''_{yx} = z''_{xy}$ می باشد. (یعنی فرقی نمی کند اول نسبت به x مشتق بگیریم بعد نسبت به y و یا بالعکس).

کج مثال ۷: مشتق های جزئی مرتبه دوم تابع $z = \operatorname{arctg} \frac{x}{y}$ را به دست آورید.

پاسخ:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{y} \frac{1}{1 + \frac{x^2}{y^2}} = \frac{y}{x^2 + y^2}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{-\frac{x}{y^2}}{1 + \frac{x^2}{y^2}} = -\frac{x}{x^2 + y^2}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{y}{x^2 + y^2} \right) = -\frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left(-\frac{x}{x^2 + y^2} \right) = -\frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{x}{x^2 + y^2} \right) = -\frac{1 \times (x^2 + y^2) - 2x \times x}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}$$

اگر بخواهیم با ردیف دیگری مشتق جزئی اخیر را حساب کنیم، داریم:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{y}{x^2 + y^2} \right) = \frac{1 \times (x^2 + y^2) - 2y \times y}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}$$

توضیح: ملاحظه می گردد $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ می باشد.

کج مثال ۸: اگر $f(x,y) = x^2 \operatorname{Arctg} \frac{y}{x}$ باشد، مقدار $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ در نقطه $A(1,1)$ کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

پاسخ: گزینه «۱»

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x^2 \times \frac{1}{x} \frac{1}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} = \frac{x}{x^2 + y^2} = \frac{x^2}{x^2 + y^2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{2x^2(x^2 + y^2) - 2x(x^2)}{(x^2 + y^2)^2} \Big|_{y=1, x=1} = \frac{2 \times 1 \times (1+1) - 2 \times 1 \times 1}{(1+1)^2} = 1$$

نکته ۱: اگر $z = f(x,y)$ تابعی با مشتق های جزئی پیوسته باشد، به طور کلی برای محاسبه $\frac{\partial^{m+n} f}{\partial x^m \partial y^n}$ باید از m بار نسبت به x و n بار نسبت به y با هر ترتیبی که خواستیم، مشتق بگیریم.

کج مثال ۹: حاصل عبارت $\frac{\partial^5}{\partial x^2 \partial y^3} (x \sin y + e^y)$ کدام است؟

- (۱) $e^y + \sin y$ (۲) $e^y + x \cos y$ (۳) $-x \cos y + e^y$ (۴) e^y

پاسخ: گزینه «۱» اگر اول نسبت به x مشتق بگیریم، کار ساده تر خواهد بود. باید اول دو بار نسبت به x مشتق بگیریم:

$$\frac{\partial^5}{\partial x^2 \partial y^3} (x \sin y + e^y) = \frac{\partial^2}{\partial y^3} \times \frac{\partial^2}{\partial x^2} (x \sin y + e^y) = \frac{\partial^2}{\partial y^3} \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial (x \sin y + e^y)}{\partial x} \right] = \frac{\partial^2}{\partial y^3} \frac{\partial}{\partial x} (\sin y) = \frac{\partial^2}{\partial y^3} (0) = 0$$

دیفرانسیل یک تابع

اگر تابع با ضابطه $y = f(x)$ را در نظر بگیریم دیفرانسیل تابع y را به فرم $dy = y'.dx$ نمایش داده و بصورت $dy = y'.dx$ نشان می‌دهیم.

دیفرانسیل کامل تابع دو متغیره: اگر $u = f(x, y)$ باشد که x و y متغیرهای مستقل و تابع f دارای مشتق جزئی مرتبه اول باشد، آنگاه

$$du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy$$

تعریف می‌شود.

مثال ۱۰: اگر $u = x^y$ باشد آنگاه دیفرانسیل کامل u کدام است؟

(۱) $du = x^y \ln x dx + yx^{y-1} dy$

(۲) $du = x^y \ln x dx + x^{y-1} \ln y dy$

(۳) $du = yx^{y-1} dx + x^y \ln x dy$

(۴) $du = yx^{y-1} dx + x^y \ln x dy$

پاسخ: گزینه «۳»

و در صورت وجود مشتقات جزئی مرتبه دوم، دیفرانسیل مرتبه دوم تابع u به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$d^2u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dx^2 + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} dx dy + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} dy^2$$

مثال ۱۱: دیفرانسیل کامل مرتبه دوم تابع $u = 2x^2 - 3xy - y^2$ کدام است؟

(۱) $d^2u = 4dx^2 + 6dxdy - 2dy^2$

(۲) $d^2u = 4dx^2 + 6dxdy + 2dy^2$

(۳) $d^2u = 4dx^2 - 6dxdy - 2dy^2$

(۴) $d^2u = 4dx^2 - 6dxdy + 2dy^2$

پاسخ: گزینه «۲»

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 4x - 3y \Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 4, \frac{\partial u}{\partial y} = -3x - 2y \Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -2, \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}(-3x - 2y) = -3$$

$$d^2z = 4dx^2 - 6dxdy - 2dy^2$$

نکته ۲: به طور کلی برای تابع $z = f(x, y)$ می‌توان رابطه دیفرانسیل کامل مرتبه n ام را به صورت زیر بیان نمود:

$$d^n z = \left(dx \frac{\partial}{\partial x} + dy \frac{\partial}{\partial y} \right)^n z$$

شرط دیفرانسیل کامل

برای اینکه عبارتی مانند $P(x, y)dx + Q(x, y)dy$ دیفرانسیل کامل تابعی باشد، باید شرط $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$ برقرار باشد، برای مثال

عبارت $(2x + y)dx + (x + 2y)dy$ دیفرانسیل کامل می‌باشد زیرا داریم:

$$\left. \begin{aligned} P &= 2x + y \\ Q &= x + 2y \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y} = 1$$

دیفرانسیل کامل تابع سه متغیره

اگر $u = f(x, y, z)$ باشد که x, y, z متغیرهای مستقل و تابع f دارای مشتق جزئی مرتبه اول باشد، آنگاه دیفرانسیل کامل u به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz$$

مثال ۱۲: دیفرانسیل کامل $u = xyz$ در صورتی که u باشد، کدام است؟

(۱) $xydx + xzdy + yzdz$

(۲) $yzdx + xzdy + xydz$

(۳) $xydx + zydy + xzdz$

(۴) $yzdx + xydy + xyzdz$

پاسخ: گزینه «۲»

شرط دیفرانسیل کامل بودن تابع سه متغیره:

اگر توابع $P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z)$ توابعی مشتق‌پذیر باشند و مشتق‌های مرتبه اول آنها پیوسته باشد، در این صورت عبارت $A = Pdx + Qdy + Rdz$ زمانی دیفرانسیل کامل خواهد بود که شرایط زیر برقرار باشد:

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}, \frac{\partial R}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial z}, \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x}$$

برای مثال عبارت $(2xz + 2y - 1)dx + (z^2 + 2x)dy + (2yz - 1)dz$ دیفرانسیل کامل است زیرا داریم:

$$P = 2xz + 2y - 1, Q = z^2 + 2x, R = 2yz + 1$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y} = 2, \frac{\partial R}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial z} = 2z, \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x} = 0$$

مشتق جزئی در توابع چند متغیره

اگر $z = \phi(u, v)$ در آن u و v توابعی مشتق‌پذیر با متغیرهای x و y می‌باشد $u = f(x, y)$ و $v = g(x, y)$ آنگاه مشتقات تابع z نسبت به x و y از روابط زیر بدست خواهد آمد:

$$1) \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial \phi}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial \phi}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} \quad 2) \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial \phi}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial \phi}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y}$$

مثال ۱۳: اگر $w = f(u, v)$ با شرط $u = x + at$ و $v = y + bt$ مقدار $\frac{\partial w}{\partial t}$ کدام است؟

(۱) $a \frac{\partial w}{\partial x} + b \frac{\partial w}{\partial y}$

(۲) $b \frac{\partial w}{\partial x} + a \frac{\partial w}{\partial y}$

(۳) $a \frac{\partial w}{\partial x} - b \frac{\partial w}{\partial y}$

(۴) $b \frac{\partial w}{\partial x} + a \frac{\partial w}{\partial y}$

پاسخ: گزینه «۱» چون تابع w شامل متغیر x نمی‌باشد لذا جمله دوم فرمول را ننویسیم:

چون تابع w شامل متغیر y نمی‌باشد لذا جمله اول فرمول را ننویسیم:

$$3) \frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial w}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial w}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial t} = a \frac{\partial w}{\partial u} + b \frac{\partial w}{\partial v}$$

مثال ۱۴: اگر $z = x^2 - xy + 2y^2$ ، $x = (t+1)^2$ ، $y = t + \sqrt{t}$ آنگاه $\frac{dz}{dt}$ در $t=1$ کدام است؟

(۱) ۱۰

(۲) ۳۰

(۳) ۱۴

(۴) ۱۶

پاسخ: گزینه «۲» در این تست تابع $z = \phi(x, y)$ و $x = f(t)$ و $y = g(t)$ در نظر گرفته شده که با توجه به فرمول تغییر u و v به x و y و تغییر $f(x)$ و $g(y)$ به $f(t)$ و $g(t)$ انجام شده است.

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{dy}{dt}$$

$$\frac{dx}{dt} = 2(t+1), \frac{dy}{dt} = 1 + \frac{1}{2\sqrt{t}}, \frac{\partial z}{\partial x} = 2x - y, \frac{\partial z}{\partial y} = 4y - x$$

وقتی $t=1$ در نتیجه $x=4$ و $y=2$ خواهد بود که با قرار دادن آنها در مشتقات فوق داریم:

مثال ۱۵: اگر $z = u^2 + v^2$ و $u = e^{x^2+y^2}$ ، $v = \frac{x}{y}$ باشد، در اینصورت $z'_x(1,1)$ کدام است؟

(۱) $2e^2 + 2e$

(۲) $2e^2 + 2e$

(۳) $2e^2 + 2$

(۴) $2e^2$

پاسخ: گزینه «۳»

مثال ۱۶: اگر $z = xy + x\phi(\frac{y}{x})$ آنگاه حاصل $x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y}$ کدام است؟

(۱) xy

(۲) $\phi(\frac{x}{y})$

(۳) $2xy$

(۴) $xy + z$

گزینه «۴» در این تست تابع ϕ شامل $u = \frac{y}{x}$ می‌باشد و لذا جمله‌های دوم فرمول ذکر شده دیگر مورد نیاز نیست.

$$1) \frac{\partial z}{\partial x} = y + \phi\left(\frac{y}{x}\right) + \left(\frac{\partial \phi}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x}\right) \times x = y + \phi\left(\frac{y}{x}\right) - x \cdot \frac{y}{x^2} \cdot \frac{\partial \phi}{\partial u}$$

$$2) \frac{\partial z}{\partial y} = x + \left(\frac{\partial \phi}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y}\right) \times x = x + \left(\frac{\partial \phi}{\partial u}\right)$$

$$\xrightarrow{1,2} x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = xy + x\phi\left(\frac{y}{x}\right) - y \cdot \frac{\partial \phi}{\partial u} + xy + y \cdot \frac{\partial \phi}{\partial u} = xy + xy + x\phi\left(\frac{y}{x}\right) = xy + z$$

گزینه «۱۷» اگر $z = f\left(\frac{x}{y}\right)$ در نقطه $\begin{cases} x=2 \\ y=2 \end{cases}$ کدام است؟

- ۱) $-\frac{1}{2}f'(1)$ ۲) $\frac{1}{2}f'(1)$ ۳) $f'(1)$ ۴) $\frac{1}{2}$

$$z = f\left(\frac{x}{y}\right) \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{y} f'\left(\frac{x}{y}\right) \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial x}(2,2) = \frac{1}{2} f'\left(\frac{2}{2}\right) = \frac{f'(1)}{2}$$

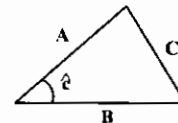
گزینه «۲»

گزینه «۱۸»: یک ضلع مثلثی $2/\sqrt{3}$ است و با سرعت $10 \frac{cm}{s}$ در حال افزایش است. یک ضلع دیگر این مثلث $1/6$ متر می‌باشد که با

سرعت $5 \frac{cm}{s}$ در حال افزایش است. زاویه بین این دو ضلع $\frac{\pi}{6}$ است. مساحت مثلث با چه سرعتی در حال افزایش می‌باشد؟

- ۱) $0/07 \left(\frac{m^2}{s}\right)$ ۲) $0/09 \left(\frac{m^2}{s}\right)$ ۳) $0/14 \left(\frac{m^2}{s}\right)$ ۴) $0/11 \left(\frac{m^2}{s}\right)$

گزینه «۱»: چون اضلاع با زمان تغییر پیدا می‌کنند، مساحت نیز با زمان تغییر پیدا خواهد کرد:



$$S = \frac{1}{2} AB \sin \theta \Rightarrow \frac{\partial S}{\partial t} = \frac{\partial S}{\partial A} \frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial S}{\partial B} \frac{\partial B}{\partial t} = \frac{B \sin \theta}{2} \left(\frac{dA}{dt}\right) + \frac{A \sin \theta}{2} \left(\frac{dB}{dt}\right)$$

توجه شود $\frac{\partial S}{\partial t}$ سرعت افزایش مساحت و $\frac{\partial A}{\partial t}$ ، $\frac{\partial B}{\partial t}$ سرعت افزایش اضلاع می‌باشند:

$$\frac{\partial S}{\partial t} = \frac{1/\sqrt{3} \sin \frac{\pi}{6}}{2} \times \frac{10}{100} + \frac{2/\sqrt{3} \times \sin \frac{\pi}{6}}{2} \times \frac{5}{100} = 0/07 \left(\frac{m^2}{s}\right)$$

گزینه «۱۹»: اگر $w = r^2 \cos 2\theta$ ، $y = r \sin \theta$ و $x = r \cos \theta$ باشد، مقدار $\frac{\partial w}{\partial x}$ به ازای $x=1$ و $y=-1$ کدام است؟

- ۱) $\frac{1}{2}$ ۲) 2 ۳) $-\frac{1}{2}$ ۴) -2

$$w = r^2(1 - 2\sin^2 \theta) = r^2 - 2r^2 \sin^2 \theta = r^2 - 2(r \sin \theta)^2 = (x^2 + y^2) - 2y^2 = x^2 - y^2$$

گزینه «۲»

$$\frac{\partial w}{\partial x} = 2x \xrightarrow{x=1} \frac{\partial w}{\partial x} = 2$$

قاعده مشتق‌گیری از توابع مرکب با تعداد متغیرهای بیشتر

اگر $F = \phi(x, y, z, u, v)$ توابعی مشتق‌پذیر بر حسب متغیرهای t, s, r هستند. آنگاه داریم:

$$\frac{\partial F}{\partial r} = \frac{\partial F}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial F}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial r} + \frac{\partial F}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial r} + \frac{\partial F}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial F}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial r}$$

گزینه «۲۰»: اگر $F(x, y, z) = x^2 + yz + z^2$ باشد و $x = e^t$ ، $y = e^t$ و $z = e^{-t}$ باشد، آنگاه مشتق F نسبت به t کدام است؟

- ۱) $2(e^{2t} + e^{-2t} + 1)$ ۲) $2(e^{2t} + e^{-2t})$ ۳) $2(e^{2t} - e^{-2t} - 1)$ ۴) $2(e^{2t} - e^{-2t})$

گزینه «۴»

$$\frac{\partial F}{\partial t} = \frac{\partial F}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial t} = 2x \cdot e^t + z \cdot e^t + (y + 2z)(-e^{-t}) = 2e^{2t} + 1 - 1 - 2e^{-2t} = 2(e^{2t} - e^{-2t})$$

گزینه «۲۱»: اگر $T(x, y, z, t) = \frac{xy}{1+z} (1+t)$ و $y = 2t$ ، $x = t$ و $z = t - t^2$ باشد، آنگاه مقدار $\frac{\partial T}{\partial t}$ در نقطه $t=1$ کدام است؟

- ۱) ۶ ۲) ۸ ۳) ۱۴ ۴) ۱۲

گزینه «۲»

$$t=1 \Rightarrow x=1, y=2, z=0$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial T}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial T}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial T}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial t} + \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{y}{1+z} (1+t) \times 1 + \frac{x}{1+z} (1+t) \times 2 + \frac{-xy}{(1+z)^2} (1+t)(-2t) + \frac{xy}{1+z}$$

$$\left. \frac{\partial T}{\partial t} \right|_{t=1} = 4 \times 1 + 1 \times 2 \times 2 - 4 \times (-1) + 2 = 14$$

گزینه «۲۲»: عبارت $w = f(y-z, z-x, x-y)$ جواب کدام معادله دیفرانسیل با مشتقات نسبی است؟

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \quad (1) \quad \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (2) \quad \frac{\partial w}{\partial z} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial y} \quad (3) \quad \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \quad (4)$$

گزینه «۳»

$$u = y - z, v = z - x, t = x - y$$

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial x} = 0 - \frac{\partial w}{\partial v} + \frac{\partial w}{\partial t}, \quad \frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\partial w}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial y} = \frac{\partial w}{\partial u} + 0 - \frac{\partial w}{\partial t}$$

$$\frac{\partial w}{\partial z} = \frac{\partial w}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial z} = -\frac{\partial w}{\partial u} + \frac{\partial w}{\partial v} + 0$$

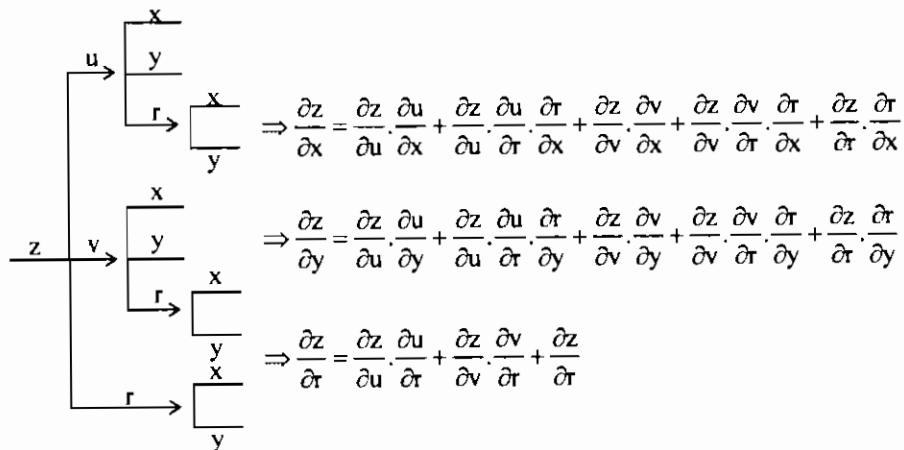
$$\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{\partial w}{\partial v} + \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial w}{\partial u} - \frac{\partial w}{\partial t} - \frac{\partial w}{\partial u} + \frac{\partial w}{\partial v} = 0$$

لذا با جمع طرفین تساوی‌های فوق داریم:

گزینه «۲۳»: اگر $z = \phi(u, v, r)$ و v, u و r توابعی مشتق‌پذیر باشند، و u و v توابعی با متغیرهای x, y و r باشند و r تابعی با

متغیرهای x و y باشد، آنگاه مقادیر $\frac{\partial z}{\partial r}$ و $\frac{\partial z}{\partial y}$ را به دست آورید.

گزینه «۱»



گزینه «۲۴»: اگر $F(x-az, y-bz) = 0$ در صورتی که x و y متغیرهای مستقل و z تابعی بر حسب x و y باشد، کدام است؟

- ۱) صفر ۲) ۱ ۳) ab ۴) $\frac{a}{b}$

گزینه «۲»

$$u = x - az, v = y - bz, F(u, v) = 0$$

$$dF = \frac{\partial F}{\partial u} du + \frac{\partial F}{\partial v} dv = F_u(dx - adz) + F_v(dy - bdz) = 0 \Rightarrow F_u dx + F_v dy = (aF_u + bF_v) dz \quad (1)$$

$$\xrightarrow{\text{طرفین را بر } dx \text{ تقسیم می کنیم}} F_u + F_v \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dx} (aF_u + bF_v) \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{F_u}{aF_u + bF_v}$$

$$\xrightarrow{\text{به همین ترتیب با تقسیم رابطه (۱) بر } dy} \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{bF_v}{aF_u + bF_v} \Rightarrow a \frac{\partial z}{\partial x} + b \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{aF_u + bF_v}{aF_u + bF_v} = 1$$

مشتق گیری ضمنی

هر گاه تابع $F(x, y, z) = 0$ دارای مشتق ضمنی باشد می توان یکی از متغیرها را تابعی از دو متغیر دیگر در نظر گرفت. داریم:

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F'_y}{F'_z}, \quad \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F'_x}{F'_z}$$

تذکر ۳: توجه شود در شرایطی که تعیین z بر حسب x و y به طور واضح ممکن نباشد. از فرمول فوق استفاده می شود.

مثال ۲۵: اگر $F(x, y, z) = \sin xy + ze^{xyz} = 0$ آنگاه $\frac{\partial z}{\partial y}$ کدام است؟

$$\frac{1}{zy} e^{-xyz} \cos xy + \frac{z}{y} \quad (۴) \quad \frac{1}{zy} e^{-xy} \cos xy + \frac{z}{x} \quad (۳) \quad -\frac{1}{zy} e^{-xyz} \cos xy - \frac{z}{y} \quad (۲) \quad -\frac{1}{zx} e^{-xyz} \cos xy - \frac{z}{x} \quad (۱)$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F'_y}{F'_z} = -\frac{x \cos xy + zxe^{xyz}}{zye^{xyz}} = -\frac{1}{zy} e^{-xyz} \cos xy - \frac{z}{y}$$

پاسخ: گزینه «۲»

مثال ۲۶: اگر $\sin xy + \sin yz + \sin zx = 1$ آنگاه مقدار $\frac{\partial z}{\partial x}$ در نقطه $A(1, 0, 0)$ کدام است؟

$$-1 \quad (۱) \quad 1 \quad (۲) \quad \text{صفر} \quad (۳) \quad \text{تابع مشتق پذیر نیست.} \quad (۴)$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F'_x}{F'_z} = -\frac{y \cos xy + z \cos zx}{y \cos yz + x \cos zx} \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial x}(1, 0, 0) = 0$$

پاسخ: گزینه «۳»

تذکر ۴: اگر $F(x, y, z, w) = 0$ باشد. آنگاه مثلاً برای محاسبه عبارتی مانند $\frac{\partial z}{\partial y}$ داریم:

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F'_y}{F'_z}$$

مثال ۲۷: اگر $w = x^T e^{y+z}$ آنگاه حاصل $\frac{\partial z}{\partial y}$ کدام است؟

$$-1 \quad (۱) \quad 1 \quad (۲) \quad x^T \quad (۳) \quad x^T e^{y+z} \quad (۴)$$

$$F(x, y, z, w) = w - x^T e^{y+z} = 0 \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F'_y}{F'_z} = -\frac{-x^T e^{y+z}}{-x^T e^{y+z}} = -1$$

پاسخ: گزینه «۱»

مثال ۲۸: در رابطه $x^T z + 2y + e^{x-y-2z} = 0$ متغیرهای x و y مستقل از یکدیگرند. مقدار $\frac{\partial z}{\partial x}$ در نقطه $(1, -1, 1)$ کدام است؟

$$-3 \quad (۱) \quad -2 \quad (۲) \quad 2 \quad (۳) \quad 3 \quad (۴)$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F'_x}{F'_z} = -\frac{2xz + e^{x-y-2z}}{x^T - 2e^{x-y-2z}} \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial x}(1, -1, 1) = -\frac{2 \times 1 \times 1 + e^{1+1-2}}{1 - 2e^{1+1-2}} = 3$$

پاسخ: گزینه «۴»

مثال ۲۹: هرگاه $x^y + y^z + z = 3$ باشد. حاصل z'_y در نقطه $A(1, 1, 1)$ کدام است؟

$$1 \quad (۱) \quad \text{صفر} \quad (۲) \quad -1 \quad (۳) \quad \text{تابع مشتق ندارد.} \quad (۴)$$

$$F(x, y, z) = x^y + y^z + z - 3 = 0$$

پاسخ: گزینه «۳»

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F'_y}{F'_z} = -\frac{x^y \ln x + zy^{z-1}}{y^z \ln y + 1} \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial y}(1, 1, 1) = -1$$

قضیه اویلر

تعریف تابع همگن

تابع $f(x, y)$ را همگن از درجه n می گوئیم هرگاه به ازای هر عدد مثبت λ داشته باشیم:

مثلاً تابع $\sin \frac{x}{y}$ همگن از درجه صفر. تابع $x^T + y^T$ همگن از درجه ۲ و تابع $x^T + y$ غیرهمگن می باشد.

هرگاه تابع $f(x, y, z)$ همگن از درجه n و دارای مشتق در مرتبه اول باشد. آنگاه داریم:

$$x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} + z \frac{\partial f}{\partial z} = nf$$

تذکر ۵: (قضیه اویلر) اگر تابع دو متغیره $f(x, y)$ در نظر گرفته شود. داریم:

$$x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} = nf(x, y)$$

مثال ۳۰: هرگاه $f(x, y) = (x^T + y^T) \text{tg} \left(\frac{\sqrt{x} - \sqrt{y}}{\sqrt{x+y}} \right)$ آنگاه حاصل عبارت $x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y}$ کدام است؟

$$\text{صفر} \quad (۴) \quad 2f \quad (۳) \quad 2f \quad (۲) \quad f \quad (۱)$$

$$f(\lambda x, \lambda y) = (\lambda^T x^T + \lambda^T y^T) \text{tg} \frac{\sqrt{\lambda x} - \sqrt{\lambda y}}{\sqrt{\lambda x + \lambda y}} = \lambda^T (x^T + y^T) \text{tg} \frac{\sqrt{\lambda}(\sqrt{x} - \sqrt{y})}{\sqrt{\lambda}(x+y)} = \lambda^T f(x, y)$$

پاسخ: گزینه «۲»

تابع f تابعی همگن از درجه ۲ می باشد. لذا طبق قضیه اویلر داریم:

$$x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} = 2f(x, y)$$

مثال ۳۱: هرگاه $f(x, y) = \sin \frac{\sqrt{x^T + y^T}}{x+y}$ آنگاه حاصل $\frac{\partial f}{\partial x}$ کدام است؟

$$-\frac{y}{x} \quad (۴) \quad -\frac{x}{y} \quad (۳) \quad \frac{y}{x} \quad (۲) \quad \frac{x}{y} \quad (۱)$$

$$f(\lambda x, \lambda y) = \sin \frac{\sqrt{\lambda^T(x^T + y^T)}}{\lambda(x+y)} = \sin \frac{\lambda \sqrt{x^T + y^T}}{\lambda(x+y)} = \sin \frac{\sqrt{x^T + y^T}}{x+y} = f(x, y)$$

پاسخ: گزینه «۴»

$$x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \Rightarrow x \frac{\partial f}{\partial x} = -y \frac{\partial f}{\partial y} \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{y}{x} \frac{\partial f}{\partial y}$$

ملاحظه می گردد تابع f همگن از درجه صفر است. لذا داریم:

مثال ۳۲: در تابع $z = \frac{x^T}{y} - \frac{x}{x+y}$ حاصل $A = x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y}$ کدام است؟

$$\text{صفر} \quad (۴) \quad z \quad (۳) \quad \frac{x}{y} \quad (۲) \quad \frac{x^T}{y} \quad (۱)$$

$$z_1 = \frac{x^T}{y} \quad \text{و} \quad z_2 = -\frac{x}{x+y}$$

پاسخ: گزینه «۱» توجه شود تابع z از جمع جبری دو تابع z_1 و z_2 حاصل می گردد که تابع z_1 همگن از درجه یک و

تابع z_2 همگن از درجه صفر می باشد. لذا بر طبق قضیه اویلر مقدار A برابر خواهد بود با:

$$A = 1 \times z_1 + 0 \times z_2 = \frac{x^T}{y}$$

توضیح: روش محاسبه طولانی تر که بعضاً در کتابهای دیگر آمده محاسبه مشتقها و انجام عملیات جبری می باشد.

نکته ۳: اگر $F(u) = f(x, y, z)$ و f تابعی همگن از درجه n باشد. آنگاه داریم:

$$x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} + z \frac{\partial u}{\partial z} = n \frac{F(u)}{F'(u)}$$

مثال ۲۲: اگر $u = \text{Arcsin}\left(\frac{x+y}{\sqrt{x+y}}\right)$ آنگاه حاصل $x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y}$ کدام است؟

$\cos u$ (۱) $\sin u$ (۲) $\frac{1}{2} \text{tgu}$ (۳) tgu (۴)

پاسخ: گزینه «۳»
 $u = \text{Arcsin}\left(\frac{x+y}{\sqrt{x+y}}\right) \Rightarrow f(u) = \sin u = \frac{x+y}{\sqrt{x+y}}$

تابع $f(x,y) = \frac{x+y}{\sqrt{x+y}}$ همگن از درجه $n = \frac{1}{2}$ می باشد. لذا داریم:

نکته ۴: هرگاه $u = f(x,y)$ تابعی همگن از درجه n باشد. آنگاه همواره روابط زیر را خواهیم داشت:

$1) x \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + y \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = (n-1) \frac{\partial u}{\partial x}$ و $۲) x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + ۲xy \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = n(n-1)u$
 $۲) y \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + x \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = (n-1) \frac{\partial u}{\partial y}$

مثال ۲۴: اگر $z = x^2 e^{\frac{y}{x}}$ آنگاه $A = x^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + ۲xy \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + y^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ برابر کدام است؟

z (۱) $۲z$ (۲) $۳z$ (۳) $۶z$ (۴)

پاسخ: گزینه «۴»
 $z(\lambda x, \lambda y) = \lambda^2 x^2 e^{\frac{y}{\lambda x}} = \lambda^2 x^2 e^{\frac{y}{x}} = \lambda^2 z$

تابع z همگن از درجه $n = ۳$ می باشد. لذا با توجه به رابطه (۳) نکته فوق داریم:

مثال ۲۵: تابع $z = yf\left(\frac{x}{y}\right) + F\left(\frac{x}{y}\right)$ در کدامیک از معادلات زیر صدق می کند.

$x^2 z_{xx} - ۲xyz_{xy} + y^2 z_{yy} = ۰$ (۱) $x^2 z_{xx} + ۲xyz_{xy} + y^2 z_{yy} = ۰$ (۲)
 $z_{xx} - ۲z_{xy} + z_{yy} = ۰$ (۳) $z_{xx} + ۲z_{xy} + z_{yy} = ۰$ (۴)

پاسخ: گزینه «۱»
 تابع z از جمع جبری دو تابع $z_1 = yf\left(\frac{x}{y}\right)$ و $z_2 = F\left(\frac{x}{y}\right)$ حاصل می گردد که تابع z_1 همگن از درجه یک و تابع z_2 همگن از درجه صفر است. لذا بر طبق رابطه (۳) نکته فوق داریم:

$x^2 z_{xx} + ۲xyz_{xy} + y^2 z_{yy} = ۱(۱-۱)z_1 + ۰(۰-۱)z_2 = ۰$

توضیح: روش محاسبه طولانی تر که بعضاً در کتابهای دیگر آمده محاسبه مشتقها و انجام عملیات جبری می باشد.

محاسبه مشتقات جزئی یک دستگاه با استفاده از ژاکوبین

اگر $f(x,y,u,v) = ۰$ و $g(x,y,u,v) = ۰$ که در آن $u = u(x,y)$ و $v = v(x,y)$ می باشد. آنگاه داریم:

$۱) \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial(f,g)}{\partial(x,v)}}{\frac{\partial(f,g)}{\partial(u,v)}}$ $۲) \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial(f,g)}{\partial(u,x)}}{\frac{\partial(f,g)}{\partial(u,v)}}$ $۳) \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial(f,g)}{\partial(u,y)}}{\frac{\partial(f,g)}{\partial(u,v)}}$ $۴) \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial(f,g)}{\partial(y,v)}}{\frac{\partial(f,g)}{\partial(u,v)}}$

که $J = \frac{\partial(f,g)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} f_u & f_v \\ g_u & g_v \end{vmatrix}$ ژاکوبین می باشد.

مثال ۲۶: اگر $u+v = x+y$ و $u^2+v^2 = x-y$ باشد. آنگاه $\frac{\partial u}{\partial x}$ کدام است؟

$\frac{۲v-۱}{۴uv-۱}$ (۱) $\frac{۲v+۱}{۴uv-۱}$ (۲) $\frac{۲u+۱}{۴uv-۱}$ (۳) $\frac{۲u-۱}{۴uv-۱}$ (۴)

پاسخ: گزینه «۲»
 $\begin{cases} f(x,y,u,v) = u^2 + v^2 - x + y = ۰ \\ g(x,y,u,v) = u + v^2 - x - y = ۰ \end{cases} \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\begin{vmatrix} f_x & f_v \\ g_x & g_v \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} f_u & f_v \\ g_u & g_v \end{vmatrix}} = -\frac{\begin{vmatrix} -۱ & ۱ \\ -۱ & ۲v \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} ۲u & ۱ \\ ۱ & ۲v \end{vmatrix}} = \frac{۲v-۱}{۴uv-۱}$

مثال ۲۷: اگر $x-y+u^2+v^2 = ۱$ و $x+y+u^2e^v = ۲$ باشد. آنگاه $\frac{\partial u}{\partial y}$ کدام است؟

$\frac{u^2 + ۲ve^{-v}}{۲u^2 + ۶u^2v}$ (۱) $\frac{u^2 + ۲ve^{-v}}{۲u^2 + ۶u^2v}$ (۲) $\frac{u^2 + ۲ve^{-v}}{۲u^2 - ۶u^2v}$ (۳) $\frac{u^2 - ۲ve^{-v}}{۲u^2 + ۶u^2v}$ (۴)

پاسخ: گزینه «۲»

$f(x,y,u,v) = x-y+u^2+v^2-1=0$

$g(x,y,u,v) = x+y+u^2e^v-2=0$

$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\begin{vmatrix} -۱ & ۲v \\ ۱ & u^2e^v \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} ۲u & ۲v \\ ۲u^2e^v & u^2e^v \end{vmatrix}} = \frac{u^2e^v + ۲v}{۲u^2e^v - ۶u^2ve^v} = \frac{u^2 + ۲ve^{-v}}{۲u^2 - ۶u^2v}$

نکته ۵: اگر $f(u,v,w)$, $g(u,v,w)$ و $h(u,v,w)$ نسبت به u و v و w مشتق پذیر باشند. آنگاه داریم:

$\frac{\partial(f,g,h)}{\partial(u,v,w)} = \begin{vmatrix} f_u & f_v & f_w \\ g_u & g_v & g_w \\ h_u & h_v & h_w \end{vmatrix}$

مثال ۲۸: اگر $u = x^2 + y^2 + z^2$, $v = x + y + z$, $w = xy + yz + zx$ حاصل $\frac{\partial(u,v,w)}{\partial(x,y,z)}$ کدام است؟

صفر (۱) ۱ (۲) xyz (۳) $x^2y^2z^2$ (۴)

پاسخ: گزینه «۱»

$\frac{\partial(u,v,w)}{\partial(x,y,z)} = \begin{vmatrix} ۲x & ۲y & ۲z \\ ۱ & ۱ & ۱ \\ y+z & x+z & x+y \end{vmatrix}$

توجه شود به ازای $x=y=z = \frac{1}{3}$ هر سه سطر و ستون دترمینان برابر یک می شود و در این حالت حاصل دترمینان برابر صفر است. حال در

گزینه ها هر کدام از آنها که به ازای $x=y=z = \frac{1}{3}$ برابر صفر شد جواب است. لذا فقط گزینه (۱) می تواند صحیح باشد.

بدست آوردن نقاط بحرانی و اکسترمهای توابع دو متغیره

اگر تابع $Z = f(x,y)$ و مشتقات جزئی آن (تا مرتبه دوم) در نقطه (x_0, y_0) پیوسته باشند و $f_x(x_0, y_0) = f_y(x_0, y_0) = ۰$ فرض کنیم:

$\Delta = f_{xx} \cdot f_{yy} - f_{xy}^2$ باشد.

- اگر $\Delta(x_0, y_0) > ۰$ باشد. آنگاه نقطه (x_0, y_0) اکسترم نسبی تابع است که اگر $f_{xx}(x_0, y_0) > ۰$ باشد. نقطه (x_0, y_0) مینیم نسبی و اگر $f_{xx}(x_0, y_0) < ۰$ باشد. نقطه (x_0, y_0) ماکزیمم نسبی تابع می باشد.
- اگر $\Delta(x_0, y_0) < ۰$ باشد. آنگاه نقطه (x_0, y_0) نقطه زینی تابع می باشد.

نکته ۶: ریشه های دستگاه $\begin{cases} f_x = ۰ \\ f_y = ۰ \end{cases}$ نقاط بحرانی تابع محسوب می شوند.

مثال ۲۹: اگر $f(x,y) = x^2y - y^2 - x^2 + xy$ کدام گزینه صحیح است؟

- $(۰,۰)$ نقطه بحرانی نیست (۲) $(۰,۰)$ یک نقطه زینی است (۳) $(۰,۰)$ مینیمم نسبی است (۴) $(۰,۰)$ ماکزیمم نسبی است

پاسخ: گزینه «۲»

$\begin{cases} f_x = ۲xy - ۲x^2 + y = ۰ \\ f_y = x^2 - ۲y + x = ۰ \end{cases} \Rightarrow A(۰,۰) \rightarrow$ نقطه بحرانی می باشد

$\begin{cases} f_{xx} = ۲y - ۴x \\ f_{yy} = -۲ \\ f_{xy} = ۲x + ۱ \end{cases} \Rightarrow \Delta(۰,۰) = ۰ - (۱)^2 = -۱ < ۰ \rightarrow$ نقطه زینی

مثال ۴۰: تابع $z = x^2 - xy + y^2 - 3x$ دارای چه نوع نقطه‌ای می‌باشد؟

- (۱) زینی (۲) مینیمم (۳) ماکزیمم (۴) نقطه عادی

پاسخ: گزینه «۲»

$$\left. \begin{aligned} z_x = 2x - y - 3 &\Rightarrow z_{xx} = 2, z_{xy} = -1 \\ z_y = -x + 2y &\Rightarrow z_{yy} = 2 \\ \Delta = z_{xx} \cdot z_{yy} - z_{xy}^2 &= 2 \times 2 - (-1)^2 = 3 > 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \text{تابع دارای مینیمم نسبی است}$$

مثال ۴۱: بیشترین مقدار تابع دو متغیره $z = -2x^2 - y^2 + 2x + 3y$ کدام است؟

- (۱) $\frac{3}{2}$ (۲) $\frac{11}{4}$ (۳) $\frac{5}{2}$ (۴) $\frac{9}{4}$

پاسخ: گزینه «۲»

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x} = -4x + 2 = 0 &\Rightarrow x = \frac{1}{2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -4 < 0, \frac{\partial z}{\partial x \partial y} = 0 \\ \frac{\partial z}{\partial y} = -2y + 3 = 0 &\Rightarrow y = \frac{3}{2}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -2, \Delta = z_{xx} \cdot z_{yy} - z_{xy}^2 = (-4)(-2) = 8 \end{aligned} \right.$$

نقطه $(\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$ ماکزیمم نسبی است.

$$z(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}) = -2(\frac{1}{2})^2 - (\frac{3}{2})^2 + 2(\frac{1}{2}) + 3(\frac{3}{2}) = \frac{11}{4}$$

به دست آوردن ماکزیمم و مینیمم توابع مقید با استفاده از ضرایب لاگرانژ

گاهی در مسایل مقادیر ماکزیمم و مینیمم توابعی را که دامنه آنها زیر مجموعه‌ای از یک صفحه خاص، یک قرص یا ناحیه مثلثی است یا مقادیر اکثرتم تابع با در نظر گرفتن شرط خاصی مورد سوال قرار می‌گیرد. برای این منظور از روش ضریب لاگرانژ استفاده می‌کنیم اگر بخواهیم اکثرتم تابع $f = f(x, y, z)$ را با شرط $g(x, y, z) = 0$ به دست آوریم، تابع لاگرانژ را به صورت زیر تشکیل می‌دهیم:

$$u = f(x, y, z) + \lambda \cdot g(x, y, z)$$

λ را ضریب لاگرانژ می‌نامیم و باید معادلات زیر همزمان برقرار باشد:

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} + \lambda \frac{\partial g}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y} + \lambda \frac{\partial g}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial f}{\partial z} + \lambda \frac{\partial g}{\partial z} &= 0 \\ g(x, y, z) &= 0 \end{aligned} \right.$$

مثال ۴۲: ماکزیمم مقدار تابع $z = y^2 - x^2$ با شرط $x + 2y = 6$ کدام است؟

- (۱) ۶ (۲) ۱۲ (۳) ۱۵ (۴) ۱۸

پاسخ: گزینه «۲»

$$u = y^2 - x^2 + \lambda(x + 2y - 6)$$

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} = -2x + \lambda = 0 &\Rightarrow x = \frac{\lambda}{2} \\ \frac{\partial u}{\partial y} = 2y + 2\lambda = 0 &\Rightarrow y = -\lambda \end{aligned} \right. \xrightarrow{x+2y-6=0} \frac{\lambda}{2} - 2\lambda - 6 = 0 \Rightarrow \lambda = -4$$

$$z_{max} = 16 - 4 = 12$$

ملاحظه می‌گردد $A(-2, 4)$ نقطه ماکزیمم تابع است، پس داریم:

مثال ۴۳: ماکزیمم و مینیمم تابع $z = 6 - 4x - 3y$ به شرطی که $x^2 + y^2 = 1$ باشد، به ترتیب کدام است؟

- (۱) ۱۱ و ۱ (۲) ۱۱ و ۱ (۳) ۴ و ۶ (۴) ۶ و ۴

پاسخ: گزینه «۱»

$$U = 6 - 4x - 3y + \lambda(x^2 + y^2 - 1)$$

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} = -4 + 2\lambda x = 0 &\Rightarrow x = \frac{2}{\lambda} \\ \frac{\partial u}{\partial y} = -3 + 2\lambda y = 0 &\Rightarrow y = \frac{3}{2\lambda} \\ x^2 + y^2 = 1 \end{aligned} \right. \Rightarrow \left(\frac{2}{\lambda} \right)^2 + \left(\frac{3}{2\lambda} \right)^2 = 1 \xrightarrow{x^2+y^2=1} \frac{4}{\lambda^2} + \frac{9}{4\lambda^2} = 1 \Rightarrow \frac{16+9}{4\lambda^2} = 1$$

$$\Rightarrow \frac{25}{4\lambda^2} = 1 \Rightarrow \frac{4}{2\lambda} = \pm 1 \Rightarrow \lambda = \pm \frac{5}{2}$$

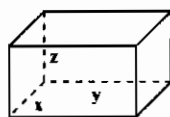
چون $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 2\lambda$ و $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 0$ پس به ازای مقادیر $\lambda > 0$ تابع دارای مینیمم و به ازای $\lambda < 0$ تابع دارای ماکزیمم است:

$$\lambda = \frac{5}{2} \Rightarrow x = \frac{4}{5}, y = \frac{3}{5} \Rightarrow z_{min} = 6 - \frac{16}{5} - \frac{9}{5} = 1$$

$$\lambda = -\frac{5}{2} \Rightarrow x = -\frac{4}{5}, y = -\frac{3}{5} \Rightarrow z_{max} = 6 + \frac{16}{5} + \frac{9}{5} = 11$$

مثال ۴۴: مطابق شکل می‌خواهیم یک استخر روباز به شکل مکعب با حجم ۳۲ متر مکعب بسازیم. ابعاد این استخر برای اینکه کمترین مصالح ساختمانی در ساخت آن مصرف شود، کدام مقادیر باید باشد؟

- (۱) $x=4, y=2, z=4$ (۲) $x=2, y=16, z=1$ (۳) $x=4, y=4, z=2$ (۴) $x=4, y=2, z=4$



پاسخ: گزینه «۳» برای اینکه کمترین مقدار مصالح مصرف شود باید مساحت

آن مینیمم شود. از طرفی مساحت این استخر با توجه به اینکه روباز است به صورت $S = xy + 2yz + 2zx$ قابل بیان است.

لذا با شرط $V = xyz = 32$ باید S مینیمم گردد:

$$U = xy + 2yz + 2zx + \lambda(xyz - 32)$$

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} = x + 2z + \lambda(yz) = 0 & \quad (1) \\ \frac{\partial u}{\partial y} = x + 2z + \lambda(xz) = 0 & \quad (2) \\ \frac{\partial u}{\partial z} = 2y + 2x + \lambda(xy) = 0 & \quad (3) \end{aligned} \right.$$

اگر رابطه (۱) را در x و رابطه (۲) را در y ضرب کرده و از هم کم کنیم:

$$x = 2z$$

به همین ترتیب از ترکیب روابط (۱) و (۳) خواهیم داشت:

$$V = xyz = 2z \times 2z \times z \Rightarrow 2z = 4z^2 \Rightarrow z^2 = 2 \Rightarrow z = 2 \Rightarrow x = 4, y = 4$$

نکته ۷:

الف) اگر $x + y + z = a$ باشد، ماکزیمم عبارت $A = x^m y^n z^p$ برابر $k = \frac{m^m n^n p^p a^{m+n+p}}{(m+n+p)^{m+n+p}}$ خواهد بود.

ب) اگر داشته باشیم $c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_n x_n = k$ و بخواهیم ماکزیمم $x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_n^{\alpha_n}$ را محاسبه کنیم از رابطه زیر استفاده می‌کنیم:

$$\frac{c_1 x_1}{\alpha_1} = \frac{c_2 x_2}{\alpha_2} = \dots = \frac{c_n x_n}{\alpha_n}$$

ج) اگر داشته باشیم $x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_n^{\alpha_n} = k$ و بخواهیم مینیمم $c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_n x_n$ را محاسبه کنیم از رابطه زیر استفاده می‌کنیم:

$$\frac{c_1 x_1}{\alpha_1} = \frac{c_2 x_2}{\alpha_2} = \dots = \frac{c_n x_n}{\alpha_n}$$

مثال ۴۵: رابطه $x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 20$ برقرار می‌باشد. حداکثر مقدار عبارت $x_1 x_2^2 x_3^3 x_4^4$ کدامیک از گزینه‌های زیر می‌باشد؟

- (۱) ۶۲۵ (۲) ۲۵۶ (۳) ۱۰۲۴ (۴) ۵۱۲

پاسخ : گزینه «۳» $\frac{C_1 X_1}{\alpha_1} = \frac{C_2 X_2}{\alpha_2} = \frac{C_3 X_3}{\alpha_3} = \frac{C_4 X_4}{\alpha_4} \Rightarrow \frac{2X_1}{2} = \frac{2X_2}{2} = \frac{3X_3}{3} = \frac{4X_4}{4} \Rightarrow X_1 = X_2 = X_3 = X_4 = X$

$X_1 + 2X_2 + 3X_3 + 4X_4 = 20 \Rightarrow 10X = 20 \Rightarrow X = 2$
 $\Rightarrow X_1 = X_2 = X_3 = X_4 = 2 \Rightarrow \text{Max } X_1 X_2 X_3 X_4 = 2^{10} = 1024$

مثال ۴۶ : حداقل مقدار $\text{tg}^2 x + 1024 \cot^2 x$ را پیدا کنید؟

- (۱) ۱۸۶
- (۲) ۳۲
- (۳) ۲۳۵
- (۴) ۱۹۲

پاسخ : گزینه «۴»

$$(\text{tg}^2 x)^{\frac{1}{2}} (\cot^2 x) = 1 \Rightarrow \frac{\text{tg}^2 x}{1} = \frac{1024 \cot^2 x}{1} \Rightarrow 2 \text{tg}^2 x = 1024 \cot^2 x \Rightarrow \text{tg}^4 x = 512 \Rightarrow \text{tg} x = 2$$

در نتیجه حداقل مقدار عبارت فوق به ازای $\text{tg} x = 2$ به دست می آید:

$$\text{Min}(\text{tg}^2 x + 1024 \cot^2 x) = 2^2 + 1024 \times 2^{-2} = 2^2 + 2^2 = 64 + 128 = 192$$

مثال ۴۷ : اگر $x + y + z = 8$ باشد، مینیمم عبارت $A = x^2 y^2 z^2$ کدام است؟

- (۱) ۵۱۲۰
- (۲) ۳۰۱۲
- (۳) ۷۲۹
- (۴) ۲۹۱۶

پاسخ : گزینه «۴» طبق نکته (۷)، $m = 3$ و $n = 3, p = 2$ می باشد:

$$k = \frac{3^2 \times 3^2 \times 3^2 \times 8^4}{8^4} = 2916$$

صفحه مماس و خط قائم بر یک سطح

معادله صفحه مماس بر رویه S با ضابطه $F(x, y, z) = 0$ در نقطه $P_0(x_0, y_0, z_0)$ عبارت است از:

$$F'_x(x_0, y_0, z_0)(x - x_0) + F'_y(x_0, y_0, z_0)(y - y_0) + F'_z(x_0, y_0, z_0)(z - z_0) = 0$$

و معادله خط قائم بر این رویه در نقطه P_0 عبارت است از:

$$\frac{x - x_0}{F'_x(x_0, y_0, z_0)} = \frac{y - y_0}{F'_y(x_0, y_0, z_0)} = \frac{z - z_0}{F'_z(x_0, y_0, z_0)}$$

مثال ۴۸ : معادله صفحه مماس بر کره $x^2 + y^2 + z^2 = 3$ در نقطه $(1, 1, 1)$ واقع بر روی کره کدام است؟

- (۱) $x + y + z = 1$
- (۲) $x + y + z = 2$
- (۳) $x + y + z = 3$
- (۴) $x + y + z = 4$

پاسخ : گزینه «۳»

$$F'_x = 2x, F'_y = 2y, F'_z = 2z, \quad x_0 = 1, y_0 = 1, z_0 = 1$$

$$2(x-1) + 2(y-1) + 2(z-1) = 0 \Rightarrow x + y + z = 3$$

مثال ۴۹ : معادله صفحه مماس بر سطح به معادله $x^2 + y^2 + xz = 2$ در نقطه $(1, 0, 1)$ کدام است؟

- (۱) $x + y + 2z = 3$
- (۲) $x + y + z = 3$
- (۳) $2x + 2z = 5$
- (۴) $2x + 3z = 5$

پاسخ : گزینه «۳»

$$\begin{cases} F'_x = 2x + z^2, F'_y = 2y, F'_z = 2xz \\ F'_x(1, 0, 1) = 3, F'_y(1, 0, 1) = 0, F'_z(1, 0, 1) = 2 \end{cases} \Rightarrow 2(x-1) + 2(z-1) = 0 \Rightarrow 2x + 2z = 5$$

مثال ۵۰ : معادله خط قائم بر رویه $x^2 + y^2 + z = 9$ در نقطه $(1, 2, 4)$ کدام است؟

- (۱) $x - 1 = \frac{y - 2}{2} = \frac{z - 4}{2}$
- (۲) $x - 1 = \frac{y - 2}{4} = \frac{z - 4}{4}$
- (۳) $x - 1 = y - 2 = z - 4$
- (۴) $\frac{x - 1}{2} = \frac{y - 2}{4} = \frac{z - 4}{2}$

پاسخ : گزینه «۲»

$$F'_x = 2x, F'_y = 2y, F'_z = 1 \Rightarrow \frac{x - 1}{2} = \frac{y - 2}{2} = \frac{z - 4}{1}$$

شرط تعامد دو رویه

$F(x, y, z) = 0$ و اگر رویه‌های با ضابطه‌های $G(x, y, z) = 0$ در نظر گرفته شود شرط اینکه دو رویه در نقطه P_0 متعامد باشد، به صورت زیر قابل بیان است:

$$F_x G_x + F_y G_y + F_z G_z = 0$$

مثال ۵۱ : به ازای چه مقادیری از a دو رویه به معادلات $x^2 + y^2 + z^2 = 6$ و $ax^2 + y^2 - z^2 = 0$ در نقطه $P(1, 2, 1)$ متعامد هستند؟

- (۱) -۳
- (۲) ۴
- (۳) ۲
- (۴) -۴

پاسخ : گزینه «۱»

$$F'_x = 2x, F'_y = 2y, F'_z = 2z, G'_x = 2ax, G'_y = 2y, G'_z = -2z$$

$$2ax^2 + 4y^2 - 4z^2 = 0 \Rightarrow 4a + 16 - 4 = 0 \Rightarrow a = -3$$

گرادینان

تعریف : اگر $\phi = \phi(x, y, z)$ تابعی اسکالر (غیر برداری) باشد در این صورت گرادینان ϕ را به فرم $\nabla \phi$ نشان داده و بصورت

$$\nabla \phi = \frac{\partial \phi}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial \phi}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial \phi}{\partial z} \vec{k}$$

تعریف می شود که در این رابطه عملگر ∇ را دل یا نابلا می نامیم.

مثال ۵۲ : گرادینان تابع $\phi(x, y, z) = xy + yz^2$ در نقطه‌ای با مختصات $M(2, -1, -1)$ کدام است؟

- (۱) $\nabla \phi = -\vec{i} + 3\vec{j} - 2\vec{k}$
- (۲) $\nabla \phi = -\vec{i} + 3\vec{j} + 2\vec{k}$
- (۳) $\nabla \phi = -2\vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k}$
- (۴) $\nabla \phi = -2\vec{i} + 2\vec{k} - 3\vec{j}$

پاسخ : گزینه «۲» اگر $\phi = \phi(x, y, z)$ آنگاه گرادینان ϕ بفرم $\nabla \phi = (\frac{\partial \phi}{\partial x}, \frac{\partial \phi}{\partial y}, \frac{\partial \phi}{\partial z})$ می باشد لذا داریم:

$$\nabla \phi = (y, x + z^2, 2yz) \Rightarrow \nabla \phi(2, -1, -1) = (-1, 3, 2) \Rightarrow \nabla \phi(2, -1, -1) = -\vec{i} + 3\vec{j} + 2\vec{k}$$

تذکر ۶ : گرادینان یک تابع اسکالر، خود یک بردار است.

دیورژانس

تعریف : میدان برداری \vec{F} را به صورت $\vec{F}(x, y, z) = F_x(x, y, z)\vec{i} + F_y(x, y, z)\vec{j} + F_z(x, y, z)\vec{k}$ تعریف می کنیم دیورژانس \vec{F} را با

$$\text{div} \vec{F} = \vec{\nabla} \cdot \vec{F} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}$$

نماد $\text{div} \vec{F}$ نمایش داده و به صورت

مثال ۵۳ : دیورژانس $\vec{V} = x^2 y z \vec{i} + x y z^2 \vec{j} + x y^2 z^2 \vec{k}$ در نقطه $M(1, 1, -1)$ کدام است؟

- (۱) ۲
- (۲) -۵
- (۳) ۴
- (۴) -۲

پاسخ : گزینه «۲» اگر $V = V_x \vec{i} + V_y \vec{j} + V_z \vec{k}$ باشد آنگاه داریم:

$$\text{div} \vec{V} = \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z}$$

$$\text{div} \vec{V} = \frac{\partial(x^2 y z)}{\partial x} + \frac{\partial(x y z^2)}{\partial y} + \frac{\partial(x y^2 z^2)}{\partial z} = 2xyz + xz + 2xzy^2$$

$$\Rightarrow \text{div} \vec{V}(1, 1, -1) = 2(1)(1)(-1) + (1)(-1) + 2(1)(-1)(1) = -5$$

تذکر ۷ : دیورژانس یک بردار، یک عدد می باشد.

کول

تعریف : میدان برداری F را در نظر بگیرید، کول \vec{F} را با نماد $\text{curl} \vec{F}$ نمایش داده و بصورت زیر تعریف می شود:

$$\text{curl} \vec{F} = \vec{\nabla} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} \right) \vec{i} + \left(\frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x} \right) \vec{j} + \left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \right) \vec{k}$$

مثال ۵۴ : کول بردار $A = 2x^2 y \vec{i} + 7xz \vec{j} + 4xy \vec{k}$ در نقطه $(1, 2, 3)$ برابر است با:

- (۱) $-3\vec{i} - 8\vec{j} + 18\vec{k}$
- (۲) ۰
- (۳) $6\vec{i} + 18\vec{k}$
- (۴) $5\vec{i} + 19\vec{k}$

پاسخ : گزینه «۱»

$$\text{curl} \vec{A} = (4x - 7x)\vec{i} + (0 - 4y)\vec{j} + (7z - 2x^2)\vec{k} \Rightarrow \text{curl} \vec{A}(1, 2, 3) = -3\vec{i} - 8\vec{j} + 18\vec{k}$$

* تذکر ۸: کرل یک بردار، خود یک بردار می باشد.

نکته ۸: روابط زیر را در مورد تابع اسکالر f و g و عدد اسکالر k همواره برقرار است:

- ۱) $\nabla \times \nabla f = 0$
- ۲) $\nabla(kf) = k\nabla f$
- ۳) $\nabla(f+g) = \nabla f + \nabla g$
- ۴) $\nabla(f \cdot g) = f\nabla g + g\nabla f$
- همچنین در مورد تابع برداری \vec{F} و عدد اسکالر k روابط زیر را داریم:
- ۱) $\nabla \cdot (\nabla \times \vec{f}) = 0$
- ۲) $\nabla \cdot (\nabla k) = 0$

لاپلاسین

اگر تابع $\phi = \phi(x, y, z)$ تابعی اسکالر باشد در این صورت لاپلاسین ϕ را بفرم $\nabla^2 \phi$ نمایش داده و بصورت

$$\nabla^2 \phi = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2}$$

تعریف می شود.

مثال ۵۵: لاپلاسین تابع $v = 6x^2y^2z + x^2$ در نقطه $M(1, 0, 1)$ کدام است؟

- ۱) $21 + 12z$
 - ۲) 18
 - ۳) 14
 - ۴) $21 + 12k$
- پاسخ: گزینه «۳»

$$\nabla^2 v = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}, v = 6x^2y^2z + x^2$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = 12xy^2z + 2x, \frac{\partial v}{\partial y} = 12x^2yz, \frac{\partial v}{\partial z} = 6x^2y^2$$

$$\nabla^2 v = \left[\frac{\partial}{\partial x}(12xy^2z + 2x) + \frac{\partial}{\partial y}(12x^2yz) + \frac{\partial}{\partial z}(6x^2y^2) \right] \Rightarrow \nabla^2 v = 12y^2z + 2 + 12x^2z \Rightarrow \nabla^2 v(1, 0, 1) = 14$$

* تذکر ۹: لاپلاسین یک تابع اسکالر، یک عدد می باشد.

* تذکر ۱۰: لاپلاسین تابع اسکالر ϕ در واقع به صورت $\text{div}[\nabla(\phi)]$ نیز قابل بیان است.

مثال ۵۶: مقدار $\text{div} \nabla(e^{x+y+z})$ در مبدأ مختصات کدام است؟

- ۱) صفر
 - ۲) ۳
 - ۳) ۱
 - ۴) e^2
- پاسخ: گزینه «۲»

$$\text{div} \nabla(e^{x+y+z}) = \frac{\partial^2 (e^{x+y+z})}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 (e^{x+y+z})}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 (e^{x+y+z})}{\partial z^2} = e^{x+y+z} + e^{x+y+z} + e^{x+y+z} = 3e^{x+y+z}$$

که مقدار آن در مبدأ برابر ۳ می باشد.

* تذکر ۱۱: اگر لاپلاسین یک تابع برابر صفر باشد، در این صورت آن تابع را هارمونیک می نامیم.

خواص دیورژانس، گرادیان، کرل و لاپلاسین

اگر \vec{F}_1 و \vec{F}_2 میدان های برداری و g_1 و g_2 توابع اسکالر باشند، آنگاه:

- ۱) $\text{div}(\text{curl} \vec{F}_1) = \nabla \cdot (\nabla \times \vec{F}_1) = 0$
- ۲) $\text{curl}(\nabla g_1) = \nabla \times \nabla g_1 = 0$
- ۳) $\nabla(g_1 g_2) = g_2 \nabla g_1 + g_1 \nabla g_2$
- ۴) $\text{div}(g_1 \vec{F}_1) = \nabla g_1 \cdot \vec{F}_1 + g_1 \text{div} \vec{F}_1$
- ۵) $\text{div}(\vec{F}_1 \times \vec{F}_2) = (\text{curl} \vec{F}_1) \cdot \vec{F}_2 - (\text{curl} \vec{F}_2) \cdot \vec{F}_1$
- ۶) $\text{curl}(g_1 \vec{F}_1) = (\nabla g_1) \times \vec{F}_1 + g_1 (\nabla \times \vec{F}_1)$

مشتق سوئی

اگر تابع $\phi = \phi(x, y, z)$ تابعی اسکالر باشد، آنگاه مشتق سوئی f در جهت بردار یکه \vec{u} را می توان از فرمول زیر محاسبه نمود:

$$\vec{u} \cdot \nabla \phi = \text{مشتق سوئی } \phi \text{ در جهت بردار یکه } \vec{u}$$

مثال ۵۷: مشتق سوئی تابع $\phi(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2$ در نقطه $(3, 4, -1)$ در امتداد بردار $\vec{A} = 3\vec{i} - 2\vec{j} + 6\vec{k}$ کدام است؟

- ۱) -۳
 - ۲) -۲
 - ۳) ۲
 - ۴) -۳
- پاسخ: گزینه «۳» ابتدا بردار یکه را برای \vec{A} را محاسبه می کنیم:

$$|\vec{A}| = \sqrt{(3)^2 + (-2)^2 + (6)^2} = \sqrt{49} = 7$$

$$\vec{u} = \frac{\vec{A}}{|\vec{A}|} = \frac{3\vec{i} - 2\vec{j} + 6\vec{k}}{7} = \frac{3}{7}\vec{i} - \frac{2}{7}\vec{j} + \frac{6}{7}\vec{k}$$

$$\nabla \phi = 2x\vec{i} + 2y\vec{j} - 2z\vec{k} \Rightarrow \nabla \phi(3, 4, -1) = 6\vec{i} + 8\vec{j} + 2\vec{k}$$

$$\vec{u} \cdot \nabla \phi(3, 4, -1) = \left(\frac{3}{7}\vec{i} - \frac{2}{7}\vec{j} + \frac{6}{7}\vec{k}\right) \cdot (6\vec{i} + 8\vec{j} + 2\vec{k}) = \frac{18}{7} - \frac{16}{7} + \frac{12}{7} = \frac{14}{7} = 2$$

نکته ۹: اگر حاصل ضرب عددی دو بردار u و گرادیان را در فرمول مشتق جهتی محاسبه کنیم، فرمول مشتق جهتی به صورت زیر قابل بیان است:

$$\vec{u} \cdot \nabla \phi = |\vec{u}| \cdot |\nabla \phi| \cos \theta$$

که θ زاویه بین \vec{u} و $\nabla \phi$ در نقطه p می باشد و مشتق جهتی وقتی بزرگترین مقدار را دارد که $\cos \theta = 1$ و یا \vec{u} در جهت گرادیان باشد به عبارت دیگر وقتی \vec{u} در جهت بردار گرادیان باشد تابع ϕ سریعترین افزایش را دارد و این مقدار برابر $\nabla \phi$ می باشد.

مثال ۵۸: بزرگترین مشتق سوئی تابع $f(x, y, z) = x^2y^2z^2$ در نقطه $(1, 1, 1)$ کدام است؟

- ۱) ۹
 - ۲) ۲۹
 - ۳) $\sqrt{29}$
 - ۴) $9\sqrt{29}$
- پاسخ: گزینه «۳»

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{k} = 2xy^2z^2\vec{i} + 2x^2y^2z^2\vec{j} + 2x^2y^2z^2\vec{k}$$

$$\vec{\nabla} f(1, 1, 1) = 2\vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k} \Rightarrow |\nabla f| = \sqrt{(2)^2 + (2)^2 + (2)^2} = \sqrt{29}$$

مثال ۵۹: اندازه مشتق سوئی تابع با ضابطه $f(x, y, z) = e^{2y-1} + 2y\sqrt{5+x^2} - \frac{x^2}{1+z}$ در نقطه $B(2, \frac{1}{2}, 0)$ به طرف نقطه

$A(0, -\frac{1}{2}, 2)$ کدام است؟

- ۱) ۰
 - ۲) ۲
 - ۳) -۱
 - ۴) ۲
- پاسخ: گزینه «۳» ابتدا بردار یکه u را به دست می آوریم:

$$\vec{AB} = (2-0)\vec{i} + [\frac{1}{2} - (-\frac{1}{2})]\vec{j} + (0-2)\vec{k} = 2\vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k} \Rightarrow \vec{u} = \frac{\vec{AB}}{|\vec{AB}|} = \frac{2}{3}\vec{i} + \frac{1}{3}\vec{j} - \frac{2}{3}\vec{k}$$

$$\vec{\nabla} f = \frac{\partial f}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{k} = \left(\frac{2x \times 2y}{2\sqrt{5+x^2}} - \frac{2x}{1+z}\right)\vec{i} + (2e^{2y-1} + 2\sqrt{5+x^2})\vec{j} + \frac{x^2}{(1+z)^2}\vec{k} \Big|_{B(2, \frac{1}{2}, 0)} = -3\vec{i} + 11\vec{j} + 4\vec{k}$$

$$\vec{\nabla} f \cdot \vec{u} = -3 \times \frac{2}{3} + 11 \times \frac{1}{3} + 4 \times \frac{-2}{3} = -1$$

تست های طبقه بندی شده فصل اول

۱- برد تابع $f: R^T \rightarrow R$ با ضابطه $f(x,y,z) = \frac{x}{|y|-|z|}$ کدام مجموعه است؟ (مکانیک - سراسری ۷۸)

- (۱) R (۲) $R - \{0\}$ (۳) $\{(x,y,z): y \neq z\}$ (۴) $\{(x,y,z): |y| \neq |x|\}$

۲- اگر $x = t \cos t$ و $y = t \sin t$ مقدار $\frac{dz}{dt}$ در $t = \frac{\pi}{2}$ کدام است؟ (مکانیک - سراسری ۷۸)

- (۱) $\pi(1 - \frac{\pi}{2})$ (۲) $\pi(2 - \frac{\pi}{2})$ (۳) $\pi(1 + \frac{\pi}{2})$ (۴) $\pi(2 + \frac{\pi}{2})$

۳- تابع f با ضابطه $f(x,y) = \frac{x^2+y^2}{y}$ در کدام نقاط مشتق پذیر است؟ (مکانیک - سراسری ۷۸)

- (۱) بر R (۲) در هر نقطه از دامنه اش

- (۳) بر مجموعه $\{(x,y): (x,y) \neq (0,0)\}$ (۴) بر مجموعه $\{(x,y): x \neq 0 \text{ یا } y \neq 0\}$

۴- معادله صفحه مماس بر سطح $x^2 = 12y$ در نقطه $(6, 2, 1)$ کدام است؟ (مکانیک - سراسری ۷۸)

- (۱) $y - z = 2$ (۲) $x - z = 5$ (۳) $x - y = 2$ (۴) $x - y + z = 4$

۵- بیشترین حجم مکعب مستطیلی که داخل یک کره به شعاع ۲ قرار می گیرد کدام است؟ (مکانیک - سراسری ۷۸)

- (۱) $\frac{4\sqrt{3}}{9}$ (۲) $\frac{4\sqrt{2}}{9}$ (۳) $\frac{8\sqrt{3}}{9}$ (۴) $\frac{8\sqrt{2}}{9}$

۶- فاصله مینیمم مبدأ تا سطح $z = \sqrt{x^2 - 1}$ برابر است با: (عمران - سراسری ۷۸)

- (۱) $\frac{1}{2}$ (۲) ۱ (۳) $\frac{2}{3}$ (۴) ۲

۷- اگر $z = f(u,v)$ و $u = x - y$ و $v = x^2 y$ باشد، $\frac{\partial z}{\partial x}$ برابر است با:

- (۱) $\frac{\partial z}{\partial u} + y \frac{\partial z}{\partial v}$ (۲) $\frac{\partial z}{\partial u} + 2 \frac{\partial z}{\partial v}$ (۳) $-y \frac{\partial z}{\partial u} + 2xy \frac{\partial z}{\partial v}$ (۴) $2xy \frac{\partial z}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial u}$

۸- به فرض اینکه تابع هزینه تولید برای یک واحد صنعتی به صورت $c = 5x^2 + 2xy + 2y^2 + 800$ است که در آن x و y و c به ترتیب میزان تولید کالای x ، میزان تولید کالای y و میزان کل هزینه است. برای تولید جمعاً ۳۹ واحد از کالای x و y و $(x+y=39)$ حداقل هزینه چقدر خواهد بود؟ (مهندسی سیستم های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره وری - سراسری ۷۸)

- (۱) $\bar{y} = 17, \bar{x} = 11$ (۲) $\bar{y} = 23, \bar{x} = 9$ (۳) $\bar{y} = 24, \bar{x} = 11$ (۴) $\bar{y} = 26, \bar{x} = 13$

۹- برای تابع $f(x,y) = 1 + 2x + 2y - xy$ کدام عبارت صحیح است؟

- (۱) f در هیچ نقطه ای اکسترمم نسبی ندارد. (۲) f در $(3, 2)$ دارای ماکسیمم نسبی است. (۳) f در $(2, 2)$ دارای مینیمم نسبی است. (۴) f در $(0, 0)$ دارای اکسترمم نسبی است.

۱۰- ماکزیمم و مینیمم مطلق تابع $f(x,y) = 4x^2 + 2xy - 2y^2$ بر روی مربع $0 \leq x \leq 1$ و $0 \leq y \leq 1$ کدام است؟

- (۱) ماکزیمم مطلق = ۲ و مینیمم مطلق = -۲ (۲) ماکزیمم مطلق = $\frac{13}{3}$ و مینیمم مطلق = -۳ (۳) ماکزیمم مطلق = ۰ و مینیمم مطلق = ۰ (۴) ماکزیمم مطلق = ۴ و مینیمم مطلق = ۳

۱۱- مشتق جهت دار تابع $f(x,y) = 2x^2 - 2xy + 5y^2$ در نقطه $(1, 2)$ در جهت بردار واحد l که با محور x زاویه ۴۵ درجه بسازد چقدر است؟ (مهندسی سیستم های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره وری - سراسری ۷۸)

- (۱) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (۲) $\frac{15\sqrt{2}}{2}$ (۳) ۱۵ (۴) $\frac{19\sqrt{2}}{2}$

۱۲- مقدار $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xye^{xy}}{x^2+y^2}$

(مهندسی سیستم های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره وری - سراسری ۷۸)

- (۱) ۰ (۲) $\frac{1}{2}$ (۳) ۱ (۴) وجود ندارد.

۱۳- معادله صفحه مماس بر $z = x^2 + y^2$ در نقطه $(1, 1, 2)$ چیست؟

(مهندسی سیستم های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره وری - سراسری ۷۸)

- (۱) $x + y - z = 1$ (۲) $x + y - z = \frac{1}{2}$ (۳) $2x + 2y - z = 2$ (۴) $2x + 2y - z = 2$

۱۴- حاصل $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,1)} \frac{\sqrt{x+y} - \sqrt{y}}{x}$ کدام است؟ (ژئوفیزیک - سراسری ۷۸)

- (۱) صفر (۲) $\frac{1}{2}$ (۳) ۱ (۴) ۲

۱۵- اگر $f(x,y) = e^{2y} - y \cosh xy$ حاصل $f_{xy}(1, 0)$ کدام است؟ (ژئوفیزیک - سراسری ۷۸)

- (۱) -۱ (۲) ۰ (۳) e (۴) ۱

۱۶- معادله صفحه مماس بر سطح $2x^2 + xy - 2y^2 = 2z$ در نقطه $(1, 1, 1)$ کدام است؟ (ژئوفیزیک - سراسری ۷۸)

- (۱) $2x - 4y + 2z - 1 = 0$ (۲) $2x + 4y + 5z - 2 = 0$ (۳) $4x + 4y + 5z - 2 = 0$ (۴) $4x - 2y - 2z + 1 = 0$

۱۷- $f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{|x|+|y|} & (x,y) \neq (0,0) \\ a & (x,y) = (0,0) \end{cases}$ پیوسته باشد، a کدام است؟ (مهندسی هسته ای - سراسری ۷۸)

- (۱) صفر (۲) $\frac{1}{2}$ (۳) ۱ (۴) ۲

۱۸- معادله خط مماس بر منحنی $\begin{cases} y = x^2 \\ z^2 = 16 - y \end{cases}$ در نقطه $(4, 16, 0)$ کدام است؟ (مهندسی هسته ای - سراسری ۷۸)

- (۱) $\begin{cases} 4x = y \\ z = 0 \end{cases}$ (۲) $\begin{cases} x = 4 \\ y = 16 \end{cases}$ (۳) $\begin{cases} y - x = 12 \\ z = 0 \end{cases}$ (۴) $\begin{cases} x + y = 20 \\ z = 0 \end{cases}$

۱۹- اگر $u = x^2 + xy$ و $x = r^2 + s^2$ و $y = 2r - 2s$ حاصل $\frac{\partial u}{\partial s}$ در نقطه $r = s = 1$ کدام است؟ (مهندسی هسته ای - سراسری ۷۸)

- (۱) ۱۰ (۲) ۸ (۳) ۶ (۴) ۴

۲۰- اگر $u = x^2 + y^2 + z^2$ و $v = x + y + z$ و $w = xy + yz$ حاصل $\frac{\partial(u,v,w)}{\partial(x,y,z)}$ کدام است؟ (مهندسی هسته ای - سراسری ۷۸)

- (۱) صفر (۲) ۱ (۳) xyz (۴) $x^2 y^2 z^2$

۲۱- کدام گزاره در مورد تابع دو متغیره f با ضابطه $f(x,y) = x \sin y$ درست است؟ (آمار - سراسری ۷۸)

- (۱) دارای نقطه زینی است اما مینیمم مطلق ندارد. (۲) نقطه زینی نداشته اما مینیمم مطلق دارد. (۳) دارای نقطه زینی است و ماکسیمم نسبی دارد. (۴) مینیمم نسبی ندارد ولی دارای ماکسیمم نسبی است.

۲۲- معادله صفحه مماس بر کره $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ در نقطه $(2, \sqrt{5}, 0)$ کدام است؟ (آمار - سراسری ۷۸)

- (۱) $2y + \sqrt{5}x = 9$ (۲) $2y + \sqrt{5}x = -9$ (۳) $\sqrt{5}y + 2x = -9$ (۴) $\sqrt{5}y + 2x = 9$

۲۳- اگر $f(x,y) = x^2 y - y^2 - x^2 + xy$ کدام گزینه صحیح است؟ (آمار - سراسری ۷۸)

- (۱) $(0,0)$ نقطه بحرانی نیست. (۲) $(0,0)$ یک نقطه زینی است. (۳) $(0,0)$ مینیمم موضعی است. (۴) $(0,0)$ ماکزیمم موضعی است.

۲۴- اگر $f: R^2 \rightarrow R^2$ با ضابطه $f(x,y) = (x+y, x,y)$ و $g: R^2 \rightarrow R^2$ با ضابطه $g(x,y,z) = (x+y, y+z)$ مفروض باشند، $(g \circ f)$ کدام است؟ (آمار - سراسری ۷۸)

- (۱) $g \circ f(x,y) = (x+y, 2x+y)$ (۲) $g \circ f(x,y) = (2x+y, x+y)$ (۳) $g \circ f(x,y) = (x+2y, x+y)$ (۴) $g \circ f(x,y) = (x+y, x+2y)$

۲۵- مشتق تابع $z = x^2y^2 - xy^2 - 2y$ در نقطه (۱ و ۲) و در جهتی که این نقطه را به مبدأ وصل می کند برابر است با:

(مکانیک - سراسری ۷۹)

- (۱) $\sqrt{5}$
- (۲) $\frac{1}{\sqrt{5}}$
- (۳) $-\frac{1}{\sqrt{5}}$
- (۴) $-\sqrt{5}$

۲۶- اگر $z^2 = x^2 + y^2$ حاصل عبارت $\frac{\partial \ln z}{\partial \ln x} + \frac{\partial \ln z}{\partial \ln y}$ برابر کدام است؟

(مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری - سراسری ۷۹)

- (۱) ۱
- (۲) ۲
- (۳) $x \cdot y$
- (۴) $x + y$

۲۷- اگر $z = x^{\frac{1}{2}} f(\frac{y}{x^2})$ حاصل عبارت $z \frac{\partial z}{\partial x} + 2y \frac{\partial z}{\partial y} - \Delta z$ کدام است؟

(مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری - سراسری ۷۹)

- (۱) $-z$
- (۲) ۰
- (۳) $-\frac{y}{x^2} + f'(\frac{y}{x^2})$
- (۴) $\frac{y}{x} \cdot f'(\frac{y}{x^2})$

۲۸- مقدار q در تابع $q = K^{0.4} L^{0.5}$ با رعایت قید $108 = 2K + 4L$ بهینه می‌گردد. مقدار L کدام است؟

(مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری - سراسری ۷۹)

- (۱) ۱۲
- (۲) ۱۵
- (۳) ۱۶
- (۴) ۲۰

۲۹- تابع با ضابطه $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} & ; x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0 & ; x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$ به ازای کدام مجموعه مقادیر a در $(0, 0)$ پیوسته است؟

(مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری - سراسری ۷۹)

- (۱) \emptyset
- (۲) $\{1\}$
- (۳) $\{-1\}$
- (۴) $\{1, -1\}$

۳۰- مشتق سویی تابع $f(x, y, z) = xz^2 - \sin xy$ در نقطه $(1, \frac{\pi}{4}, -1)$ در جهت بردار $2\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$ کدام است؟

(مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری - سراسری ۷۹)

- (۱) -۲
- (۲) -۱
- (۳) ۰
- (۴) ۱

۳۱- اگر $f(x, y) = x^2 + y^2$ مقدار $\frac{\partial f}{\partial s}$ در نقطه $s = \frac{1}{\sqrt{2}}$ کدام است؟

(ژئوفیزیک - سراسری ۷۹)

- (۱) -۴
- (۲) ۲
- (۳) -۲
- (۴) ۴

۳۲- در تابع $z = \frac{x+y}{x^2+y}$ ، $f(1, -1) = a$ و $f(x, y) = \frac{x+y}{x^2+y}$ به ازای کدام مجموعه مقادیر a تابع f در $(-1, 1)$ پیوسته است.

(مهندسی هسته‌ای - سراسری ۷۹)

- (۱) \emptyset
- (۲) $\{1\}$
- (۳) $\{\frac{1}{2}\}$
- (۴) $\{1, \frac{1}{2}\}$

۳۳- تابع $W = x^2 - xy + 2z^2 + yz$ در نقطه (۱ و ۲) در امتداد کدام بردار با بیشترین سرعت تغییر می‌کند؟

(مهندسی هسته‌ای - سراسری ۷۹)

- (۱) $2\mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}$
- (۲) $\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$
- (۳) $\mathbf{i} - \mathbf{j} - \mathbf{k}$
- (۴) $\mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}$

۳۴- در ورقه نازک فلزی با ناحیه $x^2 + y^2 \leq 9$ ، اندازه درجه حرارت در هر نقطه $M(x, y)$ به صورت $T = x^2 + 2y^2 - 4x$ است کمترین مقدار T کدام است؟

(مهندسی هسته‌ای - سراسری ۷۹)

- (۱) -۴
- (۲) -۳
- (۳) -۱
- (۴) صفر

۳۵- اگر $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ با ضابطه $f(x, y, z) = \ln(xyz)$ و $g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ با ضابطه $g(u, v) = (e^{u+v}, e^{u-v}, e^{uv})$ مفروض باشند. fog کدام است؟

(آمار - سراسری ۷۹)

- (۱) $2u + uv$
- (۲) $u + uv$
- (۳) $u - uv$
- (۴) $u + 2uv$

(آمار - سراسری ۷۹)

۳۶- حد تابع $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sqrt{1-x^2-y^2}}{y}$ چقدر است؟

(آمار - سراسری ۷۹)

- (۱) حد برابر ۱ است.
- (۲) حد برابر صفر است.
- (۳) حد برابر ۱ است.
- (۴) حد وجود ندارد.

۲۷- اگر f و F دو تابع متغیره و دارای مشتقات نسبی مرتبه اول باشند، بعلاوه $F(x, y) = f(u, v)$ که در آن $u = x - y$ و $v = -x + y$ آنگاه مقدار $\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y}$ در $(2, 2)$ کدام است؟

(آمار - سراسری ۷۹)

- (۱) صفر
- (۲) $(f_u + f_v)_{(0,0)}$
- (۳) $2(f_u + f_v)_{(0,0)}$
- (۴) $2(f_u - f_v)_{(0,0)}$

۲۸- اگر $z = \sin^{-1} \frac{x}{y}$ باشد، کدام رابطه برقرار است؟

(مکانیک - سراسری ۸۰)

- (۱) $y \frac{\partial z}{\partial x} + x \frac{\partial z}{\partial y} = 0$
- (۲) $x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = 0$
- (۳) $y \frac{\partial z}{\partial x} - x \frac{\partial z}{\partial y} = 0$
- (۴) $x \frac{\partial z}{\partial x} - y \frac{\partial z}{\partial y} = 0$

۲۹- نقطه مینیمم تابع $f(x, y, z) = 4x^2 + y^2 + z^2$ با شرط $2x + 3y + z = 12$ کدام است؟

(مکانیک - سراسری ۸۰)

- (۱) $(\frac{26}{11}, \frac{6}{11}, \frac{12}{11})$
- (۲) $(\frac{6}{11}, \frac{26}{11}, \frac{12}{11})$
- (۳) $(\frac{26}{11}, \frac{12}{11}, \frac{6}{11})$
- (۴) $(\frac{12}{11}, \frac{6}{11}, \frac{26}{11})$

۴۰- بردار عمود بر صفحه $z = \ln(x^2 + y^2)$ در نقطه $(1, -1, \ln 2)$ و در سمت خارج کدام است؟

(مکانیک - سراسری ۸۰)

- (۱) $\vec{n} = \hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$
- (۲) $\vec{n} = -\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$
- (۳) $\vec{n} = \hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$
- (۴) $\vec{n} = -\hat{i} + \hat{j} - \hat{k}$

۴۱- اگر \hat{u} بردار یکیه در جهت ماکزیمم مقدار مشتق جهت‌دار تابع $f(x, y) = x^2 e^y$ در نقطه $(-2, 0)$ باشد، در این صورت مقدار \hat{u} با کدام عبارت برابر است؟

(مکانیک - سراسری ۸۰)

- (۱) $\hat{u} = \frac{2}{\sqrt{13}} \hat{i} - \frac{3}{\sqrt{13}} \hat{j}$
- (۲) $\hat{u} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \hat{i} + \frac{1}{\sqrt{2}} \hat{j}$
- (۳) $\hat{u} = \frac{2}{5} \hat{i} + \frac{4}{5} \hat{j}$
- (۴) $\hat{u} = -\frac{1}{\sqrt{10}} \hat{i} - \frac{3}{\sqrt{10}} \hat{j}$

۴۲- در مورد تابع $F(x, y) = xy + \ln xy$ کدام گزینه صحیح است.

(مکانیک - آزاد ۸۰)

- (۱) $(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$ یک مینیمم نسبی تابع است.
- (۲) $(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$ یک ماکزیمم نسبی تابع است.

- (۳) $(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$ یک نقطه زینی است.
- (۴) $(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$ تعریف نشده است.

۴۳- اگر $f(x, y) = x \cos 2y + ye^{2x}$ باشد مقدار $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ را به دست آورید:

(عمران - آزاد ۸۰)

- (۱) $-2 \sin 2y + 2e^{2x}$
- (۲) $2x \sin 2y + 2e^{2x}$
- (۳) $x \sin 2y + 2e^{2x}$
- (۴) $2x \sin 2y - 2e^{2x}$

۴۴- اگر $u = \ln(x + y + z)$ حاصل $\ln \frac{\partial u}{\partial x} + \ln \frac{\partial u}{\partial y} + \ln \frac{\partial u}{\partial z}$ برابر کدام است؟

(مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری - سراسری ۸۰)

- (۱) $3u$
- (۲) 2
- (۳) -2
- (۴) $-3u$

۴۵- نقطه بحرانی تابع $z = x + y$ با شرط $x > 0, y > 0, x^2 + y^2 = 1$ کدام است؟

(مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری - سراسری ۸۰)

- (۱) ماکزیمم
- (۲) مینیمم
- (۳) زینی
- (۴) با شرط مفروض فاقد نقطه بحرانی

۴۶- اگر $u = \frac{x^2 y^2}{x + y}$ باشد مقدار $x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y}$ برابر است با:

(مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری - سراسری ۸۰)

- (۱) $\frac{u}{2}$
- (۲) $3u$
- (۳) $3u^2$
- (۴) $6u$

۴۷- اگر $z = x^2 - 2y^2$ و $x = 3s + 2r, y = 3s - 2r, z = x^2 - 2y^2$ به ازای $r = 2$ و $s = 1$ کدام است؟

(مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری - سراسری ۸۰)

- (۱) ۸
- (۲) ۱۲
- (۳) ۱۴
- (۴) ۲۰

۴۸- در چه جهتی مشتق سوئی تابع $f(x,y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$ در نقطه (1,1) برابر صفر است؟

- (۱) $\alpha = \frac{\pi}{3}$ (۲) $\alpha = \frac{\pi}{6}$ (۳) $\alpha = \frac{\pi}{4}$ (۴) $\alpha = \frac{\pi}{2}$

(مهندسی صنایع سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی) - آزاد (۸۰)

۴۹- در تابع $z = xy^2 - x^2 - y^2 + xy$ مبداء مختصات:

- (۱) ماکزیمم نسبی است. (۲) نقطهٔ زینی است. (۳) مینیمم نسبی است. (۴) نقطه

(مهندسی صنایع سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی) - آزاد (۸۰)

۵۰- مقدار حد $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xye^x}{x^2 - y^2}$:

- (۱) حد ندارد. (۲) صفر (۳) ۱ (۴) بی‌نهایت

(مهندسی صنایع مدیریت سیستم و بهره‌وری) - آزاد (۸۰)

۵۱- بزرگترین مشتق سوئی تابع $w = xyz$ در نقطه (1,1,1) کدام است؟

- (۱) $\sqrt{3}$ (۲) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ (۳) $\sqrt{2}$ (۴) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

(مهندسی صنایع مدیریت سیستم و بهره‌وری) - آزاد (۸۰)

۵۲- کمترین فاصله مبداء مختصات از سطح به معادله $x^2 - z^2 = 2$ کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) $\sqrt{2}$ (۳) ۲ (۴) ۳

(مهندسی صنایع مدیریت سیستم و بهره‌وری) - آزاد (۸۰)

۵۳- مشتق جهتدار تابع $f(x,y) = x^2 - 2xy^2$ در نقطه (1,-2) و در جهت بردار $(-1,0)$ برابر است با

- (۱) ۶ (۲) ۱۴ (۳) ۲ (۴) -۸

(کامپیوتر - سراسری (۸۰))

۵۴- اگر $f(x,y,z) = x^2ye^z$ در این صورت ∇f (گرادیان f) برابر است با

(کامپیوتر - سراسری (۸۰))

- (۱) $(2x, x^2e^z, x^2ye^z)$ (۲) $(2x, x^2e^z, x^2ye^z)$ (۳) $(2xye^z, x^2e^z, x^2ye^z)$ (۴) $(2xye^z, x^2ye^z, x^2ye^z)$

۵۵- بردار عمود بر صفحهٔ مماس بر رویهٔ $x^2 + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{9} = 3$ در نقطه (1,2,3) برابر است با

(کامپیوتر - سراسری (۸۰))

- (۱) $(2, \frac{2}{3}, \frac{4}{9})$ (۲) $(2, 1, 2)$ (۳) $(2, 1, \frac{2}{3})$ (۴) $5!5!$

۵۶- در مورد $\lim_{(x,y) \rightarrow (1,2)} \frac{\text{Arctg}(3xy - 2y)}{\text{Arcsin}(2xy - 6x)}$ کدام گزینه صحیح است؟

(ژئوفیزیک - سراسری (۸۰))

- (۱) حد موجود و برابر $\frac{1}{3}$ است. (۲) حد موجود نیست. (۳) حد موجود و برابر $\frac{3}{4}$ است. (۴) حد موجود و برابر ۱ است.

۵۷- کدام گزینه در مورد تابع f با ضابطه $f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$ صحیح است؟

(ژئوفیزیک - سراسری (۸۰))

- (۱) تابع f در (0,0) پیوسته است. (۲) تابع f در (0,0) دارای مشتقات نسبی است. (۳) تابع f در (0,0) حد دارد. (۴) تابع f در (0,0) مشتق پذیر است.

۵۸- معادلهٔ صفحهٔ مماس بر سطح به معادله $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{9} = 1$ در نقطه (0,0,3) از کدام نقطهٔ دیگر می‌گذرد؟

(ژئوفیزیک - سراسری (۸۰))

- (۱) $(\sqrt{3}, 1, 2)$ (۲) $(3, 0, 1)$ (۳) $(3, \sqrt{3}, 0)$ (۴) $(1, \sqrt{3}, 3)$

۵۹- در مورد $\lim_{(x,y) \rightarrow (4,\pi)} x^y \sin(\frac{y}{x})$ کدام گزینه صحیح است؟

(مهندسی هسته‌ای - سراسری (۸۰))

- (۱) حد موجود و برابر 8π است. (۲) حد موجود و برابر $8\sqrt{2}$ است. (۳) حد موجود و برابر $4\pi^2$ است. (۴) حد موجود نیست.

۶۰- تابع f با ضابطه $f(x,y) = |x^2 - y^2|$ در نقطه با مختصات (0,0) چگونه است؟

(مهندسی هسته‌ای - سراسری (۸۰))

- (۱) پیوسته و مشتق پذیر است. (۲) نه پیوسته و نه مشتق پذیر است. (۳) پیوسته است ولی مشتق پذیر نیست. (۴) پیوسته نیست ولی دارای مشتقات جزئی است.

۶۱- اگر $z = x^2 + y^2$ و $x = \sin t$ و $y = e^t$ مقدار $\frac{dz}{dt}$ در $t = 0$ کدام است؟

(مهندسی هسته‌ای - سراسری (۸۰))

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۶۲- معادلهٔ صفحهٔ مماس بر سطح $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ در نقطه $(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3})$ از کدام نقطهٔ دیگر می‌گذرد؟

(مهندسی هسته‌ای - سراسری (۸۰))

- (۱) $(-1, \sqrt{3}, 1)$ (۲) $(1, -\sqrt{3}, 1)$ (۳) $(1, \sqrt{3}, 1)$ (۴) $(1, -\sqrt{3}, -1)$

۶۳- هرگاه $f(x,y) = (x^2 + y^2) \lg \frac{\sqrt{x-y}}{\sqrt{x+y}}$ عبارت $x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y}$ برابر است با:

(معدن - سراسری (۸۰))

- (۱) ۲f (۲) صفر (۳) $x^2 + y^2$ (۴) $y \frac{\partial f}{\partial x} + x \frac{\partial f}{\partial y}$

۶۴- نقطه (1,1) برای سطح به معادله $z = x^2 + y^2 - 2xy$ چگونه نقطه‌ای است؟

(آمار - سراسری (۸۰))

- (۱) ماکسیمم موضعی (۲) مینیمم موضعی (۳) زینی (۴) عادی

۶۵- اگر $\begin{cases} u = x + y + z \\ uv = y + z \\ uvw = z \end{cases}$ آنگاه $\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}$ کدام است؟

(آمار - سراسری (۸۰))

- (۱) u^2v (۲) uv^2 (۳) vw^2 (۴) uw

۶۶- اگر $f(x,y,x) = \begin{cases} \frac{x+z}{z} & z \neq 0 \\ 0 & z = 0 \end{cases}$ حاصل $\lim_{(x,y,z) \rightarrow (0,0,0)} f(x,y,z)$ کدام است؟

(ریاضی - سراسری (۸۰))

- (۱) صفر (۲) ۱ (۳) وجود ندارد (۴) ∞

۶۷- اگر $xyz = c, f(x,y,z) = 0$ (c ثابت) و f تابع مشتق پذیر باشد آنگاه $\frac{dy}{dx}$ برابر است با:

(ریاضی - سراسری (۸۰))

- (۱) $\frac{-y(xf_x - zf_z)}{x(yf_y - zf_z)}$ (۲) $\frac{y(xf_x + zf_z)}{x(yf_y - zf_z)}$ (۳) $\frac{-x(yf_y - zf_z)}{y(xf_x - zf_z)}$ (۴) $\frac{x(yf_y + zf_z)}{y(xf_x - zf_z)}$

۶۸- معادلهٔ خط قائم بر سطح به معادله $3x^2 + \text{Arctg}(2z) = e^y + 1$ در نقطه $(1, \text{Ln}2, 0)$ کدام است؟

(ریاضی - سراسری (۸۰))

- (۱) $2z = (x-1), z+y = \text{Ln}2$ (۲) $z = (x-1), z+y = 2$

- (۳) $2z = 2x - 2, z+y = \text{Ln}2$ (۴) $x-y = \text{Ln} \frac{e}{2}, z+x = 1$

۶۹- تابع با ضابطه $f(x,y) = \lg^{-1}(\frac{y}{x})$ مفروض است از نقطه P(1,1) در سوی چه امتدادی حرکت کنیم تا حداکثر سرعت افزایش برای تابع f بدست آید؟

(ریاضی - سراسری (۸۰))

- (۱) $(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$ (۲) $(-1, 1)$ (۳) $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ (۴) $(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$

۷۰- معادلهٔ صفحهٔ مماس بر مخروط به معادله $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = z^2$ در نقطه $(\frac{\sqrt{5}}{2}, \frac{3}{2}, 2)$ برابر است با:

(ریاضی - سراسری (۸۰))

- (۱) $2x + y = 2\sqrt{5}z + 4$ (۲) $x + 2y = \sqrt{5}z + 4$ (۳) $x - 2y = \sqrt{5}z - 5$ (۴) $2x - y = 2\sqrt{5}z - 2$

۷۱- حاصل $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{3x^2y}{x^2y^2}$ کدام است؟

(مکانیک - سراسری (۸۱))

- (۱) صفر (۲) ۱ (۳) وجود ندارد (۴) ۲

۷۲- نقطه بحرانی تابع $z = x^2 - 2xy + 2y^2 - 5x + 7y$ کدام است؟

(مکانیک - سراسری (۸۱))

- (۱) $(-1, 1)$ مینیمم (۲) $(1, -1)$ مینیمم (۳) $(1, -1)$ ماکسیمم (۴) $(1, -1)$ زینی

۷۳- صفحه‌ای را که در نقطه $P_0(1, -2, 5)$ بر سطح $z = x^2 + y^2$ مماس است به دست آورید.

(مکانیک - آزاد (۸۱))

- (۱) $2x - 4y - z = 5$ (۲) $2x + 4y + z = 5$ (۳) $2x + 2y + 2z = 4/5$ (۴) $2x + y - z = 2$

۷۴- کدامیک از نقاط زیر یک مینیمم نسبی تابع $f(x,y) = x^2 - 4xy + y^2 + 4y$ می باشد؟

(عمران - سراسری ۸۱)

- (۱) $(-2, -4)$ (۲) $(4, 2)$ (۳) $(\frac{4}{3}, \frac{2}{3})$ (۴) $(-\frac{2}{3}, -\frac{4}{3})$

۷۵- معادلات خط مماس بر منحنی فصل مشترک سطوح $x^2 + y^2 - z = 8$ و $x - y^2 + z^2 = -2$ در نقطه $(2, -2, 0)$ کدام است؟

(عمران - سراسری ۸۱)

- (۱) $\frac{x-2}{4} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z}{10}$ (۲) $\frac{x-2}{2} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z}{20}$ (۳) $\frac{x-2}{4} = \frac{y+2}{-2} = \frac{z}{10}$ (۴) $\frac{x-2}{4} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z}{10}$

۷۶- معادله صفحه مماس بر سطح $4x^2 + y^2 + 2z^2 = 26$ در نقطه $(1, -2, 2)$ کدام است؟

(عمران - سراسری ۸۱)

- (۱) $x - 2y + 2z = 12$ (۲) $2x - y + 2z = 12$ (۳) $x + y + 2z = 12$ (۴) $2x + y - 2z = 12$

۷۷- $\frac{dw}{dt}$ را بر حسب تابعی از t به دست آورید اگر $w = xy + z$ ، $x = \cos t$ ، $y = \sin t$ و $z = t$ باشد.

(عمران - آزاد ۸۱)

- (۱) $1 + \cos 2t$ (۲) $\cos 2t$ (۳) $\sin 2t$ (۴) $1 - \sin 2t$

۷۸- اگر $u = x^2 + y^2$ و $x = 4s - 2t$ ، $y = st$ مقدار $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ در نقطه $s = 0$ و $t = 0$ کدام است؟

(مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری - سراسری ۸۱)

- (۱) 0 (۲) 10 (۳) 12 (۴) 18

۷۹- معادله خط قائم بر سطح به معادله $z = ye^x$ در نقطه $(1, 2, 2e)$ کدام است؟

(مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری - سراسری ۸۱)

- (۱) $\frac{x-1}{2e} = \frac{y-2}{e} = \frac{z-2e}{-1}$ (۲) $\frac{x-1}{e} = \frac{y-2}{2e} = \frac{z-2e}{-1}$ (۳) $\frac{x-1}{e} = \frac{y-2}{e} = \frac{z-2e}{e}$ (۴) $\frac{x-1}{2e} = \frac{y-2}{e} = \frac{z-2e}{e}$

۸۰- چنانچه $u = f(x-y, y-x)$ باشد، آنگاه:

(مهندسی صنایع (مدیریت سیستم و بهره‌وری) - آزاد ۸۱)

- (۱) $\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0$ (۲) $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = 0$ (۳) $\frac{\partial u}{\partial x} + 2\frac{\partial u}{\partial y} = 0$ (۴) $\frac{\partial u}{\partial x} - 2\frac{\partial u}{\partial y} = 0$

۸۱- مقدار $\frac{\partial f}{\partial y}$ در نقطه $(1, 1)$ برای تابع $f(x,y) = 2x^2 - 4x^2y + 2xy^2 + 7x - 8y$ کدام است؟

(مهندسی صنایع (مدیریت سیستم و بهره‌وری) - آزاد ۸۱)

- (۱) 6 (۲) -8 (۳) -6 (۴) 8

۸۲- چنانچه $u = f(\frac{1}{2}bx^2 - \frac{1}{2}ay^2)$ باشد، آنگاه:

(مهندسی صنایع (مدیریت سیستم و بهره‌وری) - آزاد ۸۱)

- (۱) $ay^2 \frac{\partial u}{\partial x} + bx^2 \frac{\partial u}{\partial y} = 0$ (۲) $ay \frac{\partial u}{\partial x} + bx \frac{\partial u}{\partial y} = 0$ (۳) $ax \frac{\partial u}{\partial x} + by \frac{\partial u}{\partial y} = 0$ (۴) $ay^2 \frac{\partial u}{\partial x} + bx^2 \frac{\partial u}{\partial y} = 0$

۸۳- معادله صفحه مماس بر سطح $x^2 + 4y^2 - 4z^2 - 4 = 0$ در نقطه $(2, 1, 1)$ برابر است با

(کامپیوتر - سراسری ۸۱)

- (۱) $x + 2y - 2z = 2$ (۲) $x + 2y + 2z = 6$ (۳) $x^2 + y^2 - 2z = 0$ (۴) $x - 2y + 2z = 2$

۸۴- اگر θ زاویه اشتراک سطوح $x^2 + y^2 - 2z = 0$ و $x^2 + y^2 - 2z = 0$ در نقطه $(1, 1, 1)$ باشد در این صورت $\cos \theta$ برابر است با

(کامپیوتر - سراسری ۸۱)

- (۱) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (۲) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (۳) $\frac{\sqrt{2}}{4}$ (۴) $\frac{\sqrt{6}}{2}$

۸۵- مشتق جهت‌دار تابع $f(x,y,z) = x^2y + z^2$ در نقطه $A = (2, -2, 1)$ و در امتداد بردار \vec{AB} که در آن $B(5, 0, 2)$ برابر است با

(کامپیوتر - سراسری ۸۱)

- (۱) -2 (۲) -1 (۳) 1 (۴) 2

۸۶- اگر $\omega = u^2 + e^{2v}$ و $u = xy^2$ ، $v = x \sin y$ ، $u = x^2 \sin y$ آنگاه $\frac{\partial \omega}{\partial x}$ در نقطه $x = 1$ و $y = \frac{\pi}{2}$ برابر است با

(کامپیوتر - سراسری ۸۱)

- (۱) $2(\frac{\pi^2}{22} + e^2)$ (۲) $2(\frac{\pi^2}{64} + e^2)$ (۳) $2(\frac{\pi^2}{64} + e^2)$ (۴) $2(\frac{\pi^2}{22} + 2e^2)$

۸۷- در مورد تابع $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$ کدامیک از گزینه‌های زیر صحیح است؟

(MBA - سراسری ۸۱)

(۱) مشتقات پاره‌ای f در مبدأ موجود و برابر صفر هستند. (۲) $\frac{\partial f}{\partial x}$ در مبدأ پیوسته است.

(۳) $\frac{\partial f}{\partial y}$ در مبدأ ناپیوسته است. (۴) f در مبدأ ناپیوسته است.

۸۸- معادله ارتفاع یک کوه به صورت $h(x,y) = 2x^2 - 2xy + y^2$ است. محور x ها در امتداد شرق و محور y ها در امتداد شمال است. یک کوهنورد در نقطه $(2, 1)$ برای بالا رفتن از کوه به کدام سمت باید برود؟

(MBA - سراسری ۸۱)

- (۱) شرق (۲) غرب (۳) جنوب (۴) شمال

۸۹- اگر $f(x,y) = x^2 - 2x + y^2 - 2y$ در این صورت نقاط $(1, 1)$ و $(-1, 1)$ برای f به ترتیب هستند.

(MBA - سراسری ۸۱)

- (۱) ماکزیمم نسبی و زینی (۲) مینیمم نسبی و ماکزیمم نسبی (۳) مینیمم نسبی و زینی (۴) زینی و ماکزیمم نسبی

۹۰- اگر $u = x^2 + y^2$ و $x = 4s - 2t$ ، $y = st$ مقدار $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ در نقطه $s = 0$ و $t = 0$ کدام است؟

(ژئوفیزیک - سراسری ۸۱)

- (۱) 0 (۲) 10 (۳) 12 (۴) 18

۹۱- معادله خط قائم بر سطح به معادله $z = ye^x$ در نقطه $(1, 2, 2e)$ کدام است؟

(ژئوفیزیک - سراسری ۸۱)

- (۱) $\frac{x-1}{2e} = \frac{y-2}{e} = \frac{z-2e}{-1}$ (۲) $\frac{x-1}{e} = \frac{y-2}{2e} = \frac{z-2e}{-1}$ (۳) $\frac{x-1}{e} = \frac{y-2}{e} = \frac{z-2e}{e}$ (۴) $\frac{x-1}{2e} = \frac{y-2}{e} = \frac{z-2e}{e}$

۹۲- مینیمم رویه به معادله $f(x,y) = x^2 - 4xy + y^2 + 4y$ کدام است؟

(مهندسی هسته‌ای - سراسری ۸۱)

- (۱) -1 (۲) 0 (۳) $\frac{1}{2}$ (۴) 1

۹۳- گرادیان تابع $f(x,y) = x^2y^2$ در نقطه $(-1, 2)$ کدام است؟

(معدن - سراسری ۸۱)

- (۱) $4\vec{i} - 2\vec{j}$ (۲) $3\vec{i} - 12\vec{j}$ (۳) $4\vec{i} + 12\vec{j}$ (۴) $12\vec{i} - 4\vec{j}$

۹۴- اگر $u = 2x^2 + y^2 - z^2$ ، $x = 2s + 5t$ ، $y = s^2 - t^2$ ، $z = st$ در نقطه $s = 1$ ، $t = 0$ کدام است؟

(آمار - سراسری ۸۱)

- (۱) 60 (۲) 50 (۳) 40 (۴) 30

۹۵- مشتق سویی تابع f با ضابطه $f(x,y) = y^2 + 2xy^2 + x^2y^2$ در نقطه $(0, 1)$ و در جهت $\vec{i} + \vec{j}$ کدام است؟

(آمار - سراسری ۸۱)

- (۱) $\sqrt{2}$ (۲) $\sqrt{3}$ (۳) $2\sqrt{2}$ (۴) $2\sqrt{3}$

۹۶- ماکسیمم تابع با ضابطه $f(x,y) = x^2y^2$ نسبت به قید $x^2 + y^2 = 1$ کدام است؟

(آمار - سراسری ۸۱)

- (۱) 0 (۲) $\frac{1}{4}$ (۳) $\frac{1}{2}$ (۴) 1

۹۷- یک رأس جعبه‌های مکعب مستطیل شکل در مبدأ و سه یال این رأس در امتداد محورها قرار دارند. اگر رأس مقابل O از این مکعب مستطیل‌ها روی صفحه به معادله $3x + 2y + 6z = 18$ قرار داشته باشد. ماکسیمم حجم این مکعب مستطیلها کدام است؟

(آمار - سراسری ۸۱)

- (۱) 6 (۲) $7/5$ (۳) 9 (۴) $10/5$

۹۸- رابطه $z = x^n f(\frac{y}{x})$ در کدام گزینه صدق می‌کند؟

(ریاضی - سراسری ۸۱)

- (۱) $y \frac{\partial z}{\partial y} + x \frac{\partial z}{\partial x} + nz = 0$ (۲) $y \frac{\partial z}{\partial y} + x \frac{\partial z}{\partial x} - nz = 0$ (۳) $\frac{\partial z}{\partial x} - n \frac{\partial z}{\partial y} = 0$ (۴) $\frac{\partial z}{\partial y} + x \frac{\partial z}{\partial x} - nz = 0$

۹۹- تابع f با ضابطه $f(x,y) = \sqrt[5]{x^5 + y^5}$ داده شده است. در این صورت:

(ریاضی - سراسری ۸۱)

- (۱) f در همه نقاط R^2 مشتق‌پذیر است. (۲) f در هیچ نقطه از R^2 مشتق‌پذیر نیست. (۳) f در نقطه $(0, 0)$ مشتق‌پذیر نیست. (۴) f در نقطه $(0, 0)$ مشتق‌پذیر است.

۱۰۰- مشتق جهتی تابع $f(x,y,z) = x^2 + y^2 - z^2$ در نقطه $p(1,1,2)$ و در سوی بردار $v = (2,1,2)$ کدام است؟ (ریاضی - سراسری ۸۱)

- (۱) $-\frac{2}{3}$ (۲) $-\frac{1}{3}$ (۳) $\frac{1}{3}$ (۴) $\frac{2}{3}$

۱۰۱- مقدار ماکزیمم و مینیمم تابع $f(x,y) = 3x^2 + 2y^2 - 4y + 1$ روی قرص $x^2 + y^2 \leq 16$ کدامیک از مقادیر زیراند؟

- (عمران - سراسری ۸۲)
(۱) 52 و -1 (۲) 49 و 17 (۳) 49 و -1 (۴) 52 و 17

۱۰۲- در چه نقاطی از سطح $2x^2 + y - z^2 = 5$ مماس در آنها با صفحه $24x + y - 6z = 3$ موازی است؟ (عمران - سراسری ۸۲)

- (۱) $(-1, 24, 3), (2, 2, 2)$ (۲) $(-1, 8, 1), (1, 4, 1)$ (۳) $(2, -7, 2), (-2, 25, 2)$ (۴) $(-2, 30, 3), (2, -2, 3)$

۱۰۳- اگر $\nabla^2 u$ حاصل $\nabla^2 u$ برابر است با: $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, u = f(r)$ (عمران - آزاد ۸۲)

- (۱) $f''(r) + \frac{2}{r}f'(r)$ (۲) صفر (۳) $f''(r)$ (۴) $f''(r) + \frac{1}{r}f'(r)$

۱۰۴- ماکسیمم مقدار تابع $f(x,y) = \ln(x^2) + \ln(y^2)$ تحت شرایط $1 \leq x \leq e^2$ و $1 \leq y \leq 1$ کدام است؟

- (مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری - سراسری ۸۲)
(۱) 1 (۲) 2 (۳) 3 (۴) 5

۱۰۵- تابع $f(x,y) = xy(4-x-y)$ مفروض است. کدامیک از عبارات زیر در رابطه با نقاط بحرانی این تابع صحیح است؟

- (مهندسی صنایع سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی - آزاد ۸۲)

- (۱) این تابع دارای سه نقطه زین اسبی و یک نقطه ماکزیمم است.
(۲) این تابع دارای یک نقطه زین اسبی و یک نقطه ماکزیمم است.
(۳) این تابع دارای سه نقطه زین اسبی و یک نقطه مینیمم است.
(۴) این تابع دارای دو نقطه زین اسبی و یک نقطه ماکزیمم و یک نقطه مینیمم است.

۱۰۶- تابع $f(x,y) = \frac{1}{y} - \frac{1}{x} - 4x + y$ مفروض است. کدامیک از عبارات زیر در رابطه با نقاط بحرانی این تابع صحیح است؟

- (مهندسی صنایع سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی - آزاد ۸۲)

- (۱) این تابع دارای یک نقطه زین اسبی، یک نقطه ماکزیمم و یک نقطه مینیمم است.
(۲) این تابع دارای یک نقطه ماکزیمم و یک نقطه مینیمم است و نقطه زین اسبی ندارد.
(۳) این تابع دارای دو نقطه زین اسبی، یک نقطه ماکزیمم و یک نقطه مینیمم است.
(۴) این تابع دارای دو نقطه ماکزیمم و دو نقطه مینیمم است.

۱۰۷- معادله صفحه مماس بر بیضوی $4x^2 + y^2 - 16z = 0$ در نقطه $(2, 4, 2)$ کدام است؟ (کامپیوتر - سراسری ۸۲)

- (۱) $2x - y - 2z = -4$ (۲) $2x - y + 2z = 2$ (۳) $2x + y - 2z = 4$ (۴) $2x + y + 2z = 12$

۱۰۸- ضریب زاویه خط مماس بر منحنی برخورد $z = \frac{1}{\sqrt{24-x^2-2y^2}}$ و صفحه $y = 2$ در نقطه $(2, 2, \sqrt{3})$ کدام است؟

- (کامپیوتر - سراسری ۸۲)
(۱) $-\frac{1}{2\sqrt{3}}$ (۲) $-\frac{2}{\sqrt{3}}$ (۳) $\sqrt{3}$ (۴) $2\sqrt{3}$

۱۰۹- اگر $f(x,y) = 3x^2 - y^2 + 4x$ آنگاه مشتق جهت‌دار f در جهت بردار i که با جهت مثبت محور x زاویه $\frac{\pi}{6}$ می‌سازد کدام است؟

- (کامپیوتر - سراسری ۸۲)
(۱) $3x - 2\sqrt{3}y$ (۲) $x - 2\sqrt{3}y + 2\sqrt{3}$ (۳) $3\sqrt{3}x - y + 4$ (۴) $3\sqrt{3}x - y + 2\sqrt{3}$

۱۱۰- اگر $z = f(x+y, x-y)$ کدام رابطه برقرار است؟

- (۱) $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ (۲) $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$ (۳) $\frac{\partial z}{\partial x} - \frac{\partial z}{\partial y} = 0$ (۴) $\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = 0$

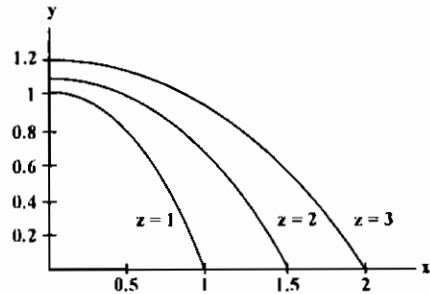
۱۱۱- در یک مطالعه، دما در هر نقطه صفحه از تابع $T(x,y) = \frac{100}{x^2 + y^2 + 1}$ پیروی می‌کند. کدامیک از گزینه‌های زیر درست است؟

- (MBA - سراسری ۸۲)
(۱) در نقطه (۲ و ۳) جهت بیشترین کاهش دما به طرف مبدأ مختصات است و دما در جهت بردار (۳ و -۲) تغییری نمی‌کند.
(۲) در نقطه (۲ و ۳) جهت بیشترین کاهش دما به طرف مبدأ مختصات است و دما در جهت بردار (۳ و -۲) تغییری نمی‌کند.
(۳) در نقطه (۲ و ۳) جهت بیشترین افزایش دما به طرف مبدأ مختصات است و دما در جهت بردار (۳ و -۲) تغییری نمی‌کند.
(۴) در نقطه (۲ و ۳) جهت بیشترین کاهش دما به طرف مبدأ مختصات است و دما در جهت بردار (۶ و -۴) تغییری نمی‌کند.

۱۱۲- باز پرداخت وام مسکن، P ، تابعی از سه متغیر است، $P = f(A, r, N)$ مقدار وام دریافتی است به ریال، r نرخ بهره است و N شماره سالهای بازپرداخت وام می‌باشد. کدامیک از گزاره‌های زیر درست است؟

- (MBA - سراسری ۸۲)
(۱) $\frac{\partial P}{\partial N} > 0$ و $\frac{\partial P}{\partial r} < 0$ و $\frac{\partial P}{\partial A} > 0$
(۲) $\frac{\partial P}{\partial N} < 0$ و $\frac{\partial P}{\partial r} > 0$ و $\frac{\partial P}{\partial A} < 0$
(۳) $\frac{\partial P}{\partial N} > 0$ و $\frac{\partial P}{\partial r} < 0$ و $\frac{\partial P}{\partial A} < 0$
(۴) $\frac{\partial P}{\partial N} < 0$ و $\frac{\partial P}{\partial r} > 0$ و $\frac{\partial P}{\partial A} > 0$

۱۱۳- $z = f(x,y)$ تابعی از x, y است و نمودار خم‌های $z=1$ و $z=2$ و $z=3$ در شکل زیر داده شده است. کدامیک از گزاره‌های زیر درست است؟ (مقادیر تقریبی است.)



- (۱) $Z_y(0,1) = 1, Z_x(0,1) = 1, Z_x(1,0) = 1$
(۲) $Z_y(0,1) = 20, Z_x(0,1) = 1, Z_x(1,0) = 1$
(۳) $Z_y(0,1) = 10, Z_x(0,1) = 0.5, Z_x(1,0) = 2$
(۴) $Z_y(0,1) = 10, Z_x(0,1) = 0, Z_x(1,0) = 2$

۱۱۴- صفحه $x+y+z=1$ استوانه $x^2 + y^2 = 2$ را در یک خم C قطع می‌کند. نقاط P و Q را روی C چنان بیابید که به ترتیب ارتفاع ماکسیمم و مینیمم را از صفحه xy داشته باشند.

- (۱) $Q = (\sqrt{2}, 0, 1 - \sqrt{2}), P = (0, \sqrt{2}, 1 - \sqrt{2})$
(۲) $Q = (1, 1, -1), P = (-1, -1, 3)$
(۳) $Q = (-\sqrt{2}, 0, 1 + \sqrt{2}), P = (0, -\sqrt{2}, 1 + \sqrt{2})$
(۴) $Q = (\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 1 - \frac{\sqrt{2} + \sqrt{2}}{2}), P = (\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 1 - \frac{\sqrt{2} + \sqrt{2}}{2})$

۱۱۵- مشتق جهت‌دار $f(x,y) = e^x \tan y + 2x^2 y$ در نقطه $(0, \frac{\pi}{4})$ در جهت $\vec{j} - \vec{i}$ عبارت است از:

- (۱) $-\sqrt{2}$ (۲) $\sqrt{2}$ (۳) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ (۴) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

۱۱۶- تابع $f(x,y) = -\sqrt{x^2 + y^2}$:

- (۱) در نقطه $(0,0)$ مینیمم دارد.
(۲) دارای ماکسیمم و مینیمم نیست.
(۳) در نقطه $(0,0)$ ماکسیمم دارد.
(۴) در نقطه $(0,0)$ یک نقطه زینی دارد.

۱۱۷- مشتق‌های جزئی $\frac{\partial z}{\partial v}, \frac{\partial z}{\partial u}$ برای $z = \cos(x^2 + y^2)$ که $\begin{cases} x = u \cos v \\ y = u \sin v \end{cases}$ به ترتیب عبارتند از:

- (MBA - سراسری ۸۲)
(۱) $-2u \sin u^2$ و 0 (۲) $2u \cos v^2$ و $-2u \sin v^2$ (۳) $2u \cos v^2$ و $2u \sin v^2$ (۴) $2u \cos u^2$ و $-2u \sin u^2$

۱۱۸- اگر $u = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$ کدام گزاره درست است؟

(ژئوفیزیک - سراسری ۸۲)

(۱) $x \frac{\partial u}{\partial x} = y \frac{\partial u}{\partial y}$ (۲) $y \frac{\partial u}{\partial x} = x \frac{\partial u}{\partial y}$ (۳) $x \frac{\partial u}{\partial x} - y \frac{\partial u}{\partial y} = u$ (۴) $x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} = 0$

۱۱۹- صفحه مماس بر رویه به معادله $z = \sqrt{x+1} + \sqrt{y+1}$ در نقطه $(2, 3, 4)$ محور x ها را در A و محور y ها را در B و محور z ها را در C قطع می کند. $x_A + y_B + z_C$ چقدر است؟

(ژئوفیزیک - سراسری ۸۲)

(۱) ۱۷ (۲) ۱۰ (۳) -۱۰ (۴) -۱۷/۵

۱۲۰- اگر $\phi(x, y) = e^{xy^2}$ باشد $\frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y}$ کدام است؟

(مهندسی هسته ای - سراسری ۸۲)

(۱) $2xy^2 e^{xy^2} + 2xy^2 e^{xy^2}$ (۲) $2xy^2 e^{xy^2} + e^{xy^2}$ (۳) $2xy^2 e^{xy^2} + 2ye^{xy^2}$ (۴) $2y^2 e^{xy^2} + 2ye^{xy^2}$

۱۲۱- در صورتیکه x و y و z مخالف صفر و $x + y + z = 1$ باشد، ماکزیمم xy^2z^2 کدام عدد است؟

(معدن - سراسری ۸۲)

(۱) $\frac{1}{۲۲}$ (۲) $\frac{1}{۲۶}$ (۳) $\frac{1}{۶۲۸}$ (۴) $\frac{1}{۴۲۲}$

۱۲۲- اگر $\phi(x, y) = x^n f(\frac{y}{x})$ باشد، کدام تساوی برقرار است؟

(معدن - سراسری ۸۲)

(۱) $y \frac{\partial \phi}{\partial x} + x \frac{\partial \phi}{\partial y} = n\phi$ (۲) $x \frac{\partial \phi}{\partial x} + y \frac{\partial \phi}{\partial y} = \phi$ (۳) $x \frac{\partial \phi}{\partial x} + y \frac{\partial \phi}{\partial y} = n\phi$ (۴) $y \frac{\partial \phi}{\partial x} + x \frac{\partial \phi}{\partial y} = \phi$

۱۲۳- در مورد تابع دو متغیره $z = f(x, y)$ کدام گزاره صحیح است؟

(ریاضی - سراسری ۸۲)

(۱) اگر f در نقطه (x_0, y_0, z_0) دارای اکستریم نسبی باشد آنگاه $f_x(x_0, y_0) = f_y(x_0, y_0) = 0$

(۲) اگر $f_x(x_0, y_0) = f_y(x_0, y_0) = 0$ آنگاه مماس بر سطح f در نقطه (x_0, y_0, z_0) افقی است.

(۳) اگر f در نقطه (x, y, z) مشتق پذیر و $f_x(x_0, y_0) = f_y(x_0, y_0) = 0$ آنگاه مشتق سوئی f در نقطه (x_0, y_0) در هر جهتی صفر است.

(۴) اگر f همه جا پیوسته و دارای دو مینیمم نسبی باشد آنگاه f حداقل دارای یک ماکزیمم نسبی است.

۱۲۴- اگر $f(x, y, z) = z^2 - xe^{2x-y}$ اندازه تصویر بردار $\text{grad } f$ در نقطه $(1, 2, -1)$ بر روی بردار $\vec{j} + -i$ کدام است؟

(مکانیک - سراسری ۸۲)

(۱) $\frac{5}{\sqrt{2}}$ (۲) $2\sqrt{2}$ (۳) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (۴) ۲

۱۲۵- معادله $\frac{\partial f}{\partial x} - 2 \frac{\partial f}{\partial y} = 0$ با تغییر متغیرهای $r = 2y - 2x$ و $\rho = 2y + 2x$ به کدام صورت بیان می شود؟

(مکانیک - سراسری ۸۲)

(۱) $\frac{\partial f}{\partial r} = 0$ (۲) $\frac{\partial f}{\partial \rho} = 0$ (۳) $\frac{\partial f}{\partial r} - \frac{\partial f}{\partial \rho} = 0$ (۴) $\frac{\partial f}{\partial r} + \frac{\partial f}{\partial \rho} = 0$

۱۲۶- معادله صفحه مماس بر سطح $26 = 4x^2 + y^2 + 2z^2$ در نقطه $(3, -2, 1)$ و $(1, 2, -1)$ برابر است با:

(مکانیک - آزاد ۸۲)

(۱) $2x - y + 2z = 12$ (۲) $x - y + 2z = 12$ (۳) $2x + y - 2z = 10$ (۴) $2x + 2y - z = 10$

۱۲۷- اگر $u = \frac{x^2 y^2}{x+y}$ باشد، مقدار عبارت $x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y}$ برابر است با:

(مکانیک - آزاد ۸۲)

(۱) $\frac{u}{2}$ (۲) $2u$ (۳) $3u$ (۴) $6u$

۱۲۸- اگر $f(u, v) = \frac{u}{v}$ و $u = \sqrt{x^2 - 2y + 4z}$ و $v = xyz$ مقدار $\frac{\partial f}{\partial z}$ در $x=1, y=1, z=2$ برابر است با:

(مکانیک - آزاد ۸۲)

(۱) $-\frac{\sqrt{6}}{12}$ (۲) $-\frac{\sqrt{6}}{2}$ (۳) $-\frac{5\sqrt{6}}{8}$ (۴) صفر

۱۲۹- بردار یکه عمود بر سطح $xy^2z^2 = 4$ در نقطه $(-1, -1, 2)$ برابر کدام مقدار است؟

(عمران - سراسری ۸۲)

(۱) $\frac{1}{12}(4, 5, -6)$ (۲) $\frac{1}{\sqrt{176}}(4, 12, 4)$ (۳) $\frac{1}{12}(5, -6, 4)$ (۴) $\frac{1}{\sqrt{176}}(-4, -12, 4)$

۱۳۰- کوچکترین و بزرگترین مقدار تابع $f(x, y) = x^2 + y^2$ بر قرص بسته $(x - \sqrt{2})^2 + (y - \sqrt{2})^2 \leq 9$ کدامیک از مقادیر زیراند:

(عمران - سراسری ۸۲)

(۱) ۲۵ و ۰ (۲) ۱۶ و ۰ (۳) ۱۴ و ۰ (۴) ۲۶ و ۰

۱۳۱- در چه نقاطی از بیضی $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + z^2 = 1$ قائم به آن با محورهای مختصات زوایای مساوی می سازد؟

(عمران - سراسری ۸۲)

(۱) $(\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{3}), (-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{3}), (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{3}), (-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ (۲) $(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}), (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$
 (۳) $(\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}), (-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ (۴) $(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{3}), (\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$

۱۳۲- بردار یکه عمود بر سطح $x^2 y^2 z = 2$ در نقطه $(1, 1, 2)$ برابر است با:

(عمران - آزاد ۸۲)

(۱) $\frac{1}{\sqrt{13}}(6, 6, 1)$ (۲) $\frac{1}{\sqrt{14}}(6, 6, 2)$ (۳) $\frac{1}{\sqrt{13}}(6, 6, -1)$ (۴) $\frac{1}{\sqrt{14}}(6, 6, -2)$

۱۳۳- اکستریم نسبی تابع $f(x, y) = 2x^2 + 2xy + 5y^2 + 4x$ چگونه است؟

(مهندسی سیستم های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره وری - سراسری ۸۲)

(۱) مینیمم $(0, 0)$ (۲) $(-\frac{10}{9}, \frac{2}{9})$ مینیمم (۳) $(-\frac{10}{9}, \frac{2}{9})$ ماکسیمم (۴) فاقد نقطه اکستریم

۱۳۴- ماکزیمم عبارت $2x + y$ در صورتی که $x + y \leq 4$ و $-x + y \geq -2$ باشد چیست؟

(مهندسی سیستم های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره وری - سراسری ۸۲)

(۱) ۵ (۲) ۶ (۳) ۷ (۴) ۹

۱۳۵- $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xye^{xy}}{x^2 + y^2}$ کدام است؟

(مهندسی سیستم های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره وری - سراسری ۸۲)

(۱) ۰ (۲) ۱ (۳) $\frac{1}{2}$ (۴) وجود ندارد

۱۳۶- در تابع دو متغیره $z = x^2 \text{Arctg} \frac{y}{x}$ حاصل $x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y}$ به ازای $x = \sqrt{3}$ و $y = 1$ کدام است؟

(مهندسی سیستم های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره وری - سراسری ۸۲)

(۱) π (۲) $\frac{\pi}{2}$ (۳) $\frac{\pi}{3}$ (۴) $\frac{2\pi}{3}$

۱۳۷- اندازه مشتق سوئی تابع $W = x^2 y - yz + 2z$ در نقطه $(1, -2, 0)$ در امتداد بردار $2i - j + 2k$ کدام است؟

(مهندسی سیستم های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره وری - سراسری ۸۲)

(۱) $-\frac{1}{3}$ (۲) $\frac{1}{3}$ (۳) $-\frac{2}{3}$ (۴) $\frac{2}{3}$

۱۳۸- اگر $f(x, y) = xe^{-(x+y^2)} + ye^{-y^2-1}$ باشد، حداکثر مقدار f به ازای چه مقدار y دست می آید؟

(مهندسی صنایع (سیستم های اقتصادی و اجتماعی - مدیریت سیستم و بهره وری) - آزاد ۸۲)

(۱) $\frac{-1 \pm \sqrt{3}}{4}$ (۲) $\frac{-1 \pm \sqrt{3}}{2}$ (۳) $\frac{-1 \pm \sqrt{5}}{4}$ (۴) $\frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$

۱۳۹- مشتق جهت دار تابع $f(x, y, z) = \frac{e^z}{x^2 + y}$ در جهت بردار $\vec{j} - 2\vec{i}$ در نقطه $(1, 1, \ln 2)$ کدام است؟

(مهندسی صنایع (سیستم های اقتصادی و اجتماعی - مدیریت سیستم و بهره وری) - آزاد ۸۲)

(۱) $\frac{1}{\sqrt{10}}$ (۲) $\frac{1}{2\sqrt{10}}$ (۳) صفر (۴) $\frac{1}{2}$

۱۴۰- اگر $z = 2x + y^2 + 1$ باشد، کمترین مقدار $x - y + z^2$ کدام است؟

(مهندسی صنایع (سیستم های اقتصادی و اجتماعی - مدیریت سیستم و بهره وری) - آزاد ۸۲)

(۱) $\frac{1}{4}$ (۲) $\frac{1}{8}$ (۳) $-\frac{1}{16}$ (۴) $-\frac{1}{22}$

۱۴۱- منحنی c به معادله $x = \cos t$ و $y = \sin t$ و $z = t$ مفروض است. کوتاهترین فاصله مبدأ مختصات از خط مماس بر منحنی c در نقطه $(-1, 0, \pi)$ کدام است؟ (مهندسی صنایع (سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی - مدیریت سیستم و بهره‌وری) - آزاد ۸۳)

(۱) $\sqrt{1+\pi^2}$ (۲) $\sqrt{2+\pi^2}$ (۳) $\sqrt{2+2\pi^2}$ (۴) $\sqrt{1+\frac{\pi^2}{2}}$

۱۴۲- اگر $\vec{a} = 2\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$ و $\vec{b} = (1, 0, 1)$ و $f(x, y, z) = 1 + x^2 e^{yz^2}$ در جهت بردار \vec{a} و در نقطه p برابر است با: (کامپیوتر - سراسری ۸۳)

(۱) $\frac{\sqrt{2}}{6}$ (۲) $\frac{\sqrt{6}}{2}$ (۳) $2\sqrt{6}$ (۴) $6\sqrt{2}$

۱۴۳- اگر $f(x, y) = \begin{cases} x & (y \geq 0, x \leq 0 \text{ یا } 0 < y \leq x^2) \\ 0 & \text{بقیه نقاط} \end{cases}$ در این صورت $f_x(0, 1)$ ، $f_y(0, 1)$ به ترتیب (از راست به چپ) چگونه است؟ (کامپیوتر - سراسری ۸۳)

(۱) $0 = 0$ (۲) وجود ندارد (۳) وجود ندارد (۴) وجود ندارد - وجود ندارد.

۱۴۴- مقدار ماکزیمم مشتق جهتی رویه $f(x, y) = x^2 e^y$ در نقطه $(-2, 0)$ کدام است؟ (کامپیوتر - سراسری ۸۳)

(۱) صفر (۲) ۴ (۳) ۸ (۴) $4\sqrt{2}$

۱۴۵- بیشترین مقدار مجموع دو عدد مثبت x و y که در نامساوی‌های $y \leq 2x + 5$ و $4x + 3y \leq 6$ صدق کنند، کدام است؟ (MBA - سراسری ۸۳)

(۱) ۱۸ (۲) ۱۸/۵ (۳) ۱۹ (۴) ۱۹/۵

۱۴۶- اگر f و g دو تابع مشتق پذیر باشند از رابطه $g(z-x) + f(y-z) = 0$ حاصل $\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y}$ کدام است؟ (MBA - سراسری ۸۳)

(۱) -۱ (۲) صفر (۳) +۱ (۴) $g' - f'$

۱۴۷- در تابع $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 - xy}{x + y} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$ مقدار $f'_x(0, 0) - f'_y(0, 0)$ کدام است؟ (MBA - سراسری ۸۳)

(۱) -۱ (۲) صفر (۳) ۱ (۴) تعریف نشده

۱۴۸- قاعده جسمی قائم و منطبق بر دایره $x^2 + y^2 = 9$ و مقطع آن با هر صفحه عمود بر محور x ها یک مربع است، حجم آن کدام است؟ (MBA - سراسری ۸۳)

(۱) ۷۲ (۲) ۱۰۸ (۳) ۱۲۶ (۴) ۱۴۴

۱۴۹- بیشترین مقدار مشتق تابع سویی تابع $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + 2z$ در نقطه $(2, -2, 2)$ چقدر است؟ (MBA - سراسری ۸۳)

(۱) ۶ (۲) ۶ (۳) ۹ (۴) ۱۲

۱۵۰- خط مماس بر منحنی فضایی C فصل مشترک دو رویه $z = x^2 - y^2$ و $2xy - 2z = 0$ در نقطه $(2, 1, 2)$ موازی کدام بردار است؟ (MBA - سراسری ۸۳)

(۱) $2\vec{i} + \vec{j} + 6\vec{k}$ (۲) $2\vec{i} - \vec{j} + 6\vec{k}$ (۳) $\vec{i} - 2\vec{j} + 3\vec{k}$ (۴) $5\vec{i} + 2\vec{j} + 4\vec{k}$

۱۵۱- اگر $z = e^x \cos y$ و $x^2 + e^x - t^2 - t = 1$ مقدار $\frac{dz}{dt}$ در $t = 0$ کدام است؟ (ژئوفیزیک - سراسری ۸۳)

(۱) -۱ (۲) ۰ (۳) ۱ (۴) $+\infty$

۱۵۲- اگر $z = x^2 + y^2$ بردار عمود بر این رویه کدام است؟ (ژئوفیزیک - سراسری ۸۳)

(۱) $2x\vec{i} + 2y\vec{j}$ (۲) $-2x\vec{i} + 2y\vec{j} + 2\vec{k}$ (۳) $2x\vec{i} + 2y\vec{j} - \vec{k}$ (۴) $yz + x\vec{j}$

۱۵۳- معادله صفحه عمود بر خط به معادله $\begin{cases} x + y = 1 \\ x + z = 1 \end{cases}$ که از مبدأ می‌گذرد کدام است؟ (ژئوفیزیک - سراسری ۸۳)

(۱) $x - y - z = 0$ (۲) $x + y - z = 0$ (۳) $x - y + z = 0$ (۴) $x + y + z = 0$

۱۵۴- اگر $z = (x^2 + y^2)e^{\frac{x^2 y^2}{x^2 + y^2}}$ آنگاه مقدار $\frac{x \partial z}{\partial x} + \frac{y \partial z}{\partial y}$ کدام است؟ (ژئوفیزیک - سراسری ۸۳)

(۱) ۰ (۲) z (۳) $2z$ (۴) $3z$

۱۵۵- اگر $f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x+y} & x+y \neq 0 \\ \alpha & x+y = 0 \end{cases}$ به ازای کدام مقدار α ، $f_x(1, -1)$ موجود نیست؟ (ژئوفیزیک - سراسری ۸۳)

(۱) -۱ (۲) صفر (۳) ۱ (۴) هر مقدار α

۱۵۶- اگر $z = x \cos y$ ، $x = s + t$ و $y = s - t$ مقدار $\frac{\partial z}{\partial s}$ وقتی $t = 0$ و $s = \pi$ کدام است؟ (ژئوفیزیک - سراسری ۸۳)

(۱) -۱ (۲) صفر (۳) ۱ (۴) π

۱۵۷- معادله صفحه مماس بر رویه به معادله $z = e^{2x+3y}$ در نقطه $(-6, 3, 1)$ کدام است؟ (ژئوفیزیک - سراسری ۸۳)

(۱) $2x - 6y - z = -21$ (۲) $2x + 6y - z = 5$ (۳) $2x - 6y + z = -29$ (۴) $2x + 6y + z = 7$

۱۵۸- بردار مماس بر منحنی به معادله $\begin{cases} x + z = 2 \\ x^2 = 8y \end{cases}$ در نقطه $(4, 8, -2)$ کدام است؟ (ژئوفیزیک - سراسری ۸۳)

(۱) $\vec{i} - 6\vec{j} - \vec{k}$ (۲) $\vec{i} + 6\vec{j} + \vec{k}$ (۳) $\vec{i} + 6\vec{j} - \vec{k}$ (۴) $\vec{i} - 6\vec{j} + \vec{k}$

۱۵۹- فرض کنید $f(x, y) = \frac{x^2}{x^2 + y^2}$ ، در این صورت $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$ برابر است با: (معدن - سراسری ۸۳)

(۱) ۰ (۲) ۱ (۳) $\frac{1}{2}$ (۴) حد وجود ندارد.

۱۶۰- نقطه اکسترمم $f(x, y) = x^2 - y^2 + 2xy$ چگونه است؟ (معدن - سراسری ۸۳)

(۱) $(1, 1)$ ماکسیمم نسبی (۲) $(-1, -1)$ مینیمم نسبی (۳) $(1, -1)$ مینیمم نسبی (۴) $(-1, 1)$ ماکسیمم نسبی

۱۶۱- اگر $f(x, y) = xy^2 + 2y$ و $\vec{a} = 3\vec{i} - 4\vec{j}$ ، مشتق سونی (جهتی) f در نقطه $(1, -2)$ در جهت \vec{a} برابر است با: (معدن - سراسری ۸۳)

(۱) ۴ (۲) ۳ (۳) ۲ (۴) ۱

۱۶۲- اگر $f(x, y) = \begin{cases} 1 & xy \neq 0 \\ 0 & xy = 0 \end{cases}$ آنگاه کدام گزینه در مورد حدود

$A = \lim_{x \rightarrow 0} \lim_{y \rightarrow 0} f(x, y)$ ، $B = \lim_{y \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow 0} f(x, y)$ ، $C = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$ صحیح است؟ (ریاضی - سراسری ۸۳)

(۱) A, B موجود و نابرابرند و C موجود نیست. (۲) A, B, C موجود و نابرابرند. (۳) A, B موجود و برابرند و C موجود نیست. (۴) A, B هیچکدام موجود نیستند.

۱۶۳- خطوط عمود بر رویه $z = x^2 + y^2$ در نقاط مختلف دایره $\begin{cases} x^2 + y^2 = 2 \\ z = 2 \end{cases}$ یک رویه تشکیل می‌دهند، معادله این رویه کدام است؟ (ریاضی - سراسری ۸۳)

(۱) $x^2 + y^2 = 2\sqrt{2}(\Delta - 2z)$ (۲) $x^2 + y^2 = \sqrt{2}(\Delta - 2z)$ (۳) $x^2 + y^2 = (\Delta - 2z)$ (۴) $x^2 + y^2 = 2(\Delta - 2z)$

۱۶۴- مشتق سونی $f(x, y, z) = x^2 + y^2 - z$ در نقطه $(1, 1, 2)$ و در امتداد بردار $\frac{2}{3}\vec{i} + \frac{2}{3}\vec{j} - \frac{1}{3}\vec{k}$ برابر است با: (ریاضی - سراسری ۸۳)

(۱) ۲ (۲) $\frac{8}{3}$ (۳) ۳ (۴) ۶

۱۶۵- اگر $f(x, y) = ax^2 + 2bxy + cy^2$ ، شرط لازم و کافی برای آنکه $f(0, 0)$ ماکسیمم موضعی باشد کدام است؟ (ریاضی - سراسری ۸۳)

(۱) $ac - b^2 > 0, a < 0$ (۲) $ac - b^2 < 0, a < 0$ (۳) $ac - b^2 > 0, a > 0$ (۴) $ac - b^2 > 0, a > 0$

۱۶۶- اکسترممهای تابع $w = f(x, y, z)$ با شرط $\begin{cases} H(x, y, z) = 0 \\ G(x, y, z) = 0 \end{cases}$ جواب کدام معادله‌اند؟ (ریاضی - سراسری ۸۳)

(۱) $\vec{VH} \cdot (\vec{Vf} \times \vec{VG}) = 0$ (۲) $\vec{Vf} \cdot (\vec{VH} \times \vec{VG}) = 0$ (۳) $\vec{VG} \cdot (\vec{Vf} \times \vec{VH}) = 0$ (۴) $\vec{Vf} - \lambda(\vec{VH} \times \vec{VG}) = 0$

۱۶۷- اگر $z = f(x, y)$ تابعی دو متغیره باشد حد $f(x, y)$ وقتی (x, y) روی \bar{a} به (a, b) میل می کند به ازای هر بردار \bar{a} موجود باشد و مشتق سویی f در نقطه (a, b) در سوی دو بردار غیر موازی موجود باشد در این صورت کدام گزاره صحیح است؟ (ریاضی - سراسری ۸۳)

- (۱) f در (a, b) حد دارد ولی ممکن است پیوسته نباشد اما مشتقات نسبی f در (a, b) موجودند.
 (۲) f در (a, b) پیوسته است و مشتقات نسبی f در (a, b) موجودند.
 (۳) ممکن است f در (a, b) حد نداشته باشد ولی مشتقات نسبی f در (a, b) موجودند.
 (۴) ممکن است f در (a, b) حد نداشته باشد و مشتقات نسبی f در (a, b) موجود نباشند.

۱۶۸- جواب معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی $u = \frac{\partial z}{\partial x} + x \frac{\partial z}{\partial y}$ کدامیک از توابع زیر است؟ (مکانیک - سراسری ۸۴)

- (۱) $z = f\left(\frac{x}{y}\right)$ (۲) $z = f(x, y)$ (۳) $z = f(x - y)$ (۴) $z = f(x^2 - y^2)$

۱۶۹- مقدار ماکزیمم مطلق و مینیمم مطلق تابع $f(x, y) = 2xy$ بر روی قرص بسته $x^2 + y^2 \leq 4$ برابر است با:

- (۱) ۸ و ۰ (۲) ۲ و -۲ (۳) ۴ و -۴ (۴) ۸ و -۸ (مهندسی هسته‌ای - سراسری ۸۳)

۱۷۰- در کدام جهت تابع $f(x, y, z) = xy + 6z + xz$ در نقطه $(-3, 5, -1)$ بیشترین نرخ تغییرات را دارد؟

- (۱) $2i + 2j - k$ (۲) $2i - 2j + k$ (۳) $2j - 2i + k$ (۴) $2k - 2i + 2j$ (مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری - سراسری ۸۴)

۱۷۱- هرگاه $W = x_1 x_2 \dots x_n$ در نقطه $x_1 = x_2 = \dots = x_n = t$ کدام است $\frac{dW}{dt}$ ؟

- (۱) t^{n-1} (۲) nt^n (۳) nt^{n-1} (۴) $(n-1)t^n$ (مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری - سراسری ۸۴)

۱۷۲- کدام تابع در معادله لاپلاس $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$ صدق می کند؟

- (۱) $x^2 y^2$ (۲) $\sqrt{x^2 + y^2}$ (۳) $\tan^{-1} \frac{y}{x^2}$ (۴) $\tan^{-1} \frac{y}{x}$ (مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری - سراسری ۸۴)

۱۷۳- ماکسیمم تابع $f(x, y) = 3x - 2y + 1$ با توجه به شرط $9x^2 + 4y^2 = 18$ در چه نقاطی رخ می دهد و چقدر است؟

- (۱) $\left(1, \frac{3}{2}\right)$ (۲) $\left(-1, -\frac{3}{2}\right)$ (۳) $\left(\frac{3}{2}, -1\right)$ (۴) $\left(1, -\frac{3}{2}\right)$ (مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری - سراسری ۸۴)

۱۷۴- ماکسیمم و مینیمم مطلق تابع $f(x, y) = x^2 - y^2$ روی ناحیه $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 4\}$ کدامند و در چه نقاطی رخ می دهد؟

- (۱) $(2, 0)$ و $(-2, 0)$ (۲) $(0, 0)$ و $(-2, 0)$ (۳) $(-4, 4)$ و $(4, 4)$ (۴) $(0, 0)$ و $(2, 0)$ (مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری - سراسری ۸۴)

۱۷۵- برای کدام تابع نقطه $(0, 0)$ یک نقطه می نیمم نسبی است:

- (۱) $f(x, y) = x^2 + y^2 + 1$ (۲) $h(x, y)$ (۳) $g(x, y)$ (۴) $k(x, y)$
 (۱) $g(x, y) = x^2 + y^2$ (۲) $h(x, y) = x^2 + y^2 - 3xy$ (۳) $k(x, y) = xy(3 - x - y)$
 (مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری - سراسری ۸۴)

۱۷۶- در چه نقاطی گرادیان تابع $f(x, y) = \ln\left(\frac{1}{x} + y\right)$ مساوی $\left(-\frac{16}{9}, 1\right)$ است؟

- (۱) $\left(\frac{3}{4}, \frac{7}{3}\right), \left(\frac{3}{4}, \frac{1}{3}\right)$ (۲) $\left(-\frac{3}{4}, \frac{7}{3}\right), \left(\frac{3}{4}, \frac{1}{3}\right)$ (۳) $\left(\frac{3}{4}, \frac{7}{3}\right), \left(-\frac{3}{4}, -\frac{1}{3}\right)$ (۴) $\left(-\frac{3}{4}, \frac{7}{3}\right), \left(\frac{3}{4}, -\frac{1}{3}\right)$ (مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری - سراسری ۸۴)

۱۷۷- معادله صفحه مماس در نقطه $\left(\frac{3}{\sqrt{3}}, \frac{4}{\sqrt{3}}, \frac{5}{\sqrt{3}}\right)$ بر رویه $\frac{x^2}{3^2} + \frac{y^2}{4^2} + \frac{z^2}{5^2} = 1$ کدام است؟

(مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری - سراسری ۸۴)

- (۱) $x + y + z = \sqrt{3}$ (۲) $\frac{x}{3} + \frac{y}{4} + \frac{z}{5} = \sqrt{3}$ (۳) $\frac{x}{9} + \frac{y}{16} + \frac{z}{25} = \sqrt{3}$ (۴) $\frac{x}{9} + \frac{y}{16} + \frac{z}{25} = 3$

۱۷۸- کدام تابع در معادله $x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} = 2f$ صدق می کند؟

(مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری - سراسری ۸۴)

- (۱) $f(x, y) = \sqrt{x} - \sqrt{y}$ (۲) $f(x, y) = 1 + \sin \frac{x}{y}$ (۳) $f(x, y) = \frac{x^2 + y^2}{xy}$ (۴) $f(x, y) = x^2 \ln \frac{x}{y} - xy$

۱۷۹- کدام حد وجود دارد؟

(مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری - سراسری ۸۴)

- (۱) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{x^2 + y^2}$ (۲) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2}$ (۳) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y^2}{x^2 + y^2}$ (۴) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2}{x^2 + y^2}$

۱۸۰- دامنه تعریف تابع $f(x, y) = \sqrt{xy} + \sin^{-1} x$ کدام است؟

(مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری - سراسری ۸۴)

- (۱) $D = \{(x, y) | -1 \leq x \leq 1\}$ هم علامتاند و x, y (۲) $D = \{(x, y) | x \in \mathbb{R}^+\}$ هم علامتاند و x, y
 (۳) $D = \{(x, y) | -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}\}$ هم علامتاند و x, y (۴) $D = \{(x, y) | -1 \leq x \leq 1\}$ هم علامتاند و x, y

۱۸۱- کدام تابع را در نقطه $(0, 0)$ می توان طوری تعریف کرد که تابع در این نقطه پیوسته شود؟

(مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری - سراسری ۸۴)

- (۱) $f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}$ (۲) $f(x, y) = \frac{x^2 y^2}{x^2 + y^2}$ (۳) $f(x, y) = \frac{xy}{x - y}$ (۴) $f(x, y) = \frac{x^2}{x + y}$

۱۸۲- تابع f با ضابطه $f(x, y) = \begin{cases} ye^{-\frac{1}{x^2}} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$ در کدامیک از گزاره‌های زیر صدق می کند؟ (کامپیوتر - سراسری ۸۴)

- (۱) بی نهایت بار مشتق پذیر است. (۲) f در نقطه $(0, 0)$ فقط مشتق پذیر مرتبه اول است.
 (۳) f در نقطه $(0, 0)$ دارای بردار گرادیان نیست. (۴) f دارای مشتق مرتبه دوم پیوسته نیست.

۱۸۳- بردار یکه عمود بر سطح f به معادله $5 - z^2 + 2y^2 + 3xyz + x^2 = f(x, y, z)$ در نقطه $(1, 1, 1)$ واقع بر آن کدام است؟

(کامپیوتر - سراسری ۸۴)

- (۱) $\frac{2i + 3j}{\sqrt{13}}$ (۲) $\frac{2i + 3j + k}{\sqrt{14}}$ (۳) $\frac{6i + 9j}{\sqrt{117}}$ (۴) $\frac{6i + 9j + 2k}{\sqrt{261}}$

۱۸۴- تابع f با ضابطه $f(x, y) = \begin{cases} \frac{\sin xy}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$ در کدامیک از گزاره‌های زیر صدق می کند؟ (کامپیوتر - سراسری ۸۴)

- (۱) در $(0, 0)$ پیوسته است.
 (۲) در $(0, 0)$ مشتق پذیر است.
 (۳) در $(0, 0)$ دارای مشتق سویی در هر جهت می باشد.
 (۴) در $(0, 0)$ دارای مشتقات جزئی مرتبه اول بوده ولی پیوسته نمی باشد.

۱۸۵- اگر $u = x^2 + y^2 - xy$ و $v = uv - v^2 + x^2 + y^2 = 0$ و $u = u(x, y)$ و $v = v(x, y)$ آنگاه $\frac{\partial u}{\partial y}$ کدام است؟

(کامپیوتر - سراسری ۸۴)

- (۱) $\frac{uy - vx(u + v)}{2(u^2 + v^2)}$ (۲) $\frac{ux - vy(u + v)}{2(u^2 + v^2)}$ (۳) $\frac{ux + vy(u + v)}{2(u^2 + v^2)}$ (۴) $\frac{uy + vx(u + v)}{2(u^2 + v^2)}$

۱۸۶- می‌نیم عبارت $x^2 + 2y^2 + 2xy + 2x + 2y$ با قید $x^2 - y = 1$ در کدام نقطه است؟ (کامپیوتر - سراسری ۸۴)

(۱) $(0, -1)$ (۲) $(-1, 0)$ (۳) $(\frac{3}{4}, \frac{-7}{16})$ (۴) $(-\frac{3}{4}, \frac{7}{16})$

۱۸۷- اگر $x^2 + y^2 + z^2 = \frac{4}{5}$ باشد، بیشترین مقدار $2x + 4y - 5z$ کدام است؟ (مدیریت اجرایی - سراسری ۸۴)

(۱) ۵ (۲) ۶ (۳) ۸ (۴) ۱۰

۱۸۸- اگر $f(t) = (\sin t - t \cos t)i + (\cos t + t \sin t)j$ باشد، مقدار انحناء منحنی در نقطه نظیر $t = \frac{\pi}{3}$ کدام است؟ (MBA - سراسری ۸۴)

(۱) ۲ (۲) $\frac{\pi}{3}$ (۳) $\frac{\pi}{6}$ (۴) $\frac{2}{\pi}$

۱۸۹- درجه حرارت T در نقطه $M(x, y, z)$ به صورت $T = 96xyz$ است، بالاترین درجه حرارت در سطح کره $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ کدام است؟ (MBA - سراسری ۸۴)

(۱) ۸ (۲) ۱۳ (۳) ۱۴/۴ (۴) ۱۶

۱۹۰- دو صفحه، موازی صفحه $x - 2y + 2z + 9 = 0$ بر بیضوی $x^2 + 4y^2 + 2z^2 = 1$ مماس شده‌اند، فاصله این دو صفحه کدام است؟ (MBA - سراسری ۸۴)

(۱) $\frac{2}{3}$ (۲) $\frac{2}{5}$ (۳) $\frac{4}{3}$ (۴) $\frac{2}{4}$

۱۹۱- اگر $z = f(x + ay)$ که در آن a عدد ثابتی است، کدام تساوی زیر برقرار است؟ (زئوفیزیک - سراسری ۸۴)

(۱) $\frac{\partial z}{\partial y} = a \frac{\partial z}{\partial x}$ (۲) $\frac{\partial z}{\partial y} = -a \frac{\partial z}{\partial x}$ (۳) $a \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial x}$ (۴) $-a \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial x}$

۱۹۲- نقطه $(1, -2)$ برای سطح به معادله $z = x^2 - y^2 - 2x + 4y - 3$ چه نوع نقطه‌ای است؟ (زئوفیزیک - سراسری ۸۴)

(۱) ماکسیمم نسبی (۲) زینی (۳) مینیمم نسبی (۴) عادی

۱۹۳- دیفرانسیل تابع $z = 2x^2 - 3xy - y^2$ کدام است؟ (مهندسی هسته‌ای - سراسری ۸۴)

(۱) $4x - 3y$ (۲) $-2x - 2y$ (۳) $(4x - 3y) - (2x + 2y) \frac{dy}{dx}$ (۴) $(4x - 3y)dx - (2x + 2y)dy$

۱۹۴- فرض کنیم تابع $f(x, y)$ در نقطه (a, b) مشتق پذیر باشد، اگر مشتق جهتی این تابع در نقطه مذکور در امتداد $j + i$ برابر $3\sqrt{2}$ و در امتداد $j - 4i$ برابر ۵ باشد، آنگاه بردار گرادیان $\nabla f(a, b)$ برابر کدام است؟ (مهندسی هسته‌ای - سراسری ۸۴)

(۱) $-i + 7j$ (۲) $7i - j$ (۳) $7i + j$ (۴) $\frac{12\sqrt{2} + 5}{7}i + \frac{9\sqrt{2} - 5}{7}j$

۱۹۵- کمترین فاصله نقاط رویه $xyz = 1$ از مبدأ مختصات، کدام است؟ (معدن - سراسری ۸۴)

(۱) ۱ (۲) $\sqrt{2}$ (۳) $\sqrt{3}$ (۴) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

۱۹۶- فرض کنیم تابع $f(x, y)$ در نقطه $\{a, b\}$ مشتق پذیر باشد، اگر مشتق جهتی این تابع در نقطه مذکور در امتداد $j + i$ برابر $3\sqrt{2}$ و در امتداد $j - 4i$ برابر ۵ باشد، آنگاه بردار $\nabla f(a, b)$ کدام است؟ (معدن و مکانیک - سراسری ۸۴)

(۱) $7i - j$ (۲) $7i + j$ (۳) $-i + 7j$ (۴) $\frac{12\sqrt{2} + 5}{7}i + \frac{9\sqrt{2} - 5}{7}j$

۱۹۷- مقدار ماکزیمم موضعی (نسبی) تابع $f(x, y) = xy - x^2 - y^2 - 2x - 2y + 4$ را در صورت وجود بیابید. (معدن - سراسری ۸۴)

(۱) ۴ (۲) ۵ (۳) ۸ (۴) وجود ندارد.

۱۹۸- اگر f تابعی از R^2 به R با ضابط $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & x = y = 0 \end{cases}$ باشد، کدام گزینه در مورد حدود

$A = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$ و $B = \lim_{x \rightarrow 0} \lim_{y \rightarrow 0} f(x, y)$ و $C = \lim_{y \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow 0} f(x, y)$ صحیح است؟ (آمار - سراسری ۸۴)

(۱) A موجود نیست ولی B, C موجود و برابرند. (۲) A موجود نیست ولی B, C موجود و نابرابرند. (۳) هر سه A, B و C موجود و برابرند. (۴) هیچ کدام از A, B و C موجود نیستند.

۱۹۹- اگر $f(x, y) = \frac{x^2}{y} + \frac{y^2}{x}$ مقدار $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ در نقطه $(1, 1)$ کدام است؟ (ریاضی - سراسری ۸۴)

(۱) -۴ (۲) -۲ (۳) ۲ (۴) ۴

۲۰۰- معادله خط مماس بر مقطع دو سطح فضایی به معادله‌های $z = 2x^2 - 3y^2 + 1$ و $z = x^2 + 2y^2$ در نقطه $(2, 1, 6)$ از کدام نقطه می‌گذرد؟ (ریاضی - سراسری ۸۴)

(۱) $(-8, 2, -50)$ (۲) $(-8, -2, -50)$ (۳) $(8, -2, -50)$ (۴) $(-8, -2, 50)$

۲۰۱- بیشترین مقدار مشتق جهتی سطح به معادله $f(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + z^2 - 4xyz$ در نقطه $(-1, 1, 2)$ کدام است؟ (ریاضی - سراسری ۸۴)

(۱) $2\sqrt{25}$ (۲) $3\sqrt{25}$ (۳) $2\sqrt{52}$ (۴) $3\sqrt{52}$

۲۰۲- تابع $w = f(y - z, z - x, x - y)$ جواب کدام معادله دیفرانسیل با مشتقات نسبی است؟ (مکانیک - آزاد ۸۴)

(۱) $\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 1$ (۲) $\frac{\partial w}{\partial z} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial y}$ (۳) $\frac{\partial w}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial x} = 0$ (۴) قابل محاسبه به فرم فوق نیست.

۲۰۳- با تغییر متغیر $x = v$ و $z = x + y$ معادله $u_{xx} - 2u_{xy} + u_{yy} = 0$ به چه صورت می‌باشد؟ (مکانیک - آزاد ۷۴ و ۸۴)

(۱) $u_{vv} = 0$ (۲) $u_{vz} = 0$ (۳) $u_{zz} = 0$ (۴) $u_{vv} = 1$

۲۰۴- تابع $z = yf(\frac{x}{y}) + F(\frac{x}{y})$ در کدامیک از معادلات دیفرانسیل زیر صدق می‌کند؟ (مکانیک - آزاد ۸۴)

(۱) $Z_{xx} + 2Z_{xy} + Z_{yy} = 0$ (۲) $Z_{xx} - 2Z_{xy} + Z_{yy} = 0$ (۳) $x^2 Z_{xx} + 2xy Z_{xy} + y^2 Z_{yy} = 0$ (۴) $x^2 Z_{xx} - 2xy Z_{xy} + y^2 Z_{yy} = 0$

۲۰۵- مشتق جهت‌دار تابع $f(x, y) = 2x^2 - 3xy + 5y^2$ در نقطه $(1, 2)$ در جهت بردار واحد i که با محور x زاویه 45° بسازد چقدر است؟ (عمران - آزاد ۸۴)

(۱) $\frac{15\sqrt{2}}{2}$ (۲) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (۳) ۱۵ (۴) $\frac{19\sqrt{2}}{2}$

باسخنامه تست‌های طبقه‌بندی شده فصل اول

۱- گزینه «۱» به ازای $y=1$ و $z=0$ تابع f به صورت $f(x,y,z) = x$ در می‌آید که برد آن R می‌باشد.

۲- گزینه «۱» می‌توانیم از قاعده مشتق‌گیری زنجیری استفاده کنیم، ولی جایگذاری و محاسبه مستقیم ساده‌تر می‌باشد.

$$z = t^T \cos^T t + t^T \cos t \times t \sin t + t^T \sin^T t = t^T + t^T \sin t \Rightarrow \frac{dz}{dt} = 2t + 2t \sin 2t + 2t^T \cos 2t \Big|_{t=\frac{\pi}{2}} = \pi = \pi - \frac{\pi^2}{2} = \pi(1 - \frac{\pi}{2})$$

۳- گزینه «۲» تابع f در کلیه نقاط، به جز نقاطی که مخرج را صفر می‌کنند مشتق‌پذیر می‌باشد.

۴- گزینه «۳» $f(x,y,z) = x^2 - 12y = 0 \Rightarrow \nabla f = (2x, -12, 0) \Big|_{(6,2,1)} = (12, -12, 0)$
 $\Rightarrow 12(x-6) - 12(y-2) + 0(z-1) = 0 \Rightarrow x - y - 2 = 0$

۵- گزینه «۳» می‌خواهیم عبارت $V = xyz$ یا به طور معادل $V^T = x^T y^T z^T$ را تحت شرط $x^T + y^T + z^T = 4$ ماکسیم کنیم. چون مجموع x^T و y^T و z^T ثابت است، حاصل ضرب وقتی ماکسیم می‌شود که $x^T = y^T = z^T$. بنابراین:

$$3x^T = 4 \Rightarrow x^T = \frac{4}{3} \Rightarrow x = \frac{2}{\sqrt{3}}, y = \frac{2}{\sqrt{3}}, z = \frac{2}{\sqrt{3}} \Rightarrow V = \frac{8}{3\sqrt{3}} = \frac{8\sqrt{3}}{9}$$

۶- گزینه «۲» در واقع می‌خواهیم عبارت $d = f(x,y,z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ را تحت شرط $z = \sqrt{x^2 - 1}$ مینیمم کنیم. با توجه به شرط لازم است $x \geq 1$. بنابراین مینیمم f در نقطه $(1, 0, 0)$ رخ می‌دهد. در نتیجه:
 $\min(d) = f(1, 0, 0) = \sqrt{1+0+0} = 1$
 توجه کنید که برای حل این مسأله می‌توانستیم از روش ضرایب لاگرانژ نیز استفاده کنیم.

۷- گزینه «۴» $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot 1 + \frac{\partial z}{\partial v} 2xy = 2xy \frac{\partial z}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial u}$

۸- گزینه «۴»

روش اول: می‌خواهیم تابع $C = 5x^2 + 2xy + 2y^2 + 8z = 0$ را تحت شرط $g = x + y - 2z = 0$ مینیمم کنیم. از روش ضرایب لاگرانژ استفاده می‌کنیم.
 $\nabla C = (10x + 2y, 2x + 4y) , \nabla g = (1, 1)$
 بنابراین:

$$\begin{cases} \nabla C = \lambda \nabla g \\ x + y - 2z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 10x + 2y = \lambda \\ 2x + 4y = \lambda \\ x + y - 2z = 0 \end{cases}$$

از حل دستگاه فوق $x=13$ و $y=26$ به دست می‌آید.

روش دوم: در بین گزینه‌ها، تنها گزینه‌ای که در شرط $x + y = 2z$ صدق می‌کند، گزینه (۴) است.

۹- گزینه «۱»

روش اول: $\begin{cases} f_x = 2 - y = 0 \\ f_y = 2 - x = 0 \end{cases} \Rightarrow x = 2, y = 2$

بنابراین نقطه $P(2,2)$ نقطه بحرانی تابع است. برای تعیین نوع نقطه P ، بین را تشکیل می‌دهیم.

$\Delta = f_{xx} f_{yy} - f_{xy}^2 = 0 \times 0 - (-1)^2 = -1 < 0 \Rightarrow$ نقطه زینی است P
 چون تنها نقطه بحرانی تابع یعنی P نیز اکسترم نیست، پس تابع نقطه اکسترم ندارد.

روش دوم: تابع نقطه اکسترم ندارد $\Rightarrow f_{xx} = 0 \Rightarrow f_x = 2 - y$
 یادآوری: هرگاه f_{xx} یا f_{yy} صفر شود تابع نقطه اکسترم ندارد.

۱۰- گزینه «۲» برای یافتن نقاط ماکسیمم و مینیمم تابع، لازم است نقاط مرزی و نقاط بحرانی را بررسی کنیم.

$$\begin{cases} f_x = 8x + 2y = 0 \\ f_y = 2x - 6y = 0 \end{cases} \Rightarrow x = 0, y = 0$$

بنابراین تنها نقطه بحرانی تابع، نقطه $(0,0)$ است که روی مرز قرار دارد (پس نیازی به محاسبه f در این نقطه نیست، چون در مرزها در نظر گرفته خواهد شد). در نتیجه کافی است مرزها را مورد بررسی قرار دهیم:

$x = 0 \Rightarrow f(x,y) = f(0,y) = -2y^2 \Rightarrow \min = -2, \max = 0$

$y = 0 \Rightarrow f(x,y) = f(x,0) = 4x^2 \Rightarrow \min = 0, \max = 4$

$x = 1 \Rightarrow f(x,y) = f(1,y) = 4 + 2y - 2y^2 \Rightarrow \min = 2, \max = \frac{13}{2}$

$y = 1 \Rightarrow f(x,y) = f(x,1) = 4x^2 + 2x - 2 \Rightarrow \min = -2, \max = 2$

با توجه به مقادیر به دست آمده ماکسیمم مطلق برابر $\frac{13}{2}$ و مینیمم مطلق برابر -2 است.

۱۱- گزینه «۲» $\nabla f = (4x - 2y, -2x + 10y) \Rightarrow \nabla f(1,2) = (-2, 17)$

چون بردار واحد \vec{u} ، با محور x زاویه 45° می‌سازد، پس $\vec{u} = (\cos 45^\circ, \sin 45^\circ) = (\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$ بنابراین مشتق سویی f در نقطه $(1,2)$

در جهت بردار \vec{u} برابر است با: $D_u f(1,2) = (-2, 17) \cdot (\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}) = \frac{15\sqrt{2}}{2}$

۱۲- گزینه «۴» اگر روی خط $y = mx$ به مبدأ نزدیک شویم: $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xye^{-xy}}{x^2 + y^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{mx^2 e^{-mx^2}}{x^2 + m^2 x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{me^{-mx^2}}{1 + m^2} = \frac{m}{1 + m^2}$

چون حاصل حد به m بستگی دارد، پس حد وجود ندارد.

۱۳- گزینه «۴»

روش اول: $f(x,y,z) = x^2 + y^2 - z = 0 \Rightarrow \nabla f = (2x, 2y, -1) \Rightarrow \nabla f(1,1,2) = (2, 2, -1)$

بنابراین معادله صفحه در نقطه $(1,1,2)$ به صورت روبرو خواهد بود: $2(x-1) + 2(y-1) - (z-2) = 0 \Rightarrow 2x + 2y - z = 2$

روش دوم: تنها گزینه‌ای که نقطه $(1,1,2)$ در آن صدق می‌کند، گزینه (۴) می‌باشد.

۱۴- گزینه «۲» $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,1)} \frac{\sqrt{x+y} - \sqrt{y}}{x} = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,1)} \frac{\sqrt{x+y} - \sqrt{y}}{x} \times \frac{\sqrt{x+y} + \sqrt{y}}{\sqrt{x+y} + \sqrt{y}} = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,1)} \frac{1}{\sqrt{x+y} + \sqrt{y}} = \frac{1}{2}$

۱۵- گزینه «۳» $f(x,y) = e^x y - y \cosh xy \Rightarrow f_x = e^x y - y^T \sinh xy$

$$f_{xy} = e^x - 2ys \sinh xy - y^T x \sinh xy \Big|_{(1,0)} = e$$

۱۶- گزینه «۵» $\nabla f = (6x + y, x - 4y, -2) \Rightarrow \nabla f \Big|_{(1,1,1)} = (7, -3, -2)$

بنابراین معادله صفحه موردنظر به صورت روبرو است: $7(x-1) - 3(y-1) - 2(z-1) = 0 \Rightarrow 7x - 3y - 2z = 2$

گزینه «۱»

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{|x|+|y|} = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \left(\frac{x}{|x|+|y|}\right) \times y = 1 \text{ و } -1 \text{ محدود بین } x=0 \text{ و } y=0$$

بنابراین برای پیوستگی لازم است $a=0$ باشد.

گزینه «۲»

$$\begin{cases} f_1(x,y,z) = y - x^2 = 0 \Rightarrow \nabla f_1 = (-2x, 1, 0) \Big|_{(4,16,0)} = (-8, 1, 0) \\ f_2(x,y,z) = z^2 + y - 16 = 0 \Rightarrow \nabla f_2 = (0, 1, 2z) \Big|_{(4,16,0)} = (0, 1, 0) \end{cases} \Rightarrow \vec{u} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -8 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (0, 0, -8)$$

بنابراین معادله خط مماس به صورت $\begin{cases} x=4 \\ y=16 \end{cases}$ در می آید.

گزینه «۳» به ازای $r=1$ و $s=1$ مقادیر $x=2$ و $y=1$ به دست می آید. بنابراین:

$$\frac{\partial u}{\partial s} = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial s} = (2x+y) \times 2s + x \times (-2) = 6$$

گزینه «۱»

$$\frac{\partial(u,v,w)}{\partial(x,y,z)} = \begin{vmatrix} 2x & 2y & 2z \\ 1 & 1 & 1 \\ y+z & x+z & x+y \end{vmatrix}$$

دترمینان ماتریس فوق به ازای $x=y=z=1$ برابر صفر می شود و با توجه به گزینه ها، فقط گزینه (۱) می تواند صحیح باشد.

گزینه «۱»

$$\begin{cases} f_x = \sin y = 0 \Rightarrow y = k\pi \\ f_y = x \cos y = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ یا } y = k\pi + \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

$$\Delta = f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 = 0 - \cos^2 y = -\cos^2 y$$

بنابراین نقاط $(0, k\pi)$ نقاط بحرانی تابع می باشند.

چون $\Delta < 0$ ، پس نقاط $(0, k\pi)$ نقاط زینی می باشند.

گزینه «۴»

روش اول: معادله کره را به صورت $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - 9 = 0$ می نویسیم. در این صورت:

$$\nabla f = (2x, 2y, 2z) \Rightarrow \nabla f \Big|_{(2, \sqrt{5}, 0)} = (4, 2\sqrt{5}, 0)$$

$$4(x-2) + 2\sqrt{5}(y-\sqrt{5}) = 0 \Rightarrow 2x + \sqrt{5}y = 9$$

بنابراین معادله صفحه مماس به صورت روبرو خواهد بود:

روش دوم: تنها معادله ای که نقطه $(2, \sqrt{5}, 0)$ در آن صدق می کند، گزینه (۴) است.

گزینه «۲»

$$\begin{cases} f_x = 2xy - 2x^2 + y = 0 \\ f_y = x^2 - 2y + x = 0 \end{cases}$$

$$\Delta = f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 = (2y-6x)(-2) - (2x+1)^2$$

نقطه $(0,0)$ یکی از جوابهای دستگاه فوق می باشد. از طرفی:

چون مقدار Δ در نقطه $(0,0)$ برابر -1 است، پس نقطه $(0,0)$ یک نقطه زینی می باشد.

گزینه «۲» $g \circ f(x,y) = g(f(x,y)) = g(x+y, x,y) = (2x+y, x+y)$

گزینه «۴» بردار واحدی که نقطه $(1, 2)$ را به مبدأ وصل می کند $\vec{u} = \left(\frac{-2}{\sqrt{5}}, \frac{-1}{\sqrt{5}}\right)$ می باشد.

$$f(x,y,z) = x^2y^2 - xy^2 - 2y - z = 0 \Rightarrow \nabla f = (2xy^2 - y^2, 2x^2y - 2xy^2 - 2, -1) \Rightarrow \nabla f \Big|_{(2,1)} = (2, -1, -1)$$

$$D_u f = \nabla f \cdot \vec{u} = (2, -1, -1) \cdot \left(\frac{-2}{\sqrt{5}}, \frac{-1}{\sqrt{5}}, 0\right) = \frac{-5}{\sqrt{5}} = -\sqrt{5}$$

گزینه «۱»

روش اول: قرار می دهیم $w = \ln z$ ، $v = \ln y$ ، $u = \ln x$. در این صورت $x = e^u$ ، $y = e^v$ و $z = e^w$ رابطه

$z^2 = x^2 + y^2$ به صورت $e^{2w} - e^{2u} - e^{2v} = 0$ در می آید. بنابراین:

$$\frac{\partial \ln z}{\partial \ln x} + \frac{\partial \ln z}{\partial \ln y} = \frac{\partial w}{\partial u} + \frac{\partial w}{\partial v} = \frac{-2e^{2u}}{e^{2w}} - \frac{-2e^{2v}}{e^{2w}} = \frac{e^{2u}}{e^{2w}} + \frac{e^{2v}}{e^{2w}} = 1$$

روش دوم: $z^2 = x^2 + y^2 \Rightarrow \ln z^2 = \ln(x^2 + y^2) \Rightarrow \ln z = \frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2)$

بنابراین:

$$\frac{\partial \ln z}{\partial \ln x} + \frac{\partial \ln z}{\partial \ln y} = \frac{\partial \ln z / \partial x}{\partial \ln x / \partial x} + \frac{\partial \ln z / \partial y}{\partial \ln y / \partial y} = \frac{\frac{x}{x^2+y^2}}{\frac{1}{x}} + \frac{\frac{y}{x^2+y^2}}{\frac{1}{y}} = \frac{x^2}{x^2+y^2} + \frac{y^2}{x^2+y^2} = 1$$

گزینه «۲» ابتدا توجه کنید که:

$$z = x^\alpha f\left(\frac{y}{x^\beta}\right) \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial x} = \alpha x^{\alpha-1} f\left(\frac{y}{x^\beta}\right) - \beta y x^{\alpha-\beta-1} f'\left(\frac{y}{x^\beta}\right), \frac{\partial z}{\partial y} = x^\alpha f'\left(\frac{y}{x^\beta}\right)$$

بنابراین:

$$x \frac{\partial z}{\partial x} + \beta y \frac{\partial z}{\partial y} - \alpha z = \alpha x^\alpha f\left(\frac{y}{x^\beta}\right) - \beta y x^{\alpha-\beta-1} f'\left(\frac{y}{x^\beta}\right) + \beta y x^{\alpha-\beta-1} f'\left(\frac{y}{x^\beta}\right) - \alpha z = 0$$

گزینه «۲» ابتدا قرار می دهیم $f = 2k + 4L - 108 = 0$ ، بنابراین به روش ضرایب لاگرانژ خواهیم داشت:

$$\begin{cases} \nabla q = \lambda \nabla f \\ 2k + 4L = 108 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0/4k - 0/4L = 2\lambda \\ 0/4k - 0/4L = 4\lambda \\ 2k + 4L = 108 \end{cases}$$

با تقسیم معادله اول بر معادله دوم در دستگاه فوق، به دست می آید $\frac{L}{k} = \frac{15}{16}$. با استفاده از این رابطه و معادله سوم $k=16$ و $L=15$ به دست می آید.

گزینه «۱» اگر روی خط $y = mx$ به مبدأ نزدیک شویم، آنگاه:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - m^2 x^2}{x^2 + m^2 x^2} = \frac{1-m^2}{1+m^2}$$

چون حاصل حد به m بستگی دارد، پس f در $(0,0)$ حد ندارد و در نتیجه نمی تواند پیوسته باشد.

گزینه «۲» $f(x,y,z) = xz^2 - \sin xy \Rightarrow \nabla f = (z^2 - y \cos xy, -x \cos xy, 2xz) \Rightarrow \nabla f \Big|_{\left(1, \frac{\pi}{2}, -1\right)} = (1, 0, -2)$

اگر قرار دهیم $\vec{u} = i - 2j + 2k$ ، آنگاه:

$$\frac{\vec{u}}{|\vec{u}|} = \frac{1}{3}(i - 2j + 2k) = \left(\frac{1}{3}, \frac{-2}{3}, \frac{2}{3}\right)$$

بنابراین مشتق سویی f در نقطه $\left(1, \frac{\pi}{2}, -1\right)$ در جهت بردار \vec{u} برابر است با:

$$D_{\vec{u}} f = (1, 0, -2) \cdot \left(\frac{1}{3}, \frac{-2}{3}, \frac{2}{3}\right) = -1$$

۳۱- گزینه «۳» با جایگزینی x و y بر حسب r و s در تابع f خواهیم داشت:

$$f(r,s) = 2r^2 + 2s^2 \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial s} = 4s \Big|_{s = \frac{-1}{2}} = -2$$

۳۲- گزینه «۱» در روی مسیر $y = -1$ حد موردنظر برابر $\frac{1}{2}$ و در روی مسیر $x = 1$ حد موردنظر برابر ۱ است. پس f در $(-1, 1)$ حد ندارد. بنابراین نمی تواند پیوسته باشد.

۳۳- گزینه «۳»

$$\nabla W = (2x - y, -x + z, fz + y) \Big|_{(2, +1, -1)} = (2, -2, -2) = 2(1, -1, -1)$$

بیشترین تغییرات در جهت بردار گرادیان می باشد.

۳۴- گزینه «۱»

$$\begin{cases} T_x = 2x - 4 = 0 \\ T_y = 4y = 0 \end{cases} \Rightarrow x = 2, y = 0$$

بنابراین نقطه $(2, 0)$ تنها نقطه بحرانی می باشد که در شرط موردنظر نیز صدق می کند. از طرفی:

$$\Delta = T_{xx}T_{yy} - T_{xy}^2 = 2 \times 4 - 0 = 8$$

چون $T_{xx} > 0$ و $\Delta > 0$ ، بنابراین $(2, 0)$ نقطه مینیمم یا به عبارتی دارای کمترین درجه حرارت است.

۳۵- گزینه «۱»

$$\text{fog}(u, v) = f(g(u, v)) = f(e^{u+v}, e^{u-v}, e^{uv}) = \text{Ln}(e^{u+v} \cdot e^{u-v} \cdot e^{uv}) = \text{Ln}e^{2u+uv} = 2u + uv$$

۳۶- گزینه «۴» در امتداد مسیر $x = 0$ حد را به دست می آوریم:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sqrt{1-x^2} - y^2}{y} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1-y^2}}{y} = \pm\infty$$

چون در امتداد مسیر $x = 0$ حد وجود ندارد. پس تابع f در $(0, 0)$ حد ندارد.

۳۷- گزینه «۱»

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} = f_u \times 1 + f_v \times (-1) = f_u - f_v$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y} = f_u \times (-1) + f_v \times 1 = f_v - f_u$$

بنابراین $\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} = 0$

۳۸- گزینه «۲» چون تابع z همگن از درجه ۰ می باشد. طبق قضیه اویلر گزینه (۲) صحیح است.

۳۹- گزینه «۲» از روش ضرایب لاگرانژ استفاده می کنیم:

$$\begin{cases} 2x + 2y + z = 12 \\ \lambda x = 2\lambda \\ 2y = 2\lambda \\ 2z = \lambda \end{cases} \Rightarrow \lambda = \frac{24}{11} \Rightarrow x = \frac{6}{11}, y = \frac{24}{11}, z = \frac{12}{11}$$

۴۰- گزینه «۲»

$$f(x, y, z) = \text{Ln}(x^2 + y^2) - z \Rightarrow \nabla f = \left(\frac{2x}{x^2 + y^2}, \frac{2y}{x^2 + y^2}, -1 \right) \Big|_{(1, -1, \text{Ln}2)} = (1, -1, -1)$$

بردار فوق و هر مضربی از آن جهت صحیح را نشان می دهد.

۴۱- گزینه «۲» جهت موردنظر. جهت بردار گرادیان می باشد.

$$\nabla f = (2xe^y, x^2e^y) \Big|_{(-2, 0)} = (-4, 4) \Rightarrow \vec{u} = \frac{\nabla f}{|\nabla f|} = \left(\frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right)$$

۴۲- هیچکدام از گزینه ها صحیح نیست.

$$\begin{cases} F_x = y + \frac{1}{x} = 0 \\ F_y = x + \frac{1}{y} = 0 \end{cases} \Rightarrow \text{نقطه } \left(\frac{-1}{2}, \frac{-1}{2} \right) \text{ در معادلات روبرو صدق نمی کند. بنابراین نقطه بحرانی نمی باشد.}$$

۴۳- گزینه «۱»

$$f(x, y) = x \cos y + ye^{2x} \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x} = \cos y + 2ye^{2x} \Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -2 \sin y + 2e^{2x}$$

۴۴- گزینه «۴»

$$u = \text{Ln}(x + y + z) \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{x + y + z}$$

به طور مشابه $\frac{\partial u}{\partial z}$ و $\frac{\partial u}{\partial y}$ نیز برابر $\frac{1}{x + y + z}$ خواهد بود. بنابراین:

$$\text{Ln} \frac{\partial u}{\partial x} + \text{Ln} \frac{\partial u}{\partial y} + \text{Ln} \frac{\partial u}{\partial z} = 3 \text{Ln} \frac{1}{x + y + z} = -3 \text{Ln}(x + y + z) = -3u$$

۴۵- گزینه «۱» شرط داده شده را می توان به صورت پارامتری روبرو نوشت:

$$x = \cos t, y = \sin t, 0 < t < \frac{\pi}{2}$$

بنابراین تابع به صورت $z = \cos t + \sin t$ در می آید. که در نقطه $t = \frac{\pi}{4}$ دارای ماکسیمم $\sqrt{2}$ خواهد بود.

۴۶- گزینه «۲» تابع u تابع همگن از مرتبه ۲ می باشد. بنابراین طبق قضیه اویلر داریم:

$$x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} = 2u$$

۴۷- گزینه «۴» به ازای $r = 2$ و $s = 1$ مقادیر $x = 7$ و $y = -1$ به دست می آید. $z = 2x + (-4y) \times (-2) = 20$

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t} = 2x \cdot 2 + (-4y) \times (-2) = 20$$

۴۸- گزینه «۳»

$$f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} \Rightarrow \nabla f = \left(\frac{2xy^2}{(x^2 + y^2)^2}, \frac{-2yx^2}{(x^2 + y^2)^2} \right) \Big|_{(1, 1)} = (1, -1)$$

جهت بردار یکه موردنظر را می توان به صورت $\vec{u} = (\cos \alpha, \sin \alpha)$ در نظر گرفت. بنابراین:

$$D_u f = \nabla f \cdot \vec{u} = \cos \alpha - \sin \alpha = 0 \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{4}$$

۴۹- گزینه «۲»

$$\begin{cases} z_x = y^2 - 2x + y = 0 \\ z_y = 2xy - 2y^2 + x = 0 \end{cases}$$

واضح است که نقطه $(0, 0)$ یکی از جوابهای دستگاه فوق می باشد. بنابراین $(0, 0)$ یک نقطه بحرانی تابع می باشد.

$$\Delta = z_{xx}z_{yy} - z_{xy}^2 = -2 \times (2x - 4y) - (2y + 1)^2$$

در نقطه $(0, 0)$ مقدار $\Delta < 0$ ، بنابراین $(0, 0)$ یک نقطه زینی می باشد.

۵۰- گزینه «۱» مقدار حد را روی مسیر $y = mx$ بررسی می کنیم:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xye^x}{x^2 - y^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{mx^2 e^x}{x^2 - m^2 x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{me^x}{1 - m^2} = \frac{m}{1 - m^2}$$

چون حد به دست آمده به m وابسته است، پس حد وجود ندارد.

۵۱- گزینه «۱»

$$\nabla w = (yz, xz, xy) \Big|_{(1,1,1)} = (1,1,1) \Rightarrow |\nabla w| = \sqrt{1+1+1} = \sqrt{3}$$

۵۲- گزینه «۲» می خواهیم عبارت $f(x,y,z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ را تحت قید $g(x,y,z) = x^2 - z^2 = 2$ مینیمم کنیم.

$$x^2 - z^2 = 2 \Rightarrow x^2 = z^2 + 2 \Rightarrow f = \sqrt{y^2 + z^2 + 2z^2 + 2}$$

واضح است که حداقل f به ازای $y = z = 0$ حاصل می شود و بنابراین $\min(f) = \sqrt{2}$.

۵۳- گزینه «۱»

$$f(x,y) = x^2 - 2xy^2 \Rightarrow \nabla f = (2x - 2y^2, -4xy) \Rightarrow \nabla f \Big|_{(1,-2)} = (-6, 8)$$

$$D_u f = \nabla f \cdot u = (-6, 8) \cdot (-1, 0) = 6$$

۵۴- گزینه «۳»

$$f(x,y,z) = x^2 ye^z \Rightarrow \nabla f = (2xye^z, x^2 e^z, x^2 ye^z)$$

۵۵- گزینه «۳»

$$f(x,y,z) = x^2 + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{9} = 2 \Rightarrow \nabla f = (2x, \frac{y}{2}, \frac{2z}{9}) \Rightarrow N = \nabla f \Big|_{(1,2,3)} = (2, 1, \frac{2}{3})$$

۵۶- گزینه «۲» چون کمانهای مقابل Arctg و Arcsin به سمت صفر میل می کنند، می توانیم از هم ارزی استفاده کنیم:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (1,2)} \frac{\text{Arctg}(2xy - 2y)}{\text{Arcsin}(2xy - 6x)} = \lim_{(x,y) \rightarrow (1,2)} \frac{2xy - 2y}{2xy - 6x}$$

حال توجه کنید که روی مسیر $y = 2$ ، حد برابر ∞ و روی مسیر $x = 1$ حد برابر 0 می شود، بنابراین حد وجود ندارد.

۵۷- گزینه «۲»

$$f(c,0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x,0) - f(0,0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{0 - 0}{x} = 0$$

به طور مشابه $f_y(0,0) = 0$ می باشد.

۵۸- گزینه «۴»

$$f(x,y,z) = \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{9} - 1 = 0 \Rightarrow \nabla f = (\frac{x}{2}, \frac{y}{2}, \frac{2z}{9}) \Big|_{(0,0,3)} = (0, 0, \frac{2}{3})$$

$$\frac{2}{3}(z - 3) = 0 \Rightarrow z = 3$$

بنابراین معادله صفحه مورد نظر به صورت روبرو است:

۵۹- گزینه «۲»

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (2,\pi)} x^y \sin(\frac{y}{x}) = 2^{\pi} \sin(\frac{\pi}{2}) = 2^{\pi}$$

۶۰- گزینه «۱»

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} |x^2 - y^2| = 0 = f(0,0) \Rightarrow f \text{ در } (0,0) \text{ پیوسته است}$$

$$f_x(0,0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x,0) - f(0,0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x^2|}{x} = 0$$

به طور مشابه $f_y(0,0) = 0$.

۶۱- گزینه «۲» ابتدا توجه کنید که به ازای $t = 0$ ، مقادیر $x = 0$ و $y = 1$ به دست می آیند.

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{dy}{dt} = (2x \cos t + 2y e^t) \Big|_{t=0} = 2$$

۶۲- گزینه «۱»

$$\nabla f = (2x, 2y, 2z) \Big|_{(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})} = (\sqrt{2}, \sqrt{2}, \sqrt{2}) = \frac{\sqrt{2}}{3} (1,1,1)$$

بنابراین معادله صفحه مورد نظر به صورت روبرو است:

$$1(x - \frac{\sqrt{2}}{2}) + 1(y - \frac{\sqrt{2}}{2}) + 1(z - \frac{\sqrt{2}}{2}) = 0 \Rightarrow x + y + z = \sqrt{2}$$

۶۳- گزینه «۱» تابع f همگن از درجه ۲ است و بنابراین طبق قضیه اولر، $x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} = 2f$ می باشد.

۶۴- گزینه «۲»

$$\begin{cases} f_x = 2x^2 - 2y = 0 \\ f_y = 2y^2 - 2x = 0 \end{cases} \Rightarrow \text{نقاط بحرانی } (1,1), (0,0)$$

$$\Delta = f_{xx} f_{yy} - f_{xy}^2 = 2 \cdot 2 - 0 = 4 > 0$$

در نقطه $(1,1)$ و $(0,0)$ ، $\Delta > 0$ و $f_{xx} > 0$ بنابراین نقطه $(1,1)$ مینیمم موضعی است.

۶۵- گزینه «۱»

$$\begin{cases} x = u - uv \\ y = uv - uvw \\ z = uvw \end{cases} \Rightarrow \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)} = \begin{vmatrix} 1-v & -u & 0 \\ v-vw & u-uw & -uw \\ vw & uw & uv \end{vmatrix} = u^2 v$$

۶۶- گزینه «۳» ابتدا حد را روی مسیر $x = y = z$ به دست می آوریم:

$$\lim_{(x,y,z) \rightarrow (0,0,0)} f(x,y,z) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x+x}{x} = 2$$

از طرفی حد تابع داده شده روی صفحه $x + y = 0$ به صورت روبرو است:

$$\lim_{(x,y,z) \rightarrow (0,0,0)} f(x,y,z) = \lim_{z \rightarrow 0} 0 = 0$$

بنابراین به ازای مسیرهای مختلف، مقادیر متفاوتی برای حد به دست می آید، بنابراین f در مبدأ حد ندارد.

۶۷- گزینه «۱» ابتدا رابطه $xyz = c$ را به صورت $g(x,y,z) = xyz - c = 0$ می نویسیم. در این صورت:

$$\frac{dy}{dx} = - \frac{\frac{\partial(f,g)}{\partial(x,z)}}{\frac{\partial(f,g)}{\partial(y,z)}} = - \frac{\begin{vmatrix} f_x & f_z \\ yz & xy \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} f_y & f_z \\ xz & xy \end{vmatrix}} = - \frac{xyf_x - yzf_z}{xyf_y - xzf_z}$$

۶۸- گزینه «۱»

$$f(x,y,z) = 2x^2 + \text{Arctg}(2z) - e^y - 1 = 0 \Rightarrow \nabla f = (4x, -e^y, \frac{2}{1+4z^2}) \Big|_{(1, \text{Ln}2, \dots)} = (4, -2, 2)$$

بنابراین معادله خط قائم عبارتست از:

$$\frac{x-1}{4} = \frac{y - \text{Ln}2}{-2} = \frac{z}{2} \Rightarrow \begin{cases} 2z = x - 1 \\ z + y = \text{Ln}2 \end{cases}$$

۶۹- گزینه «۲» و «۳» و «۴» جهت ∇f راستای بیشترین افزایش تابع می باشد. بنابراین:

$$f(x, y) = \text{Arctg} \frac{y}{x} \Rightarrow \nabla f = \left(\frac{-y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2} \right) \Big|_{(1,1)} = \left(\frac{-1}{2}, \frac{1}{2} \right)$$

با توجه به اینکه سه بردار $(-1, 1)$ ، $(\frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ و $(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ هر سه با بردار ∇f هم راستا هستند. بنابراین هر سه صحیح می باشند و فقط گزینه (۱) درست نیست!

۷۰- گزینه «۱»

$$f(x, y, z) = \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} - z^2 \Rightarrow \nabla f = \left(\frac{x}{2}, \frac{2y}{9}, -2z \right) \Big|_{(2, \frac{3}{2}, \frac{\sqrt{5}}{2})} = \left(1, \frac{1}{3}, -\sqrt{5} \right)$$

بنابراین معادله صفحه مورد نظر به صورت روبرو است:

$$(x-2) + \frac{1}{3}(y-\frac{3}{2}) - \sqrt{5}(z-\frac{\sqrt{5}}{2}) = 0 \Rightarrow x + \frac{1}{3}y - \sqrt{5}z = 0$$

۷۱- گزینه «۳» بر روی مسیر $x=0$ مقدار حد برابر صفر می شود و در روی مسیر $y=x^2$ داریم:

$$l = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^4}{x^4 + x^4} = 1$$

چون بر روی دو مسیر مختلف، دو مقدار مختلف برابر حد به دست آمد، بنابراین حد وجود ندارد.

۷۲- گزینه «۴»

$$\begin{cases} z_x = 2x - 2y - 5 = 0 \\ z_y = -2x + 4y + 7 = 0 \end{cases} \Rightarrow x = 1, y = -1$$

$$\Delta = z_{xx}z_{yy} - z_{xy}^2 = 2 \times 4 - (-2)^2 = -1$$

نقطه (۱- و ۱) تنها نقطه بحرانی تابع می باشد. چون همواره $\Delta < 0$ ، بنابراین نقطه بحرانی، یک نقطه زینی است.

۷۳- گزینه «۱»

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 - z = 0 \Rightarrow \nabla f = (2x, 2y, -1) \Big|_{(1, -2, 5)} = (2, -4, -1)$$

$$\Rightarrow 2(x-1) - 4(y+2) - 1(z-5) = 0 \Rightarrow 2x - 4y - z = 5$$

۷۴- گزینه «۲»

$$\begin{cases} f_x = 2x - 4y = 0 \\ f_y = -4x + 2y^2 + 4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2y \\ 2y^2 - 4x + 4 = 0 \end{cases}$$

از حل دستگاه فوق نقاط بحرانی $A(4, 2)$ و $B(\frac{4}{3}, \frac{2}{3})$ به دست می آیند. چون در نقطه A ، $\Delta > 0$ و $f_{xx} > 0$ بنابراین A نقطه مینیمم می باشد.

۷۵- گزینه «۱»

$$f_1(x, y, z) = x^2 + y^2 - z - 8 = 0 \Rightarrow \nabla f_1 = (2x, 2y, -1) \Big|_{(2, -2, 0)} = (4, -4, -1)$$

$$f_2(x, y, z) = x - y^2 + z^2 + 2 = 0 \Rightarrow \nabla f_2 = (1, -2y, 2z) \Big|_{(2, -2, 0)} = (1, 4, 0)$$

$$\nabla f_1 \times \nabla f_2 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 4 & -4 & -1 \\ 1 & 4 & 0 \end{vmatrix} = (4, -1, 20)$$

بردار هادی خط مماس برابر $\nabla f_1 \times \nabla f_2$ می باشد. بنابراین:

$$\frac{x-2}{4} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z}{20}$$

پس معادله خط مماس به صورت روبرو می باشد:

۷۶- گزینه «۲»

$$f(x, y, z) = 4x^2 + y^2 + 2z^2 - 26 = 0 \Rightarrow \nabla f = (8x, 2y, 4z) \Big|_{(1, -2, 2)} = (8, -4, 8)$$

بنابراین معادله صفحه مماس به صورت روبرو می باشد:

$$8(x-1) - 4(y+2) + 8(z-2) = 0 \Rightarrow 2x - y + 2z = 12$$

۷۷- گزینه «۱»

$$w = xy + z = \sin t \cos t + t = \frac{1}{2} \sin 2t + t \Rightarrow \frac{dw}{dt} = \cos 2t + 1$$

۷۸- گزینه «۴» می توان از قاعده مشتق زنجیره ای استفاده کرد ولی جایگزینی و محاسبه مستقیم ساده تر است:

$$u = (fs - rt)^2 + s^2 t^2 \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial t} = -2(fs - rt) + 2s^2 t \Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 18 + 12s^2 t \Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \Big|_{s=t=0} = 18$$

۷۹- گزینه «۱» ابتدا معادله سطح را به صورت $f(x, y, z) = ye^x - z = 0$ می نویسیم. در این صورت:

$$\nabla f = (ye^x, e^x, -1) \Rightarrow \nabla f \Big|_{(1, 2, 2e)} = (2e, e, -1)$$

بنابراین معادله خط قائم بر سطح در نقطه $(1, 2, 2e)$ به صورت روبرو است:

$$\frac{x-1}{2e} = \frac{y-2}{e} = \frac{z-2e}{-1}$$

۸۰- گزینه «۴» ابتدا قرار می دهیم $v = x - y$ و $w = y - x$ در این صورت:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial w} \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial v} - \frac{\partial u}{\partial w}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial w} \frac{\partial w}{\partial y} = -\frac{\partial u}{\partial v} + \frac{\partial u}{\partial w} \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

۸۱- گزینه «۳»

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -4x^2 + 6xy - 8 \Big|_{(1,1)} = -6$$

۸۲- گزینه «۱»

$$\frac{\partial u}{\partial x} = bx f', \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -ay^2 f' \Rightarrow ay^2 \frac{\partial u}{\partial x} + bx \frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

۸۳- گزینه «۱»

$$f(x, y, z) = x^2 + 4y^2 - 4z^2 - 4 = 0 \Rightarrow \nabla f = (2x, 8y, -8z) \Big|_{(2, 1, 1)} = (4, 8, -8) = 4(1, 2, -2)$$

بنابراین معادله صفحه مماس به صورت روبرو خواهد بود:

$$1(x-2) + 2(y-1) - 2(z-1) = 0 \Rightarrow x + 2y - 2z = 2$$

۸۴- گزینه «۴» زاویه بین دو رویه برابر زاویه بین بردارهای عمود به دو رویه (بردارهای گرادیان) می باشد.

$$f_1(x, y, z) = x^2 + y^2 - z = 0 \Rightarrow \nabla f_1 = (2x, 2y, -1) \Big|_{(1, 1, 1)} = (2, 2, -1)$$

$$f_2(x, y, z) = x^2 + y^2 - 2z = 0 \Rightarrow \nabla f_2 = (2x, 2y, -2) \Big|_{(1, 1, 1)} = (2, 2, -2)$$

$$\cos \theta = \frac{\nabla f_1 \cdot \nabla f_2}{|\nabla f_1| |\nabla f_2|} = \frac{4+4+0}{\sqrt{8} \times \sqrt{12}} = \frac{2}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

۸۵- گزینه «۲»

$$\overline{AB} = (2, 2, 1) \Rightarrow \hat{u} = \frac{\overline{AB}}{|\overline{AB}|} = \frac{1}{3}(2, 2, 1)$$

$$\nabla f = (2xy, x^2, 2z^2) \Rightarrow \nabla f \Big|_{(2, -2, 1)} = (-12, 9, 2)$$

$$D_u f = \nabla f \cdot \hat{u} = (-12, 9, 2) \cdot \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3} \right) = -8 + 6 + 1 = -1$$

۸۶- گزینه «۲» به ازای $x=1, y=\frac{\pi}{2}$ مقادیر $u=\frac{\pi^2}{4}$ و $v=1$ به دست می‌آیند.

$$\frac{\partial \omega}{\partial x} = \frac{\partial \omega}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial \omega}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} = 2u^r \times y^r + 2e^{2v} \times 2x^r \sin y = 2 \times \left(\frac{\pi^2}{4}\right)^r \times \left(\frac{\pi}{2}\right)^r + 2e^2 \times 2 \times 1 = 2\left(\frac{\pi^2}{4} + 2e^2\right)$$

۸۷- گزینه «۳»

$$\nabla h = (4x - 2y, -2x + 2y^2) \Big|_{(1,2)} = (0, 10) = 10(0, 1)$$

۸۸- گزینه «۴»

برای حداکثر افزایش ارتفاع، باید در جهت بردار گرادیان حرکت نمود. و چون بردار گرادیان با توجه به مفروضات مسأله در امتداد شمال است، پس باید کوهنورد به سمت شمال حرکت کند.

$$\begin{cases} f_x = 2x^2 - 2 = 0 \\ f_y = 2y - 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \text{نقاط بحرانی هستند. } A(1,1) \text{ و } B(-1,1)$$

۸۹- گزینه «۳»

$$\Delta = f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 = 6 \times 2 - 0 = 12x$$

در نقطه $A, \Delta > 0$ و $f_{xx} > 0$ ، بنابراین A یک نقطه مینیمم نسبی است و در نقطه $B, \Delta < 0$ پس B یک نقطه زینی است.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t} = 2x \times (-2) + 2y \times 2st = -2fs + 18t + fs^2t^2 \Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 18 + 12st^2t^2 \Big|_{(0,0)} = 18$$

۹۰- گزینه «۴»

$$z = ye^x \Rightarrow f(x, y, z) = ye^x - z = 0 \Rightarrow \nabla f = (ye^x, e^x, -1) \Big|_{(1,2,2e)} = (2e, e, -1)$$

۹۱- گزینه «۱»

$$\frac{x-1}{2e} = \frac{y-2}{e} = \frac{z-2e}{-1}$$

بنابراین معادله خط قائم به صورت روبرو می‌باشد:

$$\begin{cases} f_x = 2x - 4y = 0 \\ f_y = -4x + 2y^2 + 4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2y \\ -4x + 2y^2 + 4 = 0 \end{cases}$$

۹۲- گزینه «۲»

$$\Delta = f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 = 2 \times 6y - (-4)^2 = 12y - 16$$

از حل دستگاه فوق نقاط $A(4,2)$ و $B(\frac{4}{3}, \frac{2}{3})$ به دست می‌آیند.

$$f(4,2) = 4^2 - 4 \times 4 \times 2 + 2^2 + 4 \times 2 = 0$$

در نقطه $A(4,2), \Delta > 0$ و $f_{xx} > 0$ ، بنابراین A نقطه مینیمم رویه می‌باشد.

$$f(x, y) = x^2 y^2 \Rightarrow \nabla f = (2x^2 y^2, 2x^2 y) \Rightarrow \nabla f \Big|_{(-1,2)} = (12, -4)$$

۹۳- گزینه «۴»

۹۴- گزینه «۱» ابتدا توجه کنید که به ازای $l=0$ و $s=1$ و $x=2, y=1$ و $z=0$.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial t} = 6x \times 5 + 2y \times (-2t) + (-2z) \times s = 60$$

$$\vec{u} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{i} + \vec{j}) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

۹۵- گزینه «۳» ابتدا بردار داده شده را به صورت یک در می‌آوریم.

$$\nabla f = (2y^2 + 2xy^2)\vec{i} + (4y^2 + 6xy^2 + 2x^2y)\vec{j} \Rightarrow \nabla f \Big|_{(0,1)} = 2\vec{i} + 4\vec{j}$$

از طرفی:

$$D_u f = (2, 4) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 2\sqrt{2}$$

بنابراین:

۹۶- گزینه «۲» چون مجموع x^2 و y^2 ثابت است، حاصل ضرب $x^2 y^2$ وقتی ماکسیمم می‌شود که $x^2 = y^2$ و در نتیجه $x^2 = y^2 = \frac{1}{2}$ باشد. بنابراین:

$$\max(f) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

۹۷- گزینه «۱» در واقع می‌خواهیم تابع $f(x, y, z) = xyz$ را تحت شرط $2x + 2y + 6z = 18$ ماکسیمم کنیم. بدین منظور لازم است

$$\max(f) = 2 \times 2 \times 1 = 6$$

باشد. بنابراین $x=2, y=2, z=1$ خواهد بود و در نتیجه:

۹۸- گزینه «۲» طبق قضیه اولرر گزینه (۲) صحیح است.

۹۹- گزینه «۳»

$$\nabla f = (2x, 2y, -2z) \Big|_{(1,1,2)} = (2, 2, -4)$$

۱۰۰- گزینه «۱»

$$V = (2, 1, 2) \Rightarrow \vec{u} = \frac{\vec{V}}{|\vec{V}|} = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$$

$$D_u f = \nabla f \cdot \vec{u} = \frac{-2}{3}$$

۱۰۱- گزینه «۱» مقادیر ماکزیمم و مینیمم در نقاط بحرانی یا روی مرز به دست می‌آیند.

$$\begin{cases} f_x = 6x = 0 \Rightarrow x = 0 \\ f_y = 4y - 4 = 0 \Rightarrow y = 1 \end{cases}$$

$$\Delta = f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 = 6 \times 4 - 0 = 24$$

بنابراین $A(0,1)$ تنها نقطه بحرانی تابع می‌باشد.

چون $f_{xx} > 0$ و $\Delta > 0$ ، بنابراین A نقطه مینیمم تابع می‌باشد و $f(0,1) = -1$. در روی مرز ناحیه یعنی $x^2 + y^2 = 16$ تابع f به صورت زیر در می‌آید:

$$f(x, y) = 2(16 - y^2) + 2y^2 - 4y + 1 = -y^2 - 4y + 49 \Rightarrow f' = -2y - 4 = 0 \Rightarrow y = -2, x = \pm 2\sqrt{2}$$

۱۰۲- گزینه «۴» در نقاط مورد نظر گرادیان تابع با بردار نرمال صفحه موازی می‌باشد.

$$\nabla f = (6x^2, 1, -2z), N = (24, 1, -6) \Rightarrow \frac{6x^2}{24} = \frac{1}{1} = \frac{-2z}{-6} \Rightarrow x = \pm 2, z = 3$$

با جایگزینی در معادله رویه y نقاط مربوطه نیز به دست می‌آید.

$$x = 2, z = 3 \Rightarrow 16 + y - 9 = 5 \Rightarrow y = -2 \Rightarrow A(2, -2, 3)$$

$$x = -2, z = 3 \Rightarrow -16 + y - 9 = 5 \Rightarrow y = 20 \Rightarrow B(-2, 20, 3)$$

$$u = f(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}) \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} f'(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}) = \frac{x}{r} f'(r)$$

۱۰۳- گزینه «۱»

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \left(\frac{r-x^2}{r^2}\right) f'(r) + \frac{x^2}{r^2} f''(r) = \left(\frac{r^2 - x^2}{r^2}\right) f'(r) + \frac{x^2}{r^2} f''(r)$$

به طور مشابه می‌توان $\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$ و $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ را به دست آورد. در این صورت:

$$\nabla^2 u = \left(\frac{2r^2 - x^2 - y^2 - z^2}{r^2}\right) f'(r) + \frac{x^2 + y^2 + z^2}{r^2} f''(r) = \frac{2}{r} f'(r) + f''(r)$$

۱۰۴- گزینه «۲»

ابتدا معادله تابع را به صورت $f(x, y) = \ln x^2 y^2$ می‌نویسیم. تحت شرط $xy = 1$ معادله تابع به صورت $f(x) = \ln x$ در می‌آید. پس می‌خواهیم ماکسیمم تابع $f(x) = \ln x$ را در بازه $1 \leq x \leq e^2$ به دست آوریم. چون تابع $\ln x$ تابعی صعودی است، پس ماکسیمم خود را در انتهای بازه یعنی e^2 اختیار می‌کند.

$$f(x) = \ln x \Rightarrow f(e^2) = \ln e^2 = 2 \ln e = 2$$

۱۰۵- گزینه «۱»

$$\begin{cases} f_x = 4y - 2xy - y^2 = 0 \\ f_y = 4x - x^2 - 2xy = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y(4 - 2x - y) = 0 \\ x(4 - x - 2y) = 0 \end{cases}$$

که از معادله فوق نقاط بحرانی $A(0, 0)$ ، $B(0, 4)$ ، $C(4, 0)$ و $D(\frac{4}{3}, \frac{4}{3})$ به دست می‌آیند. حال به بررسی نوع نقاط بحرانی می‌پردازیم.

$$\Delta = f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 = -2x \times -2y - (4 - 2x - 2y)^2 = 4xy - (4 - 2x - 2y)^2$$

در نقاط A ، B ، C مقدار $\Delta < 0$ ، بنابراین نقاط A ، B ، C زینی هستند ولی در نقطه $(\frac{4}{3}, \frac{4}{3})$ مقدار $\Delta > 0$ و $f_{xx} < 0$ ، بنابراین D یک نقطه ماکسیمم می‌باشد.

۱۰۶- گزینه «۳»

$$\begin{cases} f_x = \frac{1}{x^2} - 4 = 0 \\ f_y = \frac{-1}{y^2} + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow x = \pm \frac{1}{2}, y = \pm 1$$

$$\Delta = f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 = \frac{-2}{x^3} \times \frac{2}{y^3} - 0 = \frac{-4}{x^3 y^3}$$

بنابراین نقاط $A(\frac{1}{2}, 1)$ ، $B(\frac{-1}{2}, -1)$ ، $C(\frac{1}{2}, -1)$ و $D(\frac{-1}{2}, 1)$ نقاط بحرانی هستند.

در نقاط A و B مقدار $\Delta < 0$ ، بنابراین نقاط A و B زینی هستند و در نقطه C مقدار $\Delta > 0$ و $f_{xx} < 0$ ، بنابراین C یک ماکسیمم و در D مقدار $\Delta < 0$ و $f_{xx} > 0$ ، بنابراین D مینیمم است.

۱۰۷- گزینه «۳»

$$f(x, y, z) = 4x^2 + y^2 - 16z = 0 \Rightarrow \nabla f = (\lambda x, 2y, -16) \Big|_{(2, 4, 2)} = (16, 8, -16)$$

بنابراین معادله صفحه موردنظر عبارت است از:

$$16(x-2) + 8(y-4) - 16(z-2) = 0 \Rightarrow 2x + y - 2z = 4$$

۱۰۸- گزینه «۱» در روی صفحه $y = 2$ ، رویه داده شده به صورت $z = \frac{1}{2}\sqrt{16-x^2}$ در می‌آید، بنابراین:

$$\frac{dz}{dx} = \frac{-x}{2\sqrt{16-x^2}} \Rightarrow \frac{dz}{dx} \Big|_{(2, 2, \sqrt{3})} = \frac{-2}{2\sqrt{16-4}} = \frac{-1}{\sqrt{12}} = \frac{-1}{2\sqrt{3}}$$

۱۰۹- گزینه «۴»

$$\vec{u} = (\cos \frac{\pi}{6}, \sin \frac{\pi}{6}) = (\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2})$$

$$f(x, y) = 2x^2 - y^2 + 4x \Rightarrow \nabla f = (4x + 4, -2y)$$

$$D_u f = \nabla f \cdot \vec{u} = (4x + 4, -2y) \cdot (\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}) = 2x\sqrt{3} - y + 2\sqrt{3}$$

۱۱۰- هیچکدام از گزینه‌ها صحیح نیست. فرض می‌کنیم $u = x + y$ و $v = x - y$ در این صورت:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial v}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial^2 f}{\partial v \partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 f}{\partial v \partial u} \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u} - \frac{\partial f}{\partial v}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial^2 f}{\partial v \partial u} \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial^2 f}{\partial v \partial u} \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} - 2 \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2}$$

۱۱۱- هیچکدام از گزینه‌های صحیح نیست. گرادیان جهت بیشترین افزایش را نشان می‌دهد.

$$T(x, y) = \frac{100}{x^2 + y^2 + 1} \Rightarrow \nabla T = \left(\frac{-200x}{(x^2 + y^2 + 1)^2}, \frac{-200y}{(x^2 + y^2 + 1)^2} \right)$$

در نقطه $A(2, 2)$ بردار گرادیان به صورت $(\frac{-100}{49}, \frac{-150}{49})$ در می‌آید که جهت حداکثر افزایش دما می‌باشد. همچنین توجه کنید که جهتی که در آن دما تغییر نکند (حداقل تغییر دما وجود داشته باشد) باید بر جهت گرادیان عمود باشد. که هیچکدام از گزینه‌ها واجد این خاصیت نیستند.

۱۱۲- گزینه «۴»

۱۱۳- گزینه «۴» طبق تعریف مشتق جزئی داریم:

$$z_x(1, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h, 0) - f(1, 0)}{h} = \frac{f(1/2, 0) - f(1, 0)}{0/2} = \frac{2-1}{0/2} = 2$$

$$z_y(0, 1) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0, 1+h) - f(0, 1)}{h} = \frac{f(0, 1/2) - f(0, 1)}{0/2} = \frac{3-1}{0/2} = 1$$

با توجه به شکل داده شده خط مماس در نقطه $(0, 1)$ موازی محور x ها خواهد بود، یعنی $z_x(0, 1) = 0$ است.

۱۱۴- گزینه «۲» در واقع می‌خواهیم مقادیر ماکسیمم و مینیمم $Z = 1 - x - y$ را تحت قید $x^2 + y^2 = 2$ به دست آوریم. بنابراین از روش ضرایب لاگرانژ استفاده می‌کنیم.

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 2 \\ \nabla f = \lambda \nabla g \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 2 \\ (-1, -1) = \lambda(2x, 2y) \end{cases}$$

از حل دستگاه فوق نقاط $(1, 1)$ و $(-1, -1)$ به عنوان نقاط بحرانی حاصل می‌شوند.

$$\nabla f = (e^x \operatorname{tg} y + 4xy, e^x(1 + \operatorname{tg}^2 y) + 2x^2) \Big|_{(0, \frac{\pi}{4})} = (1, 2)$$

۱۱۵- گزینه «۳»

$$D_u f = \nabla f \cdot \vec{u} = (1, 2) \cdot (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}}) = \frac{-1}{\sqrt{2}}$$

۱۱۶- گزینه «۳» واضح است که هموار $f \leq 0$ و چون $f(0, 0) = 0$ پس این نقطه ماکسیمم است.

۱۱۷- گزینه «۱» می‌توان از مشتق‌گیری زنجیری استفاده کرد ولی اگر به جای x و y بر حسب u و v جایگزین کنیم سریعتر و ساده‌تر به جواب می‌رسیم.

$$z = \cos(x^2 + y^2) = \cos(u^2 \cos^2 v + u^2 \sin^2 v) = \cos u^2$$

$$\frac{\partial z}{\partial u} = -2u \sin u^2, \frac{\partial z}{\partial v} = 0$$

۱۱۸- گزینه «۴»

روش اول:

$$u = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{2x(x^2 + y^2) - 2x(x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{4xy^2}{(x^2 + y^2)^2}$$

به طور مشابه $\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{-4x^2y}{(x^2 + y^2)^2}$. بنابراین گزینه (۴) صحیح است.

روش دوم: تابع u همگن از درجه صفر می باشد، بنابراین طبق قضیه اولر:

$$x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

۱۱۹- گزینه «۴»

$$f(x, y, z) = \sqrt{x+1} + \sqrt{y+1} - z = 0 \Rightarrow \nabla f = \left(\frac{1}{2\sqrt{x+1}}, \frac{1}{2\sqrt{y+1}}, -1 \right) \Big|_{(2, 2, 4)} = \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, -1 \right)$$

بنابراین معادله صفحه موردنظر به صورت روبرو است:

$$\frac{1}{4}(x-2) + \frac{1}{4}(y-2) - (z-4) = 0 \Rightarrow x + y - 4z = -10$$

بنابراین نقاط تلاقی با محورها به ترتیب عبارتند از: $A(-10, 0, 0)$, $B(0, -10, 0)$, $C(0, 0, 2/5)$.

۱۲۰- گزینه «۱»

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = y^2 e^{xy^2} \Rightarrow \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} = 2y e^{xy^2} + 2xy^2 e^{xy^2}$$

۱۲۱- گزینه «۴» می دانیم وقتی $x + y + z$ برابر مقدار ثابتی باشد، عبارت $x^a y^b z^c$ وقتی ماکسیمم است که $\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c}$ باشد. بنابراین:

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ \frac{x}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z}{2} \end{cases} \Rightarrow x = \frac{1}{6}, y = \frac{1}{3}, z = \frac{1}{3} \Rightarrow xy^2 z^2 = \frac{1}{432}$$

۱۲۲- گزینه «۳» تابع ϕ همگن از درجه n می باشد. بنابراین طبق قضیه اولر داریم:

$$x \frac{\partial \phi}{\partial x} + y \frac{\partial \phi}{\partial y} = n\phi$$

۱۲۳- گزینه «۳»

۱۲۴- گزینه «۱»

$$\nabla f = (-e^{rx-y} - rxe^{rx-y}, xe^{rx-y}, rz) \Big|_{(1, 2, -1)} = (-4, 1, -2)$$

اندازه تصویر $= \frac{|\nabla f \cdot A|}{|A|} = \frac{4+1}{\sqrt{1+1}} = \frac{5}{\sqrt{2}}$

۱۲۵- گزینه «۱»

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial x} = -r \frac{\partial f}{\partial r} + r \frac{\partial f}{\partial p}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial y} = r \frac{\partial f}{\partial r} + r \frac{\partial f}{\partial p}$$

با جایگزین روابط فوق در معادله داده شده، نتیجه می شود $\frac{\partial f}{\partial r} = 0$

۱۲۶- گزینه «۱»

$$f(x, y, z) = 4x^2 + y^2 + 2z^2 - 26 = 0 \Rightarrow \nabla f = (8x, 2y, 4z) \Big|_{(1, -2, 3)} = (8, -4, 12)$$

بنابراین معادله صفحه موردنظر به صورت روبرو است:

$$8(x-1) - 4(y+2) + 12(z-3) = 0 \Rightarrow 2x - y + 3z = 13$$

۱۲۷- گزینه «۳» تابع u یک تابع همگن مرتبه ۲ می باشد، بنابراین طبق قضیه اولر گزینه (۳) صحیح است.

۱۲۸- گزینه «۱» به ازای $x = y = 1$ و $z = 2$ ، مقادیر $u = \sqrt{6}$ و $v = 2$ به دست می آیند.

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial z} = \frac{1}{v} \times \frac{4}{2\sqrt{x^2 - 2y + 4z}} + \left(\frac{-u}{v^2} \right) xy = \frac{-\sqrt{6}}{12}$$

۱۲۹- گزینه «۴»

$$f(x, y, z) = xy^2 z^2 - 4 = 0 \Rightarrow \nabla f = (y^2 z^2, 2xy^2 z^2, 2xy^2 z) \Big|_{(-1, -1, 2)} = (-4, -12, 4)$$

$$\Rightarrow \vec{u} = \frac{\nabla f}{|\nabla f|} = \frac{(-4, -12, 4)}{\sqrt{16 + 144 + 16}} = \frac{1}{\sqrt{176}}(-4, -12, 4)$$

۱۳۰- گزینه «۱» واضح است که کمترین مقدار f در نقطه $(0, 0)$ رخ می دهد که درون قرص بسته نیز می باشد و $f(0, 0) = 0$. برای تعیین بزرگترین مقدار f از روش ضرایب لاگرانژ استفاده می کنیم. می خواهیم تابع $f(x, y) = x^2 + y^2$ را تحت قید $g(x, y) = (x - \sqrt{2})^2 + (y - \sqrt{2})^2 = 9$ ماکسیم کنیم.

$$\begin{cases} (x - \sqrt{2})^2 + (y - \sqrt{2})^2 = 9 \\ \nabla f = \lambda \nabla g \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x = 2\lambda(x - \sqrt{2}) \\ 2y = 2\lambda(y - \sqrt{2}) \end{cases} \Rightarrow x = y = \frac{\sqrt{2}\lambda}{\lambda - 1}$$

با جایگزینی x و y در شرط g نتیجه می شود، $\lambda = \frac{5}{3}$ و بنابراین $x = y = \frac{5\sqrt{2}}{3}$.

$$f\left(\frac{5\sqrt{2}}{3}, \frac{5\sqrt{2}}{3}\right) = \frac{25}{3} + \frac{25}{3} = \frac{50}{3}$$

۱۳۱- گزینه «۲» بردار قائم بر بیضی گون همان بردار گرادیان می باشد.

$$f(x, y, z) = \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{4} + z^2 - 1 = 0 \Rightarrow \nabla f = \left(\frac{x}{2}, \frac{y}{2}, 2z \right)$$

برای اینکه بردار ∇f با محورهای مختصات زوایای مساوی بسازد، لازم است $\frac{x}{2} = \frac{y}{2} = 2z$ باشد.

$$\begin{cases} \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{4} + z^2 = 1 \\ x = y = 4z \end{cases} \Rightarrow 9z^2 = 1 \Rightarrow z = \pm \frac{1}{3} \Rightarrow A\left(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}, \frac{1}{3}\right), B\left(-\frac{4}{3}, -\frac{4}{3}, \frac{1}{3}\right)$$

۱۳۲- گزینه «۱»

$$f(x, y, z) = x^2 y^2 z \Rightarrow \nabla f = (2xy^2 z, 2x^2 y z, x^2 y^2 z) \Big|_{(1, 1, 2)} = (6, 6, 1) \Rightarrow \vec{u} = \frac{\nabla f}{|\nabla f|} = \frac{1}{\sqrt{73}}(6, 6, 1)$$

۱۳۳- گزینه «۲»

$$\begin{cases} f_x = 4x + 2y + 4 = 0 \\ f_y = 2x + 10y = 0 \end{cases} \Rightarrow x = -\frac{10}{9}, y = \frac{2}{9}$$

برای تعیین نوع نقطه بحرانی مین را تشکیل می دهیم:

$$f_{xx} = 4, f_{yy} = 10, f_{xy} = 2 \Rightarrow \Delta = 4 \times 10 - 2^2 = 36 > 0$$

چون $\Delta > 0$ و $f_{xx} > 0$ پس نقطه بحرانی $\left(-\frac{10}{9}, \frac{2}{9}\right)$ نقطه مینیمم است.

۱۳۴- گزینه «۳» با ضرب کردن شرط دوم در یک علامت منفی، آنرا می توان به صورت زیر نوشت:

$$\begin{cases} x + y \leq 4 \\ x - y \leq 2 \end{cases} \Rightarrow 2x \leq 6 \Rightarrow x \leq 3$$

پس ماکسیمم مقدار برای x ، که در هر دو شرط صدق کند برابر ۳ است و با توجه به شرط $x + y \leq 4$ ، می توان نتیجه گرفت ماکسیمم مقدار برای y برابر ۱ است. پس ماکسیمم $2x + y$ برابر ۷ خواهد بود.

۱۳۵- گزینه «۴» حد داده شده را روی مسیر $y = mx$ بررسی می‌کنیم.

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xye^{xy}}{x^2 + y^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{mx^2 e^{mx^2}}{x^2 + m^2 x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{me^{mx^2}}{1 + m^2} = \frac{m}{1 + m^2}$$

چون حد حاصل به m وابسته است، پس حد وجود ندارد.

۱۳۶- گزینه «۱» تابع داده شده، یک تابع همگن از درجه ۲ می‌باشد، بنابراین طبق قضیه اویلر

$$x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = 2z \Rightarrow x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = 2x^2 \operatorname{Arctg} \frac{y}{x} \Big|_{(\sqrt{2}, 1)} = 2(\sqrt{2})^2 \operatorname{Arctg} \frac{1}{\sqrt{2}} = \pi$$

$$W = x^2 y - yz + 2z \Rightarrow \nabla W = (2xy, x^2 - z, -y + 2) \Rightarrow \nabla W \Big|_{(1, -2, 0)} = (-4, 1, 4) \quad \text{گزینه «۱»}$$

$$D_u W = \nabla W \cdot \frac{u}{|u|} = (-4, 1, 4) \cdot \frac{(2, -1, 2)}{3} = \frac{-8 - 1 + 8}{3} = \frac{-1}{3}$$

۱۳۸- گزینه «۲»

$$\begin{cases} f_x = e^{-(x+y^2)} - xe^{-(x+y^2)} = e^{-(x+y^2)}(1-x) = 0 \Rightarrow x=1 \\ f_y = -2xye^{-(x+y^2)} + e^{-y^2-1} - 2y^2 e^{-y^2-1} = 0 \end{cases}$$

با جایگزینی $x=1$ در معادله دوم نتیجه می‌شود:

$$-2ye^{-(1+y^2)} + e^{-(1+y^2)} - 2y^2 e^{-(1+y^2)} = 0 \Rightarrow -2y + 1 - 2y^2 = 0 \Rightarrow y = \frac{-1 \pm \sqrt{2}}{2}$$

۱۳۹- گزینه «۲»

$$\nabla f = \left(\frac{-2xe^z}{(x^2+y)^2}, \frac{-e^z}{(x^2+y)^2}, \frac{e^z}{x^2+y} \right) \Big|_{(1, 1, \ln 2)} = \left(-1, \frac{-1}{2}, 1 \right) \Rightarrow D_u f = \left(-1, \frac{-1}{2}, 1 \right) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{10}}, \frac{-2}{\sqrt{10}}, 0 \right) = \frac{1}{2\sqrt{10}}$$

۱۴۰- گزینه «۳» با جایگزینی Z از رابطه داده شده به دست می‌آید:

$$f(x, y) = x - y + (2x + y^2 + 1)^2$$

$$\begin{cases} f_x = 1 + 4(2x + y^2 + 1) = 0 \Rightarrow x = \frac{-9}{8}, y = -1 \\ f_y = -1 + 4y(2x + y^2 + 1) = 0 \end{cases}$$

$$\Delta = f_{xx} f_{yy} - f_{xy}^2 = 8 \times (8x + 12y^2 + 4) - 64y^2$$

بنابراین نقطه $A\left(\frac{-9}{8}, -1\right)$ یک نقطه بحرانی تابع می‌باشد.

چون در نقطه A مقدار $\Delta > 0$ و $f_{xx} > 0$ ، بنابراین A نقطه مینیمم f می‌باشد و مقدار f در آن برابر $\frac{-1}{16}$ می‌باشد.

۱۴۱- گزینه «۴» نقطه داده شده به ازای $t = \pi$ به دست آمده است، ابتدا معادله خط مماس بر C را در $t = \pi$ به دست می‌آوریم.

$$R(t) = (\cos t, \sin t, t) \Rightarrow u(t) = (-\sin t, \cos t, 1) \Big|_{t=\pi} = (0, -1, 1)$$

بنابراین معادله خط مماس به صورت زیر است:

$$\begin{cases} x = -1 \\ \frac{y}{-1} = \frac{z - \pi}{1} \Rightarrow \begin{cases} x + 1 = 0 \\ y + z = \pi \end{cases} \end{cases}$$

حال فاصله مبدأ را از خط مذکور به دست می‌آوریم. نقطه $P(-1, 0, \pi)$ روی خط قرار دارد.

$$OP = (-1, 0, \pi) \Rightarrow OP \times u = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -1 & 0 & \pi \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = (\pi, 1, 1) \Rightarrow d = \frac{|OP \times u|}{|u|} = \frac{\sqrt{\pi^2 + 1^2 + 1^2}}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{\pi^2}{2} + 1}$$

$$\vec{u} = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = \frac{1}{\sqrt{6}}(2, 1, -1) \quad \text{گزینه «۲»}$$

$$f(x, y, z) = 1 + x^2 e^{yz^2} \Rightarrow \nabla f = (2xe^{yz^2}, x^2 z^2 e^{yz^2}, 2x^2 z e^{yz^2}) \Big|_{(1, 0, 1)} = (2, 1, 2)$$

$$D_u f = (2, 1, 2) \cdot \frac{1}{\sqrt{6}}(2, 1, -1) = \frac{2}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

۱۴۲- گزینه «۲» چون ضابطه f در همسایگی نقطه $(0, 1)$ عوض می‌شود، بنابراین حد چپ و راست را مجزا به دست می‌آوریم:

$$f_x(0, 1) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x, 1) - f(0, 1)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{0 - 0}{x} = 0$$

$$f_x(0, 1) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x, 1) - f(0, 1)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x}{x} = 1$$

$$f_y(0, 1) = \lim_{y \rightarrow 1} \frac{f(0, y) - f(0, 1)}{y - 1} = \lim_{y \rightarrow 1} \frac{0 - 0}{y - 1} = 0$$

چون حد چپ و راست با هم برابر نیست، پس حد وجود ندارد.

$$f(x, y) = x^2 e^y \Rightarrow \nabla f = (2xe^y, x^2 e^y) \Big|_{(-2, 0)} = (-4, 4) \quad \text{گزینه «۴»}$$

$$\max(D_u f) = \sqrt{(-4)^2 + 4^2} = 4\sqrt{2}$$

می‌دانیم ماکسیمم مقدار مشتق جهتی برای طول بردار گرادیان می‌باشد، بنابراین:

۱۴۵- گزینه «۲» می‌خواهیم $x + y$ در ناحیه‌ای چون D را ماکسیمم کنیم. چون ناحیه مورد نظر به شکل یک چند ضلعی محدب می‌باشد. بنابراین ماکسیمم و مینیمم در نقاط گوشه‌ای این چند ضلعی حاصل خواهد شد، که از تلاقی معادلات داده شده به دست می‌آیند. با بررسی نقاط گوشه می‌توان ملاحظه کرد که ماکسیمم f برابر $18/5$ می‌باشد.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{-g(z-x)}{g'(z-x) - f'(y-z)}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{f'(y-z)}{g'(z-x) - f'(y-z)} \quad \text{گزینه «۳»}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = 1 \quad \text{بنابراین}$$

$$f'_x(0, 0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x, 0) - f(0, 0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x} = 1 \quad \text{گزینه «۳»}$$

$$f'_y(0, 0) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{f(0, y) - f(0, 0)}{y - 0} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{0}{y} = 0$$

۱۴۸- گزینه «۴» مساحت مقطع که یک مربع به ضلع $2y$ می‌باشد برابر $4y^2$ است که با توجه به رابطه $x^2 + y^2 = 9$ آن را می‌توان به

$$V = \int A(x) dx = \int_{-3}^3 4(9 - x^2) dx = 144 \quad \text{صورت } A(x) = 4y^2 = 4(9 - x^2) \text{ نوشت. بنابراین:}$$

$$\nabla f = (2x, 2y, 2) \Big|_{(2, -2, 2)} = (4, -4, 2) \Rightarrow |\nabla f| = 6 \quad \text{گزینه «۳»}$$

۱۵۰- گزینه «۱»

$$f_1(x, y, z) = x^2 - y^2 - z \Rightarrow \nabla f_1 = (2x, -2y, -1) \Big|_{(2, 1, 2)} = (4, -2, -1)$$

$$f_2(x, y, z) = 2xy - 2z \Rightarrow \nabla f_2 = (2y, 2x, -2) \Big|_{(2, 1, 2)} = (2, 4, -2)$$

$$u = \nabla f_1 \times \nabla f_2 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 4 & -2 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \end{vmatrix} = (10, 5, 20) = 5(2, 1, 4)$$

۱۵۱- گزینه «۳» ابتدا توجه کنید که به ازای $t = 0, x = 0, y = 0$ به دست می‌آید. از طرفی:

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{dy}{dt} = e^x \cos y \frac{dx}{dt} - e^x \sin y \frac{dy}{dt} \Big|_{t=0} = \frac{dx}{dt} \Big|_{t=0}$$

$$x^2 + e^x - t^2 - t = 1 \Rightarrow 2x^2 \frac{dx}{dt} + e^x \frac{dx}{dt} - 2t - 1 = 0$$

بنابراین کافی است $\frac{dx}{dt}$ را در $t = 0$ به دست آوریم:

$$\frac{dx}{dt} = 1 \text{ از رابطه فوق نتیجه می‌شود.}$$

۱۵۲- گزینه «۳»

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 - z = 0 \Rightarrow \nabla f = (2x, 2y, -1)$$

۱۵۳- گزینه «۱» معادله خط داده شده را به صورت $x = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-1}{-1}$ می‌نویسیم. بردار نرمال صفحه موردنظر برابر بردارهای خط مزبور می‌باشد. بنابراین معادله صفحه موردنظر به صورت روبرو است:

$$1(x-0) - 1(y-0) - 1(z-0) = 0 \Rightarrow x - y - z = 0$$

$$x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = 2z$$

۱۵۴- گزینه «۳» تابع داده شده یک تابع همگن درجه ۲ می‌باشد، بنابراین طبق قضیه اولی:

$$f_x(1, -1) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x, -1) - f(1, -1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-x - \alpha}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-x - \alpha(x-1)}{(x-1)^2}$$

۱۵۵- گزینه «۴»

به ازای تمام مقادیر α حد فوق وجود ندارد.

۱۵۶- گزینه «۱» به ازای $t = 0, s = \pi, x = \pi, y = \pi$ به دست می‌آیند، بنابراین:

$$\frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial s} = \cos y - x \sin y = -1$$

۱۵۷- گزینه «۲»

$$f(x, y, z) = e^{2x+2y} - z \Rightarrow \nabla f = (2e^{2x+2y}, 2ye^{2x+2y}, -1) \Big|_{(-2, 2, 1)} = (2, 6, -1)$$

$$\Rightarrow 2(x+2) + 6(y-2) - (z-1) = 0 \Rightarrow 2x + 6y - z = 5$$

۱۵۸- گزینه «۳»

$$f_1(x, y, z) = x + z - 2 = 0 \Rightarrow \nabla f_1 = (1, 0, 1)$$

$$f_2(x, y, z) = x^2 - 8y = 0 \Rightarrow \nabla f_2 = (2x^2, -8, 0) \Big|_{(4, 8, 2)} = (48, -8, 0)$$

بردار مماس موردنظر برابر حاصل ضرب خارجی بردارهای گرادیان دو رویه می‌باشد:

$$\nabla f_1 \times \nabla f_2 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & 1 \\ 48 & -8 & 0 \end{vmatrix} = 8i + 48j - 8k = 8(i + 6j - k)$$

۱۵۹- گزینه «۴» حد را در مسیر خط $y = mx$ محاسبه می‌کنیم:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x^2 + m^2 x^2} = \frac{1}{1+m^2}$$

چون مقدار حد به m بستگی دارد، پس حد وجود ندارد.

۱۶۰- گزینه «۲»

$$\begin{cases} f_x = 2x^2 + 2y = 0 \\ f_y = -2y^2 + 2x = 0 \end{cases} \Rightarrow x^2 = x \Rightarrow x = 0, x = 1$$

به ازای $x = 0$ مقدار $y = 0$ و به ازای $x = 1$ مقدار $y = -1$ خواهد بود. بنابراین نقاط بحرانی f عبارتند از $(0, 0)$ و $(1, -1)$.

$$\Delta = f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 = 4x \times (-4y) - 4 = -16xy - 4$$

در نقطه $(1, -1)$ ، $\Delta > 0$ و $f_{xx} > 0$ بنابراین نقطه $(1, -1)$ مینیمم نسبی است.

۱۶۱- گزینه «۲» ابتدا بردار \vec{a} را یک‌باره می‌کنیم:

$$\vec{u} = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = \frac{1}{5}(2, -4) = \left(\frac{2}{5}, -\frac{4}{5}\right)$$

$$\nabla f = (y^2, 2xy + 2) \Rightarrow \nabla f \Big|_{(-2, 1)} = (1, -2)$$

$$D_{\vec{u}} f = (1, -2) \cdot \left(\frac{2}{5}, -\frac{4}{5}\right) = 2$$

بنابراین:

۱۶۲- گزینه «۳»

$$A = \lim_{x \rightarrow 0} \lim_{y \rightarrow 0} f(x, y) = \lim_{x \rightarrow 0} (\lim_{y \rightarrow 0} f(x, y)) = \lim_{x \rightarrow 0} 1 = 1$$

$$B = \lim_{y \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow 0} f(x, y) = \lim_{y \rightarrow 0} (\lim_{x \rightarrow 0} f(x, y)) = \lim_{y \rightarrow 0} 1 = 1$$

بنابراین A و B موجود و با هم برابرند. برای محاسبه حد C ، دو مسیر $x = 0$ و $y = x$ را به طور مجزا مورد بررسی قرار می‌دهیم:

$$C = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = \lim_{\substack{y \rightarrow 0 \\ x=0}} f(x, y) = \lim_{y \rightarrow 0} 0 = 0$$

$$C = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y=x}} f(x, y) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x, x) = \lim_{x \rightarrow 0} 1 = 1$$

چون روی دو مسیر مختلف، دو مقدار مختلف برای حد به دست می‌آید، بنابراین حد وجود ندارد.

۱۶۳- گزینه «۴» در بین گزینه‌ها، تنها گزینه‌ای که در شرط $\begin{cases} x^2 + y^2 = 2 \\ z = 2 \end{cases}$ صدق می‌کند گزینه «۴» می‌باشد.

۱۶۴- گزینه «۳»

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 - z \Rightarrow \nabla f = (2x, 2y, -1) \Big|_{(1, 1, 2)} = (2, 2, -1)$$

$$D_{\vec{u}} f = \nabla f \cdot \vec{u} = (2, 2, -1) \cdot \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right) = 2$$

۱۶۵- گزینه «۱» ابتدا توجه کنید که:

$$f_x = 2ax + 2by, f_y = 2bx + 2cy, f_{xx} = 2a, f_{yy} = 2c, f_{xy} = 2b$$

$$\Delta = f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 = 2a \times 2c - 4b^2 = 4(ac - b^2)$$

بنابراین:

برای ماکسیمم بودن نقطه بحرانی لازم است $f_{xx} < 0$ و $\Delta > 0$ باشد یعنی $a < 0$ و $ac - b^2 > 0$.

۱۶۶- گزینه «۱» و «۲» و «۳» طبق روش ضرایب لاگرانژ، اکستریم تابع f تحت دو شرط G و H وقتی اتفاق می‌افتد که $\nabla f = \lambda \nabla G + \mu \nabla H$ و این رابطه یعنی ∇f در صفحه دو بردار ∇G و ∇H قرار دارد (سه بردار گرادیان هم صفحه‌اند) و در نتیجه هر سه رابطه ذکر شده در گزینه‌های (۱)، (۲) و (۳) صحیح هستند.

۱۶۷- گزینه «۴»

۱۶۸- گزینه «۴»
 $z = f(x^2 - y^2) \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial x} = 2xf'(x^2 - y^2), \frac{\partial z}{\partial y} = -2yf'(x^2 - y^2)$

۱۶۹- گزینه «۳» مقادیر ماکسیمم و مینیمم f روی مرز و یا نقاط بحرانی رخ می‌دهد. مرز ناحیه داده شده را می‌توان به صورت پارامتری زیر نوشت:
 $x = 2\cos t, y = 2\sin t \quad 0 \leq t \leq 2\pi$
 بنابراین در روی مرز، f به صورت $f(t) = 4\sin 2t$ در می‌آید که ماکسیمم آن برابر ۴ و مینیمم آن -۴ است. از طرفی نقطه بحرانی $f(x, y) = 2xy$ نقطه $(0, 0)$ می‌باشد و در این نقطه $f(0, 0) = 0$ بنابراین همان مقادیر -۴ و ۴ به ترتیب مینیمم و ماکسیمم f می‌باشد.

۱۷۰- گزینه «۲»
 $\nabla f = (y + z, x, 6 + x) \Rightarrow \nabla f \Big|_{(-2, 5, -1)} = (4, -3, 2)$

چون اندازه بردارها در چهار گزینه برابر ۳ می‌باشد، پس نیازی به یکه کردن بردارها نمی‌باشد.
 $\nabla f(2, 2, -1) = 1$
 $\nabla f(2, -2, 1) = 17$
 $\nabla f(-2, 2, 1) = -11$
 $\nabla f(-2, 2, 2) = -8$

با توجه به مقادیر به دست آمده، گزینه «۲» صحیح می‌باشد.

۱۷۱- گزینه «۳» به جای مشتق‌گیری زنجیری بهتر است، ابتدا متغیرها را بر حسب t در W جایگزین کنیم و سپس از W نسبت به t مشتق بگیریم.
 $w = t^n \Rightarrow \frac{dw}{dt} = nt^{n-1}$

۱۷۲- گزینه «۴»

۱۷۳- گزینه «۴» از روش ضرایب لاکرانز استفاده می‌کنیم:

$$\begin{cases} 9x^2 + 4y^2 = 18 \\ \nabla f = \lambda \nabla g \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 9x^2 + 4y^2 = 18 \\ 6\lambda x = 1 \\ 4\lambda y = -1 \end{cases} \Rightarrow x = 1, y = \frac{-3}{2}, \lambda = \frac{1}{6}$$

پس نقطه ماکسیمم نقطه $(1, \frac{-3}{2})$ می‌باشد و در این نقطه مقدار تابع f برابر ۷ می‌باشد.

۱۷۴- گزینه «۳» واضح است که در ناحیه D تابع f می‌تواند مثبت یا منفی باشد، پس با توجه به مقادیر داده شده در گزینه‌ها فقط گزینه (۳) می‌تواند صحیح باشد.

۱۷۵- گزینه «۱» عبارات x^2 و y^4 همواره نامنفی می‌باشند و مینیمم آنها در $x = 0$ و $y = 0$ رخ می‌دهد. بنابراین نقطه $(0, 0)$ ، نقطه مینیمم تابع $f(x, y) = x^2 + y^4 + 1$ می‌باشد.

۱۷۶- گزینه «۴»

$$f(x, y) = \ln\left(\frac{1}{x} + y\right) \Rightarrow \nabla f = \left(-\frac{1}{x^2}, \frac{1}{1+y}\right) \Rightarrow \begin{cases} -\frac{1}{x^2} = -\frac{1}{9} \\ \frac{1}{1+y} = 1 \end{cases}$$

از حل دستگاه فوق $x_1 = \frac{3}{4}$ و $x_2 = \frac{-3}{4}$ و $y_1 = \frac{-1}{3}$ و $y_2 = \frac{2}{3}$ به دست می‌آید.

۱۷۷- گزینه «۲»
 $f(x, y, z) = \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} + \frac{z^2}{25} = 1 \Rightarrow \vec{N} = \nabla f = \left(\frac{2x}{9}, \frac{y}{8}, \frac{2z}{25}\right) = \left(\frac{2}{9\sqrt{3}}, \frac{1}{8\sqrt{3}}, \frac{2}{25\sqrt{3}}\right) = \left(\frac{2}{3\sqrt{3}}, \frac{1}{2\sqrt{3}}, \frac{2}{5\sqrt{3}}\right)$

$\frac{2}{3\sqrt{3}}\left(x - \frac{3}{\sqrt{3}}\right) + \frac{1}{2\sqrt{3}}\left(y - \frac{2}{\sqrt{3}}\right) + \frac{2}{5\sqrt{3}}\left(z - \frac{5}{\sqrt{3}}\right) = 0 \Rightarrow \frac{2}{3\sqrt{3}}x + \frac{1}{2\sqrt{3}}y + \frac{2}{5\sqrt{3}}z = 2$
 با ضرب کردن طرفین معادله اخیر در $\frac{\sqrt{3}}{3}$ ، معادله صفحه به صورت $\frac{x}{3} + \frac{y}{6} + \frac{z}{5} = \sqrt{3}$ در می‌آید.

۱۷۸- گزینه «۴» طبق قضیه اولر، باید تابعی را انتخاب کنیم که همگن از درجه ۲ باشد. تنها گزینه ۴ همگن از درجه ۲ می‌باشد (گزینه ۱ از درجه $\frac{1}{3}$ است و گزینه‌های (۲) و (۳) همگن از درجه ۱ می‌باشند).

۱۷۹- گزینه «۳»
 $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y^2}{x^2 + y^2} = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \underbrace{\left(\frac{x^2}{x^2 + y^2}\right)}_{\text{مقداری بین ۰ و ۱}} y^2 = 0$ کراندار $x \rightarrow 0$

۱۸۰- گزینه «۱» عبارت زیر رادیکال یعنی xy باید نامنفی باشد، بنابراین x و y باید هم علامت باشند. عبارت مقابل \sin^{-1} باید بین -۱ و ۱ باشد یعنی $-1 \leq x \leq 1$.

۱۸۱- گزینه «۲» تنها گزینه (۳) در $(0, 0)$ حدی برابر صفر دارد و سایر گزینه‌ها در $(0, 0)$ حد ندارند و در نتیجه نمی‌توانند در $(0, 0)$ پیوسته باشند.

۱۸۲- گزینه «۱» تابع داده شده را می‌توان به صورت حاصل ضرب دو تابع بی‌نهایت بار مشتق‌پذیر نوشت و چون حاصل ضرب دو تابع مشتق‌پذیر، تابعی مشتق‌پذیر است، بنابراین گزینه (۱) صحیح است.

$$g(x) = \begin{cases} -1 & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}, h(y) = y \Rightarrow f(x, y) = g(x)h(y)$$

۱۸۳- گزینه «۱» و «۳»

$f(x, y, z) = x^2 + 2xyz + 2y^2 - z^2 - 5 \Rightarrow \nabla f = (2x^2 + 2yz, 2xz + 4y, 2xy - 2z)$
 $\Rightarrow \vec{N} = \frac{\nabla f}{|\nabla f|} = \frac{(6, 9, 0)}{\sqrt{6^2 + 9^2 + 0}} = \left(\frac{2}{\sqrt{13}}, \frac{3}{\sqrt{13}}, 0\right)$

۱۸۴- گزینه «۴» ابتدا نشان می‌دهیم f در $(0, 0)$ حد ندارد.

$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin(xy)}{x^2 + y^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(mx^2)}{x^2 + m^2x^2} \stackrel{\text{هم‌ارزی}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{mx^2}{x^2 + m^2x^2} = \frac{m}{1+m^2}$

چون مقدار حد به m وابسته است، پس حد وجود ندارد. حال به بررسی وجود مشتقات جزئی در $(0, 0)$ می‌پردازیم

$f_x(0, 0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x, 0) - f(0, 0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{0}{x} = 0$
 $f_y(0, 0) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{f(0, y) - f(0, 0)}{y - 0} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{0}{y} = 0$

۱۸۵- گزینه «۲» رابطه‌های داده شده به ترتیب f و g فرض می‌کنیم:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_x = -\frac{\frac{\partial(f, g)}{\partial(y, v)}}{\frac{\partial(f, g)}{\partial(u, v)}} = -\frac{\begin{vmatrix} ry - x & -u - 2v \\ 2y & u \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} ru - v & -u - 2v \\ v & u \end{vmatrix}} = -\frac{ryu - xu + 2yu + 4yv}{ru^2 - uv + uv + 2v^2} = \frac{xu - 4yu - 4yv}{ru^2 + 2v^2}$$

۱۸۶- گزینه «۳» می توان از روش ضرایب لاگرانژ مسأله را حل کرد. ولی جایگزینی y بر حسب x در عبارت داده شده سریعتر به جواب می رسد.

$$f(x) = x^2 + 2(x^2 - 1)^2 + 2x(x^2 - 1) + 2x + 3(x^2 - 1) = 2(x^2 - 1)^2 + 2x^2 + 4x^2 - 2$$

$$f'(x) = 4x(x^2 - 1) + 4x^2 + 4x = 4x^3 + 8x^2 = x^2(4x + 8)$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow x^2(4x + 8) = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ ریشه مضاعف}, \quad x = -\frac{2}{1}$$

بنابراین نقطه $(-\frac{2}{1}, \frac{-7}{4}, \frac{-3}{4})$ نقطه اکسترمم تابع می باشد و چون $f''(-\frac{2}{1}) > 0$ پس $(-\frac{2}{1}, \frac{-7}{4}, \frac{-3}{4})$ نقطه مینیمم تابع می باشد.

۱۸۷- گزینه «۲» می خواهیم عبارت $f(x, y, z) = 2x + 4y - 5z$ را تحت قید $g(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - \frac{4}{5} = 0$ ماکسیم کنیم.

بنابراین از روش ضرایب لاگرانژ استفاده می کنیم.

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = \frac{4}{5} \\ \nabla f = \lambda \nabla g \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2 = 2\lambda x \Rightarrow x = \frac{1}{\lambda} \\ 4 = 2\lambda y \Rightarrow y = \frac{2}{\lambda} \\ -5 = 2\lambda z \Rightarrow z = \frac{-5}{2\lambda} \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{\lambda^2} + \frac{4}{\lambda^2} + \frac{25}{4\lambda^2} = \frac{4}{5}$$

از حل معادله فوق $\lambda = \pm \frac{15}{4}$ به دست می آید. و در این صورت دو نقطه $(\frac{4}{15}, \frac{8}{15}, \frac{-10}{15})$ و $(-\frac{4}{15}, \frac{8}{15}, \frac{10}{15})$ به عنوان نقاط بحرانی به دست

$$f(\frac{4}{15}, \frac{8}{15}, \frac{-10}{15}) = 6, \quad f(-\frac{4}{15}, \frac{8}{15}, \frac{10}{15}) = -6$$

می آیند.

بنابراین بیشترین و کمترین مقدار f به ترتیب ۶ و -۶ می باشند.

$$x(t) = \sin t - t \cos t \Rightarrow x'(t) = t \sin t \Rightarrow x''(t) = \sin t + t \cos t$$

۱۸۸- گزینه «۴»

$$y(t) = \cos t + t \sin t \Rightarrow y'(t) = t \cos t \Rightarrow y''(t) = \cos t - t \sin t$$

$$k = \frac{|x'y'' - x''y'|}{(x'^2 + y'^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{t^2}{t^3} = \frac{1}{t} \Big|_{t=\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{\pi}$$

۱۸۹- گزینه «۲» از روش ضرایب لاگرانژ استفاده می کنیم.

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1 \\ 96xyz^2 = 2\lambda x \\ 96xz^2 = 2\lambda y \\ 192xyz = 2\lambda z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1 \\ 48xyz^2 = \lambda x^2 \\ 48xyz^2 = \lambda y^2 \\ 96xyz^2 = \lambda z^2 \end{cases} \Rightarrow x^2 = y^2 = z^2$$

که با جایگزینی رابطه اخیر در معادله $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ نتیجه می شود:

$$3z^2 = 1 \Rightarrow z^2 = \frac{1}{3}, \quad x^2 = \frac{1}{3}, \quad y^2 = \frac{1}{3} \Rightarrow T = 96 \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = 12$$

۱۹۰- گزینه «۳» بردار گرادیان رویه داده شده با بردار نرمال صفحه داده شده باید موازی باشد. بنابراین:

$$\nabla f = (2x, 4y, 4z), \quad \vec{N} = (1, -2, 2) \Rightarrow \frac{2x}{1} = \frac{4y}{-2} = \frac{4z}{2} \Rightarrow x = -2y = z$$

با جایگزینی معادلات فوق در بیضوی نقاط $(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ و $(\frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}})$ به دست می آیند. که این نقاط همان نقاطی هستند که دو صفحه بر بیضوی مماس شده اند. بنابراین معادلات صفحات موردنظر به صورت زیر می باشد:

$$1(x - \frac{1}{\sqrt{2}}) - 2(y + \frac{1}{\sqrt{2}}) + 2(z - \frac{1}{\sqrt{2}}) = 0 \Rightarrow x - 2y + 2z = 2$$

$$1(x + \frac{1}{\sqrt{2}}) - 2(y - \frac{1}{\sqrt{2}}) + 2(z + \frac{1}{\sqrt{2}}) = 0 \Rightarrow x - 2y + 2z = -2$$

$$d = \frac{|2 - (-2)|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2 + 2^2}} = \frac{4}{3}$$

با توجه به اینکه دو صفحه فوق موازیند. فاصله آنها برابر است با:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = f'(x+ay), \quad \frac{\partial z}{\partial y} = f'(x+ay) \quad \text{۱۹۱- گزینه «۱»}$$

$$\begin{cases} z_x = 2x - 2 = 0 \Rightarrow x = 1 \\ z_y = -2y + 4 = 0 \Rightarrow y = 2 \end{cases} \quad \text{۱۹۲- گزینه «۴»}$$

بنابراین نقطه (۱ و ۲) تنها نقطه بحرانی سطح موردنظر است و در نتیجه نقطه (۱، -۲) یک نقطه عادی می باشد.

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy = (4x - 2y)dx + (-2x + 4y)dy \quad \text{۱۹۳- گزینه «۴»}$$

۱۹۴- گزینه «۲» ابتدا فرض می کنیم $\nabla f(a, b) = (f_x, f_y)$. در این صورت:

$$\begin{cases} \nabla f(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}) = 2\sqrt{2} \\ \nabla f(\frac{2}{5}, \frac{-4}{5}) = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}}f_x + \frac{1}{\sqrt{2}}f_y = 2\sqrt{2} \\ \frac{2}{5}f_x - \frac{4}{5}f_y = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f_x + f_y = 6 \\ 2f_x - 4f_y = 25 \end{cases}$$

که از حل معادله فوق $f_x = 7$ و $f_y = -1$ به دست می آید.

۱۹۵- گزینه «۳» می خواهیم فاصله یعنی $d = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ را تحت شرط $xyz = 1$ مینیمم کنیم. یا به طور معادل می خواهیم

$d^2 = x^2 + y^2 + z^2$ را تحت شرط $x^2 y^2 z^2 = 1$ مینیمم کنیم. از طرفی می دانیم هرگاه حاصل ضرب چند متغیر ثابت باشد، مجموع آنها وقتی مینیمم است که تمام متغیرها با هم برابر باشند یعنی $x^2 = y^2 = z^2$. در نتیجه:

$$x^2 \cdot x^2 \cdot x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1, y = \pm 1, z = \pm 1 \Rightarrow \min(d) = \sqrt{1+1+1} = \sqrt{3}$$

$$\vec{A} = i + j \Rightarrow \vec{u} = \frac{\vec{A}}{|\vec{A}|} = \frac{1}{\sqrt{2}}(i + j) \quad \text{۱۹۶- گزینه «۱» فرض می کنیم } \nabla f = (f_1, f_2) \text{ در این صورت:}$$

$$\vec{B} = 3i - 4j \Rightarrow \vec{v} = \frac{\vec{B}}{|\vec{B}|} = \frac{1}{5}(3i - 4j)$$

$$\begin{cases} \nabla f \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}(i + j) = 2\sqrt{2} \\ \nabla f \cdot \frac{1}{5}(3i - 4j) = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f_1 + f_2 = 6 \\ 3f_1 - 4f_2 = 25 \end{cases} \Rightarrow f_1 = 7, f_2 = -1 \Rightarrow \nabla f = (7, -1)$$

۱۹۷- گزینه «۳»

$$\begin{cases} f_x = y - 2x - 2 = 0 \\ f_y = x - 2y - 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow x = -2, y = -2$$

بنابراین نقطه $(-2, -2)$ تنها نقطه بحرانی تابع می باشد.

$$\Delta = f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 = (-2)(-2) - 1^2 = 3$$

چون $\Delta > 0$ و $f_{xx} < 0$ ، بنابراین نقطه $(-2, -2)$ نقطه ماکزیمم می باشد.

$$f(-2, -2) = 4 - 4 - 4 + 4 + 4 + 4 = 8$$

۱۹۸- گزینه «۲»

$$B = \lim_{x \rightarrow \infty} \lim_{y \rightarrow \infty} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{x^2} = 1$$

$$C = \lim_{y \rightarrow \infty} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} = \lim_{y \rightarrow \infty} \frac{-y^2}{y^2} = -1$$

چون حدهای B و C برابر نیستند پس حد A وجود ندارد.

$$f(x, y) = \frac{x^2}{y} + \frac{y^2}{x} \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{2x}{y} - \frac{y^2}{x^2} \Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{-2x}{y^2} - \frac{2y}{x^3} \Big|_{(1,1)} = -4$$

۱۹۹- گزینه «۱»

$$f_1(x, y, z) = 2x^2 - 2y^2 + 1 - z \Rightarrow \nabla f_1 = (4x, -4y, -1) \Big|_{(2,1,6)} = (8, -4, -1)$$

۲۰۰- گزینه «۲»

$$f_2(x, y, z) = x^2 + 2y^2 - z \Rightarrow \nabla f_2 = (2x, 4y, -1) \Big|_{(2,1,6)} = (4, 4, -1)$$

$$\text{بردار هادی خط مماس برابر } u = \nabla f_1 \times \nabla f_2 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 8 & -4 & -1 \\ 4 & 4 & -1 \end{vmatrix} = (10, 4, 56)$$

بنابراین معادله خط مماس به صورت روبرو است:

$$\frac{x-2}{10} = \frac{y-1}{4} = \frac{z-6}{56}$$

در بین گزینه ها تنها نقطه $(-8, -3, -50)$ در معادله فوق صدق می کند.

$$\nabla f = (2xz - 4yz, uy^2 - 4xz, 2z^2 - 4xy) \Big|_{(-1,1,2)} = (-5, 14, 16)$$

۲۰۱- گزینه «۴»

$$\text{Max}(D_u f) = |\nabla f| = \sqrt{25 + 196 + 256} = 2\sqrt{53}$$

۲۰۲- گزینه «۳»

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial(z-x)}{\partial x} \times f'_1 + \frac{\partial(x-y)}{\partial x} f'_2 = -f'_1 + f'_2$$

$$\frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\partial(y-z)}{\partial y} \times f'_1 + \frac{\partial(x-y)}{\partial y} f'_2 = -f'_1 + f'_2$$

$$\frac{\partial w}{\partial z} = \frac{\partial(y-z)}{\partial z} \times f'_1 + \frac{\partial(z-x)}{\partial z} f'_2 = -f'_1 + f'_2$$

۲۰۳- گزینه «۱»

$$u_x = u_v \cdot v_x + u_z \cdot z_x = u_v + u_z$$

به همین ترتیب، به طور مشابه با مشتق گیری زنجیری خواهیم داشت:

$$u_{xx} = u_{vv} + u_{vz} + u_{zv} + u_{zz} = u_{vv} + 2u_{vz} + u_{zz}$$

$$u_y = u_z, u_{yy} = u_{zz}, u_{yx} = u_{vz} + u_{zz}$$

$$(u_{vv} + 2u_{vz} + u_{zz}) - 2(u_{vz} + u_{zz}) + u_{zz} = u_{vv} = 0$$

با جایگزینی در معادله داده شده به دست می آید:

۲۰۴- گزینه «۳» طبق قضیه اوپلر (به متن درس مراجعه کنید).

$$\nabla f = (2x - 2y, -2x + 10y) \Big|_{(1,2)} = (-2, 17)$$

۲۰۵- گزینه «۱»

$$D_u f = (-2, 17) \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = \frac{15\sqrt{2}}{2}$$

بردار یکه مورد نظر $\vec{u} = (\cos \frac{\pi}{4}, \sin \frac{\pi}{4})$ می باشد، بنابراین:

تست‌های تکمیلی فصل اول

کدام تابع با ضابطه $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2 y^2}{x^2 y^2 + (y-x)^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$ در نقطه $(0,0)$ کدام شرایط را دارد؟
 (۱) حد دارد ولی پیوسته نیست.
 (۲) حد دارد و پیوسته نیز می‌باشد.
 (۳) حد ندارد و نتیجتاً پیوسته نیز نمی‌باشد.
 (۴) مشتق پذیر می‌باشد.

کدام تابع با ضابطه $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$ در مورد تابع با ضابطه $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$ کدام عبارت صحیح است؟
 (۱) تابع مشتق پذیر می‌باشد.
 (۲) تابع پیوسته نیست و نتیجتاً مشتق پذیر نیز نمی‌باشد.
 (۳) تابع مشتق پذیر نیست ولی پیوسته می‌باشد.
 (۴) تابع پیوسته و مشتق پذیر است.

اگر $f(u,v) = \frac{u}{v}$ و $u = \sqrt{x^2 - 2y} + 2z$ و $v = xyz$ مقدار $\frac{\partial f}{\partial z}$ در نقطه $A(1,1,2)$ کدام است؟
 (۱) $\frac{\sqrt{6}}{4}$
 (۲) $\frac{\sqrt{6}}{6}$
 (۳) $-\frac{\sqrt{6}}{12}$
 (۴) $-\frac{\sqrt{6}}{8}$

حد تابع $f(x,y) = \frac{\sin xy}{x}$ در نقطه $A(0,4)$ کدام است؟
 (۱) -4
 (۲) حد ندارد.
 (۳) 4
 (۴) ∞

معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی $z = 0$ با تغییر متغیر $z = u(x,y)e^{x+y}$ به کدام معادله تبدیل می‌شود.

(۱) $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 0$
 (۲) $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + u - \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0$
 (۳) $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + u = 0$
 (۴) $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0$

اگر $f(x,y) = \text{Arcsin} \frac{y}{x} + \text{Arctg} \frac{x}{y}$ آنگاه حاصل $x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y}$ کدام است؟
 (۱) 1
 (۲) -1
 (۳) 2
 (۴) صفر

اگر $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ آنگاه مقدار $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ به ازای $x=y=1$ کدام است؟
 (۱) $\frac{\sqrt{2}}{2}$
 (۲) 2
 (۳) $\frac{\sqrt{2}}{4}$
 (۴) $\frac{1}{2}$

اگر $f(x,y,z) = x^2 y + y^2 z + z^2 x$ آنگاه مقدار $\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z}$ کدام است؟
 (۱) $x + y + z$
 (۲) $(x+y+z)^2$
 (۳) $2(x+y+z)$
 (۴) $(x+y+z)^3$

هرگاه $f(x,y) = \frac{Ax^n + Bx^m}{Cx^r + Dy^s}$ آنگاه مقدار $x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y}$ برابر کدام است؟
 (۱) $nf(x,y)$
 (۲) $n^r f(x,y)$
 (۳) $(n-r)f(x,y)$
 (۴) $(n+r)f(x,y)$

اگر $g(x,y,u,v) = x^2 + y^2 + u^2 + v^2 = 0$ و $f(x,y,u,v) = x + y^2 + 2uv = 0$ آنگاه $\frac{\partial v}{\partial x}$ کدام است؟
 (۱) $\frac{v(2x-y)-u}{2(u^2-v^2)}$
 (۲) $\frac{v(2x-y)+u}{2(u^2-v^2)}$
 (۳) $\frac{v+u(y-2x)}{2(u^2-v^2)}$
 (۴) $\frac{v-u(y-2x)}{2(u^2-v^2)}$

اگر $z = uvw$ و $y + z = uv$ ، $(x+y+z) = u$ آنگاه $\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}$ کدام است؟
 (۱) uv
 (۲) $u^2 v^2$
 (۳) uv^2
 (۴) $u^2 v$

اگر $z = e^t$ ، $y = e^t \sin t$ ، $x = e^t \cos t$ ، $w = x^2 + y^2 + z^2$ آنگاه $\frac{\partial w}{\partial t}$ کدام است؟
 (۱) $2e^{2t}$
 (۲) $2e^{4t}$
 (۳) $2e^{3t}$
 (۴) $2e^{2t}$

اگر $u = \ln(x^2 + y^2 + z^2 - 2xyz)$ آنگاه مقدار $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z}$ برابر کدام است؟
 (۱) $\frac{1}{(x+y+z)^2}$
 (۲) $\frac{1}{x+y+z}$
 (۳) $\frac{2}{(x+y+z)^2}$
 (۴) $\frac{2}{x+y+z}$

اگر $u = e^{xy} \sin z$ آنگاه حاصل $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y \partial z}$ کدام است؟
 (۱) $xye^{xy} \sin z$
 (۲) $e^{xy} (1+xy) \sin z$
 (۳) $e^{xy} (1+xy) \cos z$
 (۴) $xye^{xy} \cos z$

اگر $y = e^u \sin v$ ، $x = e^u \cos v$ ، $z = f(x,y)$ آنگاه مقدار $y \frac{\partial z}{\partial u} + x \frac{\partial z}{\partial v}$ کدام است؟
 (۱) e^{2v}
 (۲) $e^{2u} \frac{\partial z}{\partial y}$
 (۳) $e^{2u} \frac{\partial z}{\partial x}$
 (۴) صفر

اگر $u = x - y^2$ ، $v = x + y^2$ آنگاه $\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}$ کدام است؟

(۱) $2y + \frac{2}{y}$
 (۲) $y + \frac{2}{y}$
 (۳) $2y + \frac{2}{yx}$
 (۴) $2x + \frac{1}{2y}$

اگر $f(ax-by) = e^{ax+by}$ آنگاه مقدار $a \frac{\partial z}{\partial y} + b \frac{\partial z}{\partial x}$ برابر کدام است؟

(۱) z
 (۲) abz
 (۳) $2z$
 (۴) $rabz$

اگر $z = xf(\frac{y}{x}) + g(\frac{y}{x})$ آنگاه مقدار $x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y}$ کدام است؟

(۱) صفر
 (۲) $f(\frac{y}{x})$
 (۳) $g(\frac{y}{x})$
 (۴) $xf(\frac{y}{x})$

اگر $V = (ax+by)^2 - (x^2 + y^2)$ ، $a^2 + b^2 = 2$ آنگاه مقدار $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2}$ برابر کدام است؟

(۱) ab
 (۲) $(ab)^2$
 (۳) $\frac{(a+b)^2}{ab}$
 (۴) صفر

اگر $u = \text{Arctg} \frac{xy}{\sqrt{1+x^2+y^2}}$ آنگاه مقدار $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$ کدام است؟

(۱) صفر
 (۲) $\frac{1}{(1+x^2+y^2)^2}$
 (۳) $\frac{1}{(1+x^2+y^2)}$
 (۴) $\frac{xy}{1+x^2+y^2}$

اگر $u = x - 2y$ ، $z = u^2 + uv$ ، $v = 2x - y^2$ باشد، مقدار z'_x به ازای $x=1$ و $y=-1$ کدام است؟

(۱) 12
 (۲) 13
 (۳) 11
 (۴) 14

اگر $f(x,y) = \frac{x-y}{x+y}$ حاصل $\frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial x}$ در نقطه $(2,-1)$ کدام است؟

(۱) -8
 (۲) -6
 (۳) -4
 (۴) -2

در تابع دو متغیره $z = \frac{xy}{x+y}$ مقدار $x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y}$ کدام است؟

(۱) $\frac{xy}{x+y}$
 (۲) $\frac{xy}{x+y}$
 (۳) صفر
 (۴) $\frac{x^2 y^2}{x+y}$

اگر $u = f(\frac{x}{y}, \frac{y}{z}, \frac{z}{x})$ آنگاه مقدار $x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} + z \frac{\partial u}{\partial z}$ برابر کدام است؟

(۱) u
 (۲) صفر
 (۳) $2u$
 (۴) $3u$

۲۵- در مورد نقطه بحرانی تابع $f(x,y) = x^2 + y^2 + 6x + 12$ کدام عبارت صحیح است؟

- (۱) تابع در نقطه $(-3, 0)$ ماکزیمی برابر ۳ دارد.
- (۲) تابع در نقطه $(-3, 0)$ می‌نیمی برابر ۳ دارد.
- (۳) تابع در نقطه $(0, -3)$ ماکزیمی برابر ۳ دارد.
- (۴) تابع در نقطه $(3, 0)$ ماکزیمی برابر ۳ دارد.

۲۶- نقطه می‌نیم تابع $f(x,y) = x^2y + xy^2 - axy$ کدام است؟

- (۱) $(-\frac{a}{3}, \frac{a}{3})$
- (۲) $(\frac{a}{3}, \frac{a}{3})$
- (۳) $(-\frac{a}{3}, -\frac{a}{3})$
- (۴) $(\frac{a}{3}, -\frac{a}{3})$

۲۷- ماکزیم حجم یک مکعب مستطیل داخل کره‌ای به معادله $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ کدام است؟

- (۱) $\frac{8abc}{\sqrt{3}}$
- (۲) $\frac{4abc}{3\sqrt{3}}$
- (۳) $\frac{4abc}{\sqrt{3}}$
- (۴) $\frac{8abc}{3\sqrt{3}}$

۲۸- ماکزیم و می‌نیم فاصله نقطه $(3, 4, 12)$ از کره‌ای به معادله $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ به ترتیب کدام است؟

- (۱) 12 و 14
- (۲) 10 و 12
- (۳) 14 و 16
- (۴) 10 و 14

۲۹- نقطه می‌نیم تابع $f(x,y) = x^2 + 2xy + 2y^2 + 2x + y$ کدام است؟

- (۱) $(\frac{2}{3}, \frac{1}{3})$
- (۲) $(-\frac{2}{3}, \frac{1}{3})$
- (۳) $(-\frac{2}{3}, -\frac{1}{3})$
- (۴) $(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3})$

۳۰- طول نزدیکترین نقطه به صفحه $2x + y + 2z = 16$ کدام است؟

- (۱) $\frac{16}{3}$
- (۲) $\frac{16}{9}$
- (۳) $-\frac{16}{9}$
- (۴) $\frac{32}{9}$

۳۱- خط عمود بر رویه $x^2 + y^2 + z^2 + xyz = 4$ در نقطه $(1, 1, 8)$ واقع بر رویه کدام است؟

- (۱) $\frac{x-1}{a+2} = \frac{y-1}{2+a} = \frac{z-a}{2}$
- (۲) $\frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-a}{2}$
- (۳) $\frac{x-1}{4} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-1}{2}$
- (۴) $x-1 = y-1 = z-1$

۳۲- معادله صفحه مماس بر سطحی به معادله $x^2 + y^2 = 4z$ در نقطه $(2, -4, 5)$ واقع بر آن کدام است؟

- (۱) $x + 2y - z = -11$
- (۲) $2x - 2y - 2z = -2$
- (۳) $2x + 2y - z = -9$
- (۴) $x - 2y - z = 5$

۳۳- اگر $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ و $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ باشد و f تابعی مشتق پذیر از r در نظر گرفته شود، آنگاه مقدار $\nabla f(r)$ کدام است؟

- (۱) $f'(r) \cdot \frac{\vec{r}}{r}$
- (۲) $f'(r) \cdot \frac{\vec{r}}{r^2}$
- (۳) $f'(r) \cdot \frac{\vec{r}}{r^3}$
- (۴) $f'(r) \cdot \frac{\vec{r}}{r}$

۳۴- مشتق سویی تابع $f(x,y,z) = x^2 \text{Arctg}xy$ در راستای $u(4, 1, -2)$ و نقطه $p(1, 0, 2)$ کدام است؟

- (۱) $\frac{\sqrt{21}}{2}$
- (۲) $\frac{-1}{\sqrt{21}}$
- (۳) $\frac{2}{\sqrt{21}}$
- (۴) $\frac{21\sqrt{2}}{2}$

۳۵- بردار یکه عمود بر سطح xyz^2 در نقطه $(-1, 1, 2)$ کدام است؟

- (۱) $(4, -12, -4)$
- (۲) $(-4, -12, 4)$
- (۳) $(4, 12, 4)$
- (۴) $(-4, 5, -6)$

۳۶- بزرگترین مشتق جهتی (سویی) تابع $f(x,y) = ax^2 + by^2$ در نقاط واقع بر روی دایره واحد به مرکز مبدأ مختصات کدام است؟

- (۱) $2 \max\{|a|, |b|\}$
- (۲) $2|a|$
- (۳) $\max\{|a|, |b|\}$
- (۴) $2|b|$

۳۷- مقدار d^2z به شرطی که $z = e^{xy}$ کدام است؟

- (۱) $e^{xy}[(x^2dx + y^2dy)^2 - 2dxdy]$
- (۲) $e^{xy}[(x^2dx + y^2dy)^2 + 2dxdy]$
- (۳) $e^{xy}[(ydx + xdy)^2 - 2dxdy]$
- (۴) $e^{xy}[(ydx - xdy)^2 - 2dxdy]$

۳۸- برای اینکه عبارت $f(x,y)(dx + dy)$ دیفرانسیل کامل باشد، باید کدام شرط زیر برقرار باشد؟

- (۱) $f_y = 2f_x$
- (۲) $f_x = 2f_y$
- (۳) $f'_x = f'_y$
- (۴) $f''_x = f''_y$

۳۹- حاصل $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ در صورتی که $z = \text{Ln}(x^2 + y)$ باشد، کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{(x^2 + y)^2}$
- (۲) $-\frac{2x}{(x^2 + y)^2}$
- (۳) $\frac{2(y - x^2)}{(x^2 + y)^2}$
- (۴) صفر

۴۰- حاصل $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ در صورتی که $z = \text{arctg} \frac{x+y}{1-xy}$ باشد، کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{(1-xy)^2}$
- (۲) صفر
- (۳) $\frac{2(x+y)}{1-xy}$
- (۴) $\frac{y}{1+(1-xy)^2}$

۴۱- حاصل $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$ در صورتی که $u = xy + yz + zx$ باشد، کدام است؟

- (۱) صفر
- (۲) ۲
- (۳) ۱
- (۴) $x + y + z$

۴۲- اگر $z = \sin(xy)$ آنگاه حاصل $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y^2}$ با شرط $x = \frac{\pi}{2}$ و $y = 1$ کدام است؟

- (۱) $-\frac{\pi}{2}$
- (۲) $\frac{\pi}{2}$
- (۳) $-\pi$
- (۴) صفر

۴۳- حاصل $\frac{d^2 y}{dx^2}$ در صورتی که $\text{Ln} \sqrt{x^2 + y^2} = \text{arctg} \frac{y}{x}$ باشد، کدام است؟

- (۱) $\frac{2(x^2 + y^2)}{(x-y)^2}$
- (۲) $\frac{2(x^2 + y^2)}{(x-y)^2}$
- (۳) $\frac{x^2 + y^2}{(x-y)^2}$
- (۴) $\frac{x^2 + y^2}{(x-y)^2}$

۴۴- اگر $F(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}) = 0$ آنگاه حاصل $x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y}$ کدام است؟

- (۱) صفر
- (۲) ۱
- (۳) z
- (۴) $\frac{xy}{z^2}$

۴۵- اگر $f(x,y,z) = 0$ آنگاه حاصل $\frac{\partial x}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial x}$ کدام است؟

- (۱) صفر
- (۲) ۱
- (۳) f
- (۴) -1

۴۶- برد تابع حقیقی $z = \frac{x^2}{x^2 + y^2}$ کدام است؟

- (۱) R
- (۲) R^1
- (۳) $[0, 1]$
- (۴) $R^+ \cup \{0\}$

۴۷- تمام دامنه تابع $z = \text{arcsin} \frac{x}{y} + \sqrt{xy}$ کدام است؟

- (۱) $y \leq 0, -2 < x < 2$
- (۲) $-2 < x < 2, y \geq 0$
- (۳) $x \geq 0, y \geq 0$
- (۴) $-2 \leq x \leq 2, -\infty < y < +\infty$

۴۸- مشتق سونی تابع $u = xy + yz + zx$ در نقطه $M(2, 1, 3)$ در جهت امتداد این نقطه به نقطه $N(5, 5, 15)$ کدام است؟

- (۱) $\frac{34}{6}$
- (۲) $\frac{34}{13}$
- (۳) $\frac{68}{6}$
- (۴) $\frac{68}{13}$

۴۹- مشتق سونی تابع $z = \text{Ln} \sqrt{x^2 + y^2}$ در نقطه $p(1, 1)$ و در جهت نیمساز ربع اول محورها مختصات کدام است؟

- (۱) ۱
- (۲) $\sqrt{2}$
- (۳) ۲
- (۴) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

۵۰- طول مستطیلی ۳۰ متر است و با سرعت ۴ متر در ثانیه در حال کاهش است، عرض این مستطیل ۲۰ متر است و با سرعت ۵ متر در ثانیه بزرگ می‌شود، محیط و مساحت آن به ترتیب با چه سرعتی در ثانیه تغییر می‌کنند؟

- (۱) ۳۰ و ۲۰
- (۲) ۳۵ و ۱
- (۳) ۲ و ۷۰
- (۴) ۱۵ و ۱۰

حافظ

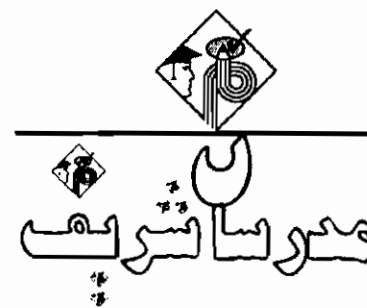
مولوی

سخن‌شناس نئی جان من خطا اینجاست

ای دو صد لعنت بر این تقلید باد

جو بشنوی سخن اهل دل مگو که خطاست

خلق را تقلیدشان بر بساد داد



فصل دوم

«رویه‌ها، خم‌ها و توابع برداری»

رویه‌ها

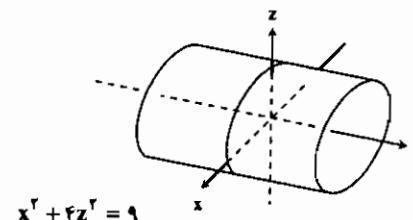
رویه‌ها نمودار تابع دو متغیره هستند. رویه‌ها اطلاعاتی در مورد آنگ تفریر، نقاط اکسترمم، وجود ریشه و ... در اختیار ما می‌گذارند. همچنین رویه‌ها به عنوان مرزهای نواحی فضایی به کار می‌روند. در اینجا می‌خواهیم رویه‌هایی را که در عمل بیشتر به کار می‌روند و اهمیت بیشتری نیز دارند را معرفی و مورد بررسی قرار دهیم.

استوانه

در بین تمامی رویه‌ها، رویه‌ای که ترسیم و نوشتن معادله آن از همه ساده‌تر است، استوانه می‌باشد (به جز صفحه). در واقع یک استوانه، رویه‌ای است متشکل از همه خطوطی که از یک خم واقع در صفحه می‌گذرند و با خط ثابتی موازی‌اند.

به طور مثال شکل زیر نشان‌دهنده استوانه‌ای است متشکل از خطهای موازی با محور Z و گذرنده از خم $y = x^2$. توجه کنید که در شکل زیر مقاطعی از استوانه که بر محور Z عمودند، سهمی هستند. به طور کلی استوانه می‌تواند هر نوع مقطعی داشته باشد.

نکته ۱: به طور کلی هر خم $f(x, y) = c$ واقع در صفحه XY استوانه‌ای را مشخص می‌کند که موازی محور Z می‌باشد و معادله استوانه همان $f(x, y) = c$ است. و به طور مشابه $f(x, z) = c$ استوانه‌ای است موازی با محور Y و $f(y, z) = c$ استوانه‌ای است موازی محور X ها.



مثال ۱: معادله $x^2 + y^2 = 1$ مشخص کننده استوانه مستدیری است متشکل از خطهای موازی محور Z و گذرنده از دایره $x^2 + y^2 = 1$ واقع در صفحه xy و معادله $x^2 + y^2 = 9$ استوانه‌ای بیضوی است که خطهای موازی محور y ها و گذرنده از بیضی $x^2 + y^2 = 9$ واقع در صفحه xz آن را می‌سازند.

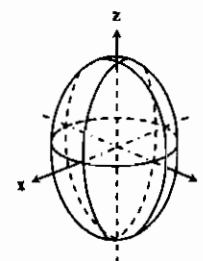
رویه‌های درجه دوم

رویه‌های درجه دوم رویه‌هایی هستند که معادلاتشان ترکیبی از جملات درجه دوم و جملات درجه اول و مقادیر ثابت است. بنابراین معادله آنها در حالت کل به صورت زیر است:

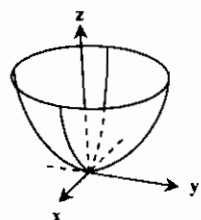
$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Eyz + Fzx + Gx + Hy + Iz + J = 0$$

که پس از دوران به اندازه مناسب و مربع کردن آن، رویه به یکی از حالات زیر تبدیل می‌شود:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad (\text{بیضی گون (بیضی وار)})$$



محورهای مختصات را نقاط $(\pm a, 0, 0)$ ، $(0, \pm b, 0)$ و $(0, 0, \pm c)$ قطع می‌کند و در داخل مکعب مستطیل زیر: $|x| \leq a, |y| \leq b, |z| \leq c$ قرار دارد. چون در معادله این رویه فقط توان زوج X، Y و Z وجود دارد لذا رویه نسبت به صفحات متقارن است. مقطعی آن با صفحات مختصات بیضی شکل هستند. وقتی دو قطر از سه نیم‌قطر a، b و c با هم برابر باشند، این رویه یک بیضیوار دورانی خواهد بود، و وقتی $a = b = c$ یک کره خواهد بود. و در حالت کلی حجم آن برابر $\frac{4}{3}\pi abc$ می‌باشد.

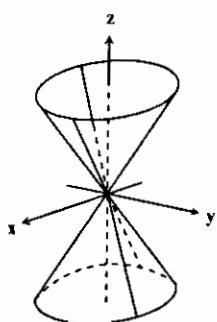


$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad (\text{ب) سهمیوار بیضوی})$$

نسبت به صفحات $x=0$ و $y=0$ متقارن می‌باشد. تنها نقطه تقاطع آن با محورها مبدأ است. اگر $c > 0$ رویه در بالای صفحه XY واقع است و اگر $c < 0$ رویه در پایین صفحه XY واقع است. مقاطع این رویه با صفحات مختصات سهمی است.

نکته ۲: هرگاه در معادله فوق $a = b$ باشد، معادله را سهمیوار مستدیر یا دورانی می‌گویند. مقطعی آن با صفحه‌های شامل محور Z، سهمی‌هایی هستند قابل انطباق بر هم که کانون مشترکشان در نقطه $(0, 0, \frac{a^2}{4c})$ قرار دارد. آنتن‌هایی که در تلسکوپ رادیویی، ردیاب ماهواره‌ای و ... به کار می‌روند اغلب به شکل سهمیوار مستدیر هستند.

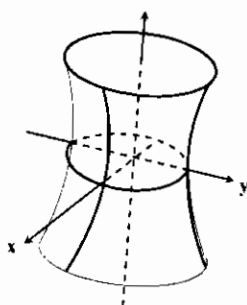
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad (\text{ج) مخروط بیضوی})$$



نسبت به سه صفحه مختصات متقارن است. اگر $a = b$ این مخروط یک مخروط مستدیر قائم است.

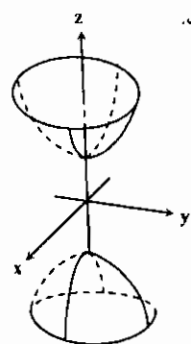
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1 \quad (\text{د) هذلولیوار یکپارچه})$$

نسبت به هر یک از سه صفحه مختصات متقارن است. مقاطع آن با صفحه $x=0$ و $y=0$ هذلولی ولی با صفحه $z=0$ بیضی است.



این رویه همبند است، یعنی بدون خارج شدن از رویه می‌توان از هر نقطه واقع بر آن به هر نقطه دیگر واقع بر آن رفت. به همین دلیل آن را یکپارچه می‌نامند. اگر $a = b$ این هذلولی‌وار، یک رویه دورانی است.

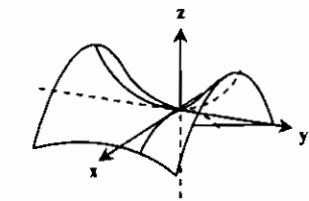
$$\frac{z^2}{c^2} - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (\text{ه) هذلولیوار دو پارچه})$$



نسبت به هر صفحه مختصات متقارن است. صفحه $z=0$ این رویه را قطع نمی‌کند و مقاطع آن با صفحات $x=0$ و $y=0$ هذلولی است. این رویه متشکل از دو قسمت جداگانه است. یکی بالای صفحه $z=c$ و دیگری پایین صفحه $z=-c$. به همین دلیل به آن دو پارچه می‌گویند.

نکته ۳: معادلات هذلولیوار یکپارچه و دو پارچه از لحاظ تعداد جملات منفی در طرف چپ، وقتی طرف راست +1 است، با هم فرق دارند. در واقع تعداد جملات منفی برابر تعداد پارچه‌های هذلولیوار است. و اگر معادلات این دو را با معادله مخروط مقایسه کنید، می‌بینید که با قرار دادن صفر به جای یک در این دو معادله، معادله یک مخروط به دست می‌آید. این مخروط در واقع مجانبهای هر دو هذلولیوار است.

(و سهمیوار هذلولوی $\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = \frac{z}{c}$)



نسبت به صفحات $x=0$ و $y=0$ تقارن دارد. در صفحه $x=0$ سهمی به طرف بالا باز می‌شود و رأس آن در مبدأ است ولی در صفحه $y=0$ سهمی به طرف پایین باز می‌شود و رأس آن نیز در مبدأ است.

نکته ۴: در نزدیکی مبدأ رویه به شکل زین اسب است. از نظر شخصی که بر روی این رویه در صفحه yz حرکت کند، مبدأ نقطه مینیمم است ولی اگر شخص در صفحه xz حرکت کند، مبدأ نقطه ماکسیمم به نظرش می‌رسد. چنین نقطه‌ای را نقطه زینی یا مینیماکس رویه می‌گویند.

به طور کلی اگر نمایش رویه به صورت $Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dx + Ey + Fz + G = 0$ باشد آنگاه:

الف) اگر با مربع‌سازی معادله رویه به صورت $A(x-\alpha)^2 + B(y-\beta)^2 + C(z-\gamma)^2 = h$ تبدیل شود آن‌گاه:

اگر $ABC = 0$ رویه، یک رویه استوانه‌ای می‌باشد.

اگر $ABC \neq 0$ و A, B, C هم‌علامت باشند نمایش بیضی‌وار می‌باشد.

و اگر $ABC \neq 0$ و A, B, C هم‌علامت نباشند آن‌گاه:

(i) اگر $ABC > 0$ و $h > 0$ نمایش هذلولی‌وار دو پارچه می‌باشد.

(ii) اگر $ABC < 0$ و $h > 0$ نمایش هذلولی‌وار یک پارچه می‌باشد.

(iii) اگر $h = 0$ آن‌گاه نمایش مخروط می‌باشد.

ب) اگر با مربع‌سازی معادله رویه به حالت $A(x-\alpha)^2 + B(y-\beta)^2 = C(z-\gamma)^2$ باشد آن‌گاه:

اگر $AB = 0$ نمایش رویه استوانه‌ای می‌باشد.

اگر $AB > 0$ نمایش سهمی‌وار بیضوی است.

و اگر $AB < 0$ نمایش سهمی‌وار هذلولی است.

سطح حاصل از دوران

اگر منحنی f را حول خط دلخواه d دوران دهیم، سطح حاصل از دوران را سطح دوار می‌گویند. معمولاً خط d یکی از محورهای مختصات می‌باشد که به آن محور دوران نیز می‌گویند.

هرگاه منحنی $f(x, y) = 0$ (با فرض $y > 0$) را حول محور x ها دوران دهیم، معادله سطح حاصل به صورت $f(x, \sqrt{y^2 + z^2}) = 0$ خواهد بود.

توجه: به طور مشابه معادلات سطوح دوار حاصل از دوران منحنی‌های $f(x, z) = 0$ ، $f(y, z) = 0$ را حول محورهای مختصات می‌توان نوشت.

مثال ۲: معادله رویه‌ای که از دوران منحنی $x^2 + y^2 = 1$ حول محور x ها پدید می‌آید، کدام است؟

(۱) $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ (۲) $x^2 + (y^2 + z^2)^2 = 1$ (۳) $(x^2 + z^2)^2 + y^2 = 1$ (۴) $x^2 + y^2 + z^2 = 1$

پاسخ: گزینه «۲» کافی است به جای y در معادله $\sqrt{y^2 + z^2}$ قرار دهیم. در این صورت:

$x^2 + (\sqrt{y^2 + z^2})^2 = 1 \Rightarrow x^2 + (y^2 + z^2) = 1$

توابع برداری:

تابع برداری F که تابعی از مقدار اسکالر t می‌باشد، به صورت روبرو بیان می‌شود:

$F(t) = f_1(t)\vec{i} + f_2(t)\vec{j} + f_3(t)\vec{k}$

حد توابع برداری:

حد تابع برداری $F(t)$ در نقطه‌ای مانند t_0 به صورت روبرو محاسبه می‌شود:

مثال ۳: تابع $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ با ضابطه $F(t) = \cos t \vec{i} + \sin t \vec{j} + t \vec{k}$ مفروض است. حد تابع در نقطه $t_0 = \frac{\pi}{4}$ کدام است؟

(۱) حد موجود نیست. (۲) $\frac{\sqrt{2}}{2}(\vec{i} + \vec{j} + \vec{k})$ (۳) $\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{i} + \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{j} + t \vec{k}$ (۴) $\frac{2}{2}$

پاسخ: گزینه «۳»

پیوستگی تابع برداری $F(t)$

هرگاه هر سه حد $f_1(t)$ و $f_2(t)$ ، $f_3(t)$ در نقطه‌ای مانند t_0 موجود باشد و برای تابع برداری $\vec{F}(t)$ در نقطه t_0 رابطه زیر را داشته باشیم، می‌گوییم تابع $F(t)$ در نقطه $t = t_0$ پیوسته است:

$\lim_{t \rightarrow t_0} \vec{F}(t) = \vec{F}(t_0)$

مثال ۴: به ازای چه مقادیری از a تابع $f(t) = \begin{cases} \sin t \vec{i} + a(t+\pi)\vec{j} + \frac{t}{t} \vec{k} & t \neq 0 \\ \vec{j} + \vec{k} & t = 0 \end{cases}$ در نقطه $t = 0$ پیوسته است؟

(۱) 0 (۲) $\frac{1}{2}$ (۳) 1 (۴) $\frac{2}{2}$

پاسخ: گزینه «۲»

$\lim_{t \rightarrow 0} F(t) = \lim_{t \rightarrow 0} (\sin t)\vec{i} + \lim_{t \rightarrow 0} a(t+\pi)\vec{j} + \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{t} \vec{k} = \sin 0 \vec{i} + a(\pi)\vec{j} + \vec{k} = F(0) \Rightarrow \sin 0 \vec{i} + a\pi \vec{j} + \vec{k} = \vec{j} + \vec{k} \Rightarrow a\pi = 1 \Rightarrow a = \frac{1}{\pi}$

مشتق توابع برداری:

مشتق توابع برداری $F(t) = f_1(t)\vec{i} + f_2(t)\vec{j} + f_3(t)\vec{k}$ در نقطه $t = t_0$ برابر $F'(t_0) = f_1'(t_0)\vec{i} + f_2'(t_0)\vec{j} + f_3'(t_0)\vec{k}$ می‌باشد.

مثال ۵: مشتق تابع $F(t) = \cos t \vec{i} + \sin t \vec{j} + e^t \vec{k}$ در نقطه $t = 0$ کدام است؟

(۱) $\vec{i} + \vec{k}$ (۲) $\vec{j} + \vec{k}$ (۳) $\vec{i} + \vec{j}$ (۴) $\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$

پاسخ: گزینه «۲»

قواعد مشتق‌گیری از توابع برداری

اگر f و g توابعی مشتق‌پذیر در نقطه t باشند، داریم:

۱) $[f_1(t), f_2(t)]' = f_1'(t), f_2'(t) + f_1(t) f_2'(t)$

۲) $(f \circ g)'(t) = f'[g(t)]g'(t)$

نکته ۵: اگر طول تابع برداری $F(t)$ عددی ثابت باشد، آنگاه بردار مشتق $F'(t)$ یعنی $F'(t)$ بر آن عمود است و در این حالت می‌دانیم: $F(t) \cdot F'(t) = 0$ می‌باشد و بالعکس اگر $F(t) \cdot F'(t) = 0$ باشد آنگاه می‌توانیم نتیجه بگیریم طول بردار $F(t)$ عددی ثابت است. به عنوان مثال برای تابع $F(t) = (\sin t, \cos t, 1)$ داریم: $F(t) \cdot F'(t) = \sin t \cos t - \sin t \cos t + 0 = 0$

* تذکر ۱: انتگرالهای معین و نامعین تابع برداری $F(t)$ مانند قوانین انتگرالها برای توابع اسکالر است.

طول قوس منحنی‌های فضایی

طول قوس تابع $F(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$ در فاصله t_1 تا t_2 از رابطه زیر محاسبه می‌گردد:

$S = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2} dt$

مثال ۶: طول قوس منحنی $F(t) = (e^t \cos t, e^t \sin t, e^t)$ از $t = 0$ تا $t = 1$ کدام است؟

(۱) $\frac{\sqrt{2}(e-1)}{2}$ (۲) $\sqrt{2}(e-1)$ (۳) $\sqrt{2}(e+1)$ (۴) $\sqrt{2}(e-1)$

پاسخ: گزینه «۴»

$$S = \int_0^1 \sqrt{(e^t \cos t - e^t \sin t)^2 + (e^t \sin t + e^t \cos t)^2 + (e^t)^2} dt$$

$$= \int_0^1 \sqrt{e^{2t} \cos^2 t + e^{2t} \sin^2 t - 2e^{2t} \sin t \cos t + e^{2t} \sin^2 t + e^{2t} \cos^2 t + 2e^{2t} \sin t \cos t + e^{2t}}$$

$$= \int_0^1 \sqrt{e^{2t} (\sin^2 t + \cos^2 t + 1)} dt = \int_0^1 \sqrt{2e^{2t}} dt = \sqrt{2} \int_0^1 e^t dt = \sqrt{2} [e^t]_0^1 = \sqrt{2}(e-1)$$

تعریف بردارهای سرعت، شتاب بردارهای یکانی مماس و قائم

اگر C یک منحنی فضایی باشد که توسط معادله روبرو بیان گردد:
 و ذره‌ای روی این منحنی در حرکت باشد، اگر متغیر t زمان در نظر گرفته شود $R(t)$ را می‌توان معادله مسیر این ذره در نظر گرفت در این صورت سرعت لحظه‌ای این ذره به صورت زیر بیان می‌گردد:

$$V(t) = \frac{dR}{dt} = f'_1(t)\bar{i} + f'_2(t)\bar{j} + f'_3(t)\bar{k}$$

و اندازه سرعت با استفاده از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$|V(t)| = \sqrt{[f'_1(t)]^2 + [f'_2(t)]^2 + [f'_3(t)]^2}$$

تذکره ۲: توجه شود که اندازه سرعت در واقع همان عبارت زیر انتگرال در محاسبه طول قوس می‌باشد.

مثال ۷: حرکت ذره‌ای روی منحنی با معادله به صورت $R(t) = \bar{i} - 4t^2\bar{j} + 2t^2\bar{k}$ انجام می‌گیرد، مقدار سرعت و شتاب ذره به ترتیب کدام است؟

(۱) ۱۰ و صفر (۲) ۶t و ۱ (۳) ۸t و ۸ (۴) ۱۰t و ۱۰

پاسخ: گزینه «۴»

$$\bar{V}(t) = \bar{R}'(t) = -8t\bar{j} + 4t\bar{k} \Rightarrow |V(t)| = \sqrt{(-8t)^2 + (4t)^2} = 10t$$

$$\bar{a}(t) = \bar{V}'(t) = -8\bar{j} + 4\bar{k} \Rightarrow |\bar{a}(t)| = \sqrt{(-8)^2 + (4)^2} = 10$$

برداریک مماس

برداری است که در هر لحظه بر C مماس بوده و جهت آن همواره در جهت حرکت ذره می‌باشد و مقدار آن از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$\bar{T}(t) = \frac{R'(t)}{|R'(t)|}$$

برداریک قائم

برداری $\bar{N}(t) = \frac{\bar{T}'(t)}{|\bar{T}'(t)|}$ که در هر لحظه بر بردار $\bar{T}(t)$ (و منحنی C) عمود است را برداریک قائم اول می‌نامیم و بردار $\bar{B} = \bar{T} \times \bar{N}$ را که در هر لحظه بر صفحه دو بردار \bar{T} و \bar{N} عمود است، را برداریک قائم دوم می‌نامیم. بردار یکه قائم دوم را می‌توان از فرمول زیر به دست آورد:

$$\bar{B} = \frac{R'(t) \times R''(t)}{|R'(t) \times R''(t)|}$$

شتاب: بردار شتاب لحظه‌ای ذره روی منحنی C از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$\bar{a}(t) = \bar{V}'(t) = \bar{R}''(t) = f''_1(t)\bar{i} + f''_2(t)\bar{j} + f''_3(t)\bar{k}$$

و اندازه شتاب برابر است با:

$$|\bar{a}(t)| = \sqrt{[f''_1(t)]^2 + [f''_2(t)]^2 + [f''_3(t)]^2}$$

مثال ۸: برداریک مماس بر منحنی $R(t) = (\cos t + t \sin t)\bar{i} + (\sin t - t \cos t)\bar{j}$ کدام است؟

(۱) $-\cos t \bar{i} + \sin t \bar{j}$ (۲) $-\cos t \bar{i} - \sin t \bar{j}$ (۳) $\cos t \bar{i} + \sin t \bar{j}$ (۴) $\cos t \bar{i} - \sin t \bar{j}$

پاسخ: گزینه «۳»

$$\bar{R}'(t) = \sqrt{(t \cos t)^2 + (t \sin t)^2} = \sqrt{t^2 (\sin^2 t + \cos^2 t)} = t$$

$$\Rightarrow \bar{T}(t) = \frac{\bar{R}'(t)}{|\bar{R}'(t)|} = \frac{t \cos t \bar{i} + t \sin t \bar{j}}{t} = \cos t \bar{i} + \sin t \bar{j}$$

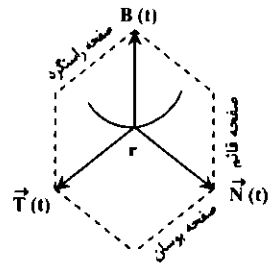
مثال ۹: اگر $\bar{R}(t) = \cos t \bar{i} + \sin t \bar{j}$ باشد، آنگاه بردار یکه قائم اصلی (اول) منحنی برابر کدام است؟

(۱) $\bar{R}'(t)$ (۲) $-\bar{R}'(t)$ (۳) $1 - \bar{R}'(t)$ (۴) $1 + \bar{R}'(t)$

پاسخ: گزینه «۲»

$$\bar{T}(t) = \frac{R'(t)}{|R'(t)|} = \frac{-\sin t \bar{i} + \cos t \bar{j}}{\sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t}} = -\sin t \bar{i} + \cos t \bar{j}$$

$$N(t) = \frac{T'(t)}{|T'(t)|} = \frac{-\cos t \bar{i} - \sin t \bar{j}}{\sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t}} = -(\cos t \bar{i} + \sin t \bar{j}) = -\bar{R}(t)$$



نکته ۶:

صفحه بوسان: صفحه‌ای که از $r(t)$ گذشته و بر $\bar{B}(t)$ عمود است.
صفحه قائم: صفحه‌ای که از $r(t)$ گذشته و بر $\bar{T}(t)$ عمود است.
صفحه راستگرد: صفحه‌ای که از $r(t)$ گذشته و بر $\bar{N}(t)$ عمود است.

انحنای خمیدگی منحنی C

اگر $\bar{T}(t)$ برداریک مماس بر منحنی C باشد با معادله $R(t) = f_1(t)\bar{i} + f_2(t)\bar{j} + f_3(t)\bar{k}$ و S طول قوس منحنی باشد، بردار انحنای C به صورت زیر بیان می‌شود:

$$\bar{k}(t) = \frac{d\bar{T}}{ds}$$

و اندازه انحنای منحنی با رابطه زیر قابل محاسبه است:

$$k = \frac{|\bar{R}'(t) \times \bar{R}''(t)|}{|\bar{R}'(t)|^3}$$

تذکره ۳: خمیدگی خط راست برابر صفر است.

مثال ۱۰: انحنای منحنی $R(t) = \cos t \bar{i} + \sin t \bar{j} + t\bar{k}$ کدام است؟

(۱) $\frac{1}{2}$ (۲) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (۳) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (۴) $\sqrt{2}$

پاسخ: گزینه «۲»

$$R'(t) = -\sin t \bar{i} + \cos t \bar{j} + \bar{k} \Rightarrow |R'(t)| = \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t + 1} = \sqrt{2}$$

$$\bar{R}''(t) = -\cos t \bar{i} - \sin t \bar{j}$$

$$\bar{R}'(t) \times \bar{R}''(t) = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ -\sin t & \cos t & 1 \\ -\cos t & -\sin t & 0 \end{vmatrix} = \sin t \bar{i} - \cos t \bar{j} + \bar{k} \Rightarrow |\bar{R}'(t) \times \bar{R}''(t)| = \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t + 1} = \sqrt{2}$$

$$k = \frac{|\bar{R}'(t) \times \bar{R}''(t)|}{|\bar{R}'(t)|^3} = \frac{\sqrt{2}}{(\sqrt{2})^3} = \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{2}$$

نکته ۷: اگر C با ضابطه $y = f(x)$ مشخص شود مقدار انحنای C به صورت زیر بیان می‌شود:

$$k = \frac{|y''|}{[1 + (y')^2]^{3/2}}$$

نکته ۸: اگر C با ضابطه $x = f(y)$ بیان گردد، مقدار انحنای C به وسیله رابطه زیر محاسبه می‌شود:

$$k = \frac{|x''|}{[1 + (x')^2]^{3/2}}$$

شعاع انحنای شعاع انحنای یا شعاع خمیدگی از رابطه $R = \frac{1}{k}$ به دست می‌آید.

تذکره ۴: خمیدگی یک دایره با شعاع r برابر $\frac{1}{r}$ می‌باشد، یعنی افزایش شعاع دایره از خمیدگی آن کاسته می‌شود.

مثال ۱۱: عرض نقطه‌ای روی منحنی $y = e^x$ که در آن نقطه شعاع انحنای منحنی مینیمم مقدار خود را دارد، کدام است؟

- (۱) $-\frac{\ln 2}{2}$ (۲) $\sqrt{2}$ (۳) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (۴) $\ln 2$

پاسخ: گزینه «۳»

$$y' = e^x, y'' = e^x \Rightarrow k = \frac{y''}{|1 + y'|^2} = \frac{e^x}{(1 + e^{2x})^2}$$

$$R = \frac{1}{k} = \frac{(1 + e^{2x})^2}{e^x} \Rightarrow \frac{\partial R}{\partial x} = \frac{2(1 + e^{2x})^{\frac{1}{2}} \times 2e^{2x} \times e^x - e^x \times (1 + e^{2x})^{\frac{2}{2}}}{e^{2x}} = 0$$

$$\Rightarrow e^x(1 + e^{2x})^2 [2e^{2x} - (1 + e^{2x})] \Rightarrow 2e^{2x} = 1 \Rightarrow e^{2x} = \frac{1}{2} \Rightarrow x = -\frac{\ln 2}{2} \Rightarrow y = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

نکته ۹: اگر معادله C به صورت خم پارامتری $\vec{R}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j}$ بیان گردد آنگاه انحنای به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$k = \frac{|x'(t)y''(t) - y'(t)x''(t)|}{[(x'(t))^2 + (y'(t))^2]^{\frac{3}{2}}}$$

مثال ۱۲: خمیدگی منحنی با ضابطه $x(t) = 2\cos^2 t$ و $y(t) = 2\sin^2 t$ در نقطه $t = \frac{\pi}{4}$ کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{3}$ (۲) $\frac{2}{3}$ (۳) $\frac{1}{2}$ (۴) $\frac{2}{3}$

پاسخ: گزینه «۱»

$$x'(t) = -4\cos t \sin t \Rightarrow x'(\frac{\pi}{4}) = -4 \times (\frac{\sqrt{2}}{2}) \times (\frac{\sqrt{2}}{2}) = -4$$

$$x''(t) = -12\cos t \sin^2 t - 6\cos^3 t \Rightarrow x''(\frac{\pi}{4}) = -12 \times (\frac{\sqrt{2}}{2})^2 - 6 \times (\frac{\sqrt{2}}{2})^3 = -9\sqrt{2}$$

$$y'(t) = 4\sin t \cos t \Rightarrow y'(\frac{\pi}{4}) = 4 \times (\frac{\sqrt{2}}{2}) \times (\frac{\sqrt{2}}{2}) = 4$$

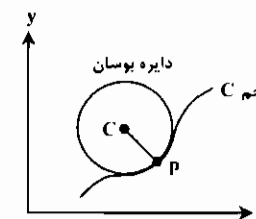
$$y''(t) = 12\cos^2 t \sin t - 6\cos^2 t \Rightarrow y''(\frac{\pi}{4}) = 12 \times (\frac{\sqrt{2}}{2})^2 \times (\frac{\sqrt{2}}{2}) - 6 \times (\frac{\sqrt{2}}{2})^2 = 3\sqrt{2}$$

$$k(\frac{\pi}{4}) = \frac{|-4 \times 3\sqrt{2} - 4 \times (-9\sqrt{2})|}{[4^2 + (-4)^2]^{\frac{3}{2}}} = \frac{|-12\sqrt{2} + 36\sqrt{2}|}{27} = \frac{24\sqrt{2}}{27} = \frac{8\sqrt{2}}{9}$$

نکته ۱۰: هرگاه خم C به فرم قطبی $r = f(\theta)$ بیان گردد، رابطه انحنای به صورت زیر می‌باشد:

$$k(\theta) = \frac{|r^2 + 2r'^2 - rr''|}{[(r)^2 + (r')^2]^{\frac{3}{2}}}$$

دایره بوسان



خم C و نقطه دلخواه p روی آن را در صفحه x, y در نظر بگیرید، اگر $k(p) \neq 0$ باشد (یعنی انحنای نقطه p صفر نباشد)، دایره‌ای که در نقطه p به خم C مماس است و مرکز آن در جهت تقعر C قرار دارد و شعاع آن برابر شعاع انحنای

خم $(R = \frac{1}{k(p)})$ است را دایره بوسان می‌نامیم.

اگر منحنی C به صورت $y = f(x)$ بیان گردد آنگاه مرکز دایره انحنای از رابطه زیر محاسبه می‌شود:

$$x_C = x(p) - \frac{y'(p)(1 + y'^2(p))}{y''(p)} \quad \text{و} \quad y_C = y(p) + \frac{1 + y'^2(p)}{y''(p)}$$

تذکره ۵: اگر خم C به صورت $y = f(x)$ بیان گردد، در نقطه تماس y' و y'' برای خم و دایره برابر است.

مثال ۱۳: دایره‌ای بر منحنی $y = x^2 + 1$ در نقطه $(1, 2)$ مماس است و مقدار y'' برای هر دو منحنی در آن نقطه برابر است، شعاع دایره کدام است؟

- (۱) $\frac{2\sqrt{2}}{3}$ (۲) $\frac{2\sqrt{5}}{5}$ (۳) $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ (۴) $\frac{5\sqrt{5}}{2}$

پاسخ: گزینه «۴» با توجه به تذکره فوق شعاع دایره در واقع همان شعاع انحنای خم است:

$$y = x^2 + 1 \Rightarrow y' = 2x, y'' = 2, R = \frac{(1 + y')^2}{|y''|} = \frac{(1 + 2)^2}{2} = \frac{5\sqrt{5}}{2}$$

تاب منحنی

انحراف خم از صفحه مماس در هر نقطه تاب نامیده می‌شود اگر \vec{N} و \vec{B} به ترتیب بردارهای قائم یکنای اول و دوم باشند عددی مانند τ وجود دارد که در تساوی زیر صدق می‌کند:

$$\frac{dB}{dS} = -\tau N$$

τ را تاب منحنی می‌گویند و اندازه تاب برابر $|\tau| = \pm \left| \frac{dB}{dS} \right|$ می‌باشد و اگر منحنی C با معادله $\vec{R}(t)$ مشخص می‌شود آنگاه داریم:

$$\tau = \frac{|\vec{R}'(t) \times \vec{R}''(t) \cdot \vec{R}'''(t)|}{|\vec{R}'(t) \times \vec{R}''(t)|^2}$$

تذکره ۶: اگر خم در یک صفحه واقع شود آنگاه مقدار تاب صفر است.

تذکره ۷: سه بردار $R'(t), R''(t)$ و $R'''(t)$ بر یک صفحه خواهند بود. اگر و تنها اگر $(R'(t) \times R''(t)) \cdot R'''(t) = 0$ باشد.

مثال ۱۴: تاب خم $R(t) = (2 + \cos t, 2 + \sin t, \cos t + \sin t)$ در نقطه $t = 1$ کدام است؟

- (۱) صفر (۲) ۱ (۳) $\sin 1$ (۴) $\cos 1$

پاسخ: گزینه «۱» اگر t را بین پارامترهای yx و z حذف کنیم، داریم:

به عبارت دیگر خم بر یک صفحه واقع است و تاب برابر صفر است.

حرکت در مختصات قطبی

وقتی ذره‌ای در مختصات قطبی حرکت کند، سرعت و شتاب جسم را برحسب بردارهای واحد زیر می‌توان بیان کرد:

$$u_r = (\cos \theta)\vec{i} + (\sin \theta)\vec{j}$$

$$u_\theta = -(\sin \theta)\vec{i} + (\cos \theta)\vec{j}$$

بردار u_r در امتداد بردار R می‌باشد، به طوریکه داریم $R = ru_r$ و بردار u_θ بر u_r عمود است و جهت آن در راستای افزایش θ می‌باشد.

با مشتق‌گیری از u_r و u_θ نسبت به زمان به دست می‌آید:

$$\frac{du_r}{dt} = \frac{du_r}{d\theta} \cdot \frac{d\theta}{dt} = (-\sin \theta \frac{d\theta}{dt}, \cos \theta \frac{d\theta}{dt}) = \frac{d\theta}{dt} u_\theta$$

$$\frac{du_\theta}{dt} = \frac{du_\theta}{d\theta} \cdot \frac{d\theta}{dt} = (-\cos \theta \frac{d\theta}{dt}, -\sin \theta \frac{d\theta}{dt}) = -\frac{d\theta}{dt} u_r$$

بردار سرعت و شتاب بر حسب u_r و u_θ از فرمول‌های زیر به دست می‌آیند:

$$V = \frac{dr}{dt} u_r + r \frac{d\theta}{dt} u_\theta$$

$$a = \left(\frac{d^2 r}{dt^2} - r \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 \right) u_r + \left(r \frac{d^2 \theta}{dt^2} + 2 \frac{dr}{dt} \frac{d\theta}{dt} \right) u_\theta$$

تست‌های طبقه‌بندی شده فصل دوم

۱- انحنای منحنی $R(t) = e^t \cos t \mathbf{i} + e^t \sin t \mathbf{j} + e^t \mathbf{k}$ در $t = 0$ کدام است؟ (مکانیک - سراسری ۷۸)

(۱) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (۲) $\frac{\sqrt{2}}{3}$ (۳) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (۴) $\frac{\sqrt{3}}{3}$

۲- منحنی مولد رویهٔ دوار به معادله $x^2 + z^2 = e^{2y}$ کدام است؟ (مهندسی هسته‌ای - سراسری ۷۸)

(۱) $\begin{cases} z = e^{2y} \\ x = 0 \end{cases}$ (۲) $\begin{cases} z^2 = e^{2y} \\ x = 0 \end{cases}$ (۳) $\begin{cases} z^2 = e^{2y} \\ x = 0 \end{cases}$ (۴) $\begin{cases} z = e^{2y} \\ y = 0 \end{cases}$

۳- انحنای منحنی $r(t) = (\frac{t^2}{3}, \frac{t^2}{3}, 0)$ ، $t > 0$ برابر با کدام رابطه است؟ (عمران - سراسری ۷۹)

(۱) $k = \frac{1}{\sqrt{t^2+1}}$ (۲) $k = \frac{1}{(t^2+1)^2}$ (۳) $k = \frac{1}{(t^2+1)^2}$ (۴) $k = \frac{1}{t(t^2+1)^2}$

۴- انحنای منحنی $\vec{R}(t) = (\sin t, \cos t, \frac{1}{t})$ در نقطه $t = 0$ کدام است؟ (مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری - سراسری ۷۹)

(۱) $\frac{1}{2}$ (۲) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (۳) $\sqrt{2}$ (۴) ۲

۵- بردار یکانی قائم بر ماریج به معادلات $x = 2 \cos 2t$ و $y = \sin 2t$ ، $z = 2t$ به کدام صورت است؟ (مهندسی هسته‌ای - سراسری ۷۹)

(۱) $-\frac{4}{5}i \sin 2t + \frac{4}{5}j \cos 2t + \frac{2}{5}k$ (۲) $-\frac{4}{5}i \cos 2t + \frac{4}{5}j \sin 2t - \frac{2}{5}k$ (۳) $-\cos 2t - j \sin 2t$ (۴) $i \sin 2t - j \cos 2t$

۶- می‌دانیم بردار سرعت متحرکی در مختصات قطبی به صورت $V = U_r \frac{dr}{dt} + U_\theta r \frac{d\theta}{dt}$ است. مؤلفه شتاب آن در امتداد شعاع حاصل قطبی کدام است؟ (مهندسی هسته‌ای - سراسری ۷۹)

(۱) $\frac{d^2r}{dt^2}$ (۲) $\frac{d^2r}{dt^2} + \frac{dr}{dt}$ (۳) $\frac{d^2r}{dt^2} + r(\frac{d\theta}{dt})^2$ (۴) $\frac{d^2r}{dt^2} - r(\frac{d\theta}{dt})^2$

۷- اگر نیروی مؤثر بر متحرک با بردار موضع \vec{R} ، نیروی جاذبه‌ای باشد، آنگاه بردار $\vec{R} \times \frac{d\vec{R}}{dt}$ چگونه است؟ (مهندسی هسته‌ای - سراسری ۷۹)

(۱) بردار ثابت (۲) با افزایش نیرو کاهش دارد. (۳) با افزایش نیرو و افزایش دارد. (۴) فقط اندازه آن ثابت

۸- شعاع انحنای منحنی $x^2 + xy + y^2 = 3$ در نقطه $(1, 1)$ کدام است؟ (مکانیک - سراسری ۸۰)

(۱) ۶ (۲) $4\sqrt{3}$ (۳) $3\sqrt{2}$ (۴) $\frac{5\sqrt{10}}{3}$

۹- انحنای سهمی به معادله $y = x^2$ در رأس سهمی کدام است؟ (ژئوفیزیک - سراسری ۸۰)

(۱) $\frac{1}{2}$ (۲) ۱ (۳) $\frac{3}{2}$ (۴) ۲

۱۰- انحنای بیضی به معادله $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ در نقطه $(3, 0)$ کدام است؟ (مهندسی هسته‌ای - سراسری ۸۰)

(۱) $\frac{2}{9}$ (۲) $\frac{3}{16}$ (۳) $\frac{4}{9}$ (۴) $\frac{3}{4}$

۱۱- انحنای منحنی $y = \ln x$ در نقطه $(1, 0)$ کدام مقدار است؟ (معدن - سراسری ۸۱)

(۱) $\sqrt{2}$ (۲) $\frac{\sqrt{2}}{4}$ (۳) $2\sqrt{2}$ (۴) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

۱۲- معادله صفحه عمود بر منحنی $x = \sin t$ و $y = \sin t$ ، $z = \cos(2t)$ در نقطه نظیر $t = \frac{\pi}{4}$ کدام است؟ (ریاضی - سراسری ۸۱)

(۱) $x + y - 2z = 2$ (۲) $\sqrt{2}x + \sqrt{2}y - 4z = 2$ (۳) $\sqrt{2}x + \sqrt{2}y - 2z = 2$ (۴) $x + y - 2\sqrt{2}z = 2$

۱۳- مکان هندسی نقطه $t \in R$ وقتی $P: \begin{cases} r = 2 \\ \theta = t \\ z = t \end{cases}$ کدام است؟ (ریاضی - سراسری ۸۱)

(۱) استوانه (۲) کره (۳) ماریج مخروطی (۴) ماریج استوانه‌ای

۱۴- اگر $r(t) = (t, \frac{4}{3}t^2, t^2)$ نمایش پارامتری یک منحنی C باشد، به ازای چه مقدار b مثبت، طول منحنی C از $t = 0$ تا $t = b$ برابر ۳۰ واحد است؟ (عمران - سراسری ۸۲)

(۱) $b = 3$ (۲) $b = 4$ (۳) $b = 5$ (۴) $b = 6$

۱۵- اگر V سرعت متحرکی باشد که روی منحنی $x(t) = 3t$ ، $y(t) = 4t$ ، $z(t) = 2t$ حرکت می‌کند، $|V|$ کدام است؟ (مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری - سراسری ۸۲)

(۱) ۵ (۲) $|3t| + |4t| + 2t$ (۳) $\sqrt{7}$ (۴) $\sqrt{25t^2 + 4}$

۱۶- بردار قائم یکی بر منحنی $R(t) = (t^2 - 3t)\mathbf{i} + 3t^2\mathbf{j}$ به ازاء $t = \frac{1}{3}$ کدام است؟ (کامپیوتر - سراسری ۸۲)

(۱) $\frac{4}{5}\mathbf{i} + \frac{3}{5}\mathbf{j}$ (۲) $\frac{3}{5}\mathbf{i} + \frac{4}{5}\mathbf{j}$ (۳) $\frac{4}{5}\mathbf{i} - \frac{3}{5}\mathbf{j}$ (۴) $-\frac{4}{5}\mathbf{i} - \frac{3}{5}\mathbf{j}$

۱۷- معادلهٔ درجه دوم $x^2 + y^2 = a^2$ در فضای سه بعدی معرف کدام رویه است؟ (آمار - سراسری ۸۲)

(۱) کره (۲) استوانه (۳) بیضی‌وار (۴) مخروط

۱۸- اگر قوس s منحنی زنجیری $y = a \cosh(\frac{x}{a})$ از پایین‌ترین نقطه آن سنجیده شده باشد، مقدار $\frac{dy}{dx}$ برابر است با: (ریاضی - سراسری ۸۲)



۱۹- حرکت متحرکی در صفحه xoy با رابطه $R = it \cos t + jt \sin t$ داده شده است. مؤلفه شتاب کدام است؟ (مکانیک - سراسری ۸۲)

(۱) $\frac{1}{\sqrt{t^2+1}}$ (۲) $\frac{t^2}{\sqrt{t^2+1}}$ (۳) $\frac{2t}{\sqrt{t^2+1}}$ (۴) $\frac{t^2+2}{\sqrt{t^2+1}}$

۲۰- اگر متحرکی بر روی منحنی $x(t) = \sin 3t$ و $y(t) = \cos 3t$ و $z(t) = 4t$ حرکت کند، آنگاه نیروی مؤثر در کدام امتداد است؟ (مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری - سراسری ۸۲)

(۱) قائم بر مسیر (۲) بردار سرعت (۳) مماس بر مسیر (۴) برآیند بردار شتاب و سرعت

۲۱- منحنی $\begin{cases} xz = 1 \\ y = 0 \end{cases}$ هادی یک استوانه است، معادلهٔ استوانه کدام است؟ (ژئوفیزیک - سراسری ۸۲)

(۱) $xz = 1$ (۲) $x^2z^2 = 1$ (۳) $x + z = 1$ (۴) $x^2 + z^2 = 1$

۲۲- جزء طول قوس ds برای منحنی با معادلات پارامتری $x = e^t \sin t$ ، $y = e^t \cos t$ برابر است با: (مهندسی هسته‌ای - سراسری ۸۲)

(۱) $e^t dt$ (۲) $te^t dt$ (۳) $re^{t^2}(dt)^2$ (۴) $\sqrt{te^t} dt$

۲۳- اگر $F(t) = \frac{2t}{1+t^2}\mathbf{i} + \frac{1-t^2}{1+t^2}\mathbf{j} + k$ یک تابع برداری باشد، آنگاه زاویه بین $F'(t)$ ، $F(t)$ برابر است با: (مهندسی هسته‌ای - سراسری ۸۲)

(۱) π (۲) $\frac{\pi}{2}$ (۳) $\frac{\pi}{4}$ (۴) $\frac{3\pi}{4}$

۲۴- سرعت یک ذره متحرک در لحظه t در امتداد خطی مستقیم برابر است با $v = v(t) = 3t^2 - 2t + 4$ فاصله بین مواضع ذره در لحظات $t = 2$ و $t = 5$ را بیابید. (معدن - سراسری ۸۲)

- (۱) ۶۰ (۲) ۱۰۸ (۳) ۱۲۰ (۴) ۱۳۲

۲۵- اگر $r: [a, b] \rightarrow R^3$ یک منحنی پارامتری با طول قوس L و $A = \{(t_1, t_2) | r(t_1) = r(t_2)\}$ در این صورت کدام حکم در مورد A صحیح است؟ (ریاضی - سراسری ۸۳)

- (۱) اگر A نامتناهی باشد آنگاه $L = \infty$. (۲) ممکن است A نامتناهی باشد ولی $L < \infty$.
(۳) اگر A متناهی باشد آنگاه $L < \infty$. (۴) همواره A نامتناهی است $L = \infty$.

۲۶- انحنای منحنی C به معادلات پارامتری $x = g(t), y = f(t)$ که در لحظه t در معادلات $x' = 2$ و $y' = 2t$ صدق کند، در لحظه $t = 0$ کدام است؟ (مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری - سراسری ۸۴)

- (۱) $k = 0$ (۲) $k = 1$ (۳) $k = 2$ (۴) $k = \frac{1}{2}$

۲۷- کدام معادله معرف یک مخروط است؟ (مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری - سراسری ۸۴)

- (۱) $x^2 + y^2 = z^2$ (۲) $y^2 = x^2 + z^2$ (۳) $x^2 - 2xy + y^2 = z$ (۴) $x^2 + y^2 + z^2 = zz$

۲۸- اگر $f(t) = (\sin t - t \cos t)j + (\cos t + t \sin t)k$ باشد، مقدار انحنای منحنی در نقطه نظیر $t = \frac{\pi}{3}$ کدام است؟ (MBA - سراسری ۸۴)

- (۱) ۲ (۲) $\frac{\pi}{3}$ (۳) $\frac{\pi}{6}$ (۴) $\frac{2}{\pi}$

۲۹- خمیدگی (یا انحنای) $K(t)$ خم با معادله برداری $r(t) = (t + \cos t)i + (t - \cos t)j + (\sqrt{2} \sin t)k$ در یک نقطه کلی خم برابر است با: (معدن - سراسری ۸۴)

- (۱) $\frac{1}{2}$ (۲) $\frac{1}{2\sqrt{2}}$ (۳) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (۴) $|\sin 2t|$

پاسخنامه تست‌های طبقه‌بندی شده فصل دوم

۱- گزینه «۲» $V(t) = (e^t \cos t - e^t \sin t, e^t \sin t + e^t \cos t, e^t) \Rightarrow V(0) = (1, 1, 1)$

$a(t) = (-re^t \sin t, re^t \cos t, e^t) \Rightarrow a(0) = (0, 2, 1)$

$$\vec{V}(0) \times \vec{a}(0) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = (-1, -1, 2)$$

$$k = \frac{|V \times a|}{|V|^2} = \frac{\sqrt{1+1+4}}{(\sqrt{1+1+1})^2} = \frac{\sqrt{6}}{3\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2}}{3}$$

۲- گزینه «۲» رویه داده شده را با صفحه yz ($x = 0$) تلاقی می‌دهیم در این صورت $z^2 = e^{2y}$

۳- گزینه «۴» $r(t) = (\frac{t^2}{2}, \frac{t^2}{2}, 0) \Rightarrow V(t) = (t^2, t^2, 0) \Rightarrow a(t) = (2t, 2t, 0)$

$$V \times a = \begin{vmatrix} i & j & k \\ t^2 & t^2 & 0 \\ 2t & 2t & 0 \end{vmatrix} = (0, 0, -t^2) \Rightarrow k = \frac{|V \times a|}{|V|^2} = \frac{t^2}{(t^2 + t^2)^2} = \frac{1}{t(1+t^2)^2}$$

۴- گزینه «۳» $R(t) = (\sin t, \cos t, \frac{1}{2}t^2) \Rightarrow V = \frac{dR}{dt} = (\cos t, -\sin t, t) \Rightarrow V(0) = (1, 0, 0)$

$a = \frac{dV}{dt} = (-\sin t, -\cos t, 1) \Rightarrow a(0) = (0, -1, 1)$

$k = \frac{|V \times a|}{|V|^2} = \frac{\sqrt{2}}{1} = \sqrt{2}$ چون دو بردار $V(0)$ و $a(0)$ بر هم عمودند، پس $|V \times a| = |V||a| = \sqrt{2}$ در نتیجه:

۵- گزینه «۳» می‌دانیم بردار قائم واحد اصلی از فرمول $\vec{N} = \frac{\vec{T}'}{|\vec{T}'|}$ به دست می‌آید. بنابراین:

$$R'(t) = (-f \sin 2t, f \cos 2t, r) \Rightarrow |R'(t)| = \Delta \Rightarrow T = \frac{R'(t)}{|R'(t)|} = (\frac{-f}{\Delta} \sin 2t, \frac{f}{\Delta} \cos 2t, \frac{r}{\Delta})$$

$$T' = (\frac{-A}{\Delta} \cos 2t, \frac{-A}{\Delta} \sin 2t, 0) \Rightarrow |T'| = \frac{A}{\Delta} \Rightarrow N = (-\cos 2t, -\sin 2t, 0)$$

۶- گزینه «۴» به حرکت مختصات قطبی صفحه ۹۰ مراجعه کنید.

۷- گزینه «۱» چون تنها نیروی مؤثر بر جسم نیروی جاذبه می‌باشد، لذا بردار مکان در راستای نیرو خواهد بود و داریم:

$$\vec{F} = m\vec{a} = \lambda \vec{R} \Rightarrow \vec{a} = \frac{\lambda}{m} \vec{R}$$

$$\frac{d}{dt}(\vec{R} \times \frac{d\vec{R}}{dt}) = \frac{d\vec{R}}{dt} \times \frac{d\vec{R}}{dt} + \vec{R} \times \frac{d^2\vec{R}}{dt^2} = 0 + \vec{R} \times \vec{a} = \vec{R} \times \frac{\lambda}{m} \vec{R} = \frac{\lambda}{m} (\vec{R} \times \vec{R}) = 0$$
 از طرفی توجه کنید که:

که از رابطه فوق نتیجه می‌شود $\vec{R} \times \frac{d\vec{R}}{dt} = C$. (برای اطلاعات بیشتر به کتاب حساب دیفرانسیل و انتگرال و هندسه تحلیلی مراجعه کنید).

۸- گزینه «۳» ابتدا توجه کنید که:

$$x^2 + xy + y^2 = 2 \Rightarrow 2x + y + xy' + 2yy' = 0 \xrightarrow{y=1, x=1} y' = -1$$

$$2 + y' + y' + xy'' + 2y'y'' + 2yy'' = 0 \xrightarrow{y=1, x=1, y'=-1} y'' = \frac{-2}{2}$$

$$k = \frac{\frac{2}{2}}{(1+1)^2} = \frac{1}{2} \Rightarrow \rho = \frac{1}{k} = 2\sqrt{2}$$

از طرفی $k = \frac{|y''|}{(1+y'^2)^{3/2}}$ بنابراین:

$$y = x^2 \Rightarrow y' = 2x, y'' = 2$$

۹- گزینه «۴» رأس سهمی $y = x^2$ نقطه $(0,0)$ می‌باشد.

$$k = \frac{|y''|}{(1+y'^2)^{3/2}} = \frac{2}{(1+2x)^2} \Big|_{(0,0)} = 2$$

$$x = r \cos t, y = r \sin t, 0 \leq t \leq 2\pi$$

۱۰- گزینه «۴» ابتدا بیضی داده شده را به صورت پارامتری می‌نویسیم:

$$x' = -r \sin t, y' = r \cos t, x'' = -r \cos t, y'' = -r \sin t$$

بنابراین:

$$k = \frac{|x'y'' - x''y'|}{(x'^2 + y'^2)^{3/2}} = \frac{r \sin^2 t + r \cos^2 t}{(r^2 \sin^2 t + r^2 \cos^2 t)^{3/2}} = \frac{r}{r^3} = \frac{1}{r^2}$$

در نتیجه:

$$k = \frac{1}{r^2} \Big|_{t=0} = \frac{1}{4} = \frac{r}{8}$$

نقطه $(2,0)$ در فرم پارامتری به ازای $t = 0$ حاصل می‌شود بنابراین:

$$y = \ln x \Rightarrow y' = \frac{1}{x}, y'' = -\frac{1}{x^2} \Rightarrow y' \Big|_{(1,0)} = 1, y'' \Big|_{(1,0)} = -1$$

۱۱- گزینه «۲» ابتدا توجه کنید که:

$$k = \frac{|y''|}{(1+y'^2)^{3/2}} = \frac{1}{(1+1)^2} = \frac{1}{4} = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

از طرفی:

$$R(t) = (\sin t, \sin t, \cos 2t) \Rightarrow V(t) = (\cos t, \cos t, -2 \sin 2t) \Big|_{t=\frac{\pi}{4}} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, -2 \right)$$

۱۲- گزینه «۲»

به ازای $t = \frac{\pi}{4}$ ، نقطه $P(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0)$ روی منحنی به دست می‌آید. بنابراین معادله صفحه عمودی بر منحنی در این نقطه به صورت زیر است:

$$\frac{\sqrt{2}}{2}(x - \frac{\sqrt{2}}{2}) + \frac{\sqrt{2}}{2}(y - \frac{\sqrt{2}}{2}) - 2(z - 0) = 0 \Rightarrow \sqrt{2}x + \sqrt{2}y - 4z = 2$$

۱۳- گزینه «۴»

$$r(t) = (t, \frac{1}{t}, t^2) \Rightarrow V(t) = (1, -\frac{1}{t^2}, 2t) \Rightarrow |V(t)| = 1 + \frac{1}{t^4} + 4t^2$$

۱۴- گزینه «۳»

$$\Rightarrow \int_0^b \sqrt{|V(t)|} dt = 20 \Rightarrow \int_0^b \sqrt{1 + \frac{1}{t^4} + 4t^2} dt = 20 \Rightarrow \int_0^b (1 + 2t) dt = 20 \Rightarrow b^2 + b = 20 \Rightarrow b = 5$$

$$R(t) = (2t, 4t, 2) \Rightarrow V(t) = R'(t) = (2, 4, 0) \Rightarrow |V(t)| = 20$$

۱۵- گزینه «۱»

۱۶- گزینه «۱» می‌دانیم بردار قائم واحد اصلی از فرمول $\vec{N} = \frac{\vec{T}'}{|\vec{T}'|}$ به دست می‌آید. بنابراین:

$$R(t) = (t^2 - 2t, 2t^2) \Rightarrow V(t) = (2t - 2, 4t) \Rightarrow |V(t)| = 2(t^2 + 1)$$

$$T(t) = \frac{V(t)}{|V(t)|} = \left(\frac{t^2 - 1}{t^2 + 1}, \frac{2t}{t^2 + 1} \right) \Rightarrow T'(t) = \left(\frac{4t}{(t^2 + 1)^2}, \frac{2 - 2t^2}{(t^2 + 1)^2} \right)$$

$$\Rightarrow T' \Big|_{t=1} = \left(\frac{4}{4}, \frac{0}{4} \right) = (1, 0), |T' \Big|_{t=1}| = \frac{4}{4} \Rightarrow \vec{N} = \frac{T'}{|T'|} = \left(\frac{1}{1}, \frac{0}{1} \right)$$

۱۷- گزینه «۲»

۱۸- گزینه «۱» منظور از پایین‌ترین نقطه، نقطه $(0, a)$ روی منحنی می‌باشد، که طول قوس از این نقطه تا نقطه دلخواه x, y برابر است با:

$$s = \int_0^x \sqrt{1 + y'^2} dx = \int_0^x \sqrt{1 + \sinh^2 \frac{x}{a}} dx = \int_0^x \cosh \frac{x}{a} dx = a \sinh \frac{x}{a}$$

$$y = a \cosh \frac{x}{a} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \sinh \frac{x}{a}$$

از طرفی:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{s}{a}$$

۱۹- گزینه «۴»

$$\vec{R} = (t \cos t, t \sin t) \Rightarrow \vec{V} = (\cos t - t \sin t, \sin t + t \cos t) \Rightarrow |V| = \sqrt{t^2 + 1}$$

$$\vec{a} = (-2 \sin t - t \cos t, 2 \cos t - t \sin t) \Rightarrow \vec{V} \times \vec{a} = (0, 0, t^2 + 2)$$

$$\Rightarrow k = \frac{|\vec{V} \times \vec{a}|}{|V|^3} = \frac{t^2 + 2}{(t^2 + 1)^{3/2}} \Rightarrow \vec{a}_N = kV = \frac{t^2 + 2}{\sqrt{t^2 + 1}}$$

۲۰- گزینه «۱» می‌دانیم نیروی مؤثر با بردار شتاب هم‌راستا است.

$$\vec{R}(t) = (\sin 2t, \cos 2t, t) \Rightarrow \vec{V}(t) = (2 \cos 2t, -2 \sin 2t, 1) \Rightarrow \vec{a}(t) = (-4 \sin 2t, -4 \cos 2t, 0)$$

چون $\vec{V} \cdot \vec{a} = 0$ ، پس بردار شتاب بر V یعنی مسیر حرکت عمود است.

۲۱- گزینه «۱» استوانه یک منحنی است که یکی از مؤلفه‌های آن بدون قید و محدودیت می‌باشد.

$$ds = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt = \sqrt{(e^t \sin t + e^t \cos t)^2 + (e^t \cos t - e^t \sin t)^2} dt = \sqrt{2} e^t dt$$

۲۲- گزینه «۴»

$$F'(t) = \frac{2(1-t^2)}{1+t^2} i + \frac{-4t}{1+t^2} j$$

۲۳- گزینه «۲» ابتدا توجه کنید که:

چون $F(t) \cdot F'(t) = 0$ ، بنابراین F و F' بر هم عمودند.

$$d = \int_1^5 (2t^2 - 2t + 4) dt = (t^3 - t^2 + 4t) \Big|_1^5 = 108$$

۲۴- گزینه «۲»

۲۵- گزینه «۲» مجموعه A تعداد نقاط تلاقی خم با خودش را نشان می‌دهد. منحنی پارامتری $R(t) = (\cos t, \sin t)$ ، $0 \leq t \leq 4\pi$ یک دایره را نشان می‌دهد که دو بار طی شده است و بنابراین بی‌نهایت بار خودش را قطع کرده است و این در حالی است که طول خم برابر 4π می‌باشد.

$$k = \frac{|x'y'' - x''y'|}{(x'^2 + y'^2)^{3/2}} = \frac{|2 \times 2 - 0 \times 2t|}{(2^2 + (2t)^2)^{3/2}} = \frac{4}{(4 + 4t^2)^{3/2}} \Big|_{t=0} = \frac{1}{2}$$

۲۶- گزینه «۴»

۲۷- گزینه «۱»

۲۸- گزینه «۴»

$$x(t) = \sin t - t \cos t \Rightarrow x'(t) = t \sin t \Rightarrow x''(t) = \sin t + t \cos t$$

$$y(t) = \cos t + t \sin t \Rightarrow y'(t) = t \cos t \Rightarrow y''(t) = \cos t - t \sin t$$

$$k = \frac{|x'y'' - x''y'|}{(x'^2 + y'^2)^{3/2}} = \frac{t^2}{t^2} = 1 \Big|_{t=\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{\pi}$$

۲۹- گزینه «۲»

$$\vec{r}(t) = (t + \cos t, t - \cos t, \sqrt{2} \sin t) \Rightarrow \vec{V}(t) = (1 - \sin t, 1 + \sin t, \sqrt{2} \cos t)$$

$$\Rightarrow \vec{a}(t) = (-\cos t, \cos t, -\sqrt{2} \sin t), |V| = \sqrt{(1 - \sin t)^2 + (1 + \sin t)^2 + 2 \cos^2 t} = 2$$

$$V(t) \times a(t) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 - \sin t & 1 + \sin t & \sqrt{2} \cos t \\ -\cos t & \cos t & -\sqrt{2} \sin t \end{vmatrix} = (-\sqrt{2} \sin t - \sqrt{2})\vec{i} + (\sqrt{2} \sin t - \sqrt{2})\vec{j} + 2 \cos t \vec{k}$$

$$\Rightarrow |V \times a| = \sqrt{2(\sin t + 1)^2 + 2(\sin t - 1)^2 + 4 \cos^2 t} = 2\sqrt{2}$$

انحناء منحنی پارامتری از فرمول $k = \frac{|V \times a|}{|V|^3}$ به دست می‌آید. بنابراین $k = \frac{2\sqrt{2}}{8} = \frac{\sqrt{2}}{4}$

تست‌های تکمیلی فصل دوم

۱- برای اینکه برای تابع برداری $F(t) = \sin t \vec{i} + a \cos t \vec{j} + \vec{k}$ رابطه $F'(t) \cdot F(t) = 0$ برقرار باشد، a چه مقداری می‌تواند داشته باشد؟
 (۱) صفر (۲) ۱ (۳) $\sin t$ (۴) $\cos t$

۲- طول منحنی $(t, t^2, \frac{2}{3}t^3)$ از $t=0$ تا $t=2$ کدام است؟

- (۱) $\frac{4}{3}$ (۲) $\frac{8}{3}$ (۳) $\frac{11}{3}$ (۴) $\frac{22}{3}$

۳- طول قوس منحنی $R(t) = t\vec{i} + \ln(\frac{1}{\cos t})\vec{j} + \ln(\frac{1}{\cos t}) + t \cos t \vec{k}$ از $t=0$ تا $t=\frac{\pi}{4}$ کدام است؟

- (۱) $\ln(1+\sqrt{2})$ (۲) $\sqrt{2} \ln \sqrt{2}$ (۳) $\ln(1+2\sqrt{2})$ (۴) $\sqrt{2} \ln(1+\sqrt{2})$

۴- اگر \vec{T} بردار یکانی مماس بر منحنی C باشد، آنگاه $\int_C \vec{T} \cdot d\vec{R}$ برابر کدام است؟

- (۱) صفر (۲) کار انجام شده توسط نیروی \vec{T} (۳) طول قوس منحنی ناحیه درون C (۴) مساحت ناحیه درون C

۵- اگر $\alpha(t) = (6 \sin 2t, 6 \cos 2t, 5t)$ آنگاه خمیدگی α در نقطه $(0, 6, 0)$ کدام است؟

- (۱) $\frac{12}{169}$ (۲) $\frac{24}{169}$ (۳) $\frac{12}{13}$ (۴) $\frac{24}{13}$

۶- شعاع انحنای منحنی تابع $y = \ln x$ در نقطه‌ای به طول $x = \frac{2\sqrt{5}}{5}$ کدام است؟

- (۱) $\frac{2}{7}$ (۲) $\frac{2}{4}$ (۳) $\frac{2}{6}$ (۴) $\frac{1}{8}$

۷- انحنای منحنی $\vec{r}(t) = at\vec{i} - \frac{at+2}{b}\vec{j}$ کدام است؟

- (۱) a (۲) $\frac{1}{a}$ (۳) $\frac{1}{b}$ (۴) صفر

۸- شعاع انحنای تابع $y = e^{\sqrt{2}x}$ در نقطه $x=0$ کدام است؟

- (۱) $2\sqrt{2}$ (۲) $\frac{8}{3}$ (۳) $2\sqrt{2}$ (۴) ۵

۹- انحنای منحنی $y = x^2$ در کدامیک از نقاط زیر بیشترین مقدار است؟

- (۱) $p(0, 0)$ (۲) $(1, 1)$ (۳) $(1, 0)$ (۴) $(2, 0)$

۱۰- انحنای نمودار تابع $y = \ln(\cos x)$ در نقطه $x = \frac{\pi}{3}$ کدام است؟

- (۱) صفر (۲) ۱ (۳) $\frac{1}{2}$ (۴) ۲

۱۱- طول قوس از خم به معادلات $x = \ln \frac{(1+\sin t)}{\cos t} - \sin t, y = \cos t$ از $t=0$ تا $t=\frac{\pi}{3}$ کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{2}$ (۲) $\frac{2}{3}$ (۳) $\ln 2$ (۴) $1 - \ln 2$

۱۲- تاب منحنی $x = e^t \cos t, y = e^t \sin t, z = e^t$ کدام است؟

- (۱) e^{-1} (۲) $\frac{e^{-1}}{2}$ (۳) $\frac{2e^{-1}}{3}$ (۴) $\frac{e^{-1}}{3}$

۱۳- معادله صفحه بوسان را برای منحنی $x = t, y = t^2, z = t^2$ در نقطه $m(2, 4, 8)$ کدام است؟

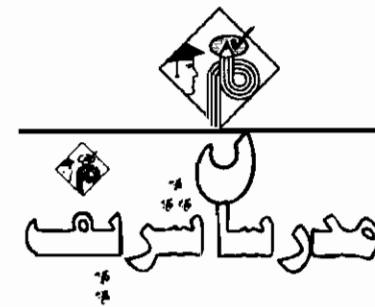
- (۱) $x + 4y + 12z - 114 = 0$ (۲) $\frac{x-2}{1} = \frac{z-4}{4} = \frac{z-8}{12}$ (۳) $12x - 6y + z - 8 = 0$ (۴) $12x + 4y + 12z - 8 = 0$

۱۴- انحنای منحنی $x = \cos t, y = \sin t, z = \cosh t$ در نقطه $t=0$ کدام است؟

- (۱) ۲ (۲) $\sqrt{2}$ (۳) $2\sqrt{2}$ (۴) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

۱۵- انحنای منحنی $x = 2(\varphi - \sin \varphi), y = 2(1 - \cos \varphi)$ در $\varphi = \frac{\pi}{3}$ کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) $\frac{1}{2}$ (۳) $\frac{1}{4}$ (۴) ۲

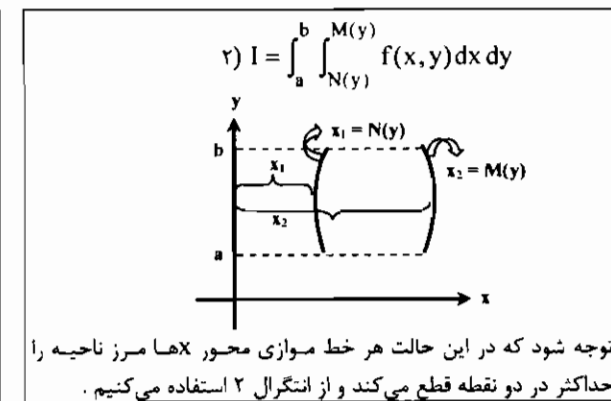
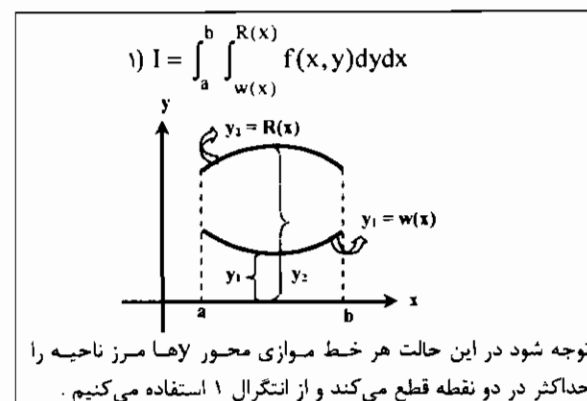


فصل سوم

«انتگرال توابع چند متغیره»

انتگرالهای دوگانه

معمولاً انتگرالهای دوگانه به دو صورت زیر در مسائل بیان می‌شوند:



برای محاسبه انتگرال (۱) ابتدا در تابع $f(x, y)$ نسبت به x ثابت فرض و سپس از آن نسبت به y انتگرال می‌گیریم و مقادیر آن را بر حسب حدود انتگرال محاسبه می‌کنیم که تابعی بر حسب x خواهد بود، سپس یک انتگرال با حدود a, b و عبارتی بر حسب x داریم که باید از آن نسبت به x انتگرال بگیریم. برای محاسبه انتگرال (۲) ابتدا در تابع $f(x, y)$ نسبت به y ثابت فرض کرده و سپس از آن نسبت به x انتگرال می‌گیریم و مقادیر آن را بر حسب حدود انتگرال محاسبه می‌کنیم که تابعی بر حسب y خواهد بود سپس یک انتگرال با حدود a, b و عبارتی بر حسب y داریم که باید از آن نسبت به y انتگرال بگیریم، توجه کنید که در انتگرال (۱) dy و در انتگرال (۲) dx بعد از $f(x, y)$ نوشته شده است.

مثال ۱: حاصل انتگرال $I = \int_{\frac{1}{2}}^1 \int_{\frac{1}{y}}^1 (x^2 + 2xy^2) dx dy$ کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{2}$
- (۲) $\frac{20}{V}$
- (۳) $\frac{29}{V}$
- (۴) $\frac{25}{2}$

پاسخ: گزینه «۴»

$$I = \int_{\frac{1}{2}}^1 \left[\int_{\frac{1}{y}}^1 (x^2 + 2xy^2) dx \right] dy = \int_{\frac{1}{2}}^1 \left[\frac{x^3}{3} + 2xy^2 \right]_{\frac{1}{y}}^1 dy =$$

$$\int_{\frac{1}{2}}^1 \left(\frac{1}{3} + 2y^2 - \frac{1}{3y^3} - 2y \right) dy = \int_{\frac{1}{2}}^1 \left(\frac{1}{3} + 2y^2 - \frac{2}{y} - 2y \right) dy = \left[\frac{1}{3}y + \frac{2}{3}y^3 - 2 \ln y - y^2 \right]_{\frac{1}{2}}^1 = \frac{25}{2}$$

مثال ۲: حاصل $I = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \int_{\sin x}^{\cos x} dy dx$ کدام است؟

- (۱) $\sqrt{2}$
- (۲) ۱
- (۳) ۰
- (۴) $\sqrt{2}-1$

پاسخ: گزینه «۴»

$$I = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_{\sin x}^{\cos x} dy \right) dx = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} [\cos x - \sin x] dx = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} (\cos x - \sin x) dx = [\sin x + \cos x]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} = \sqrt{2} - 1$$

مثال ۳: حاصل انتگرال $I = \int_0^1 \int_0^1 \frac{1}{x} e^{xy} dy dx$ کدام است؟

- (۱) $2e-1$
- (۲) $e-2$
- (۳) انتگرال واگراست.
- (۴) $\frac{e-1}{2}$

پاسخ: گزینه «۳»

$$I = \int_0^1 \int_0^1 \frac{1}{x} e^{xy} dy dx = \int_0^1 \left[\frac{1}{x} e^{xy} \right]_0^1 dx = \int_0^1 \left(\frac{e}{x} - \frac{1}{x} \right) dx = (e-1) \int_0^1 \frac{dx}{x} = (e-1) [\ln x]_0^1 = +\infty \Rightarrow$$

انتگرال واگراست. مثال ۴: $\int dx \int \frac{x^2 dy}{1+y^2}$ کدام است؟

- (۱) $\frac{\pi}{6}$
- (۲) $\frac{\pi}{4}$
- (۳) $\frac{\pi}{12}$
- (۴) $\frac{\pi}{24}$

پاسخ: گزینه «۳»

$$I = \int dx \int \frac{x^2}{1+y^2} dy = \int [x^2 \text{Arctg} y] dx = \frac{\pi}{4} \int x^2 dx = \frac{\pi}{4} \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^1 = \frac{\pi}{12}$$

مثال ۵: حاصل $\int_1^2 dx \int_1^2 \frac{dy}{(x+y)^2}$ چقدر است؟

- (۱) $\ln \frac{25}{24}$
- (۲) $\ln \frac{24}{25}$
- (۳) $\ln \frac{12}{25}$
- (۴) $\ln \frac{25}{12}$

پاسخ: گزینه «۱»

$$I = \int_1^2 dx \int_1^2 \frac{dy}{(x+y)^2} = \int_1^2 \left[-\frac{1}{x+y} \right]_1^2 dx = \int_1^2 \left(-\frac{1}{x+2} + \frac{1}{x+1} \right) dx = [-\ln(x+2) + \ln(x+1)]_1^2 = \ln \frac{25}{24}$$

مثال ۶: مقدار $\iint_D f(x, y) dA$ وقتی که $f(x, y) = xy$ و D ناحیه محدود به خطوط $x=2$ و $y=2x$ و $y=0$ باشد، کدامند؟

- (۱) ۱۶
- (۲) ۸
- (۳) ۴
- (۴) ۳۲

پاسخ: گزینه «۲»

$$y=2x \xrightarrow{y=0} x=0, x=2$$

$$I = \int_0^2 \int_0^{2x} xy dy dx = \int_0^2 x \left[\frac{y^2}{2} \right]_0^{2x} dx = \int_0^2 2x^3 dx = \left[\frac{2x^4}{4} \right]_0^2 = 8$$

مثال ۷: مقدار $I = \iint_A \frac{\sin x}{x} dA$ که در آن A مثلثی واقع در صفحه xy و محدود به محور x ها، خط $y=x$ و خط $x=1$ می‌باشد، کدام است؟

- (۱) $1 - \cos 1$
- (۲) $1 + \cos 1$
- (۳) $\cos 1 - 1$
- (۴) صفر

پاسخ: گزینه «۱»

$$x=1, y=0, y=x \xrightarrow{y=0} x=0$$

$$I = \int_0^1 \int_0^x \frac{\sin x}{x} dy dx = \int_0^1 \left[y \cdot \frac{\sin x}{x} \right]_0^x dx = \int_0^1 \sin x dx = [-\cos x]_0^1 = 1 - \cos 1$$

مثال ۸: مقدار انتگرال دوگانه $I = \iint_D \frac{dx dy}{x+y}$ که در آن $D = \{(x, y) | y < x < 1, x+y > 1\}$ می‌باشد، برابر است با:

- (۱) $2 \ln(2 + \sqrt{3})$
- (۲) $\ln 2 - \frac{1}{2}$
- (۳) $\ln 2$
- (۴) $\ln 2$

پاسخ: گزینه «۲»

$$\begin{cases} x+y=1 \\ y=x \end{cases} \Rightarrow 1-x=x \Rightarrow x=\frac{1}{2}$$

$$I = \int_{\frac{1}{2}}^1 \int_{1-x}^x \frac{dy dx}{x+y} = \int_{\frac{1}{2}}^1 \left[\ln(x+y) \right]_{1-x}^x dx = \int_{\frac{1}{2}}^1 (\ln 2x - \ln 1) dx = \int_{\frac{1}{2}}^1 \ln 2x dx = \frac{1}{2} \int_{\frac{1}{2}}^1 \ln 2x (2 dx) = \frac{1}{2} [2x \ln 2x - 2x]_{\frac{1}{2}}^1 = \frac{1}{2} [2 \ln 2 - 2 + 1] = \ln 2 - \frac{1}{2}$$

توجه شود در محاسبه انتگرال فوق از رابطه روبرو استفاده کردیم:

$$\int_a^b \ln u du = [u \ln u - u]_a^b$$

نکته ۱: اگر تابع $F(x, y)$ بر ناحیه مستطیلی $D: a \leq x \leq b, c \leq y \leq d$ پیوسته باشد و آنرا بتوان به صورت $f(x).g(y)$ نوشت آنگاه داریم:

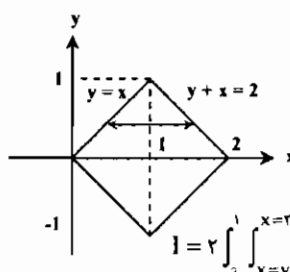
$$\int_a^b \int_c^d f(x).g(y) dx dy = \int_a^b f(x) dx \int_c^d g(y) dy$$

نکته ۲: اگر تابع $f(x, y)$ نسبت به x زوج باشد و D نسبت به محور x متقارن باشد، آنگاه می‌توانیم انتگرال را برای یکی از قسمتها (بالای محور x یا پائین محور x) محاسبه نمود و در نهایت عبارت را در عدد ۲ ضرب کنیم.

نکته ۳: اگر تابع $f(x, y)$ نسبت به x فرد باشد و ناحیه D نسبت به محور y متقارن باشد و یا تابع f نسبت به y فرد و ناحیه D نسبت به محور x متقارن باشد آنگاه مقدار انتگرال $I = \iint_D f(x, y) dx dy$ برابر صفر خواهد بود.

مثال ۹: حاصل انتگرال $\iint_R (x^2 + y^2) dx dy$ وقتی R مربعی به رئوس $(0, 0), (1, 1), (2, 0), (1, -1)$ است، کدام است؟

- (۱) $\frac{4}{3}$ (۲) $\frac{5}{3}$ (۳) $\frac{8}{3}$ (۴) $\frac{10}{3}$



پاسخ: گزینه «۳» ملاحظه می‌گردد که ناحیه R نسبت به محور x متقارن است لذا برای $x \geq 0$ انتگرال را محاسبه کرده و در نهایت در عدد دو ضرب می‌کنیم:

$$\begin{cases} x=y \\ x=2-y \end{cases} \Rightarrow y=2-y \Rightarrow y=1$$

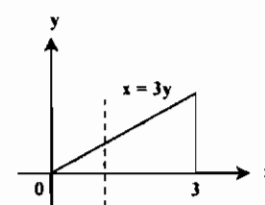
$$I = 2 \int_0^1 \int_{x=y}^{x=2-y} (x^2 + y^2) dx dy = 2 \int_0^1 \left[\frac{x^3}{3} + xy^2 \right]_y^{2-y} dy = 2 \int_0^1 \left[\frac{1}{3}(2-y)^3 + (2-y)y^2 - \frac{y^3}{3} - y^2 \right] dy = \frac{8}{3}$$

تعویض ترتیب انتگرالگیری

در بعضی انتگرالها مجبور به تعویض ترتیب انتگرالگیری هستیم و باید ترتیب انتگرالگیری را عوض کنیم. به مثالهای زیر توجه کنید:

مثال ۱۰: مقدار $I = \int_0^2 \int_{xy}^2 e^{x^2} dx dy$ کدام است؟

- (۱) $\frac{e^4 + 1}{6}$ (۲) $\frac{1 - e^4}{6}$ (۳) $\frac{e^4 - 1}{6}$ (۴) $\frac{e^4 + 1}{6}$

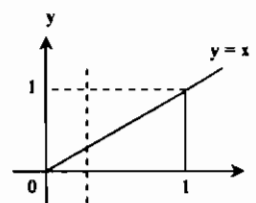


پاسخ: گزینه «۳» محاسبه انتگرال $\int e^{x^2} dx$ ممکن نیست لذا باید ترتیب انتگرالگیری را عوض کنیم برای این منظور باید ناحیه $0 < y < 1, 2y \leq x < 2$ را رسم کنیم ملاحظه می‌شود که پس از رسم این ناحیه خط موازی محور y ها مرز منحنی را در $x=2y$ و $x=0$ قطع می‌کند لذا داریم:

$$I = \int_0^2 \int_{xy}^2 e^{x^2} dy dx = \int_0^2 [ye^{x^2}]_0^{2y} dx = \int_0^2 \frac{1}{3} xe^{x^2} dx = \left[\frac{1}{6} e^{x^2} \right]_0^2 = \frac{e^4 - 1}{6}$$

مثال ۱۱: مقدار $I = \int_0^1 \int_y^1 e^{x^2} dx dy$ کدام است؟

- (۱) $\frac{e+1}{6}$ (۲) $\frac{e-1}{2}$ (۳) $2(e+1)$ (۴) انتگرال قابل محاسبه نیست.



پاسخ: گزینه «۲» با توجه به اینکه محاسبه انتگرال $\int e^{x^2} dx$ ممکن نیست لذا با رسم ناحیه $0 < y < 1$ و $y < x < 1$ داریم:

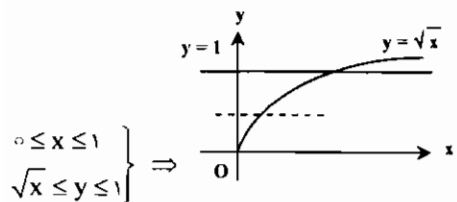
$$I = \int_0^1 \int_y^1 e^{x^2} dy dx = \int_0^1 [xe^{x^2}]_y^1 dx = \int_0^1 x(e-1) dx = (e-1) \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^1 = \frac{e-1}{2}$$

مثال ۱۲: مقدار $I = \int_0^1 \int_{\sqrt{x}}^1 e^{xy} dy dx$ کدام است؟

- (۱) -۱ (۲) ۱ (۳) $\frac{1}{2}$ (۴) $\frac{1}{2}$

پاسخ: گزینه «۴»

محاسبه انتگرال نسبت به y ممکن نیست و باید ترتیب انتگرالگیری را عوض کنیم:

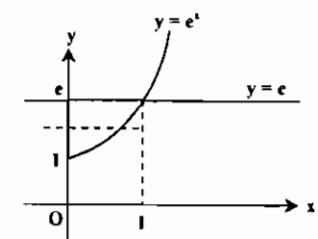


ملاحظه می‌گردد هر خط موازی محور x ها مرز ناحیه را در خطوط $x=0$ و $x=y^2$ قطع می‌کند. و y بین ۰ تا ۱ تغییرات دارد. پس داریم:

$$I = \int_0^1 \int_{\sqrt{x}}^1 e^{xy} dx dy = \int_0^1 [ye^{xy}]_{\sqrt{x}}^1 dy = \int_0^1 y(e^y - 1) dy = \int_0^1 ye^y - \int_0^1 y dy = [ye^y - e^y]_0^1 - \left[\frac{y^2}{2} \right]_0^1 = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

مثال ۱۳: مقدار $I = \int_0^1 \int_x^e \frac{1}{Lny} dy dx$ کدام است؟

- (۱) $\frac{e+1}{2}$ (۲) $1-e$ (۳) $e-1$ (۴) $e+1$



پاسخ: گزینه «۳» ملاحظه می‌گردد $e^x < y < e$ با رسم دو خط $y=e^x$ و $y=e$ و رسم یک خط موازی محور x ها ملاحظه می‌گردد که منحنی مرز ناحیه را در روی خطوط $x=0$ و $x=Lny$ قطع می‌کند. و y نیز بین ۱ تا e تغییرات می‌کند. لذا داریم:

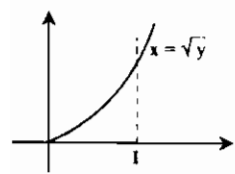
$$I = \int_0^1 \int_x^e \frac{1}{Lny} dy dx = \int_0^1 \int_0^{Lny} \frac{1}{Lny} dx dy = \int_0^e \left[\frac{x}{Lny} \right]_0^{Lny} dy = \int_0^e 1 \times dy = [y]_0^e = e-1$$

مثال ۱۴: مقدار $\int_0^1 \int_{\sqrt{y}}^1 e^{x^2} dx dy$ کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{2}(e-1)$ (۲) $\frac{e}{2}$ (۳) $\frac{1}{2}$ (۴) قابل محاسبه نیست.

پاسخ: گزینه «۱»

با توجه به شکل مقابل. با تعویض ترتیب انتگرالگیری. خواهیم داشت:



$$I = \int_0^1 \int_y^1 e^{x^2} dx dy = \int_0^1 \int_0^{x^2} e^{x^2} dy dx = \int_0^1 x^2 e^{x^2} dx = \left[\frac{1}{3} e^{x^2} \right]_0^1 = \frac{e}{3} - \frac{1}{3}$$

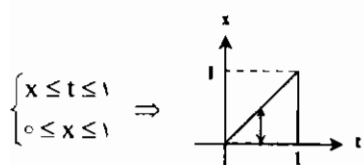
مثال ۱۵: اگر $F(x) = \int_1^x e^{t^2} dt$ حاصل $I = \int_0^1 F(t) dt$ کدام است؟

- (۱) $\frac{e-1}{2}$ (۲) $\frac{1-e}{2}$ (۳) $\frac{e}{2}$ (۴) $\frac{e+1}{2}$

پاسخ: گزینه «۲»

$$I = \int_0^1 F(t) dt = \int_0^1 F(x) dx = \int_0^1 \int_1^x e^{t^2} dt dx = - \int_0^1 \int_x^1 e^{t^2} dt dx$$

محاسبه e^{t^2} ممکن نیست و لذا ناحیه انتگرال را رسم و ترتیب انتگرالگیری را عوض می‌کنیم:



$$I = - \int_0^1 \int_x^1 e^{t^2} dx dt = - \int_0^1 [xe^{t^2}]_x^1 dt = \int_0^1 -te^{t^2} dt = \left[-\frac{e^{t^2}}{2} \right]_0^1 = -\frac{1}{2}(e^1 - e^0) = \frac{1-e}{2}$$

محاسبه بعضی از انتگرالها با استفاده از انتگرال گیری دوگانه

مثال ۱۶: مقدار انتگرال $\int_0^{\infty} \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} dx$ (برای $a > 0, b > 0$) برابر کدام است؟

- (۱) e^b
- (۲) $\ln \frac{b}{a}$
- (۳) $\frac{b}{e^a}$
- (۴) $\ln \frac{a}{b}$

پاسخ: گزینه «۲» می‌دانیم $\int_0^{\infty} e^{-xy} dx = \frac{1}{y}$ با انتگرال گیری از طرفین این تساوی در فاصله a تا b داریم:

$$\int_a^b \int_0^{\infty} e^{-xy} dx dy = \int_a^b \frac{dy}{y} = \ln \frac{b}{a}$$

با تغییر ترتیب انتگرال گیری داریم: $\Rightarrow \int_0^{\infty} (\int_a^b e^{-xy} dy) dx = \ln \left(\frac{b}{a}\right) \Rightarrow \int_0^{\infty} \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} dx = \ln \left(\frac{b}{a}\right)$

روش تستی: اگر $a = b$ در نظر گرفته شود، آنگاه مقدار تابع زیر انتگرال برابر صفر و نتیجتاً انتگرال برابر صفر خواهد بود، لذا یکی از گزینه‌های ۲ و ۴ باید جواب باشد.

حال اگر $b > a$ در نظر گرفته شود آنگاه $e^{-ax} > e^{-bx}$ خواهد بود و لذا تابع زیر انتگرال مثبت می‌شود و از بین گزینه‌های دوم و چهارم مقدار مثبت زمانی اتفاق می‌افتد که $\frac{b}{a} > 1$ باشد، پس گزینه (۲) صحیح است.

تعبیر انتگرالهای دوگانه به صورت حجم

اگر $z = f(x, y)$ در نظر گرفته شود، آنگاه انتگرال دوگانه f روی ناحیه D را می‌توان حجم جسمی تعبیر کرد که از پائین به D و از بالا به رویه $z = f(x, y)$ محدود است.

$$V = \iint_D f(x, y) dx dy$$

مثال ۱۷: حجم محدود بین رویه $z = x^2 + 4y^2$ روی ناحیه $x^2 = y$ و $y^2 = x$ داخل صفحه xoy کدام است؟

- (۱) $\frac{2}{7}$
- (۲) $\frac{6}{7}$
- (۳) $\frac{2}{14}$
- (۴) $\frac{9}{7}$

پاسخ: گزینه «۱» $V = \int_0^1 \int_{x^2}^{\sqrt{x}} (x^2 + 4y^2) dy dx = \int_0^1 [x^2 y + \frac{4y^3}{3}]_{x^2}^{\sqrt{x}} dx = \int_0^1 (x^2 \sqrt{x} + \frac{4x^{\frac{3}{2}}}{3} - x^4 - \frac{4}{3} x^{\frac{3}{2}}) dx$

$$= [\frac{2}{5} x^{\frac{5}{2}} + \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} - \frac{4}{21} x^{\frac{3}{2}} - \frac{4}{3} x^{\frac{3}{2}}]_0^1 = \frac{2}{5} + \frac{2}{3} - \frac{4}{21} - \frac{4}{3} = \frac{2}{7}$$

مثال ۱۸: حجم محدود بین رویه $z = 4y$ و استوانه $x^2 + y^2 = 4y$ و صفحه $z = 0$ کدام است؟

- (۱) 45π
- (۲) 96π
- (۳) 46π
- (۴) 25π

پاسخ: گزینه «۴» معادلات رویه‌های داده شده را در مختصات استوانه‌ای می‌نویسیم.

$$z = \frac{x^2 + y^2}{4} = \frac{1}{4} r^2, \quad x^2 + y^2 = 4y \Rightarrow r^2 = 4r \sin \theta \Rightarrow r = 4 \sin \theta$$

$$V = \iint_A z dA = \int_0^{\pi} \int_0^{4 \sin \theta} z r dr d\theta = \frac{1}{4} \int_0^{\pi} \int_0^{4 \sin \theta} r^2 dr d\theta = \frac{1}{16} \int_0^{\pi} [r^3]_0^{4 \sin \theta} d\theta = 256 \int_0^{\pi} \sin^3 \theta d\theta = 96\pi$$

مثال ۱۹: حجم یک جسم که از برش عرضی استوانه $a^2 = y^2 + 4x^2$ توسط صفحه $z = my$ و $z = 0$ پدید می‌آید، کدام است؟

- (۱) $\frac{ma^2}{2}$
- (۲) $\frac{ma^2}{3}$
- (۳) $\frac{ma^2}{6}$
- (۴) $\frac{ma^2}{4}$

$$V = 2 \int_0^a \int_0^{\sqrt{a^2 - 4x^2}} my dy dx = m \int_0^a [y^2]_0^{\sqrt{a^2 - 4x^2}} dx = \frac{ma^2}{3}$$

پاسخ: گزینه «۲»

مثال ۲۰: حجم محدود بین صفحات $z = 0, z = 4 - y$ و استوانه $x^2 + y^2 = 4$ کدام است؟

- (۱) 2π
- (۲) 4π
- (۳) 8π
- (۴) 16π

پاسخ: گزینه «۴» $V = \int_{-2}^2 \int_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} (4-y) dx dy = 2 \int_{-2}^2 \int_0^{\sqrt{4-y^2}} (4-y) dx dy = 2 \int_{-2}^2 (4-y)[x]_0^{\sqrt{4-y^2}} dy$

$$= 2 \int_{-2}^2 4\sqrt{4-y^2} - 2 \int_{-2}^2 y\sqrt{4-y^2} dy = 16\pi$$

تعبیر انتگرالهای دوگانه به صورت مساحت

هرگاه در رابطه حجم $f(x, y) = 1$ باشد، آنگاه مساحت ناحیه مسطح D از انتگرال زیر قابل محاسبه است:

$$S = \iint_D dx dy$$

مثال ۲۱: سطح محصور بین منحنی $y = 4x - x^2$ و $y = x$ کدام است؟

- (۱) ۹
- (۲) $4/5$
- (۳) ۱۸
- (۴) $2/25$

پاسخ: گزینه «۲» $\begin{cases} y = x \\ y = 4x - x^2 \end{cases} \Rightarrow 4x - x^2 = x \Rightarrow x = 0, x = 2$

$$S = \iint_D dy dx = \int_0^2 \int_x^{4x-x^2} dy dx = \int_0^2 [y]_x^{4x-x^2} dx = \int_0^2 (4x - x^2 - x) dx = \int_0^2 (3x - x^2) dx = [\frac{3}{2}x^2 - \frac{x^3}{3}]_0^2 = 4/5$$

توضیح: به دست آوردن سطح فوق با استفاده از فرمول‌های سطح محصور بیان شده در کتاب ریاضی (۱) نیز صورت می‌گیرد.

محاسبه انتگرال دوگانه در مختصات قطبی

در انتگرالهایی که محاسبه آنها در مختصات قائم مشکل باشد، می‌توان با استفاده از روابط مختصات قطبی انتگرال را در دستگاه قطبی محاسبه نمود: $(dy dx = r dr d\theta, y = r \sin \theta, x = r \cos \theta)$

تذکره ۱: معمولاً در مسائل اگر عبارت $x^2 + y^2$ زیر انتگرال مشاهده شود و یا ناحیه انتگرال گیری دایره و نیم‌دایره عنوان گردد استفاده از این روش پیشنهاد می‌شود.

مثال ۲۲: مقدار انتگرال $I = \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-(x^2+y^2)} dx dy$ کدام است؟

- (۱) $\frac{\pi}{4}$
- (۲) $\frac{\pi}{2}$
- (۳) $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$
- (۴) $\sqrt{\pi}$

پاسخ: گزینه «۱» به هیچ طریقی محاسبه انتگرال در مختصات قائم ممکن نیست لذا در مختصات قطبی مسئله را حل می‌کنیم:

$$I = \int_0^{\pi} \int_0^{\infty} r e^{-r^2} dr d\theta = \int_0^{\pi} [-\frac{e^{-r^2}}{2}]_0^{\infty} d\theta = \int_0^{\pi} \frac{1}{2} d\theta = \frac{\pi}{4}$$

مثال ۲۳: انتگرال دوگانه $z = \cos(x^2 + y^2)$ در ناحیه محصور به دایره $x^2 + y^2 = \frac{\pi}{6}$ کدام است؟

- (۱) $\frac{\pi}{2}$
- (۲) π
- (۳) $\frac{\pi}{6}$
- (۴) 2π

پاسخ: گزینه «۱» از مختصات قطبی استفاده می‌کنیم:

$$I = \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{\frac{\pi}{6}}} \cos r^2 r dr d\theta = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{\frac{\pi}{6}}} r \cos r^2 dr = 2\pi \times [\frac{1}{2} \sin r^2]_0^{\sqrt{\frac{\pi}{6}}} = \pi \times \sin \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2}$$

مثال ۲۴: حاصل انتگرال $\iint_D y dx dy$ که در آن D ناحیه محدود به محور x ها و نیم‌دایره $y = \sqrt{4-x^2}$ می‌باشد، کدام است؟

- (۱) $\frac{8}{3}$
- (۲) $\frac{16}{3}$
- (۳) $\frac{20}{3}$
- (۴) $\frac{22}{3}$

پاسخ: گزینه «۲»

$$y = r \sin \theta, x = r \cos \theta, \theta = \pi \Rightarrow y = \sqrt{4 - x^2} \Rightarrow r \sin \theta = \sqrt{4 - r^2 \cos^2 \theta} \Rightarrow 0 = \sqrt{4 - r^2} \Rightarrow r^2 = 4 \Rightarrow r = 2$$

$$\Rightarrow I = \int_0^{\pi} \int_0^2 (r \sin \theta) r dr d\theta = \int_0^{\pi} \left[\int_0^2 r^2 \sin \theta dr \right] d\theta = \int_0^{\pi} \left[\frac{r^3}{3} \sin \theta \right]_0^2 d\theta = \frac{8}{3} \int_0^{\pi} \sin \theta d\theta = \left[-\frac{8}{3} \cos \theta \right]_0^{\pi} = \frac{16}{3}$$

تذکر ۲: بعضاً مشاهده می شود در مسائل به جای r از نماد ρ استفاده می شود.

مثال ۲۵: حاصل $I = \int_0^{\pi} \int_0^{\cos \theta} \rho \sin \theta d\rho d\theta$ کدام است؟

- (۱) ۶ (۲) $\frac{\pi}{6}$ (۳) $\frac{1}{6}$ (۴) π

پاسخ: گزینه «۳»

$$I = \int_0^{\pi} \int_0^{\cos \theta} \rho \sin \theta d\rho d\theta = \int_0^{\pi} \sin \theta \left[\frac{\rho^2}{2} \right]_0^{\cos \theta} d\theta = \int_0^{\pi} \left[\sin \theta \times \frac{\cos^2 \theta}{2} \right] d\theta = \frac{1}{2} \int_0^{\pi} \frac{\cos^2 \theta}{u^2} \sin \theta d\theta = -\frac{1}{2} \left[\frac{\cos^3 \theta}{3} \right]_0^{\pi} = \frac{1}{6}$$

مثال ۲۶: مقدار $I = \iint_D \sqrt{1 - x^2 - y^2} dx dy$ را با فرض این که D ناحیه‌ای محصور بین دایره $x^2 + y^2 = 1$ باشد، کدام است؟

- (۱) $\frac{2}{3}$ (۲) $\frac{2\pi}{3}$ (۳) $\frac{2\pi}{3}$ (۴) $\frac{2}{3}$

پاسخ: گزینه «۳»

$$I = \iint_D \sqrt{1 - x^2 - y^2} dx dy = \int_{-\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \sqrt{1 - (x^2 + y^2)} dy dx$$

ملاحظه می گردد محاسبه انتگرال در مختصات دکارتی کار مشکلی خواهد بود لذا از مختصات قطبی کمک می گیریم ناحیه D در واقع به صورت زیر تعریف می شود:

$$D = \{(r, \theta) | 0 \leq r \leq 1, 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$$

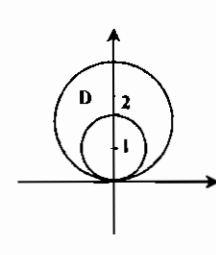
$$I = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \sqrt{1 - r^2} r dr d\theta, u = 1 - r^2 \Rightarrow \begin{cases} r dr = -\frac{du}{2} \\ r = 0 \Rightarrow u = 1, r = 1 \Rightarrow u = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow I = -\frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \int_1^0 u^{\frac{1}{2}} du d\theta = -\frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \left[\frac{2}{3} u^{\frac{3}{2}} \right]_1^0 d\theta = \frac{1}{3} \int_0^{2\pi} d\theta = \frac{2\pi}{3}$$

مثال ۲۷: مقدار $I = \iint_D (x^2 + y^2) dx dy$ در صورتی که D ناحیه‌ای بین دایره‌های $x^2 + y^2 = 2y$ و $x^2 + y^2 = 4y$ باشد، کدام است؟

- (۱) $\frac{22}{5}\pi$ (۲) 25π (۳) 45π (۴) $5 - \pi$

پاسخ: گزینه «۱»



$x^2 + y^2 = 2y \Rightarrow r^2 = 2r \sin \theta \Rightarrow r = 2 \sin \theta$
 $x^2 + y^2 = 4y \Rightarrow r^2 = 4r \sin \theta \Rightarrow r = 4 \sin \theta$

$$I = \iint_D (x^2 + y^2) dx dy = \int_0^{\pi} \int_{2 \sin \theta}^{4 \sin \theta} r^2 dr d\theta = \int_0^{\pi} \left[\frac{r^3}{3} \right]_{2 \sin \theta}^{4 \sin \theta} d\theta = \int_0^{\pi} \left(\frac{64}{3} \sin^3 \theta - \frac{8}{3} \sin^3 \theta \right) d\theta$$

$$= \frac{56}{3} \int_0^{\pi} \sin^3 \theta d\theta = \frac{56}{3} \int_0^{\pi} (1 - \cos^2 \theta) \sin \theta d\theta = \frac{56}{3} \int_0^{\pi} (1 - \cos^2 \theta) (-\cos \theta) d\theta = \frac{56}{3} \int_0^{\pi} (\cos \theta - \cos^3 \theta) d\theta$$

$$= \frac{56}{3} \left[\sin \theta - \frac{\sin^3 \theta}{3} \right]_0^{\pi} = \frac{56}{3} \left(0 - \left(0 - \frac{0}{3} \right) \right) = \frac{56}{3} \pi = \frac{22}{5} \pi$$

حاصل انتگرالهای $\cos^2 \theta$ و $\cos^4 \theta$ برابر عبارت \sin کمانهای نظیر خواهد بود و می دانیم مقادیر سینوس این کمانها در نقاط 0 و π صفر می شود، پس داریم:

$$I = \frac{56}{3} \int_0^{\pi} \sin^3 \theta d\theta = \frac{56}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{112}{9} = \frac{22}{5} \pi$$

مثال ۲۸: مقدار $I = \iint_D \frac{x+y}{\sqrt{x^2+y^2}} dx dy$ که در آن D ناحیه واقع در ربع اول دایره $x^2 + y^2 = a^2$ و $x \geq 0$ و $y \geq 0$ است، برابر کدام است؟

- (۱) a (۲) صفر (۳) a^2 (۴) $-a^2$

پاسخ: گزینه «۳»

$$I = \iint_D \frac{r \cos \theta + r \sin \theta}{r} r dr d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^a r (\cos \theta + \sin \theta) dr d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos \theta + \sin \theta) \left[\frac{r^2}{2} \right]_0^a d\theta$$

$$= \frac{a^2}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos \theta + \sin \theta) d\theta = \frac{a^2}{2} [\sin \theta - \cos \theta]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{a^2}{2} \times 2 = a^2$$

مثال ۲۹: حاصل انتگرال دوگانه $\int_0^a \int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} y^2 \sqrt{x^2+y^2} dy dx$ کدام است؟

- (۱) $\frac{\pi a^5}{5}$ (۲) $\frac{\pi a^5}{4}$ (۳) $\frac{\pi a^5}{2}$ (۴) $\frac{\pi a^5}{10}$

پاسخ: گزینه «۳»

$$\begin{cases} x = a \\ y = \sqrt{a^2 - x^2} \Rightarrow y^2 + x^2 = a^2 \Rightarrow r^2 = a^2 \Rightarrow r = a \\ x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

ناحیه موردنظر ربع اول دایره‌ای به شعاع a می باشد:

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^a r^2 \sin^2 \theta \times r \times r dr d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^a r^4 \sin^2 \theta dr d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \theta \left[\frac{r^5}{5} \right]_0^a d\theta = \frac{a^5}{5} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \theta d\theta = \frac{a^5}{5} \times \frac{1}{2} \times \frac{\pi}{2} = \frac{\pi a^5}{10}$$

مثال ۳۰: اگر R ناحیه $x^2 + y^2 \leq 1$ ، آنگاه حاصل $\iint_R e^{-(x^2+y^2)} dA$ کدام است؟

- (۱) $\pi(1 + \frac{1}{e})$ (۲) $\pi(e - 1)$ (۳) $\pi(1 - \frac{1}{e})$ (۴) $\pi(e + 1)$

پاسخ: گزینه «۳»

$$\iint_R e^{-(x^2+y^2)} dA = \int_0^{2\pi} \int_0^1 e^{-r^2} \cdot r dr d\theta = \int_0^{2\pi} d\theta \cdot \int_0^1 r e^{-r^2} dr = \pi \left(1 - \frac{1}{e} \right)$$

فرمولهای حجم و سطح در مختصات قطبی

$$V = \iint_D f(r, \theta) r dr d\theta, S = \iint_D r dr d\theta$$

مثال ۳۱: مساحت سطح محصور بین دایره $r = 1$ و منحنی $r = 2 + \cos \theta$ کدام است؟

- (۱) $\frac{2}{5}\pi$ (۲) $\frac{3}{5}\pi$ (۳) 5π (۴) 7π

پاسخ: گزینه «۲»

$$S = \iint_D r dr d\theta = \int_0^{2\pi} \int_1^{2+\cos \theta} r dr d\theta = \int_0^{2\pi} \left[\frac{r^2}{2} \right]_1^{2+\cos \theta} d\theta = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} [(2 + \cos \theta)^2 - 1] d\theta$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (4 + 4 \cos \theta + \cos^2 \theta - 1) d\theta = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (3 + 4 \cos \theta + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2\theta) d\theta$$

$$I = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \frac{7}{2} d\theta = \frac{1}{2} \times \frac{7 \times 2\pi}{2} = \frac{7}{2} \pi = \frac{3}{5} \pi$$

مثال ۳۲: حجم محصور بین سطوح $z = 1 - x^2 - y^2$ و $z = 0$ کدام است؟

- (۱) $\frac{\pi}{2}$ (۲) π (۳) $\frac{\pi}{4}$ (۴) $\frac{\pi}{8}$

پاسخ: گزینه «۱»

$$V = \iint_D (1 - x^2 - y^2) dx dy = \int_0^{2\pi} \int_0^1 (1 - r^2) r dr d\theta = \int_0^{2\pi} \left[\frac{r^2}{2} - \frac{r^4}{4} \right]_0^1 d\theta = \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4} \right) d\theta = \frac{1}{4} \int_0^{2\pi} d\theta = \frac{\pi}{2}$$

مثال ۲۳: مساحت خارج دایره $r=2$ و داخل کاردیوئید $r=2(1+\cos\theta)$ کدام است؟

- (۱) $\pi+4$
- (۲) $\pi+8$
- (۳) $2(\pi+4)$
- (۴) π^2+8

پاسخ: گزینه «۲» چون منحنی نسبت به محور قطبی متقارن است، لذا نیمه واقع در ربع اول را حساب می‌کنیم و عبارت را در عدد دو ضرب می‌کنیم.

$$S = 2 \int_0^{\pi} \int_2^{2(1+\cos\theta)} r dr d\theta = 2 \int_0^{\pi} \left[\frac{r^2}{2} \right]_2^{2(1+\cos\theta)} d\theta = \int_0^{\pi} (2\cos\theta + \cos^2\theta) d\theta = \int_0^{\pi} (2\sin\theta + \frac{\theta}{2} + \frac{\sin 2\theta}{2}) d\theta = \pi + 8$$

نکته ۴: حجم یک جسم فضائی محصور بین منحنی‌های $Z_1 = f(x, y)$ و $Z_2 = f_2(x, y)$ که D تصویر جسم مذکور بر صفحه xy می‌باشد، از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$V = \iint_D |f_2(x, y) - f_1(x, y)| dy dx$$

مثال ۲۴: حجم محصور بین سطح $z = x^2 + y^2$ و $z = 8 - x^2 - y^2$ کدام است؟

- (۱) 8π
- (۲) 16π
- (۳) 4π
- (۴) 2π

پاسخ: گزینه «۲» $x^2 + y^2 = 8 - x^2 - y^2 \Rightarrow 2(x^2 + y^2) = 8 \Rightarrow x^2 + y^2 = 4$

ملاحظه می‌گردد از تقاطع دو سطح فوق جسمی حاصل می‌شود که تصویرش بر صفحه xy یک دایره به شعاع ۲ می‌باشد، لذا ناحیه D به صورت زیر تعریف می‌گردد:

$$D = \{(r, \theta) | -2 \leq r \leq 2, 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$$

$$V = \iint_D [f_2(x, y) - f_1(x, y)] dx dy = \iint_D [(8 - x^2 - y^2) - (x^2 + y^2)] dx dy = \iint_D [8 - 2(x^2 + y^2)] dx dy$$

$$= 2 \int_0^{2\pi} \int_0^2 (4 - r^2) r dr d\theta = 2 \int_0^{2\pi} [2r^2 - \frac{r^4}{4}]_0^2 d\theta = 2 \int_0^{2\pi} (8 - 4) d\theta = 8 \int_0^{2\pi} 1 d\theta = 16\pi$$

تغییر متغیر در انتگرال دو گانه (استفاده از ژاکوبین)

در بعضی موارد که محاسبه انتگرال دو گانه نسبت به متغیرهای زیر انتگرال پیچیده باشد و یا ناحیه انتگرال‌گیری نامنظم باشد، می‌توانیم x و y را به صورت تابعی از متغیرهای جدید u و v تعریف کنیم که در این تغییر به جای $dx dy$ عبارت $|J| du dv$ قرار می‌دهیم، که J به صورت زیر تعریف می‌گردد:

$$\begin{cases} x = \varphi(u, v) \\ y = \psi(u, v) \end{cases} \Rightarrow J = \begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{vmatrix}$$

واضح است که ناحیه D در صفحه مختصات دکارتی در دستگاه جدید (uv) تغییر می‌کند و اگر این ناحیه جدید را D' بنامیم داریم:

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_{D'} f[\varphi(u, v), \psi(u, v)] |J| du dv$$

مثال ۲۵: اگر A سطح درون یک چهار ضلعی با رئوس $(\pi, \pi), (2\pi, \pi), (\pi, 0), (0, \pi)$ باشد، حاصل

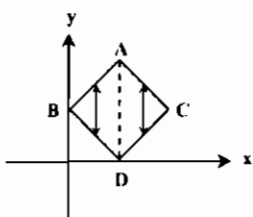
$$I = \iint_A (x-y)^2 \sin^2(x+y) dx dy$$

- (۱) $\frac{\pi^4}{3}$
- (۲) $\frac{\pi^4}{6}$
- (۳) $\frac{\pi^4}{2}$
- (۴) $\frac{\pi^2}{6}$

پاسخ: گزینه «۱» توجه شود ناحیه انتگرال‌گیری منظم نیست چون باید دو سر فلش در انتها و ابتدای مرز شامل یک منحنی باشد، اما ملاحظه می‌گردد در طرفین خط‌چین نشان داده شده معادلات خط دو سر فلش تغییر می‌کند. AC و CD به معادله خط AB و BD تبدیل می‌شوند.

$$\begin{cases} u = x - y \\ v = x + y \end{cases} \Rightarrow J = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2$$

با رسم ناحیه در مختصات دکارتی داریم:



$$\begin{cases} AB \Rightarrow y = x + \pi \Rightarrow x - y = -\pi \\ AC \Rightarrow y = -x + 2\pi \Rightarrow x + y = 2\pi \\ BD \Rightarrow y = -x + \pi \Rightarrow x + y = \pi \\ DC \Rightarrow y = x - \pi \Rightarrow x - y = \pi \end{cases}$$

ملاحظه می‌گردد $-\pi \leq u \leq \pi$ و $\pi \leq v \leq 2\pi$ می‌باشد:

$$I = \int_{-\pi}^{\pi} \int_{\pi}^{2\pi} u^2 \sin^2 v |J| du dv = \int_{-\pi}^{\pi} \left[\frac{u^3}{3} \right]_{\pi}^{2\pi} \sin^2 v dv = \frac{\pi^2}{3} \int_{-\pi}^{\pi} (1 - \cos 2v) dv = \frac{\pi^2}{3} \left[v - \frac{1}{2} \sin 2v \right]_{-\pi}^{\pi} = \frac{\pi^2}{3}$$

مثال ۲۶: اگر D ناحیه محصور بین $x=0, y=0, x+y=1$ باشد، آنگاه مقدار $\iint_D e^{x+y} dx dy$ برابر است با:

- (۱) $\frac{e - e^{-1}}{4}$
- (۲) $\frac{e - e^{-1}}{2}$
- (۳) $\frac{e^2 - 1}{2e}$
- (۴) $\frac{2}{e}$

پاسخ: گزینه «۱»

$$\begin{cases} u = x + y \\ v = x - y \end{cases} \Rightarrow J = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 \Rightarrow |J| = \frac{1}{2}$$

$$x=0 \Rightarrow \begin{cases} u = y \\ v = -y \end{cases} \Rightarrow u = -v \Rightarrow -u \leq v \leq u$$

$$y=0 \Rightarrow \begin{cases} u = x \\ v = x \end{cases} \Rightarrow u = v$$

$$x+y=1 \Rightarrow v=1, v=0$$

$$I = \int_{-1}^1 \int_{-u}^u e^{\frac{v}{2}} \times \frac{1}{2} dv du = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \left[2e^{\frac{v}{2}} \right]_{-u}^u dv = \int_{-1}^1 \left(\frac{e - e^{-1}}{2} \right) dv = \frac{e - e^{-1}}{2} \left[\frac{v^2}{2} \right]_{-1}^1 = \frac{e - e^{-1}}{4}$$

مثال ۲۷: مساحت محصور بین $xy=1, xy^{1/4}=2, xy^{1/4}=1, xy=1$ کدام است؟

- (۱) $\ln 10$
- (۲) $5 \ln 2$
- (۳) 5
- (۴) $2 \ln 10$

پاسخ: گزینه «۲» نواحی کاملاً نامنظم هستند، لذا از تغییر متغیر استفاده می‌کنیم:

$$u = xy, v = xy^{1/4}$$

$$J = \frac{1}{\begin{vmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{vmatrix}} = \frac{1}{\begin{vmatrix} y & x \\ y^{1/4} & 1/4 xy^{3/4} \end{vmatrix}} = \frac{1}{1/4 xy^{1/4} - xy^{1/4}} = \frac{1}{-3/4 xy^{1/4}} = \frac{4}{3 xy^{1/4}} = \frac{4}{3v}$$

$$S = \iint_D dx dy = \int_1^2 \int_{1/v}^{2/v} \frac{4}{3v} dv du = \frac{4}{3} \int_1^2 [\ln v]_1^{2/v} du = \int_1^2 2/3 \ln 2 du = 2/3 \ln 2 [u]_1^2 = 5 \ln 2$$

مثال ۲۸: مقدار $I = \iint_D (x^2 + y^2) dx dy$ را در صورتی که D ناحیه بین خطوط $y=2-x, y=x-2, y=-x, y=x$ باشد، کدام است؟

- (۱) $\frac{16}{3}$
- (۲) $\frac{8}{3}$
- (۳) $\frac{4}{3}$
- (۴) $\frac{16}{6}$

پاسخ: گزینه «۲»

$$\begin{cases} x + y = u \\ x - y = v \end{cases} \Rightarrow J = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 \Rightarrow |J| = \frac{1}{2}$$

$$\begin{cases} y+x=2 \Rightarrow u=2, y=-x \Rightarrow x+y=0 \Rightarrow u=0 \\ x-y=2 \Rightarrow v=2, y=x \Rightarrow x-y=0 \Rightarrow v=0 \end{cases}$$

$$\iint_D (x^2 + y^2) dx dy = \iint_{D'} \frac{1}{2} [(x-y)^2 + (x+y)^2] dx dy = \int_0^2 \int_0^2 \frac{1}{2} (u^2 + v^2) \frac{1}{2} du dv = \frac{A}{2}$$

مثال ۳۹: مقدار انتگرال $I = \iint_D \cos \frac{x-y}{x+y} dx dy$ در صورتی که D ناحیه داخل مثلثی که در بین صفحات $x=0$ ، $y=0$ و $x+y=1$ باشد، کدام است؟

(۱) $\cos^{-1}(2)$
 (۲) $\sin^{-1}(2)$
 (۳) $\frac{\sin^{-1}(2)}{2}$
 (۴) $\frac{\cos^{-1}(2)}{2}$

$x-y=u$
 $x+y=v$
$$\Rightarrow J = \frac{1}{\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{1}{2}$$

پاسخ: گزینه «۳»

$x=c \Rightarrow \begin{cases} u=-y \\ v=y \end{cases} \Rightarrow u=-v$
 $y=0 \Rightarrow \begin{cases} u=x \\ v=x \end{cases} \Rightarrow u=v$
 $x+y=1 \Rightarrow v=1, v=c$

$\Rightarrow -v \leq u \leq v$

$$I = \frac{1}{2} \int_0^1 \int_{-v}^v \cos \frac{u}{v} du dv = \frac{1}{2} \int_0^1 v \left[\sin \frac{u}{v} \right]_{-v}^v dv = \frac{1}{2} [\sin(1) - \sin(-1)] \int_0^1 v dv = \frac{2 \sin 1}{2} \left[\frac{v^2}{2} \right]_0^1 = \frac{\sin 1}{2}$$

مقدار متوسط تابع f

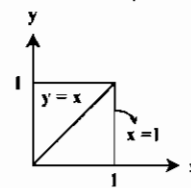
مقدار میانگین (متوسط) تابع f بر روی ناحیه D از رابطه زیر محاسبه می‌گردد:

$$\bar{f} = \frac{\iint_D f(x,y) dx dy}{\text{مساحت ناحیه } D}$$

مثال ۴۰: مقدار متوسط تابع $f(x,y) = x^2 + y^2$ را بر روی سطح مثلثی به رئوس $(0,0)$ ، $(1,1)$ و $(1,0)$ کدام است؟

(۱) $\frac{1}{3}$
 (۲) $\frac{4}{3}$
 (۳) $\frac{1}{3}$
 (۴) $\frac{2}{3}$

پاسخ: گزینه «۴»



$$I = \iint_D f(x,y) dx dy$$

مساحت ناحیه $D = \frac{1 \times 1}{2} = \frac{1}{2}$

$$\bar{f} = \frac{\int_0^1 \int_0^x (x^2 + y^2) dy dx}{\frac{1}{2}} = 2 \int_0^1 \left[x^2 y + \frac{y^3}{3} \right]_0^x dx = 2 \int_0^1 \left(x^3 + \frac{x^3}{3} \right) dx = \frac{8}{3} \int_0^1 x^3 dx = \frac{8}{3} \left[\frac{x^4}{4} \right]_0^1 = \frac{2}{3}$$

جرم، مرکز ثقل و گشتاور ماند یک صفحه مسطح

اگر D یک ناحیه مسطح باشد که در نقطه (x,y) دارای چگالی $\rho(x,y)$ باشد، آنگاه روابط زیر را داریم:

$$M = \iint_D \rho(x,y) dx dy$$

$$\bar{x} = \frac{1}{M} \iint_D x \rho(x,y) dx dy = \frac{\iint_D x \rho(x,y) dx dy}{\iint_D \rho(x,y) dx dy}$$

$$\bar{y} = \frac{1}{M} \iint_D y \rho(x,y) dx dy = \frac{\iint_D y \rho(x,y) dx dy}{\iint_D \rho(x,y) dx dy}$$

مختصات مرکز ثقل =

گشتاور ماند نسبت به محور x ها $I_{x^2} = \iint_D y^2 \rho(x,y) dx dy$

گشتاور ماند نسبت به محور y ها $I_{y^2} = \iint_D x^2 \rho(x,y) dx dy$

گشتاور ماند نسبت به مبدأ مختصات $I_o = \iint_D (x^2 + y^2) \rho(x,y) dx dy$

مثال ۴۱: جرم یک جسم دایره‌ای شکل با شعاع ۱ و تابع چگالی $\rho = \sqrt{1-x^2-y^2}$ کدام است؟

(۱) $\frac{\pi}{3}$
 (۲) $\frac{2\pi}{3}$
 (۳) $\frac{2}{3}\pi$
 (۴) 2π

$M = \iint_D \rho dx dy = \iint_D \sqrt{1-(x^2+y^2)} dx dy$
 پاسخ: گزینه «۲»

با توجه به مشاهده $(x^2 + y^2)$ بهتر است از مختصات قطبی استفاده کنیم، ناحیه D دایره‌ای به شعاع یک است، لذا داریم:

$D: \{(r,\theta) | 0 \leq r \leq 1, 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$, $dx dy = r dr d\theta$

$$M = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \sqrt{1-r^2} r dr d\theta = -\frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \left[\frac{1-r^2}{3} \right]_0^1 d\theta = -\frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \left[\frac{2}{3} - \frac{1-r^2}{3} \right] d\theta = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} d\theta = \frac{1}{2} \times [2\pi]_0^{2\pi} = \frac{2\pi}{2} = \pi$$

مثال ۴۲: جرم یک صفحه مربعی با رئوس $(0,0)$ ، $(0,a)$ ، (a,a) و $(a,0)$ ، که چگالی آن در نقطه (x,y) سه برابر مربع فاصله آن نقطه از مبدأ مختصات می‌باشد، کدام است؟

(۱) a^4
 (۲) $2a^4$
 (۳) $\frac{2}{3}a^4$
 (۴) $\frac{2}{3}a^4$

$\rho(x,y) = 3(x^2 + y^2)$
 پاسخ: گزینه «۲»

$$M = \int_0^a \int_0^a 3(x^2 + y^2) dy dx = 3 \int_0^a \left[x^2 y + \frac{y^3}{3} \right]_0^a dx = 3 \int_0^a \left[x^2 a + \frac{a^3}{3} \right] dx = 3 \left[\frac{ax^3}{3} + \frac{a^3 x}{3} \right]_0^a = 2a^4$$

مثال ۴۳: گشتاور ماند یک صفحه دایره‌ای به شعاع ۲ و چگالی سطحی $\rho = 1$ نسبت به محور x ها و مبدأ مختصات به ترتیب کدام است؟

(۱) $8\pi, 4\pi$
 (۲) $4\pi, 8\pi$
 (۳) $4\pi, 4\pi$
 (۴) $8\pi, 16\pi$

$I_o = \iint_D (x^2 + y^2) \rho dx dy = \int_0^{2\pi} \int_0^2 r^2 dr d\theta = 8\pi$
 پاسخ: گزینه «۲»

$I_{x^2} = I_{y^2} = \frac{1}{2} I_o = \frac{1}{2} \times 8\pi = 4\pi$

انتگرالهای سه گانه

روش حل برای انتگرالهای سه گانه نیز مانند انتگرالهای دو گانه می‌باشد. اگر انتگرال سه گانه $I = \iiint_D f(x,y,z) dz dy dx$ را در نظر بگیریم و داشته باشیم:

$a \leq x \leq b, \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x), \psi_1(x,y) \leq z \leq \psi_2(x,y)$

در این حالت ابتدا باید نسبت به z انتگرال گیری کرده پس از آن نسبت به y و در نهایت نسبت به x .

$$I = \int_a^b \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} \int_{\psi_1(x,y)}^{\psi_2(x,y)} f(x,y,z) dz dy dx$$

مثال ۴۴: مقدار $I = \iiint_V x^2 y dz dy dx$ ناحیه محدود به صفحات مختصات و خطوط $z=1$ و $y=1$ و $x=1$ است، کدام است؟

(۱) $\frac{1}{6}$
 (۲) $\frac{1}{2}$
 (۳) $\frac{1}{6}$
 (۴) $\frac{1}{3}$

پاسخ: گزینه «۳»

$$I = \iiint_V x^2 y dz dy dx = \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 x^2 y dz dy dx = \int_0^1 \int_0^1 x^2 y dy dx = \int_0^1 x^2 \left[\frac{y^2}{2} \right]_0^1 dx = \int_0^1 \frac{x^2}{2} dx = \left[\frac{x^3}{6} \right]_0^1 = \frac{1}{6}$$

مثال ۴۵: حاصل $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^z \int_0^y \sin(x+y+z) dx dy dz$ کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{3}$
- (۲) $\frac{2}{3}$
- (۳) $\frac{2}{3}$
- (۴) $\frac{2}{3}$

پاسخ: گزینه «۱»

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^z \int_0^y \sin(x+y+z) dx dy dz = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^z [-\cos(x+y+z)]_0^y dy dz$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^z [-\cos(zy+z) + \cos(y+z)] dy dz = \int_0^{\frac{\pi}{2}} [-\frac{1}{z} \sin(zy+z) + \sin(y+z)]_0^z dz$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (-\frac{1}{z} \sin \pi z + \sin \pi z + \frac{1}{z} \sin z - \sin z) dz = [\frac{1}{z} \cos \pi z + \cos z - \frac{1}{z} \cos \pi z - \frac{1}{z} \cos z]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{3}$$

مثال ۴۶: حاصل انتگرال $I = 20 \int_0^1 \int_0^x \int_0^{xy} x^2 y dz dy dx$ کدام است؟

- (۱) $\frac{5}{6}$
- (۲) $\frac{20}{3}$
- (۳) $\frac{8}{3}$
- (۴) $\frac{22}{3}$

پاسخ: گزینه «۱»

$$I = 20 \int_0^1 \int_0^x (\int_0^{xy} dz) x^2 y dy dx = 20 \int_0^1 \int_0^x x^2 y^2 dy dx = 20 \int_0^1 [x^2 (\frac{y^3}{3})]_0^x dx = 20 \int_0^1 (\frac{x^5}{3}) dx = 20 [\frac{x^6}{24}]_0^1 = \frac{20}{6} = \frac{5}{3}$$

نکته ۵: حجم محصور در ناحیه D را می توان به صورت زیر تعریف نمود:

$$V = \iiint_D dx dy dz$$

مثال ۴۷: حجم محصور بین صفحات $x+z=1, z=0$ و منحنی $x=y^2$ کدام است؟

- (۱) $\frac{4}{15}$
- (۲) $\frac{16}{15}$
- (۳) $\frac{8}{3}$
- (۴) $\frac{8}{15}$

پاسخ: گزینه «۲»

$$(z=1-x, z=0), z=0 \Rightarrow x=1 \xrightarrow{x=y^2} y^2=1 \Rightarrow -1 \leq y \leq 1$$

$$V = \int_{-1}^1 \int_{y^2}^{1-x} dz dx dy = \int_{-1}^1 \int_{y^2}^{1-x} (1-x) dx dy = \int_{-1}^1 [x - \frac{x^2}{2}]_{y^2}^1 dy = \int_{-1}^1 (1 - \frac{1}{2} - y^2 + \frac{y^4}{2}) dy$$

$$= [\frac{1}{2}y - \frac{y^3}{6} + \frac{y^5}{10}]_{-1}^1 = (\frac{1}{2} - \frac{1}{6} + \frac{1}{10}) - (-\frac{1}{2} + \frac{1}{6} - \frac{1}{10}) = \frac{8}{15}$$

مثال ۴۸: حجم جسمی قائم که قاعده آن در صفحه xoy محدود به محور x ها و نیمساز ناحیه اول و خط $x=1$ و از بالا به صفحه $z=x+1+y$ محدود است، کدام است؟

- (۱) 1
- (۲) 2
- (۳) $\frac{1}{2}$
- (۴) $\frac{2}{3}$

پاسخ: گزینه «۲»

$$V = \int_0^1 \int_0^x \int_0^{x+y+1} dz dy dx = \int_0^1 \int_0^x (x+y+1) dy dx = \int_0^1 [xy + \frac{y^2}{2} + y]_0^x dx = \int_0^1 (\frac{2x^2}{2} + x) dx = 1$$

مثال ۴۹: حجم محصور بین دو استوانه $x^2+z^2=a^2$ و $x^2+y^2=a^2$ کدام است؟

- (۱) $\frac{8a^2}{5}$
- (۲) $\frac{16a^2}{3}$
- (۳) $\frac{41a^2}{3}$
- (۴) $\frac{7a^2}{3}$

پاسخ: گزینه «۲» با تبدیل x به $-x$ ، y به $-y$ و z به $-z$ معادلات تغییر نمی کنند، پس ناحیه نسبت به صفحات مختصات متقارن است و در هر ۸ ناحیه فضا وجود دارد، پس با محاسبه حجم در $\frac{1}{8}$ فضا و در نهایت ضرب جواب در عدد ۸ پاسخ به دست می آید:

$$V = 8 \int_0^a \int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} \int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} dz dy dx = 8 \int_0^a \int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} \sqrt{a^2-x^2} dy dx = 8 \int_0^a (a^2-x^2) dx$$

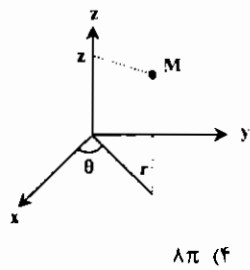
$$= 8 \times [a^2x - \frac{x^3}{3}]_0^a = 8 \times [a^3 - \frac{a^3}{3}] = \frac{16a^3}{3}$$

محاسبه انتگرال های سه گانه با استفاده از مختصات استوانه ای

هر نقطه به صورت $M(x,y,z)$ در مختصات دکارتی به صورت زیر با مختصات استوانه ای در ارتباط می باشد.

$x = r \cos \theta, y = r \sin \theta, z = z, dx dy dz = r dr d\theta dz$

* تذکر ۱: همواره $0 \leq \theta \leq 2\pi$ و $r \geq 0$ خواهد بود.



مثال ۵۰: حجم محدود به رویه $z \geq 0$ و $x^2+y^2+z^2=4$ و استوانه $x^2+y^2=2$ کدام است؟

- (۱) 2π
- (۲) 4π
- (۳) 6π
- (۴) 8π

پاسخ: گزینه «۲» با استفاده از مختصات استوانه ای مسئله را حل می کنیم:

$$z = 4 - (x^2 + y^2) = 4 - r^2 \quad \text{و} \quad x^2 + y^2 = 2 \Rightarrow r = \sqrt{2}$$

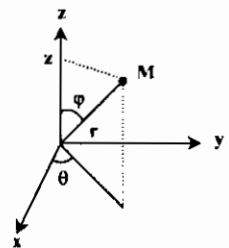
$$V = \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{2}} \int_{r^2}^{4-r^2} r dz dr d\theta = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{2}} [4r - r^3] dr = 2\pi \times [2r^2 - \frac{r^4}{4}]_0^{\sqrt{2}} = 2\pi \times (4 - 1) = 6\pi$$

محاسبه انتگرال های سه گانه با استفاده از مختصات کروی

هر نقطه به صورت $M(x,y,z)$ در مختصات دکارتی به صورت زیر با مختصات کروی در ارتباط می باشد.

$$\begin{cases} x = r \sin \varphi \cos \theta, y = r \sin \varphi \sin \theta, z = r \cos \varphi \\ r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \theta = \text{Arctg} \frac{y}{x}, \varphi = \text{Arccos} \frac{z}{r} \\ dx dy dz = r^2 \sin \varphi dr d\theta d\varphi \end{cases}$$

* تذکر ۲: همواره $0 \leq \varphi \leq \pi, 0 \leq \theta \leq 2\pi, r \geq 0$ خواهد بود.



مثال ۵۱: حجم محدود به کره ای به معادله $x^2+y^2+z^2=1$ و داخل مخروط دوار $z = \sqrt{x^2+y^2}$ کدام است؟

- (۱) $\frac{\pi(2-\sqrt{2})}{3}$
- (۲) $\frac{\pi(\sqrt{2}-1)}{3}$
- (۳) $\frac{\pi(\sqrt{2}+1)}{3}$
- (۴) $\frac{\pi(\sqrt{2}+2)}{3}$

پاسخ: گزینه «۱» کره مورد نظر دارای معادله $\rho=1$ و مخروط داده شده دارای معادله ای به صورت $\varphi = \frac{\pi}{4}$ می باشد، پس داریم:

$$0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4}, 0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq \rho \leq 1$$

$$V = \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^1 \rho^2 \sin \varphi d\rho d\varphi d\theta = \int_0^{2\pi} d\theta \times \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin \varphi d\varphi \times \int_0^1 \rho^2 d\rho = 2\pi \times [-\cos \varphi]_0^{\frac{\pi}{4}} \times [\frac{\rho^3}{3}]_0^1 = \frac{2\pi}{3} (1 - \frac{\sqrt{2}}{2}) = \frac{\pi(2-\sqrt{2})}{3}$$

نکته ۶: اگر ناحیه D در مسائل به صورت بیضی یا معادله $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ بیان گردد، در این صورت جایگزینی های زیر می تواند مفید باشد:

$x = a \cos \theta, y = b \sin \theta, J = abr$

که ناحیه D به دایره ای به شعاع یک تبدیل می شود.

مثال ۵۲: حجم محدود به سطوح $x^2+4y^2=4z$ و $x^2+4y^2=4\lambda-4z$ در ناحیه $x>0, y>0, z>0$ کدام است؟

- (۱) 4π
- (۲) 5π
- (۳) 6π
- (۴) 8π

پاسخ: گزینه «۳»

$$V = \iiint_D dz dx dy = \iiint_D dz dx dy = \iint_D (-\frac{r}{4}x^2 - \frac{r}{4}y^2 + 6) dx dy$$

$$\begin{cases} 2x^2 + 4y^2 = 4z \\ x^2 + 4y^2 = 4\lambda - 4z \end{cases} \xrightarrow{\text{جمع دو معادله با هم}} 3x^2 + 12y^2 = 4\lambda \Rightarrow \frac{x^2}{\frac{4\lambda}{3}} + \frac{y^2}{\frac{\lambda}{3}} = 1$$

چون ناحیه D بیضی با $a = 4$ و $b = 2$ می باشد، داریم:

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta, \quad J = r \times r \times r, \quad 0 \leq r < 1, \quad 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$$

$$V = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 (6 - 6r^2)(r) dr d\theta = 6\pi$$

نکته ۷: اگر ناحیه V به شکل بیضی گون با معادله $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ بیان گردد با تبدیل زیر این بیضی به کره به معادله $\rho = 1$ تبدیل می گردد:

$$J = abc \rho^2 \sin \varphi, \quad x = a \rho \cos \theta \sin \varphi, \quad y = b \rho \sin \theta \sin \varphi, \quad z = c \rho \cos \varphi$$

مقدار متوسط تابع $f(x, y, z)$

مقدار میانگین (متوسط) تابع f بر روی ناحیه V از رابطه زیر محاسبه می گردد:

$$\bar{f} = \frac{\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz}{\text{حجم ناحیه V}}$$

مثال ۵۳: مقدار متوسط تابع $f(x, y, z) = xyz$ روی یک مکعب که در یک هشتم اول واقع و به صفحات $x = 2, y = 2, z = 2$ محدود است کدام است؟

- (۱) ۱۰ (۲) ۸ (۳) ۶ (۴) ۶۰

$$I = \int_0^2 \int_0^2 \int_0^2 xyz dx dy dz = \int_0^2 \int_0^2 yz \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^2 dy dz = \int_0^2 \int_0^2 2yz dy dz = \int_0^2 [y^2 z]_0^2 dz = \int_0^2 4z dz = 80$$

$$\text{مقدار متوسط } xyz = \frac{I}{V_{\text{مکعب}}} = \frac{80}{2 \times 2 \times 2} = 10$$

جرم، گشتاور ماند و مرکز ثقل اجسام (دارای حجم)

اگر یک جسم با حجم V با تابع چگالی $\rho = f(x, y, z)$ در نقطه (x, y, z) واقع در ناحیه D تعریف شود، آنگاه روابط جرم جسم، گشتاور ماند نسبت به محورهای مختصات و مبدأ مختصات و مختصات مرکز ثقل جسم به صورت زیر بیان می گردد.

$$\text{جرم جسم} = M = \iiint_D \rho dV$$

$$\text{مختصات مرکز ثقل} = \begin{cases} \bar{x} = \frac{\iiint_D x \rho dV}{M} \\ \bar{y} = \frac{\iiint_D y \rho dV}{M} \\ \bar{z} = \frac{\iiint_D z \rho dV}{M} \end{cases}$$

$$\text{گشتاور ماند نسبت به محور } y \text{ ها} = \iiint_D \rho(x^2 + z^2) dV, \quad \text{و} \quad \text{گشتاور ماند نسبت به محور } x \text{ ها} = \iiint_D \rho(y^2 + z^2) dV$$

$$\text{گشتاور ماند نسبت به محور } z \text{ ها} = \iiint_D \rho(x^2 + y^2) dV, \quad \text{و} \quad \text{گشتاور ماند نسبت به محور } x \text{ ها} = \iiint_D \rho(y^2 + z^2) dV$$

مثال ۵۴: جرم یک سه وجهی محصور بین صفحات مختصات و صفحه $x + y + z = 1$ در صورتی که تابع چگالی $\rho = 1$ باشد، کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{6}$ (۲) $\frac{1}{24}$ (۳) $\frac{1}{4}$ (۴) $\frac{1}{60}$

پاسخ: گزینه «۱»

$$M = \iiint_D dz dy dx = \int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{1-x-y} dz dy dx = \int_0^1 \int_0^{1-x} (1-x-y) dy dx = \int_0^1 \left[y - xy - \frac{y^2}{2} \right]_0^{1-x} dx$$

$$= \int_0^1 \left[1-x - x(1-x) - \frac{(1-x)^2}{2} \right] dx = \int_0^1 \left[1-2x+x^2 - \frac{1}{2}(1+x^2-2x) \right] dx = \int_0^1 \left(\frac{1}{2} - x + \frac{1}{2}x^2 \right) dx = \left[\frac{x}{2} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} \right]_0^1 = \frac{1}{6}$$

مثال ۵۵: گشتاور ماند حول محور z ها برای حجم محدود به کره $r = 1$ (از بالا) و مخروط $\varphi = \frac{\pi}{3}$ (از پایین) با چگالی $\rho = 1$ کدام است؟

- (۱) $\frac{\pi}{12}$ (۲) $\frac{\pi}{4}$ (۳) $\frac{\pi}{3}$ (۴) $\frac{\pi}{6}$

$$I_{zz} = \iiint_V \rho(x^2 + y^2) dv$$

پاسخ: گزینه «۱»

با استفاده از مختصات کروی داریم:

$$I_{zz} = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \int_0^{2\pi} \int_0^1 r^2 \sin^2 \varphi \times r^2 \sin \varphi dr d\theta d\varphi = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin \varphi (1 - \cos^2 \varphi) d\varphi \times \int_0^{2\pi} d\theta \times \int_0^1 r^3 dr$$

$$= \left[-\cos \varphi + \frac{1}{3} \cos^3 \varphi \right]_0^{\frac{\pi}{3}} \times [2\pi] \times \left[\frac{r^4}{4} \right]_0^1 = \frac{\pi}{12}$$

تست های طبقه بندی شده فصل سوم

۱- مساحت مقطع بیضیوار $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{25} = 1$ با صفحه $z = 4$ کدام است؟ (مکانیک - سراسری ۷۸)

- (۱) $\frac{36\pi}{25}$
- (۲) $\frac{42\pi}{25}$
- (۳) $\frac{48\pi}{25}$
- (۴) $\frac{54\pi}{25}$

۲- حاصل $\iint_R xy dA$ وقتی ناحیه محدود به دایره $x^2 + y^2 = 1$ و محورهای مختصات در ربع اول باشد، کدام است؟ (مکانیک - سراسری ۷۸)

- (۱) $\frac{1}{2}$
- (۲) $\frac{1}{4}$
- (۳) $\frac{1}{6}$
- (۴) $\frac{1}{8}$

۳- مقدار انتگرال $\iint_D \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}} dx dy$ که در آن D ناحیه محدود به بیضی $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ است، برابر است با: (عمران - سراسری ۷۸)

- (۱) $\frac{1}{3} \pi ab$
- (۲) $\frac{2}{3} \pi ab$
- (۳) πab
- (۴) $\frac{4}{3} \pi ab$

۴- مقدار $\int_0^1 \int_0^1 \sqrt{1 - y^2} dy dx$ برابر است با: (مهندسی سیستم های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری - سراسری ۷۸)

- (۱) $\frac{1}{3}$
- (۲) $\frac{2}{3}$
- (۳) ۱
- (۴) $\frac{2}{3}$

۵- حاصل $\int_0^1 \int_0^1 (x^2 + y^2) dy dx$ کدام است؟ (ژئوفیزیک - سراسری ۷۸)

- (۱) $\frac{26}{21}$
- (۲) $\frac{26}{50}$
- (۳) $\frac{26}{75}$
- (۴) $\frac{26}{105}$

۶- حاصل $\iint_D e^x dA$ وقتی D ناحیه درون مثلث حاصل از خطوط به معادله $y = x$ ، $y = 0$ و $x = 1$ باشد، کدام است؟ (مهندسی هسته ای - سراسری ۷۸)

- (۱) $2(e-1)$
- (۲) $\frac{1}{2}(e-1)$
- (۳) $2e - \frac{1}{2}$
- (۴) $2e + \frac{1}{2}$

۷- حجم جسم محدود به رویه های به معادلات $36x^2 + 9y^2 + 4z = 36$ و $4x^2 + y^2 - z = 4$ کدام است؟ (مهندسی هسته ای - سراسری ۷۸)

- (۱) 10π
- (۲) 11π
- (۳) 13π
- (۴) 12π

۸- حجم محدود به صفحه $z = 0$ از پائین، مخروط $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ از بالا و استوانه $x^2 + y^2 - 2ax = 0$ از اطراف، با کدام رابطه برابر است؟ (عمران - سراسری ۷۹)

- (۱) $\frac{3}{2} \pi a^2$
- (۲) $\frac{8}{3} a^2$
- (۳) $\frac{22}{9} a^2$
- (۴) $\frac{16}{3} \pi a^2$

۹- مقدار انتگرال دوگانه $\int_0^1 \int_{\sqrt{x}}^1 \cos(y^2) dy dx$ چقدر است؟ (عمران - سراسری ۷۹)

- (۱) $\frac{\sin 8}{6}$
- (۲) $\frac{\sin 8}{3}$
- (۳) $\frac{\sin 8}{2}$
- (۴) $\frac{1}{3} \sin 8$

۱۰- مقدار $\int_0^1 \int_{\sqrt{y}}^1 \sqrt{x^2 + 1} dx dy$ کدام است؟ (مهندسی سیستم های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری - سراسری ۷۹)

- (۱) $\frac{17}{3}$
- (۲) $\frac{26}{3}$
- (۳) $\frac{26}{9}$
- (۴) $\frac{52}{9}$

۱۱- حاصل $\int_0^5 \int_0^{\sqrt{5-x^2}} dy dx$ کدام است؟ (ژئوفیزیک - سراسری ۷۹)

- (۱) $\frac{15\pi}{2}$
- (۲) $\frac{25\pi}{2}$
- (۳) $\frac{15\pi}{4}$
- (۴) $\frac{25\pi}{4}$

۱۲- حاصل $\iint_D e^{2y-x} dx dy$ که در آن میدان D مثلثی با سه رأس $(1, 0)$ و $(0, 2)$ و مبدأ مختصات باشد، کدام است؟ (مهندسی هسته ای - سراسری ۷۹)

- (۱) $\frac{1}{2} + e^{-2}$
- (۲) $1 - e^{-2}$
- (۳) $\frac{1}{2}(1 + e^{-2})$
- (۴) $\frac{1}{2}(1 - e^{-2})$

۱۳- حاصل $\int_0^2 \int_0^{\sqrt{2-x^2}} \frac{1}{1+x^2+y^2} dy dx$ برابر کدام است؟ (آمار - سراسری ۷۹)

- (۱) $\frac{\pi}{2} \ln \frac{1}{5}$
- (۲) $\frac{\pi}{2} \ln 5$
- (۳) $\frac{\pi}{2} \ln \frac{1}{\Delta}$
- (۴) $\frac{\pi}{4} \ln \Delta$

۱۴- اگر D مساحت مربع واحد به رئوس $(0, 0)$ ، $(1, 0)$ ، $(1, 1)$ و $(0, 1)$ باشد، مقدار انتگرال $\iint_D f(x, y) dx dy$ چقدر است؟ (مکانیک - سراسری ۸۰)

- (۱) $\frac{1}{2}$
- (۲) ۱
- (۳) $\sqrt{2}$
- (۴) ۲

۱۵- حجم محصور به سهمی گون $az = x^2 + y^2$ ، صفحه $z = 0$ و استوانه $x^2 + y^2 = 2ax$ (با $a > 0$)، کدام است؟ (عمران - سراسری ۸۰)

- (۱) $\frac{1}{2} \pi a^2$
- (۲) $2\pi a^2$
- (۳) $\frac{3}{2} \pi a^2$
- (۴) $\frac{2}{3} \pi a^2$

۱۶- مقدار انتگرال $\iint_D x^2 dx dy$ که در آن D ناحیه محصور به بیضی $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ می باشد کدام است؟ (عمران - سراسری ۸۰)

- (۱) $\frac{\pi a^2}{4}$
- (۲) $\frac{\pi a^2 b}{4}$
- (۳) $\frac{\pi a^2 b}{3}$
- (۴) $\frac{\pi a^2}{4}$

۱۷- تابع $f(x, y)$ با دامنه تعریف $0 \leq x, y \leq 2$ به صورت تابع $f(x, y) = \begin{cases} x(2+y) & 0 \leq x \leq y \\ y(1+x^2) & y \leq x \leq 2 \end{cases}$ تعریف شده مقدار $\iint_D f(x, y) dx dy$ چقدر باشد؟ (عمران - آزاد ۸۰)

- (۱) $9/2$
- (۲) $10/2$
- (۳) $11/2$
- (۴) $12/2$

۱۸- جواب انتگرال $\int_0^2 \int_0^x x dy dx$ چیست؟ (مهندسی سیستم های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری - سراسری ۸۰)

- (۱) $e^2 - 1$
- (۲) $e^2 - 3$
- (۳) $e^2 + 1$
- (۴) e^2

۱۹- حاصل $\int_0^1 \int_0^x x^2 e^{xy} dy dx$ کدام است؟ (مهندسی صنایع (سیستم های اقتصادی و اجتماعی) - آزاد ۸۰)

- (۱) $\frac{2}{3} e - \frac{1}{2}$
- (۲) $\frac{1}{2} e - \frac{2}{3}$
- (۳) $\frac{1}{2} e + \frac{2}{3}$
- (۴) $\frac{2}{3} e + \frac{1}{2}$

۲۰- حاصل $\int_0^e \int_0^x \frac{dy dx}{(x+y)^2}$ کدام است؟ (مهندسی صنایع (مدیریت سیستم و بهره‌وری) - آزاد ۸۰)

- (۱) $\frac{1}{2}$
- (۲) ۱
- (۳) $\frac{2}{3}$
- (۴) ۲

۲۱- حاصل $\int_0^1 dx \int_x^{\sqrt{x}} \phi(x, y) dy$ با کدام گزینه برابر است؟ (ژئوفیزیک - سراسری ۸۰)

- (۱) $\int_0^1 dy \int_0^{\sqrt{y}} \phi(x, y) dx$
- (۲) $\int_0^1 dy \int_0^y \phi(x, y) dx$
- (۳) $\int_0^1 dy \int_0^{\sqrt{y}} \phi(x, y) dx$
- (۴) $\int_0^1 dy \int_0^y \phi(x, y) dx$

۲۲- حجم محدود بین استوانه به معادله های $x^2 + y^2 = 1$ و $x^2 + z^2 = 1$ کدام است؟ (ژئوفیزیک - سراسری ۸۰)

- (۱) $\frac{9}{2}$
- (۲) $\frac{11}{2}$
- (۳) $\frac{16}{3}$
- (۴) $\frac{17}{3}$

۲۳- حاصل $\iint_E \cos(x+y) dx dy$ وقتی E ناحیه محدود به خط $y = x$ و $y = \pi$ و $x = 0$ باشد، کدام است؟

- (مهندسی هسته‌ای - سراسری ۸۰)
 (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) -۱ (۴) -۲

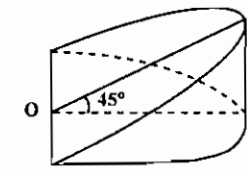
۲۴- جرم جسم محدود به دو استوانه به معادله‌های $x^2 + y^2 = 1$ و $x^2 + z^2 = 1$ با چگالی در نقطه (x, y, z) برابر $|xyz|$ ، کدام است؟

- (مهندسی هسته‌ای - سراسری ۸۰)
 (۱) $\frac{1}{2}$ (۲) $\frac{1}{3}$ (۳) $\frac{2}{3}$ (۴) $\frac{2}{3}$

۲۵- مقدار انتگرال $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin y}{y} dy dx$ برابر است با:

- (معدن - سراسری ۸۰)
 (۱) -۱ (۲) ۱ (۳) -۲ (۴) ۲

۲۶- جسم شکل زیر (که قسمتی از یک استوانه است) دارای قاعده نیم دایره به شعاع واحد بوده و زاویه صفحه P و صفحه قاعده جسم 45° درجه می‌باشد، حجم این جسم کدام است؟



- (۱) $\frac{2}{5}$ (۲) $\frac{2}{4}$ (۳) $\frac{2}{3}$ (۴) $\frac{4}{5}$

۲۷- حاصل $\iiint \frac{dx dy dz}{(x^2 + y^2 + z^2)^2}$ در ناحیه بین دو کره به شعاع ۱ و ۴ برابر است با:

- (آمار - سراسری ۸۰)
 (۱) $4\pi \ln 4$ (۲) $8\pi \ln 4$ (۳) $4\pi \ln 2$ (۴) $8\pi \ln 2$

۲۸- جرم جسمی که درون استوانه به معادله $x^2 + y^2 = 1$ و خارج مخروط به معادله $z^2 = x^2 + y^2$ قرار داشته با چگالی در نقطه (x, y, z) برابر $\sqrt{x^2 + y^2}$ باشد، کدام است؟

- (ریاضی - سراسری ۸۰)
 (۱) π (۲) $\frac{\pi}{2}$ (۳) $\frac{3\pi}{2}$ (۴) 2π

۲۹- اگر $I = \int_{-1}^1 f(u) du$ و $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| + |y| \leq 1\}$ کدام است؟

- (ریاضی - سراسری ۸۰)
 (۱) -۱ (۲) $\frac{1}{2} I$ (۳) I (۴) ۲I

۳۰- مقدار $\iint \frac{x+y}{\sqrt{x^2+y^2}} dx dy$ روی ربع اول دایره به معادله $x^2 + y^2 = a^2$ عبارتست از:

- (ریاضی - سراسری ۸۰)
 (۱) πa (۲) a^2 (۳) πa^2 (۴) $\frac{a^2}{2}$

۳۱- مقدار انتگرال دوگانه $\int_0^1 \int_{x/2}^1 e^{y^2} dy dx$ برابر است با:

- (ریاضی - سراسری ۸۰)
 (۱) $e^2 - 1$ (۲) $e^2 + 1$ (۳) $e^2 + 1$ (۴) $e^2 - 1$

۳۲- با تغییر متغیرهای $xy = v$ و $x^2 - y^2 = u$ مقدار انتگرال $\iint_D (x^2 + y^2) dx dy$ که در آن ناحیه محصور به منحنی‌های زیر می‌باشد، کدام است؟

$x^2 - y^2 = 1, x^2 - y^2 = 9, xy = 2, xy = 4$

- (عمران - سراسری ۸۱)
 (۱) ۴ (۲) ۶ (۳) ۸ (۴) ۱۲

۳۳- حاصل $\int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} (x^2 + y^2)^2 dy dx$ کدام است؟

- (مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری - سراسری ۸۱)
 (۱) $\frac{\pi}{2}$ (۲) $\frac{\pi}{3}$ (۳) $\frac{\pi}{4}$ (۴) $\frac{\pi}{5}$

۳۴- انتگرال چندگانه $\int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 dz dy dx$ نشانگر کدامیک از حالات زیر است؟ (مهندسی صنایع (سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی) - آزاد (۸۱))

- (۱) یک منشور مثلث القاعده (۲) یک هرم مثلث القاعده (۳) یک مکعب مستطیل (۴) یک متوازی‌السطوح

۳۵- مساحت محدود به سهمی‌های $y^2 = 4 - 4x$ و $y^2 = 4 - x$ برابر است با.....

(۱) $\int_{-2}^2 \int_{\frac{y^2}{4}}^{4-y^2} dx dy$ (۲) $\int_{-2}^2 \int_0^{4-y^2} dx dy$ (۳) $\int_0^2 \int_{1-y^2}^{4-y^2} dx dy$ (۴) $\int_{-2}^2 \int_{\sqrt{4-x}}^{\sqrt{4-4x}} dx dy$

۳۶- اگر D ناحیه $1 \leq x^2 + y^2 \leq 4$ در صفحه باشد، حاصل $\iint_D \ln(x^2 + y^2) dA$ برابر است با:

- (MBA - سراسری ۸۱)
 (۱) $2\pi(\ln 4 - \frac{3}{4})$ (۲) $\pi(\ln 4 - \frac{3}{4})$ (۳) $4\pi(\ln 4 - \frac{3}{4})$ (۴) $42\pi(\ln 4 - \frac{3}{4})$

۳۷- D را ناحیه $x^2 + y^2 + 2y \leq 0$ در نظر بگیرید، مقدار $\iint_D (x+y) dA$ برابر است با:

- (MBA - سراسری ۸۱)
 (۱) π (۲) 2π (۳) $-\pi$ (۴) -2π

۳۸- حاصل $\int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} (x^2 + y^2)^2 dy dx$ کدام است؟

- (زئوفیزیک - سراسری ۸۱)
 (۱) $\frac{\pi}{2}$ (۲) $\frac{\pi}{3}$ (۳) $\frac{\pi}{4}$ (۴) $\frac{\pi}{5}$

۳۹- حجم ناحیه محدود به استوانه به معادله $y = x^2$ و صفحه به معادله $y + z = 4$ و صفحات xy و yz و واقع در ناحیه اول از ناحیه A فضا کدام است؟

- (مهندسی هسته‌ای - سراسری ۸۱)
 (۱) $\frac{64}{15}$ (۲) $\frac{64}{30}$ (۳) $\frac{128}{15}$ (۴) $\frac{128}{30}$

۴۰- اگر چگالی یک جسم مکعب شکل به ابعاد واحد در هر نقطه (x, y, z) از ناحیه‌ای که اشغال می‌کند به صورت $\delta(x, y, z) = 1 + x + yz$ باشد، جرم این جسم برابر است با:

- (معدن - سراسری ۸۱)
 (۱) $\frac{5}{4}$ (۲) $\frac{4}{5}$ (۳) $\frac{5}{4}$ (۴) $\frac{4}{5}$

۴۱- حجم چنبره به معادله $\rho = 2 \sin \phi$ در مختصات کروی کدام است؟

- (معدن - سراسری ۸۱)
 (۱) $\frac{9\pi^2}{4}$ (۲) $\frac{9\pi^2}{4}$ (۳) $\frac{27\pi^2}{4}$ (۴) $\frac{27\pi^2}{4}$

۴۲- کدام روش برای محاسبه مساحت ناحیه محدود به نمودارهای $y = x^2$ و $y = x$ نادرست است؟

(معدن - سراسری ۸۱)
 (۱) $\int_0^1 \int_{x^2}^x dx dy$ (۲) $\int_0^1 \int_y^{\sqrt{y}} dx dy$ (۳) $\int_0^1 \int_{x^2}^x (x^2 - x) dx dy$ (۴) $\int_0^1 (x - x^2) dx$

۴۳- اگر A ناحیه محدود به دایره به معادله $x^2 + y^2 = 1$ در ناحیه اول مختصات باشد حاصل $\iint_A e^{-(x^2+y^2)} dA$ کدام است؟

- (آمار - سراسری ۸۱)
 (۱) $\frac{\pi}{4} e^{-1}$ (۲) πe^{-1} (۳) $\frac{1}{4} \pi (1 - e^{-1})$ (۴) $\pi (1 - e^{-1})$

۴۴- حجم جسمی که در ناحیه اول از هشت ناحیه فضا قرار داشته و محدود به سطح به معادله $z = x^2 + y^2 + 1$ صفحه به معادله $2x + y = 2$ و صفحات مختصات می‌باشد کدام است؟

- (آمار - سراسری ۸۱)
 (۱) $\frac{11}{6}$ (۲) $\frac{22}{6}$ (۳) $\frac{11}{4}$ (۴) $\frac{22}{4}$

۴۵- مقدار انتگرال سه گانه $\iiint_R \frac{x}{x^2+y^2} dx dy dz$ که در آن ناحیه محصور بین صفحه $z=0$ ، دو کره به مرکز مبدأ و شعاع های ۱ و ۲ و خارج نیم مخروط $z = \sqrt{x^2+y^2}$ برابر است با:

- (۱) $-\frac{\pi\sqrt{2}}{2}$
- (۲) ۰
- (۳) $\frac{\pi\sqrt{2}}{2}$
- (۴) $\frac{(2-\sqrt{2})\pi}{6}$

۴۶- حجم ناحیه T محدود به سهموی به معادله $z = 4 - x^2 - y^2$ و صفحه xy کدام است؟

- (۱) 5π
- (۲) 6π
- (۳) 7π
- (۴) 8π

۴۷- مقدار انتگرال $\iiint_V e^{(x^2+y^2+z^2)^2} dV$ بر روی کره $x^2+y^2+z^2=1$ کدام است؟

- (۱) $\frac{2}{3}\pi e$
- (۲) $\frac{4}{3}\pi e$
- (۳) $\frac{2}{3}\pi(e-1)$
- (۴) $\frac{4}{3}\pi(e-1)$

۴۸- به فرض آنکه V ناحیه محصور بین نمودارهای $Z = x^2 + 2y + 1$ و $Z = y + 2$ در یک هشتم اول باشد، حجم V کدام است؟

- (۱) $\frac{4}{15}$
- (۲) $\frac{2}{5}$
- (۳) $\frac{2}{15}$
- (۴) $\frac{2}{5}$

۴۹- مقدار انتگرال $\iint_D \left(\frac{x-2y}{x+2y}\right)^2 dx dy$ که در آن D ناحیه محصور به خطوط $x+2y=3$ و $x+2y=1$ ، $x-2y=2$ و $x-2y=1$ می باشد، کدام است؟

- (۱) $\frac{5}{12}$
- (۲) $\frac{4}{9}$
- (۳) $\frac{5}{3}$
- (۴) $\frac{4}{3}$

۵۰- حاصل $\iint_D \frac{2y^2+x^2}{x^2} dx dy$ که در آن D به صورت زیر است، چقدر است؟

- (۱) ۰
- (۲) e
- (۳) $\frac{\pi}{4}$
- (۴) $+\infty$

۵۱- مقدار انتگرال $\int_0^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-x^2-y^2} dx dy$ کدام است؟

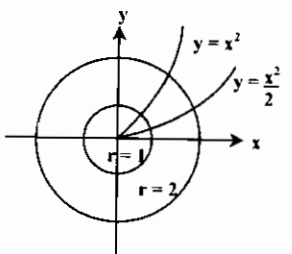
- (۱) $\frac{1}{e}$
- (۲) $\frac{1}{2}$
- (۳) $\frac{3}{4}$
- (۴) ۱

۵۲- مقدار انتگرال دو گانه $\iint_R (x \sin y - ye^x) dx dy$ که در آن $R = \{(x,y) | -1 \leq x \leq 1, 0 < y \leq \frac{\pi}{4}\}$ برابر است با:

- (۱) $\frac{1}{e} - e^2$
- (۲) $\frac{1}{e} - e^{-2}$
- (۳) $\frac{1}{e} + e^2$
- (۴) $\frac{1}{e} - e$

۵۳- حجم هرم مثلث القاعده ای که قاعده آن در صفحه $z = -6$ قرار دارد و وجوه آن صفحات قائم $y = 0$ و $y - x = 4$ و صفحه مورب $2x + y + z = 4$ است برابر است با:

- (۱) $\int_0^6 \int_{y-4}^{\frac{4-y}{2}} \int_{-6}^{4-2x-y} dz dx dy$
- (۲) $\int_0^6 \int_{y-4}^{\frac{4-y}{2}} \int_{-6}^{4-2x-y} dz dx dy$
- (۳) $\int_0^6 \int_{y-4}^{\frac{4-y}{2}} \int_{-6}^{4-2x-y} dz dx dy$
- (۴) $\int_0^6 \int_{y-4}^{\frac{4-y}{2}} \int_{-6}^{4-2x-y} dz dx dy$



۴۴- انتگرال معین $\int_{-2}^2 \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} 2xy dy dx$:

- (۱) مساحت ربع دایره $x^2 + y^2 = 9$ است.
- (۲) مساحت نیم دایره $x^2 + y^2 = 9$ است.
- (۳) مساحت نواری از دایره $x^2 + y^2 = 9$ محدود به محور yها و خط $x = -2$ است.
- (۴) مساحت نیم نواری از دایره $x^2 + y^2 = 9$ محدود به محور xها و yها و خط $x = -2$ است.

۴۵- حاصل $\int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \cos(x^2+y^2) dy dx$ کدام است؟

- (۱) ۱
- (۲) $\pi \sin 1$
- (۳) π
- (۴) $\pi \cos 2$

۴۶- مقدار $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \int_x^{\pi} \frac{\cos y}{y} dy dx$ کدام است؟

- (۱) ۱
- (۲) ۲
- (۳) $\frac{\pi}{2}$
- (۴) π

۴۷- حجم هرم محدود به صفحه $x + \frac{y}{2} + \frac{z}{3} = 1$ و صفحات مختصات کدام است؟

- (۱) ۱
- (۲) ۲
- (۳) ۳
- (۴) ۶

۴۸- اگر $R = [1, 2] \times [0, 1]$ ، $\iint_R \frac{1}{x+y} dx dy$ برابر است با:

- (۱) ۰
- (۲) $\ln \frac{9}{4}$
- (۳) $\ln \frac{27}{16}$
- (۴) $+\infty$

۴۹- مقدار انتگرال $\int_D \exp(x^2+y^2+z^2)^2 dV$ در صورتیکه D گوی یکی در R^3 باشد کدام است؟

- (۱) $\frac{2}{3}\pi(e-1)$
- (۲) $\frac{4}{3}\pi(e-1)$
- (۳) $\frac{4}{3}\pi(1-e)$
- (۴) $\frac{2}{3}\pi(1-e)$

۵۰- حجم محدود به دو رویه $yz = x^2 + y^2$ و $yz = \sqrt{x^2 + y^2}$ کدام است؟

- (۱) $\frac{2\pi}{3}$
- (۲) $\frac{4\pi}{3}$
- (۳) $\frac{5\pi}{3}$
- (۴) $\frac{8\pi}{3}$

۵۱- انتگرال $I = \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} x e^{-x^2-y^2} dy dx$ برابر است با:

- (۱) $-\frac{1}{2}$
- (۲) ۱
- (۳) $\frac{1}{2}$
- (۴) -۱

۵۲- حجم محصور بین سطوح $z = 0$ و $z = 1 - x^2 - y^2$ برابر است با:

- (۱) ۱
- (۲) 4π
- (۳) π
- (۴) $\frac{\pi}{2}$

۵۳- اگر A درون یک چهار ضلعی با رئوس $(0, \pi)$ و $(\pi, 2\pi)$ و $(2\pi, \pi)$ و $(\pi, 0)$ باشد، آنگاه $I = \iint_A (x-y)^2 \sin^2(x+y) dx dy$ برابر است با:

- (۱) $\frac{\pi^4}{6}$
- (۲) $\frac{\pi^4}{3}$
- (۳) $\frac{\pi^4}{2}$
- (۴) $\frac{\pi^4}{6}$

۵۴- مساحت محصور به منحنی های $xy = 4$ ، $xy = 8$ ، $xy^2 = 5$ ، $xy^2 = 15$ برابر کدام یک از گزینه های زیر است؟

- (۱) $4 \ln 2$
- (۲) $2 \ln 2$
- (۳) $2 \ln 5$
- (۴) $4 \ln 5$

۶۵- حاصل انتگرال $\iint_R xe^{x+y} dx dy$ روی ناحیه $(x,y) \in [1,2] \times (-\infty,-2]$ کدام است؟

(مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری - سراسری ۸۳)

- (۱) e (۲) -۱ (۳) ۱ (۴) e-۱

۶۶- حجم محدود به رویه $z = 9 - x^2 - y^2$ و صفحه $z = 0$ و استوانه $x^2 + y^2 = 4$ کدام است؟

(مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری - سراسری ۸۳)

- (۱) 14π (۲) 16π (۳) 18π (۴) 28π

۶۷- قاعده جسمی قائم‌منطبق بر دایره $x^2 + y^2 = 9$ و مقطع آن با هر صفحه عمود بر محور x ها یک مربع است. حجم آن کدام است؟

(MBA - سراسری ۸۳)

- (۱) ۷۲ (۲) ۱۰۸ (۳) ۱۲۶ (۴) ۱۴۴

۶۸- مقدار $\int_0^1 \int_0^1 \sin x^2 dx dy$ چقدر است؟

(ژئوفیزیک - سراسری ۸۳)

- (۱) صفر (۲) $\cos 1 - 1$ (۳) $\frac{1}{2}$ (۴) $\frac{1}{2}(1 - \cos 1)$

۶۹- اگر $f(x,y) = \text{Max}\{x,y\}$ به ازای هر (x,y) در مربع D، که در آن $0 \leq x \leq 1$ ، $0 \leq y \leq 1$ ، آنگاه مقدار انتگرال دوگانه

(مهندسی هسته‌ای - سراسری ۸۳)

$\iint_D f(x,y) dx dy$ برابر است با:

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) $\frac{1}{2}$ (۴) $\frac{2}{3}$

۷۰- در یک هشتم اول فضا (ناحیه $x > 0$ ، $y > 0$ ، $z > 0$) حجم محدود به رویه $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ و صفحه $z = 1$ و صفحات yz ، xz برابر

(مهندسی هسته‌ای - سراسری ۸۳)

است با:

- (۱) $\frac{\pi}{6}$ (۲) $\frac{\pi}{8}$ (۳) $\frac{\pi}{12}$ (۴) $\frac{\pi}{18}$

۷۱- حاصل $\iint_R e^{-x^2} dx dy$ که در آن R ناحیه محدود به محور x ها، خط $x = 1$ و $y = x$ می‌باشد کدامیک از اعداد زیر است؟

(معدن - سراسری ۸۳)

- (۱) $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$ (۲) $\frac{e-1}{2e}$ (۳) $\frac{e\sqrt{\pi}}{2}$ (۴) $\frac{\sqrt{\pi}(1+e)}{2}$

۷۲- حجم محدود به رویه $z = x^2 + y^2$ و صفحه به معادله $x + y = 1$ و صفحات مختصات کدام است؟

(معدن - سراسری ۸۳)

- (۱) $\frac{1}{3}$ (۲) $\frac{1}{4}$ (۳) $\frac{1}{6}$ (۴) $\frac{2}{3}$

۷۳- مقدار $\iint_E \sin\left(\frac{x-y}{x+y}\right) dx dy$ وقتی E ناحیه محدود به $x = 0$ ، $y = 0$ و $x + y \leq 1$ باشد کدام است؟

(ریاضی - سراسری ۸۳)

- (۱) صفر (۲) $\frac{1}{2}$ (۳) ۱ (۴) $\frac{\pi}{2}$

۷۴- مقدار $\int_0^1 \int_0^1 |x+y| dx dy$ (که در آن | | علامت جزء صحیح است) کدام عدد است؟

(ریاضی - سراسری ۸۳)

- (۱) $\frac{1}{2}$ (۲) ۱ (۳) $\frac{3}{2}$ (۴) ۲

۷۵- مقدار $\iiint_E \frac{dx dy dz}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z-2)^2}}$ وقتی E حجم محدود به کره به مرکز مبدأ و به شعاع واحد است، کدام عدد است؟

(ریاضی - سراسری ۸۳)

- (۱) $\frac{4\pi}{3}$ (۲) $\frac{3\pi}{2}$ (۳) $\frac{3\pi}{4}$ (۴) $\frac{2\pi}{3}$

۷۶- جرم ستاره‌ای کروی شکل به شعاع a که دارای چگالی $\rho(x,y,z) = 3 \cdot e^{-\left[\frac{x^2+y^2+z^2}{a^2}\right]^{\frac{1}{2}}}$ می‌باشد کدام است؟ (ریاضی - سراسری ۸۳)

- (۱) $4 \cdot \pi a^3 \left(1 - \frac{1}{e}\right)$ (۲) $2 \cdot \pi a^3 \left(1 - \frac{1}{e}\right)$ (۳) $4 \cdot \pi a^3 \left(1 + \frac{1}{e}\right)$ (۴) $2 \cdot \pi a^3 \left(1 + \frac{1}{e}\right)$

۷۷- مقدار انتگرال $\int_0^1 \int_0^{1-x} e^{\frac{y}{x+y}} dy dx$ برابر با چیست؟ (عمران - سراسری ۸۴)

- (۱) e-۱ (۲) $\frac{e-1}{2}$ (۳) e+۱ (۴) $\frac{e+1}{2}$

۷۸- مقدار انتگرال $\iiint_B (x^2 + y^2) dx dy dz$ که در آن B ناحیه (گوی) $x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2$ می‌باشد کدام است؟ (عمران - سراسری ۸۴)

- (۱) $\frac{8\pi a^5}{15}$ (۲) $\frac{4\pi a^5}{15}$ (۳) $\frac{8\pi a^5}{5}$ (۴) $\frac{4\pi a^5}{5}$

۷۹- مقدار انتگرال $I = \int_0^1 dx \int_0^1 \frac{y^\lambda}{x^2 + y^2} dy$ ($\lambda > 0$) برابر با چیست؟ (عمران - سراسری ۸۴)

- (۱) $\frac{\pi}{\lambda}$ (۲) $\frac{\pi}{4\lambda}$ (۳) $\frac{2\pi}{\lambda}$ (۴) $\frac{\pi}{2\lambda}$

۸۰- مقدار انتگرال دوگانه $\iint_R \frac{\sin \sqrt{x^2 + y^2}}{\sqrt{x^2 + y^2}} dA$ روی ناحیه $R: \frac{\pi^2}{16} \leq x^2 + y^2 \leq \frac{\pi^2}{9}$ کدام است؟

(مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری - سراسری ۸۴)

- (۱) $\pi \frac{\sqrt{2}}{2}$ (۲) $\pi(\sqrt{2} - 1)$ (۳) $\pi(\sqrt{2} + 1)$ (۴) $\pi \left(\frac{\sqrt{2} + 1}{2}\right)$

۸۱- مرکز جرم ناحیه $x^2 + y^2 \leq a^2$ ، $y \geq 0$ و $a > 0$ کدام است؟

(مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری - سراسری ۸۴)

- (۱) $\left(0, \frac{a}{2}\right)$ (۲) $\left(0, \frac{4}{3\pi} a\right)$ (۳) $\left(\frac{4}{3\pi} a, 0\right)$ (۴) $\left(\frac{2}{3\pi} a, \frac{2}{3\pi} a\right)$

۸۲- مقدار انتگرال $\int_0^1 dy \int_0^1 \sin \pi x^2 dx$ کدام است؟ (مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری - سراسری ۸۴)

- (۱) ۰ (۲) $\frac{1}{2}$ (۳) $\frac{1}{\pi}$ (۴) $\frac{2}{3}$

۸۳- مقدار انتگرال دوگانه $\iint_D x dA$ روی ناحیه مثلثی D به رأس‌های $(1,0)$ ، $(2,2)$ و $(2,0)$ کدام است؟

(مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری - سراسری ۸۴)

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) $\frac{2}{3}$ (۴) $\frac{5}{3}$

۸۴- حجم ناحیه محدود به صفحه‌های $x - 2y + z = \pm 2$ ، $x + y + 2z = \pm 3$ و $4x + y + z = \pm 6$ کدام است؟

(مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری - سراسری ۸۴)

- (۱) ۰ (۲) ۳ (۳) ۱۶ (۴) ۲۶

۸۵- اگر جسم S توسط سطوح به معادله‌های $z = xy$ و $z = x^2$ و $y = x^2$ و $y^2 = x$ و صفحه $z = 0$ محدود شده باشد، حجم آن کدام است؟

(کامپیوتر - سراسری ۸۴)

- (۱) $\frac{1}{6}$ (۲) $\frac{1}{12}$ (۳) $\frac{1}{3}$ (۴) $\frac{1}{9}$

۸۶- حجم محدود شده توسط مخروط به معادله $z^2 = x^2 + y^2$ و کره به معادله $x^2 + y^2 + z^2 = 4z$ در بالای مخروط کدام است؟

(کامپیوتر - سراسری ۸۴)

- (۱) 9π (۲) 8π (۳) 7π (۴) 6π

۸۷- مقدار انتگرال $\int \int_{\sqrt{1+x^2}}^{\sqrt{1+y^2}} \frac{1}{x^2+y^2+1} dy dx$ کدام است؟

(ژئوفیزیک - سراسری ۸۴)

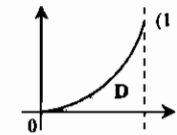
- (۱) $\frac{\pi}{3} \text{Ln}(1+\sqrt{2})$
- (۲) $\frac{\pi}{4} \text{Ln}(1+\sqrt{2})$
- (۳) $\frac{\pi}{3} \text{Ln}(1+\sqrt{3})$
- (۴) $\frac{\pi}{3} \text{Ln}(1+\sqrt{2})$

۸۸- حاصل $\iint_R x^2 y^2 dA$ وقتی ناحیه محدود به خطوط به معادله‌های $x=0, y=1$ و $x=y$ باشد کدام است؟ (ژئوفیزیک - سراسری ۸۴)

- (۱) $\frac{7}{2}$
- (۲) $\frac{7}{3}$
- (۳) $\frac{7}{4}$
- (۴) $\frac{7}{5}$

۸۹- اگر $D = \{(x,y) : 0 \leq y \leq x^2, 0 \leq x \leq 1\}$ آنگاه مقدار انتگرال دوگانه ناسره $\iint_D \frac{dA}{(x-y)^2}$ کدام است؟

(مهندسی هسته‌ای - سراسری ۸۴)



- (۱) صفر
- (۲) ۱
- (۳) $\text{Ln} 2$
- (۴) ∞

۹۰- اگر $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq x^2, 0 \leq x \leq 1\}$ آنگاه مقدار انتگرال غیرعادی (ناسره) $\iint_D \frac{dA}{(x+y)^2}$ کدام است؟

(معدن - سراسری ۸۴)

- (۱) $2 \text{Ln} 2$
- (۲) ۱
- (۳) $\text{Ln} 2$
- (۴) ∞

۹۱- حجم ناحیه‌ای از فضای سه بعدی \mathbb{R}^3 که مقطع آن با صفحه xy مثلث توپر با رئوس $(0,0), (1,0), (0,1)$ بوده و برشهای آن توسط صفحاتی عمود بر محور y نیم‌دایره هستند عبارتست از

- (۱) $\frac{\pi}{30}$
- (۲) $\frac{\pi}{24}$
- (۳) $\frac{\pi}{12}$
- (۴) $\frac{\pi}{6}$

۹۲- حجم جسمی که در ناحیه اول از هشت ناحیه فضا قرار گرفته و محدود به صفحات مختصات و سطوح به معادله‌های $z = 2 + x^2 + 2y^2$ و $x^2 + y^2 = 1$ باشد، کدام است؟

- (۱) $\frac{3\pi}{4}$
- (۲) $\frac{6\pi}{4}$
- (۳) $\frac{2\pi}{4}$
- (۴) $\frac{4\pi}{3}$

۹۳- حاصل $\int \int_{\sqrt{1-y^2}}^{\sin x} x dy dx$ کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{6}$
- (۲) $\frac{1}{5}$
- (۳) $\frac{1}{4}$
- (۴) $\frac{1}{3}$

۹۴- مقدار حجم ناحیه محدود به مخروط $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ و سهمیگون $z = 4 - x^2 - y^2 + 3z$ کدام است؟

- (۱) $\frac{\pi}{4}$
- (۲) $\frac{\pi}{3}$
- (۳) $\frac{\pi}{2}$
- (۴) π

۹۵- حاصل $\iiint_R \frac{dx dy dz}{(x^2 + y^2 + z^2)^2}$ وقتی ناحیه محدود به دو کره $x^2 + y^2 + z^2 = 2$ و $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ باشد، کدام است؟

- (۱) $2\pi \text{Ln} 2$
- (۲) $4\pi \text{Ln} 2$
- (۳) $2\pi \text{Ln} 2$
- (۴) $4\pi \text{Ln} 2$

باسخنامه تست‌های طبقه‌بندی شده فصل سوم

۱- گزینه «۴» مقطع بیضیوار با صفحه داده شده، بیضی $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = \frac{9}{25}$ می‌باشد. که اگر معادله آن را به فرم $\frac{x^2}{(\frac{6}{5})^2} + \frac{y^2}{(\frac{9}{5})^2} = 1$ بنویسیم،

آنگاه: $S = \pi ab = \pi \times \frac{6}{5} \times \frac{9}{5} = \frac{54\pi}{25}$

۲- گزینه «۴» از مختصات قطبی استفاده می‌کنیم:

$$\iint_R xy dA = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 r \cos \theta \times r \sin \theta \times r dr d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{4} \sin 2\theta d\theta \times \int_0^1 r^3 dr = \frac{-1}{4} \cos 2\theta \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{8}$$

۳- گزینه «۲» از مختصات بیضوی استفاده می‌کنیم:

$\begin{cases} x = a \cos \theta \\ y = b \sin \theta \end{cases}, J = abr$

$$\iint_D \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}} dx dy = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \sqrt{1 - r^2} \times abr dr d\theta = 2\pi ab \times \frac{-1}{3} (1 - r^2)^{\frac{3}{2}} \Big|_0^1 = \frac{2}{3} \pi ab$$

۴- گزینه «۱» با تعویض ترتیب انتگرال گیری داریم:

$$\int_0^1 \int_x^1 \sqrt{1 - y^2} dy dx = \int_0^1 \int_0^y \sqrt{1 - y^2} dx dy = \int_0^1 y \sqrt{1 - y^2} dy = \frac{-1}{3} (1 - y^2)^{\frac{3}{2}} \Big|_0^1 = \frac{1}{3}$$

۵- گزینه «۴» $\int_0^1 \int_0^{x^2} (x^2 + y^2) dy dx = \int_0^1 (x^4 + \frac{1}{3} x^6) dx = \frac{26}{105}$

۶- گزینه «۲» $\iint_D e^x dA = \int_0^1 \int_0^x e^x dy dx = \int_0^1 x e^x dx = \int_0^1 (x e^x - e^x) dx = \frac{1}{2} (e - 1)$

۷- گزینه «۳» معادلات رویه‌های داده شده را به صورت زیر می‌نویسیم:

$\begin{cases} z = 4x^2 + y^2 - 4 \\ z = 9 - \frac{9}{4}y^2 - 9x^2 \end{cases}$

دو رویه همدیگر را روی بیضی $4x^2 + y^2 = 4$ و یا $x^2 + \frac{y^2}{4} = 1$ در صفحه $Z = 0$ قطع می‌کنند.

حجم موردنظر از بالا محدود به رویه $Z = 9 - \frac{9}{4}y^2 - 9x^2$ و از پایین محدود به رویه $Z = 4x^2 + y^2 - 4$ می‌باشد. بنابراین اگر ناحیه درون

بیضی $x^2 + \frac{y^2}{4} = 1$ را D فرض کنیم، آنگاه: $V = \iint_D ((9 - \frac{9}{4}y^2 - 9x^2) - (4x^2 + y^2 - 4)) dA = 13 \iint_D (1 - x^2 - \frac{y^2}{4}) dA$

برای محاسبه انتگرال فوق از مختصات بیضوی استفاده می‌کنیم، یعنی: $x = r \cos \theta, y = 2r \sin \theta \Rightarrow J(r, \theta) = 2r$

بنابراین: $V = 13 \int_0^{2\pi} \int_0^1 (1 - r^2) \times 2r dr d\theta = 13 \int_0^{2\pi} d\theta \times \int_0^1 (2r - 2r^3) dr = 13 \times 2\pi$

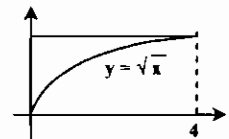
۸- گزینه «۳» از دستگاه مختصات استوانه‌ای استفاده می‌کنیم. در این صورت معادله مخروط به صورت $Z = r$ و معادله استوانه به صورت

$$r = \rho \cos \theta \quad \text{و} \quad -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \quad \text{در می‌آید. بنابراین:}$$

$$V = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\rho \cos \theta} \int_0^{\rho \cos \theta} r dz dr d\theta = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\rho \cos \theta} r^2 dr d\theta = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\rho^3 \cos^3 \theta}{3} d\theta$$

$$= \frac{\rho^3}{3} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin^2 \theta) \cos \theta d\theta = \frac{\rho^3}{3} \left(\sin \theta - \frac{\sin^3 \theta}{3} \right) \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{2\rho^3}{9}$$

۹- گزینه «۲» با توجه به شکل مقابل ترتیب انتگرال گیری را عوض می‌کنیم:



$$\int_0^4 \int_{\sqrt{x}}^4 \cos(y^2) dy dx = \int_0^4 \int_0^{y^2} \cos(y^2) dx dy = \int_0^4 y^2 \cos(y^2) dy = \frac{1}{3} \sin(y^2) \Big|_0^4 = \frac{1}{3} \sin 16$$

۱۰- گزینه «۴» با تعویض ترتیب انتگرال گیری خواهیم داشت:

$$\int_0^4 \int_{\sqrt{x}}^4 \sqrt{x^2+1} dx dy = \int_0^4 \int_0^{y^2} \sqrt{x^2+1} dx dy = \int_0^4 x^2 \sqrt{x^2+1} dx = \frac{2}{9} (x^2+1)^{\frac{3}{2}} \Big|_0^4 = \frac{52}{9}$$

۱۱- گزینه «۴» از مختصات قطبی استفاده می‌کنیم. در این صورت:

$$\int_0^{\Delta} \int_0^{\sqrt{\Delta^2-x^2}} dy dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\Delta} r dr d\theta = \frac{\Delta^2 \pi}{4}$$

۱۲- گزینه «۳»

$$\iint_D e^{xy-x} dy dx = \int_0^1 \int_0^x e^{xy-x} dy dx = \int_0^1 \frac{1}{x} e^{xy-x} \Big|_0^x dx = \int_0^1 \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x} e^{-x} \right) dx = \left(\frac{x}{x} + \frac{1}{x} e^{-x} \right) \Big|_0^1 = \frac{1}{2} (1 + e^{-2})$$

۱۳- گزینه «۴» از مختصات قطبی استفاده می‌کنیم:

$$\int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \frac{1}{1+x^2+y^2} dy dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 \frac{1}{1+r^2} \times r dr d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^1 \frac{r}{1+r^2} dr = \theta \left[\frac{1}{2} \ln(1+r^2) \right]_0^1 = \frac{\pi}{4} \ln 2$$

۱۴- گزینه «۲»

$$\iint_D f(x,y) dx dy = \int_0^1 \int_0^{\frac{1}{y}} yx^{\frac{1}{y}} dx dy = 2\sqrt{x} \Big|_0^{\frac{1}{y}} \times \frac{1}{y} dy = 1$$

۱۵- گزینه «۳» از دستگاه مختصات استوانه‌ای استفاده می‌کنیم. در این صورت معادله سهمیگون به صورت $az = r^2$ و معادله استوانه به صورت

$$r = \rho \cos \theta \quad \text{و} \quad -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \quad \text{در می‌آید. بنابراین:}$$

$$V = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\rho \cos \theta} \int_0^{\rho \cos \theta} r dz dr d\theta = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\rho \cos \theta} \frac{1}{2} r^2 dr d\theta = \frac{1}{6} \rho^3 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 \theta d\theta = \frac{\rho^3 \pi a}{2}$$

۱۶- گزینه «۲» از دستگاه مختصات بیضوی استفاده می‌کنیم:

$$\iint_D x^r dx dy = \int_0^{2\pi} \int_0^1 a^r r^r \cos^r \theta \times a b r dr d\theta = a^r b \int_0^{2\pi} \cos^r \theta d\theta \int_0^1 r^r dr = \frac{\pi a^r b}{4}$$

۱۷- گزینه «۱»

$$\iint_D f(x,y) dx dy = \int_0^r \int_0^y x(r+y) dx dy + \int_0^r \int_y^r y(1+x^r) dx dy$$

$$= \int_0^r \left(\frac{y^2}{2} + y^2 \right) dy + \int_0^r \left(-\frac{y^r}{r} - y^r + \frac{1}{r} \right) dy = \frac{1}{3} r^3 + \frac{r}{15} = \frac{9}{5} r$$

۱۸- گزینه «۱»

$$\int_0^r \int_1^{e^x} x dy dx = \int_1^{e^r} x(e^x - 1) dx = \left(x e^x - e^x - \frac{x^2}{2} \right) \Big|_1^{e^r} = e^r - 1$$

۱۹- گزینه «۲»

$$I = \int_0^1 \int_1^x x^r e^{xy} dy dx = \int_0^1 x e^{xy} \Big|_1^x dx = \int_0^1 x e^{x^2} dx - \int_0^1 x e^x dx = \frac{1}{2} e^{x^2} \Big|_0^1 - (x e^x - e^x) \Big|_0^1 = \frac{1}{2} e - \frac{3}{2}$$

۲۰- گزینه «۱»

$$\int_1^e \int_0^x \frac{dy dx}{(x+y)^2} = \int_1^e \left(\frac{-1}{x+y} \right) \Big|_0^x dx = \int_1^e \left(\frac{-1}{2x} + \frac{1}{x} \right) dx = \int_1^e \frac{dx}{2x} = \frac{1}{2} \ln x \Big|_1^e = \frac{1}{2}$$

۲۱- گزینه «۳»

۲۲- گزینه «۳» به متن درس مراجعه کنید.

۲۳- گزینه «۴»

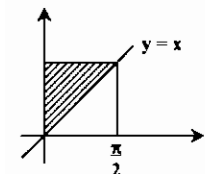
$$\iint_E \cos(x+y) dx dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^y \cos(x+y) dx dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin 2y - \sin y) dy = \left(-\frac{1}{2} \cos 2y + \cos y \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = -2$$

۲۴- گزینه «۲» با توجه به وجود تقارن ناحیه انتگرال گیری و چگالی داده شده نسبت به محورهای مختصات، کافی است مقدار جرم در یک هشتم

اول را محاسبه کرده و حاصل را در هشت ضرب کنیم، بنابراین:

$$M = 8 \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \int_0^{\sqrt{1-x^2}} xyz dz dy dx = 4 \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} xy(1-x^2) dy dx = 2 \int_0^1 x(1-x^2)^2 dx = \frac{1}{3}$$

۲۵- گزینه «۲» با توجه به شکل مقابل، با تعویض ترتیب انتگرال گیری داریم:



$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_x^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin y}{y} dy dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^y \frac{\sin y}{y} dx dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin y dy = 1$$

۲۶- گزینه «۳» صفحه P موردنظر صفحه $Z = y$ می‌باشد. بنابراین:

$$V = \int_0^1 \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \int_0^y dz dy dx = \int_0^1 \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} y dy dx = \int_0^1 (1-x^2) dx = \frac{2}{3}$$

۲۷- گزینه «۱ و ۴» از مختصات کروی استفاده می‌کنیم:

$$I = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_1^{\frac{1}{\rho}} \frac{1}{\rho^2} \times \rho^2 \sin \phi d\rho d\phi d\theta = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_1^{\frac{1}{\rho}} \frac{1}{\rho} d\rho d\phi d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi} \sin \phi d\phi \int_1^{\frac{1}{\rho}} \frac{1}{\rho} d\rho = 2\pi \times 2 \times \ln 4 = 4\pi \ln 4 = 8\pi \ln 2$$

۲۸- گزینه «۱» ناحیه درون دایره $x^2 + y^2 = 1$ را D می‌نامیم. در این صورت جرم جسم موردنظر برابر است با:

$$M = \iint_D \left(\int_{-\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{x^2+y^2}} \sqrt{x^2+y^2} dz \right) dx dy = \iint_D r(x^2+y^2) dx dy$$

$$M = \int_0^{2\pi} \int_0^1 r^2 \times r dr d\theta = \int_0^{2\pi} d\theta \times \int_0^1 r^3 dr = 2\pi \times \frac{1}{4} = \frac{\pi}{2}$$

برای محاسبه انتگرال فوق از مختصات قطبی استفاده می‌کنیم:

۲۹- گزینه «۳» برای محاسبه انتگرال داده شده از تغییر متغیر زیر استفاده می‌کنیم:

$$\begin{cases} u = x + y \\ v = x - y \end{cases} \Rightarrow J(u, v) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{vmatrix} = -\frac{1}{2}$$

با تغییر متغیر فوق ناحیه D در صفحه uv به صورت روبرو در می‌آید:

$$R: -1 \leq u \leq 1, -1 \leq v \leq 1$$

بنابراین:

$$\iint_D f(x+y) dx dy = \iint_R f(u) |J(u,v)| du dv = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(u) du dv = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 f(u) du \int_{-1}^1 dv = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 f(u) du \times 2 = \int_{-1}^1 f(u) du$$

۳۰- گزینه «۲» از مختصات قطبی استفاده می‌کنیم:

$$\iint_R \frac{x+y}{\sqrt{x^2+y^2}} dx dy = \int_0^{2\pi} \int_0^a \frac{r \cos \theta + r \sin \theta}{r} \times r dr d\theta = \int_0^{2\pi} (\cos \theta + \sin \theta) d\theta \times \int_0^a r dr = a^2$$

$$\int_0^1 \int_{\frac{x}{2}}^1 e^{y^2} dy dx = \int_0^1 \int_0^{2y} e^{y^2} dx dy = \int_0^1 2y e^{y^2} dy = e^{y^2} \Big|_0^1 = e - 1$$

۳۱- گزینه «۴» ترتیب انتگرال‌گیری را عوض می‌کنیم:

۳۲- گزینه «۱» ابتدا توجه کنید که:

$$\frac{1}{J} = \frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2x & -2y \\ 2y & 2x \end{vmatrix} = 4x^2 + 4y^2$$

با تعویض متغیرهای داده شده مرزها به صورت $1 \leq u \leq 4$ و $2 \leq v \leq 4$ در می‌آیند. بنابراین:

$$I = \iint_D (x^2 + y^2) dx dy = \int_1^4 \int_2^4 (x^2 + y^2) \times \frac{1}{4x^2 + 4y^2} du dv = \frac{1}{4} \int_1^4 \int_2^4 du dv = 4$$

۳۳- گزینه «۴» برای محاسبه انتگرال از تغییر مختصات قطبی استفاده می‌کنیم:

$$\int_{-1}^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} (x^2 + y^2)^{\frac{2}{3}} dy dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 (r^2)^{\frac{2}{3}} r dr d\theta = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^1 r^{\frac{10}{3}} dr = \frac{\pi}{5}$$

۳۴- گزینه «۱» ناحیه $0 \leq x \leq 2$ و $2x \leq y \leq 4$ یک مثلث تشکیل می‌دهد و با توجه به اینکه $0 \leq z \leq 1$ پس ناحیه موردنظر یک منشور مثلث‌القاعده می‌باشد.

۳۵- گزینه «۳»

۳۶- گزینه «۱» از مختصات قطبی استفاده می‌کنیم:

$$\iint_D \ln(x^2 + y^2) dA = \int_0^{2\pi} \int_1^4 \ln(r^2) \times r dr d\theta = 2 \int_0^{2\pi} d\theta \times \int_1^4 r \ln r dr = 2\pi (\ln 4 - \frac{7}{4})$$

۳۷- گزینه «۳» برای محاسبه انتگرال از مختصات قطبی استفاده می‌کنیم. در این صورت ناحیه D به صورت زیر در می‌آید:

$$D = \{0 \leq r \leq -r \sin \theta\}, \pi \leq \theta \leq 2\pi$$

$$\iint_D (x+y) dA = \int_{\pi}^{2\pi} \int_0^{-r \sin \theta} (r \sin \theta + r \cos \theta) \times r dr d\theta$$

بنابراین:

$$= \int_{\pi}^{2\pi} \int_0^{-r \sin \theta} r^2 (\sin \theta + \cos \theta) dr d\theta = \int_{\pi}^{2\pi} \left(\frac{-\lambda}{3} \sin^3 \theta - \frac{\lambda}{3} \sin^2 \theta \cos \theta \right) d\theta = -\pi$$

$$I = \int_0^{\pi} \int_0^1 r^2 \times r dr d\theta = \int_0^{\pi} d\theta \times \int_0^1 r^3 dr = \frac{\pi}{8}$$

۳۸- گزینه «۴» از مختصات قطبی استفاده می‌کنیم:

۳۹- گزینه «۴» حجم محصور به زیر صفحه $Z = 4 - y$ مدنظر می‌باشد. بنابراین:

$$V = \int_0^1 \int_0^{\sqrt{y}} (4-y) dx dy = \int_0^1 (4\sqrt{y} - y\sqrt{y}) dy = \frac{128}{15}$$

$$\iiint_V \delta(x,y,z) dV = \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 (1+x+yz) dx dy dz = \int_0^1 \int_0^1 \left(\frac{3}{2} + yz \right) dy dz = \int_0^1 \left(\frac{3}{2} + \frac{1}{2} z \right) dz = \frac{5}{4}$$

۴۰- گزینه «۴»

$$V = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_0^{\sin \phi} \rho^2 \sin \phi d\rho d\phi d\theta = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \frac{\rho^3}{3} \sin \phi \Big|_0^{\sin \phi} d\phi d\theta = \frac{1}{9} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \sin^4 \phi d\phi d\theta$$

۴۱- گزینه «۳»

$$= \frac{1}{9} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi} \left(\frac{1 - \cos 2\phi}{4} \right) d\phi = \frac{1}{9} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi} \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{4} \cos 2\phi + \frac{1}{4} \cos^2 \phi \right) d\phi$$

$$= \frac{1}{18\pi} \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{4} \cos 2\phi + \frac{1}{8} (1 + \cos 2\phi) \right) d\phi = \frac{1}{18\pi} \times \frac{2\pi}{4} = \frac{1}{36}$$

۴۲- گزینه «۳»

۴۳- گزینه «۳» از مختصات قطبی استفاده می‌کنیم.

$$\iint_{\Lambda} e^{-(x^2+y^2)} dx dy = \int_0^{2\pi} \int_0^1 e^{-r^2} \times r dr d\theta = \int_0^{2\pi} d\theta \times \int_0^1 r e^{-r^2} dr = \frac{\pi}{2} \left(\frac{1}{2} - \frac{e^{-1}}{2} \right) = \frac{1}{4} \pi (1 - e^{-1})$$

$$V = \int_0^1 \int_0^{2-2x} (x^2 + y^2 + 1) dy dx = \int_0^1 ((x^2 + 1)(2-2x) + \frac{1}{3}(2-2x)^3) dx = \frac{11}{6}$$

۴۴- گزینه «۱»

۴۵- گزینه «۲» تابع تحت انتگرال نسبت به x فرد می‌باشد و ناحیه انتگرال‌گیری توصیف شده در مسأله نسبت به متغیر x متقارن است. پس انتگرال برابر صفر است.

۴۶- گزینه «۴» محل تلاقی سهموی و صفحه xy ، دایره $D: x^2 + y^2 = 4$ می‌باشد. بنابراین:

$$V = \iint_D (4 - x^2 - y^2) dA = \int_0^{2\pi} \int_0^2 (4 - r^2) r dr d\theta = \int_0^{2\pi} d\theta \times \int_0^2 (4r - r^3) dr = 8\pi$$

$$\iiint_D e^{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}}} dV = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_0^1 e^{\rho} \times \rho^2 \sin \phi d\rho d\phi d\theta$$

۴۷- گزینه «۴» از مختصات کروی استفاده می‌کنیم:

$$= \int_0^{2\pi} d\theta \times \int_0^{\pi} \sin \phi d\phi \times \int_0^1 \rho^2 e^{\rho} d\rho = 2\pi \times 2 \times \left(\frac{1}{3} e - \frac{1}{3} \right) = \frac{4\pi}{3} (e - 1)$$

۴۸- گزینه «۱» ابتدا محل تلاقی دو رویه را به دست می آوریم:

$$\begin{cases} z = x^2 + 2y + 1 \\ z = y + 2 \end{cases} \Rightarrow x^2 + 2y + 1 = y + 2 \Rightarrow y = 1 - x^2$$

$$V = \int_0^1 \int_0^{1-x^2} \int_{x^2+2y+1}^{y+2} dz dy dx = \int_0^1 \int_0^{1-x^2} (1-x^2-y) dy dx = \int_0^1 \frac{1}{2}(1-x^2)^2 dx = \frac{4}{15}$$

۴۹- گزینه «۱» از تغییر متغیر $u = x - 2y$ و $v = x + 2y$ استفاده می کنیم. در این صورت:

$$\frac{1}{J} = \frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 4 \Rightarrow J = \frac{1}{4}$$

بنابراین:

$$\iint_D \left(\frac{x-2y}{x+2y}\right)^2 dx dy = \int_1^2 \int_1^2 \left(\frac{u}{v}\right)^2 \times \frac{1}{4} dudv = \frac{1}{4} \int_1^2 \int_1^2 \frac{u^2}{v^2} dudv = \frac{15}{16} \int_1^2 \frac{dv}{v^3} = \frac{5}{12}$$

۵۰- گزینه «۳» با توجه به مرزهای ناحیه انتگرال گیری از تغییر متغیر $u = \frac{y}{x^2}$ و $v = x^2 + y^2$ استفاده می کنیم. در این صورت:

$$\frac{1}{J} = \frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} = \begin{vmatrix} -2y & 1 \\ x^2 & 2y \end{vmatrix} = \frac{-2y^2}{x^2} - \frac{2x}{x^2} = \frac{-4y^2 - 2x^2}{x^2}$$

بنابراین $|J| = \frac{x^2}{2x^2 + 4y^2}$ و کرانه‌های ناحیه انتگرال گیری به صورت $\frac{1}{4} \leq u \leq 1$ و $1 \leq v < 4$ در می آید. در نتیجه:

$$\iint_D \frac{2y^2 + x^2}{x^2} dA = \int_1^2 \int_{\frac{1}{4}}^1 \frac{2x^2 + y^2}{x^2} \times \frac{x^2}{2x^2 + 4y^2} dudv = \int_1^2 \int_{\frac{1}{4}}^1 \frac{1}{2} dudv = \frac{3}{4}$$

۵۱- گزینه «۳» برای محاسبه انتگرال مزبور از مختصات قطبی استفاده می کنیم.

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\infty} re^{-r^2} dr d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{\infty} re^{-r^2} = \theta \left[\frac{\pi}{2} \times \frac{1}{2} e^{-r^2} \right]_0^{\infty} = \frac{\pi}{4}$$

۵۲- گزینه «۴» چون تابع $x \sin y$ فرد و ناحیه انتگرال گیری نسبت به x متقارن است. بنابراین انتگرال آن برابر صفر می شود.

$$\iint_R (x \sin y - ye^x) dx dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_{-1}^1 -ye^x dx dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} -y dy \times \int_{-1}^1 e^x dx = \frac{-\pi^2}{8} \left(e - \frac{1}{e} \right) = \frac{\pi^2}{8} \left(\frac{1}{e} - e \right)$$

۵۳- هیچ کدام از گزینه‌ها صحیح نیست.

۵۴- گزینه «۴»

۵۵- گزینه «۲» از مختصات قطبی استفاده می کنیم. در این صورت:

$$\int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \cos(x^2 + y^2) dy dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 r \cos r^2 dr d\theta = \theta \left[\frac{2\pi}{2} \times \frac{1}{2} \sin r^2 \right]_0^1 = \pi \sin 1$$

۵۶- گزینه «۱» با تعویض ترتیب انتگرال گیری داریم:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_x^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos y}{y} dy dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^y \frac{\cos y}{y} dx dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos y dy = 1$$

۵۷- گزینه «۱» به طور کلی حجم هرم محدود به صفحه $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$ و صفحات مختصات برابر $V = \frac{abc}{6}$ می باشد.

۵۸- گزینه «۳»

$$\iint_R \frac{1}{x+y} dx dy = \int_0^1 \int_1^{1+y} \frac{1}{x+y} dx dy = \int_0^1 \ln(2+y) - \ln(1+y) dy$$

$$= [(2+y)\ln(2+y) - (2+y) - (1+y)\ln(1+y) + (1+y)] \Big|_0^1 = \ln \frac{27}{16}$$

۵۹- گزینه «۲» به تست (۴۷) مراجعه کنید.

۶۰- گزینه «۲» از مختصات استوانه‌ای استفاده می کنیم. در این صورت معادلات رویه‌ها به صورت $Z = r$ و $Z = \frac{r^2}{2}$ در می آید. دو رویه همدیگر را

در $r = \frac{r^2}{2}$ یا $r = 2$ قطع می کنند. بنابراین:

$$V = \int_0^{2\pi} \int_0^2 \int_{\frac{r^2}{2}}^r r dz dr d\theta = \int_0^{2\pi} \int_0^2 (r^2 - \frac{r^3}{2}) dr d\theta = \int_0^{2\pi} \left(\frac{r^3}{3} - \frac{r^4}{8} \right) \Big|_0^2 d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{2}{3} d\theta = \frac{4\pi}{3}$$

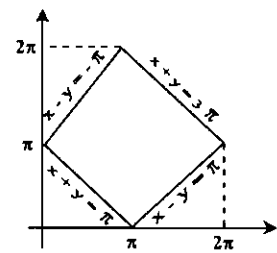
۶۱- گزینه «۳»

$$\int_0^{\infty} \int_0^x x e^{-y} dy dx = \int_0^{\infty} \int_y^{\infty} x e^{-y} dx dy = \int_0^{\infty} \frac{1}{2} e^{-y} dy = \frac{1}{2}$$

۶۲- گزینه «۴» از مختصات قطبی استفاده می کنیم:

$$V = \int_0^{2\pi} \int_0^1 (1-r^2) \times r dr d\theta = \int_0^{2\pi} d\theta \times \int_0^1 (r - r^3) dr = \frac{\pi}{2}$$

۶۳- گزینه «۲» از تغییر متغیر $u = x + y$ و $v = x - y$ استفاده می کنیم. با توجه به شکل مرزهای چهارضلعی به صورت $\pi < u < 2\pi$ و $-\pi < v < \pi$ در می آید.



$$\frac{1}{J} = \frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 \Rightarrow |J| = \frac{1}{2}$$

بنابراین:

$$I = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{\pi}^{2\pi} v^2 \sin^2 u du dv = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} v^2 dv \int_{\pi}^{2\pi} \sin^2 u du = \frac{1}{2} \times \frac{2\pi^3}{3} \times \pi = \frac{\pi^4}{3}$$

۶۴- گزینه «۲» با تغییر متغیرهای $u = xy^2$ و $v = xy$ خواهیم داشت:

$$\frac{1}{J} = \frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} = \begin{vmatrix} y^2 & 2xy \\ y & x \end{vmatrix} = -2xy^2 = -2u \Rightarrow |J| = \frac{1}{2u}$$

بنابراین:

$$S = \int_1^2 \int_0^1 \frac{1}{2u} dudv = \frac{1}{2} \int_1^2 dv \times \int_0^1 \frac{du}{u} = \frac{1}{2} \times 2 \times (\ln 1 - \ln \frac{1}{2}) = \ln 2$$

۶۵- گزینه «۳»

$$\int_1^2 \int_{-\infty}^{-2} x e^{x+y} dy dx = \int_1^2 x e^x dx \times \int_{-\infty}^{-2} e^y dy = (x e^x - e^x) \Big|_1^2 \times e^y \Big|_{-\infty}^{-2} = e^2 \times e^{-2} = 1$$

۶۶- گزینه «۴» برای محاسبه، حجم مورد نظر از مختصات استوانه‌ای استفاده می کنیم:

$$V = \int_0^{2\pi} \int_0^2 (9-r^2) r dr d\theta = \int_0^{2\pi} d\theta \times \int_0^2 (9r - r^3) dr = 28\pi$$

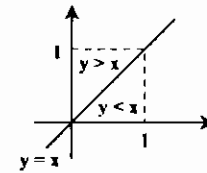
۶۷- گزینه «۴» مقطع مورد نظر مربعی به ضلع $2y$ می باشد که مساحت آن برابر $4y^2$ است. بنابراین:

$$V = \int_{-1}^1 4y^2 dx = 4 \int_{-1}^1 (1-x^2) dx = 144$$

۶۸- گزینه «۴» ترتیب انتگرال گیری را عوض می کنیم، در این صورت:

$$\int_0^1 \int_y^1 \sin x^y dx dy = \int_0^1 \int_0^x \sin x^y dy dx = \int_0^1 x \sin x^x dx = \frac{1}{2}(1 - \cos 1)$$

۶۹- گزینه «۴» با توجه به شکل مقابل:



$$\iint_D f(x,y) dx dy = \int_0^1 \int_0^x x dy dx + \int_0^1 \int_x^1 y dx dy = \int_0^1 x^2 dx + \int_0^1 y^2 dy = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

۷۰- گزینه «۳» حجم محصور به زیر صفحه $Z=1$ و بالای مخروط $Z=\sqrt{x^2+y^2}$ مدنظر می باشد. برای محاسبه حجم از مختصات استوانه ای استفاده می کنیم. معادله مخروط به صورت $Z=2$ در می آید. بنابراین:

$$V = \int_0^{\pi} \int_0^1 \int_r^2 r dz dr d\theta = \int_0^{\pi} \int_0^1 (1-r)r dr d\theta = \int_0^{\pi} d\theta \times \int_0^1 r(1-r) dr = \frac{\pi}{2} \times \frac{1}{6} = \frac{\pi}{12}$$

$$\iint_R e^{-x^2} dx dy = \int_0^1 \int_0^x e^{-x^2} dy dx = \int_0^1 x e^{-x^2} dx = \frac{e-1}{2e} \quad \text{گزینه «۲»}$$

۷۲- گزینه «۳» می خواهیم حجم محدود به زیر رویه $Z=x^2+y^2$ را در فاصله $0 \leq x \leq 1$ و $0 \leq y \leq 1$ به دست آوریم.

$$V = \int_0^1 \int_0^{1-x} (x^2+y^2) dy dx = \int_0^1 (x^2(1-x) + \frac{(1-x)^2}{2}) dx = \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \frac{(1-x)^3}{12} \right) \Big|_0^1 = \frac{1}{6}$$

۷۳- گزینه «۱»

$$\begin{cases} u = x - y \\ v = x + y \end{cases} \Rightarrow J(u,v) = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{+1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} \end{vmatrix} = \frac{-1}{2} \Rightarrow |J| = \frac{1}{2}$$

ناحیه E با تغییر متغیر فوق به صورت $0 \leq v \leq 1$ و $-v \leq u \leq v$ در می آید. بنابراین: $\iint_E \sin\left(\frac{x-y}{x+y}\right) dx dy = \int_0^1 \int_{-v}^v \sin\left(\frac{u}{v}\right) \times \frac{1}{2} du dv$

تابع $\sin\left(\frac{u}{v}\right)$ نسبت به متغیر u تابعی فرد می باشد و ناحیه انتگرال گیری نسبت به u متقارن است. بنابراین حاصل انتگرال برابر صفر است.

$$I = \int_0^1 \int_0^{1-x} [x+y] dy dx = \int_0^1 \int_0^{1-x} [x+y] dy dx + \int_0^1 \int_{1-x}^1 [x+y] dy dx \quad \text{گزینه «۱»}$$

در فاصله $0 \leq y < 1-x$ عبارت $0 \leq x+y < 1$ و بنابراین $[x+y] = 0$ ، ولی در فاصله $1-x \leq y < 1$ و $1 \leq x+y < 1+x < 2$ ،

$$I = \int_0^1 \int_{1-x}^1 dy dx = \int_0^1 x dx = \frac{1}{2} \quad \text{بنابراین } [x+y] = 1 \text{ در نتیجه:}$$

۷۵- گزینه «۴» با توجه به شکل ناحیه انتگرال گیری و انتگرالده بهتر است از مختصات کروی استفاده کنیم.

$$I = \iiint_E \frac{dx dy dz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2-4z+4}} = \int_0^{\pi} \int_0^{\pi} \int_0^1 \frac{\rho^2 \sin \phi}{\sqrt{\rho^2-4\rho \cos \phi+4}} d\rho d\phi d\theta = \frac{2\pi}{3}$$

۷۶- گزینه «۱»

$$M = \iiint_V \delta dV = \int_0^{\pi} \int_0^{\pi} \int_0^a r \circ e^{-\frac{\rho^2}{a^2}} \times \rho^2 \sin \phi d\rho d\phi d\theta = r \circ \int_0^{\pi} d\theta \times \int_0^{\pi} \sin \phi \times \int_0^a \rho^2 e^{-\frac{\rho^2}{a^2}} d\rho = 4 \circ \pi a^2 \left(1 - \frac{1}{e}\right)$$

۷۷- گزینه «۲» از تغییر مختصات $u = y$ و $v = x + y$ استفاده می کنیم:

$$\frac{1}{J} = \frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 \Rightarrow |J| = 1$$

$$\Rightarrow I = \int_0^1 \int_0^v e^v dudv = \int_0^1 v e^v \Big|_0^v dv = \int_0^1 v(e-1) dv = \frac{e-1}{2}$$

۷۸- گزینه «۱» از مختصات کروی استفاده می کنیم:

$$I = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_0^a \rho^2 \sin^2 \phi \times \rho^2 \sin \phi d\rho d\phi d\theta = \int_0^{2\pi} d\theta \times \int_0^{\pi} \sin^3 \phi d\phi \times \int_0^a \rho^4 d\rho = 2\pi \times \frac{4}{3} \times \frac{a^5}{5} = \frac{8\pi a^5}{15}$$

$$\int_0^1 \int_x^1 \frac{y^\lambda}{x^2+y^2} dy dx = \int_0^1 \int_0^y \frac{y^\lambda}{x^2+y^2} dx dy = \int_0^1 y^{\lambda-1} \text{Arctg} \frac{x}{y} \Big|_0^y dy = \frac{\pi}{4} \int_0^1 y^{\lambda-1} dy = \frac{\pi}{4\lambda} \quad \text{گزینه «۲»}$$

۸۰- گزینه «۲» با توجه به شکل ناحیه انتگرال گیری و همچنین انتگرالده، لازم است برای محاسبه انتگرال از مختصات قطبی استفاده کنیم. در

$$\frac{\pi^2}{16} \leq x^2+y^2 \leq \frac{\pi^2}{9} \Rightarrow \frac{\pi^2}{16} \leq r^2 \leq \frac{\pi^2}{9} \Rightarrow \frac{\pi}{4} \leq r \leq \frac{\pi}{3}, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

این صورت:

$$\iint_R \frac{\sin \sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}} dA = \int_0^{2\pi} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin r}{r} \times r dr d\theta = \int_0^{2\pi} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \sin r dr d\theta = \int_0^{2\pi} d\theta \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \sin r dr$$

$$= \theta \Big|_0^{2\pi} \times (-\cos r) \Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} = 2\pi \times \left(\frac{-1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = \pi(\sqrt{2}-1)$$

۸۱- گزینه «۲» چون شکل ناحیه نسبت به محور y متقارن است، پس $\bar{x} = 0$. برای محاسبه \bar{y} از فرمول زیر استفاده می کنیم:

$$\bar{y} = \frac{\iint_D y dA}{\iint_D dA}$$

مقدار $\iint_D dA$ برابر مساحت ناحیه داده شده می باشد و چون ناحیه داده شده نیم دایره ای به شعاع a است، پس $\iint_D dA = \frac{\pi a^2}{2}$ از طرفی:

$$\iint_D y dA = \int_{-a}^a \int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} y dy dx = \int_{-a}^a \frac{1}{2}(a^2-x^2) dx = \frac{\pi a^3}{2}$$

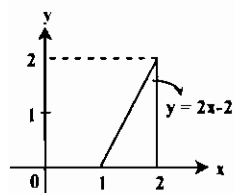
$$\bar{y} = \frac{\frac{\pi a^3}{2}}{\frac{\pi a^2}{2}} = \frac{\pi a}{\pi} = a$$

در نتیجه

۸۲- گزینه «۳» محاسبه مستقیم انتگرال امکان پذیر نیست، بنابراین انتگرال گیری را عوض می کنیم.

$$\int_0^1 dy \int_y^1 \sin(\pi x^2) dx = \int_0^1 \int_0^x \sin(\pi x^2) dy dx = \int_0^1 x \sin(\pi x^2) dx = \frac{-1}{2\pi} \cos(\pi x^2) \Big|_0^1 = \frac{1}{\pi}$$

۸۳- گزینه «۴» با توجه به شکل مقابل:



$$\iint_C x dA = \int_1^2 \int_0^{2x-2} x dy dx = \int_1^2 (2x^2 - 2x) dx = \frac{5}{3}$$

۸۴- گزینه «۲» از تغییر متغیر زیر استفاده می‌کنیم:

$$\begin{cases} u = x - 2y + z \\ v = x + y + 2z \\ w = 4x + y + z \end{cases} \Rightarrow \frac{\partial(u, v, w)}{\partial(x, y, z)} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -18$$

بنابراین $J = \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} = \frac{-1}{18}$ پس حجم موردنظر برابر است با:

$$V = \int_{-2}^2 \int_{-2}^2 \int_{-2}^2 |J| dw dv du = \frac{1}{18} \int_{-2}^2 \int_{-2}^2 \int_{-2}^2 dw dv du = \frac{1}{18} \times 12 \times 6 \times 4 = 16$$

۸۵- گزینه «۲» از تلاقی $y = x^2$ و $y^2 = x$ مقادیر ۰ و ۱ برای x به دست می‌آید، بنابراین:

$$S = \int_0^1 \int_{x^2}^{\sqrt{x}} xy dy dx = \frac{1}{2} \int_0^1 (x^2 - x^5) dx = \frac{1}{12}$$

۸۶- گزینه «۲» از مختصات کروی استفاده می‌کنیم. در مختصات کروی معادلات مخروط و کره داده شده به ترتیب $\phi = \frac{\pi}{4}$ و $\rho = 4 \cos \phi$ می‌باشد. بنابراین:

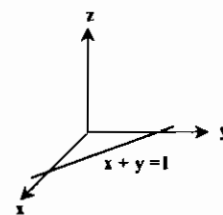
$$V = \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^{4 \cos \phi} \rho^2 \sin \phi d\rho d\phi d\theta = \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{64}{3} \cos^3 \phi \sin \phi d\phi d\theta = \frac{64}{3} \theta \Big|_0^{2\pi} \times \frac{-1}{4} \cos^4 \phi \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{128\pi}{3} \times \left(\frac{-1}{4} \left(\frac{1}{4} - 1 \right) \right) = 8\pi$$

$$\int_0^1 \int_0^{\sqrt{1+x^2}} \frac{dy dx}{(\sqrt{x^2+1})^2 + y^2} = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \text{Arctg} \frac{y}{\sqrt{x^2+1}} \Big|_0^{\sqrt{1+x^2}} dx = \frac{\pi}{4} \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{\pi}{4} \text{Ln}(x + \sqrt{x^2+1}) \Big|_0^1 = \frac{\pi}{4} \text{Ln}(1 + \sqrt{2})$$

$$\iint_R x^2 y^2 dA = \int_1^2 \int_1^y x^2 y^2 dx dy = \frac{1}{3} \int_1^2 y^3 dy = \frac{y^4}{12} \Big|_1^2 = \frac{15}{12} = \frac{5}{4}$$

$$\iint_D \frac{dA}{(x-y)^2} = \int_0^1 \int_0^{x^2} \frac{1}{(x-y)^2} dy dx = \int_0^1 \frac{1}{x-y} \Big|_0^{x^2} dx = \int_0^1 \left(\frac{1}{x-x^2} - \frac{1}{x} \right) dx = \int_0^1 \frac{dx}{x(1-x)} = \infty$$

$$\iint_D \frac{dA}{(x+y)^2} = \int_0^1 \int_0^{x^2} \frac{dy dx}{(x+y)^2} = \int_0^1 \frac{1}{x+1} dx = \text{Ln} 2$$



۹۱- گزینه «۲» با توجه به شکل مقابل مساحت مقاطع مربوطه برابر مساحت یک نیم‌دایره به شعاع $\frac{1-x}{2}$

می‌باشد، بنابراین مساحت مقطع برابر $\frac{1}{2} \pi \left(\frac{1-x}{2} \right)^2$ است و در نتیجه:

$$V = \int_0^1 \frac{1}{2} \pi \left(\frac{1-x}{2} \right)^2 dx = \frac{\pi}{8} \int_0^1 (1-x)^2 dx = \frac{\pi}{24}$$

۹۲- گزینه «۱» ناحیه موردنظر زیر سهمیگون $z = 2 + x^2 + 3y^2$ و بالای صفحه xy در ربع اول و درون استوانه $x^2 + y^2 = 1$ قرار دارد. بنابراین:

$$V = \iint_C (2 + x^2 + 3y^2) dx dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 (2 + r^2 + 2r^2 \sin^2 \theta) \times r dr d\theta$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{2}{2} + \frac{1}{2} \sin^2 \theta \right) d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{2}{2} + \frac{1}{4} (1 - \cos 2\theta) \right) d\theta = \frac{3\pi}{4}$$

$$\int_0^1 \int_0^{\sin x} \frac{xy dy dx}{\sqrt{1-y^2}} = \int_0^1 x \text{Arcsin} y \Big|_0^{\sin x} dx = \int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}$$

۹۳- گزینه «۴»

۹۴- گزینه «۳» از مختصات استوانه‌ای استفاده می‌کنیم. در این صورت معادله مخروط به صورت $Z = 2$ و معادله سهمیگون به صورت

$$V = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_r^{\sqrt{r}} r dz dr d\theta = \int_0^{2\pi} \int_0^1 r \left(\frac{\sqrt{r}}{2} - r \right) dr d\theta = \frac{\pi}{2} \quad Z = \frac{4-r^2}{2}$$

در می‌آید. بنابراین:

۹۵- گزینه «۱» از مختصات کروی استفاده می‌کنیم. در این صورت معادله کره‌ها به ترتیب $\rho = \sqrt{2}$ و $\rho = 1$ خواهد بود. بنابراین:

$$\iiint_R \frac{dx dy dz}{(x^2 + y^2 + z^2)^2} = \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_1^{\sqrt{2}} \frac{1}{\rho^2} \times \rho^2 \sin \phi d\rho d\phi d\theta = \int_0^{2\pi} d\theta \times \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin \phi \times \int_1^{\sqrt{2}} \frac{d\rho}{\rho} = 2\pi \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \text{Ln} 2 = \pi \text{Ln} 2$$

تست های تکمیلی فصل سوم

۱- حاصل $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(\theta + \varphi) d\theta d\varphi$ کدام است؟

- (۱) $\frac{2}{\pi}$ (۲) ۱ (۳) صفر (۴) ۲

۲- حاصل $I = \iint_R xy dx dy$ در صورتی که R محدود به نواحی $x \geq 0$ و $y \geq 0$ و $x^2 + y^2 = a^2$ باشد، کدام است؟

- (۱) $\frac{a^4}{4}$ (۲) $\frac{a^4}{8}$ (۳) $\frac{a^4}{2}$ (۴) $\frac{a^4}{12}$

۳- حاصل $I = \iint_S \sqrt{xy - y^2} dx dy$ در صورتی که S مثلثی با رئوس $(0,0)$ ، $(1,1)$ و $(1,0)$ باشد، کدام است؟

- (۱) ۶ (۲) ۹ (۳) ۳ (۴) ۱۸

۴- حاصل $I = \int_0^{2a} \int_{\frac{x}{2a}}^{\sqrt{ax}} dy dx$ کدام است؟

- (۱) $\frac{16a^2}{3}$ (۲) $\frac{8a^2}{3}$ (۳) $\frac{fa^2}{3}$ (۴) $\frac{8a^2}{3}$

۵- حاصل $I = \int_0^a \int_{\frac{x}{a}}^{a-x} xy dy dx$ کدام است؟

- (۱) $\frac{2a^3}{3}$ (۲) $\frac{3a^3}{8}$ (۳) $\frac{6a^3}{8}$ (۴) $\frac{6a^3}{8}$

۶- حاصل $I = \int_0^{\infty} \int_x^{\infty} \frac{e^{-y}}{y} dy dx$ کدام است؟

- (۱) صفر (۲) ۲ (۳) $\frac{1}{2}$ (۴) -۱

۷- حاصل $I = \int_0^{\pi} \int_0^{\sin \theta} r dr d\theta$ کدام است؟

- (۱) $\frac{\pi a^2}{2}$ (۲) $\frac{\pi a^2}{4}$ (۳) πa^2 (۴) $\frac{\pi a^2}{2}$

۸- حاصل $I = \int_0^2 \int_{\sqrt{x-x^2}}^{\sqrt{2x-x^2}} \frac{xy dx}{\sqrt{x^2+y^2}}$ کدام است؟

- (۱) $\frac{4}{3}$ (۲) $\frac{2}{3}$ (۳) ۲ (۴) ۴

۹- حاصل $I = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 (y^2 - 2xy) dx dy$ کدام است؟

- (۱) ۹ (۲) ۶ (۳) ۱۸ (۴) ۳

۱۰- حاصل $I = \int_1^e \int_1^y e^{x+y} dx dy$ کدام است؟

- (۱) $(e-1)(e+1)^2$ (۲) $e(e^2+1)$ (۳) $e(e^2-1)$ (۴) $e(e+1)(e-1)^2$

۱۱- حاصل $I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos(x+y) dx dy$ کدام است؟

- (۱) ۲ (۲) -۲ (۳) صفر (۴) -۱

۱۲- حاصل $I = \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \frac{dy dx}{x^2+y^2+1}$ کدام است؟

- (۱) $\frac{\pi \text{Ln}(1+\sqrt{2})}{4}$ (۲) $\frac{\pi \text{Ln}(\sqrt{2}-1)}{4}$ (۳) $\frac{\text{Ln}(\sqrt{2}+1)}{4}$ (۴) $\frac{\text{Ln}(\sqrt{2}-1)}{4}$

۱۳- انتگرال دوگانه $I = \int_0^2 \int_x^{2\sqrt{x}} f(x,y) dy dx$ با کدام انتگرال زیر برابر است؟

- (۱) $I = \int_0^2 \int_{\frac{y}{2}}^y f(x,y) dx dy$ (۲) $I = \int_0^2 \int_{\frac{y}{2}}^y f(x,y) dx dy$

- (۳) $I = \int_0^2 \int_{\frac{y}{2}}^y f(x,y) dx dy$ (۴) $I = \int_0^2 \int_{\frac{y}{2}}^y f(x,y) dx dy$

۱۴- حاصل $I = \int_0^1 \int_x^{\sqrt{2x-x^2}} (x^2+y^2) dy dx$ کدام است؟

- (۱) $\frac{2\pi}{8}$ (۲) $\frac{2\pi}{8} + 1$ (۳) $\frac{2\pi}{8} - 1$ (۴) $\frac{2\pi}{8} + 1$

۱۵- حاصل انتگرال سه گانه $I = \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \frac{dx dy dz}{(x^2+y^2+z^2+\pi^2)}$ کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{8}$ (۲) $\frac{\pi}{8}$ (۳) ۸ (۴) 8π

۱۶- حاصل $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos ax - \cos bx}{x} dx$ کدام است؟

- (۱) $\text{Ln} \frac{a}{b}$ (۲) $\text{Ln} \frac{b}{a}$ (۳) صفر (۴) $\frac{a}{e^b}$

۱۷- حاصل $I = \int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\text{Ln} x} dx$ کدام است؟

- (۱) صفر (۲) $\text{Ln} \frac{b}{a}$ (۳) $\text{Ln} \frac{a+1}{b+1}$ (۴) $\text{Ln} \frac{b+1}{a+1}$

۱۸- حاصل $I = \int_0^2 \int_{\sqrt{x}}^{\sqrt{2x-x^2}} \int_{\sqrt{2x-x^2}}^{\sqrt{2x-x^2}} dy dz dx$ کدام است؟

- (۱) 4π (۲) 2π (۳) 8π (۴) 16π

۱۹- مقدار انتگرال دو گانه $I = \iint_D (4 - x^2 - y^2) dx dy$ در صورتی که D ناحیه محدود به خطوط $x=0$ ، $x=1$ ، $y=0$ و $y=\frac{2}{3}$ باشد، کدام است؟

- (۱) $\frac{35}{8}$ (۲) $\frac{35}{4}$ (۳) $\frac{5}{8}$ (۴) $\frac{5}{4}$

۲۰- حجم محدود به رویه $z + \log(x^2 + y^2) = 0$ و صفحه xy کدام است؟

- (۱) $\frac{\pi}{2}$ (۲) π (۳) 2π (۴) $\frac{3\pi}{4}$

۲۱- حاصل انتگرال دوگانه $I = \int_0^1 \int_0^1 \frac{x-y}{x+y} dx dy$ کدام است؟

- (۱) صفر (۲) ۲ (۳) ۱ (۴) -۱

۲۲- حجم محدود به صفحات $x^2 + y^2 = 1$ و $z=0$ و $z = e^{-(x^2+y^2)}$ کدام است؟

- (۱) $\frac{\pi(e+1)}{e}$ (۲) $\frac{\pi(e-1)}{e}$ (۳) πe (۴) صفر

۲۲- مساحت ناحیه درون دایره $r = 1$ و خارج منحنی $r^2 = \cos 2\theta$ کدام است؟

- (۱) $\frac{\pi}{2} - 1$ (۲) $\frac{\pi}{2} + 1$ (۳) $\pi - 1$ (۴) $\pi + 1$

۲۴- حاصل انتگرال دوگانه $I = \iint (x^2 + y^2) dx dy$ بر روی ناحیه محدود به خطوط $y = 0, y = 2, y = 4x, x + y = 2$ کدام است؟

- (۱) $\frac{463}{48}$ (۲) $\frac{461}{48}$ (۳) $\frac{463}{31}$ (۴) $\frac{461}{31}$

۲۵- سطح محصور بین دو منحنی $y^2 = 4 - x$ و $y^2 = 4 - 4x$ کدام است؟

- (۱) ۴ (۲) ۸ (۳) $\frac{8}{3}$ (۴) $\frac{4}{3}$

۲۶- حجم محدود بین رویه‌های $x^2 + y^2 = 1$ و $x^2 + y^2 = z$ و صفحه xy کدام است؟

- (۱) 2π (۲) $\frac{2\pi}{2}$ (۳) $\frac{\pi}{2}$ (۴) π

۲۷- حاصل انتگرال دوگانه $I = \iint_D (x^2 + y^2) dx dy$ که در آن D ناحیه محدود به منحنی $x^2 + y^2 = 2ax$ می‌باشند، کدام است؟

- (۱) $\frac{2}{3}\pi a^2$ (۲) $2\pi a^2$ (۳) $\frac{2\pi}{3}a^2$ (۴) $6\pi a^2$

۲۸- مساحت ناحیه محصور بین منحنی‌های $x^2 = ay$ و $x + y = 2a$ ($a > 0$) کدام است؟

- (۱) $7a^2$ (۲) $9a^2$ (۳) $4/5a^2$ (۴) $3/5a^2$

۲۹- حاصل انتگرال سه گانه $I = \iiint_D \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} dx dy dz$ که در آن D کره‌ای به شعاع r می‌باشد؟

- (۱) πr^3 (۲) πr^2 (۳) πr^2 (۴) $2\pi r^2$

۳۰- جرم ناحیه محدود به کره‌هایی به مراکز مبدأ و شعاع‌های ۱ و ۲ و چگالی حجمی $\rho = x^2 + y^2 + z^2$ کدام است؟

- (۱) $\frac{124\pi^2}{5}$ (۲) $\frac{124\pi}{5}$ (۳) $\frac{124\pi^2}{5}$ (۴) $\frac{124}{5}$

۳۱- حاصل انتگرال دوگانه $I = \iint_D \frac{dx dy}{x^2 + y^2}$ در صورتی که D ناحیه محصور بین نواحی $x \geq 1$ و $x^2 \leq y$ باشد، کدام است؟

- (۱) π (۲) $\frac{\pi}{2}$ (۳) $\frac{\pi}{4}$ (۴) 2π

۳۲- مقدار میانگین تابع $f(x, y) = xy^2$ در ناحیه $S: \{0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$ کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{3}$ (۲) $\frac{1}{6}$ (۳) $\frac{1}{2}$ (۴) $\frac{1}{4}$

۳۳- مقدار میانگین مجذور فاصله نقطه $m(x, y)$ روی دایره $(x - a)^2 + y^2 \leq R^2$ از مبدأ مختصات کدام است؟

- (۱) $a^2 + \frac{R^2}{4}$ (۲) $a^2 + R^2$ (۳) $a^2 + \frac{R^2}{2}$ (۴) $\frac{a^2 + R^2}{4}$

۳۴- انتگرال $I = \int \int_{\sqrt{1-y^2}}^{1-y} f(x, y) dx dy$ با کدامیک از انتگرال‌های زیر برابر است؟

(۱) $\int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x, y) dy + \int_0^1 dx \int_0^{1-x} f(x, y) dy$ (۲) $\int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x, y) dy + \int_0^1 dx \int_0^{1-x} f(x, y) dy$

(۳) $\int_{-1}^0 dx \int_0^{\sqrt{1+x^2}} f(x, y) dy + \int_0^1 dx \int_0^{1-x} f(x, y) dy$ (۴) $\int_{-1}^0 dx \int_0^{\sqrt{1+x^2}} f(x, y) dy + \int_0^1 dx \int_0^{1-x} f(x, y) dy$

۲۵- انتگرال $I = \int dx \int_{\sin x}^{\sin x} f(x, y) dy$ با کدامیک از انتگرال‌های زیر برابر است؟

(۱) $\int_0^1 dy \int_{-\arcsin y}^{\arcsin y} f(x, y) dx$ (۲) $\int_0^1 dy \int_{\arcsin y}^{\pi - \arcsin y} f(x, y) dx$

(۳) $\int_0^1 dy \int_{\pi - \arcsin y}^{\pi + \arcsin y} f(x, y) dx$ (۴) $\int_0^1 dy \int_{\arcsin y}^{\pi + \arcsin y} f(x, y) dx$

۲۶- حاصل $I = \int dx \int_0^{+\cos x} y^2 \sin x dy$ کدام است؟

- (۱) $\frac{4}{3}$ (۲) $\frac{8}{3}$ (۳) $\frac{2}{3}$ (۴) ۲

۲۷- حاصل $I = \iint_S \frac{x dx dy}{x^2 + y^2}$ در صورتی که S قطعه‌ای از سهمی محدود به سهمی $y = \frac{x^2}{2}$ و خط $y = x$ باشد، کدام است؟

- (۱) $2 \ln 2$ (۲) $\ln 2$ (۳) $\frac{\pi}{4} + \ln 2$ (۴) $\frac{\pi}{2} + \ln 2$

۲۸- مقدار انتگرال $I = \iint_S xy dx dy$ که S ناحیه محدود بین محور ox و نیم‌دایره بالائی دایره $(x - 2)^2 + y^2 = 1$ باشد، کدام است؟

- (۱) $\frac{4}{3}$ (۲) $\frac{2}{3}$ (۳) $\frac{8}{3}$ (۴) $\frac{1}{3}$

۲۹- مقدار $I = \iint_S \sqrt{x^2 - y^2} dx dy$ در صورتی که S مثلثی به رئوس $A(0, 0), B(1, 1), C(1, 0)$ باشد، کدام است؟

- (۱) $\frac{\pi}{4}$ (۲) $\frac{\pi}{12}$ (۳) $\frac{\pi}{6}$ (۴) $\frac{\pi}{3}$

۴۰- حاصل انتگرال $I = \iint_S x dx dy$ در صورتی که S ناحیه محدود بین خطی که از نقطه‌های $A(2, 0)$ و $B(0, 2)$ عبور می‌کند و قوس دایره‌ای به شعاع ۱ باشد، کدام است؟

- (۱) $\frac{2}{3}$ (۲) $\frac{1}{3}$ (۳) $\frac{4}{3}$ (۴) $\frac{5}{3}$

۴۱- حجم جسمی که محدود به سهمی $\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = \frac{2x}{a}$ و صفحه $x = a$ است، کدام است؟

- (۱) $\pi a^2 bc$ (۲) $\pi ab^2 c$ (۳) πabc^2 (۴) πabc

۴۲- حجم یک جسم که در استوانه $x^2 + y^2 = 4$ محصور و از بالا به سهمی $z = x^2 + y^2$ و از پایین به صفحه xy محدود است، کدام است؟

- (۱) 8π (۲) 4π (۳) 2π (۴) 6π

۴۳- حاصل $I = \int_0^1 \int_0^1 e^{x^2} dx dy$ کدام است؟

- (۱) $\frac{e^2 + 1}{6}$ (۲) $\frac{e^2 - 1}{6}$ (۳) $\frac{e^2 + 1}{6}$ (۴) $\frac{e^2 - 1}{6}$

۴۴- حاصل $I = \iiint_V z dx dy dz$ در صورتی که V حجم محدود به صفحه $z = 0$ و نیمه بالائی بیضی $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ باشد، کدام است؟

- (۱) $\frac{\pi a^2 bc}{4}$ (۲) $\frac{\pi ab^2 c}{4}$ (۳) $\frac{\pi abc}{4}$ (۴) $\frac{\pi abc^2}{4}$

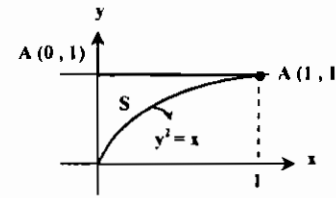
۴۵- حاصل $I = \iiint_V z dx dy dz$ در صورتی که V ناحیه محدود به مخروط $z^2 = \frac{h^2}{R^2}(x^2 + y^2)$ و صفحه $z = h$ باشد، کدام است؟

- (۱) $\frac{\pi h^2 R^2}{4}$ (۲) $\frac{\pi h R^2}{4}$ (۳) $\frac{\pi h R}{4}$ (۴) $\frac{\pi h^2 R^2}{4}$

۴۶- حجم قسمتی از استوانه $x^2 + y^2 = 2ax$ که بین سهمی $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ و صفحه xOy قرار دارد، کدام است؟

- (۱) $\frac{2\pi a^2}{2}$
- (۲) $\frac{2\pi a^2}{4}$
- (۳) $\frac{2\pi a^2}{2}$
- (۴) $\frac{2\pi a^2}{4}$

۴۷- مقدار انتگرال دوگانه $I = \iint_S e^{\frac{x}{y}} dx dy$ در صورتی که S ناحیه نشان داده شده در شکل زیر باشد، کدام است؟



- (۱) $\frac{1}{2}$
- (۲) $\frac{1}{2}$
- (۳) $\frac{2}{3}$
- (۴) $\frac{1}{3}$

۴۸- به ازای چه مقادیری از p انتگرال دوگانه $\iint_S \frac{dx dy}{(1+x^2+y^2)^p}$ همگراست؟ (در صورتی که S شامل تمام صفحه xOy باشد.)

- (۱) $p > 1$
- (۲) $p < 1$
- (۳) $p > -1$
- (۴) $p < -1$

۴۹- حاصل $I = \int_0^{\infty} \frac{\arctan mx}{x(1+x^2)} dx$ کدام است؟

- (۱) $2\pi \ln(1+m)$
- (۲) $\pi \ln(1+m)$
- (۳) $\ln(1+m)$
- (۴) $\frac{\pi}{2} \ln(1+m)$

۵۰- حاصل $I = \int_0^{\infty} dx \int_0^{\infty} \frac{dy}{(x^2+y^2+a^2)^2}$ ، $(a > 0)$ ، کدام است؟

- (۱) $\frac{\pi}{4a^2}$
- (۲) $\frac{\pi}{2a^2}$
- (۳) $\frac{\pi}{a^2}$
- (۴) $\frac{2\pi}{a^2}$

۵۱- حاصل $I = \int_0^{\infty} dx \int_0^{\infty} dy \int_0^{\infty} \frac{dz}{(x^2+y^2+z^2+1)^2}$ کدام است؟

- (۱) $\frac{\pi^2}{4}$
- (۲) $\frac{\pi^2}{8}$
- (۳) $\frac{\pi^2}{4}$
- (۴) $\frac{\pi^2}{8}$

۵۲- حاصل $I = \iint_S \ln \sqrt{x^2+y^2} dx dy$ که در آن S ناحیه $x^2+y^2 \leq 1$ می باشد، کدام است؟

- (۱) $-\frac{\pi}{2}$
- (۲) $-\pi$
- (۳) $\frac{\pi}{2}$
- (۴) π

۵۳- جرم مکعب مستطیل $0 \leq x \leq a$ ، $0 \leq y \leq b$ ، $0 \leq z \leq c$ به شرطی که چگالی آن در نقطه (x,y,z) به صورت $\rho = x+y+z$ باشد، کدام است؟

- (۱) $\frac{abc(a+b+c)}{2}$
- (۲) $\frac{a+b+c}{2}$
- (۳) $\frac{abc}{2}$
- (۴) $abc(a+b+c)$

۵۴- اگر E ناحیه محدود بین خطوط $y-x=-1$ ، $y-x=3$ ، $3y+x=5$ و $3y+x=7$ باشد، حاصل $\iint_E (y-x) dA$ کدام است؟

- (۱) 2
- (۲) $\frac{2}{3}$
- (۳) 1
- (۴) 2

۵۵- حاصل $I = \int_0^1 \int_0^{1-x} e^{x+y} dy dx$ کدام است؟

- (۱) $\frac{e+1}{2}$
- (۲) $\frac{e+1}{4}$
- (۳) $\frac{e-1}{4}$
- (۴) $\frac{e-1}{2}$

۵۶- مقدار $I = \iint_R \frac{x^2}{y^2} dx dy$ که در آن R ناحیه محصور به منحنی‌هایی با معادلات $xy=2$ ، $xy=4$ ، $x=y^2$ و $y^2=3x$ است، برابر است با:

- (۱) $\frac{2}{27}$
- (۲) $\frac{4}{27}$
- (۳) $\frac{8}{27}$
- (۴) $\frac{1}{27}$

۵۷- مقدار انتگرال سه‌گانه تابع $f(x,y,z) = 2xyz$ بر ناحیه R محدود بین صفحات $z=y=0$ و $z=x$ و $y=x$ و استوانه $z=2-\frac{x^2}{2}$ واقع در

$\frac{1}{8}$ اول کدام است؟

- (۱) $\frac{2}{3}$
- (۲) $\frac{2}{4}$
- (۳) $\frac{8}{3}$
- (۴) $\frac{4}{3}$

۵۸- حجم محدود به سهمی $z = x^2 + y^2$ و صفحات $x=1$ و $y=x$ و دو صفحه xOy و xOz کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{3}$
- (۲) $\frac{1}{2}$
- (۳) $\frac{2}{3}$
- (۴) $\frac{2}{2}$

۵۹- حجم محصور بین سطوح $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ و $x^2 + y^2 = 2x$ و $x^2 + y^2 = 4z$ و $z=0$ کدام است؟

- (۱) $\frac{5\pi}{16}$
- (۲) $\frac{\pi}{16}$
- (۳) $\frac{2\pi}{5}$
- (۴) $\frac{3\pi}{16}$

۶۰- مقدار $I = \iint_D \sqrt{x^2+y^2} dx dy$ در صورتی که D ناحیه محدود بین دایره‌های $x^2+y^2=16$ و $x^2+y^2=25$ باشد، کدام است؟

- (۱) $\frac{122\pi}{3}$
- (۲) $\frac{120\pi}{3}$
- (۳) $\frac{121\pi}{3}$
- (۴) $-\frac{121\pi}{3}$

۶۱- تابع $f(x,y)$ با دامنه تعریف D که مربع $0 \leq x \leq 1$ و $0 \leq y \leq 1$ می باشد، به صورت $f(x,y) = \begin{cases} x-xy & 0 \leq x < y \\ y-xy & y < x \leq 1 \end{cases}$ تعریف شده

است، مقدار انتگرال $\iint_D f(x,y) dx dy$ کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{6}$
- (۲) $\frac{1}{12}$
- (۳) $\frac{1}{8}$
- (۴) $\frac{1}{24}$

۶۲- اگر D ناحیه $0 < y < b$ و $x+y < 0$ باشد، آنگاه مقدار $I = \iint_D e^{\frac{x}{y}} dy dx$ کدام است؟

- (۱) $\frac{b^2}{2e}$
- (۲) $\frac{b^2}{e}$
- (۳) $\frac{b^2}{e^2}$
- (۴) $\frac{b^2}{2}$

۶۳- جرم سطحی بین دو منحنی $x=y^2$ و $y=x^2$ محصور است، در صورتی که چگالی در نقطه (x,y) به صورت $\rho = k(x^2+y^2)$ بیان گردد، کدام است؟

- (۱) $\frac{23k}{101}$
- (۲) $\frac{46k}{105}$
- (۳) $\frac{23k}{105}$
- (۴) $\frac{46k}{101}$

۶۴- جرم سطحی که شامل یک ربع از بیضی $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ می باشد و دارای چگالی سطح در نقطه (x,y) به صورت $\rho = kxy$ می باشد،

کدام است؟

- (۱) $\frac{kab}{8}$
- (۲) $\frac{ka^2b}{8}$
- (۳) $\frac{kab^2}{8}$
- (۴) $\frac{ka^2b^2}{8}$

۶۵- مقدار $I = \iiint_R \frac{dx dy dz}{(x^2+y^2+z^2)^2}$ که در آن R ناحیه محصور بین کره‌های $x^2+y^2+z^2=a^2$ و $x^2+y^2+z^2=b^2$ ($a > b > 0$)

است، کدام است؟

- (۱) $4\pi \ln \frac{a}{b}$
- (۲) $2\pi \ln \frac{a}{b}$
- (۳) $2\pi \ln \frac{b}{a}$
- (۴) $4\pi \ln \frac{b}{a}$

۶۶- حجم ناحیه محصور بین مخروط $z = \sqrt{x^2+y^2}$ و سهمیگون $z = x^2+y^2$ کدام است؟

- (۱) $\frac{\pi}{2}$
- (۲) $\frac{\pi}{3}$
- (۳) $\frac{\pi}{6}$
- (۴) $\frac{\pi}{8}$

۶۷- حجم ناحیه محصور بین سهمیگون $z = x^2 + y^2$ و $z = 2x$ کدام است؟

- (۱) π (۲) $\frac{\pi}{3}$ (۳) $\frac{\pi}{6}$ (۴) $\frac{\pi}{2}$

۶۸- حجم ناحیه واقع در یک هشتم اول صفحات مختصات و محدود به $1 = \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c}$ که در آن a, b, c اعدادی مثبت هستند، کدام است؟

- (۱) $\frac{abc}{2}$ (۲) $\frac{abc}{3}$ (۳) $\frac{abc}{6}$ (۴) $\frac{abc}{12}$

۶۹- مقدار متوسط تابع $f(x) = \int_1^x e^{-x^2} dx$ در ناحیه $0 \leq x \leq a$ کدام است؟

- (۱) $\frac{1+e^{-a^2}}{a}$ (۲) $\frac{1-e^{-a^2}}{a}$ (۳) $\frac{1+e^{-a^2}}{2a}$ (۴) $\frac{1-e^{-a^2}}{2a}$

۷۰- حاصل $\iiint_D (z + 2xy) dV$ در صورتی که D ناحیه $z \geq 0$ و $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$ باشد، کدام است؟

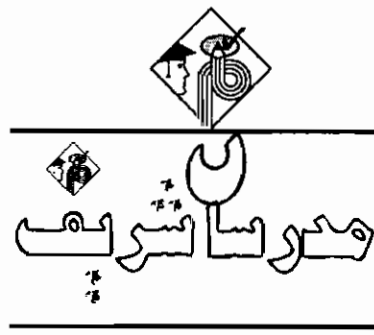
- (۱) 4π (۲) 8π (۳) 2π (۴) 22π

احساس دل، بالاتر از منطق است.

دی رفت و باز نیامد، فردا را اعتماد نشاید، حال را غنیمت دان که دیر نیاید.

(زان ژاکروسو)

(خواجه عبدالله انصاری)



فصل چهارم

«میدانهای برداری و انتگرال گیری روی مسیرها و سطوح»

در این فصل بحث حساب دیفرانسیل و انتگرال را با بحث بردارها، خمها و رویهها ترکیب می‌کنیم. در ابتدا مطلب را با انتگرال روی خم (انتگرال خمیده خطی، انتگرال منحنی الخط یا انتگرال مسیری) آغاز می‌کنیم، و به بحث میدانهای برداری پایتار و روش تعیین توابع پتانسیل این میدانها خواهیم پرداخت.

سپس قضیه گرین را بررسی می‌کنیم که یکی از قضایای مهم در حساب دیفرانسیل و انتگرال می‌باشد. و پس از آن به بررسی انتگرال روی سطح (انتگرال رویه‌ای) می‌پردازیم و همچنین روش محاسبه مساحت رویه و شار یک میدان برداری گذرنده از یک رویه واقع در فضا را یاد خواهیم گرفت، و در انتها قضایای دیورژانس و استوکس را مطرح خواهیم کرد.

انتگرال روی خم

فرض کنید تابع $f: R^3 \rightarrow R$ تابعی پیوسته باشد، می‌خواهیم از تابع f در امتداد خم (مسیر) $\sigma: [a, b] \rightarrow R^3$ که $\sigma(t) = (x(t), y(t), z(t))$ انتگرال بگیریم.

❖ تعریف ۱: انتگرال مسیری $f(x, y, z)$ در امتداد مسیر σ به صورت روبرو تعریف می‌شود: $\int_{\sigma} f ds = \int_a^b f(x(t), y(t), z(t)) |\sigma'(t)| dt$

که در آن $|\sigma'(t)| = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}$ و تابع f تابعی پیوسته و σ خمی قطعه، قطعه هموار می‌باشد.

کله مثال ۱: فرض کنید c مارپیچ $c(t) = (\cos t, \sin t, t)$ و $0 \leq t \leq 2\pi$ و $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$. در این صورت مطلوب‌بست محاسبه $\int_c f(x, y, z) ds$

❑ پاسخ: ابتدا توجه کنید که:

$$f(x(t), y(t), z(t)) = \cos^2 t + \sin^2 t + t^2 = t^2 + 1$$

$$c'(t) = (-\sin t, \cos t, 1) \Rightarrow |c'(t)| = \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t + 1} = \sqrt{2}$$

$$\int_c f(x, y, z) ds = \int_0^{2\pi} (t^2 + 1) \sqrt{2} dt = \sqrt{2} \left(\frac{t^3}{3} + t \right) \Big|_0^{2\pi} = \frac{2\sqrt{2}\pi}{3} (4\pi^2 + 2)$$

بنابراین:

❑ نکته ۱: در انتگرال روی خم c هرگاه $f(x, y, z) = 1$ ، انتگرال طول منحنی c را به دست می‌دهد.

❑ نکته ۲: انتگرال f روی خم c تنها به ماهیت f و شکل خم بستگی دارد و مقدار آن را می‌توان از روی هر صورت پارامتر مناسب دلخواهی محاسبه کرد.

❑ نکته ۳: اگر خم c به صورت $y = g(x)$ و $a \leq x \leq b$ داده شده باشد، آنگاه: $\int_c f(x, y) ds = \int_a^b f(x, g(x)) \sqrt{1 + (g'(x))^2} dx$

❑ نکته ۴: اگر خم c به صورت قطبی $r = r(\theta)$ و $\theta_1 \leq \theta \leq \theta_2$ داده شده باشد، آنگاه:

$$\int_c f(x, y) ds = \int_{\theta_1}^{\theta_2} f(r \cos \theta, r \sin \theta) \sqrt{r^2 + r'^2} d\theta$$

❑ نکته ۵: اگر $f(x, y, z)$ چگالی سیم در (x, y, z) باشد، انتگرال روی خم c جرم سیم موردنظر را می‌دهد.

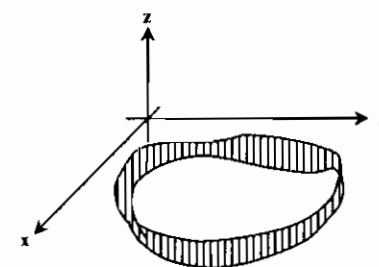
مثال ۲: حاصل $\int_C y ds$ در طول منحنی C با معادله $y = 2\sqrt{x}$ از $x = 3$ تا $x = 24$ کدام است؟

گزینه «۴» پاسخ: $\int_C y ds = \int_3^{24} 2\sqrt{x} \sqrt{1 + (\frac{1}{\sqrt{x}})^2} dx = 2 \int_3^{24} \sqrt{x+1} dx = 156$

مثال ۳: سیمی در امتداد خم زیر قرار دارد $R(t) = (t^2 - 1)j + 2tk$ ، $0 \leq t \leq 1$ اگر چگالی سیم برابر $\delta = \frac{2t}{\sqrt{t^2 + 4}}$ باشد. جرم آن را بیابید.

پاسخ: $R'(t) = 2tj + 2k \Rightarrow |R'(t)| = \sqrt{4t^2 + 4} = 2\sqrt{t^2 + 1}$
 جرم سیم $= \int_0^1 \frac{2t}{\sqrt{t^2 + 4}} \cdot 2\sqrt{t^2 + 1} dt = \int_0^1 2t\sqrt{t^2 + 1} dt = (t^2 + 1)^{3/2} \Big|_0^1 = 2\sqrt{2} - 1$

نکته ۶: یک حالت خاص مهم انتگرال مسیری وقتی است که مسیر C یک منحنی مسطح باشد. فرض کنید تمام نقاط منحنی C در صفحه xy باشند. همچنین $f(x, y) \geq 0$ در این صورت انتگرال مسیری زیر برابر «مساحت یک حصار» می‌باشد.



در واقع S برابر مساحت حصار است که قاعده آن C و ارتفاع آن $f(x, y)$ می‌باشد.
 $S = \int_C f ds = \int_a^b f(x(t), y(t)) \sqrt{(\frac{dx}{dt})^2 + (\frac{dy}{dt})^2} dt$

مثال ۴: مساحت قسمتی از استوانه $x^2 + y^2 = 4$ که داخل استوانه $x^2 + z^2 = 4$ قرار دارد را بیابید.

پاسخ: چون شکل متقارن است (با تبدیل x به $-x$ ، y به $-y$ یا z به $-z$ عوض نمی‌شود) کافی است مساحت قسمتی که در $z > 0$ و x وجود دارد را محاسبه کنیم و سپس حاصل را در ۸ ضرب کنیم. خم C همان دایره $x^2 + y^2 = 4$ می‌باشد که حصار به ارتفاع $z = \sqrt{4 - x^2}$ روی آن ساخته شده است. با توجه به اینکه معادله پارامتری خم $x^2 + y^2 = 4$ به صورت $c'(t) = (-2\sin t, 2\cos t) \Rightarrow |c'(t)| = 2$ می‌باشد، خواهیم داشت:

$S = \int_C \sqrt{4 - x^2} ds = \int_0^{\pi} \sqrt{4 - 4\cos^2 t} \times 2 dt = 4 \int_0^{\pi} \sin t dt = 4$

بنابراین مساحت کل برابر $8 \times 4 = 32$ خواهد بود.

محاسبه جرم و گشتاور

فرض کنید سیمی در امتداد خم C در فضا قرار دارد و چگالی سیم در نقطه (x, y, z) واقع بر خم برابر $\delta(x, y, z)$ می‌باشد. در این صورت جرم مرکز جرم و گشتاورهای سیم را می‌توان با استفاده از فرمولهای زیر محاسبه کرد.

گشتاورهای اول حول صفحات مختصات:
 $M_{yz} = \int_C x \delta ds$
 $M_{xz} = \int_C y \delta ds$
 $M_{xy} = \int_C z \delta ds$
 مختصات مرکز جرم $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ بطوریکه داریم:
 $\bar{z} = \frac{M_{xy}}{M}$
 $\bar{y} = \frac{M_{xz}}{M}$
 $\bar{x} = \frac{M_{yz}}{M}$

گشتاورهای لختی (گشتاور دوم)

$I_x = \int_C (y^2 + z^2) \delta ds$
 $I_y = \int_C (x^2 + z^2) \delta ds$
 $I_z = \int_C (x^2 + y^2) \delta ds$

مثال ۵: سیمی به شکل حلقه مستدیر با چگالی ثابت δ روی دایره $x^2 + y^2 = a^2$ در صفحه xy واقع است. گشتاور لختی حلقه را حول محور z بیابید.

پاسخ: معادله پارامتری دایره (خم) به صورت $c(t) = (a \cos t, a \sin t)$ می‌باشد. بنابراین:
 $c'(t) = (-a \sin t, a \cos t) \Rightarrow |c'(t)| = a$

$I_z = \int_C (x^2 + y^2) \delta ds = \int_0^{2\pi} a^2 \delta a dt = 2\pi a^3 \delta$

مثال ۶: سیمی بر خم $R(t) = (t^2 - 1)j + (2t)k$ ، $0 \leq t \leq 1$ قرار دارد. اگر چگالی سیم در نقطه (x, y, z) از خم برابر $\delta(x, y, z) = \sqrt{y + z}$ باشد. مرکز جرم سیم را بیابید.

پاسخ: $R'(t) = (2t)j + 2k \Rightarrow |R'(t)| = \sqrt{4t^2 + 4} = 2\sqrt{t^2 + 1}$

$M = \int_C \sqrt{y + z} ds = \int_0^1 \sqrt{t^2 + 1} \times 2\sqrt{t^2 + 1} dt = 2 \int_0^1 (t^2 + 1) dt = \frac{8}{3}$

$M_{yz} = \int_C x \sqrt{y + z} ds = 0$

$M_{xz} = \int_C y \sqrt{y + z} ds = \int_0^1 (t^2 - 1) \sqrt{t^2 + 1} \times 2\sqrt{t^2 + 1} dt = 2 \int_0^1 (t^2 - 1) dt = 2(\frac{t^3}{3} - t) \Big|_0^1 = \frac{-8}{3}$

$M_{xy} = \int_C z \sqrt{y + z} ds = \int_0^1 2t \sqrt{t^2 + 1} \times 2\sqrt{t^2 + 1} dt = \int_0^1 (4t^2 + 4t) dt = t^3 + 2t^2 \Big|_0^1 = 3$

بنابراین نقطه $(\frac{3}{8}, \frac{-8}{8}, \frac{3}{8})$ یا $(\frac{3}{8}, -1, \frac{3}{8})$ مرکز جرم سیم خواهد بود.

مثال ۷: جرم سیمی را که از تقاطع دو رویه $Z = x^2$ و $Z = 2 - x^2 - 2y^2$ بین نقاط $(0, 1, 0)$ و $(1, 0, 1)$ واقع در یک هشتم اول دستگاه مختصات دکارتی قرار دارد را طوری بیابید که چگالی سیم در نقطه (x, y, z) برابر $\delta(x, y, z) = xy$ باشد.

پاسخ: ابتدا لازم است خم موردنظر (C) را به نحوی مناسب به شکل پارامتری در آوریم. از آنجا که خم روی $Z = x^2$ قرار دارد و x از 0 تا 1 تغییر می‌کند، لذا می‌توانیم قرار دهیم $x = t$ و $Z = t^2$ و بنابراین:

$2y^2 = 2 - x^2 - z = 2 - 2t^2 \Rightarrow y^2 = 1 - t^2$
 $x = t, y = \sqrt{1 - t^2}, z = t^2$
 پس منحنی C را می‌توان به صورت پارامتری روبرو نوشت:

$\frac{dx}{dt} = 1, \frac{dy}{dt} = \frac{-t}{\sqrt{1 - t^2}}, \frac{dz}{dt} = 2t$
 $ds = \sqrt{1 + \frac{t^2}{1 - t^2} + 4t^2} dt = \frac{\sqrt{1 + 4t^2 - 4t^4}}{\sqrt{1 - t^2}} dt$

بنابراین جرم سیم برابر است با:
 $m = \int_C xy ds = \int_0^1 t \sqrt{1 - t^2} \frac{\sqrt{1 + 4t^2 - 4t^4}}{\sqrt{1 - t^2}} dt = \int_0^1 t \sqrt{1 + 4t^2 - 4t^4} dt$

با تغییر متغیر $u = t^2, du = 2t dt$ ، انتگرال به شکل روبرو در می‌آید.
 $m = \frac{1}{2} \int_0^1 \sqrt{1 + 4u - 4u^2} du = \frac{1}{2} \int_0^1 \sqrt{2 - (2u - 1)^2} du$

مجدداً از تغییر متغیر $v = 2u - 1, dv = 2 du, v = 2u - 1$ به دست می‌آید:
 $m = \frac{1}{4} \int_{-1}^1 \sqrt{2 - v^2} dv = \frac{1}{4} \int_0^{\pi} \sqrt{2 - 2\cos^2 v} dv = \frac{\pi + 2}{8}$

انتگرال خط میدانهای برداری

نوع دیگر انتگرال روی خط، انتگرال یک میدان برداری روی یک خم می‌باشد.

تعریف ۲: کار انجام شده توسط میدان نیروی \vec{F} در امتداد خم R^2 از $\sigma: [a, b] \rightarrow R^2$ از فرمول زیر به دست می‌آید:

$W = \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_a^b \vec{F}(\sigma(t)) \cdot \sigma'(t) dt$

مثال ۸: فرض کنید $\vec{F}(x, y, z) = y^2\vec{i} + 2xy\vec{j}$ حاصل $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$ را روی هر یک از خم‌های زیر از $(0, 0, 0)$ تا $(1, 1, 1)$ به دست آورید.

الف) خط راست $y = x$ پاسخ

الف) خط راست $y = x$ را می‌توان به فرم پارامتری $\vec{\sigma}(t) = t\vec{i} + t\vec{j}$, $0 \leq t \leq 1$ نوشت. بنابراین:

$$\vec{\sigma}'(t) = \vec{i} + \vec{j}, \quad \vec{F}(\vec{\sigma}(t)) = t^2\vec{i} + 2t^2\vec{j}$$

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_0^1 (t^2\vec{i} + 2t^2\vec{j}) \cdot (\vec{i} + \vec{j}) dt = \int_0^1 3t^2 dt = 1$$

ب) خم $y = x^2$ را می‌توان به صورت پارامتری $\vec{\sigma}(t) = t\vec{i} + t^2\vec{j}$, $0 \leq t \leq 1$ نوشت. بنابراین:

$$\vec{\sigma}'(t) = \vec{i} + 2t\vec{j}, \quad \vec{F}(\vec{\sigma}(t)) = t^4\vec{i} + 2t^3\vec{j}$$

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_0^1 (t^4\vec{i} + 2t^3\vec{j}) \cdot (\vec{i} + 2t\vec{j}) dt = \int_0^1 5t^4 dt = 1$$

مثال ۹: کار انجام شده توسط میدان $\vec{F}(x, y, z) = (\cos z, e^x, e^y)$ در امتداد مسیر $\vec{\sigma}(t) = (1, t, e^t)$, $0 \leq t \leq 2$ را بیابید.

پاسخ

$$\vec{\sigma}'(t) = (0, 1, e^t), \quad \vec{F}(\vec{\sigma}(t)) = (\cos e^t, e, e^t)$$

$$K = \int_C \vec{F}(\vec{\sigma}(t)) \cdot \vec{\sigma}'(t) dt = \int_0^2 (\cos e^t \vec{i} + e\vec{j} + e^t\vec{k}) \cdot (\vec{j} + e^t\vec{k}) dt = \int_0^2 (e + e^{2t}) dt = (et + \frac{1}{2}e^{2t}) \Big|_0^2 = 2e + \frac{1}{2}e^4 - \frac{1}{2}$$

نکته ۷: با توجه به اینکه $T = \frac{dR}{ds}$ فرمول محاسبه کار را می‌توان به صورت روبرو نیز نوشت:

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{R} = \int_C \vec{F} \cdot T ds$$

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{R} = \int_C F_x dx + F_y dy + F_z dz$$

نکته ۸: روش معمول دیگر برای نوشتن فرمول محاسبه کار به صورت روبرو است:

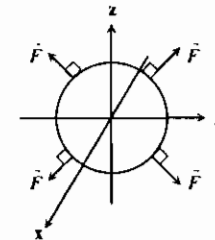
که در آن F_x, F_y, F_z مؤلفه‌های میدان برداری \vec{F} می‌باشند.

نکته ۹: فرض کنید $\vec{F}(x, y, z)$ میدان سرعت شارش (جریان) سیالی در ناحیه‌ای از فضا باشد و نیز فرض کنید

روی خم می‌نامیم و وقتی خم بسته باشد، مقدار انتگرال شارش را گردش در امتداد خم می‌نامیم.

* تذکر ۱: $\vec{F} \cdot \vec{T}$ مؤلفه عددی \vec{F} در جهت بردار واحد مماس بر خم می‌باشد و بنابراین اگر میدان \vec{F} در تمام نقاط بر T عمود باشد، انتگرال شارش برابر صفر خواهد بود.

مثال ۱۰: کار انجام شده توسط میدان نیروی $\vec{F}(x, y, z) = x^2\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ روی خم $\vec{R}(t) = (0, a \cos t, a \sin t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$ چقدر است؟ پاسخ



روش اول: با توجه به شکل روبرو چون میدان نیروی \vec{F} در هر نقطه از دایره به آن عمود است، لذا بر ذره متحرک در امتداد دایره کار انجام نمی‌دهد و بنابراین کار انجام شده توسط \vec{F} برابر صفر است. روش دوم: مستقیماً به کمک فرمول نیز می‌توان این مطلب را نشان داد:

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{R} = \int_C x^2 dx + y dy + z dz = \int_0^{2\pi} (0 - a^2 \cos t \sin t + a^2 \cos t \sin t) dt = 0$$

مثال ۱۱: مقدار $\int_C \frac{(x+y)dx - (x-y)dy}{x^2 + y^2}$ که در آن C دایره $x^2 + y^2 = a^2$ است که یکبار در خلاف جهت حرکت عقربه‌های

ساعت پیموده می‌شود برابر است با:

- (۱) -2π (۲) 0 (۳) 2π (۴) π

پاسخ: گزینه «۱» دایره $x^2 + y^2 = a^2$ را به صورت پارامتری روبرو می‌نویسیم:

بنابراین:

$$\int_C \frac{(x+y)dx - (x-y)dy}{x^2 + y^2} = \int_0^{2\pi} \frac{(a \cos t + a \sin t)(-a \sin t dt) - (a \cos t - a \sin t)(a \cos t dt)}{a^2 \cos^2 t + a^2 \sin^2 t} dt = \int_0^{2\pi} \frac{-a^2 \cos t \sin t - a^2 \cos^2 t}{a^2} dt = \int_0^{2\pi} -\cos t - \cos^2 t dt = -2\pi$$

مثال ۱۲: انتگرال شارش میدان برداری $\vec{F}(x, y, z) = -y\vec{i} + x\vec{j} + b\vec{k}$ را روی خم $\vec{R}(t) = (a \cos t)\vec{i} + (b \sin t)\vec{j} + b\vec{k}$, $0 \leq t \leq 2\pi$ بیابید.

پاسخ:

$$\vec{F}(\vec{R}(t)) = -b \sin t \vec{i} + a \cos t \vec{j} + b\vec{k}$$

$$\vec{R}'(t) = -a \sin t \vec{i} + b \cos t \vec{j} + b\vec{k}$$

$$\vec{F}(\vec{R}(t)) \cdot \vec{R}'(t) = ab \sin^2 t + ab \cos^2 t + b^2 = ab + b^2$$

بنابراین:

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{R} = \int_C \vec{F} \cdot \vec{R}' dt = \int_0^{2\pi} (ab + b^2) dt = 2(ab + b^2)\pi$$

مثال ۱۳: مرکز (پیرامون) مربع با رئوس $(\pm 1, 0)$ و $(0, \pm 1)$ در جهت مثلثاتی است. مقدار انتگرال $\int_C \frac{dx + dy}{|x| + |y|}$ برابر است با:

- (۱) ۲ (۲) -۲ (۳) ۴ (۴) ۰

پاسخ: گزینه «۴» با توجه به شکل، خم C از چهار منحنی هموار

C_1, C_2, C_3, C_4 تشکیل شده است. بنابراین لازم است مقدار انتگرال روی هر مسیر محاسبه و مقادیر با هم جمع شوند.

در روی خم C_1 , $y = 1 - x$ و $0 \leq x \leq 1$. بنابراین: $|x| = x, |y| = y, dy = -dx$

$$\int_{C_1} \frac{dx + dy}{|x| + |y|} = - \int_0^1 \frac{dx - dx}{x + 1 - x} = 0$$

(توجه کنید که علامت منفی پشت انتگرال به خاطر جهت پیمودن خم C_1 می‌باشد.)

روی خم C_2 , $y = x + 1$, $-1 \leq x \leq 0$. بنابراین:

$$|x| = -x, |y| = y, dy = dx$$

$$\int_{C_2} \frac{dx + dy}{|x| + |y|} = - \int_{-1}^0 \frac{dx + dx}{-x + x + 1} = -2 \int_{-1}^0 dx = -2$$

روی خم C_3 , $y = -1 - x$ و $-1 \leq x \leq 0$. بنابراین:

$$|x| = -x, |y| = -y, dy = -dx$$

$$\int_{C_3} \frac{dx + dy}{|x| + |y|} = \int_{-1}^0 \frac{dx - dx}{-x - (-1 - x)} = 0$$

و بالاخره روی خم C_4 , $y = x - 1$, $0 \leq x \leq 1$. بنابراین:

$$|x| = x, |y| = -y, dy = dx$$

$$\int_{C_4} \frac{dx + dy}{|x| + |y|} = \int_0^1 \frac{dx + dx}{x - (x - 1)} = 2 \int_0^1 dx = 2$$

در نتیجه:

$$\int_C = \int_{C_1} + \int_{C_2} + \int_{C_3} + \int_{C_4} = 0 - 2 + 0 + 2 = 0$$

مثال ۱۴: هرگاه $\vec{R} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ و C دایره به شعاع a باشد، در صورتیکه \vec{T} بردار یکانی مماس بر C باشد مقدار $\int_C \vec{T} \cdot d\vec{R}$ برابر است با:

- (۱) $2\pi a$ (۲) πa^2 (۳) ۰ (۴) a

پاسخ: گزینه «۱» با توجه به نکته (۷) می‌دانیم:

$$\int_C \vec{T} \cdot d\vec{R} = \int_C \vec{T} \cdot T ds = \int_C |\vec{T}|^2 ds = \int_C ds$$

$$\int_C \vec{T} \cdot d\vec{R} = 2\pi a$$

انتگرال اخیر همان محیط دایره به شعاع a می‌باشد. بنابراین:

نتیجه: فرض کنید \vec{T} برداریکه مماس بر منحنی C باشد، در این صورت:

استقلال از مسیر و میدانهای پایستار (کنسرواتو یا ابقایی)

فرض کنید A و B دو نقطه واقع در یک ناحیه باز از فضا مانند D باشند. کاری که میدان F برای جابه‌جا کردن ذره‌ای از A تا B انجام می‌دهد یعنی $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{R}$ معمولاً به مسیر انتخاب شده بستگی دارد. اما در مورد برخی میدانها، مقدار انتگرال تنها به نقاط A و B بستگی دارد و برای همه مسیرها از A تا B یکسان است. اگر چنین امری برای هر دو نقطه دلخواه از D برقرار باشد، انتگرال $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{R}$ در D مستقل از مسیر است و میدان F بر D پایستار است.

❖ تعریف ۳: میدان برداری \vec{F} پایستار است اگر و تنها اگر تابعی حقیقی چون f موجود باشد به طوری که $F = \nabla f$ تابع حقیقی f را پتانسیل می‌نامند.

❖ قضیه: فرض کنید F یک میدان برداری پایستار با پتانسیل f باشد. در این صورت:

- کار انجام شده توسط F مستقل از مسیر است و برابر اختلاف پتانسیل دو نقطه‌ی انتها و ابتدای مسیر می‌باشد. یعنی اگر C یک مسیر دلخواه از A تا B باشد، آنگاه:

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{R} = f(B) - f(A)$$

C دلخواه

۲. کار انجام شده در هر مسیر بسته برابر صفر است (نقاط A و B یکی هستند).

۳. اگر F دارای مشتقات مرتبه اول پیوسته باشد، آنگاه $\text{Curl} F = 0$.

❖ تذکر ۲: از قضیه بالا نتیجه می‌شود که $\text{Curl} F = 0$ شرط لازم برای پایستار بودن F می‌باشد. یعنی اگر $\text{Curl} F \neq 0$ نمی‌توان نتیجه گرفت F میدان پایستار است. ولی اگر $\text{Curl} F = 0$ می‌توان نتیجه گرفت که F پایستار نیست.

فرض کنید D یک ناحیه باز در فضا باشد. اگر بخواهیم از $\text{Curl} F = 0$ نتیجه بگیریم که F پایستار است به شرط دیگری در مورد ناحیه D نیاز است. آن این است که D ساده همبند باشد؛ یعنی هر مسیر بسته‌ای در D را بتوان منقبض و در یک نقطه جمع کرد بدون اینکه از ناحیه خارج شویم.



ساده همبند است



ساده همبند نیست



ساده همبند است

❖ نتیجه: اگر F بر یک ناحیه ساده همبند تعریف شده باشد، آنگاه F پایستار (نگهدار) است اگر و تنها اگر $\text{Curl} F = 0$.

❖ نکته ۱۰: فرض کنید میدان $F = F_x \vec{i} + F_y \vec{j} + F_z \vec{k}$ ، در این صورت $\text{Curl} F = 0$ معادل سه شرط زیر است:

$$\frac{\partial F_x}{\partial y} = \frac{\partial F_y}{\partial x}, \quad \frac{\partial F_x}{\partial z} = \frac{\partial F_z}{\partial x}, \quad \frac{\partial F_y}{\partial z} = \frac{\partial F_z}{\partial y}$$

تعیین پتانسیل برای میدانهای پایستار

فرض کنید می‌دانیم F یک میدان پایستار است. می‌خواهیم یک تابع پتانسیل یا پتانسیل برای F به دست آوریم. یعنی می‌خواهیم تابعی حقیقی چون f بیابیم به طوری که:

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{k} = F_x \vec{i} + F_y \vec{j} + F_z \vec{k}$$

بنابراین برای محاسبه f از روابط زیر انتگرال می‌گیریم:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = F_x, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = F_y, \quad \frac{\partial f}{\partial z} = F_z$$

❖ تذکر ۳: روش فوق برای محاسبه f، روش معمول و استاندارد می‌باشد. ولی همانطور که در مثال زیر خواهید دید این روش اغلب طولانی و پیچیده می‌باشد. شاید استفاده از فرمول زیر بتواند ما را سریعتر به جواب نهایی برساند:

$$f(x, y, z) = \int_C^x F_x(t, 0, 0) dt + \int_0^y F_y(x, t, 0) dt + \int_0^z F_z(x, y, t) dt$$

❖ مثال ۱۵: نشان دهید $\vec{F} = (e^x \cos y + yz)\vec{i} + (xz - e^x \sin y)\vec{j} + (xy + z)\vec{k}$ پایستار است و سپس تابع پتانسیلی برای آن بیابید.

❑ پاسخ:

روش اول: ابتدا توجه کنید که: $F_x = e^x \cos y + yz$ و $F_y = xz - e^x \sin y$ و $F_z = xy + z$

$$\frac{\partial F_x}{\partial y} = -e^x \sin y + z, \quad \frac{\partial F_x}{\partial z} = y, \quad \frac{\partial F_y}{\partial x} = z - e^x \sin y$$

$$\frac{\partial F_y}{\partial z} = x, \quad \frac{\partial F_z}{\partial x} = y, \quad \frac{\partial F_z}{\partial y} = x$$

چون $\frac{\partial F_x}{\partial z} = \frac{\partial F_z}{\partial x}$ و $\frac{\partial F_y}{\partial z} = \frac{\partial F_z}{\partial y}$ و $\frac{\partial F_x}{\partial y} = \frac{\partial F_y}{\partial x}$ بنابراین طبق نتیجه فوق میدان پایستار است.

اگر f را تابع پتانسیل فرض کنیم، برای محاسبه f باید از روابط زیر انتگرال بگیریم:

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = e^x \cos y + yz \\ \frac{\partial f}{\partial y} = xz - e^x \sin y \\ \frac{\partial f}{\partial z} = xy + z \end{cases}$$

از یکی از معادلات به دلخواه شروع می‌کنیم. به طور مثال از معادله نخست با ثابت گرفتن y و z نسبت به x انتگرال می‌گیریم:

$$f(x, y, z) = e^x \cos y + xyz + g(y, z)$$

ثابت انتگرال گیری را به صورت تابعی از y و z نوشتیم زیرا هر تابعی از y و z نسبت به x ثابت است. حال از این رابطه $\frac{\partial f}{\partial y}$ را به دست می‌آوریم و

$$-e^x \sin y + xz + \frac{\partial g}{\partial y} = xz - e^x \sin y \Rightarrow \frac{\partial g}{\partial y} = 0$$

آن را با $\frac{\partial f}{\partial y}$ در دستگاه فوق مقایسه می‌کنیم و نتیجه می‌گیریم:

بنابراین g تنها تابعی از z است و $f(x, y, z) = e^x \cos y + xyz + h(z)$ حال از این معادله $\frac{\partial f}{\partial z}$ را محاسبه می‌کنیم و آن را با فرمول $\frac{\partial f}{\partial z}$ در

$$xy + \frac{dh}{dz} = xy + z \Rightarrow \frac{dh}{dz} = z \Rightarrow h(z) = \frac{z^2}{2} + c$$

دستگاه فوق تطبیق می‌دهیم و نتیجه می‌گیریم:

$$f(x, y, z) = e^x \cos y + xyz + \frac{z^2}{2} + c$$

پس:

به ازای هر c یک تابع پتانسیل برای F وجود دارد. بنابراین بی‌نهایت تابع پتانسیل وجود دارد.

روش دوم: برای محاسبه تابع پتانسیل از فرمول زیر استفاده می‌کنیم.

$$f(x, y, z) = \int_C^x F_x(t, 0, 0) dt + \int_0^y F_y(x, t, 0) dt + \int_0^z F_z(x, y, t) dt$$

$$f(x, y, z) = \int_0^x e^t dt + \int_0^y -e^x \sin t dt + \int_0^z (xy + t) dt = e^x + e^x \cos y - e^x + xyz + \frac{z^2}{2} + c = e^x \cos y + xyz + \frac{z^2}{2} + c$$

❖ تذکر ۴: شرط پایستار بودن میدان $F = F_x \vec{i} + F_y \vec{j} + F_z \vec{k}$ آن است که $\frac{\partial F_x}{\partial y} = \frac{\partial F_y}{\partial x}$.

❖ مثال ۱۶: مقدار $\int_C \text{Lny}^2 dx + 2xy^{-1} dy$ بر روی منحنی C از نقطه (-۳, ۱) تا نقطه (۴, ۴) کدام است؟

$$16 \text{Ln} 2 \quad (۴) \quad 12 \text{Ln} 2 \quad (۳) \quad 10 \text{Ln} 2 \quad (۲) \quad 8 \text{Ln} 2 \quad (۱)$$

❑ پاسخ: گزینه «۴» اگر F را به صورت $F(x, y) = \text{Lny}^2 \vec{i} + 2xy^{-1} \vec{j}$ در نظر بگیریم، به سادگی نتیجه می‌شود که $\frac{\partial F_x}{\partial y} = \frac{\partial F_y}{\partial x}$

$$\nabla f = F \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = \text{Lny}^2 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 2xy^{-1} \end{cases} \Rightarrow f(x, y) = x \text{Lny}^2 + c$$

و بنابراین F پایستار است. لذا تابع پتانسیلی مانند f را می‌یابیم به قسمی که:

$$\int_C \text{Lny}^2 dx + 2xy^{-1} dy = x \text{Lny}^2 \Big|_{(-3, 1)}^{(4, 4)} = 4 \text{Ln} 16 = 16 \text{Ln} 2$$

بنابراین:

مثال ۱۷: حاصل $\int_C (y+z)dx + (z+x)dy + (x+y)dz$ که در آن C دایره‌ای به معادلات $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ و $x+y+z=0$ باشد،

کدام است؟

- (۱) ۰ (۲) 2π (۳) $2\pi a$ (۴) $2\pi a^2$

پاسخ: گزینه «۱» به سادگی می‌توان نشان داد میدان $\vec{F} = (y+z)\vec{i} + (z+x)\vec{j} + (x+y)\vec{k}$ یک میدان پایستار است و چون منحنی C یک منحنی بسته است. پس مقدار انتگرال مورد نظر برابر صفر است.

مثال ۱۸: اگر مقدار $\int_C (2xy + 4yz)dx + (x^2 + 4xz - 2z^2)dy + (4xy - 4yz)dz$ از نقطه $(-1, 1, 2)$ تا نقطه $(3, -2, 1)$ مستقل از مسیر باشد، مقدار آن کدام است؟

- (۱) -21 (۲) -23 (۳) -19 (۴) -17

پاسخ: گزینه «۲» با توجه به اینکه \int_C مستقل از مسیر است، میدان پایستار است. پس ابتدا لازم است تابع پتانسیل f را به دست آوریم.

$$f(x, y, z) = \int_0^x 0 dt + \int_0^y (x^2) dt + \int_0^z (4xy - 4yt) dt = x^2 y + 4xyz - 2yz^2$$

$$\int_C = (x^2 y + 4xyz - 2yz^2) \Big|_{(-1, 1, 2)}^{(3, -2, 1)} = -23$$

بنابراین:

مثال ۱۹: مقادیر A و B را طوری تعیین کنید که میدان برداری زیر پایستار باشد. سپس حاصل $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$ را روی منحنی C که از تقاطع

سه‌میگون $z = x^2 + 4y^2$ و صفحه $z = 2x - 2y$ از $(0, 0, 0)$ تا $(1, \frac{1}{4}, 2)$ به وجود می‌آید را بیابید.

$$\vec{F} = Ax \sin(\pi y)\vec{i} + (x^2 \cos(\pi y) + Bye^{-z})\vec{j} + y^2 e^{-z}\vec{k}$$

پاسخ: برای اینکه F پایستار باشد، لازم است $\text{Curl} F = 0$ ، در نتیجه:

$$A\pi x \cos(\pi y) = 2x \cos(\pi y), \quad -Bye^{-z} = 2ye^{-z}$$

پس $A = \frac{2}{\pi}$ و $B = -2$ خواهد بود. به ازای این مقادیر F میدان برداری پایستار می‌باشد، بنابراین تابع پتانسیل مانند f وجود دارد به

طوری که $F = \nabla f$ به سادگی می‌توان نشان داد که:

$$f(x, y, z) = \frac{1}{\pi} x^2 \sin(\pi y) - y^2 e^{-z}$$

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \left(\frac{1}{\pi} x^2 \sin(\pi y) - y^2 e^{-z} \right) \Big|_{(0, 0, 0)}^{(1, \frac{1}{4}, 2)} = \frac{1}{\pi} - \frac{1}{4e^2}$$

بنابراین برای محاسبه کار انجام شده روی منحنی C خواهیم داشت:

مثال ۲۰: حاصل $\int_C (e^x \sin y + 2y)dx + (e^x \cos y + 2x - 2y)dy$ روی بیضی $x^2 + y^2 = 4$ در جهت خلاف حرکت عقربه‌های

ساعت کدام است؟

- (۱) 2π (۲) -2π (۳) ۰ (۴) 4π

پاسخ: گزینه «۲»

انتگرال مورد نظر برابر $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$ است که در آن F میدان برداری $\vec{F} = (e^x \sin y + 2y)\vec{i} + (e^x \cos y + 2x - 2y)\vec{j}$ می‌باشد. این میدان

بردارای پایستار نیست. ولی اگر به جای $2y$ ، F_1 قرار داشت میدان پایستار می‌شد. بنابراین I را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$I = \int_C (e^x \sin y + 2y)dx + (e^x \cos y + 2x - 2y)dy + \int_C y dx$$

انتگرال اول برابر صفر است، زیرا میدان پایستار و مسیر C بسته است. برای محاسبه انتگرال دوم منحنی C را به شکل پارامتری می‌نویسیم:

$$C: x = \cos t, \quad y = 2 \sin t, \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

$$I = \int_C y dx = -2 \int_0^{2\pi} \sin^2 t dt = -2 \int_0^{2\pi} \frac{1 - \cos 2t}{2} dt = -2\pi$$

و در این صورت:

مثال ۲۱: مقدار انتگرال $\int_C y^2 dx + x^2 dy$ که در آن C نیمه بالایی بیضی $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ بیموده شده در جهت خلاف عقربه‌های ساعت

می‌باشد، کدام است؟

- (۱) $-\frac{4}{3}ab^2$ (۲) $\frac{4}{3}a^2b$ (۳) $-\frac{4}{3}ab^2 + \frac{4}{3}a^2b$ (۴) $-\frac{4}{3}ab^2 + \frac{4}{3}a^2b$

پاسخ: گزینه «۱» بیضی داده شده را می‌توان به صورت روبرو پارامتری کرد:

$$x = a \cos t, \quad y = b \sin t, \quad 0 \leq t \leq \pi$$

$$\int_C y^2 dx + x^2 dy = \int_0^\pi (-ab^2 \sin^2 t + a^2 b \cos^2 t) dt$$

$$= -ab^2 \int_0^\pi \sin^2 t dt + \underbrace{a^2 b \int_0^\pi \cos^2 t dt}_{\text{صفر}} = -ab^2 \int_0^\pi \sin t (1 - \cos^2 t) dt = -ab^2 \left(-\cos t + \frac{\cos^3 t}{3} \right) \Big|_0^\pi = -\frac{4}{3}ab^2$$

شارگذرنده از یک خم واقع در صفحه

فرض کنید می‌خواهیم آهنگ وارد شدن یک سیال به ناحیه محدود به خمی چون C واقع در صفحه xy را به دست آوریم. در این صورت انتگرال $\vec{F} \cdot \vec{n}$ (مؤلفه عددی میدان سرعت سیال در جهت بردار واحد قائم برونسو) را نسبت به طول قوس روی C محاسبه می‌کنیم. مقدار

این انتگرال را شار F گذرنده از رویه محدود به خم C می‌نامیم. بنابراین:

$$\text{شار } F = \int_C \vec{F} \cdot \vec{n} ds$$

تذکره ۵: شار، انتگرال مؤلفه قائم F نسبت به طول قوس می‌باشد، ولی گردش انتگرال مؤلفه مماس $(F \cdot T)$ نسبت به طول قوس می‌باشد.

$$\text{نکته ۱۱: اگر } \vec{F} = F_1 \vec{i} + F_2 \vec{j} \text{ و } C \text{ یک خم بسته واقع در صفحه } xy \text{ باشد، آنگاه: } \int_C \vec{F} \cdot \vec{n} ds = \int_C F_2 dy - F_1 dx$$

مثال ۲۲: شار میدان $\vec{F} = (x-y)\vec{i} + x\vec{j}$ گذرنده از دایره $C: x = \cos t, y = \sin t, 0 \leq t \leq 2\pi$ چقدر است؟

پاسخ: با توجه به نکته (۱۱) داریم:

$$\int_C \vec{F} \cdot \vec{n} ds = \int_0^{2\pi} [(\cos t - \sin t) \cos t dt - \cos t (-\sin t) dt] = \int_0^{2\pi} \cos^2 t dt = \int_0^{2\pi} \frac{1 + \cos 2t}{2} dt = \pi$$

قضیه گرین

قضیه گرین انتگرال خط در امتداد منحنی بسته C در صفحه R^2 را به انتگرال دوگانه روی ناحیه محصور به C به هم ربط می‌دهد.

قضیه اول گرین:

فرض کنید C یک خم ساده، بسته قطعه قطعه همواره (قطعه قطعه مشتق پذیر) باشد. که ناحیه R در آن محصور است

اگر $\vec{F} = F_1(x, y)\vec{i} + F_2(x, y)\vec{j}$ یک میدان برداری پیوسته روی خم C باشد و $\frac{\partial F_1}{\partial x}$ و $\frac{\partial F_2}{\partial y}$ نیز در ناحیه R پیوسته باشند، آنگاه:

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_C F_1(x, y) dx + F_2(x, y) dy = \iint_R \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) dx dy$$

تذکره ۶: جهت صحیح (مثبت) برای منحنی C که ناحیه R را در بر گرفته به صورت زیر تعیین می‌شود: «اگر در امتداد منحنی C در جهت مثلثاتی یا پادساعتگرد صحیح حرکت کنید، ناحیه D سمت چپ شما خواهد بود.» و اغلب جهت مورد نظر، جهت مثبت مثلثاتی می‌باشد.

مثال ۲۳: مقدار انتگرال $\int_C xy dy - y^2 dx$ در امتداد مربعی که خطوط $x=1$ و $y=1$ از ربع اول جدا می‌کند چقدر است؟

پاسخ: مربع یک خم قطعه قطعه هموار می‌باشد، و داریم:

$$F_1 = -y^2, \quad F_2 = xy \Rightarrow \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} = y - (-2y) = 3y$$

$$\int_C xy dy - y^2 dx = \int_0^1 \int_0^1 3y dx dy = \int_0^1 3xy \Big|_0^1 dy = \int_0^1 3y dy = \frac{3}{2}$$

بنابراین طبق قضیه گرین خواهیم داشت:

مثال ۲۴: مقدار انتگرال $\int_C ydx + 3xdy$ روی بیضی $C: x^2 + 4y^2 = 1$ برابر است با:

- (۱) $\frac{\pi}{2}$
- (۲) π
- (۳) 2π
- (۴) 4π

پاسخ: گزینه «۲» ابتدا توجه کنید که: $F_1 = y, F_2 = 3x \Rightarrow \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} = 3 - 1 = 2$

بنابراین با توجه به قضیه گرین داریم: $\int_C ydx + 3xdy = \iint_R 2dxdy = 2 \times \pi \times 1 \times \frac{1}{2} = \pi$

مثال ۲۵: حاصل $\int_C (\sin^2 x + e^{2x})dx + (\cos^2 y - e^y)dy$ وقتی معادله C به صورت $x^2 + y^2 = 16$ باشد، کدام است؟

- (۱) -1
- (۲) 0
- (۳) 1
- (۴) 2

پاسخ: گزینه «۲» اگر ناحیه محدود به منحنی C را R بنامیم. بنابر قضیه گرین داریم: $\int_C (\sin^2 x + e^{2x})dx + (\cos^2 y - e^y)dy = \iint_R (0 - 0)dxdy = 0$

مثال ۲۶: مقدار انتگرال خط $I = \int_C \sqrt{1+x^2+y^2} dx + y(xy + \ln(x + \sqrt{1+x^2+y^2})) dy$ روی دایره $C: x^2 + y^2 = a^2$ برابر است با:

- (۱) 0
- (۲) $\frac{\pi a^4}{4}$
- (۳) $-\frac{\pi a^4}{4}$
- (۴) 12

پاسخ: گزینه «۲» ابتدا توجه کنید که: $F_1 = \sqrt{1+x^2+y^2} \Rightarrow \frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{1+x^2+y^2}}$

$F_2 = y(xy + \ln(x + \sqrt{1+x^2+y^2})) \Rightarrow \frac{\partial F_2}{\partial x} = y(y + \frac{1 + \frac{x}{\sqrt{1+x^2+y^2}}}{x + \sqrt{1+x^2+y^2}}) = y^2 + \frac{y}{\sqrt{1+x^2+y^2}}$

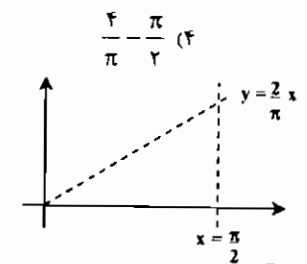
بنابراین طبق قضیه گرین: $I = \iint_R (\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y})dxdy = \iint_R y^2 dxdy$

برای محاسبه انتگرال اخیر از روش قطبی استفاده می کنیم. در این صورت:

$I = \int_0^{2\pi} \int_0^a r^2 \sin^2 \theta \times r dr d\theta = \int_0^{2\pi} \sin^2 \theta d\theta \times \int_0^a r^3 dr = \frac{\pi a^4}{4}$

مثال ۲۷: مطلوبست محاسبه انتگرال $\int_C [(y - \sin x)dx + \cos x dy]$ به طوری که C مثلث محصور شده توسط خطوط $y = \frac{\pi}{4}, y = 0, x = \frac{\pi}{2}$ است.

- (۱) $-(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2})$
- (۲) $\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2}$
- (۳) $-(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2})$
- (۴) $\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2}$



پاسخ: گزینه «۱» ناحیه محصور شده توسط منحنی C به شکل مقابل است.

$F_1 = y - \sin x \Rightarrow \frac{\partial F_1}{\partial y} = 1, F_2 = \cos x \Rightarrow \frac{\partial F_2}{\partial x} = -\sin x$

طبق قضیه گرین انتگرال فوق برابر است با:

$\int_C (y - \sin x) dx + \cos x dy = \int_0^{\pi/4} \int_0^{\pi/2} (-\sin x - 1) dxdy = \int_0^{\pi/4} (\cos x - x) \Big|_0^{\pi/2} dy = \int_0^{\pi/4} (-\frac{\pi}{2} - \cos \frac{\pi y}{2} + \frac{\pi y}{2}) dy = (-\frac{\pi y}{2} - \frac{2}{\pi} \sin \frac{\pi y}{2} + \frac{\pi y^2}{4}) \Big|_0^{\pi/4} = -\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2}$

مثال ۲۸: اگر ناحیه R و مرز آن یعنی خم بسته ساده C مفروضات قضیه گرین را برآورده سازند، نشان دهید مساحت ناحیه R را می توان از هر یک از فرمولهای روبرو محاسبه کرد:

$R \text{ مساحت} = \int_C xdy = - \int_C ydx = \frac{1}{2} \int_C xdy - ydx$

پاسخ: در هر سه مورد حاصل $\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}$ برابر یک می باشد، بنابراین طبق قضیه گرین هر سه انتگرال فوق مقداری برابر $\iint_R dxdy$ دارند که همان مساحت ناحیه R می باشد.

مثال ۲۹: C را یک خم ساده بسته فرض کنید که از مبدأ مختصات عبور نمی کند و ناحیه R در آن محصور شده است. نشان دهید.

اگر مبدأ خارج ناحیه R باشد $\int_C -ydx + xdy = 0$
اگر مبدأ داخل ناحیه R باشد $\int_C -ydx + xdy = 2\pi$

پاسخ: ابتدا توجه کنید که:

$\frac{\partial F_2}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} (\frac{x}{x^2+y^2}) = \frac{x^2+y^2 - 2x^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2+y^2)^2}$

$\frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} (\frac{-y}{x^2+y^2}) = \frac{-x^2 - y^2 + 2y^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2+y^2)^2}$

$\int_C \frac{-ydx + xdy}{x^2+y^2} = \iint_R (\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y})dxdy = \iint_R 0dxdy = 0$

حال اگر مبدأ در ناحیه R نباشد، طبق قضیه گرین:

توجه کنید که اگر مبدأ در ناحیه R باشد، نمی توانیم قضیه گرین را به کار ببریم زیرا توابع F_1 و F_2 در $(0,0)$ ناپیوسته اند.

حال فرض کنید مبدأ داخل ناحیه R باشد. در این صورت دایره C_E به مرکز مبدأ و شعاع E وجود دارد که کاملاً داخل ناحیه R است. (شکل روبرو) همچنین فرض کنید خم C_E در جهت عقربه های ساعت جهت دار شده باشد. در این صورت به سادگی می توان نشان داد:

$\int_{C_E} \frac{-ydx + xdy}{x^2+y^2} = -2\pi$

خم های C و C_E مرزهای ناحیه R_1 را تشکیل می دهد که به طور صحیح جهت دار شده اند. بنابراین طبق قضیه گرین:

$\int_C \frac{-ydx + xdy}{x^2+y^2} + \int_{C_E} \frac{-ydx + xdy}{x^2+y^2} = 0$

$\int_C \frac{-ydx + xdy}{x^2+y^2} = - \int_{C_E} \frac{-ydx + xdy}{x^2+y^2} = -(-2\pi) = 2\pi$

حال نتیجه مورد نظر حاصل خواهد شد:

مثال ۳۰: مقدار $\int_C \frac{-ydx + xdy}{x^2+y^2}$ را روی خم ساده دلخواه C که از مبدأ عبور نمی کند بیابید.

پاسخ: انتگرال داده شده، انتگرال میدان برداری $F = (\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2})$ روی خم C می باشد. در مثال قبل دیدیم که F شرط لازم برای پایستار بودن را دارد ولی دامنه آن مجموعه $R^2 - \{0,0\}$ می باشد. بنابراین نمی توان نتیجه ای در مورد پایستار بودن آن در کل R^2 گرفت ولی چون در صورت سؤال قید شده خم C از $(0,0)$ عبور نمی کند اشکالی ایجاد نمی شود. به سادگی می توان نشان داد تابع پتانسیل میدان فوق برابر $f(x,y) = \text{Arctg} \frac{y}{x}$ می باشد. از طرفی توجه کنید که عبارت $\text{Arctg} \frac{y}{x}$ زاویه نقطه (x,y) در مختصات قطبی می باشد. بنابراین تحت شرایط مناسب داریم:

$\int_C \frac{-ydx + xdy}{x^2+y^2} = (زاویه نقطه انتهایی خم C) - (زاویه نقطه ابتدایی خم C)$

توجه: نتایج دو مثال قبل در کنکورهای سالهای اخیر بارها مورد سؤال قرار گرفته. لذا دانشجویان می توانند این نتایج را به خاطر بسپارند.

کدام گزاره برای میدان برداری $F(x,y) = \frac{-y\vec{i} + x\vec{j}}{x^2 + y^2}$ صحیح نیست؟

(۱) $\int_C F \cdot dR = -2\pi$ مربع $|x| + |y| = 1$ با جهت منفی مثلثاتی

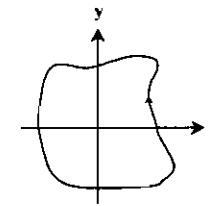
(۲) $\int_C F \cdot dR = 0$ بیضی $(x-9)^2 + \frac{(y-10)^2}{4} = 1$ با جهت مثبت مثلثاتی

(۳) $\int_C F \cdot dR = 0$ دایره $x^2 + y^2 = 1$ با جهت مثبت مثلثاتی

(۴) $\int_C F \cdot dR = 2\pi$ دایره $x^2 + y^2 = 1$ با جهت مثبت مثلثاتی

پاسخ: گزینه «۳» در گزینه (۱) خم C شامل مبدأ می باشد و چون جهت خم خلاف جهت مثلثاتی است پس طبق مثال (۲۹) مقدار انتگرال برابر -2π می باشد. در گزینه (۲) خم بسته C شامل مبدأ نمی باشد بنابراین طبق مثال (۲۹) مقدار انتگرال برابر صفر است. در گزینه (۳) خم C شامل مبدأ و جهت آن، جهت مثلثاتی می باشد پس مقدار انتگرال برابر 2π است.

کدام مثال ۳۲: اگر C منحنی شکل روبرو باشد، مقدار $\int_C \frac{x dy - y dx}{x^2 + y^2}$ کدام است؟



- (۱) -2π
- (۲) 0
- (۳) π
- (۴) 2π

پاسخ: گزینه «۴» خم شکل داده شده یک خم ساده بسته همواره جهت مثلثاتی می باشد، بنابراین طبق نتیجه مثال (۲۹) مقدار انتگرال مورد نظر برابر 2π می باشد.

کدام مثال ۳۳: اگر خم C قسمتی از دایره $x^2 + y^2 = 9$ از $A(3,0)$ تا نقطه $B(\frac{3}{\sqrt{2}}, \frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{2}})$ در جهت مثبت مثلثاتی باشد، مقدار

برابر است با: $\int_C \frac{-y dx + x dy}{x^2 + y^2}$

- (۱) $\frac{\pi}{6}$
- (۲) $\frac{2\pi}{3}$
- (۳) $\frac{\pi}{9}$
- (۴) $\frac{\pi}{3}$

پاسخ: گزینه «۴» ابتدا توجه کنید که: $A(3,0) \Rightarrow \text{tg} \theta = \frac{0}{3} = 0 \Rightarrow \theta = 0$

$B(\frac{3}{\sqrt{2}}, \frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{2}}) \Rightarrow \text{tg} \theta = \frac{3\sqrt{2}/\sqrt{2}}{3/\sqrt{2}} = \sqrt{2} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4}$

$\int_C \frac{-y dx + x dy}{x^2 + y^2} = \frac{\pi}{4} - 0 = \frac{\pi}{4}$ بنابراین طبق نتیجه مثال (۳۰) خواهیم داشت:

کدام مثال ۳۴: اگر $F(x,y) = y\vec{i} + 4x\vec{j}$ و بردار مماس واحد بر دایره C به معادله $x^2 + y^2 = 1$ باشد، حاصل $\int_C F \cdot T ds$ کدام است؟

- (۱) 2π
- (۲) 3π
- (۳) 4π
- (۴) 5π

پاسخ: گزینه «۲» $\int_C F \cdot T ds = \int_C F \cdot dR = \iint_R (\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y}) dx dy = \iint_R (4 - 1) dx dy = 3 \times (\text{مساحت ناحیه } R) = 3\pi$

کدام مثال ۳۵: فرض کنید تابع $f(x,y)$ و مشتقات نسبی مرتبه اول و دوم آن پیوسته باشند و C یک منحنی ساده هموار و بسته باشد. اگر \int_C

هارمونیک باشد، حاصل $\int_C (\frac{\partial f}{\partial y} dx - \frac{\partial f}{\partial x} dy)$ کدام است؟

- (۱) 2π
- (۲) 0
- (۳) $2\pi a$
- (۴) πa^2

پاسخ: گزینه «۲» اگر ناحیه محدود به منحنی C را R بنامیم، طبق قضیه گرین خواهیم داشت:

$\int_C (\frac{\partial f}{\partial y} dx - \frac{\partial f}{\partial x} dy) = \iint_R (\frac{\partial}{\partial x}(-\frac{\partial f}{\partial x}) - \frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial f}{\partial y})) dx dy = -\iint_R (\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}) dx dy$

و چون f هارمونیک است، پس $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$ و در نتیجه حاصل انتگرال برابر صفر خواهد شد.

قضیه: (شکل برداری قضیه گرین). فرض کنید C یک خم ساده بسته هموار بوده که ناحیه R را در برگرفته است

و $\vec{F} = F_1\vec{i} + F_2\vec{j}$ یک میدان برداری پیوسته و $\frac{\partial F_1}{\partial x}$ و $\frac{\partial F_2}{\partial y}$ نیز در ناحیه R پیوسته باشند، آنگاه:

$\int_C F \cdot dr = \iint_R (\text{curl } F \cdot \vec{k}) dx dy = \iint_R ((\nabla \times F) \cdot \vec{k}) dx dy$

قضیه دوم گرین (قضیه دیورژانس در صفحه). فرض کنید C یک خم ساده، بسته قطعه قطعه هموار (قطعه قطعه مستقیم پذیر) باشد که ناحیه R در آن محصور شده است و میدان $F = F_1\vec{i} + F_2\vec{j}$ روی خم C پیوسته و $\frac{\partial F_1}{\partial x}$ و $\frac{\partial F_2}{\partial y}$ در R پیوسته باشند، آنگاه:

$\int_C F \cdot nds = \int_C F_1 dy - F_2 dx = \iint_R (\frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y}) dx dy = \iint_R \text{div } F dx dy$

کدام مثال ۳۶: هرگاه $F(x,y) = x^2\vec{i} + y^2\vec{j}$ و C دایره $x^2 + y^2 = 1$ و بردار قائم یکه خارجی دایره مزبور باشد، حاصل $\int_C F \cdot nds$ چقدر است؟

پاسخ: ابتدا توجه کنید که: $\text{div } \vec{F} = 2x + 2y$

$\int_C F \cdot nds = \iint_R (2x + 2y) dx dy$ بنابراین طبق قضیه دوم گرین داریم:

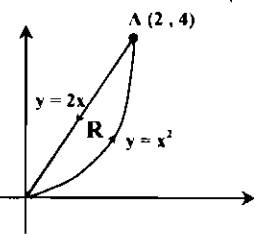
و چون ناحیه R نسبت به متغیرهای x و y زوج می باشد (ناحیه R نسبت به محور x و y متقارن است) و $2x$ و $2y$ توابع فرد هستند، حاصل انتگرال اخیر برابر صفر است.

کدام مثال ۳۷: حاصل $\int_C 2y dx + 4x dy$ وقتی C قوس از سهمی $y = x^2$ از مبدأ تا نقطه $A(2,4)$ و پاره خط واصل از نقطه A تا مبدأ باشد،

کدام است؟

- (۱) $\frac{3}{8}$
- (۲) $\frac{3}{4}$
- (۳) $\frac{4}{3}$
- (۴) $\frac{4}{3}$

پاسخ: گزینه «۴» طبق قضیه گرین و با توجه به شکل داریم:



$\int_C 2y dx + 4x dy = \iint_R (4 - 2) dx dy = \int_0^2 \int_{x^2}^{2x} 2 dy dx = \int_0^2 (4x - 2x^2) dx = \frac{4}{3}$

کدام مثال ۳۸: اگر C یک خم بسته ساده با جهت مثبت باشد، کدامیک از گزاره های زیر در مورد انتگرال زیر صدق می کند؟

$I = \int_C -y^2 dx + x^2 dy$

- (۱) همواره برابر طول خم C می باشد.
- (۲) همواره عددی مثبت است.
- (۳) همواره برابر مساحت ناحیه محدود به C است.
- (۴) مقدار انتگرال به خم C ارتباطی ندارد.

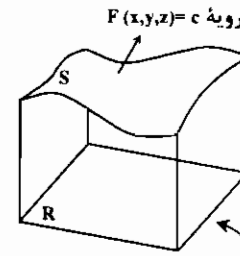
پاسخ: گزینه «۲» اگر ناحیه محدود به خم C را با R نشان دهیم، طبق قضیه گرین:

$I = \int_C -y^2 dx + x^2 dy = \iint_R (\frac{\partial}{\partial x}(x^2) - \frac{\partial}{\partial y}(-y^2)) dx dy = \iint_R 2(x^2 + y^2) dx dy$

با توجه به اینکه $x^2 + y^2 \geq 0$ ، پس حاصل انتگرال اخیر همواره مثبت است یعنی $I > 0$.

انتگرالهای رویه‌ای (انتگرال روی سطح)

در فصل قبل یاد گرفتیم که چگونه از یک تابع روی ناحیه‌ای مسطح واقع در صفحه انتگرال بگیریم. حال می‌خواهیم ببینیم اگر تابع روی رویه‌ای خمیده تعریف شود چه باید کرد؟ روش محاسبه این انتگرالها که انتگرال رویه‌ای نام دارند این است که انتگرال آنها را به صورت یک انتگرال دوگانه روی ناحیه‌ای واقع در یکی از صفحات مختصات که زیر رویه قرار دارد بنویسیم (شکل زیر). و بدین ترتیب انتگرال به نوعی انتگرال تبدیل می‌شود که روش محاسبه آنها را قبلاً دیده‌ایم.



تصویر قائم یا «سایه» S روی یکی از صفحات مختصات

تعریف و روش محاسبه انتگرال رویه‌ای

رویه‌ای مانند S به معادله $F(x, y, z) = c$ که در بالای ناحیه مسطحی چون R قرار دارد را در نظر بگیرید و فرض کنید F و مشتقات جزئی مرتبه اول آن همگی پیوسته باشند. در این صورت اگر تابعی مانند $g(x, y, z)$ بر S پیوسته باشد، انتگرال g بر S با نماد $\iint_S g dS$ یا $\iint_S g d\sigma$ نشان داده می‌شود و برابر است با:

$$\iint_S g d\sigma = \iint_R g(x, y, z) \frac{|\nabla F|}{|\nabla F \cdot \mathbf{p}|} dA$$

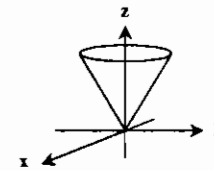
که در رابطه بالا P بردار واحد عمود بر R می‌باشد.

برای استفاده از فرمول فوق لازم است ابتدا سطح S را بر یکی از صفحات مختصات تصویر کنیم و در این صورت بردار P یکی از بردارهای $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ خواهد بود. به طور مثال اگر صفحه تصویر را صفحه xy فرض کنیم، بردار \vec{k} خواهد بود. برای یادگیری دقیق‌تر این روش به مثال زیر توجه کنید.

مثال ۳۹: انتگرال رویه‌ای $\iint_S z dS$ را روی مخروط $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ محدود به صفحات $z = 0$ و $z = 1$ بیابید.

پاسخ:

ناحیه S را بر صفحه xy تصویر می‌کنیم و آن را R می‌نامیم. با توجه به شکل ناحیه R داخل دایره $x^2 + y^2 = 1$ می‌باشد.



معادله مخروط را به شکل $F(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2 = 0$ می‌نویسیم. در این صورت:

$$\nabla F = 2x\vec{i} + 2y\vec{j} - 2z\vec{k} \Rightarrow |\nabla F| = \sqrt{4x^2 + 4y^2 + 4z^2} = \sqrt{4z^2} = 2z\sqrt{2}$$

$$\nabla F \cdot \mathbf{k} = -2z \Rightarrow |\nabla F \cdot \mathbf{k}| = 2z$$

$$\iint_S z dS = \iint_R z \times \frac{2z\sqrt{2}}{2z} dA = \sqrt{2} \iint_R z dA$$

بنابراین:

از آنجا که ناحیه R داخل دایره است برای محاسبه انتگرال اخیر بهتر است از مختصات قطبی استفاده کنیم و چون Z مختص سوم نقطه‌ای است

که روی مخروط واقع است به جای آن $\sqrt{x^2 + y^2}$ قرار می‌دهیم. بنابراین:

$$\iint_S z dS = \sqrt{2} \iint_R \sqrt{x^2 + y^2} dA = \sqrt{2} \int_0^{2\pi} \int_0^1 r \times r dr d\theta = \sqrt{2} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 r^2 dr = \frac{2\sqrt{2}\pi}{3}$$

نکته ۱۲: صفحه تصویر باید طوری انتخاب شود که $\nabla F \cdot \mathbf{p} = 0$ نشود، و این انتخاب همیشه امکان‌پذیر است.

نکته ۱۳: اگر در فرمول انتگرال رویه‌ای، تابع g تابع ثابت ۱ باشد، این انتگرال مساحت رویه را به دست می‌دهد، یعنی:

$$S = \iint_R \frac{|\nabla F|}{|\nabla F \cdot \mathbf{p}|} dA$$

نکته ۱۴: اگر $g(x, y, z)$ چگالی ورقه نازکی باشد که رویه S مدلی از آن است، حاصل انتگرال رویه‌ای جرم ورقه خواهد بود.

نکته ۱۵: dS یا $d\sigma$ را دیفرانسیل مساحت رویه می‌گویند و از رابطه $dS = \frac{|\nabla F|}{|\nabla F \cdot \mathbf{p}|}$ به دست می‌آید.

نکته ۱۶: انتگرال رویه‌ای همه ویژگیهای جبری معمول انتگرالهای دوگانه از جمله خاصیت جمع‌پذیری دامنه‌ها را دارد. منظور از این خاصیت این است که به طور مثال برای محاسبه انتگرال یک تابع روی یک رویه مکعبی، انتگرال را روی هر وجه مکعب محاسبه نموده و سپس نتایج حاصله را با هم جمع می‌کنیم.

نکته ۱۷: اگر سطح S قسمتی از رویه $z = f(x, y)$ باشد، که تصویر قائم آن روی صفحه xy ناحیه R باشد. آنگاه:

$$\iint_S g(x, y, z) dS = \iint_R g(x, y, f(x, y)) \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2} dx dy$$

به طور مشابه فرمول فوق برای حالتی که $y = f(x, z)$ و $x = f(y, z)$ باشد برقرار است.

مثال ۴۰: مساحت قسمت پایینی سهمیواره $z = 0 - x^2 - y^2$ که به صفحه $z = 1$ محدود است را محاسبه کنید.

پاسخ: برای محاسبه مساحت به جای تابع g ، تابع ثابت یک را قرار می‌دهیم. تصویر ناحیه S روی صفحه xy، قرص $x^2 + y^2 \leq 1$ می‌باشد. بنابراین با توجه به نکته (۱۷) خواهیم داشت:

$$\text{مساحت} = \iint_S dS = \iint_{x^2 + y^2 \leq 1} \sqrt{1 + (2x)^2 + (2y)^2} dx dy = \iint_{x^2 + y^2 \leq 1} \sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1} dx dy$$

برای محاسبه انتگرال اخیر از مختصات قطبی استفاده می‌کنیم، در این صورت:

$$\text{مساحت} = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \sqrt{4r^2 + 1} \times r dr d\theta = \int_0^{2\pi} d\theta \times \int_0^1 r \sqrt{4r^2 + 1} dr = \theta \left| \frac{1}{12} (4r^2 + 1)^{3/2} \right|_0^1 = \frac{\pi}{6} (5\sqrt{5} - 1)$$

مثال ۴۱: مساحت عرقچینی از نیم‌کره $z = 2 - x^2 - y^2$ و $z \geq 0$ که استوانه $x^2 + y^2 = 1$ از نیم‌کره جدا می‌کند چقدر است؟

پاسخ: صفحه تصویر را صفحه xy انتخاب می‌کنیم. تصویر عرقچین موردنظر بر صفحه xy قرص $x^2 + y^2 \leq 1$ می‌باشد.

$$F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 2z = 0 \Rightarrow \nabla F = 2x\vec{i} + 2y\vec{j} + 2z\vec{k} \Rightarrow |\nabla F| = \sqrt{4x^2 + 4y^2 + 4z^2} = 2\sqrt{z}, \quad |\nabla F \cdot \mathbf{p}| = |\nabla F \cdot \vec{k}| = 2z$$

$$S = \iint_R \frac{|\nabla F|}{|\nabla F \cdot \mathbf{p}|} dA = \iint_R \frac{2\sqrt{z}}{2z} dA = \sqrt{z} \iint_R \frac{1}{z} dA$$

بنابراین، مساحت عرقچین موردنظر برابر است با:

$$\text{چون } z \text{ مختص سوم نقطه‌ای روی کره مورد بحث است، لذا } z = \sqrt{2 - x^2 - y^2} \text{ و برای ساده‌تر شدن محاسبه انتگرال از مختصات قطبی استفاده می‌کنیم:}$$

$$S = \sqrt{2} \iint_R \frac{1}{\sqrt{2 - x^2 - y^2}} dA = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \frac{r dr d\theta}{\sqrt{2 - r^2}} = 2\pi(2 - \sqrt{2})$$

مثال ۴۲: اگر S قسمتی از سطح $x = 1 - z^2$ محدود به صفحات $x = 0$ و $y = 2$ و $y = -2$ باشد، انتگرال رویه‌ای $\iint_S yz dS$ برابر است با:

$$\text{۱) } -4 \quad \text{۲) } 0 \quad \text{۳) } 4 \quad \text{۴) } 8$$

پاسخ: گزینه «۲» اگر تصویر S به معادله $F(x, y, z) = x + z^2 = 1$ را بر صفحه yz ناحیه R بنامیم، داریم:

$$R: -2 \leq y \leq 2, \quad -1 \leq z \leq 1$$

بنابراین ناحیه R یک مستطیل است (توجه کنید که محدوده Z از تلاقی سطح $x = 1 - z^2$ و صفحه yz یعنی $x = 0$ به دست آمده است).

حال اگر سطح S را به صورت $x = 1 - z^2$ در نظر بگیریم، با توجه به نکته (۱۷) خواهیم داشت:

$$\iint_S yz dS = \iint_R yz \sqrt{1 + (-2z)^2} dy dz = \int_{-2}^2 \int_{-1}^1 yz \sqrt{1 + 4z^2} dz dy$$

چون تابع تحت انتگرال نسبت به y (یا Z) فرد است و ناحیه انتگرال‌گیری نسبت به y (یا Z) متقارن است حاصل انتگرال فوق برابر صفر می‌باشد.

مثال ۴۳: مساحت ناحیه بریده شده از صفحه $x + y + z = a$ توسط استوانه $x^2 + y^2 = a^2$ چقدر است؟

پاسخ: صفحه تصویر را صفحه xy انتخاب می‌کنیم. تصویر ناحیه موردنظر بر صفحه xy قرص $x^2 + y^2 \leq a^2$ می‌باشد. از طرفی بنابراین طبق نکته (۱۷) داریم:

$$S = \iint_S dS = \iint_R \sqrt{1 + (-1)^2 + (-1)^2} dA = \iint_R \sqrt{3} dA = \sqrt{3} \times (\text{مساحت دایره به شعاع } a) = \sqrt{3} \pi a^2$$

مثال ۴۴: مرکز جرم یک پوسته نازک نیم کره $x^2 + y^2 + z^2 = a^2, z \geq 0$ با چگالی ثابت δ را بیابید.

پاسخ: با توجه به شکل نیم کره داده شده واضح است که مرکز جرم بر محور Z واقع است.

یعنی $\bar{x} = \bar{y} = 0$ پس کافی است \bar{z} را از فرمول $\bar{z} = \frac{M_{xy}}{M}$ بیابیم.

$$M = \iint_S \delta dS = \delta \iint_S dS = \delta (\text{مساحت نیم کره}) = 2\pi a^2 \delta$$

برای محاسبه M_{xy} به ترتیب روبرو عمل می کنیم:

$$F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - a^2 = 0 \Rightarrow \nabla F = 2x\mathbf{i} + 2y\mathbf{j} + 2z\mathbf{k}$$

$$|\nabla F| = 2\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = 2a, \quad |\nabla F \cdot \mathbf{k}| = |\nabla F \cdot \mathbf{k}| = 2z \Rightarrow dS = \frac{2a}{2z} dA = \frac{a}{z} dA$$

$$M_{xy} = \iint_S z \delta dS = \delta \iint_R z \times \frac{a}{z} dA = \delta a \iint_R dA = \pi a^2 \delta$$

بنابراین:

در نتیجه $\bar{z} = \frac{\pi a^2 \delta}{2\pi a^2 \delta} = \frac{a}{2}$ و مختصات مرکز جرم نقطه $(0, 0, \frac{a}{2})$ می باشد.

مثال ۴۵: مساحت قسمتی از رویه نیم کره $x^2 + y^2 + z^2 = a^2, z \geq 0$ که توسط استوانه $x^2 + y^2 = ax$ بریده می شود، را بیابید.

پاسخ: صفحه تصویر را صفحه xy در نظر می گیریم. تصویر ناحیه مورد نظر روی صفحه xy داخل دایره $x^2 + y^2 = ax$ قرار دارد. از طرفی:

$$F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - a^2 = 0 \Rightarrow \frac{|\nabla F|}{|\nabla F \cdot \mathbf{k}|} dA = \frac{a}{z} dA = \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} dA$$

$$\iint_R \frac{|\nabla F|}{|\nabla F \cdot \mathbf{k}|} dA = \iint_R \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} dx dy$$

بنابراین:

برای محاسبه انتگرال اخیر از مختصات قطبی استفاده می کنیم. در مختصات قطبی رابطه $x^2 + y^2 = ax$ به $r = a \cos \theta$ تبدیل می شود. بنابراین انتگرال فوق برابر است با:

$$S = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{a \cos \theta} \frac{a}{\sqrt{a^2 - r^2}} \times r dr d\theta = a \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left. -\sqrt{a^2 - r^2} \right|_0^{a \cos \theta} d\theta = a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin \theta) d\theta = a^2 \left(\frac{\pi}{2} - 1 \right)$$

مثال ۴۶: مساحت قسمتی از استوانه $x^2 + y^2 = 2ay$ که داخل کره $x^2 + y^2 + z^2 = 4a^2$ قرار می گیرد را بیابید.

پاسخ: معادله استوانه را به صورت زیر می نویسیم و صفحه تصویر را صفحه yz انتخاب می کنیم (توجه کنید که این تنها صفحه مختصات است که می تواند انتخاب شود).

$$F(x, y, z) = x^2 + y^2 - 2ay = 0 \Rightarrow \nabla F = 2x\mathbf{i} + (2y - 2a)\mathbf{j}$$

$$|\nabla F| = \sqrt{4x^2 + 4(y-a)^2} = 2\sqrt{x^2 + y^2 - 2ay + a^2} = 2a$$

$$|\nabla F \cdot \mathbf{i}| = 2x \Rightarrow dS = \frac{2a}{2x} dA = \frac{a}{x} dA$$

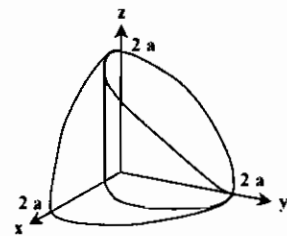
از طرفی برای دست آوردن تصویر ناحیه مورد نظر روی صفحه yz لازم است متغیر x را مابین دو معادله زیر حذف کنیم.

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 4a^2 \\ x^2 + y^2 = 2ay \end{cases} \Rightarrow z^2 + 2ay = 4a^2 \Rightarrow R: 0 \leq y \leq 2a, 0 \leq z \leq \sqrt{4a^2 - 2ay}$$

بنابراین مساحت ناحیه مورد نظر برابر است با:

$$S = \iint_S dS = \iint_R \frac{a}{x} dA = \iint_R \frac{a}{\sqrt{2ay - y^2}} dA = \int_0^{2a} \int_0^{\sqrt{4a^2 - 2ay}} \frac{a}{\sqrt{2ay - y^2}} dz dy$$

$$= \int_0^{2a} \frac{az}{\sqrt{2ay - y^2}} \Big|_{z=0}^{\sqrt{4a^2 - 2ay}} dy = \int_0^{2a} \frac{a\sqrt{4a^2 - 2ay}}{\sqrt{2ay - y^2}} dy = a\sqrt{2a} \int_0^{2a} \frac{dy}{\sqrt{y}} = 4a^2$$



توجه کنید که مقدار فوق $\frac{1}{4}$ مساحت مورد نظر می باشد. که در یک

هشتم اول قرار دارد پس مساحت کل برابر $16a^2$ می باشد (با توجه به شکل روبرو).

مثال ۴۷: از $g(x, y, z) = xyz$ روی مکعبی که صفحات $x=1, y=1, z=1$ از یک هشتم اول جدا می کنند انتگرال بگیرید.

پاسخ: با توجه به شکل زیر روی وجوهی که بر صفحات مختصات منطبق اند، داریم $xyz=0$ و بنابراین انتگرال روی هر یک از این وجوه برابر صفر است. بنابراین انتگرال روی مکعب به صورت زیر در می آید.

$$\iiint_{\text{مکعب}} xyz dS = \iint_{\text{وجه A}} xyz dS + \iint_{\text{وجه B}} xyz dS + \iint_{\text{وجه C}} xyz dS + \iint_{\text{وجه D}} xyz dS$$

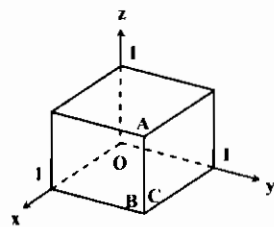
وجه A، رویه $z=1$ می باشد که تصویر آن در صفحه xy ناحیه $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1$ می باشد.

$$\nabla F = \bar{k} \Rightarrow |\nabla F| = 1, \quad |\nabla F \cdot \bar{k}| = 1, \quad dS = \frac{|\nabla F|}{|\nabla F \cdot \bar{k}|} dx dy = dx dy$$

چون می خواهیم انتگرال g را روی رویه $z=1$ محاسبه کنیم، در ضابطه g به جای z مقدار یک را قرار می دهیم. بنابراین:

$$\iint_{\text{وجه A}} xyz dS = \int_0^1 \int_0^1 xy dx dy = \frac{1}{4}$$

به خاطر وجود تقارن انتگرال g روی وجوه B و C نیز برابر $\frac{1}{4}$ خواهد بود. بنابراین:



$$\iint_{\text{مکعب}} xyz dS = 3 \times \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

مثال ۴۸: رویه جانبی استوانه ای از دو قسمت به معادلات $x = 2 - y^2$ و $x = y^2$ تشکیل شده است. مساحت ناحیه ای که این استوانه از صفحه $x + 2y + 2z = 5$ جدا می کند چقدر است؟

۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴)

پاسخ: گزینه «۴» صفحه تصویر را صفحه xy انتخاب می کنیم. اگر تصویر ناحیه S روی صفحه xy را با R نشان دهیم، ناحیه R ، سطح

محصور بین $x = y^2$ و $x = 2 - y^2$ می باشد یعنی: $x = 2 - y^2, x = y^2 \Rightarrow y^2 = 2 - y^2 \Rightarrow y = \pm 1 \Rightarrow R: y^2 \leq x \leq 2 - y^2, -1 \leq y \leq 1$

از طرفی اگر معادله صفحه را به صورت $F(x, y, z) = x + 2y + 2z = 5$ در نظر بگیریم، آنگاه:

$$dS = \frac{|\nabla F|}{|\nabla F \cdot \mathbf{k}|} dA = \frac{|\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 2\mathbf{k}|}{|(\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 2\mathbf{k}) \cdot (\mathbf{k})|} = \frac{3}{2}$$

$$S = \iint_R \frac{|\nabla F|}{|\nabla F \cdot \mathbf{k}|} dA = \int_{-1}^1 \int_{y^2}^{2-y^2} \frac{3}{2} dx dy = \frac{3}{2} \int_{-1}^1 (2 - 2y^2) dy = 4$$

بنابراین مساحت مورد نظر برابر است با:

انتگرال میدان برداری روی سطوح (شار)

تعریف ۴: اگر F یک میدان برداری پیوسته روی رویه S باشد، انتگرال $\vec{F} \cdot \vec{n}$ ، یعنی مؤلفه عددی F در جهت \vec{n} ، را شار گذرنده از S در جهت مثبت می نامیم. یعنی:

$$\text{شار گذرنده } F \text{ از } S \text{ در جهت } \vec{n} = \iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} d\sigma$$

در فرمول فوق اگر S بخشی از رویه $G(x, y, z) = c$ باشد، آنگاه \vec{n} را می توان یکی از دو بردار زیر، بسته به اینکه کدامیک از آنها جهت مطلوب را به دست می دهد، اختیار کرد:

$$\vec{n} = + \frac{\nabla G}{|\nabla G|} \quad \text{یا} \quad \vec{n} = - \frac{\nabla G}{|\nabla G|}$$

مثال ۴۹: رویه S عبارت است از رویه‌ای که صفحات $x = a$ و $x = 0$ از استوانه $y^2 + z^2 = a^2$ جدا می‌کنند. شار برونسوی $\vec{F} = yz\vec{j} + z^2\vec{k}$ گذرنده از رویه S چقدر است؟

- (۱) a^4 (۲) $2a^4$ (۳) $3a^4$ (۴) $4a^4$

پاسخ: گزینه «۳» اگر $G(x, y, z) = y^2 + z^2 - a^2 = 0$ را به صورت $G(x, y, z) = y^2 + z^2 - a^2 = 0$ در نظر بگیریم. بردار واحد قائم برونسوی بر S برابر است با:

$$\vec{n} = \frac{\nabla G}{|\nabla G|} = \frac{2y\vec{j} + 2z\vec{k}}{\sqrt{4y^2 + 4z^2}} = \frac{y}{a}\vec{j} + \frac{z}{a}\vec{k}$$

$$d\sigma = \frac{|\nabla G|}{|\nabla G \cdot \vec{k}|} dA = \frac{2a}{|2z|} dA = \frac{a}{z} dA$$

از طرفی:

اگر تصویر S را بر صفحه xy با R نشان دهیم. ناحیه R به صورت روبرو خواهد بود:

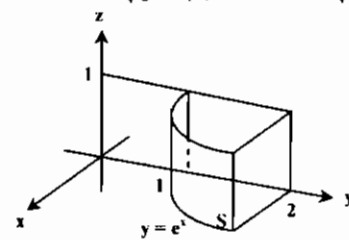
$$R: 0 \leq x \leq a, -a \leq y \leq a$$

مثال ۵۰: فرض کنید S آن قسمتی از استوانه $y = e^x$ واقع در یک هشتم اول باشد که تصویر قائم آن بر صفحه yz مستطیل $0 \leq z \leq 1$ و $0 \leq y \leq 2$ باشد. همچنین فرض کنید n بردار قائم بر S باشد که متوجه بیرون صفحه yz است. شار میدان $\vec{F}(x, y, z) = -2\vec{i} + yz\vec{j} + z\vec{k}$ گذرنده از S در جهت n چقدر است؟

پاسخ: اگر استوانه را به صورت $G(x, y, z) = e^x - y = 0$ در نظر بگیریم، آنگاه بردار قائم مورد نظر عبارت است از:

$$\vec{n} = \frac{\nabla G}{|\nabla G|} = \frac{e^x\vec{i} - \vec{j}}{\sqrt{e^{2x} + 1}} \Rightarrow \vec{F} \cdot \vec{n} = \frac{-2e^x - y}{\sqrt{e^{2x} + 1}} = \frac{-2e^x}{\sqrt{e^{2x} + 1}}$$

در رابطه بالا برای نوشتن تساوی آخر به جای y، e^x قرار دادیم. از طرفی:



$$d\sigma = \frac{|\nabla G|}{|\nabla G \cdot \vec{i}|} dA = \frac{\sqrt{e^{2x} + 1}}{e^x} dA$$

$$\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} d\sigma = \iint_R \frac{-2e^x}{\sqrt{e^{2x} + 1}} \times \frac{\sqrt{e^{2x} + 1}}{e^x} dA = -2 \int_0^1 \int_0^2 dz dy = -4$$

بنابراین:

نکته ۱۸: انتگرال شار را با نمادهای زیر نیز نشان می‌دهند:

الف) اگر حاصل $\vec{n} d\sigma$ را $d\vec{S}$ فرض کنیم، شار را با $\iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S}$ نیز می‌توان نشان داد.

ب) اگر α, β, γ زوایای بردار قائم \vec{n} با محورهای مختصات باشند، آنگاه $\vec{n} = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$ و بنابراین شار را با $\iint_S (F_x \cos \alpha + F_y \cos \beta + F_z \cos \gamma) d\sigma$ نیز می‌توان نشان داد.

ج) گاهی شار را با نماد $\iint_S (F_x dydz + F_y dx dz + F_z dx dy)$ نیز نشان می‌دهند.

نکته ۱۹: می‌دانیم اگر صفحه تصویر، صفحه xy انتخاب شود، آنگاه $\vec{n} = \frac{\nabla G}{|\nabla G|}$ و $d\sigma = \frac{|\nabla G|}{|\nabla G \cdot \vec{k}|} dx dy$. بنابراین در این حالت انتگرال

$$\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} d\sigma = \iint_R \frac{\vec{F} \cdot \nabla G}{|\nabla G \cdot \vec{k}|} dx dy$$

شار از فرمول روبرو سریعتر قابل محاسبه می‌باشد:

و به طور مشابه وقتی صفحه تصویر، صفحه xz و yz انتخاب شود فرمول فوق به ترتیب به صورت زیر در می‌آید:

$$\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} d\sigma = \iint_R \frac{\vec{F} \cdot \nabla G}{|\nabla G \cdot \vec{j}|} dx dz \quad (\text{وقتی صفحه تصویر، صفحه xz باشد})$$

$$\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} d\sigma = \iint_R \frac{\vec{F} \cdot \nabla G}{|\nabla G \cdot \vec{i}|} dy dz \quad (\text{وقتی صفحه تصویر، صفحه yz باشد})$$

مثال ۵۱: حاصل انتگرال سطح $I = \iint_S x dy dz + y dx dz + z dx dy$ روی نیم کره $x^2 + y^2 + z^2 = 1, z \geq 0$ کدام است؟

- (۱) π (۲) 2π (۳) 3π (۴) 4π

پاسخ: گزینه «۳» صفحه تصویر را صفحه xy، انتخاب می‌کنیم همچنین توجه کنید که انتگرال داده شده شار میدان

$\vec{F} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ می‌باشد و اگر معادله نیم کره را به صورت $G(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$ بنویسیم، آنگاه:

$$\nabla G = 2x\vec{i} + 2y\vec{j} + 2z\vec{k} \Rightarrow \vec{F} \cdot \nabla G = 2(x^2 + y^2 + z^2) = 2$$

$$|\nabla G \cdot \vec{k}| = 2z = 2\sqrt{1 - x^2 - y^2}$$

از طرفی توجه کنید که تصویر کره مزبور بر صفحه xy قرص $x^2 + y^2 \leq 1$ می‌باشد. بنابراین:

$$I = \iint_R \frac{2}{2\sqrt{1-x^2-y^2}} dx dy = \iint_R \frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}} dx dy$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^1 \frac{r dr d\theta}{\sqrt{1-r^2}} = \int_0^{2\pi} (-\sqrt{1-r^2}) \Big|_0^1 d\theta = \int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi$$

(تغییر مختصات قطبی)

مثال ۵۲: شار برونسوی میدان $\vec{F} = y\vec{i} - x\vec{j} + 4\vec{k}$ گذرنده از سطح $z = 1 - x^2 - y^2$ واقع در یک هشتم اول را بیابید.

پاسخ: صفحه تصویر را صفحه xy انتخاب می‌کنیم. در این صورت اگر سطح مورد نظر را به صورت $G(x, y, z) = x^2 + y^2 + z = 1$ در نظر بگیریم، آنگاه:

$$\nabla G = 2x\vec{i} + 2y\vec{j} + \vec{k} \Rightarrow \vec{F} \cdot \nabla G = 2xy - 2xy + 4 = 4, |\nabla G \cdot \vec{k}| = 1$$

و از طرفی تصویر سطح مورد نظر بر صفحه xy، قرص $x^2 + y^2 \leq 1, x \geq 0, y \geq 0$ می‌باشد. بنابراین:

$$\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} d\sigma = \iint_R 4 dx dy = 4 \times (\text{مساحت تصویر}) = 4 \times \frac{\pi}{4} = \pi$$

قضیه دیورژانس (قضیه گاوس یا قضیه واکرای)

ناحیه D را یک ناحیه ۳ بعدی منظم فرض کنید که مرز آن S، یک سطح بسته جهت دار باشد و قائم \vec{n} همواره رو به خارج ناحیه D اشاره کند. اگر مشتقات جزئی F روی ناحیه D بیوسته باشند، آنگاه:

$$\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} dS = \iiint_D \text{div} F dV$$

مثال ۵۳: شار میدان $\vec{F}(x, y, z) = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ روی کره $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ چقدر است؟

پاسخ: ناحیه محدود به کره را D می‌نامیم. در این صورت بنابر قضیه دیورژانس:

$$\text{شار} = \iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} dS = \iiint_D \text{div} F dV = \iiint_D (1+1+1) dV = 3 \iiint_D dV = 3 \left(\frac{4}{3} \pi R^3 \right) = 4\pi R^3$$

مثال ۵۴: مقدار $\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} dS$ که در آن $\vec{F}(x, y, z) = (xy^2, yz^2, zx^2)$ و S کره $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ و \vec{n} بردار قائم یک خارجی می‌باشد برابر است با:

- (۱) $\frac{4}{3}\pi a^3$ (۲) $\frac{4}{3}\pi a^5$ (۳) $4\pi a^5$ (۴) $\frac{2}{3}\pi a^5$

پاسخ: گزینه «۱» ناحیه محدود به کره S را D می‌نامیم، و $\text{div} = y^2 + z^2 + x^2$. بنابراین طبق قضیه دیورژانس:

$$\text{شار} = \iiint_D \text{div} F dV = \iiint_D (x^2 + y^2 + z^2) dV$$

$$\text{شار} = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^a \rho^2 (\rho^2 \sin \phi) \rho d\rho d\phi d\theta = \frac{4}{5}\pi a^5$$

برای محاسبه انتگرال فوق از مختصات کروی استفاده می‌کنیم:

مثال ۵۵: شار میدان $\vec{F}(x, y, z) = xy\vec{i} + yz\vec{j} + xz\vec{k}$ بر رویه مکعبی که صفحات $x=1, y=1, z=1$ از یک هشتم اول جدا می‌کند چقدر است؟

- (۱) $\frac{1}{2}$ (۲) $\frac{3}{2}$ (۳) $\frac{5}{2}$ (۴) 2

پاسخ: گزینه «۲» به جای محاسبه شار به صورت مجموع شش انتگرال جداگانه، می توان شار را به کمک قضیه دیورژانس محاسبه کرد.

$$F(x, y, z) = xy\vec{i} + yz\vec{j} + xz\vec{k} \Rightarrow \text{div}F = y + z + x$$

$$\text{شار} = \iiint_D \text{div}F dV = \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 (x + y + z) dx dy dz = \frac{7}{6}$$

مثال ۵۶: مقدار انتگرال $\iint_S F \cdot n dS$ در صورتی که $F(x, y, z) = (x, y, z)$ و S سطح بیضی گوی $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ باشد، چقدر است؟

- (۱) πabc (۲) $6\pi abc$ (۳) $2\pi abc$ (۴) $4\pi abc$

پاسخ: گزینه «۴» اگر ناحیه درون S را با R نشان دهیم، طبق قضیه دیورژانس:

$$\iint_S F \cdot n dS = \iiint_R \text{div}F dV = \iiint_R \text{div}F dV = 3 \times (\text{حجم } R) = 4\pi abc$$

مثال ۵۷: مقدار انتگرال سطح $\iint_S (x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma) dS$ روی رویه $\frac{x^2}{4} + y^2 + z^2 = 1$ کدام است؟

- (۱) 2π (۲) 4π (۳) 8π (۴) 16π

پاسخ: گزینه «۲» انتگرال داده شده شار میدان $F(x, y, z) = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ است، بنابراین طبق قضیه دیورژانس:

$$\text{شار} = \iiint_D \text{div}F dV = 3 \iiint_D dV = 3 \times (\text{حجم درون رویه}) = 3 \times \frac{4\pi}{3} = 4\pi$$

مثال ۵۸: فرض کنید $F = bxy^2\vec{i} + bx^2y\vec{j} + (x^2 + y^2)z^2\vec{k}$ و S مرز محصور کننده استوانه $x^2 + y^2 \leq a^2$ و $0 \leq z \leq b$ باشد. مقدار $\iint_S F \cdot n dS$ چقدر است؟

پاسخ: ناحیه محصور شده توسط S را D می نامیم، طبق قضیه دیورژانس:

$$I = \iint_S F \cdot n dS = \iiint_D \text{div}F dV = \iiint_D (x^2 + y^2)(b + 2z) dV$$

برای محاسبه انتگرال اخیر از مختصات استوانه ای استفاده می کنیم:

$$I = \int_0^b (b + 2z) dz \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^a r^2 r dr = (b^2 + b^2) \times 2\pi \times \frac{a^4}{4} = \pi a^4 b^2$$

شکل های دیگر قضیه دیورژانس:

قضیه: اگر ناحیه D در شرایط قضیه دیورژانس صدق کند و دارای مرز S باشد، و همچنین F یک میدان برداری و ϕ یک میدان اسکالر که شرایط قضیه دیورژانس را دارند باشند، آنگاه:

a) $\iiint_D \text{Curl}F dV = - \iint_S F \times \vec{n} dS$ (\vec{n} بردار قائم بکه عمود بر سطح)

b) $\iiint_D \text{grad}\phi dV = - \iint_S \phi \vec{n} dS$

مثال ۵۹: اگر S یک رویه بسته باشد، که ناحیه R با حجم V را در بر گرفته است آنگاه مقدار $\iint_S \text{Curl}f \cdot n dS$ کدام است؟

- (۱) S (۲) V (۳) 0 (۴) $\iiint_R f dV$

پاسخ: گزینه «۲» با فرض برقرار بودن شرایط قضیه دیورژانس داریم:

$$\iint_S (\text{Curl}f \cdot n) dS = \iiint_R \text{div}(\text{Curl}f) dV = 0$$

در تساوی آخر از این نکته استفاده کردیم که $\text{div}(\text{Curl}f) = 0$.

مثال ۶۰: فرض کنید تابع f در سرتا سر ناحیه D همساز باشد و S مرز ناحیه D باشد، \vec{n} بردار واحد قائم برونسو بر S باشد. همچنین

مشتق جهتی f در جهت n باشد، در این صورت مقدار $\iint_S \frac{\partial f}{\partial n} dS$ کدام است؟

- (۱) $\iiint_D |f| dV$ (۲) $\iiint_D |\nabla f|^2 dV$ (۳) $\iiint_D |f|^2 dV$ (۴) صفر

پاسخ: گزینه «۴» با توجه به تعریف مشتق جهتی می دانیم $\frac{\partial f}{\partial n} = \nabla f \cdot n$ ، بنابراین به کمک قضیه دیورژانس خواهیم داشت:

$$\iint_S \frac{\partial f}{\partial n} dS = \iint_S \nabla f \cdot n dS = \iiint_D \text{div}(\nabla f) dV = \iiint_D \nabla^2 f dV$$

با توجه به اینکه f تابعی همساز می باشد، پس $\nabla^2 f = 0$ و در نتیجه مقدار انتگرال اخیر برابر صفر است.

مثال ۶۱: اتحاد های گرین را ثابت کنید:

$$1) \iint_S f \nabla g \cdot n dS = \iiint_D (f \nabla^2 g + \nabla f \cdot \nabla g) dV \quad 2) \iint_S (f \nabla g - g \nabla f) \cdot n dS = \iiint_D (f \nabla^2 g - g \nabla^2 f) dV$$

پاسخ:

ابتدا توجه کنید که: $\text{div}(f \nabla g) = \nabla f \cdot \nabla g + f \text{div}(\nabla g) = \nabla f \cdot \nabla g + f \nabla^2 g$

$$\iint_S f \nabla g \cdot n dS = \iiint_D (\nabla f \cdot \nabla g + f \nabla^2 g) dV$$

بنابراین با به کار بردن قضیه دیورژانس برای تابع $f \nabla g$ خواهیم داشت:

مثال ۶۲: اگر f تابعی همساز باشد، آنگاه حاصل $\iint_S f \frac{\partial f}{\partial n} dS$ کدام است؟

- (۱) $\iiint_D |\nabla f|^2 dV$ (۲) $\iiint_D |\nabla f|^2 dV$ (۳) $\iiint_D \frac{1}{2} f^2 dV$ (۴) صفر

پاسخ: گزینه «۲» می دانیم منظور از $\frac{\partial f}{\partial n}$ مشتق جهتی f در راستای بردار n ، یعنی $\nabla f \cdot n$ می باشد. بنابراین به کار بردن اتحاد اول گرین

$$\iint_S f \frac{\partial f}{\partial n} dS = \iint_S f \nabla f \cdot n dS = \iiint_R (\nabla f \cdot \nabla f + f \nabla^2 f) dV$$

در مورد انتگرال داده شده خواهیم داشت:

با توجه به اینکه طبق فرض f همساز است، پس $\nabla^2 f = 0$ یا $f \nabla^2 f = 0$ و همچنین از آنجا که $|\nabla f|^2 = \nabla f \cdot \nabla f$ ، پس گزینه (۲) صحیح است.

مثال ۶۳: تابع $u(x, y, z)$ که ثابت نیست، مقادیرش روی گره ای به مرکز مبدأ و شعاع $a > 0$ برابر صفر می باشد. اگر قضیه دیورژانس را برای میدان برداری $u \nabla u$ در داخل و روی سطح کره به کار ببریم، آنگاه مقدار $\iiint_{\rho < a} u \nabla^2 u dx dy dz$

- (۱) منفی است. (۲) مثبت است. (۳) صفر است. (۴) علامت ثابتی ندارد.

پاسخ: گزینه «۱» همانطور که در صورت سؤال آمده، قضیه دیورژانس را برای میدان برداری $u \nabla u$ به کار می بریم، با کمک اتحاد اول گرین

$$\iint_S u \nabla u \cdot n dS = \iiint_D (|\nabla u|^2 + u \nabla^2 u) dV$$

خواهیم داشت:

$$\iint_D u \nabla^2 u dV = - \iint_D |\nabla u|^2 dV$$

طبق فرض u روی سطح کره صفر است، پس:

و چون طبق فرض تابع u ثابت نیست، پس $|\nabla u|^2 > 0$ و در نتیجه $\iiint_D |\nabla u|^2 dV$ بزرگتر از صفر خواهد بود. از بحث فوق نتیجه می شود مقدار انتگرال خواسته شده در صورت مسأله منفی می باشد.

مثال ۶۴: فرض کنید تابع u در ناحیه D همساز باشد و در تمام نقاط رویه S که مرز ناحیه D می باشد $\frac{\partial u}{\partial n} = 0$ ، در این صورت مقدار ∇u در ناحیه D :

- (۱) مثبت است. (۲) منفی است. (۳) صفر است. (۴) ثابت است.

$$\iint_S u \frac{\partial u}{\partial n} dS = \iiint_D (|\nabla u|^2 + u \nabla^2 u) dV$$

پاسخ: گزینه «۲» طبق اتحاد اول گرین می دانیم:

طبق فرض u همساز است یعنی $\nabla^2 u = 0$ و در روی رویه S داریم $\frac{\partial u}{\partial n} = 0$ ، بنابراین از رابطه فوق نتیجه می شود $\iiint_D |\nabla u|^2 dV = 0$ و این

انتگرال تنها در صورتی برابر صفر است که $\nabla u = 0$ باشد (یعنی u در ناحیه D ثابت باشد).

تذکر ۷: مسأله فوق به مسأله نیومن معروف است.

قضیه استوکس

قضیه استوکس نشان می‌دهد که گردش یک میدان برداری چون F در امتداد مرز یک رویه در فضا، در جهتی که نسبت به بردار قائم n بر رویه خلاف جهت ساعت است، برابر انتگرال دوگانه $\text{Curl} F \cdot \vec{n}$ روی رویه می‌باشد. و از این جهت شباهت زیادی به قضیه گرین دارد.

قضیه: فرض کنید S یک سطح قطعه قطعه هموار در فضای سه بعدی باشد، که \vec{n} بردار قائم یکه رو به خارج آن است و C مرز سطح S است که از یک یا چند قطعه هموار بسته تشکیل شده است و دارای جهتی است که از سطح S به آن القاء شده است. حال اگر F یک میدان برداری با مشتقات جزئی پیوسته روی S باشد، آنگاه:

$$\int_C F \cdot dr = \iint_S \text{Curl} F \cdot ndS$$

* تذکره ۸: منظور از جهت القاء شده از سطح S در قضیه فوق این است که: اگر ناظر در امتداد مرز سطح (یعنی C) با قائم رو به بیرون حرکت کند وی در صورتی در جهت صحیح (مثبت) حرکت می‌کند که سطح S سمت چپ وی باشد و این جهت بر C را اغلب جهت القاء شده به وسیله بردار قائم رو به خارج \vec{n} می‌نامند.

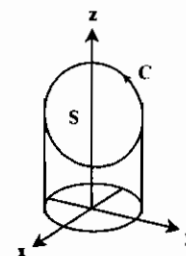
مثال ۶۵: فرض کنید $\vec{F} = -y^2 \vec{i} + x^2 \vec{j} - z^2 \vec{k}$ و C منحنی فصل مشترک استوانه $x^2 + y^2 = 1$ و صفحه $x + y + z = 2$ باشد که طوری جهت دار شده که تصویر آن بر صفحه xy در جهت مثبت دایره مثلثاتی است. در این صورت $\int_C F \cdot dr$ چقدر است؟

پاسخ: محاسبه مستقیم انتگرال فوق طولانی و وقت گیر است. بنابراین بهتر است از قضیه استوکس استفاده کنیم.

خم C ، مرز بسته قرص بیضوی S در صفحه $x + y + z = 2$ می‌باشد که تصویر آن بر صفحه xy ، قرص

$R: x^2 + y^2 \leq 1$ می‌باشد. (به شکل روبرو توجه کنید). بر روی سطح S داریم:

$ndS = (x^2 \vec{i} + y^2 \vec{j} + z^2 \vec{k}) dx dy$ و همچنین:



$$\text{Curl} F = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ -y^2 & x^2 & -z^2 \end{vmatrix} = (x^2 + y^2) \vec{k}$$

بنابراین طبق قضیه استوکس

$$\int_C F \cdot dr = \iint_S \text{Curl} F \cdot ndS = \iint_R (x^2 + y^2) dx dy = \int_0^{2\pi} \int_0^1 r r^2 dr d\theta = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 r^3 dr = \frac{2\pi}{4} \quad (\text{مختصات قطبی})$$

نکته ۲۰: دو سطح S و S' با مرز مشترک C را در نظر بگیرید، طبق قضیه استوکس:

$$\iint_S \text{Curl} F \cdot ndS = \iint_{S'} \text{Curl} F \cdot ndS = \int_C F \cdot dr$$

توجه: نکته فوق هنگامیکه بخواهیم $\iint_S \text{Curl} F \cdot ndS$ را به دست آوریم و محاسبه مستقیم آن و یا به کمک $\int_C F \cdot dr$ ساده نباشد می‌تواند مفید باشد. بدین صورت که به جای سطح S ، سطح ساده‌تر و مناسب‌تری مانند S' با همان مرز S را در نظر می‌گیریم.

مثال ۶۶: مقدار $I = \iint_S \text{Curl} F \cdot ndS$ را بیابید، بطوریکه S قسمتی از کره $x^2 + y^2 + (z-2)^2 = 8$ است که بالای صفحه xy قرار می‌گیرد و $F = y^2 \cos z \vec{i} + x^2 e^{yz} \vec{j} - e^{-xy} \vec{k}$ می‌باشد.

پاسخ: مرز ناحیه S را C می‌نامیم. در این صورت C دایره $x^2 + y^2 = 4$ در صفحه xy خواهد بود. محاسبه مستقیم I همانند مثال قبل ساده نخواهد بسود و همچنین محاسبه I به کمک قضیه استوکس بر حسب $\int_C F \cdot dr$ نیز امکان پذیر نیست. اما از طرفی C مرز

قرص $z=0$ و $x^2 + y^2 \leq 4$ با بردار نرمال $\vec{n} = \vec{k}$ می‌باشد. لذا طبق نکته (۲۰) داریم:

$$I = \iint_S \text{Curl} F \cdot ndS = \iint_D \text{Curl} F \cdot k dA$$

روی سطح D داریم:

$$\text{Curl} F \cdot k = \left(\frac{\partial}{\partial x} (x^2 e^{yz}) - \frac{\partial}{\partial y} (y^2 \cos xz) \right) \Big|_{z=0} = 2x^2 - 2y$$

چون $-2y$ فرد است و ناحیه D نسبت به y متقارن است لذا $\iint_D -2y = 0$. بنابراین:

$$I = \iint_D 2x^2 dA = 2 \int_0^{2\pi} \int_0^2 r^2 \cos^2 \theta r dr d\theta = 2 \int_0^{2\pi} \cos^2 \theta \int_0^2 r^3 dr = 12\pi$$

مثال ۶۷: فرض کنید C خم حاصل از تقاطع کره $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ و صفحه $x + y + z = 0$ باشد. در این صورت مقدار $\int_C y dx + z dy + x dz$ کدام است؟

$$\pi a^2 \quad (۱) \quad \sqrt{2} \pi a^2 \quad (۲) \quad \frac{\pi a^2 \sqrt{2}}{2} \quad (۳) \quad \sqrt{2} \pi a^2 \quad (۴)$$

پاسخ: گزینه «۴» برای محاسبه انتگرال فوق از قضیه استوکس استفاده می‌کنیم. (محاسبه مستقیم انتگرال نیاز به پارامتری کردن خم C دارد که چندان ساده نیست.) خم C قسمتی از صفحه $x + y + z = 0$ را در بر گرفته که داخل کره $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ می‌باشد. بنابراین بردار

قائم بر سطح برابر است با:

$$G: x + y + z = 0 \Rightarrow n = \pm \frac{\nabla G}{|\nabla G|} = \pm \frac{1}{\sqrt{3}} (1, 1, 1)$$

و از طرفی:

پس بنابر قضیه استوکس:

$$F = y \vec{i} + z \vec{j} + x \vec{k} \Rightarrow \text{Curl} F = (-1, -1, -1)$$

با توجه به اینکه S دایره‌ای به شعاع a می‌باشد، پس مقدار انتگرال اخیر πa^2 و در نتیجه مقدار مورد نظر $\sqrt{2} \pi a^2$ خواهد بود (توجه کنید که در محاسبات بالا علامتی را برای بردار n انتخاب کردیم، که نتیجه مورد نظر طراح حاصل شود.)

تست های طبقه بندی شده فصل چهارم

۱- کار انجام شده توسط میدان نیرویی به صورت $F(x,y) = y^2 \vec{i} + (2xy) \vec{j}$ از مبدأ تا نقطه (1,1) بر مسیر دلخواه C کدام است؟ (مکانیک - سراسری ۷۸)

- (۱) ۱
- (۲) ۲
- (۳) ۳
- (۴) ۴

۲- فرض کنیم u و v توابع یا مقادیر حقیقی و از کلاس C^۲ باشند و F یک میدان برداری از کلاس C^۲ و $\Delta = \nabla^2$ اپراتور لاپلاس باشد. کدام گزینه نادرست است؟ (عمران - سراسری ۷۸)

- (۱) $\text{grad}(uv) = u \text{grad} v + v \text{grad} u$
- (۲) $\text{div}(uF) = u \text{div} F + \text{grad} u \cdot \vec{F}$
- (۳) $\Delta(uv) = u \Delta v + v \Delta u$
- (۴) $\text{curl}(uF) = u \text{curl} F + \text{grad} u \times \vec{F}$

۳- مقدار $\iiint_S \vec{F} \cdot \vec{n} \, dS$ که در آن $F(x,y,z) = (xy^2, yz^2, zx^2)$ و S کره $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ بردار قائم یکه خارجی است برابر است با: (عمران - سراسری ۷۸)

- (۱) $\frac{4}{5} \pi a^5$
- (۲) $\frac{4}{3} \pi a^5$
- (۳) $4 \pi a^5$
- (۴) $\frac{2}{3} \pi a^5$

۴- حاصل $\oint_C 2y \, dx + 4x \, dy$ وقتی c قوسی از سهمی $y = x^2$ از مبدأ تا نقطه A(2,4) و پاره خط واصل از نقطه A تا مبدأ باشد. کدام است؟ (مهندسی هسته‌ای - سراسری ۷۸)

- (۱) $\frac{3}{8}$
- (۲) $\frac{3}{4}$
- (۳) $\frac{4}{3}$
- (۴) $\frac{8}{3}$

۵- مقدار کار انجام شده توسط میدان نیروی $F(x,y) = y^2 \vec{i} + x^2 \vec{j}$ روی مسیر $y = x^2$ از نقطه (0,0) تا نقطه (1,1) چقدر است؟ (آمار - سراسری ۷۸)

- (۱) $\frac{12}{20}$
- (۲) $\frac{13}{20}$
- (۳) $\frac{14}{20}$
- (۴) $\frac{15}{20}$

۶- اگر $\vec{V} = \frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k}$ و نیز $\vec{A} = A_x \vec{i} + A_y \vec{j} + A_z \vec{k}$ باشد تحت چه شرایطی رابطه زیر دیفرانسیل کامل است؟

$$(1) \quad d\phi = A_x dx + A_y dy + A_z dz$$

(مکانیک - سراسری ۷۸)

- (۱) شرط کافی برای آنکه رابطه (۱) دیفرانسیل کامل باشد آن است که $\vec{V} \times \vec{A} = \vec{0}$ باشد.
- (۲) شرط لازم و کافی برای آنکه رابطه (۱) دیفرانسیل کامل باشد آن است که $\vec{V} \times \vec{A} = \vec{0}$ باشد.
- (۳) شرط لازم برای آنکه رابطه (۱) دیفرانسیل کامل باشد آن است که $\vec{V} \times \vec{A} = \vec{0}$ باشد.
- (۴) تحت هیچ شرایطی رابطه (۱) دیفرانسیل کامل نمی‌شود.

۷- مقدار انتگرال $\iiint_S \vec{F} \cdot \vec{n} \, dS$ کدام است در صورتی که در آن $F(x,y,z) = (x,y,z)$ سطح بیضی گون $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ بردار قائم یکه خارجی S است؟ (عمران - سراسری ۷۹)

- (۱) $\frac{2}{3} \pi abc$
- (۲) $\frac{4}{3} \pi abc$
- (۳) $2 \pi abc$
- (۴) $4 \pi abc$

۸- حاصل $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$ را که در آن $F(x,y,z) = xi - zj + yk$ و $\vec{r}(t) = 2ti + 3tj - t^2k$ از نقطه نظیر $t = -1$ تا $t = 1$ کدام است؟

(مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری - سراسری ۷۹)

- (۱) ۱
- (۲) ۰
- (۳) -۱
- (۴) -۲

۹- حاصل $\int_C (y+z) \, dx + (z+x) \, dy + (x+y) \, dz$ که در آن منحنی C دایره‌ای به معادلات $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ و $x+y+z=0$ باشد. کدام است؟ (مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری - سراسری ۷۹)

- (۱) ۰
- (۲) $\frac{1}{2}$
- (۳) ۱
- (۴) $\frac{3}{2}$

۱۰- مقدار $I = \int_C e^y \, dx + xe^y \, dy$ بر روی نیم دایره $y = \sqrt{1-x^2}$ در جهت مثلثاتی کدام است؟ (مهندسی هسته‌ای - سراسری ۷۹)

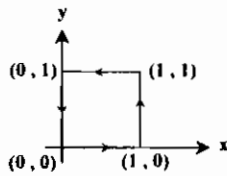
- (۱) -۲
- (۲) -۱
- (۳) ۱
- (۴) ۲

۱۱- اگر $F = ix + j(1-y) + k(2z+1)$ و dδ عنصر برداری مساحت کره Σ به معادله $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ باشد حاصل $\iint_S F \cdot d\delta$ کدام است؟

(مهندسی هسته‌ای - سراسری ۷۹)

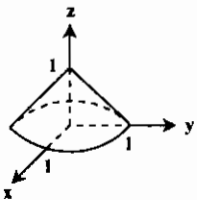
- (۱) 24π
- (۲) 26π
- (۳) 48π
- (۴) 72π

۱۲- با استفاده از قضیه Green مقدار انتگرال خطی $\oint_C [(e^{-x^2} + y^2) \, dx + (Lny - x^2) \, dy]$ را که در آن C مربع نشان داده شده است کدام است؟ (مکانیک - سراسری ۸۰)



- (۱) $2Ln2$
- (۲) -۱۱
- (۳) ۴
- (۴) -۲

۱۳- با استفاده از شکل داده شده که در آن V حجم مخروط قائم می‌باشد. اگر $\vec{V} = z^2 \vec{k}$ و \vec{k} و \vec{j} و \vec{i} بردارهای یکه معمول و $\vec{V} = \vec{i} \frac{\partial}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial}{\partial z}$ باشند. مقدار انتگرال حجمی $\int \vec{V} \cdot \vec{V} \, dV$ برابر است با: (مکانیک - آزاد ۸۰)



- (۱) $\frac{\pi}{6}$
- (۲) $\frac{\pi}{3}$
- (۳) $\frac{\pi}{2}$
- (۴) $\frac{\pi}{4}$

۱۴- به ازای کدام مقادیر a و b. انتگرال $\int_A (2axz + y^2) \, dx + y(bx + az) \, dy + (ax^2 + y^2) \, dz$ مستقل از مسیر است؟ (عمران - سراسری ۸۰)

- (۱) $a=b=1$
- (۲) $a=b=2$
- (۳) $a=1, b=2$
- (۴) $a=2, b=1$

۱۵- مقدار انتگرال $\oint_C (6y+x) \, dx + (y+2x) \, dy$ که در آن C دایره $(x-2)^2 + (y-2)^2 = 4$ پیموده شده (یکبار) در جهت خلاف عقربه‌های ساعت می‌باشد. کدام است؟ (عمران - سراسری ۸۰)

- (۱) -16π
- (۲) -4π
- (۳) صفر
- (۴) 32π

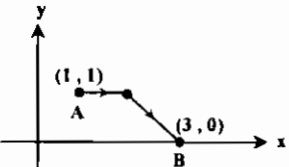
۱۶- مقدار انتگرال $\iiint_S \text{Curl} \vec{F} \cdot \vec{n} \, dS$ که در آن S سطح $z \leq 0$ و $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ و بردار قائم یکه خارجی S است و $F(x,y,z) = y\vec{i} - x\vec{j} + zx^2y\vec{k}$ با کدام گزینه برابر است؟ (عمران - سراسری ۸۰)

- (۱) 2π
- (۲) $\frac{2\pi}{3}$
- (۳) $\frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$
- (۴) $\frac{2\pi\sqrt{3}}{3}$

۱۷- مقدار انتگرال $\oint_C x^2 y^2 \, dx + dy + z \, dz$ که در آن C دایره $x^2 + y^2 = R^2, z=0$ می‌باشد. با کدام گزینه برابر است؟ (عمران - سراسری ۸۰)

- (۱) $-\frac{2\pi R^2}{20}$
- (۲) $-\frac{2\pi R^2}{8}$
- (۳) $-\frac{\pi R^2}{4}$
- (۴) $-\frac{\pi R^2}{8}$

۱۸- اگر $f(x,y) = 2x^2 + xy + y^2$ در این صورت مقدار انتگرال $\int_C \nabla f(X) \cdot dX$ که در آن C منحنی زیر از نقطه A تا نقطه B می‌باشد. برابر است با (کامپیوتر - سراسری ۸۰)



- (۱) ۱۴
- (۲) صفر
- (۳) ۱۸
- (۴) ۱

۱۹- اگر C نیم دایره 1 = x^2 + y^2, y >= 0 باشد در جهت عقربه های ساعت جهت گذاری شده است در این صورت مقدار انتگرال ... برابر است با ...

- (۱) 2/3 (۲) -2/3 (۳) 2 (۴) -2

۲۰- اگر منحنی C مربعی (0,0), (1,0), (1,1), (0,1) باشد که در جهت مثلثاتی جهت گذاری شده است در این صورت مقدار انتگرال ... برابر است با ...

- (۱) pi/2 (۲) pi (۳) 2pi (۴) صفر

۲۱- اگر منحنی C خط y = x از نقطه (-1,0) تا نقطه (1,1) باشد در این صورت مقدار انتگرال ... برابر است با ...

- (۱) صفر (۲) 1 (۳) -1 (۴) 2

۲۲- میدان برداری F(x,y,z) = (x sin xz, y, xz) را در نظر بگیرید در این صورت div F (دیورژانس F) در نقطه (1,1, pi) برابر است با ...

- (۱) 1 (۲) 2 - pi (۳) 1 - pi (۴) صفر

۲۳- هرگاه S, F = xe^-y i + e^-y j + zk رویه بسته مکعب مستطیلی به ابعاد 1 و 2 و 3 و ... برابر است با ...

- (۱) -18 (۲) -6 (۳) 6 (۴) 18

۲۴- اگر تابع f در معادله ... صدق نماید و C منحنی ای هموار و بسته و f و مشتقات نسبی آن روی C و داخل آن پیوسته باشند، مقدار ... کدام است؟

- (۱) -1 (۲) صفر (۳) 1 (۴) 2pi

۲۵- اگر S سطح خارجی گره به معادله x^2 + y^2 + z^2 = R^2 و بردار و به خارج بر S و نیز اگر ... آنگاه F = x^2 i + y^2 j + z^2 k برابر است با:

- (۱) 5/12 pi R^3 (۲) 2pi R^3 (۳) 12/5 pi R^3 (۴) 5/3 pi R^3

۲۶- اگر میدان اسکالر phi != 0 دارای خواص div(phi grad phi) = 10 phi و ||grad phi||^2 = phi مقدار ... به طوری که s گره ای به مرکز مبداء مختصات و n بردار یکه خارجی آن باشد، کدام است؟

- (۱) 14pi (۲) 8pi (۳) 6pi (۴) 4pi

۲۷- با کدام مقادیر a و b تابع u(x,y) = x^2 + ay^2 + by همساز است؟

- (۱) a = b = +1 (۲) a = -1 و b دلخواه (۳) a = -1 و فقط b = 0 (۴) هیچ مقدار a و b

۲۸- مقدار ... در آن C یک خم به معادلات پارامتری x = t/(1+t) و y = 1/(1+t) باشد، برابر کدام است؟

- (۱) -8/9 (۲) 8/9 (۳) 5/18 (۴) 2/3

۲۹- حاصل ... که در آن C مربعی به معادلات اضلاع |x| = 1 و |y| = 1 باشد، کدام است؟

- (۱) صفر (۲) -1 (۳) +1 (۴) 4

۳۰- اگر V = i d/dx + j d/dy + k d/dz و k و j و i بردارهای یکه «معمول» و u یک تابع اسکالر از متغیرهای مستقل (x,y,z) و V یک بردار و تابعی از (x,y,z) و نقطه بین دو بردار به معنی ضرب داخلی بین آن دو باشند، عبارت (u.V) به کدام عبارت زیر ساده می شود؟

- (۱) V.(V.V) - V^T.V (۲) (V.V)u - u.V

۳۱- مقدار انتگرال خط ... در آن C سهمی xy^2 = 2x از نقطه (0,0) تا نقطه ... می باشد، کدام است؟

- (۱) pi/12 (۲) pi/8 (۳) pi/4 (۴) pi/2

۳۲- مقدار انتگرال سطح ... که در آن F(x,y,z) = x^2 i + y cos^2 x j + 2zk = (x^2, y cos^2 x, 2z) و S سطح استوانه ... با کدام گزینه برابر می باشد؟

- (۱) 2pi^2 (۲) 4pi^2 (۳) 6pi^2 (۴) 8pi^2

۳۳- اگر F = i(e^x cos y + yz) + j(xz - e^x sin y) + k(xy + z) باشد، f را پیدا کنید به طوری که F = grad f باشد. (عمران - آزاد ۸۱)

- (۱) f(x,y,z) = e^x cos y + z + C (۲) f(x,y,z) = e^x cos y + xyz + z^2/2 + C (۳) f(x,y,z) = e^x sin y + xyz + C (۴) f(x,y,z) = e^x sin y + z^2/2 + C

۳۴- مقدار ... وقتی معادله پارامتری C به صورت x = cos t, y = sin t و 0 <= t <= pi باشد، برابر است با ...

- (۱) 2/3 (۲) 3 (۳) 1/3 (۴) 2/3

۳۵- اگر B = xy^2 i + 2xz^2 j - 3yz^2 k در این صورت مقدار div B در نقطه (1,1,0) برابر است با ...

- (۱) صفر (۲) -1 (۳) 2 (۴) 1

۳۶- اگر B = xy^2 i + 2xz^2 j - 3yz^2 k در این صورت مقدار Curl B در نقطه (1,0,1) برابر است با ...

- (۱) (-3, 0, 0) (۲) (-3, 0, 1) (۳) (-3, 1, 0) (۴) (-3, 0, -1)

۳۷- اگر C قسمت از منحنی y = (1+x)^2 باشد که نقطه (-1,0) را به نقطه (0,1) وصل می کند، مقدار انتگرال ... برابر است با:

- (۱) 1/2 (۲) صفر (۳) 1 (۴) -1

۳۸- مساحت قسمتی از استوانه 1 = x^2 + y^2 که زیر صفحه z = 1/3 x + 2 و بالای صفحه z = 0 قرار دارد، برابر است با:

- (۱) 4pi (۲) 12pi/3 (۳) 2pi (۴) 9pi/3

۳۹- حاصل ... وقتی C مستطیل با رئوس به مختصات (1,2), (5,2), (5,4) و (1,4) باشد کدام است؟

- (۱) 10 (۲) 20 (۳) 30 (۴) 40

۴۰- اگر Curl F . F(x,y,z) = (3x^2 + y^2) i + 2xy j - 2z^2 k باشد، کدام است؟

- (۱) بردار صفر (۲) i + j + k (۳) 6xi + 2yj - 4zk (۴) (2y - 6z) i + j - k

۴۱- به ازای کدام مقدار a ، حاصل انتگرال $\int_{(1,2)}^{(2,4)} (6xy^2 - y^2) dx + (ax^2y - 3xy^2) dy$ بستگی به مسیر ندارد؟ (معدن - سراسری ۸۱)

(۱) ۳ (۲) هر مقدار a (۳) ۶ (۴) هیچ مقدار a

۴۲- مقدار $\iint_{\Sigma} (x+y+z) ds$ که در آن Σ قسمتی از صفحه $x+y=1$ با شرط $z \geq 0$ و $0 \leq z \leq 1$ برابر کدام است؟ (معدن - سراسری ۸۱)

(۱) $\frac{3\sqrt{2}}{2}$ (۲) $\frac{3\sqrt{2}}{2}$ (۳) $\frac{2\sqrt{2}}{3}$ (۴) $\frac{2\sqrt{2}}{3}$

۴۳- اگر $\vec{F}(x,y) = y^2\vec{i} + x^2z\vec{j}$ آنگاه $\text{Curl } \vec{F}$ و $\text{div } \vec{F}$ به ترتیب کدام اند؟ (معدن - سراسری ۸۱)

(۱) صفر و $2(x+y)\vec{k}$ (۲) صفر و $2(x-y)\vec{k}$ (۳) غیر صفر و $2(x+y)\vec{k}$ (۴) غیر صفر و $2(x-y)\vec{k}$

۴۴- مقدار انتگرال منحنی الخط $\int \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2}$ روی منحنی $C: x^2 + y^2 - x - y = 0$ از $(1,0)$ تا $(0,1)$ در جهت مثلثاتی کدام است؟ (ریاضی - سراسری ۸۱)

(۱) $-\frac{\pi}{2}$ (۲) ۰ (۳) $\frac{\pi}{2}$ (۴) 2π

۴۵- اگر C نیم دایره بالایی $x^2 + y^2 = 1$ باشد، که در خلاف جهت عقربه‌های ساعت پیموده می‌شود، مقدار انتگرال خطی $\int_C 2xy dx + x^2 dy$ چیست؟ (ریاضی - سراسری ۸۱)

(۱) صفر (۲) $\frac{1}{2}$ (۳) ۱ (۴) ۲

۴۶- مقدار کار انجام شده توسط میدان نیروی $F(x,y) = yi + 2xzj$ در امتداد مسیر $y = x + \sin x$ از نقطه $(0,0)$ تا نقطه (π, π) چقدر است؟ (ریاضی - سراسری ۸۱)

(۱) $\frac{3\pi^2}{2} - 2$ (۲) $\frac{3\pi^2}{2}$ (۳) $\frac{3\pi^2}{2} + 2$ (۴) $\frac{3\pi^2}{2} + 6$

۴۷- مقدار $\int_{(2,1)}^{(1,3)} (-2x + 2y) dx + (2x + 2y) dy$ روی مسیری به معادله $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$ واقع در ربع اول صفحه مختصات کدام است؟ (مکانیک - سراسری ۸۲)

(۱) ۱۳ (۲) ۵ (۳) -12 (۴) -5

۴۸- فرض کنید V ناحیه محصور به نیم کره $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ از بالا و صفحه $z = 0$ از پایین و S مرز V باشد. اگر \vec{n} بردار قائم یکه رویه خارج S باشد و $F(x,y,z) = (x^2, y^2, z^2)$ مقدار انتگرال $\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} dS$ کدام است؟ (عمران - سراسری ۸۲)

(۱) $\frac{192}{3}\pi$ (۲) $\frac{96}{3}\pi$ (۳) $\frac{96}{5}\pi$ (۴) $\frac{192}{5}\pi$

۴۹- مقدار انتگرال $\int_C xy dx + (\frac{1}{y}x^2 + xy) dy$ که در آن C از بازه $[-1,1]$ روی محور x و نیمه بالایی بیضی $x^2 + 4y^2 = 1$ تشکیل شده است و یک بار در جهت خلاف عقربه‌های ساعت پیموده شده است کدام است؟ (عمران - سراسری ۸۲)

(۱) صفر (۲) $\frac{1}{6}$ (۳) $\frac{1}{4}$ (۴) $\frac{1}{3}$

۵۰- اگر حجم V به وسیله سطح S محصور شده باشد و \vec{n} بردار یکه عمود بر سطح S و به سمت خارج از جسم باشد، ϕ و ψ توابع عددی تعریف شده در حجم V باشد، $\int_V \phi \nabla^2 \psi dV$ برابر است با: (عمران - آزاد ۸۲)

(۱) $\int_S \phi \frac{\partial \psi}{\partial n} dS$ (۲) $\int_S (\phi \nabla \psi) \cdot \vec{n} dS$ (۳) $\int_S \phi \frac{\partial \psi}{\partial n} dS - \int_V \nabla \phi \cdot \nabla \psi dV$ (۴) $\int_S \nabla \phi \cdot \nabla \psi dS$

۵۱- مساحت آن قسمت از نیم کره $x^2 + y^2 + z^2 = 2, z \geq 0$ که به وسیله مخروط $z^2 = x^2 + y^2$ قطع می‌شود، چقدر است؟ (کامپیوتر - سراسری ۸۲)

(۱) $\sqrt{2}\pi$ (۲) $\pi(2 - \sqrt{2})$ (۳) $2\pi(2 - \sqrt{2})$ (۴) $\pi(2 + \sqrt{2})$

۵۲- کدامیک از توابع گرادینان یک تابع است؟ (کامپیوتر - سراسری ۸۲)

(۱) $\cos xy + \sin xyz$ (۲) $e^{xy} \cos xy (yi + xi)$

(۳) $ye^{xy} \cos xy + xe^{xy} \sin xyz$ (۴) $ye^{xy} (\cos xy + \sin xy)j + xe^{xy} (\cos xy + \sin xy)z$

۵۳- فرض کنید f در معادله $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$ صدق کند. C یک منحنی هموار و بسته باشد و f و مشتق‌های نسبی آن روی C و داخل آن پیوسته باشند. در این صورت مقدار $\oint_C \frac{\partial f}{\partial y} dx - \frac{\partial f}{\partial x} dy$ برابر است با: (MBA - سراسری ۸۲)

(۱) صفر (۲) ۱ (۳) -1 (۴) 2π

۵۴- اگر $\vec{A} = A_x\vec{i} + A_y\vec{j} + A_z\vec{k}$ مقدار $\text{div}(\text{Curl } \vec{A})$ کدام است؟ (مهندسی هت‌های - سراسری ۸۲)

(۱) ۰ (۲) $A_x + A_y + A_z$ (۳) $A_x^2 + A_y^2 + A_z^2$ (۴) $A_x\vec{i} + A_y\vec{j} + A_z\vec{k}$

۵۵- اگر $\phi = 2x^2y - xz^2$ باشد آنگاه $\nabla^2 \phi$ برابر است با: (مهندسی هت‌های - سراسری ۸۲)

(۱) $4y - 6xz$ (۲) $4x - 6xz$ (۳) $4y - 2xz$ (۴) $4 - 6xz$

۵۶- نیروی $\vec{F} = x\vec{i} + y\vec{j} + (yz - x)\vec{k}$ در امتداد مسیر $0 \leq t \leq 1$ و $\vec{R}(t) = t\vec{i} + t^2\vec{j} + 2t\vec{k}$ چند واحد کار انجام می‌دهد؟ (معدن - سراسری ۸۲)

(۱) ۱۳ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۵

۵۷- مساحت این قسمت از رویه $z = x^2 + y^2$ که بین صفحات $z = 4$ و $z = 0$ قرار دارد کدام است؟ (معدن - سراسری ۸۲)

(۱) $\frac{1}{6}\pi(17\sqrt{17} + 1)$ (۲) $\frac{1}{6}\pi(\sqrt{17} - 1)$ (۳) $\pi(17\sqrt{17} + 1)$ (۴) $\frac{1}{6}\pi(17\sqrt{17} - 1)$

۵۸- انتگرال منحنی الخط $\int_C (2x + y) dx + (2x - 7y) dy$ روی منحنی C به معادله $5x^2 + 4xy + 5y^2 = 9$ برابر است با: (ریاضی - سراسری ۸۲)

(۱) π (۲) 2π (۳) 3π (۴) 5π

۵۹- بردار $F = i(z - y) + j(x - z) + k(y - x)$ و منحنی C فصل مشترک $z = 4 - x^2 - y^2$ با صفحه xoy باشد. $\oint_C F \cdot d\vec{R}$ کدام است؟ (مکانیک - سراسری ۸۲)

(۱) 6π (۲) 4π (۳) 4π (۴) صفر

۶۰- مقدار انتگرال $\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} ds$ که در آن S سطح بسته محدود به نیم کره $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$ از بالا و صفحه $z = 0$ از پایین است و \vec{n} بردار قائم یکه خارجی S است و $F(x,y,z) = (xz^2, x^2y - z^2, 2xy + y^2z)$ کدام است؟ (عمران - سراسری ۸۲)

(۱) $\frac{2\pi a^5}{3}$ (۲) $\frac{4\pi a^5}{3}$ (۳) $\frac{4\pi a^5}{5}$ (۴) $\frac{2\pi a^5}{5}$

۶۱- به ازای چه مقدار λ ، انتگرال $\int_A^B (z^2 dx + 2y dy + \lambda xz dz)$ مستقل از مسیر است؟ (عمران - سراسری ۸۲)

(۱) $\lambda = 2$ (۲) $\lambda = 1$ (۳) $\lambda = 0$ (۴) $\lambda = -1$

۶۲- اگر $F(x,y,z) = (a^2x, y, c^2z)$ و S کره $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ و \vec{n} قائم یکه رویه خارج کره باشد، آنگاه مقدار $\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} ds$ برابر است با: (عمران - آزاد ۸۲)

(۱) $\frac{4}{3}\pi$ (۲) $4\pi(a^2 + 1 + c^2)$ (۳) $(a^2 + 1 + c^2)$ (۴) $\frac{4\pi}{3}(a^2 + 1 + c^2)$

۶۳- کرل بردار $\vec{I} = 2x^2y\vec{i} + 7xz\vec{j} + 4zy\vec{k}$ در نقطه $(1, 2, 3)$ برابر است با: (عمران - آزاد ۸۲)

(۱) $5\vec{i} + 19\vec{k}$ (۲) $5\vec{i} + 18\vec{k}$ (۳) صفر (۴) $6\vec{i} + 18\vec{k}$

۶۴- کدامیک از جملات زیر نادرست است؟ (عمران - آزاد ۸۲)

(۱) گرادینان یک میدان اسکالر دارای خاصیت خطی است.
 (۲) کرل گرادینان صفر است.
 (۳) دیورژانس کرل صفر است.
 (۴) دیورژانس یک میدان برداری با تغییر محورهای مختصات تغییر می‌کند.

۶۵- اگر $\vec{F} = xi + yz + zk$ حاصل $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{R}$ بر روی مسير $x = 2t$ و $y = t^2$ و $z = t^3$ از نقطه نظير $t = 0$ تا $t = 1$ کدام است؟

(مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری - سراسری ۸۳)

- (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۵

۶۶- اگر تابع اسکالر f در شرط $\vec{\nabla} f = (2x - \frac{y}{x^2})\vec{i} + \frac{1}{x}\vec{j} + \frac{1}{x^2}\vec{k}$ صدق کند و $f(1,1) = 4$ باشد، حاصل $f(2,2)$ کدام است؟

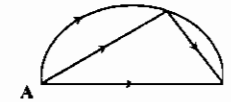
(مهندسی صنایع (سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی - مدیریت سیستم و بهره‌وری) - آزاد ۸۳)

- (۱) ۳ (۲) ۵ (۳) ۷ (۴) ۹

۶۷- نقطه اثر نیروی $\vec{F} = z^2\vec{i} + 2yz\vec{j} + 2xz\vec{k}$ در طول منحنی C از نقطه $A(0,1,1)$ به نقطه $B(1,2,2)$ نقل مکان می‌کند. کار انجام شده در کدام مسير: «نیم‌دایره - خط شکسته - خط راست» کمتر است؟

(MBA - سراسری ۸۳)

- (۱) نیم‌دایره (۲) خط شکسته



- (۳) خط راست (۴) در هر سه مسير برابر است.

۶۸- مساحت آن قسمت از استوانه $x^2 + y^2 = ax$ که داخل کره به معادله $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ قرار می‌گیرد چقدر است؟

(MBA - سراسری ۸۳)

- (۱) $2a^2$ (۲) $3a^2$ (۳) $4a^2$ (۴) $5a^2$

۶۹- اگر مقدار $\text{div}(\text{curl} F)$ چقدر است؟ $F = (x^2 - y^2)\vec{i} + xz\vec{j} + y^2z\vec{k}$

(MBA - سراسری ۸۳)

- (۱) -۱ (۲) صفر (۳) ۱ (۴) ۲

۷۰- برای اینکه میدان برداری $\vec{F}(x,y,z) = (a_1x + a_2y + a_3z)\vec{i} + (b_1x + b_2y + b_3z)\vec{j} + (c_1x + c_2y + c_3z)\vec{k}$ غیر چرخشی باشد لازم و کافی است که:

(مهندسی هسته‌ای - سراسری ۸۳)

- (۱) $a_1 = b_2$ و $a_2 = c_1$ و $b_3 = c_2$ (۲) $a_1 = b_1$ و $a_2 = c_1$ و $b_3 = c_2$ (۳) $a_1 = b_1$ و $a_2 = c_1$ و $b_3 = c_2$ (۴) $a_1 = b_1$ و $a_2 = c_1$ و $b_3 = c_2$

۷۱- کار انجام شده توسط نیروی $\vec{F} = 3x^2\vec{i} + xy^2\vec{j}$ که ذره‌ای را در امتداد سهمی $y = 4x^2$ از نقطه $(0,0)$ به $(1,4)$ به حرکت می‌آورد برابر است با:

(معدن - سراسری ۸۳)

- (۱) ۷ (۲) ۳۷ (۳) $\frac{37}{5}$ (۴) ۳۵

۷۲- مساحت قسمت از رویه $z^2 = y^2 = x^2$ در ناحیه $x > 0$ و $y > 0$ و $z > 0$ محدود به صفحه $y + z = a$ ، کدام است؟

(معدن - سراسری ۸۳)

- (۱) $2a^2$ (۲) $\frac{1}{2}a^2$ (۳) $\sqrt{2}a^2$ (۴) $\frac{\sqrt{2}}{2}a^2$

۷۳- مقدار $\int_C 2xydx + (x^2 + y^2)dy$ وقتی C بیضی به معادله $4x^2 + 9y^2 = 36$ باشد، کدام است؟

(ریاضی - سراسری ۸۳)

- (۱) ۶ (۲) ۴ (۳) ۲ (۴) صفر

۷۴- اگر $\vec{F} = M\vec{i} + N\vec{j} + P\vec{k}$ یک میدان برداری و C یک منحنی با معادلات پارامتری $\vec{r}_1 = (x_1, y_1, z_1)$ و $\vec{r}_2 = (x_2, y_2, z_2)$ باشد. در این صورت کدام حکم در مورد $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}_1$ و $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}_2$ صحیح است؟

(ریاضی - سراسری ۸۳)

- (۱) فقط در صورتی برابرند که \vec{F} میدان گرادیان باشد.
(۲) فقط در صورتی برابرند که منحنی C بسته باشد.
(۳) فقط در صورتی برابرند که \vec{F} میدان گرادیان و منحنی C بسته باشد.
(۴) با هم برابرند.

۷۵- انتگرال خطی $I = \int_{(1,2)}^{(2,1)} 2xy^2dx + (1 + 3x^2y^2)dy$ برابر است با:

(مکانیک - سراسری ۸۴)

- (۱) $I = 45$ (۲) $I = -58$ (۳) $I = 28$ (۴) $I = -22$

۷۶- اگر G جسمی باشد که از بالا با نیمکره $Z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ و از پایین با صفحه $Z = 0$ محصور شده باشد، مقدار انتگرال دوگانه $I = \iiint_G \vec{F} \cdot \vec{n} d\sigma$ که در آن $\vec{F}(x,y,z) = x^2\vec{i} + y^2\vec{j} + z^2\vec{k}$ و \vec{n} بردار عمود بر این سطح به سمت خارج می‌باشد، برابر است با:

(مکانیک - سراسری ۸۴)

- (۱) $\frac{2\pi}{3}$ (۲) $\frac{4\pi}{5}$ (۳) $\frac{3\pi}{8}$ (۴) $\frac{6\pi}{5}$

۷۷- حاصل $\int ydx - xdy$ در امتداد یک قوس از بیضی $x = \cos t$ و $y = 2 \sin t$ کدام است؟

(مکانیک - آزاد ۸۴)

- (۱) -2π (۲) -4π (۳) -2π (۴) $+\pi$

۷۸- کار انجام شده توسط نیروی $\vec{F} = (xy, yz, xz)$ در طول منحنی $\vec{R} = (t, t^2, t^3)$ با فرض $0 \leq t \leq 1$ برابر است با: (عمران - سراسری ۸۴)

- (۱) ۷ (۲) $\frac{32}{11}$ (۳) ۱۱ (۴) $\frac{27}{28}$

۷۹- مقدار انتگرال $\oint_C (2xy - x^2)dx + (x + y^2)dy$ که در آن C مرز ناحیه محصور به وسیله منحنی‌های $y = x^2$ و $y = x$ است و یک بار در جهت خلاف عقربه‌های ساعت پیموده شده است، کدام است؟

(عمران - سراسری ۸۴)

- (۱) $\frac{1}{30}$ (۲) $\frac{1}{25}$ (۳) $\frac{1}{20}$ (۴) $\frac{1}{15}$

۸۰- مساحت قسمتی از سطح $z = 2 - (x^2 + y^2)$ که در بالای صفحه xy قرار دارد چقدر است؟

(عمران - سراسری ۸۴)

- (۱) $\frac{11\pi}{3}$ (۲) $\frac{12\pi}{3}$ (۳) $\frac{11\pi}{5}$ (۴) $\frac{12\pi}{5}$

۸۱- مقدار انتگرال $\oint_C (\sin x + 2y^2)dx + (2x - e^{-y^2})dy$ که در آن C منحنی بسته مرز ناحیه $x^2 + y^2 \leq a^2$ و $y \geq 0$ می‌باشد و یک بار در جهت خلاف عقربه‌های ساعت پیموده شده است، کدام است؟

(عمران - سراسری ۸۴)

- (۱) $\pi a^2 - 4a^2$ (۲) $\pi a^2 - 2a^2$ (۳) $\pi a^2 - 4a^2$ (۴) $\pi a^2 - 6a^2$

۸۲- مقدار انتگرال $\oint_C (x \sin y^2 - y^2)dx + (x^2 y \cos y^2 + 2x)dy$ که در آن C دوزنقه به رئوس $(0, -2), (0, 0), (1, -1), (1, 1)$ و $(0, 2)$ می‌باشد که یک بار در جهت خلاف عقربه‌های ساعت پیموده شده است، کدام است؟

(عمران - سراسری ۸۴)

- (۱) ۶ (۲) ۸ (۳) ۹ (۴) ۱۲

۸۳- به ازای کدام مقدار a انتگرال منحنی الخط $\int_C z^2 dx + 2ydy + axzdz$ بر روی منحنی بسته C به معادله $(x + y + z = 2, x^2 + y^2 = 1)$ برابر صفر است؟

(عمران - آزاد ۸۴)

- (۱) -۲ (۲) ۲ (۳) -۱ (۴) ۱

۸۴- مقدار انتگرال $\oint_C -x^2 y dx + xy^2 dy$ که در آن C دایره به مرکز مبدأ مختصات و شعاع ۲ است، کدام است؟

(مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری - سراسری ۸۴)

- (۱) ۰ (۲) $\frac{4\pi}{5}$ (۳) 2π (۴) $\frac{16\pi}{3}$

۸۵- اگر $\vec{F}(x,y,z) = x^2 y \vec{i} + 2xz \vec{j} - 2yz \vec{k}$ آنگاه:

(کامپیوتر - سراسری ۸۴)

- (۱) $\text{curl}(\text{curl} F) = \vec{0}$ (۲) $\text{div}(\text{curl} F) = \vec{0}$ (۳) $\text{curl}(\text{curl} F) = (2x - 2)\vec{j}$ (۴) $\text{div}(\text{curl} F) = xy$

۸۶- قسمتی از مساحت رویه $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ داخل استوانه $x^2 + y^2 = 2x$ کدام است؟

(MBA - سراسری ۸۴)

- (۱) $\frac{2\pi}{3}$ (۲) $\pi\sqrt{2}$ (۳) 2π (۴) $2\pi\sqrt{2}$

۸۷- بردار $\vec{F} = (x + y)\vec{i} + (y + z)\vec{j} + (z + x)\vec{k}$ و S سطح ناحیه D محدود به $|x| \leq 1$ و $|y| \leq 1$ و $|z| \leq 1$ است. حاصل $\iiint_S \vec{F} \cdot \vec{n} d\sigma$ کدام است؟

(MBA - سراسری ۸۴)

- (۱) ۶ (۲) ۱۲ (۳) ۱۸ (۴) ۲۴

۸۸- اگر $F = (z-y)i + (z+x)j - (x+y)k$ و سطح S قسمتی از سهمی گون به معادله $z = 1 - x^2 - y^2 \geq 0$ باشد حاصل $\iint_S \text{curl} F \cdot nds$ برابر کدام است؟ (MBA - سراسری ۸۴)

- (۱) صفر (۲) π (۳) 2π (۴) 4π

۸۹- کار انجام شده توسط نیروی $F = yi + (x+z)j + yk$ در تمام محیط بیضی فصل مشترک استوانه $x^2 + y^2 = 4$ با صفحه $z + 2x = 2$ کدام است؟ (MBA - سراسری ۸۴)

- (۱) صفر (۲) ۴ (۳) ۶ (۴) ۱۲

۹۰- اگر سطح Γ بخشی از رویه $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ محدود به $z = 1$ و $z = 0$ باشد، آنگاه انتگرال رویه ای $\iint_{\Gamma} (x^2 + y^2) ds$ کدام است؟ (معدن - سراسری ۸۴)

- (۱) $\frac{9}{10}\pi$ (۲) $\frac{2\pi(\sqrt{2}+1)}{15}$ (۳) $\frac{4\pi(\sqrt{2}+1)}{15}$ (۴) $\frac{2\pi(2\sqrt{2}-1)}{3}$

۹۱- اگر $F(x, y, z) = \frac{m}{r^3}(xj + yz + zk)$ که در آن $m > 0$ ثابت و $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$ ، آنگاه $\text{div} F = \nabla \cdot F$ در نقاط $r \neq 0$ کدام است؟ (معدن - سراسری ۸۴)

- (۱) صفر (۲) $-\frac{m}{r^2}$ (۳) $\frac{6m}{r^2}$ (۴) $-\frac{4m}{r^2}$

۹۲- حاصل $\int_C xy^2 dy$ وقتی C سهمی به معادله $y = x^2$ از نقطه $(0, 0)$ تا نقطه $(2, 4)$ است، کدام است؟ (آمار - سراسری ۸۴)

- (۱) $\frac{257}{7}$ (۲) $\frac{256}{7}$ (۳) $\frac{255}{7}$ (۴) $\frac{254}{7}$

۹۳- فرض کنیم Σ قسمتی از مخروط به معادله $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ است که $z \leq 4$ و $1 \leq x^2 + y^2 \leq 4$. مقدار $\iint_{\Sigma} z^2 ds$ برابر است با: (ریاضی - سراسری ۸۴)

- (۱) $\frac{3\sqrt{2}}{2}$ (۲) $\frac{3\pi\sqrt{2}}{2}$ (۳) $\frac{15\pi\sqrt{2}}{2}$ (۴) $\frac{15\sqrt{2}}{2}$

۹۴- اگر S قسمتی از رویه $z = 2xy$ به معادله $z = 2xy$ واقع در داخل استوانه به معادله $x^2 + y^2 = 4$ باشد، مقدار انتگرال $\iint_S \frac{y ds}{\sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1}}$ کدام است؟ (ریاضی - سراسری ۸۴)

- (۱) 2π (۲) 4π (۳) 6π (۴) 8π

۹۵- حاصل $\oint_C (xy^2 dy - x^2 y dx)$ وقتی مسیر C در جهت مثلثاتی روی نمودار تابع قطبی $r = 1 + \cos \theta$ باشد، کدام است؟ (ریاضی - سراسری ۸۴)

- (۱) $\frac{25}{8}\pi$ (۲) $\frac{25}{16}\pi$ (۳) $\frac{25}{8}\pi$ (۴) $\frac{25}{16}\pi$

۹۶- حاصل $\nabla \times (\nabla u)$ کدام است؟ (ریاضی - سراسری ۸۴)

- (۱) صفر (۲) ۱ (۳) $|u|$ (۴) $|u|^2$

۹۷- متوازی السطوح محدود به صفحات مختصات و صفحات به معادله های $x = 1$ ، $y = 2$ و $z = 3$ است. اگر $F(x, y, z) = -x^2 i + xy^2 j + z^2 k$ ، شار F بر سطح S از متوازی السطوح Q کدام است؟ (ریاضی - سراسری ۸۴)

- (۱) ۹ (۲) ۲۷ (۳) ۳۵ (۴) ۵۴

باسخنامه تست های طبقه بندی شده فصل چهارم

۱- گزینه «۱» چون $\frac{\partial}{\partial x}(2xy) = \frac{\partial}{\partial y}(y^2) = 2y$ ، بنابراین میدان \vec{F} پایستار است و تابع پتانسیل آن $f(x, y) = xy^2$ می باشد. در نتیجه:

$$\int_C F \cdot dR = f(1, 1) - f(0, 0) = 1$$

۲- گزینه «۳»

۳- گزینه «۱» از قضیه دیورژانس استفاده می کنیم: $\iint_S F \cdot ndS = \iiint_V \text{div} F \cdot dV = \iiint_V (\frac{\partial}{\partial x}(xy^2) + \frac{\partial}{\partial y}(yz^2) + \frac{\partial}{\partial z}(zx^2)) dV$

$$= \iiint_V (y^2 + z^2 + x^2) dV \stackrel{\text{مختصات کروی}}{=} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_0^a \rho^2 \times \rho \sin \phi d\rho d\phi d\theta = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi} \sin \phi \int_0^a \rho^3 d\rho = \frac{4}{3} \pi a^3$$

۴- گزینه «۴» چون منحنی C بسته است، می توانیم از قضیه گرین استفاده کنیم:

$$\int_C 2y dx + x^2 dy = \iint_R (\frac{\partial}{\partial x}(x^2) - \frac{\partial}{\partial y}(2y)) dA = \int_0^2 \int_{x^2}^{2x} 2y dy dx = \int_0^2 (2x^2 - 2x^3) dx = \frac{4}{3}$$

۵- گزینه «۳» $\int_C F \cdot dR = \int_C y^2 dx + x^2 dy = \int_0^1 (x^2 + 2x^2) dx = \frac{14}{3}$

۶- گزینه «۱»

۷- گزینه «۴» از قضیه دیورژانس استفاده می کنیم:

$$\iint_S F \cdot ndS = \iiint_V \text{div} F \cdot dV = \iiint_V (\frac{\partial}{\partial x}(x) + \frac{\partial}{\partial y}(y) + \frac{\partial}{\partial z}(z)) dV = \iiint_V 3 dV = 4\pi abc$$

۸- گزینه «۴» میدان F روی خم شده به صورت $F = 2ti + t^2 j + 2tk$ در می آید و همچنین داریم:

$$r(t) = 2ti + t^2 j - t^2 k \Rightarrow dr = (2i + 2tj - 2tk) dt$$

$$\int_C F \cdot dr = \int_{-1}^1 (4t + 2t^3 - 6t^3) dt = \int_{-1}^1 (4t - 4t^3) dt = (2t^2 - t^4) \Big|_{-1}^1 = -2$$

۹- گزینه «۱» در متن درس حل شده است.

۱۰- گزینه «۱» ابتدا توجه کنید که: $\frac{\partial}{\partial x}(xe^y) = e^y$ ، $\frac{\partial}{\partial y}(e^y) = e^y$

بنابراین میدان پایستار است و تابع پتانسیل آن $f(x, y) = xe^y$ می باشد. از طرفی نیم دایره $y = \sqrt{1-x^2}$ از نقطه $(1, 0)$ آغاز و به نقطه $(-1, 0)$ ختم می شود، بنابراین: $I = \int_C e^y dx + xe^y dy = f(-1, 0) - f(1, 0) = -1 - 1 = -2$

۱۱- گزینه «۴» از قضیه دیورژانس استفاده می کنیم:

$$\iint_{\Sigma} F \cdot nd\delta = \iiint_V \text{div} F \cdot dV = \iiint_V (\frac{\partial}{\partial x}(x) + \frac{\partial}{\partial y}(1-y) + \frac{\partial}{\partial z}(2z+1)) dV = \iiint_V 2 dV = 2 \times \text{حجم کره} = 72\pi$$

۱۲- گزینه «۱» از قضیه گرین استفاده می کنیم:

$$I = \iint_D (\frac{\partial}{\partial x}(Lny - x^2) - \frac{\partial}{\partial y}(e^{-x^2} + y^2)) dA = -2 \int_0^1 \int_0^1 (x+y) dx dy = -2 \int_0^1 (\frac{1}{2} + y) dy = -2$$

۱۲- گزینه «۱» برای محاسبه حجم موردنظر از مختصات استوانه‌ای استفاده می‌کنیم. در این صورت:

$$I = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_0^{1-r} rz \times rdzdrd\theta = \int_0^{2\pi} \int_0^1 r(1-r)^2 drd\theta = \frac{\pi}{6}$$

۱۴- گزینه «۲» برای اینکه انتگرال مستقل از مسیر باشد، لازم است $\text{curl}F = 0$ بنابراین:

$$\begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ raxz + y^2 & bxy + azy & ax^2 + y^2 \end{vmatrix} = (ry - ay, rax - rax, by - ry) = (0, 0, 0)$$

از معادله فوق نتیجه می‌شود $a = b = 2$.

۱۵- گزینه «۱» از قضیه گرین استفاده می‌کنیم. در این صورت:

$$\int_C (6y + x)dx + (y + 2x)dy = \iint_D \left(\frac{\partial}{\partial x}(y + 2x) - \frac{\partial}{\partial y}(6y + x) \right) dA = \iint_D (2 - 6) dA = -4 \iint_D dA = -4 \times \text{مساحت دایره} = -16\pi$$

۱۶- گزینه «۱» مرز سطح S دایره $x^2 + y^2 = 1$ در صفحه $Z = 0$ می‌باشد. در این صورت طبق قضیه استوکس داریم:

$$\iint_S \text{Curl}F \cdot nds = \int_C F \cdot dr \quad (\text{چون قائم } S \text{ رو به پایین است، بنابراین مرز } C \text{ باید در جهت خلاف میلانی پیموده شود.})$$
$$r(t) = (\cos t, \sin t, 0) \Rightarrow F(r(t)) = (\sin t, -\cos t, 0) \Rightarrow dr = (-\sin t, \cos t, 0) dt$$
$$\int_C F \cdot dr = -\int_0^{2\pi} (-\sin^2 t - \cos^2 t + 0) dt = 2\pi$$

۱۷- گزینه «۴» انتگرال داده شده، انتگرال میدان $F = (x^2y^2, 1, z)$ را خم بسته C می‌باشد. بنابراین از قضیه استوکس استفاده می‌کنیم. چون خم C در صفحه $Z = 0$ قرار دارد، بنابراین $\vec{n} = \vec{k}$ و همچنین $dS = dA$ از طرفی:

$$\text{curl}F = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x^2y^2 & 1 & z \end{vmatrix} = (0, 0, -2x^2y^2) \Rightarrow \text{curl}F \cdot \vec{k} = -2x^2y^2$$

$$\int_C F \cdot dr = \iint_S \text{curl}F \cdot ndS = \iint_S -2x^2y^2 dA \xrightarrow{\text{مختصات قطبی}} \int_0^{2\pi} \int_0^R -2r^2 \cos^2 \theta r^2 \sin^2 \theta \times r dr d\theta$$
$$= -2 \int_0^{2\pi} \sin^2 \theta \cos^2 \theta d\theta \times \int_0^R r^5 dr = -2 \times \frac{\pi}{4} \times \frac{1}{6} R^6 = \frac{-\pi R^6}{8}$$

۱۸- گزینه «۱» انتگرال داده شده برابر کار میدان پایستار ∇f روی مسیر C می‌باشد. چون میدان پایستار است بنابراین انتگرال مستقل از مسیر می‌باشد و تابع پتانسیل آن برابر f است. بنابراین:

$$I = \int_C \nabla f(X) \cdot dX = f(2, 0) - f(1, 1) = 18 - 4 = 14$$

۱۹- گزینه «۱» ابتدا توجه کنید که:

$$\frac{\partial}{\partial x}(2xy) = 2y, \quad \frac{\partial}{\partial y}(x^2 + y^2) = 2y$$

بنابراین انتگرال داده شده مستقل از مسیر است و به سادگی می‌توان نشان داده تابع پتانسیل آن به صورت $f(x, y) = xy^2 + \frac{x^3}{3}$ می‌باشد. از طرفی نقطه $(-1, 0)$ نقطه آغاز خم C و نقطه $(1, 0)$ انتهای خم C می‌باشد. بنابراین:

$$I = \int_C (x^2 + y^2)dx + 2xydy = f(1, 0) - f(-1, 0) = \frac{2}{3}$$

۲۰- گزینه «۴» $\frac{\partial}{\partial x}(e^x \cos y) = e^x \cos y, \quad \frac{\partial}{\partial y}(e^x \sin y) = e^x \cos y$

بنابراین میدان پایستار می‌باشد و چون مسیر داده شده یک مسیر بسته است، پس مقدار انتگرال برابر صفر است.

۲۱- گزینه «۲» منحنی C را به صورت زیر پارامتری می‌کنیم:

$$x = t, y = t, dx = dt, dy = dt, 0 \leq t \leq 1$$

بنابراین:

$$I = \int_C (x + y)dx + (x - y)dy = \int_0^1 ((t + t) + (t - t))dt = \int_0^1 2t dt = 1$$

۲۲- گزینه «۲» $F = (x \sin xz, y, xz) \Rightarrow \text{div}F = \sin xz + xz \cos xz + 1 + x \Big|_{(1, 1, \pi)} = -\pi + 2$

۲۳- گزینه «۳» برای محاسبه انتگرال داده شده، از قضیه دیورژانس استفاده می‌کنیم.

$$\vec{F} = xe^{-y}\vec{i} + e^{-y}\vec{j} + z\vec{k} \Rightarrow \text{div}\vec{F} = e^{-y} - e^{-y} + 1 = 1$$

$$\iint_S F \cdot nds = \iiint_V \text{div}F dV = \iiint_V dV = \text{حجم مکعب مستطیل} = 1 \times 2 \times 2 = 4$$

۲۴- گزینه «۲» اگر ناحیه محدود به منحنی C را R بنامیم، طبق قضیه گرین خواهیم داشت:

$$\int_C \left(\frac{\partial f}{\partial y} dx - \frac{\partial f}{\partial x} dy \right) = \iint_R \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{\partial f}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) \right) dx dy = -\iint_R \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right) dx dy$$

و چون f هارمونیک است، پس $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$ و در نتیجه حاصل انتگرال برابر صفر خواهد شد.

۲۵- گزینه «۳» از قضیه دیورژانس استفاده می‌کنیم:

$$\iint_S F \cdot nd\sigma = \iiint_V \text{div}F dV = 2 \iiint_V (x^2 + y^2 + z^2) dV = 2 \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^R \rho^2 \sin \phi d\rho d\phi d\theta = \frac{2R^5}{5} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^\pi \sin \phi d\phi = \frac{12\pi R^5}{5}$$

۲۶- گزینه «۲» می‌دانیم منظور از $\frac{\partial \phi}{\partial n}$ ، مشتق جهتی ϕ در راستای بردار \vec{n} یعنی $\nabla \phi \cdot \vec{n}$ می‌باشد. بنابراین برای محاسبه انتگرال موردنظر از

$$I = \iint_S \frac{d\phi}{dn} ds = \iint_S \nabla \phi \cdot nds = \iiint_V \text{div}(\nabla \phi) dV = \iiint_V \nabla^2 \phi dV$$

$$\text{div}(\nabla \phi) = \nabla \phi \cdot \nabla \phi + \phi \text{div}(\nabla \phi) = |\nabla \phi|^2 + \phi \nabla^2 \phi = 2\phi + \phi \nabla^2 \phi$$

$$2\phi + \phi \nabla^2 \phi = 10\phi \Rightarrow \phi \nabla^2 \phi = 8\phi \Rightarrow \nabla^2 \phi = 8$$

$$I = \iiint_V 8 dV = 8 \times \text{حجم کره واحد} = 8 \times \frac{4\pi}{3} = \frac{32\pi}{3}$$

۲۷- گزینه «۲» $\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 2 + 2a + 0 = 2 + 2a$

برای اینکه u همساز باشد، لازم است $\nabla^2 u = 0$ ، در نتیجه $2 + 2a = 0$ و $a = -1$.

۲۸- گزینه «۲» ابتدا توجه کنید که $\frac{\partial}{\partial y}(x + y) = \frac{\partial}{\partial x}(x - y) = 1$ ، بنابراین انتگرال مستقل از مسیر می‌باشد. تابع پتانسیل میدان

مربور $f = \frac{x^2}{2} + xy - \frac{y^2}{2}$ می‌باشد. از طرفی دو سر خم C ، $A(0, 1)$ و $B(\frac{2}{3}, \frac{1}{3})$ می‌باشد. بنابراین:

$$I = f(B) - f(A) = f\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right) - f(0, 1) = \frac{1}{9}$$

۲۹- گزینه «۱» از قضیه گرین استفاده می‌کنیم:

$$I = \iint_D \left(\frac{\partial}{\partial x} (y^2 + x^2) - \frac{\partial}{\partial y} (x^2 + xy) \right) dA = \iint_D x dA = 0$$

چون x تابعی فرد و ناحیه D نسبت به x متقارن می‌باشد، پس حاصل انتگرال موردنظر برابر صفر است.

۳۰- گزینه «۲»

۳۱- گزینه «۲» ابتدا توجه کنید که:

$$\frac{\partial}{\partial x} (1 - 2y \sin x + 2x^2 y^2) = -2y \cos x + 4xy^2$$

$$\frac{\partial}{\partial y} (2xy^2 - y^2 \cos x) = 4xy^2 - 2y \cos x$$

بنابراین انتگرال مستقل از مسیر می‌باشد. و تابع پتانسیل آن $f = y - y^2 \sin x + x^2 y^2$ می‌باشد.

$$I = \int_C (2xy^2 - y^2 \cos x) dx + (1 - 2y \sin x + 2x^2 y^2) dy = f\left(\frac{\pi}{2}, 1\right) - f(0, 0) = \frac{\pi^2}{4}$$

۳۲- گزینه «۴» از قضیه دیورژانس استفاده می‌کنیم:

$$\iint_S F \cdot n ds = \iiint_V \text{div} F dV = \iiint_V \left(\frac{\partial}{\partial x} (x^2) + \frac{\partial}{\partial y} (y \cos^2 x) + \frac{\partial}{\partial z} (yz) \right) dV = \iiint_V (2x + \cos^2 x + 1) dV$$

در فاصله $-\pi \leq x \leq \pi$ ، انتگرال توابع $\cos^2 x$ و x^2 برابر صفر می‌باشد، بنابراین:

$$\iint_S F \cdot n ds = \iiint_V 2x dV = 2x \times \text{مساحت بیضی} \times \text{ارتفاع} = 2 \times 2\pi \times 2\pi = 8\pi^2$$

۳۳- گزینه «۲» اگر F به صورت $F = F_x i + F_y j + F_z k$ در نظر بگیریم، آنگاه تابع پتانسیل f از فرمول زیر به دست می‌آید.

$$f(x, y, z) = \int_0^x F_x(t, 0, 0) dt + \int_0^y F_y(x, t, 0) dt + \int_0^z F_z(x, y, t) dt$$

بنابراین:

$$f(x, y, z) = \int_0^x e^t dt + \int_0^y -e^x \sin t dt + \int_0^z (xy + t) dt = e^x + e^x \cos y - e^x + xyz + \frac{z^2}{2} + c = e^x \cos y + xyz + \frac{z^2}{2} + c$$

۳۴- گزینه «۳» ابتدا توجه کنید که:

$$ds = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt = \sqrt{(-\sin t)^2 + \cos^2 t} dt = dt$$

$$\int_C xy^2 ds = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t \sin^2 t dt = \frac{1}{3} \sin^3 t \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{3}$$

بنابراین:

۳۵- گزینه «۴»

$$\text{div} B = y^2 + 2x^2 z - 6yz \Big|_{(1,1,0)} = 1$$

۳۶- گزینه «۱»

$$\text{Curl} B = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ xy^2 & 2x^2 yz & -2yz^2 \end{vmatrix} = (-2z^2 - 2x^2 y, 4xyz - 2xy) \Big|_{(1,0,1)} = (-2, 0, 0)$$

۳۷- گزینه «۳» ابتدا توجه کنید که:

$$\frac{\partial}{\partial y} (1 + 2xy) = 2x, \quad \frac{\partial}{\partial x} (x^2) = 2x$$

بنابراین میدان پایستار است و انتگرال مستقل از مسیر می‌باشد. تابع پتانسیل $f(x, y) = x + x^2 y$ می‌باشد. بنابراین:

$$\int_C (1 + 2xy) dx + x^2 dy = f(0, 1) - f(-1, 0) = 0 - (-1) = 1$$

۳۸- گزینه «۱» مساحت موردنظر را می‌توان مساحت حصاری به ارتفاع $z = \frac{1}{3}x + 2$ فرض کرد که روی دایره $x^2 + y^2 = 1$ ساخته شده است.

بنابراین:

$$S = \int_C f ds = \int_C \left(\frac{1}{3}x + 2\right) ds$$

با توجه به اینکه x تابعی فرد و ناحیه انتگرال گیری نسبت به x متقارن است، لذا $\int_C x ds$ برابر صفر است. در نتیجه:

$$S = \int_C 2 ds = 2 \times 2\pi = 4\pi$$

۳۹- گزینه «۴» چون C یک مسیر بسته است، بنابراین می‌توانیم از قضیه گرین استفاده کنیم.

$$\int_C (e^{x^2} + y) dx + (x^2 - \text{Arctg} \sqrt{y}) dy = \iint_D (2x - 1) dA = \int_1^2 \int_0^1 (2x - 1) dy dx = \int_1^2 (4x - 2) dx = 4$$

۴۰- گزینه «۱»

$$\text{Curl} F = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 2x^2 + y^2 & 2xy & -2z^2 \end{vmatrix} = (0, 0, 0)$$

۴۱- گزینه «۳» برای اینکه انتگرال مستقل از مسیر باشد، لازم است $\text{Curl} F = 0$. و چون میدان F دو متغیره است، کافی است $\frac{\partial F_y}{\partial x} = \frac{\partial F_x}{\partial y}$ یعنی:

$$2axy - 2y^2 = 2xy - 2y^2 \Rightarrow 2a = 2 \Rightarrow a = 1$$

۴۲- گزینه «۱» انتگرال داده شده، یک انتگرال رویه‌ای می‌باشد. صفحه تصویر را صفحه XZ در نظر می‌گیریم تصویر ناحیه Σ در صفحه XZ مربع $0 \leq x \leq 1$ و $0 \leq z \leq 1$ می‌باشد. اگر Σ را به صورت $F(x, y, z) = x + y - 1 = 0$ در نظر بگیریم، آنگاه:

$$ds = \frac{|\nabla F|}{|\nabla F \cdot j|} dx dz = \sqrt{2} dx dz$$

بنابراین:

$$I = \iint_{\Sigma} (x + y + z) ds = \int_0^1 \int_0^1 (x + (1-x) + z) \sqrt{2} dx dz = \sqrt{2} \int_0^1 \int_0^1 (1+z) dx dz = \sqrt{2} x \Big|_0^1 \times \left(z + \frac{z^2}{2} \right) \Big|_0^1 = \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

۴۳- گزینه «۲»

$$\vec{F} = y^2 \vec{i} + x^2 \vec{j} \Rightarrow \text{div} F = 0 + 0 = 0$$

$$\text{Curl} F = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y^2 & x^2 & 0 \end{vmatrix} = (2x - 2y) \vec{k}$$

۴۴- گزینه «۳» با توجه به مثال (۳۰) در متن درس کافی است، مقدار زاویه نقاط داده شده را در مختصات قطبی به دست آوریم. نقطه $(1, 0)$ روی محور x ها واقع است، بنابراین $\theta_1 = 0$ ، و نقطه $(0, 1)$ روی محور y ها واقع است و بنابراین $\theta_2 = \frac{\pi}{2}$. در نتیجه:

$$\int_C \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2} = \theta_2 - \theta_1 = \frac{\pi}{2}$$

۴۵- گزینه «۱» چون $\frac{\partial}{\partial y}(2xy) = \frac{\partial}{\partial x}(x^2) = 2x$ بنابراین میدان داده شده پایتار است و تابع پتانسیل آن $f(x, y) = x^2y$ می باشد. از

طرفی نقاط ابتدایی و انتهای مسیر $A(1, 0)$ و $B(-1, 0)$ می باشند، بنابراین:

$$\int_C 2xydx + x^2dy = f(B) - f(A) = 0 - 0 = 0$$

۴۶- گزینه «۱» ابتدا توجه کنید که:

$$K = \int_C ydx + 2xdy$$

از طرفی روی مسیر $y = x + \sin x$ داریم: $dy = (1 + \cos x)dx$. در نتیجه انتگرال فوق روی این مسیر به صورت زیر در می آید:

$$\int_C ydx + 2xdy = \int_0^\pi (x + \sin x)dx + 2x(1 + \cos x)dx$$

$$= \int_0^\pi (3x + \sin x + 2x \cos x)dx = \left(\frac{3}{2}x^2 - \cos x + 2x \sin x + 2 \cos x \right) \Big|_0^\pi = \frac{3}{2}\pi^2 - 2$$

۴۷- گزینه «۱» چون $\frac{\partial}{\partial x}(-2x + 3y) = \frac{\partial}{\partial y}(2x + 2y) = 2$ پس انتگرال مستقل از مسیری باشد و تابع پتانسیل مربوط به آن

$$f = -x^2 + 3xy + y^2$$

در نتیجه:

$$\int_{(2,0)}^{(0,2)} (-2x + 3y)dx + (2x + 2y)dy = f(0, 2) - f(2, 0) = 4 - (-4) = 8$$

۴۸- گزینه «۴» از قضیه دیورژانس استفاده می کنیم:

مختصات کروی

$$\iiint_S F \cdot ndS = \iiint_V \text{div} F dV = \iiint_V (3x^2 + 3y^2 + 3z^2) dV$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^1 \rho^2 \times \rho^2 \sin \phi d\rho d\phi d\theta = 3 \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^\pi \sin \phi \int_0^1 \rho^4 d\rho = \frac{192\pi}{5}$$

۴۹- گزینه «۲» از قضیه گرین استفاده می کنیم.

$$I = \iint_D \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{2}x^2 + xy \right) - \frac{\partial}{\partial y} (xy) \right) dA = \iint_D y dA = \int_{-1}^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} y dy dx = \int_{-1}^1 \frac{1}{2}(1-x^2) dx = \frac{1}{6}$$

۵۰- گزینه «۴» ابتدا توجه کنید که $\frac{\partial \psi}{\partial n} = \nabla \psi \cdot n$. در این صورت طبق قضیه اول گرین داریم:

$$\int_S \phi \frac{\partial \psi}{\partial n} dS = \int_V \phi \nabla^2 \psi dV + \int \nabla \phi \cdot \nabla \psi dV$$

۵۱- گزینه «۳» صفحه تصویر را صفحه xy در نظر می گیریم. برای به دست آوردن ناحیه تصویر در صفحه xy به ترتیب زیر عمل می کنیم:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 2 \\ x^2 + y^2 + x^2 + y^2 = 2 \Rightarrow x^2 + y^2 = 1 \\ z^2 = x^2 + y^2 \end{cases}$$

بنابراین ناحیه تصویر درون دایره $x^2 + y^2 = 1$ می باشد. از طرفی توجه کنید که:

$$dS = \frac{|\nabla f|}{|\nabla f \cdot k|} dA = \frac{\sqrt{4x^2 + 4y^2 + 4z^2}}{2z} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2-x^2-y^2}} dA$$

$$S = \iint_S dS = \iint_D \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2-x^2-y^2}} dx dy = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2-r^2}} \times r dr d\theta$$

$$= \sqrt{2} \int_0^{2\pi} d\theta \times \int_0^1 \frac{r}{\sqrt{2-r^2}} dr = \sqrt{2} \times \theta \Big|_0^{2\pi} \times (-\sqrt{2-r^2}) \Big|_0^1 = 2\pi(2-\sqrt{2})$$

۵۲- گزینه «۴» برای اینکه میدان F ، گرادیان یک تابع باشد، لازم است که میدان F پایتار باشد یعنی $\frac{\partial F_x}{\partial x} = \frac{\partial F_y}{\partial y}$

$$\frac{\partial F_x}{\partial x} = e^{xy}(\cos xy + \sin xy) + xye^{xy}(\cos xy + \sin xy) + xe^{xy}(-y \sin xy + y \cos xy) = e^{xy}(\cos xy + \sin xy + 2xy \cos xy)$$

$$\frac{\partial F_y}{\partial y} = e^{xy}(\cos xy + \sin xy) + xye^{xy}(\cos xy + \sin xy) + ye^{xy}(-x \sin xy + x \cos xy) = e^{xy}(\cos xy + \sin xy + 2xy \cos xy)$$

۵۳- گزینه «۱» در متن درس حل شده است.

۵۴- گزینه «۱»

۵۵- گزینه «۱»

$$\phi = 2x^2y - xz^2 \Rightarrow \nabla^2 \phi = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 4y + 0 - 2xz = 4y - 2xz$$

۵۶- هیچ کدام از گزینه ها صحیح نمی باشند. در امتداد مسیر $R(t)$ ، میدان F به صورت زیر در می آید.

$$F = x\bar{i} + y\bar{j} + (yz - x)\bar{k} \Rightarrow F(R(t)) = t\bar{i} + t^2\bar{j} + (t^3 - 2t)\bar{k}$$

$$R(t) = t\bar{i} + t^2\bar{j} + t^3\bar{k} \Rightarrow dR = t\bar{i} + 2t\bar{j} + 3t^2\bar{k}$$

از طرفی:

$$F \cdot dR = t^4 + 2t^4 + 3t^2(t^3 - 2t) = 4t^4 - 2t^3 + 4t$$

بنابراین:

$$\text{مقدار کار انجام شده} = \int_C F \cdot dR = \int_0^1 (4t^4 - 2t^3 + 4t) dt = \frac{5}{2}$$

۵۷- گزینه «۴» معادله رویه داده شده را به صورت $f(x, y, z) = x^2 + y^2 - z = 0$ می نویسیم، و صفحه تصویر را صفحه xy در نظر می گیریم. در این صورت تصویر ناحیه مورد نظر داخل دایره $x^2 + y^2 = 4$ خواهد بود. از طرفی:

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 - z = 0 \Rightarrow \nabla f = (2x, 2y, -1)$$

$$dS = \frac{|\nabla f|}{|\nabla f \cdot k|} dR = \frac{\sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1}}{1} dR = \sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1} dR$$

$$\iint_R \frac{|\nabla f|}{|\nabla f \cdot k|} dR = \iint_R \sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1} dR$$

بنابراین مساحت ناحیه مورد نظر برابر است با:

$$\iint_R \sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1} dR = \int_0^{2\pi} \int_0^2 \sqrt{4r^2 + 1} \times r dr d\theta = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 r \sqrt{4r^2 + 1} dr = \theta \Big|_0^{2\pi} \times \frac{1}{12} (4r^2 + 1)^{3/2} \Big|_0^2 = \frac{1}{6} \pi (17\sqrt{17} - 1)$$

۵۸- گزینه «۳» برای محاسبه انتگرال داده شده از قضیه گرین استفاده می کنیم:

$$\int_C (2x + y)dx + (2x - 2y)dy = \iint_C \left(\frac{\partial}{\partial x}(2x - 2y) - \frac{\partial}{\partial y}(2x + y) \right) dx dy = \iint_D dx dy = D$$

مساحت ناحیه D

از طرفی می دانیم مساحت محصور درون بیضی به معادله $Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 = 1$ (برابر $AC - B^2 > 0, C > 0$) برابر $\frac{\pi}{\sqrt{AC - B^2}}$

می باشد. بنابراین مساحت درون بیضی $1 = \frac{5}{9}x^2 + \frac{4}{9}xy + \frac{5}{9}y^2$ برابر $\frac{\pi}{9}$ خواهد بود.

تذکره: به طور کلی مساحت محصور درون بیضی به معادله روبرو: $Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$ ($AC - B^2 > 0$)

$$S = \frac{\pi \times \begin{vmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{vmatrix}}{\sqrt{(AC - B^2)^3}}$$

برابر است با:

۵۹- گزینه «۲» خم C، دایره $x^2 + y^2 = 4$ در صفحه $z = 0$ می باشد. بنابراین:

$$I = \int_C F \cdot dR = \int_C (0 - y) dx + (x - 0) dy = \int_C -y dx + x dy$$

قضیه گرین

$$= \iint_D \left(\frac{\partial}{\partial x}(x) - \frac{\partial}{\partial y}(-y) \right) dA = 2 \iint_D dA = 2 \times \text{مساحت دایره} = 8\pi$$

۶۰- گزینه «۳» از قضیه دیورژانس استفاده می کنیم:

$$F = (xz^2, x^2y - z^2, 2xy + y^2z) \Rightarrow \text{div} F = z^2 + x^2 + y^2$$

$$\iint_S F \cdot nds = \iiint_V \text{div} F dV = \iiint_V (x^2 + y^2 + z^2) dV$$

مختصات کروی

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^a \rho^2 \times \rho^2 \sin \phi d\rho d\phi d\theta = \frac{2\pi}{5} a^5$$

۶۱- گزینه «۱» برای اینکه انتگرال مستقل از مسیر باشد، لازم است $\text{curl} F = 0$.

$$\begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ z^2 & 2y & \lambda xz \end{vmatrix} = (0, 2z - \lambda z, 0)$$

از $\text{curl} F = 0$ نتیجه می شود $2z = \lambda z$ و یا $\lambda = 2$.

۶۲- گزینه «۴» از قضیه دیورژانس استفاده می کنیم:

$$\iint_S F \cdot nds = \iiint_V \text{div} F dV = \iiint_V (a^2 + 1 + c^2) dv = (a^2 + 1 + c^2) \times (\text{حجم کره}) = \frac{4\pi}{3} (a^2 + 1 + c^2)$$

$$\text{Curl } \vec{I} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 2x^2y & yxz & fyz \end{vmatrix} = (fz - vx, 0, yz - 2x^2) \Big|_{(1,2,3)} = (5, 0, 18)$$

۶۳- گزینه «۲»

۶۴- گزینه «۴»

۶۵- گزینه «۲»

روش اول: میدان برداری F یک میدان پایستار می باشد (زیرا $\text{Curl} F = 0$) و تابع پتانسیل آن $f(x, y, z) = \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} + \frac{z^2}{2}$ است. از طرفی

$$\int_C F \cdot dR = f(2, 1, 1) - f(0, 0, 0) = 3$$

نقطه متناظر با $t = 0$ نقطه $(0, 0, 0)$ و نقطه متناظر با $t = 1$ نقطه $(2, 1, 1)$ می باشد. بنابراین:

روش دوم: روی مسیر داده شده، میدان F به صورت $F = 2ti + t^2j + t^2k$ در می آید. از طرفی:

$$R(t) = (2t, t^2, t^2) \Rightarrow dR = (2, 2t, 2t^2) dt \Rightarrow dt \Rightarrow F \cdot dR = (4t + 2t^2 + 2t^2) dt$$

بنابراین:

$$\int_C F \cdot dR = \int_0^1 (4t + 2t^2 + 2t^2) dt = \left(2t^2 + \frac{2}{3}t^3 + \frac{2}{3}t^3 \right) \Big|_0^1 = 3$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x - \frac{y}{x^2} \Rightarrow f(x, y) = x^2 + \frac{y}{x} + g(y) \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{x} + g'(y) = \frac{1}{x} \Rightarrow g'(y) = 0 \Rightarrow g(y) = c$$

۶۶- گزینه «۳»

بنابراین $f(x, y) = x^2 + \frac{y}{x} + c$ از رابطه $f(1, 1) = 4$ مقدار $c = 2$ به دست می آید. در نتیجه:

$$f(x, y) = x^2 + \frac{y}{x} + 2 \Rightarrow f(2, 2) = 4 + 1 + 2 = 7$$

۶۷- گزینه «۴» میدان F پایستار می باشد ($\text{curl} F = 0$). بنابراین کار انجام شده مستقل از مسیر می باشد.

۶۸- گزینه «۳» سطح مورد نظر روی دایره $x^2 + y^2 = ax$ و به ارتفاع $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$ می باشد. بنابراین:

$$S = \int_C f ds = \int_C \sqrt{a^2 - x^2 - y^2} ds$$

برای محاسبه انتگرال فوق از مختصات قطبی استفاده می کنیم. معادله دایره $x^2 + y^2 = ax$ در مختصات قطبی به صورت زیر در می آید:

$$r^2 \cos^2 \theta + r^2 \sin^2 \theta = a r \cos \theta \Rightarrow r^2 = a r \cos \theta \Rightarrow r = a \cos \theta$$

$$ds = \sqrt{r^2 + r'^2} d\theta = \sqrt{a^2 \cos^2 \theta + a^2 \sin^2 \theta} d\theta = a d\theta$$

بنابراین:

$$S = \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2 - r^2} \times a d\theta \Big|_{r = a \cos \theta} = a \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2 - a^2 \cos^2 \theta} d\theta = a^2 \int_0^{2\pi} |\sin \theta| d\theta = 4a^2$$

در نتیجه:

۶۹- گزینه «۲»

۷۰- گزینه «۴» برای اینکه میدان F غیر چرخشی باشد، لازم است $\text{Curl} F = 0$. بنابراین:

$$\begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ a_1x + a_2y + a_3z & b_1x + b_2y + b_3z & c_1x + c_2y + c_3z \end{vmatrix} = (c_2 - b_3, a_3 - c_1, b_1 - a_2)$$

برای اینکه $\text{Curl} F = 0$ باشد، لازم است $b_1 = a_2, a_3 = c_1, c_2 = b_3$.

۷۱- گزینه «۳» سهمی داده شده را می توان به صورت پارامتری $R(x) = (x, 4x^2)$ در نظر گرفت. در این صورت:

$$dR = (1, 8x) dx, F(R(x)) = (2x^2, 4x^2) \Rightarrow F \cdot dR = (2x^2 + 32x^2) dx$$

$$\text{کار انجام شده} = \int_C F \cdot dR = \int_0^1 (2x^2 + 32x^2) dx = \frac{34}{5}$$

بنابراین:

۷۲- گزینه «۴» صفحه تصویر را، صفحه YZ انتخاب می کنیم بنابراین بردار یکه عمود بر صفحه تصویر بردار \vec{i} می باشد. در این صورت ناحیه تصویر

مثلث محدود به خطوط $y = 0, y = 0, y + z = a$ و $z = 0$ خواهد بود. رویه داده شده را به صورت $f(x, y, z) = -x^2 + y^2 + z^2 = 0$ می نویسیم. در

$$dS = \frac{|\nabla f|}{|\nabla f \cdot \vec{i}|} dR = \frac{|(-2x, 2y, 2z)|}{2x} = \frac{\sqrt{4x^2 + 4y^2 + 4z^2}}{2x} = \frac{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}{x} = \frac{\sqrt{x^2 + x^2}}{x} = \sqrt{2}$$

این صورت:

$$S = \iint_R \frac{|\nabla f|}{|\nabla f \cdot \vec{i}|} dR = \sqrt{2} \iint_R dR = \sqrt{2} \times \text{مساحت} = \sqrt{2} \times \frac{a^2}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} a^2$$

بنابراین:

۷۳- گزینه «۴» میدان داده شده پایستار می باشد و منحنی C یک مسیر بسته می باشد، بنابراین مقدار انتگرال مورد نظر برابر صفر است.

۷۴- گزینه «۴» کار انجام شده توسط میدان F روی خم C مستقل از نحوه پارامتری کردن خم می باشد.

۷۵- گزینه «۲» چون $f = y + x^2y^2$ تابع پتانسیل آن $\frac{\partial}{\partial y}(2xy^2) = \frac{\partial}{\partial x}(1 + 2x^2y^2) = 6xy^2$ است.

$$I = f(2, 1) - f(1, 4) = 10 - 68 = -58$$

است. در نتیجه:

۷۶- گزینه «۴» از قضیه دیورژانس استفاده می کنیم:

$$I = \iint_\sigma F \cdot nd\sigma = \iiint_V \text{div} F dV = \iiint_V (2x^2 + 2y^2 + 2z^2) dV = 2 \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^1 \rho^2 \times \rho^2 \sin \phi d\rho d\phi d\theta = \frac{6\pi}{5}$$

۷۷- گزینه «۲»

$$\int_C y dx - x dy = \int_0^{2\pi} (-r \sin^2 t - r \cos^2 t) dt = -r \int_0^{2\pi} dt = -4\pi$$

۷۸- گزینه «۴»

$$R(t) = (t, t^2, t^3) \Rightarrow dR = (1, 2t, 3t^2) dt, F(R(t)) = (t^2, t^3, t^4)$$

$$\int_C F \cdot dR = \int_0^1 (t^2 + 2t^5 + 3t^8) dt = \frac{27}{28}$$

۷۹- گزینه «۱» منحنی های داده شده همدیگر را در نقاط (۰, ۰) و (۱, ۱) قطع می کنند. خم C از دو خم $C_1: y = x^2$ و $C_2: x = y^2$ تشکیل شده است. بنابراین:

$$I = \int_0^1 (2x^2 - x^3) dx + \int_0^1 (x + x^2) \times 2x dx + \int_0^1 (2y^2 - y^3) \times 2y dy + \int_0^1 (y^2 + y^3) dy$$

$$= \left(\frac{2x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{2x^3}{3} + \frac{x^4}{4} \right) \Big|_0^1 + \left(\frac{4}{5} y^5 - \frac{y^6}{6} + \frac{2y^3}{3} \right) \Big|_0^1 = \frac{1}{30}$$

۸۰- گزینه «۲»

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z - 2 \Rightarrow \nabla f = (2x, 2y, 1) \Rightarrow dS = \frac{|\nabla f|}{|\nabla f \cdot k|} = \sqrt{1 + 4(x^2 + y^2)} dA$$

$$S = \iint_D \sqrt{1 + 4(x^2 + y^2)} dA = \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{r}} \sqrt{1 + 4r^2} \times r dr d\theta = \frac{12\pi}{3}$$

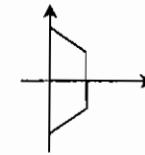
۸۱- گزینه «۱» از قضیه گرین استفاده می کنیم:

$$I = \iint_D \left(\frac{\partial}{\partial x} (rx - e^{-y^2}) - \frac{\partial}{\partial y} (\sin x + 2y^2) \right) dA = \iint_D (r - 4y) dA$$

$$= \int_0^{\pi} \int_0^a (r - 4r \sin \theta) r dr d\theta = \int_0^{\pi} (a^2 - 2a^2 \sin \theta) d\theta = \pi a^2 - 4a^2$$

۸۲- گزینه «۳» از قضیه گرین استفاده می کنیم:

$$I = \iint_D \left(\frac{\partial}{\partial x} (x^2 y \cos y^2 + rx) - \frac{\partial}{\partial y} (x \sin y^2 - y^2) \right) dA = \iint_D (r + 2y) dA = r \times (D \text{ مساحت}) = r \times \frac{2 + 4}{2} = 9$$



توجه کنید که $\iint_D y dA$ برابر صفر می باشد، زیرا تابع y فرد و ناحیه D نسبت به y متقارن می باشد.

۸۳- گزینه «۲» برای اینکه انتگرال روی مسیر بسته برابر صفر باشد کافی است $\text{curl} f = 0$.

$$\begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ z^2 & ry & axz \end{vmatrix} = (0, rz - az, c) = (c, c, c) \Rightarrow a = r$$

۸۴- هیچکدام از گزینه ها صحیح نیست. برای محاسبه انتگرال داده شده از قضیه گرین استفاده می کنیم.

$$I = \int_C -x^2 y dx + xy^2 dy = \iint_D \left(\frac{\partial}{\partial x} (xy^2) - \frac{\partial}{\partial y} (-x^2 y) \right) dx dy = \iint_D (y^2 + x^2) dx dy$$

برای محاسبه انتگرال فوق، از مختصات قطبی استفاده می کنیم:

$$I = \iint_D (x^2 + y^2) dx dy = \int_0^{2\pi} \int_0^r r^2 \times r dr d\theta = \int_0^{2\pi} d\theta \times \int_0^r r^3 dr = 8\pi$$

۸۵- گزینه «۳»

$$\text{Curl} F = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x^2 y & 2xz & -3yz \end{vmatrix} = (-3z - 2x)\bar{i} + (2z - x^2)\bar{k}$$

$$\text{Curl} \text{Curl} F = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ -3z - 2x & 0 & 2z - x^2 \end{vmatrix} = (2x - 3)\bar{j}$$

۸۶- گزینه «۲» صفحه تصویر را صفحه xy در نظر می گیریم. در این صورت ناحیه تصویر درون دایره $x^2 + y^2 = 2x$ می باشد. معادله مخروط را به صورت $f(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2 = 0$ می نویسیم. در این صورت:

$$dS = \frac{|\nabla f|}{|\nabla f \cdot k|} dA = \frac{\sqrt{4x^2 + 4y^2 + 4z^2}}{2z} dA = \frac{\sqrt{4z^2 + 4z^2}}{2z} dA = \sqrt{2} dA$$

$$S = \iint_D \sqrt{2} dA = \sqrt{2} \times (\text{مساحت دایره}) = \sqrt{2}\pi$$

بنابراین:

توجه کنید که معادله دایره $x^2 + y^2 = 2x$ را می توان به صورت $(x-1)^2 + y^2 = 1$ نوشت که دایره ای به شعاع ۱ می باشد.

$$\iint_S F \cdot n d\sigma = \iiint_V \text{div} F dV = \iiint_V 2z dV = 2 \times (D \text{ حجم ناحیه}) = 24$$

۸۷- گزینه «۴»

$$\iint_S \text{curl} F \cdot n d\sigma = \int_C F \cdot dR$$

دایره $x^2 + y^2 = 1$ را می توان به صورت پارامتری زیر نوشت:

$$R(t) = (\cos t, \sin t, 0), 0 \leq t \leq 2\pi \Rightarrow dR = (-\sin t, \cos t, 0) dt, F(R(t)) = (-\sin t, \cos t, -\cos t - \sin t)$$

$$\int_C F \cdot dR = \int_0^{2\pi} (\sin^2 t + \cos^2 t + 0) dt = \int_0^{2\pi} dt = 2\pi$$

بنابراین:

۸۹- گزینه «۱» میدان F پایستار می باشد و چون مسیر یک منحنی بسته است، پس کار انجام شده برابر صفر است.

۹۰- هیچ کدام از گزینه ها صحیح نیست. صفحه تصویر را، صفحه xy انتخاب می کنیم. در این صورت ناحیه تصویر درون دایره $x^2 + y^2 = 1$ خواهد بود. رویه داده شده را به صورت $f(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2 = 0$ می نویسیم. در این صورت:

$$d\sigma = \frac{|\nabla f|}{|\nabla f \cdot i|} = \frac{\sqrt{4x^2 + 4y^2 + 4z^2}}{2z} dA = \frac{\sqrt{4z^2}}{2z} dA = \sqrt{2} dA$$

$$\iint_D (x^2 + y^2) d\sigma = \iint_{x^2 + y^2 \leq 1} (x^2 + y^2) \sqrt{2} dA = \sqrt{2} \int_0^{2\pi} \int_0^1 r^2 \times r dr d\theta = \frac{\pi\sqrt{2}}{2}$$

بنابراین:

۹۱- گزینه «۱»

$$F_1 = \frac{mx}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \Rightarrow \frac{\partial F_1}{\partial x} = \frac{m(x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}} - 3mx^2(x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{5}{2}}}{(x^2 + y^2 + z^2)^3} = \frac{m(x^2 + y^2 + z^2) - 3mx^2}{r^5} = \frac{mr^2 - 3mx^2}{r^5}$$

به طور مشابه $\frac{\partial F_2}{\partial y}$ و $\frac{\partial F_3}{\partial z}$ به دست می آیند. در این صورت:

$$\text{div} \vec{F} = \frac{mr^2 - 3mx^2}{r^5} + \frac{mr^2 - 3my^2}{r^5} + \frac{mr^2 - 3mz^2}{r^5} = \frac{3mr^2 - 3m(x^2 + y^2 + z^2)}{r^5} = 0$$

۹۲- گزینه «۲» در روی منحنی $y = x^2$ ، $dy = 2x dx$ بنابراین:

۹۳- گزینه «۳» صفحه تصویر را صفحه xy در نظر می گیریم. در این صورت ناحیه تصویر به صورت $1 \leq x^2 + y^2 \leq 4$ در می آید. معادله مخروط داده شده را به صورت $f(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2 = 0$ می نویسیم. در این صورت:

بنابراین: $ds = \frac{|\nabla f|}{|\nabla f \cdot k|} dA = \frac{\sqrt{4x^2 + 4y^2 + 4z^2}}{2z} dA = \frac{\sqrt{4z^2}}{2z} dA = \sqrt{2} dA$
 $\iint_{\Sigma} z^2 ds = \iint_D (x^2 + y^2) \times \sqrt{2} dA = \sqrt{2} \int_0^{2\pi} \int_1^2 r^2 \times r dr d\theta = \sqrt{2} \times \theta \left[\frac{1}{4} r^4 \right]_1^2 = \frac{15\sqrt{2}}{2} \pi$

۹۴- گزینه «۴» صفحه تصویر را صفحه xy در نظر می گیریم. در این صورت ناحیه تصویر درون دایره $x^2 + y^2 = 4$ می باشد. اگر معادله رویه داده شده را به صورت $f(x, y, z) = 2xy - z = 0$ بنویسیم. در این صورت:

بنابراین: $ds = \frac{|\nabla f|}{|\nabla f \cdot k|} dA = \frac{\sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1}}{1} dA = \sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1} dA$
 $\iint_S \frac{z ds}{\sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1}} = \iint_D \frac{2\sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1}}{\sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1}} dA = 2 \iint_D dA = 2 \times \text{مساحت دایره} = 8\pi$

۹۵- هیچ کدام از گزینه ها صحیح نیست. از قضیه گرین استفاده می کنیم:

$\int_C (-x^2 y dx + xy^2 dy) = \iint_D (y^2 + x^2) dA = \int_0^{2\pi} \int_0^{1+\cos\theta} r^2 \times r dr d\theta = \int_0^{2\pi} \int_0^{1+\cos\theta} r^3 dr d\theta = \frac{1}{4} \int_0^{2\pi} (1 + \cos\theta)^4 d\theta = \frac{69\pi}{32}$

۹۶- گزینه «۱»

۹۷- گزینه «۴» از قضیه دیورژانس استفاده می کنیم:

$\iint_S F \cdot ndS = \iiint_Q \text{div} F dV = \iiint_Q (-2x + 2xy + 2z^2) dV$
 $= \int_0^2 \int_0^2 \int_0^1 (-2x + 2xy + 2z^2) dx dy dz = \int_0^2 \int_0^2 (-1 + y + 2z^2) dy dz = \int_0^2 6z^2 dz = 54$

تست های تکمیلی فصل چهارم

۱- سیمی به شکل حلقه مستدیر با چگالی ثابت δ روی دایره $x^2 + y^2 = a^2$ در صفحه xy قرار دارد. گشتاور لختی حلقه حول محور z چقدر است؟

(۱) δa^2 (۲) $\pi \delta a^2$ (۳) $2\delta a^2$ (۴) $2\pi \delta a^2$

۲- فرض کنید $f(x, y, z) = \frac{\sqrt{z}}{x^2 + y^2 + z^2}$ و c خم $R(t) = ti + tj + tk$ ، $1 \leq t \leq 2$ باشد در این صورت مقدار $\int_c f ds$ چقدر است؟

(۱) $\sqrt{2}$ (۲) 2 (۳) $\frac{1}{2}$ (۴) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

۳- میله نازکی به طول L و چگالی ثابت δ روی بازه $0 \leq x \leq L$ از محور x ها قرار دارد. گشتاور لختی میله حول محور z چقدر است؟ (M جرم میله)

(۱) $L^2 M$ (۲) $\frac{L^2 M}{2}$ (۳) $\frac{L^2 M}{3}$ (۴) $\frac{L^2 M}{4}$

۴- خم c با رابطه $r(t) = a \cos t \sin t i + a \sin^2 t j + a \cos t k$ ، $0 \leq t \leq \frac{\pi}{4}$ داده شده باشد. در این صورت مقدار $\int_c z ds$ چقدر است؟

(۱) $\frac{a^2}{2} (\sqrt{2} + \ln(\sqrt{2} - 1))$ (۲) $\frac{a^2}{2} (\sqrt{2} + \ln(\sqrt{2} + 1))$ (۳) $\frac{a^2}{2} (\sqrt{2} - \ln(\sqrt{2} - 1))$ (۴) $\frac{a^2}{2} (\sqrt{2} - \ln(1 + \sqrt{2}))$

۵- اگر c پاره خط حاصل از تقاطع دو صفحه $x + y + 2z = 0$ و $x - y + z = 0$ از $(0, 0, 0)$ تا $(2, 1, -2)$ باشد حاصل $\int_c x^2 ds$ چقدر است؟

(۱) $\sqrt{14}$ (۲) $2\sqrt{14}$ (۳) $3\sqrt{14}$ (۴) $4\sqrt{14}$

۶- حاصل $\int_c \frac{ds}{(2y^2 + 1)^2}$ که در آن c ، خم حاصل از تقاطع $z^2 = x^2 + y^2$ و $x + y = 1$ می باشد، کدام است؟

(۱) $\frac{\pi\sqrt{2}}{2}$ (۲) $\pi\sqrt{2}$ (۳) 2π (۴) π

۷- فرض کنید c مارپیچ $R(t) = \cos t i + \sin t j + tk$ ، $0 \leq t \leq 2\pi$ باشد و $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ ، در این صورت $\int_c f(x, y, z) ds$ کدام است؟

(۱) $\frac{\sqrt{2}\pi}{2} (2 + 4\pi^2)$ (۲) $\frac{2\sqrt{2}\pi}{2} (2 + 4\pi^2)$ (۳) $\frac{\sqrt{2}\pi}{2} (2 + 4\pi^2)$ (۴) $\frac{\sqrt{2}\pi}{2} (2 + 4\pi^2)$

۸- حاصل انتگرال مسیری $\int_c \frac{x+y}{y+z} ds$ که c خم $(t, \frac{2}{3}t^2, t)$ ، $0 \leq t \leq 2$ می باشد، کدام است؟

(۱) $\frac{28}{3} - 2\sqrt{2}$ (۲) $\frac{16}{3} - 2\sqrt{2}$ (۳) $\frac{8}{3} - \sqrt{2}$ (۴) $\frac{28}{3} - \sqrt{2}$

۹- یک سیم به شکل اشتراک کره $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ و صفحه $x + y + z = 0$ می باشد. در صورتی که چگالی آن در (x, y, z) مساوی $\rho(x, y, z) = x^2$ جرم سیم چقدر است؟

(۱) $\frac{\pi}{2}$ (۲) $\frac{\pi}{4}$ (۳) $\frac{\pi}{6}$ (۴) $\frac{2\pi}{3}$

۱۰- سیمی به شکل دایره $x^2 + y^2 = a^2$ است. در صورتی که چگالی در (x, y) برابر $|x| + |y|$ باشد. گشتاور ماند آن حول یک قطر کدام است؟

(۱) $2\pi a^4$ (۲) πa^4 (۳) $\frac{\pi a^4}{2}$ (۴) $\frac{\pi a^4}{4}$

۱۱- کار انجام شده توسط نیروی $\vec{F} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ در طول مارپیچ $\mathbf{r}(t) = \cos t\mathbf{i} + \sin t\mathbf{j} + t\mathbf{k}$ در فاصله $0 \leq t \leq 2\pi$ کدام است؟

- (۱) π^2 (۲) $4\pi^2$ (۳) ۰ (۴) $18\pi^2$

۱۲- فرض کنید c بیضی $x^2 + \frac{y^2}{4} = 1$ باشد که در جهت مثلثاتی جهت گذاری شده است. در این صورت مقدار $\int_c xdy + ydx$ برابر است با:

- (۱) ۰ (۲) $\frac{\pi}{2}$ (۳) 2π (۴) -2π

۱۳- مقدار $\int_c e^y dx + xe^y dy$ بر نیم دایره $y = \sqrt{1-x^2}$ در جهت مثلثاتی کدام است؟

- (۱) -2 (۲) -1 (۳) 1 (۴) 2

۱۴- اگر c بیضی $x^2 + y^2 = 1$ در جهت خلاف حرکت عقربه های ساعت باشد، مقدار $\int_c (3x^2 + y^2)dx + (3xy^2 + 2x)dy$ چقدر است؟

- (۱) π (۲) ۰ (۳) 2π (۴) 4π

۱۵- اگر $F(x, y) = y\mathbf{i} + 4xz\mathbf{j}$ و T بردار مماس واحد بر دایره c به معادله $x^2 + y^2 = 1$ باشد، حاصل $\int_c F \cdot T ds$ کدام است؟

- (۱) 2π (۲) 3π (۳) 4π (۴) 5π

۱۶- کار انجام شده توسط میدان نیروی $F(x, y) = y^2\mathbf{i} + 2xy\mathbf{j}$ از مبدأ تا نقطه $(1, 1)$ بر مسیر دلخواه c کدام است؟

- (۱) 1 (۲) 2 (۳) 3 (۴) 4

۱۷- ناحیه D محدود به منحنی بسته و همواره c است. اگر $\int_c F \cdot dR$ ، آنگاه \vec{F} کدام است؟

- (۱) $\vec{F} = y\mathbf{i}$ (۲) $\vec{F} = y\mathbf{i} + 2xz\mathbf{j}$ (۳) $\vec{F} = -xz\mathbf{j}$ (۴) $\vec{F} = \frac{1}{2}y\mathbf{i} - \frac{1}{2}xz\mathbf{j}$

۱۸- مقدار $\int_c 2x^2ydy + 2xy^2dx$ وقتی c نمودار تابع $y = \text{Arctg}\sqrt{x^2-1}$ از نقطه $A(1, 0)$ تا $B(\sqrt{2}, \frac{\pi}{4})$ باشد، کدام است؟

- (۱) $\frac{\pi}{4}$ (۲) $\frac{\pi^2}{4}$ (۳) $\frac{\pi}{8}$ (۴) $\frac{\pi^2}{8}$

۱۹- حاصل $\int_c ydx + (2y^2 - x)dy + zdz$ روی مسیر $R(t) = t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + t\mathbf{k}$ ، $0 \leq t \leq 1$ ، کدام است؟

- (۱) $\frac{n-1}{n+1}$ (۲) $\frac{3-n-1}{4-n+1}$ (۳) $\frac{n+1}{n-1}$ (۴) $\frac{3-n+1}{4-n-1}$

۲۰- فرض کنید $\sigma(t)$ یک مسیر و T بردار یک مماس باشد، حاصل $\int_c T \cdot dR$ کدام است؟

- (۱) ۰ (۲) طول σ (۳) مساحت محصور درون σ (۴) هیچکدام

۲۱- فرض کنید میدان برداری $\mathbf{k}(\frac{x^2}{z} + y^2) + F = Ax\text{Ln}z\mathbf{i} + By^2z\mathbf{j}$ پایستار باشد، مقدار $A+B$ کدام است؟

- (۱) 5 (۲) 0 (۳) -3 (۴) 3

۲۲- مقدار $\int_c e^{x+y} \sin(y+z)dx + e^{x+y}(\sin(y+z) + \cos(y+z))dy + e^{x+y} \cos(y+z)dz$ روی قطعه خطی که نقاط $(0, 0, 0)$ و

$(1, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4})$ را به هم وصل می کند چقدر است؟

- (۱) $e^{\frac{\pi}{4}}$ (۲) $e^{\frac{\pi+1}{2}}$ (۳) $e^{\frac{\pi-1}{2}}$ (۴) $e^{\frac{\pi-1}{4}}$

۲۳- اگر c خم حاصل از تقاطع $z = \text{Ln}(1+x)$ و $y = x$ از $(0, 0, 0)$ تا $(1, 1, \text{Ln}2)$ باشد، مقدار

$\int_c (2x \sin(\pi y) - e^z)dx + (\pi x^2 \cos(\pi y) - 3e^z)dy - xe^z dz$ کدام است؟

- (۱) $\frac{-11}{2}$ (۲) $\frac{-13}{2}$ (۳) $\frac{-15}{2}$ (۴) $\frac{-17}{2}$

۲۴- فرض کنید T بردار یک مماس بر خم بسته c باشد، شار گذرنده از خم c برابر کدام است؟

- (۱) ۰ (۲) مساحت محصور به خم c می باشد. (۳) طول قوس c (۴) 2π

۲۵- شار میدان $F(x, y) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$ گذرنده از خم $R(t) = (\cos t)\mathbf{i} + (\sin t)\mathbf{j}$ وقتی $0 \leq t \leq 2\pi$ برابر است با:

- (۱) ۰ (۲) 4π (۳) 8π (۴) 16π

۲۶- فرض کنید c یک خم بسته همواره باشد، در این صورت حاصل $\int_c xy^2ydx + x^2dy$ کدام است؟

- (۱) 2π (۲) -2π (۳) ۰ (۴) 4π

۲۷- هرگاه خم c یک مربع دلخواه باشد، حاصل $\int_c xy^2dx + (x^2y + 2y)dy$ برابر است با:

- (۱) مساحت مربع (۲) ۰ (۳) محیط مربع (۴) دو برابر مساحت مربع

۲۸- انتگرال $\int_c [(2xy^2 - y^2 \cos x)dx + (1 - 2y \sin x + 2x^2y^2)dy]$ روی سهمی $yx = \pi y^2$ از $(0, 0)$ تا $(\frac{\pi}{4}, 1)$ برابر است با:

- (۱) π^2 (۲) $\frac{\pi^2}{2}$ (۳) $\frac{\pi^2}{4}$ (۴) $2\pi^2$

۲۹- مساحت قسمتی از رویه سهمیگون $z = x^2 + y^2$ که خارج مخروط $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ قرار دارد، چقدر است؟

- (۱) $\frac{2\pi}{3}(3\sqrt{3}-1)$ (۲) $\frac{\pi}{3}(3\sqrt{3}-1)$ (۳) $\frac{\pi}{2}(3\sqrt{3}-1)$ (۴) $\frac{\pi}{4}(3\sqrt{3}-1)$

۳۰- مساحت رویه ناحیه مشترک بین دو استوانه $z = a^2 - x^2 - y^2$ و $x^2 + z^2 = a^2$ ، برابر کدام است؟

- (۱) $4a^2$ (۲) $4\pi a^2$ (۳) $16a^2$ (۴) $16\pi a^2$

۳۱- مقدار $\iint_S (x^2 + y^2) dS$ ، که در آن S قسمتی از مخروط $z = 3(x^2 + y^2)$ بین $z = 0$ و $z = 3$ است، برابر کدام است؟

- (۱) $\frac{\pi}{3}$ (۲) π (۳) 3π (۴) 9π

۳۲- مساحت قسمتی از صفحه $16 = 2x + y + 2z$ که به وسیله $x = 0$ ، $y = 0$ ، $x = 2$ و $y = 3$ بریده می شود، چقدر است؟

- (۱) 4 (۲) 9 (۳) 16 (۴) 12

۳۳- مساحت بخشی از رویه $0 = x^2 - 2y - 2z$ که بالای مثلثی واقع در صفحه xy محدود به خطوط $x = 2$ ، $y = 0$ و $y = 2x$ قرار دارد برابر است با:

- (۱) $6\sqrt{6} - 2\sqrt{2}$ (۲) $2\sqrt{3} - 2\sqrt{2}$ (۳) $3\sqrt{3} - 1$ (۴) $6\sqrt{6} - 2\sqrt{2}$

۳۴- مساحت بیضی که استوانه $1 = x^2 + y^2$ از صفحه $z = cx$ جدا می کند، چقدر است؟

- (۱) $\pi\sqrt{c^2+1}$ (۲) $2\pi\sqrt{c^2+1}$ (۳) $\pi|c|$ (۴) $2\pi|c|$

۳۵- مساحت رویه ای که صفحه $y = 0$ از سهمیوار $1 = x^2 + y + z^2$ جدا می کند، برابر کدام است؟

- (۱) $\frac{\pi}{3}(\sqrt{5}-1)$ (۲) $\frac{\pi}{2}(\sqrt{5}-1)$ (۳) $\frac{\pi}{6}(\sqrt{5}-1)$ (۴) $\frac{\pi}{4}(\sqrt{5}-1)$

۳۶- مقدار انتگرال $g(x, y, z) = x + y + z$ بر بخشی از صفحه $z = 2 - 2x - 2y$ که در یک هشتم اول واقع است برابر است با:

- (۱) 1 (۲) 2 (۳) 3 (۴) 4

۳۷- فرض کنید $F(x, y, z) = z^2\mathbf{i} + xz\mathbf{j} - 2zk\mathbf{k}$ ، در این صورت شار برونسوی میدان F گذرنده از رویه ای که صفحات $x = 1$ ، $x = 0$ و $z = 0$ از استوانه سهموی $z = 4 - y^2$ جدا می کنند چقدر است؟

- (۱) 16 (۲) 32 (۳) -32 (۴) -16

۳۸- مرکز جرم بخشی از کره $1 = x^2 + y^2 + z^2$ که چگالی آن ثابت و در یک هشتم اول واقع است، کدام است؟

- (۱) $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ (۲) $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ (۳) $(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4})$ (۴) $(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4})$

۳۹- رویه S را یک پوسته بسیار نازک به شعاع a فرض کنید، به طوریکه چگالی آن در هر نقطه برابر با فاصله آن نقطه تا قطر ثابتی از کره باشد. در این صورت جرم پوسته چقدر است؟

(۱) $\frac{\pi^2}{3} a^3$ (۲) $\pi^2 a^3$ (۳) $\frac{\pi^2}{4} a^3$ (۴) $\frac{\pi^2}{2} a^3$

۴۰- مقدار $\iint_S y \, dS$ که S قسمتی از صفحه $z = 1 + y$ است که درون مخروط $z = \sqrt{2(x^2 + y^2)}$ قرار می گیرد، برابر است با:

(۱) π (۲) 2π (۳) 4π (۴) 6π

۴۱- فرض کنید P صفحه $ax + by + cz = D$ ، $(D \neq 0)$ باشد، در این صورت مقدار $\iint_P \frac{dS}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}$ چقدر است؟

(۱) $\pi \frac{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}{|D|}$ (۲) $2\pi \frac{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}{|D|}$ (۳) $\pi \frac{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}{2|D|}$ (۴) $\frac{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}{|D|}$

۴۲- اگر $F(x, y, z) = (ax, by, cz)$ و کره S که $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ بردار قائم یکه رو به خارج باشد، مقدار $\iint_S F \cdot ndS$ برابر است با:

(۱) $\frac{4\pi}{3}$ (۲) $2\pi(a + b + c)$ (۳) $\frac{4\pi}{3}(a + b + c)$ (۴) هیچکدام

۴۳- مساحت مثلثی که یک هشتم اول از صفحه $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$ جدا می کند، برابر چند است؟

(۱) $\frac{1}{6} abc$ (۲) $\frac{1}{3} abc$ (۳) $\frac{1}{3} \sqrt{a^2 b^2 + b^2 c^2 + a^2 c^2}$ (۴) $\frac{1}{2} \sqrt{a^2 b^2 + b^2 c^2 + a^2 c^2}$

۴۴- سوراخی به مقطع مربع و به ضلع $2\sqrt{2}$ به صورت متقارن در کره ای به شعاع ۲ ایجاد می شود. مقدار مساحت رویه جدا شده برابر کدام است؟

(۱) $16\pi(\sqrt{2} - 1)$ (۲) $8\pi(2\sqrt{2} - 1)$ (۳) $16(2 - \sqrt{2})$ (۴) $8\pi(2 - \sqrt{2})$

۴۵- شار برونسوی میدان $F(x, y, z) = x^2 i - 2xy j + 2xz k$ گذرنده از ناحیه ای که کره $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ از یک هشتم اول جدا می کند، چقدر است؟

(۱) 2π (۲) 3π (۳) 4π (۴) 5π

۴۶- شار برونسوی بردار مکان $F = xi + yj + zk$ گذرنده از یک رویه بسته قطعه قطعه هموار برابر است با: (V حجمی است که رویه در بر می گیرد).

(۱) V (۲) 3V (۳) 0 (۴) هیچکدام

۴۷- حاصل $\iint_S x \, dydz + y \, dzdx + z \, dx dy$ که در آن S رویه ناحیه محصور بین استوانه $x^2 + y^2 = 9$ و صفحات $z = 0$ و $z = 3$ است، کدام است؟

(۱) 9π (۲) 27π (۳) 81π (۴) 243π

۴۸- حاصل $\iint_S xz \, dydz - y^2 \, dzdx + yz \, dx dy$ که در آن S رویه مکعب محصور بین صفحات $x = 0, y = 0, z = 0, x = 1, z = 1$ است، کدام است؟

(۱) $\frac{3}{2}$ (۲) $\frac{5}{2}$ (۳) $\frac{7}{2}$ (۴) $\frac{1}{2}$

۴۹- فرض کنید n بردار قائم یکه برونسوی بر رویه بسته S باشد، در این صورت مقدار $\iint_S n \cdot dS$ چقدر است؟

(۱) 0 (۲) مساحت رویه S (۳) حجم محصور در رویه S (۴) 2π

۵۰- اگر n بردار قائم یکه برونسوی بر رویه بسته S باشد، و رویه S ناحیه V را در بر گرفته باشد، در این صورت مقدار $\iiint_V \text{div} n \, dV$ برابر است با:

(۱) 0 (۲) S (۳) V (۴) 2π

۵۱- اگر V ناحیه محصور در رویه بسته ای مانند S باشد و $B = \nabla \times A$ ، آنگاه مقدار $\iint_S B \cdot ndS$ چقدر است؟

(۱) 0 (۲) S (۳) V (۴) $\text{div} A$

۵۲- فرض کنید میدان F بر سطح بسته S از ناحیه V مماس باشد، در این صورت مقدار انتگرال $\iiint_V (\text{div} F) \, dV$ برابر است با:

(۱) 0 (۲) S (۳) V (۴) 2π

۵۳- مقدار $\int_{(0,0)}^{(1,2,3)} 2xy \, dx + (x^2 + z^2) \, dy + 2yz \, dz$ برابر است با:

(۱) 10 (۲) 15 (۳) 20 (۴) بستگی به مسیر دارد.

(۴) بستگی به مسیر دارد.

۵۴- اگر C مرز مربع $|-2, 2| \times |-2, 2|$ در جهت مثبت مثلثاتی باشد، مقدار انتگرال $\int_C y \, dx - x \, dy$ چقدر است؟

(۱) 22 (۲) -22 (۳) 0 (۴) 16

۵۵- شار برونسوی میدان $F = (y, 1)$ از دایره $x^2 + y^2 = 1$ کدام است؟

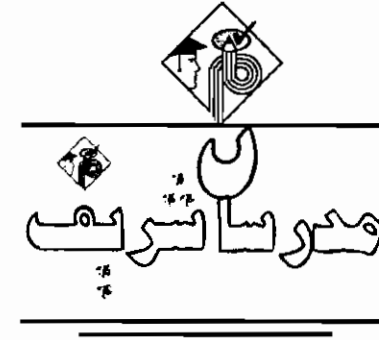
(۱) π (۲) $-\pi$ (۳) 2π (۴) 0

«ارسطو»

هر کس از چیزی بترسد از او می گریزد ولی هر کس که از خدا بترسد به او پناه می برد.

«سعدي»

در میان دو کس دشمنی نیفکن که ایشان چون صلح کنند، تو در میانه شرمسار باشی.

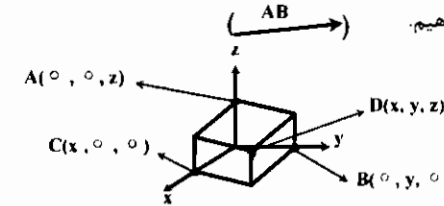


فصل پنجم

« بردار »

کمیت اسکالر: کمیت‌هایی مانند زمان، وزن، دما و ... که بر حسب واحدهائی مشخص بیان می‌شود، اسکالر نامیده می‌شود.

کمیت برداری: کمیتی مانند سرعت، شدت میدان الکتریکی، نیرو و ... که برای مشخص کردن آنها علاوه بر اندازه (طول)، جهت نیز لازم است کمیت برداری محسوب می‌شوند. یک بردار را معمولاً با یک پاره‌خط جهت‌دار نمایش می‌دهیم.



* تذکره ۱: به جهت اینکه اکثر مسائل در فضای R^3 مطرح می‌شود یعنی یک نقطه دارای طول، عرض و ارتفاع می‌باشد، پس مطالب را در فضای سه بعدی شرح می‌دهیم:

دستگاه مختصات قائم

در این دستگاه همان طور که اشاره شد نقطه‌دارای سه پارامتر طول، عرض و ارتفاع می‌باشد. برای مثال نقطه $A(0, 0, z)$ فقط دارای ارتفاع، نقطه $B(0, y, 0)$ فقط دارای عرض و نقطه $C(x, 0, 0)$ فقط دارای طول می‌باشد و نقطه‌ای مانند $D(x, y, z)$ دارای هر سه پارامتر ارتفاع، طول و عرض می‌باشد.

فاصله بین دو نقطه $A(x_1, y_1, z_1)$ و $B(x_2, y_2, z_2)$ (اندازه بردار \overline{AB}):

اندازه یک بردار از رابطه $|\overline{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$ بدست می‌آید که اگر اندازه بردار \overline{OA} یا بعبارت دیگر فاصله نقطه A از مبدأ مختصات خواسته شود از رابطه $|\overline{OA}| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}$ بدست خواهد آمد.

مثال ۱: دو نقطه $A(3, 1, -9)$ و $B(-1, 1, -12)$ مفروض هستند فاصله بین این دو نقطه کدام است؟

- ۴ (۱)
- ۳ (۲)
- ۵ (۳)
- $\sqrt{13}$ (۴)

پاسخ: گزینه «۳»

$$|\overline{AB}| = \sqrt{(-1-3)^2 + (1-1)^2 + (-12+9)^2} = \sqrt{25} = 5$$

بردار: یک بردار در فضا عبارت است از پاره‌خطی جهت‌دار. دو بردار را با هم برابر یا یکسان می‌گوییم هرگاه طول و جهتشان یکی باشد.

ضرب اسکالر در بردار:

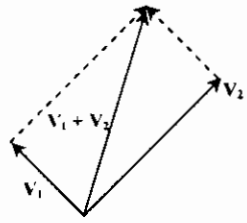
حاصلضرب یک عدد حقیقی مانند λ در بردار \vec{A} برداری مانند \vec{B} است که اگر λ مثبت باشد، \vec{B} برداری است هم جهت با \vec{A} و اگر λ منفی باشد \vec{B} برداری است در خلاف جهت \vec{A} و اندازه \vec{B} برابر اندازه بردار \vec{A} خواهد بود. ($\vec{B} = \lambda \vec{A}$)

حاصل جمع دو بردار:

اگر دو بردار $\vec{A}(x_1, y_1, z_1)$ و $\vec{B}(x_2, y_2, z_2)$ مفروض باشند، آنگاه خواهیم داشت:

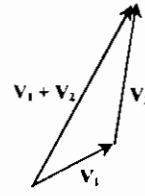
$$\vec{C} = \vec{A} + \vec{B} = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2)$$

نکته ۱: از لحاظ هندسی، جمع دو بردار، قطر متوازی‌الاضلاع حاصل از دو بردار می‌باشد. و همچنین اگر دو بردار اضلاع یک مثلث باشند، حاصل جمع دو بردار ضلع سوم مثلث خواهد بود. (مطابق شکل زیر)



قانون متوازی‌الاضلاع

(این قانون را ارسطو برای توصیف اثر دو نیرو به کار برد.)



قانون مثلث

مثال ۲: اگر $\vec{A} = (1, 2, 4)$ و $\vec{B} = (2, 1, 2)$ باشد، آنگاه حاصل $\vec{C} = 2\vec{B} - 2\vec{A}$ کدام است؟

- (۱) $(4, 9, -2)$
- (۲) $(-2, -2, -2)$
- (۳) $(8, 9, 14)$
- (۴) $(8, 9, 2)$

پاسخ: گزینه «۲»

$$\vec{C} = 2(2, 1, 2) - 2(1, 2, 4) = (4, 2, 4) + (-2, -4, -8) = (2, -2, -4)$$

کسینوسهای هادی یک بردار:

اگر α, β و γ زوایایی باشند که بردار دلخواه $\vec{u} = (a, b, c)$ با جهت‌های مثبت محوره‌های x, y و z می‌سازد، آنگاه $\cos \alpha, \cos \beta$ و $\cos \gamma$ را کسینوسهای هادی بردار یا خط می‌گوییم و از فرمول زیر به دست می‌آیند:

$$\cos \alpha = \frac{a}{|u|}, \quad \cos \beta = \frac{b}{|u|}, \quad \cos \gamma = \frac{c}{|u|}$$

با توجه به تعریف فوق بلافاصله نتیجه می‌شود که:

مثال ۳: اگر α, β و γ زوایایی باشند که خط d با محوره‌های مختصات می‌سازد، کدامیک از روابط زیر صحیح است؟

- (۱) $\alpha + \beta + \gamma = 90^\circ$
- (۲) $\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta + \sin^2 \gamma = 2$
- (۳) $\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma = 1$
- (۴) $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$

پاسخ: گزینه «۲» با توجه به اینکه α, β و γ زوایای هادی هستند، پس:

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1 \Rightarrow 1 - \sin^2 \alpha + 1 - \sin^2 \beta + 1 - \sin^2 \gamma = 1 \Rightarrow \sin^2 \alpha + \sin^2 \beta + \sin^2 \gamma = 2$$

حاصلضرب داخلی دو بردار (حاصلضرب اسکالر)

ضرب داخلی دو بردار \vec{A} و \vec{B} برابر است با حاصلضرب اندازه‌های دو بردار در کسینوس زاویه بین دو بردار:

نکته ۲: هر بردار $A(x, y, z)$ را به صورت ترکیب خطی بردارهای $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ می‌توان نوشت یعنی $\vec{A}(x, y, z) = (x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k})$ اگر دو بردار بر حسب تصاویرشان (ترکیب نکته فوق) بیان شده باشند، آنگاه حاصلضرب داخلی آنها برابر است با:

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2$$

که با توجه به رابطه فوق زاویه بین دو بردار از فرمول زیر قابل محاسبه می‌باشد.

$$\cos \theta = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}$$

مثال ۴: زاویه بین دو بردار $\vec{V}_1(10, 11, -2)$ و $\vec{V}_2(3, 0, 4)$ کدام است؟

- (۱) 30°
- (۲) 60°
- (۳) $\text{Arccos} \frac{1}{3}$
- (۴) $\text{Arccos} \frac{22}{\sqrt{5}}$

پاسخ: گزینه «۴»

$$\cos \theta = \frac{(3 \times 10) + (0 \times 11) + (-2 \times 4)}{\sqrt{10^2 + 11^2 + 4^2} \cdot \sqrt{3^2 + 0^2 + 4^2}} = \frac{22}{\sqrt{155} \cdot \sqrt{25}} = \frac{22}{\sqrt{5} \cdot 5} \Rightarrow \theta = \text{Arccos} \left(\frac{22}{\sqrt{5}} \right)$$

شرط عمود بودن دو بردار:

دو بردار $\vec{A}(x_1, y_1, z_1)$ و $\vec{B}(x_2, y_2, z_2)$ در صورتی بر هم عمود هستند که داشته باشیم:

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2 = 0$$

خواص ضرب داخلی:

- (۱) $A \cdot B = B \cdot A$ (حاصل ضرب داخلی خاصیت جابجایی دارد.)
- (۲) $A \cdot A = |A|^2$
- (۳) $|A \cdot B| \leq |A| |B|$
- (۴) $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$

شرط موازی بودن دو بردار:

دو بردار A و B با هم موازیند اگر یکی از آنها مضربی از بردار دیگر باشد :

مثال ۵: کدامیک از بردارهای زیر با بردار $V_1(1, -1, 1)$ موازی است؟

- (۱) $-2\vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k}$
- (۲) $-3\vec{i} + 3\vec{j} - 3\vec{k}$
- (۳) $-3\vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k}$
- (۴) $-3\vec{i} + \vec{j} - 3\vec{k}$

پاسخ: با توجه به توضیح فوق ($\lambda = -3$) گزینه (۲) صحیح است.

طول تصویر یک بردار:

تصویر بردار A را بر بردار B که آن را بصورت Proj_B^A نمایش می دهیم برابر است با:

$$\text{Proj}_B^A = \frac{A \cdot B}{|B|^2} B = \left(\frac{A \cdot B}{B \cdot B} \right) B$$

و طول این تصویر از رابطه زیر به دست می آید:

$$|\text{proj}_B^A| = A \cdot \frac{B}{|B|}$$

مثال ۶: طول تصویر بردار $A = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$ بر بردار $B = \frac{\vec{i} + \vec{k}}{\sqrt{2}}$ کدام است؟

- (۱) $\sqrt{2}$
- (۲) $\frac{\sqrt{2}}{2}$
- (۳) $2\sqrt{2}$
- (۴) 2

$$\text{Proj}_B^A = \frac{A \cdot B}{|B|} = \frac{(\frac{1}{\sqrt{2}} \times 1) + (\frac{1}{\sqrt{2}} \times 1)}{\sqrt{(\frac{1}{\sqrt{2}})^2 + (\frac{1}{\sqrt{2}})^2}} = \frac{\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}}{\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$$

پاسخ: گزینه «۱»

حاصلضرب خارجی دو بردار

هرگاه دو بردار \vec{A} و \vec{B} بر حسب تصاویرشان مشخص شده باشند یعنی $\vec{A} = x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}$ و $\vec{B} = x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}$ آنگاه حاصلضرب خارجی دو بردار \vec{A} و \vec{B} برابر است با:

$$\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} = (y_1 z_2 - z_1 y_2)\vec{i} + (z_1 x_2 - x_1 z_2)\vec{j} + (x_1 y_2 - x_2 y_1)\vec{k}$$

* تذکر ۲: اندازه حاصلضرب خارجی دو بردار غیر صفر \vec{A} و \vec{B} که با نماد $\vec{A} \times \vec{B}$ نشان داده می شود برابر است با:

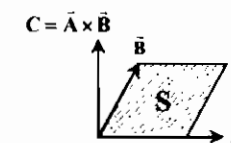
$$|\vec{C}| = |\vec{A} \times \vec{B}| = |\vec{A}| |\vec{B}| \sin \theta$$

که θ زاویه بین دو بردار \vec{A} و \vec{B} می باشد

نکته ۳: اندازه $\vec{A} \times \vec{B}$ برابر مساحت متوازی الاضلاعی است که توسط دو بردار \vec{A} و \vec{B} ساخته شده است. و همچنین مساحت مثلث حاصل

از دو بردار A و B برابر $\frac{1}{2} |\vec{A} \times \vec{B}|$ می باشد.

نکته ۴: بردار $\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B}$ بر دو بردار A و B عمود می باشد.



مثال ۷: اگر $\vec{A}(1, -1, 2)$ و $\vec{B}(2, 1, 3)$ باشد. آنگاه حاصل $\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B}$ کدام است؟

- (۱) $-\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$
- (۲) $-\vec{i} + \vec{j} + 3\vec{k}$
- (۳) $\vec{i} + 7\vec{j} - \vec{k}$
- (۴) $-\vec{i} + 7\vec{j} + \vec{k}$

پاسخ: گزینه «۲»

$$\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = [(-1 \times 3) - (2 \times 1)]\vec{i} + [(2 \times 2) - (3 \times 1)]\vec{j} + [(1 \times 1) - (-1 \times 2)]\vec{k} = -5\vec{i} + \vec{j} + 3\vec{k}$$

خواص ضرب خارجی دو بردار

- (۱) $A \times B = -(B \times A)$ (خاصیت جابجایی ندارد.)
- (۲) $A \times (B + C) = A \times B + A \times C$
- (۳) $B \cdot (A \times B) = 0, A \cdot (A \times B) = 0$
- (۴) $|A \times B|^2 + |A \cdot B|^2 = |A|^2 |B|^2$

مثال ۸: مساحت مثلثی که سه رأس آن به ترتیب $A(2, 0, 0), B(0, 0, 2)$ و $C(1, 2, 0)$ باشد، کدام است؟

- (۱) 1
- (۲) 2
- (۳) 3
- (۴) 4

پاسخ: گزینه «۳» ابتدا توجه کنید که:

بنابراین مساحت مثلث موردنظر برابر $\frac{1}{2} |AB \times AC|$ می باشد.

$$AB \times AC = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = -4\vec{i} + 2\vec{j} - 4\vec{k} \Rightarrow |AB \times AC| = 6$$

ضرب مختلط سه بردار

اگر سه بردار $\vec{A} = x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}$ و $\vec{B} = x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}$ و $\vec{C} = x_3\vec{i} + y_3\vec{j} + z_3\vec{k}$ را در نظر بگیریم ضرب مختلط آنها عبارت خواهد بود از $\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C})$ و اندازه آن برابر است با حجم متوازی السطوحی که روی سه بردار \vec{A}, \vec{B} و \vec{C} ساخته می شود.

$$\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C}) = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$$

مثال ۹: حجم متوازی السطوح حاصل از سه بردار $\vec{a} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}, \vec{b} = \vec{i} - \vec{j} + \vec{k}, \vec{c} = -\vec{i} + \vec{j}$ برابر است با:

- (۱) 1
- (۲) 2
- (۳) 3
- (۴) 4

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -2 \Rightarrow \text{حجم} = 2$$

پاسخ: گزینه «۲»

* تذکر ۳: اگر حاصلضرب فوق صفر باشد آنگاه سه بردار در یک صفحه واقعند.

خواص ضرب مختلط

$$A \cdot (B \times C) = B \cdot (C \times A) = C \cdot (A \times B) \quad (1)$$

(۲) حجم چهار وجهی حاصل از سه بردار A, B, C برابر $\frac{1}{6} A \cdot (B \times C)$ می باشد.

$$A \cdot (B \times C) = -B \cdot (A \times C) \quad (3)$$

تصویر متوازی الاضلاع بر صفحه

اگر A و B اضلاع مجاور یک متوازی الاضلاع و \vec{n} بردار واحدی باشد، $(A \times B) \cdot \vec{n}$ برابر است با مساحت تصویر قائم متوازی الاضلاع بر هر صفحه عمود بر \vec{n} .

نکته ۵: از فرمول فوق نتیجه می شود:

$(A \times B) \cdot \vec{k}$ = مساحت تصویر بر صفحه xy

$(A \times B) \cdot \vec{j}$ = مساحت تصویر بر صفحه xz

$(A \times B) \cdot \vec{i}$ = مساحت تصویر بر صفحه yz

مثال ۱۰: متوازی‌الاضلاعی با نقاط $P(0,0,3)$, $Q(2,-1,2)$, $R(2,2,1)$ و $S(1,2,2)$ مشخص می‌شود. مساحت تصویر بر صفحه xy کدام است؟

گزینه «۳»
 $(\overline{PQ} \times \overline{PS}) \cdot \vec{k} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 7$

تذکره ۴: با توجه به تعریف ضرب داخلی $A \cdot (B \times C) = |A| |B \times C| \cos \theta$ ، و حاصل عبارت فوق برابر حجم جعبه‌ای با وجوه متوازی‌الاضلاع که با اضلاع A , B و C مشخص می‌شود است، مقدار $|B \times C|$ مساحت متوازی‌الاضلاع قاعده و $|C| \cos \theta$ طول ارتفاع وارد از رأس C بر صفحه A , B و C باشد. اگر θ بیش از 90° باشد باید قدر مطلق $A \cdot (B \times C)$ را در نظر گرفت. حاصل ضرب فوق را به خاطر این تعبیر هندسی گاهی حاصل ضرب جعبه‌ای نیز می‌گویند.

ضرب برداری سه بردار (حاصل ضرب سه گانه)

معمولاً حاصل ضربهای $(A \times B) \times C$ و $A \times (B \times C)$ با هم برابر نیستند. ولی با فرمولهای زیر می‌توان حاصل هر یک از آنها را به سادگی به دست آورد.

خواص ضرب برداری سه بردار
 $A \times (B \times C) + B \times (C \times A) + C \times (A \times B) = 0$ (۱)
 اگر $A \times (B \times C) = (A \times B) \times C$ ، آنگاه A , B و C یک مجموعه متعامد را شکل خواهند داد. بنابراین A , B و C یک مجموعه متعامد هستند.

مثال ۱۱: عبارت $(A \times B) \times (C \times D)$ با کدامیک از عبارات زیر همواره برابر است؟

(۱) $(A.C \times D)B + (B.C \times D)A$
 (۲) $(A.C \times D)B - (B.C \times D)A$
 (۳) $(A.B \times C)D + (D.A \times B)C$
 (۴) $(A.B \times C)D + (D.A \times C)C$

پاسخ: گزینه «۲» ابتدا فرض می‌کنیم $V = C \times D$ ، در این صورت طبق تعریف حاصل ضرب سه‌گانه داریم:

$(A \times B) \times V = -V \times (A \times B) = (A.V)B - (B.V)A$

و یا:

$(A \times B) \times (C \times D) = (A.C \times D)B - (B.C \times D)A$

مثال ۱۲: فرض کنید \vec{a} , \vec{b} و \vec{c} سه بردار غیر هم‌صفحه باشند. در این صورت حجم متوازی‌الاضلاع بنا شده بر سه بردار $\vec{c} \times \vec{a}$ و $\vec{b} \times \vec{c}$ و $\vec{a} \times \vec{b}$ کدام است؟

گزینه «۳» حجم متوازی‌السطوح بنا شده بر سه بردار $\vec{c} \times \vec{a}$ و $\vec{b} \times \vec{c}$ و $\vec{a} \times \vec{b}$ برابر است با: $V = |(a \times b) \times (b \times c) \cdot (c \times a)|$

از طرفی:

$(a \times b) \times (b \times c) = (a \cdot b \times c)b - (b \cdot b \times c)a = (a \cdot b \times c)b$

و بنابراین:

$(a \cdot b \times c)b \cdot (c \times a) = (a \cdot b \times c)(b \times c) \cdot a = (a \cdot b \times c)(a \cdot b \times c) = (a \cdot b \times c)^2$

در نتیجه:

$V = (a \cdot b \times c)^2 = (a \times b \cdot c)^2 = |(a \times b) \cdot c|^2$

مثال ۱۳: اگر A برداری یکه باشد، حاصل $A \times (A \times (A \times B))$ برابر است با:

(۱) $(A \cdot B)A$
 (۲) $-A \times B$
 (۳) $(A \cdot B)B$
 (۴) $(A \cdot B)(A \times B)$

پاسخ: گزینه «۲» ابتدا توجه کنید که:

$A \times (A \times B) = (A \cdot B)A - (A \cdot A)B = (A \cdot B)A - B$

بنابراین:

$A \times (A \times (A \times B)) = A \times ((A \cdot B)A - B) = (A \cdot B)(A \times A) - A \times B = (A \cdot B)(0) - A \times B = -A \times B$

استقلال و وابستگی خطی

مجموعه بردارهای $\vec{A}_1, \vec{A}_2, \dots, \vec{A}_n$ را مستقل خطی گوئیم هرگاه به ازای جمیع مقادیر m_j رابطه $\sum_{j=1}^n m_j \vec{A}_j = 0$ ایجاب نماید که همه m_j ها صفر باشند، و وابسته خطی گوئیم هرگاه m_j هائی مخالف صفر وجود داشته باشد که $\sum_{j=1}^n m_j \vec{A}_j = 0$ گردد.

به عبارتی این n بردار را مستقل خطی می‌گوییم. هرگاه نتوان هیچ‌یک از این بردارها را برحسب ترکیب خطی از بقیه بردارها نوشت.

نکته ۶: شرط اینکه سه بردار $\vec{A}(a_1, a_2, a_3)$, $\vec{B}(b_1, b_2, b_3)$, $\vec{C}(c_1, c_2, c_3)$ وابستگی خطی داشته باشند، این است که درمیان

مربوط به این سه بردار برابر صفر باشد یعنی:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = 0$$

مثال ۱۴: اگر سه بردار $\vec{V}_1(1,1,2)$, $\vec{V}_2(a,2,1)$, $\vec{V}_3(2,2,4)$ وابسته خطی باشند، آنگاه a کدام است؟

(۱) ۱
 (۲) ۲
 (۳) $\frac{1}{2}$
 (۴) ۳

پاسخ: گزینه «۳»

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ a & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (1+2+4a) - (6a+2+8) = 0 \Rightarrow a = \frac{1}{2}$$

تذکره ۵: شرط اینکه دو بردار $\vec{A}(a,b)$ و $\vec{B}(c,d)$ وابسته خطی باشند این است که:

$$\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow ad - bc = 0$$

نکته ۷: سه بردار مستقل خطی‌اند، اگر و تنها اگر در یک صفحه نباشند (سه بردار را هم صفحه می‌گوییم. اگر در یک صفحه واقع باشند).
 تعریف ۱: تعداد سطرها یا ستونهای مستقل خطی یک ماتریس A را رتبه ماتریس A می‌گویند و آن را با $r(A)$ یا $\text{rank}(A)$ نشان می‌دهند.
 نکته ۸: اگر A ماتریسی $m \times n$ باشند، آنگاه $r(A) \leq \min(m, n)$.

مثال ۱۵: رتبه ماتریس $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ -1 & -8 & 0 \end{bmatrix}$ کدام است؟

(۱) ۰
 (۲) ۱
 (۳) ۲
 (۴) ۳

پاسخ: گزینه «۳» چون $|A| = 0$ پس رتبه A از ۳ کمتر است (سه سطر ماتریس مستقل نیستند) و از طرفی دو سطر اول و دوم مستقل هستند، پس رتبه ماتریس ۳ می‌باشد.

مثال ۱۶: کدام دسته از بردارهای زیر مستقل خطی‌اند؟

(۱) $\{u, v, u+u\}$
 (۲) $\{u, u+v, u-v\}$
 (۳) $\{u, u \times v, v \times u\}$
 (۴) $\{u, v, u \times v\}$

پاسخ: گزینه «۴» با فرض اینکه u و v دو بردار مستقل باشند، بردار $u \times v$ برداری عمود بر آنهاست، پس برداری مستقل است.

معادله خط

هر خط راست d در فضای R^3 را می‌توان بوسیله نقطه‌ای مانند $A(x_0, y_0, z_0)$ که روی آن قرار دارد و یک بردار مانند $\vec{V} = (p, q, r)$ که موازی d است و بردار هادی خط نامیده می‌شود مشخص نمود.
 معادله خط d را می‌توان به دو شکل پارامتری و متقارن نمایش داد.

معادلات متقارن d : $(p, q, r \neq 0)$

$$d: \frac{x-x_0}{p} = \frac{y-y_0}{q} = \frac{z-z_0}{r}$$

معادلات پارامتری d :

$$d: \begin{cases} x - x_0 = pt \\ y - y_0 = qt \\ z - z_0 = rt \end{cases}$$

مثال ۱۷: معادله خط گذرا از نقطه $A(1, -1, 0)$ و موازی با بردار $\vec{V} = \vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}$ کدام است؟

(۱) $\frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z}{2}$ (۲) $x-1 = -y-1 = \frac{z}{2}$ (۳) $x-1 = y+1 = z$ (۴) $\frac{x-1}{2} = y+1 = z$

پاسخ: گزینه «۲» $\frac{(x-1)}{2} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-0}{2} \Rightarrow x-1 = -1-y = \frac{z}{2}$

تذکره: اگر یکی از مقادیر q, p یا 2 صفر باشد، در این حالت صورت کسر را مساوی صفر قرار می‌دهیم و خط با یکی از صفحات مختصات موازی است.

مثال ۱۸: معادله خط گذرنده از دو نقطه $A(2, 2, 2)$ و $B(3, 2, 0)$ را حل بیابید؟

پاسخ: بردارهای خط موردنظر را می‌توان بردار AB در نظر گرفت، بنابراین: $\vec{AB} = (1, 0, -2) \Rightarrow \frac{x-2}{1} = \frac{y-2}{0} = \frac{z-2}{-2}, y=2$

نکته ۹: برای به دست آوردن فاصله نقطه دلخواه P از خط d ، ابتدا یک نقطه دلخواه مانند P_0 روی خط در نظر می‌گیریم، اگر برداری هادی خط d را \vec{u} فرض کنیم در این صورت: $\text{فاصله نقطه } P \text{ از } d = \frac{|\vec{PP}_0 \times \vec{u}|}{|\vec{u}|}$

مثال ۱۹: فاصله نقطه $P(-1, 2, -1)$ از خط $\begin{cases} x = 2t + 1 \\ y = 1 \\ z = t \end{cases}$ چقدر است؟

(۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

پاسخ: گزینه «۲» بردار هادی خط $u = (2, 0, 1)$ است و نقطه دلخواه $P_0(1, 1, 0)$ را نیز روی خط در نظر می‌گیریم، در این صورت:

$\vec{PP}_0 = (2, -2, +1) \Rightarrow \vec{PP}_0 \times \vec{u} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -2i + 4k \Rightarrow \text{فاصله} = \frac{|\vec{PP}_0 \times \vec{u}|}{|\vec{u}|} = \frac{\sqrt{4+16}}{\sqrt{4+1}} = \frac{\sqrt{20}}{\sqrt{5}} = 2$

وضعیت دو خط نسبت به هم

(۱) اگر دو خط راست d و d' با بردارهای هادی $\vec{V} = (a, b, c)$ و $\vec{V}' = (a', b', c')$ مفروض باشند شرط اینکه دو خط d و d' با هم موازی باشند آنستکه بردارهای هادی دو خط با هم موازی باشند.
(۲) برای اینکه دو خط d و d' با بردارهای هادی $V(a, b, c)$ و $V'(a', b', c')$ متقاطع باشند، لازم است $PP' \cdot (V \times V') = 0$ باشد که P و P' به ترتیب نقاط دلخواه روی دو خط d و d' هستند. و اگر حاصل ضرب مختلط فوق برابر صفر نشود، دو خط متناظر هستند.

مثال ۲۰: دو خط $\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-3}{4}$ و $\frac{x-2}{3} = \frac{y-2}{4} = \frac{z-4}{5}$ نسبت به هم چه وضعی دارند؟

(۱) موازی (۲) متناظر (۳) منطبق (۴) متقاطع

پاسخ: گزینه «۴» دو نقطه $P(2, 2, 4)$ و $P'(1, 2, 3)$ به ترتیب روی دو خط داده شده قرار دارند و $V(2, 3, 4)$ و $V'(2, 3, 4)$ بردارهای هادی دو خط موردنظر هستند، بنابراین:

$PP' = (-1, -1, -1) \Rightarrow PP' \cdot (V \times V') = \begin{vmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 0$

پس دو خط متقاطع هستند (توجه کنید که بردارهای V و V' موازی نیستند، پس دو خط موازی یا منطبق نخواهند بود).

نکته ۱۰: اگر دو خط d و d' متناظر باشند، خطی وجود دارد که هر دو خط d و d' را قطع می‌کند و بر دو خط عمود است، این خط را عمود مشترک دو خط d و d' می‌گویند. چون طبق تعریف عمود مشترک بر دو خط عمود است، لذا بردارهای آن حاصل ضرب خارجی بردارهای هادی d و d' خواهد بود، و می‌توان به سادگی نشان داد که طول عمود مشترک یا همان فاصله دو خط d و d' برابر است با:

طول عمود مشترک $= \frac{|PP' \cdot (V \times V')|}{|V \times V'|}$

مثال ۲۱: کوتاهترین فاصله بین دو خط $\frac{x-1}{2} = \frac{y}{3} = z$ و $\frac{x-1}{3} = y = \frac{z-2}{2}$ را بیابید.

پاسخ: بردارهای هادی دو خط به صورت $V(2, 3, 1)$ و $V'(3, 1, 2)$ می‌باشند و نقاط $P(0, 0, 0)$ و $P'(1, 0, 2)$ نقاط دلخواهی روی دو خط هستند، بنابراین:

$PP' = (-1, 0, -2) \Rightarrow PP' \cdot (V \times V') = \begin{vmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 26$

$V \times V' = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = -5i + j + 7k \Rightarrow |V \times V'| = \sqrt{25+1+49} = 5\sqrt{3}$

پس کوتاهترین فاصله بین دو خط $\frac{26}{5\sqrt{3}}$ یا $\frac{26\sqrt{3}}{15}$ می‌باشد.

زاویه بین دو خط: زاویه بین دو خط d و d' در فضای R^3 همان زاویه بین بردارهای هادی آنها می‌باشد.

معادله صفحه

اگر یک نقطه مانند $M(x_0, y_0, z_0)$ در صفحه p و $\vec{N} = (a, b, c)$ بردار نرمال صفحه p باشد، آنگاه معادله صفحه p بصورت زیر خواهد بود.

$p: a(x-x_0) + b(y-y_0) + c(z-z_0) = 0$ (۱)

$p: ax + by + cz - (ax_0 + by_0 + cz_0) = 0$

اگر فرض کنیم $d = -(ax_0 + by_0 + cz_0)$ (که d عددی ثابت است) آنگاه: $p: ax + by + cz + d = 0$

مثال ۲۲: معادله صفحه‌ای که از نقطه $A(1, 2, 2)$ عمود بر بردار $\vec{N} = \vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k}$ می‌گذرد کدام است؟

(۱) $p: x - y + 2z - 3 = 0$ (۲) $x + y - 2z - 3 = 0$ (۳) $x - y + 2z + 3 = 0$ (۴) $x + y - 2z + 3 = 0$

پاسخ: گزینه «۴» $p: ax + by + cz + d = 0 \Rightarrow p: x + y - 2z + d = 0$

$\xrightarrow{A \in P} 1 + 2 - 2(2) + d = 0 \rightarrow d = 3 \Rightarrow p: x + y - 2z + 3 = 0$

فاصله یک نقطه از یک صفحه

فاصله نقطه‌ای مانند $M(x_0, y_0, z_0)$ از صفحه به معادله $ax + by + cz + d = 0$ از رابطه زیر بدست می‌آید:

$d = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$

مثال ۲۳: فاصله نقطه $A(1, 2, 2)$ از صفحه $P: 2x - y + 2z + 9 = 0$ کدام است؟

(۱) ۵ (۲) $\frac{\sqrt{17}}{3}$ (۳) $\sqrt{5}$ (۴) $\frac{15}{2\sqrt{2}}$

پاسخ: گزینه «۱» $d = \frac{|2 \times 1 + 2 \times (-1) + 2 \times 2 + 9|}{\sqrt{4+1+4}} = \frac{15}{3} = 5$

وضعیت دو صفحه نسبت به هم

اگر $p: ax + by + cz + d = 0$ و $p': a'x + b'y + c'z + d' = 0$ معادلات دو صفحه باشند:

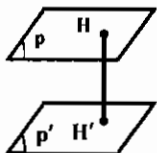
۱) $P \parallel P' \Leftrightarrow \frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$ ۲) $P = P' \Leftrightarrow \frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} = \frac{d}{d'}$ ۳) $P \perp P' \Leftrightarrow aa' + bb' + cc' = 0$

زاویه بین دو صفحه: زاویه بین بردارهای نرمال دو صفحه همان زاویه بین دو صفحه خواهد بود.

فاصله دو صفحه موازی از هم

اگر $P: ax + by + cz + d = 0$ و $P': ax + by + cz + d' = 0$ دو صفحه موازی باشند فاصله این دو صفحه از رابطه زیر بدست خواهد آمد:

$HH' = \frac{|d - d'|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$



مثال ۲۴: اگر دو صفحه $P: (2-a)x + y - 2z = 2$ و $P': 2x + (b+1)y - 2z = 1$ با هم موازی باشند آنگاه حاصل $\frac{2a-b+2}{3}$ کدام است؟

(۱) $\frac{2}{5}$ (۲) $\frac{10}{3}$ (۳) $\frac{14}{3}$ (۴) ۱

پاسخ: گزینه «۴»
 $\frac{2-a}{2} = \frac{1}{b+1} = \frac{-2}{-2} \Rightarrow \begin{cases} b+1=1 \\ 2-a=2 \end{cases} \Rightarrow a=b=0 \Rightarrow \frac{2a-b+2}{3} = \frac{2}{3} = 1$

نکته ۱۱: اگر زاویه بین بردار نرمال صفحه و بردار هادی خط α باشد، آنگاه زاویه بین خط و صفحه مربوطه $\alpha - \frac{\pi}{2}$ خواهد بود.

مثال ۲۵: خط به معادله $\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-3}{4}$ ، صفحه به معادله $x+y+z=15$ را در نقطه (x_0, y_0, z_0) قطع کرده است. x_0 کدام است؟

(۱) -۳ (۲) -۲ (۳) ۲ (۴) ۳

پاسخ: گزینه «۴» نقطه برخورد خط و صفحه روی هر دو آنها واقع است، بنابراین:

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-3}{4} \Rightarrow y = \frac{3}{2}x + \frac{1}{2}, z = 2x + 1$$

$$x + \frac{3}{2}x + \frac{1}{2} + 2x + 1 = 15 \Rightarrow x = 3$$

با جایگذاری در معادله صفحه خواهیم داشت:

مثال ۲۶: خط به معادله $\frac{2x-1}{3} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+1}{2}$ نسبت به صفحه $4x+4y-21z=1$ چه وضعیتی دارد؟

(۱) در صفحه (۲) عمود بر صفحه (۳) موازی صفحه (۴) زاویه با صفحه $\frac{\pi}{3}$

پاسخ: گزینه «۳» بردار $V(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3})$ بردار هادی خط و بردار $N(4, 4, -21)$ بردار نرمال صفحه است و $N \cdot V = 0$ ، پس خط موازی

صفحه است. و چون نقطه $(\frac{1}{3}, 1, -\frac{1}{3})$ روی خط قرار دارد و در معادله صفحه صدق نمی‌کند پس خط در صفحه قرار ندارد.

مثال ۲۷: معادله صفحه‌ای که از فصل مشترک دو صفحه $D_1: x+y+z=6$ و $D_2: 2x+2y+2z+5=0$ و نقطه $P(1,1,1)$ می‌گذرد عبارت است از:

(۱) $20x + 23y + 26z - 69 = 0$ (۲) $20x - 22y + 26z - 69 = 0$
 (۳) $20x + 23y - 26z + 69 = 0$ (۴) $20x + 22y + 26z + 69 = 0$

پاسخ: گزینه «۱»

روش اول: معادله دسته صفحاتی که از فصل مشترک D_1 و D_2 عبور کند به صورت زیر است:

$$2x + 2y + 4z + 5 + k(x + y + z - 6) = 0$$

و چون صفحه مورد نظر از $P(1,1,1)$ عبور می‌کند، لذا:

$$2 + 2 + 4 + 5 + k(1 + 1 + 1 - 6) = 0 \Rightarrow k = \frac{14}{3}$$

$$\Rightarrow 20x + 23y + 26z + 5 + \frac{14}{3}(x + y + z - 6) = 0 \Rightarrow 20x + 23y + 26z - 69 = 0$$

روش دوم: در بین گزینه‌ها تنها گزینه‌ای که نقطه $P(1,1,1)$ در آن صدق می‌کند گزینه (۱) است.

مثال ۲۸: دو صفحه به معادله‌های $2x + y - z = 1$ و $x + 2y + z = 1$ نسبت به هم چه وضعی دارند؟

(۱) بر هم عمودند. (۲) با هم موازی‌ند.

(۳) یکدیگر را در زاویه 45° قطع می‌کنند. (۴) یکدیگر را در زاویه 60° قطع می‌کنند.

پاسخ: گزینه «۴» بردار نرمال دو صفحه به ترتیب $N(2, 1, -1)$ و $N'(1, 2, 1)$ می‌باشند. اگر زاویه بین دو صفحه را θ فرض کنیم:

$$\cos \theta = \frac{N \cdot N'}{\|N\| \|N'\|} = \frac{1 \times 2 + 2 \times 1 + 1 \times (-1)}{\sqrt{4+1+1} \times \sqrt{1+4+1}} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \Rightarrow \theta = 60^\circ$$

مثال ۲۹: فاصله عمودی بین دو صفحه $4x - 8y - z = 6$ و $4x - 8y - z + 9 = 0$ کدام است؟

(۱) $\frac{3}{5}$ (۲) $\frac{2}{2}$ (۳) $\frac{2}{3}$ (۴) $\frac{5}{3}$

پاسخ: گزینه «۴» بردار نرمال دو صفحه یکی است، پس دو صفحه موازی یکدیگرند و با توجه به فرمول فاصله دو صفحه موازی داریم:

$$\text{فاصله} = \frac{|9 - (-6)|}{\sqrt{4^2 - 8^2 + 1}} = \frac{5}{3}$$

مثال ۳۰: اگر نقطه $(1, 0, -1)$ مرکز یک مکعب و صفحه $x - 2y + 2z = 3$ یکی از وجوه آن باشد، حجم مکعب چقدر است؟

(۱) $\frac{8}{27}$ (۲) $\frac{64}{27}$ (۳) $\frac{512}{27}$ (۴) $\frac{27}{8}$

پاسخ: گزینه «۳» ابتدا فاصله نقطه داده شده را از صفحه موردنظر به دست می‌آوریم:

$$d = \frac{|1 \times 1 + (-2) \times 0 + 2(-1) - 3|}{\sqrt{1+4+4}} = \frac{4}{3}$$

و با توجه به آنکه فاصله مرکز مکعب از هر یک از وجوه آن، نصف طول یال مکعب است، بنابراین حجم مکعب برابر است با:

$$V = \left(2 \times \frac{4}{3}\right)^3 = \frac{512}{27}$$

مثال ۳۱: حجم چهار وجهی به رئوس $A(1, 2, 0)$ ، $B(2, -1, 3)$ ، $C(-2, 2, -1)$ و $D(-1, 1, 2)$ کدام است؟

(۱) ۵ (۲) ۶ (۳) ۷ (۴) ۴

پاسخ: گزینه «۴» ابتدا توجه کنید که:

$$\overline{AB} = (1, -4, 3), \overline{AC} = (-3, -1, -1), \overline{AD} = (-2, -2, 2)$$

$$\frac{1}{6} \overline{AB} \cdot (\overline{AC} \times \overline{AD}) = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} 1 & -4 & 3 \\ -3 & -1 & -1 \\ -2 & -2 & -1 \end{vmatrix} = -4 \Rightarrow V = 4$$

بنابراین:

ماتریس

آرایی از اعداد حقیقی به صورت مقابل $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$ را یک ماتریس و اعداد $a_{11}, a_{12}, \dots, a_{mn}$ را درایه‌ها یا عضوهای

ماتریس A می‌نامند. در حالت کلی یک درایه از A را بصورت a_{ij} نشان می‌دهیم که i نماینده سطر و j نماینده ستون است که این عضو در محل تلاقی آنها واقع می‌باشد، مثلاً a_{11} درایه‌ای در تلاقی سطر اول و ستون اول و a_{24} درایه‌ای در تلاقی سطر دوم و ستون چهارم می‌باشند. a_{mn} درایه‌ای در تلاقی سطر m ام و ستون n ام است. ماتریس A که دارای m سطر و n ستون است، یک ماتریس $m \times n$ (ماتریس بنا مرتبه $m \times n$) نامیده می‌شود، هرگاه در این ماتریس $m = n$ باشد، آنگاه A را یک ماتریس مربعی مرتبه n می‌نامیم. در یک ماتریس مربعی مرتبه n ، عضوهای $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ را اعضای قطر اصلی ماتریس می‌نامند.

برای مثال ماتریس $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & 5 \end{bmatrix}$ یک ماتریس مربعی 3×3 (مرتبه ۳) می‌باشد که عضوهای ۱، ۲، ۳ و ۵ درایه‌های قطر اصلی را تشکیل

می‌دهند.

ماتریس قطری:

ماتریس مربع A را قطری می‌نامیم هرگاه، درایه‌های طرفین قطر اصلی آن صفر باشد. به عنوان مثال ماتریسهای $\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$

ماتریسهای قطری هستند.

ماتریس هماتی:

ماتریس مربعی را که درایه‌های قطر اصلی آن یک و سایر درایه‌های آن صفر باشد، ماتریس هماتی (واحد) می‌نامیم و آنرا با I_n یا I نمایش می‌دهیم.

ماتریس‌های مساوی: دو ماتریس را مساوی گوئیم هرگاه، درایه‌های آنها نظیر به نظیر با هم برابر باشند.

ماتریس‌های هم مرتبه: دو ماتریس را هم مرتبه گوئیم هرگاه تعداد سطرها و ستونهای آنها با هم برابر باشند.

با توجه به تعریف فوق اگر دو ماتریس هم مرتبه نباشند، می‌توان نتیجه گرفت آنها با هم مساوی نیستند.

ماتریس صفر: هرگاه تمام درایه‌های یک ماتریس صفر باشد، آن را ماتریس صفر می‌نامند و با نماد $\bar{0}$ نمایش می‌دهند.

قرینه ماتریس: قرینه ماتریس A را که بصورت $-A$ نشان می‌دهیم، ماتریسی است که از قرینه کردن تک‌تک درایه‌های ماتریس A به دست می‌آید.

مثال ۳۲: قرینه ماتریس $A = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ به صورت $-A = \begin{bmatrix} +1 & +2 \\ -2 & -4 \end{bmatrix}$ می‌باشد.

جمع ماتریسها و خواص مربوط به آن

حاصل جمع و تفاضل دو ماتریس:

برای جمع یا تفریق دو ماتریس هم‌مرتبه کافی است درایه‌های نظیر به نظیر دو ماتریس را با هم جمع یا تفریق کنیم، توضیح اینکه مرتبه ماتریس حاصل جمع (یا تفاضل) همان مرتبه ماتریسهای اولیه می‌باشد.

مثال ۳۳: حاصل جمع دو ماتریس $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 6 & 3 \\ 7 & 6 \end{bmatrix}$ را بدست آورید.

$$C = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6 & 3 \\ 7 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1+6 & 1+3 \\ 2+7 & 3+6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 9 & 9 \end{bmatrix}$$

خواص جمع ماتریسها:

- ۱) $A+B=B+A$ (جابجایی)
- ۲) $\bar{0}+A=A$ (عضو خنثی)
- ۳) $A+(-A)=\bar{0}$ (عضو قرینه)
- ۴) $A+C=B+C \Leftrightarrow A=B$ (حذفی جمع)
- ۵) $A+(B+C)=(A+B)+C$ (شرکت پذیری)

ضرب یک عدد در یک ماتریس (ضرب اسکالر):

برای ضرب عدد k در ماتریس A باید عدد k را در تک‌تک درایه‌های ماتریس A ضرب کنیم، و ماتریس حاصل را با kA نمایش می‌دهیم.

مثال ۳۴: $4 \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 8 \\ 12 & 4 \end{bmatrix}$

* تذکر ۷: اگر A و B دو ماتریس و r و k اعداد حقیقی باشند، روابط زیر را خواهیم داشت:

- ۱) $r(A+B)=rA+rB$
- ۲) $(r+k)A=rA+kA$
- ۳) $r(kA)=(rk)A$
- ۴) $I \times A=A$
- ۵) $\bar{0} \times A=\bar{0}$
- ۶) $kA=Ak$

ضرب ماتریسها:

هرگاه A و B دو ماتریس باشند، ماتریس $A \times B$ موجود است هرگاه، تعداد ستونهای ماتریس A برابر تعداد سطرهاى ماتریس B باشد و تعداد سطرهاى ماتریس $A \times B$ برابر با تعداد سطرهاى ماتریس A و تعداد ستونهای آن برابر تعداد ستونهای ماتریس B خواهد بود.

$$A_{m \times n} \times B_{n \times p} = C_{m \times p}$$

به عبارت دیگر داریم:

برای تعیین درایه C_{ij} در ماتریس حاصل ضرب C باید سطرهاى A از ماتریس A را در ستون j ام ماتریس B ضرب کنیم.

مثال ۳۵: هرگاه $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 2 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 4 & 3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ ، ماتریس‌های $A \times B$ و $B \times A$ را بدست آورید.

$$A \times B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 2 \end{bmatrix}_{2 \times 3} \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 4 & 3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}_{3 \times 2} = \begin{bmatrix} 1 \times 2 + 2 \times 4 + 0 \times 1 & 1 \times (-2) + 2 \times 3 + 0 \times 0 \\ 2 \times 2 + (-1) \times 4 + 2 \times 1 & 2 \times (-2) + (-1) \times 3 + 2 \times 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 4 \\ 4 & -9 \end{bmatrix}_{2 \times 2}$$

$$B \times A = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 4 & 3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}_{3 \times 2} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 2 \end{bmatrix}_{2 \times 3} = \begin{bmatrix} 2 \times 1 - 2 \times 2 & 2 \times 2 - 2 \times (-1) & 2 \times 0 - 2 \times 2 \\ 4 \times 1 + 3 \times 2 & 4 \times 2 + 3 \times (-1) & 4 \times 0 + 3 \times 2 \\ 1 \times 1 + 0 \times 2 & 1 \times 2 + 0 \times (-1) & 1 \times 0 + 0 \times 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 6 & -4 \\ 10 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}_{3 \times 3}$$

ملاحظه می‌شود که ضرب ماتریسها دارای خاصیت جابجایی نیست.

خواص ضرب ماتریسها:

۱) حاصل ضرب ماتریسها در حالت کلی دارای خاصیت جابجایی نیست.

۲) اگر حاصل ضرب دو ماتریس صفر باشد، نمی‌توان نتیجه گرفت که یکی از دو ماتریس برابر صفر است.

مثال ۳۶: اگر $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ باشد داریم:

$$A \times B = \begin{bmatrix} 2 \times 1 + 0 \times 3 & 2 \times 0 + 0 \times 2 \\ -3 \times 1 + 0 \times 3 & -3 \times 0 + 0 \times 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}$$

۳) قانون حذف در ماتریسها برقرار نیست، یعنی از تساوی $AB=AC$ نمی‌توان نتیجه گرفت که $B=C$ است.

۴) ضرب ماتریسها شرکت پذیر است: $(AB)C = A(BC)$

۵) ضرب ماتریسها نسبت به عمل جمع دارای خاصیت پخش است:

$$\begin{cases} A(B+C) = AB+AC \\ (B+C)A = BA+CA \end{cases}$$

به توان رساندن یک ماتریس مربعی:

هرگاه A یک ماتریس مربعی باشد $AA = A^2$, $AA^2 = A^3$, ..., $AA^{n-1} = A^n$ ، می‌باشد ($n \in \mathbb{N}$).

نکته ۱۲: اگر $A = \begin{bmatrix} 0 & k \\ k & 0 \end{bmatrix}$ آنگاه:

$$\begin{cases} A^n = \begin{bmatrix} k^n & 0 \\ 0 & k^n \end{bmatrix} & (n \text{ زوج}) \\ A^n = \begin{bmatrix} 0 & k^n \\ k^n & 0 \end{bmatrix} & (n \text{ فرد}) \end{cases}$$

نکته ۱۳: اگر A یک ماتریس قطری باشد، برای محاسبه ماتریس A^n کافی است درایه‌های قطر اصلی ماتریس A را به توان n برسانیم.

اگر $A = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}$ باشد آنگاه:

$$A^n = \begin{bmatrix} (ab)^{\frac{n}{2}} & 0 \\ 0 & (ab)^{\frac{n}{2}} \end{bmatrix} \quad (n \text{ زوج باشد}), \quad A^n = \begin{bmatrix} 0 & a^{\frac{n-1}{2}} \cdot b^{\frac{n-1}{2}} \\ a^{\frac{n-1}{2}} \cdot b^{\frac{n-1}{2}} & 0 \end{bmatrix} \quad (n \text{ فرد باشد})$$

ماتریس ترانهاده:

هرگاه در ماتریس $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ جای سطرها و ستونها را عوض کنیم، ماتریس دیگری از مرتبه $n \times m$ بدست می‌آید که آنرا ترانهاده ماتریس A می‌نامیم و با A^t یا A' نمایش می‌دهیم.

مثال ۳۷: ماتریس ترانهاده $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$ به فرم $A' = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix}$ خواهد بود.

ویژگیهای عمل ترانهاده کردن در ماتریسها:

فرض می‌کنیم A و B دو ماتریس ضرب پذیر باشند و $\lambda \in \mathbb{R}$ ، در این صورت روابط زیر را داریم:

- ۱) $(A')' = A$
- ۲) $(AB)' = B'A'$
- ۳) $(\lambda A)' = \lambda A'$
- ۴) $(A')^n = (A^n)'$
- ۵) $(A \pm B)' = A' \pm B'$

ماتریسهای بالا مثلثی و پائین مثلثی:

ماتریس مربعی A مرتبه n ، را ماتریس بالا مثلثی گویند، هرگاه تمام درایه‌های واقع در زیر قطر اصلی صفر باشند و ماتریس A را پائین مثلثی گویند هرگاه تمام درایه‌های واقع در بالای قطر اصلی صفر باشد.

برای مثال ماتریس $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$ را ماتریس بالا مثلثی و ماتریس $B = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ را ماتریس پایین مثلثی گویند.

تذکره ۸: ماتریس همسانی (واحد) ماتریس بالا مثلثی، پائین مثلثی و قطری می‌باشد.

ماتریس متقارن:

ماتریس مربعی $A = [a_{ij}]_{n \times n}$ را متقارن گویند، هرگاه برای هر i و j داشته باشیم: $a_{ij} = a_{ji}$

به بیان دیگر ماتریس مربع A را متقارن می‌نامند، هرگاه $A = A'$ باشد. برای مثال ماتریس $A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 1 & 5 & 0 \\ 2 & 0 & 6 \end{bmatrix}$ را یک ماتریس متقارن گویند.

ماتریس پاد متقارن:

ماتریس مربعی $A = [a_{ij}]_{n \times n}$ را پاد متقارن گویند، هرگاه برای هر i و j داشته باشیم: $a_{ij} = -a_{ji}$. به بیان دیگر ماتریس مربع A را پاد

متقارن گویند هرگاه $A = -A'$ باشد. برای مثال ماتریس $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 4 \\ -2 & -4 & 0 \end{bmatrix}$ را یک ماتریس پاد متقارن گویند.

تذکره ۹: ماتریس صفر، ماتریس قطری، اسکالر، بالا مثلثی، پائین مثلثی، متقارن و پاد متقارن می‌باشند.

تذکره ۱۰: ترانهاد ماتریس بالا مثلثی، پائین مثلثی بوده و ترانهاد ماتریس پائین مثلثی، بالا مثلثی می‌باشد.

تذکره ۱۱: ماتریس‌های قطری و همسانی متقارن هستند.

تذکره ۱۲: اگر A ماتریس مربعی باشد، ماتریس $A + A'$ متقارن است.

تذکره ۱۳: مجموع و تفاضل دو ماتریس متقارن هم مرتبه، ماتریسی متقارن است.

تذکره ۱۴: در ماتریس پاد متقارن عناصر روی قطر اصلی همگی صفر هستند.

تذکره ۱۵: اگر A ماتریس مربعی باشد، ماتریس $A - A'$ پاد متقارن است.

تذکره ۱۶: مجموع و تفاضل دو ماتریس پاد متقارن هم مرتبه، ماتریس پاد متقارن است.

دترمینان

دترمینان ماتریس A را $\det A$ یا $|A|$ نمایش می‌دهیم و فقط برای ماتریس‌های مربعی تعریف می‌شود و عددی حقیقی می‌باشد.

دترمینان هر ماتریس 2×2 مانند $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ را بصورت روبرو تعریف می‌کنیم: $\det A = |A| = ad - bc$

دترمینان ماتریسهای 3×3 :

برای هر ماتریس $A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$ دترمینان A را بصورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$|A| = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = a \begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} - b \begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix} + c \begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix}$$

هر یک از دترمینانهای سمت راست به این ترتیب بدست می‌آیند که در دترمینان اصلی سطر و ستونی که شامل ضریب آن دترمینان است حذف می‌شود:

$$|A| = a \begin{vmatrix} a & -b & -c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} - b \begin{vmatrix} a & -b & -e \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} + c \begin{vmatrix} a & -b & -c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$$

برای تعیین علامت دترمینانهای سمت راست باید از دستور $(-1)^{i+j}$ استفاده کنیم که در آن i نماینده سطر و j نماینده ستون است که ضریب آن

دترمینان در آن قرار دارد، برای مثال a در سطر اول و ستون اول قرار دارد پس $(-1)^{1+1} = 1$ لذا علامتش مثبت خواهد بود، b در سطر اول و

ستون دوم قرار دارد، پس $(-1)^{1+2} = -1$ لذا علامتش منفی خواهد بود و c در سطر اول و ستون سوم قرار دارد پس $(-1)^{1+3} = 1$ لذا علامتش مثبت خواهد بود.

مثال ۳۸: دترمینان ماتریس $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & - \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ را محاسبه کنید.

$$|A| = 2 \times (2 \times 1 - 1 \times 2) - 1 \times (1 \times 1 - 3 \times 1) + (-) \times (2 \times 1 - 2 \times 3) = 2$$

دستور ساروس برای محاسبه دترمینان ماتریس‌های مرتبه ۳:

برای محاسبه دترمینان ماتریس $A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$ با روش ساروس بصورت زیر عمل می‌کنیم که دترمینان ماتریس فوق را عیناً در کنار خودش

قرار می‌دهیم و حاصلضرب قطرهای فرعی را از حاصلضرب قطرهای اصلی کم می‌کنیم:

$$|A| = \begin{vmatrix} a & b & c & a & b & c \\ d & e & f & d & e & f \\ g & h & i & g & h & i \end{vmatrix} = (aei + bfg + cdh) - (ceg + bdi + afh)$$

مثال ۳۸: دترمینان ماتریس $A = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \\ -2 & -3 & -1 \end{bmatrix}$ را با دو روش محاسبه کنید.

روش اول: $|A| = (-1)^{1+1} \times 5 \times (1 \times (-1) - 4 \times (-3)) + (-1)^{1+2} \times 2 \times (2 \times (-1) - 4 \times (-2)) + (-1)^{1+3} \times 3 \times (2 \times (-3) - 1 \times (-2)) = 31$

روش دوم: $\begin{vmatrix} 5 & 2 & 3 & 5 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 & 2 & 1 & 4 \\ -2 & -3 & -1 & -2 & -3 & -1 \end{vmatrix} =$

$$[(5 \times 1 \times (-1)) + (2 \times 4 \times (-2)) + (3 \times 2 \times (-3))] - [(3 \times 1 \times (-2)) + (2 \times 2 \times (-1)) + (5 \times 4 \times (-3))] = -29 + 70 = 31$$

خواص دترمینان

(۱) دترمینان هر ماتریس قطری، بالا مثلثی و پائین مثلثی عبارتست از حاصلضرب درایه‌های موجود روی قطر اصلی آن ماتریس.

(۲) اگر تمام عناصر یک سطر یا ستون از ماتریسی برابر صفر باشد، دترمینان آن ماتریس برابر صفر است.

(۳) دترمینان ماتریس A با دترمینان ترانهاد آن برابر است: $|A| = |A'|$

(۴) اگر کلیه عناصر یک سطر یا یک ستون ماتریسی در عدد ثابت C ضرب شوند، آنگاه مقدار دترمینان در C ضرب می‌شود.

(۵) اگر در یک دترمینان جای دو سطر یا دو ستون را عوض کنیم، مقدار دترمینان در (-1) ضرب می‌شود.

(۶) اگر یک سطر یا ستون در یک ماتریس ضریبی از یک سطر یا ستون دیگر باشد، (ویا ماتریس دارای دو سطر یا دو ستون مانند یکدیگر باشد) آنگاه حاصل دترمینان برابر صفر است.

(۷) اگر مضربی از یک سطر یا یک ستون دترمینان را به سطر یا ستون دیگر اضافه کنیم، مقدار دترمینان تغییر نمی‌کند.

(۸) اگر A و B دو ماتریس قابل ضرب کردن در یکدیگر باشند آنگاه: $|A \cdot B| = |A| \cdot |B| = |B| \cdot |A|$

(۹) اگر کلیه درایه‌های ماتریس مرتبه n ، در عدد C ضرب شود دترمینان آن در C^n ضرب می‌شود.

ماتریس همسازه

دترمینان کهاد، ماتریس همسازه و ماتریس الحاقی:

در ماتریس A ، ماتریس کهاد نظیر عضو a_{ij} ، ماتریسی است که از حذف سطر i ام و ستون j ام ماتریس A ایجاد می‌شود و آن را با نماد M_{ij} نشان

می‌دهیم و اگر دترمینان کهاد عضو a_{ij} را در $(-1)^{i+j}$ ضرب کنیم، همسازه نظیر عضو a_{ij} بدست می‌آید که با Δ_{ij} نمایش می‌دهیم، ماتریس

همسازه $N = [\Delta_{ij}]$ ماتریسی است که در ماتریس A به جای هر عنصر a_{ij} همسازه نظیر همان عضو را قرار دهیم، ترانهاد ماتریس همسازه را

ماتریس الحاقی می‌نامند و آن را با N' یا N^1 نشان می‌دهند.

مثال ۳۹: ماتریس همسازه و الحاقی ماتریس $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$ را بدست آورید:

$$\begin{aligned} \Delta_{11} &= (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} = -3, & \Delta_{21} &= (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} = 6 \\ \Delta_{12} &= (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} = 6, & \Delta_{22} &= (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} = 11 \\ \Delta_{13} &= (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} = -3, & \Delta_{23} &= (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} = 6 \\ \Delta_{31} &= (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = -3, & \Delta_{32} &= (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} = 6 \\ \Delta_{33} &= (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = -3 \end{aligned} \Rightarrow N = \begin{bmatrix} -3 & 6 & -3 \\ 6 & -11 & 6 \\ -3 & 6 & -3 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow N' = N = \begin{bmatrix} -3 & 6 & -3 \\ 6 & -11 & 6 \\ -3 & 6 & -3 \end{bmatrix}$$

ماتریس وارون (معکوس) یک ماتریس مرتبه n

وارون ماتریس A را با A^{-1} نشان می‌دهیم و همواره داریم: $A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = I$ شرط لازم و کافی برای آنکه ماتریس A دارای وارون باشد آنست که $|A| \neq 0$ باشد. بطور کلی برای محاسبه وارون ماتریس A از رابطه زیر استفاده می‌کنیم:

N' : ماتریس الحاقی A می‌باشد.

$|A|$: دترمینان ماتریس A می‌باشد.

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot N'$$

دستور عملی برای محاسبه وارون ماتریس 2×2 :

وارون هر ماتریس 2×2 به فرم کلی $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ به صورت مقابل می‌باشد:

مثال ۴۰: ماتریس معکوس $A = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ را بدست آورید.

$$A^{-1} = \frac{1}{(3 \times -1) - (4 \times 1)} \begin{bmatrix} -1 & -4 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} = \frac{-1}{-7} \begin{bmatrix} -1 & -4 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{7} & \frac{4}{7} \\ \frac{1}{7} & \frac{-3}{7} \end{bmatrix}$$

مثال ۴۱: وارون ماتریس $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$ را بدست آورید.

$$|A| = -9, N' = \begin{bmatrix} -3 & -3 & 0 \\ -3 & 0 & 3 \\ -3 & 3 & -3 \end{bmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{-1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{-1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

مثال ۴۲: وارون ماتریس $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 6 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$ را حساب کنید.

$$A \text{ همسازه } N = \begin{bmatrix} \Delta_{11} & \Delta_{12} & \Delta_{13} \\ \Delta_{21} & \Delta_{22} & \Delta_{23} \\ \Delta_{31} & \Delta_{32} & \Delta_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -16 & 6 & -1 \\ 8 & -2 & -1 \\ 8 & -6 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow A \text{ الحاقی } = N' = \begin{bmatrix} -16 & 8 & 8 \\ 6 & -2 & -6 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 6 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 1(2-18) - 2(0-6) + 4(0-1) = -8$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} N' = -\frac{1}{8} \begin{bmatrix} -16 & 8 & 8 \\ 6 & -2 & -6 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -\frac{3}{4} & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & \frac{-1}{8} \end{bmatrix}$$

طبق دستورالعمل داریم:

خواص وارون یک ماتریس:

(۱) وارون یک ماتریس در صورت وجود منحصر به فرد است. $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ (۴)

(۲) $(A^{-1})^{-1} = A$ (۵) اگر A معکوس‌پذیر باشد، A^n نیز معکوس‌پذیر است.

(۳) $|A^{-1}| = |A|^{-1} = \frac{1}{|A|}$ (۶) $AB = BA \Leftrightarrow A^{-1}B^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

(۷) معکوس هر ماتریس بالا مثلثی یک ماتریس پائین مثلثی می‌باشد و بالعکس.

(۸) معکوس هر ماتریس قطری A یک ماتریس قطری است با همان درایه‌ها با این تفاوت که عناصر روی قطر اصلی معکوس عناصر روی قطر اصلی ماتریس A می‌باشد.

حل دستگاه معادلات خطی

برای حل دستگاه: $\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3 \end{cases}$ به روش دستور کرامر از دستورهایی $x = \frac{\Delta_x}{\Delta}$, $y = \frac{\Delta_y}{\Delta}$, $z = \frac{\Delta_z}{\Delta}$ که در آنها Δ

دترمینان ماتریس ضرایب دستگاه می‌باشد، استفاده می‌کنیم و برای تعیین هر یک از آنها کافی است در دترمینان ضرایب دستگاه، ستونی که متناظر با آن مجهول بوده، حذف کرد و بجای آن ماتریس مقادیر را قرار می‌دهیم.

استفاده از معکوس ماتریس:

برای حل دستگاه دو معادله دو مجهول $\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$ می‌توانیم از روش زیر استفاده کنیم:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c \\ c' \end{bmatrix} \Rightarrow AX = B \Rightarrow X = A^{-1}B$$

مثال ۴۳: دستگاه $\begin{cases} 5x - 2y = 9 \\ 2x + y = 8 \end{cases}$ را به روش ماتریس وارون حل کنید.

$$\begin{bmatrix} 5 & -2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 8 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} |A| = 11 \\ N' = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 5 \end{bmatrix} \end{cases} \Rightarrow A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{11} & \frac{2}{11} \\ \frac{2}{11} & \frac{5}{11} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{11} & \frac{2}{11} \\ \frac{2}{11} & \frac{5}{11} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 9 \\ 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} \rightarrow x = 3, y = 2$$

دستگاه معادلات همگن و غیر همگن

اگر مقادیر معلوم معادلات همگی برابر صفر باشد آنگاه آن دستگاه معادله را همگن می‌گوییم و برای بررسی جوابها حالت‌های زیر را داریم: (۱) اگر دترمینان ضرایب دستگاه معادله همگن برابر صفر باشد در این صورت دستگاه بی‌نهایت جواب دارد.

(۲) اگر دترمینان ضرایب در یک دستگاه معادله همگن مخالف صفر باشد آنگاه دستگاه فقط یک جواب برابر صفر را دارد. ($x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$)
 (۳) اگر مقادیر معلوم دستگاه معادلات خطی برابر صفر نباشد (دستگاه غیر همگن باشد) اگر دترمینان ضرایب برابر صفر باشد آنگاه دستگاه بی‌نهایت جواب دارد و یا دستگاه اصلاً جواب ندارد و اگر دترمینان ضرایب مخالف صفر باشد آنگاه دستگاه جواب منحصر به فرد دارد.

$$\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \text{دستگاه یک جواب دارد} & \text{اگر } \frac{a}{a'} \neq \frac{b}{b'} \rightarrow \\ \text{دستگاه جواب ندارد} & \text{اگر } \frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} \neq \frac{c}{c'} \rightarrow \\ \text{دستگاه بی‌شمار جواب دارد} & \text{اگر } \frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} \rightarrow \end{cases}$$

مثال ۴۴: دستگاه معادلات $\begin{cases} x + ay - z = - \\ 2x - y + z = 0 \\ x + 2y + 3z = 0 \end{cases}$ بیشمار جواب دارد. a کدام است؟

- (۱) ۲ (۲) ۱ (۳) -۱ (۴) -۲

پاسخ: گزینه «۴»

$$\begin{vmatrix} 1 & a & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 1 \times (-1) \times (3) + a \times 1 \times 1 + (-1) \times (2) \times (2) - [(1) \times (-1) \times (-1) + a(2)(3) + 1 \times 1 \times 2] \\ \Rightarrow [a - 3 - 4] - [1 + 6a + 2] = -5a - 10 = 0 \Rightarrow a = -2$$

مقادیر ویژه و بردار ویژه

هرگاه V یک بردار و λ عددی حقیقی باشد و A یک ماتریس مربع $n \times n$ باشد بطوریکه $AV = \lambda V$ در این صورت λ را یک مقدار ویژه و V را یک بردار ویژه می‌گویند.

برای محاسبه مقادیر ویژه ریشه‌های معادله $|A - \lambda I| = 0$ را به دست می‌آوریم. به این معادله، معادله مشخصه یا معادله مفسر نیز می‌گویند. پس از محاسبه مقادیر ویژه بردارهای ویژه را می‌توان از معادله $AV = \lambda V$ به دست آورد.

مثال ۴۵: مقادیر ویژه و بردارهای ویژه ماتریس $A = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ را به دست آورید.

پاسخ: ابتدا توجه کنید که:

مقادیر ویژه $\lambda = 2, 3 \Rightarrow$ معادله مشخصه $\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0 \Rightarrow \lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0 \Rightarrow |A - \lambda I| = (4 - \lambda)(1 - \lambda) + 2 = 0$

برای یافتن بردارهای ویژه دستگاه $AV = 2V$ و $AV = 3V$ را حل می‌کنیم.

$$\begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2V_1 \\ 2V_2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 4V_1 - V_2 = 2V_1 \\ 2V_1 + V_2 = 2V_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2V_1 - V_2 = 0 \\ 2V_1 - V_2 = 0 \end{cases}$$

معادله اخیر یکسان هستند، بنابراین به یکی از متغیرها مقداری دلخواه می‌دهیم تا مقدار دیگری و در نتیجه بردار ویژه به دست آید. به طور مثال قرار می‌دهیم $V_1 = 1$ و در این صورت $V_2 = 2$ به دست می‌آید. بنابراین بردار ویژه $V = (1, 2)$ می‌باشد. به طور مشابه می‌توان بردار ویژه متناظر با $\lambda = 3$ را به دست آورد.

مثال ۴۶: مجموع مقادیر ویژه ماتریس $A = \begin{bmatrix} 3 & 8 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ کدام است؟

- (۱) ۴ (۲) ۵ (۳) ۶ (۴) -۶

پاسخ: گزینه «۱»

$$|A - \lambda I| = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} 3 & 8 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - \lambda \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 8 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow |A - \lambda I| = (3 - \lambda)(1 - \lambda) - 8 = \lambda^2 - 4\lambda - 5 = 0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = -1 \\ \lambda_2 = 5 \end{cases} \Rightarrow \lambda_1 + \lambda_2 = 4$$

مثال ۴۷: حاصلضرب مقادیر ویژه ماتریس $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -3 & -1 & -1 \end{bmatrix}$ کدام است؟

- (۱) ۲ (۲) ۱ (۳) -۱ (۴) -۲

پاسخ: گزینه «۴»

$$A - \lambda I = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -3 & -1 & -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ -3 & -1 & -1-\lambda \end{bmatrix}$$

$$|A - \lambda I| = 0 \Rightarrow (2 - \lambda)(1 - \lambda)(-1 - \lambda) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 1, \lambda_2 = -1, \lambda_3 = 2 \Rightarrow \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = -2$$

همانطور که ملاحظه می‌شود برای محاسبه مقادیر ویژه یک ماتریس باید λ را از درایه‌های قطر اصلی ماتریس کم کنیم و دترمینان ماتریس حاصل را محاسبه و برابر صفر قرار دهیم. ریشه‌های معادله بدست آمده (بر حسب λ) مقادیر ویژه ماتریس می‌باشند.

نکته ۱۳: مجموع مقادیر ویژه یک ماتریس برابر مجموع عناصر روی قطر اصلی می‌باشد. (مجموع عناصر روی قطر اصلی یک ماتریس مانند A را با $\text{tr}(A)$ نشان می‌دهند.)

نکته ۱۴: حاصلضرب مقادیر ویژه ماتریس A برابر با $|A|$ می‌باشد.

نکته ۱۵: مقادیر ویژه ماتریس بالا مثلثی، پائین مثلثی و ماتریس قطری همان درایه‌های قطر اصلی می‌باشند.

مثال ۴۸: اگر مجموع مقادیر ویژه ماتریس $A = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ نصف حاصلضرب مقادیر ویژه ماتریس $B = \begin{bmatrix} m & 1 & 2 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ باشد. آنگاه m کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) -۲ (۴) ۳

پاسخ: گزینه «۳» با توجه به نکته فوق مجموع مقادیر ویژه ماتریس A برابر با حاصلجمع درایه‌های واقع بر قطر اصلی می‌باشد و حاصلضرب مقادیر ویژه ماتریس B نیز بدلیل اینکه B یک ماتریس بالا مثلثی است همان حاصلضرب درایه‌های واقع بر قطر اصلی می‌باشد لذا داریم:

$$-1 + 4 = \frac{1}{2}(m \times 3 \times -1) \Rightarrow -3m = 6 \Rightarrow m = -2$$

نکته ۱۶: اگر ماتریس B معکوس‌پذیر باشد و λ_1 و λ_2 ... مقادیر ویژه آن باشند، آنگاه $\frac{1}{\lambda_1}, \frac{1}{\lambda_2}, \dots$ مقادیر ویژه ماتریس B^{-1} خواهند بود.

نکته ۱۷: اگر ماتریس A به توان k برسد آنگاه مقادیر ویژه آن نیز به توان k خواهد رسید. $A^k \rightarrow \lambda^k$

نکته ۱۸: اگر ماتریس A در عدد حقیقی k ضرب شود آنگاه مقادیر ویژه آن نیز در عدد k ضرب خواهند شد. $kA \rightarrow k\lambda$

مثال ۴۹: اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$ باشد آنگاه مجموع مقادیر ویژه ماتریس A^{-1} کدام است؟

- (۱) $\frac{5}{6}$ (۲) $-\frac{1}{6}$ (۳) ۵ (۴) ۶

پاسخ: گزینه «۱»

$$|A - \lambda I| = 0 \Rightarrow (1 - \lambda)(4 - \lambda) - (-1)(2) = 0 \Rightarrow 4 - 5\lambda + \lambda^2 + 2 = 0$$

$$\rightarrow \lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 3, \lambda_2 = 2 \Rightarrow \frac{1}{\lambda_1} = \frac{1}{3}, \frac{1}{\lambda_2} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{5}{6}$$

نکته ۱۹: ماتریس A وارون‌پذیر است اگر و تنها اگر تمام مقادیر ویژه آن مخالف صفر باشند.

نکته ۲۰: اگر A ماتریسی متقارن باشد، مقادیر ویژه آن حقیقی و بردارهای ویژه آن دو به دو بر هم عمودند.

نکته ۲۱: مقادیر ویژه ماتریسهای A و A^T با هم برابرند.

مثال ۵۰: اگر $\lambda = 1$ مقدار ویژه مکرر مرتبه سوم ماتریس $A = \begin{bmatrix} 5 & -3 & -2 \\ 8 & -5 & -4 \\ -4 & 2 & a \end{bmatrix}$ باشد، مقدار a کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) -۱ (۳) ۳ (۴) -۳

پاسخ: گزینه «۳» طبق فرض مقادیر ویژه همگی برابر ۱ هستند و می‌دانیم مجموع مقادیر ویژه برابر مجموع عناصر قطر اصلی هستند. بنابراین: $5 - 5 + a = 1 + 1 + 1 \Rightarrow a = 3$

مثال ۵۱: اگر A یک ماتریس 5×5 با $|xI - A| = (x-1)(x+2)^2 x$ باشد، مقدار $\text{tr}(A)$ چقدر است؟

- (۱) -۵ (۲) ۵ (۳) ۳ (۴) ۱۰

پاسخ: گزینه «۱» مقادیر ویژه ماتریس A اعداد $1, -2, -2, -2, 0$ می‌باشند و مجموع مقادیر ویژه برابر $\text{tr}(A)$ است بنابراین:

$$\text{tr}(A) = -2 - 2 - 2 + 1 + 0 = -5$$

نکته ۲۲: اگر $f(x) = ax^n + bx^{n-1} + cx^{n-2} + \dots + L$ چند جمله‌ای مشخصه ماتریس A باشد، آنگاه:

$$\text{tr}(A) = \frac{-b}{a}, \quad \det(A) = \frac{(-1)^n L}{a}$$

مثال ۵۲: اگر A یک ماتریس با چند جمله‌ای مشخصه $f(x) = x^5 + x^2 - 3$ باشد، $\det(A)$ چقدر است؟

- (۱) -۳ (۲) -۱ (۳) ۱ (۴) ۳

$$\det A = \frac{(-1)^5 (-3)}{1} = 3$$

پاسخ: گزینه «۱» طبق نکته فوق:

ماتریس‌های قطری شدنی

فرض کنید ماتریس A دارای مقادیر ویژه $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ باشد، بردارهای ویژه مستقل خطی متناظر این مقادیر ویژه را به صورت ستونی در یک ماتریس $n \times n$ مانند P قرار دهیم، آنگاه:

$$P^{-1}AP = B = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_n \end{bmatrix}$$

ماتریس قطری B به دست آمده، در روی قطر اصلی دارای مقادیر ویژه A و سایر درایه‌های آن صفر می‌باشند.

نکته ۲۳: اگر مقادیر ویژه A متمایز باشند، آنگاه ماتریس A لزوماً قطری شدنی است.

مثال ۵۳: قطری شده ماتریس $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ کدام است؟

- (۱) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ (۲) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$ (۳) $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ (۴) $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$

پاسخ: گزینه «۲» ابتدا مقادیر ویژه A را به دست می‌آوریم. $\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -1-\lambda & 2 \\ 1 & 0-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + \lambda - 2 = 0 \Rightarrow \lambda = 1, -2$

درایه‌های واقع روی قطر اصلی ماتریس قطری شدنی، مقادیر ویژه ماتریس A می‌باشند بنابراین گزینه (۲) می‌تواند پاسخ صحیح باشد.

ماتریس معین مثبت و معین منفی

ماتریس متقارن $A_{n \times n}$ و بردار دلخواه $V = \begin{bmatrix} V_1 \\ \vdots \\ V_n \end{bmatrix}$ را در نظر بگیرید. در این صورت اگر برای هر $V \neq 0, V^T AV > 0$ ، $A, V^T AV > 0$ را معین مثبت می‌گوییم، اگر $V^T AV < 0$ را معین منفی می‌گوییم، و اگر $V^T AV$ به ازای بعضی از بردارها مثبت و به ازای بعضی از بردارها منفی باشد، A را نامعین می‌گوییم.

نکته ۲۴: در ماتریس $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$ دترمینان ماتریسهای مربعی را که از گوشه بالا و چپ ماتریس شروع می‌شوند را به ترتیب $H_1 = a_{11}, H_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \dots$ بنامیم، آنگاه:

اگر همه H_i ها مثبت باشند، A را معین مثبت می‌گوییم، اگر H_i ها، برای i فرد منفی و برای i زوج مثبت باشند، A معین منفی است و در غیر این صورت A نامعین است.

مثال ۵۴: ماتریس $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$

- (۱) معین مثبت است. (۲) معین منفی است. (۳) نامعین است. (۴) شبه معین منفی است.

پاسخ: گزینه «۳» $H_1 = 1 > 0, H_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -2 < 0$

نکته ۲۵: ماتریس A معین مثبت است، اگر و تنها اگر همه مقادیر ویژه آن مثبت باشند و A معین منفی است اگر و تنها اگر همه مقادیر ویژه آن منفی باشند.

تست‌های طبقه‌بندی شده فصل پنجم

۱- فاصله نقطه $(-1, 3, -1)$ از خط به معادله $\begin{cases} x = 2t + 1 \\ y = 1 \\ z = t \end{cases}$ کدام است؟ (مکانیک - سراسری ۷۸)

(۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۵

۲- فاصله عمودی بین دو صفحه به معادله‌های $4x - 8y - z + 9 = 0$ و $4x - 8y - z = 6$ کدام است؟ (مکانیک - سراسری ۷۸)

(۱) $\frac{3}{5}$ (۲) $\frac{3}{2}$ (۳) $\frac{2}{3}$ (۴) $\frac{5}{2}$

۳- می‌دانیم که $\lambda = 1$ مقدار ویژه ماتریس $A = \begin{bmatrix} 2 & -\frac{5}{4} & -\frac{1}{4} \\ 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 4 & -\frac{11}{4} & -\frac{1}{4} \end{bmatrix}$ است و علاوه بر این ماتریس A دارای وارون نیست. دو مقدار ویژه دیگر ماتریس A کدامند؟ (عمران - سراسری ۷۸)

(۱) $\frac{1}{4}$ و 0 (۲) $-\frac{1}{2}$ و $\frac{3}{4}$ (۳) -1 و $\frac{5}{4}$ (۴) 0 و $\frac{5}{4}$

۴- در صورتی که رابطه ماتریسی مقابل برقرار باشد: $A_{(n \times n)} X_{(n \times 1)} + B_{(n \times 1)} = X_{(n \times 1)}$ ماتریس X برابر است با: (مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری - سراسری ۷۸)

(۱) $X = B(I - A)^{-1}$ (۲) $X = (I - A)^{-1} \cdot B$ (۳) $X = B(A - I)^{-1}$ (۴) $X = (A - I)^{-1} \cdot B$

۵- اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ باشد، آنگاه $\det(A)$ برابر است با: (مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری - سراسری ۷۸)

(۱) ۴ (۲) ۲ (۳) ۰ (۴) -۲

۶- درمیان ماتریس $\begin{bmatrix} 9 & 5 & -1 & 4 & -18 \\ -11 & -23 & 14 & -45 & 19 \\ 62 & 78 & 12 & -40 & 27 \\ 9 & 5 & -1 & 4 & -18 \\ 18 & -92 & -13 & 47 & 13 \end{bmatrix}$ (مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری - سراسری ۷۸)

(۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۱۰ (۴) بی‌نهایت

۷- فاصله نقطه $(-1, 3, -1)$ از خط $\begin{cases} x - 2z = 7 \\ y = 1 \end{cases}$ کدام است؟ (ژئوفیزیک - سراسری ۷۸)

(۱) $\frac{2}{5}\sqrt{35}$ (۲) $\frac{2}{5}\sqrt{25}$ (۳) $\frac{2}{5}\sqrt{70}$ (۴) $\frac{2}{5}\sqrt{700}$

۸- حجم چهار وجهی به رؤس $(1, 3, 0)$ ، $(2, -1, 3)$ ، $(-2, 2, -1)$ و $(-1, 1, 2)$ کدام است؟ (مهندسی هسته‌ای - سراسری ۷۸)

(۱) ۵ (۲) ۶ (۳) ۷ (۴) ۸

۹- کدام بردار یک بردار ویژه ماتریس $\begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ است؟ (مهندسی هسته‌ای - سراسری ۷۸)

(۱) $\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$ (۲) $\begin{bmatrix} 2 \\ -2 \end{bmatrix}$ (۳) $\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$ (۴) $\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$

۱۰- اگر $\lambda = 1$ مقدار ویژه مکرر مرتبه سوم ماتریس $\begin{bmatrix} 5 & -3 & -2 \\ 8 & -5 & -4 \\ -4 & 2 & a \end{bmatrix}$ باشد، مقدار a کدام است؟ (عمران - سراسری ۷۹)

(۱) ۱ (۲) -۱ (۳) ۳ (۴) -۳

۱۱- اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 0 \end{bmatrix}$ عنصر سطر سوم و ستون دوم از ماتریس A^{-1} کدام است؟ (مکانیک - سراسری ۷۸)

(۱) $\frac{3}{5}$ (۲) $-\frac{3}{5}$ (۳) $\frac{3}{5}$ (۴) $\frac{5}{3}$

۱۲- اگر نقطه $(1, 0, -1)$ مرکز یک مکعب و صفحه $x - 2y + 2z = 2$ یکی از وجوه آن باشد، حجم مکعب برابر کدام است؟ (مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری - سراسری ۷۹)

(۱) $\frac{8}{3}$ (۲) $\frac{3}{5}$ (۳) $\frac{3}{5}$ (۴) $\frac{5}{3}$

۱۳- برداری که در جهت بردار $\vec{A} = 2\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}$ بوده و طولش برابر ۹ می‌باشد، کدام است؟ (ژئوفیزیک - سراسری ۷۹)

(۱) $4\vec{i} - \vec{j} + 4\vec{k}$ (۲) $9\vec{i} - 3\vec{j} + 9\vec{k}$ (۳) $6\vec{i} - 3\vec{j} + 6\vec{k}$ (۴) $3\vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k}$

۱۴- معادله صفحه‌ای که از نقطه $P(2, 3, 1)$ می‌گذرد و به بردار $\vec{V} = (1, -1, 2)$ عمود می‌باشد کدام است؟ (مکانیک - سراسری ۸۰)

(۱) $x + y + 2z = 1$ (۲) $x - y + 2z = 6$ (۳) $x - y + 2z = 8$ (۴) $2x - y + 2z = 9$

۱۵- اگر A و B ماتریس‌های $n \times n$ متقارن باشند، در این صورت می‌توان گفت (مکانیک - سراسری ۸۰)

(۱) A معکوس‌پذیر است. (۲) $(A + B)$ متقارن است. (۳) B معکوس‌پذیر است. (۴) $(A - B)$ معکوس‌پذیر نیست.

۱۶- اگر $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ باشد، در این صورت ماتریس A^{100} کدام است؟ (مکانیک - سراسری ۸۰)

(۱) $\begin{bmatrix} 1^{100} & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ (۲) $\begin{bmatrix} 2^{100} & 100 \\ -100 & 0 \end{bmatrix}$ (۳) $\begin{bmatrix} 1^{101} & 100 \\ -100 & -99 \end{bmatrix}$ (۴) $\begin{bmatrix} 2^{101} & 101 \\ 99 & 100 \end{bmatrix}$

۱۷- مطلوبست محاسبه کثیرال جمله مشخصه و مقادیر خاص، ماتریس $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$. (مکانیک - آزاد ۸۰)

(۱) $P_f(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda + 1$, $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 1$ (۲) $P_f(\lambda) = \lambda^2 + 2\lambda + 1$, $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = -1$

(۳) $P_f(\lambda) = \lambda^2 - 4\lambda + 4$, $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 2$ (۴) $P_f(\lambda) = \lambda^2 - 6\lambda + 5$, $\lambda_1 = 5$, $\lambda_2 = 1$

۱۸- ماتریس $A = \begin{bmatrix} -5 & 9 \\ -6 & 10 \end{bmatrix}$ را قطری کنید. (مکانیک - آزاد ۸۰)

(۱) $D = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ (۲) $D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ (۳) $D = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ (۴) $D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

۱۹- شرط لازم و کافی برای آنکه ماتریس $A = \begin{bmatrix} 1 & a^2 & 2 \\ 1 & 4 & -1 \\ b^2 & -c^2 & 0 \end{bmatrix}$ مثبت معین باشد کدام است؟ (مکانیک - آزاد ۸۰)

(۱) ماتریس A هیچوقت نمی‌تواند مثبت معین باشد. (۲) ماتریس A همیشه مثبت معین است.

(۳) $c > 0$ و $b > 0$ و $-2 < a < 2$ (۴) $-2 < a < 2$ و $-\sqrt{3} < b < \sqrt{3}$

۲۰- اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ باشد ماتریس A^{100} عبارت است از:

(مکانیک - آزاد ۸۰)

(۱) $\begin{bmatrix} 100 & 2 \\ 0 & 100 \end{bmatrix}$ (۲) $\begin{bmatrix} 1 & 200 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ (۳) $\begin{bmatrix} 100 & 200 \\ 0 & 100 \end{bmatrix}$ (۴) $\begin{bmatrix} 1 & 2^{100} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

۲۱- می‌دانیم که $\lambda_1 = 2$ یک مقدار ویژه ماتریس $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 5 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$ است و دترمینان A برابر است با ۳۶ مقدار ویژه دیگر A کدام است؟

(عمران - سراسری ۸۰)

(۱) $\lambda_2 = 1, \lambda_3 = 18$ (۲) $\lambda_2 = 3, \lambda_3 = 6$ (۳) $\lambda_2 = 2, \lambda_3 = 9$ (۴) $\lambda_2 = 2, \lambda_3 = 7$

۲۲- جواب‌های معادله $\begin{vmatrix} x^2 & x & 1 \\ 4 & 2 & 1 \\ 9 & -3 & 1 \end{vmatrix} = 0$ کدامند؟

(مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری - سراسری ۸۰)

(۱) $1, 2$ (۲) $2, -3$ (۳) $1, -3$ (۴) جواب حقیقی ندارد.

۲۳- اگر $\lambda = 3$ یکی از مقادیر ویژه $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ باشد، بردار ویژه متناظر با آن موازی کدام است؟

(مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری - سراسری ۸۰)

(۱) $i - j - 2k$ (۲) $i + j + k$ (۳) $2i - j + k$ (۴) $i + j - k$

۲۴- اگر $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ عنصر سطر اول و ستون دوم ماتریس A^{-1} کدام است؟

(مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری - سراسری ۸۰)

(۱) $-\frac{1}{4}$ (۲) 0 (۳) $\frac{1}{4}$ (۴) $\frac{1}{2}$

۲۵- مختصات برداریکه \vec{N} عمود بر دو بردار $\vec{A} = 2i - j + 2k$ و $\vec{B} = -2i + j + 2k$ کدام است؟

(مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری - سراسری ۸۰)

(۱) $(1, -2, 2)$ (۲) $(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3})$ (۳) $(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3})$ (۴) $(-1, 2, 2)$

۲۶- تصویر بردار $\vec{A} = -i + 2j + 2k$ بر $\vec{B} = 2i - j + 2k$ کدام است؟

(مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری - سراسری ۸۰)

(۱) $\frac{1}{2}i - \frac{1}{4}j + \frac{1}{4}k$ (۲) $\frac{4}{9}i - \frac{2}{9}j + \frac{4}{9}k$ (۳) $-\frac{2}{9}i + \frac{4}{9}j + \frac{6}{9}k$ (۴) $-\frac{1}{4}i + \frac{1}{4}j + \frac{3}{4}k$

۲۷- در معادله $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 4 & 1 & 3 \\ 2 & -2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ مجهول x چقدر است؟

(مهندسی صنایع (سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی) - آزاد ۸۰)

(۱) $\frac{1}{3}$ (۲) $\frac{1}{4}$ (۳) 1 (۴) $\frac{1}{2}$

۲۸- رتبه یا Rank ماتریس $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{bmatrix}$ کدام است؟

(مهندسی صنایع (سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی) - آزاد ۸۰)

(۱) 2 (۲) 3 (۳) 1 (۴) 4

۲۹- رتبه یا Rank ماتریس مقابل کدام است؟

(مهندسی صنایع (مدیریت سیستم و بهره‌وری) - آزاد ۸۰)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & -2 \\ -1 & 1 & -1 & -1 \\ 2 & 4 & -1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

(۱) ۲ (۲) ۴ (۳) ۳ (۴) ۱

۳۰- سه صفحه $6x + 2y + 2z = 6$, $x + 5y + 2z = 7$, $x + 2y + 2z = 6$ و $2x + 7y + az = 8$ نقطه مشترکی ندارند. اگر a برابر باشد با: (معدن - سراسری ۸۰)

(۱) -1 (۲) 5 (۳) 6 (۴) 7

۳۱- خط L که معادلاتش عبارتند از $y - 2z = 0$ و $x - 2z - 3 = 0$ ، صفحه $x + 2y - z + 4 = 0$ را در نقطه P قطع می‌کند. معادله خطی را که در این صفحه بر نقطه P می‌گذرد و بر L عمود است به دست آورید.

(عمران - آزاد ۸۱)

(۱) $\frac{x-1}{-3} = \frac{y+2}{3} = \frac{z+1}{2}$ (۲) $\frac{x-2}{-3} = \frac{y-1}{3} = \frac{z-9}{2}$ (۳) $\frac{x-2}{-5} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-9}{2}$ (۴) $\frac{x-1}{-5} = \frac{y+2}{3} = \frac{z+1}{4}$

۳۲- اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & a \end{bmatrix}$ و دترمینان ماتریس A^T برابر ۹ باشد، a کدام است؟

(مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری - سراسری ۸۱)

(۱) $-1, 1$ (۲) $5, -1$ (۳) $5, -5$ (۴) $1, -5$

۳۳- دو خط متناظر L_1 و L_2 در فضا مفروض است. خط L_3 از نقطه $(1, 0, 1)$ می‌گذرد و با بردار $(1, 2, 1)$ موازی است. خط L_3 از نقطه $(2, 1, 4)$ می‌گذرد و با بردار $(1, -1, 1)$ موازی است. کوتاهترین فاصله بین این دو خط در فضا برابر است با:

(مهندسی صنایع (سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی) - آزاد ۸۱)

(۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) بی‌نهایت

۳۴- مقادیر ویژه ماتریس $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 5 & 3 \end{bmatrix}$ کدام‌اند؟

(معدن - سراسری ۸۱)

(۱) $1, 0, -1$ (۲) $1, 1, 1$ (۳) $1, -1, 2$ (۴) $1, 2, 3$

۳۵- اگر داشته باشیم $\vec{A} = \vec{i} + \vec{j}$ و $\vec{B} = 2\vec{k}$ آنگاه کدام بردار، مماس بر $\vec{A} \times \vec{B}$ خواهد شد؟

(معدن - سراسری ۸۱)

(۱) $\vec{i} + \vec{j}$ (۲) $\vec{i} - \vec{j}$ (۳) $2(\vec{i} - \vec{j})$ (۴) $2(\vec{i} + \vec{j})$

۳۶- برای هر دو بردار \vec{a} و \vec{b} در فضا کدام رابطه همواره درست است؟

(معدن - سراسری ۸۱)

(۱) $\vec{a} \cdot \vec{b} \leq |\vec{a}| |\vec{b}|$ (۲) $\vec{a} \cdot \vec{b} > |\vec{a}| |\vec{b}|$ (۳) $\vec{a} \cdot \vec{b} \leq \vec{a} \times \vec{b}$ (۴) $\vec{a} \cdot \vec{b} \geq |\vec{a}| |\vec{b}|$

۳۷- کدام بردار عمود بر بردارهای $\vec{u} = 2i - j + 2k$ و $\vec{v} = 2i + 3j - k$ است؟

(معدن - سراسری ۸۱)

(۱) $8i - 3j - 2k$ (۲) $6i - 2j - 2k$ (۳) $6i + 2j + 2k$ (۴) $-8i + 10j + 14k$

۳۸- اگر \vec{a} و \vec{b} سه بردار و \vec{c} غیر موازی و $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = 0$ ، کدام گزاره درست است؟

(ریاضی - سراسری ۸۱)

(۱) یک بردار عمود بر صفحه دو بردار دیگر است. (۲) $a = 0$ یا $b = 0$ یا $c = 0$ (۳) صفحه a و b بر صفحه c عمود است. (۴) یک بردار موازی صفحه دو بردار دیگر است.

(مکانیک - سراسری ۸۲)

۳۹- دو خط $\begin{cases} x + 2y = -1 \\ 3y + z = 1 \end{cases}$ و $\begin{cases} z = 1 \\ 2x + y = 2 \end{cases}$ نسبت به هم چه وضعی دارند؟

(۱) متقاطع هستند. (۲) موازی هستند. (۳) متناظر هستند. (۴) برهم منطبق هستند.

(مکانیک - سراسری ۸۲)

۴۰- مقادیر ویژه ماتریس $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ کدام‌اند؟

(۱) $-3, -2$ و -1 (۲) $1, 2$ و 1 (۳) $-1, -1$ و -1 (۴) $1, 1$ و 1

۴۱- دو تابع از مقادیر مشخصه (eigenvalue) ماتریس $A = \begin{bmatrix} -2 & -1 & 3 \\ 6 & 5 & -6 \\ 2 & 2 & -1 \end{bmatrix}$ و $\lambda_1 = 1$ و $\lambda_2 = 2$ می باشد. مقدار مشخصه سوم آن λ_3 برابر است با:

- (۱) ۱ (۲) -۱ (۳) ۲ (۴) -۲ (عمران - آزاد ۸۲)

۴۲- با توجه به اینکه معادله مشخصه ماتریس های $B = \begin{bmatrix} -3 & 1 & -1 \\ -7 & 5 & -1 \\ -6 & 6 & -2 \end{bmatrix}$ و $A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 2 \\ 6 & -6 & 4 \end{bmatrix}$ می باشد. کدامیک از گزینه های زیر صحیح می باشد؟

- (۱) ماتریس B قابل قطری شدن هست و ماتریس A قطری شدنی نیست.
 (۲) ماتریس های A و B هر دو قطری شدنی هستند.
 (۳) ماتریس های A و B هیچکدام قطری شدنی نیستند.
 (۴) ماتریس های A قابل قطری شدن هست و ماتریس B قطری شدنی نیست.

۴۳- سه صفحه $x+y=2$ و $z-y=2$ و $x+z=4$ نسبت به هم چه وضعی دارند؟
 (۱) موازیند. (۲) دو به دو متقاطعند. (۳) در یک خط مشترکند. (۴) در یک نقطه مشترکند.
 (مهندسی سیستم های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره وری - سراسری ۸۲)

۴۴- مقدار دترمینان ماتریس $\begin{bmatrix} 45 & 17 & 3 & -45 & -17 \\ 12 & 21 & 6 & -12 & 21 \\ -3 & -9 & -11 & 3 & 9 \\ 6 & 10 & 9 & -6 & 10 \\ -7 & -8 & 3 & 7 & 8 \end{bmatrix}$ کدام است؟

- (۱) -۱۱۸ (۲) صفر (۳) ۱۱۸ (۴) ۱۵۶۸ (مهندسی سیستم های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره وری - سراسری ۸۲)

۴۵- یکی از مقادیر ویژه ماتریس $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ برابر $\lambda = 3$ است. اگر $x_1 = c$ انتخاب شود. بردار ویژه مربوطه برابر است با:

- (۱) $ci + cj - 2ck$ (۲) $ci - cj - 2ck$ (۳) $2ci + 2cj$ (۴) $ci - cj + ck$ (مهندسی صنایع (سیستم های اقتصادی و اجتماعی) - آزاد ۸۲)

۴۶- بردارهای $\vec{A} = i + 2j + 3k$ و $\vec{B} = -i + 2j + k$ و $\vec{C} = 2i + j$ مفروض است. مقدار t را طوری پیدا کنید که بردار $t\vec{A} + \vec{B}$ بر بردار \vec{C} عمود باشد.
 (۱) $t = -5$ (۲) $t = 5$ (۳) $t = 1$ (۴) $t = -1$ (مهندسی صنایع (سیستم های اقتصادی و اجتماعی) - آزاد ۸۲)

۴۷- معادله صفحه ای که شامل محل تقاطع دو صفحه $2x - 2y + 4z = 5$ و $2x + 4y - z = 7$ بوده و از نقطه $(2, 1, 2)$ بگذرد. کدام است؟
 (مهندسی صنایع (سیستم های اقتصادی و اجتماعی) - آزاد ۸۲)

- (۱) $17x + 26y - 3z + 54 = 0$ (۲) $5x + 2y + 3z - 18 = 0$
 (۳) $17x + 26y - 3z - 54 = 0$ (۴) $13x + 18y - z - 42 = 0$

۴۸- اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ به ازاء چه مقادیری از λ دترمینان ماتریس $A - \lambda I$ که $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ صفر می شود؟ (ژئوفیزیک - سراسری ۸۲)

- (۱) ۲ و ۱ (۲) ۳ و ۱ (۳) ۳ و ۲ (۴) ۳ و ۱ و ۲

۴۹- مقادیر ویژه ماتریس $A = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ عبارتند از:

- (۱) ۱ و ۰ (۲) -۶ و ۱ (۳) -۱ و ۶ (۴) ۱ و ۶ (مهندسی هسته ای - سراسری ۸۲)

۵۰- حجم متوازی السطوح حاصل از سه بردار $a = 2i - j + k$ ، $b = -i - j - 2k$ و $c = -i + j - k$ برابر است با:

- (۱) ۳ (۲) ۴ (۳) ۵ (۴) ۶ (ریاضی - سراسری ۸۲)

۵۱- اگر $a = i - j + 2k$ ، $b = 2i + j - k$ در این صورت $\text{Proj}_b a$ (تصویر a در امتداد b) عبارت است از:

- (۱) $-\frac{1}{3}i - \frac{1}{6}j - \frac{1}{6}k$ (۲) $\frac{1}{3}i + \frac{1}{6}j - \frac{1}{6}k$ (۳) $-\frac{1}{3}i + \frac{1}{6}j + \frac{1}{6}k$ (۴) $-\frac{1}{3}i - \frac{1}{6}j + \frac{1}{6}k$ (ریاضی - سراسری ۸۲)

۵۲- فاصله دو صفحه موازی زیر را به دست آورید.

- (۱) $\frac{\sqrt{2}}{3}$ (۲) $\frac{\sqrt{6}}{9}$ (۳) $\frac{\sqrt{6}}{3}$ (۴) ۱ (مکانیک - آزاد ۸۲)

$P_1: x - y + 2z + 1 = 0$
 $P_2: 2x - 2y + 4z + 6 = 0$

۵۳- به ازای چه مقدار b بردار $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$ یک بردار ویژه ماتریس $\begin{bmatrix} b & -1 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ 3 & -3 & 4 \end{bmatrix}$ می باشد؟

- (۱) $b = 1$ (۲) $b = 2$ (۳) $b = -1$ (۴) $b = 0$ (عمران - آزاد ۸۲)

۵۴- حاصل عبارت $\begin{bmatrix} \sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ 2 & 2 \end{bmatrix}^{12}$ کدام است؟
 (مهندسی سیستم های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره وری - سراسری ۸۲)

- (۱) $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ (۲) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ (۳) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ (۴) $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$

۵۵- سببه ازای کدام مقدار k ماتریس $\begin{bmatrix} 1 & 0 & k \\ 0 & 1 & -1 \\ k & -1 & 1 \end{bmatrix}$ می تواند متعامد باشد؟

- (۱) -۱ (۲) ۰ (۳) ۱ (۴) هیچ مقدار (مهندسی سیستم های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره وری - سراسری ۸۲)

۵۶- زاویه امتدادهای ویژه ماتریس $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ کدام است؟

- (۱) $\frac{\pi}{4}$ (۲) $\frac{\pi}{2}$ (۳) $\frac{\pi}{3}$ (۴) $\text{Arctg} 2$ (مهندسی صنایع (سیستم های اقتصادی و اجتماعی - مدیریت سیستم و بهره وری) - آزاد ۸۲)

۵۷- معادله خط گذرنده از مبدأ مختصات و موازی صفحه $x + y - z = 0$ و عمود بر خط $x = 2y = z + 1$ از کدام نقطه زیر می گذرد؟
 (مهندسی صنایع (سیستم های اقتصادی و اجتماعی - مدیریت سیستم و بهره وری) - آزاد ۸۲)

- (۱) $(1, 2, 3)$ (۲) $(3, -2, 1)$ (۳) $(3, -4, -1)$ (۴) $(-3, 4, 1)$

۵۸- معادله صفحه ای شامل خط $z = 2y - 2 = x$ و موازی نیمساز ربع اول و سوم در صفحه xy. کدام است؟ (کامپیوتر - سراسری ۸۲)

- (۱) $y - x = 1$ (۲) $y = 2x$ (۳) $y - x = -1$ (۴) $z - 2x - 2y = 2$

۵۹- به ازای کدام مقدار m ماتریس $\begin{bmatrix} -1 & 2 & m+1 \\ 1 & 3 & 2m \\ -1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$ وارون پذیر نیست؟ (ژئوفیزیک - سراسری ۸۲)

- (۱) -۲ (۲) -۱ (۳) ۱ (۴) ۲

۶۰- اگر دترمینان ماتریس A برابر ۲ باشد دترمینان ماتریس $A^4 + 4(A^{-1})^2 + 2A$ کدام است؟ (ژئوفیزیک - سراسری ۸۲)

- (۱) ۴ (۲) ۵ (۳) ۶ (۴) ۷

۶۱- ماتریس مرتبه سوم M غیر صفر فرض می‌شود که در آن درایه‌های ماتریس حقیقی هستند. کدامیک از گزینه‌های زیر درست است؟ (مهندسی هسته‌ای - سراسری ۸۳)

$$M = \begin{bmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \beta & \delta & \sigma \\ \gamma & \sigma & \mu \end{bmatrix}$$

- (۱) ماتریس مذکور مقادیر ویژه حقیقی با سه بردار ویژه متعامد مستقل خطی دارد.
 (۲) ماتریس مقادیر ویژه حقیقی دارد اما ممکن است تعداد بردارهای ویژه مستقل خطی کمتر از ۳ باشد.
 (۳) یک مقدار ویژه حقیقی دارد اما ممکن است دو مقدار ویژه دیگر مزدوج مختلط یکدیگر باشند.
 (۴) با فرضهای مذکور در حالت کلی نمی‌توان درباره تعداد مقادیر ویژه حقیقی و نوع بردارهای ویژه اظهار نظر کرد.

۶۲- فرض کنید $A = \begin{bmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -3 & 4 & 1 \end{bmatrix}$ مقادیر ویژه ماتریس A عبارتند از: (معین - سراسری ۸۳)

$$(1) -2, 2, 0 \quad (2) -1, 1, 0 \quad (3) 1, -1, 2 \quad (4) \frac{1}{2}, 2, 3$$

۶۳- صفحه گذرنده بر خط به معادله $z = \frac{y+1}{-1} = \frac{x-1}{2}$ و نقطه $(1, 1, 2)$ محور x را با کدام طول قطع می‌کند؟ (معین - سراسری ۸۳)

$$(1) \frac{2}{3} \quad (2) \frac{2}{4} \quad (3) \frac{2}{2} \quad (4) \frac{4}{3}$$

۶۴- اگر $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$ باشد، کدامیک از تساوی‌های زیر صحیح است؟ (عمران - آزاد ۸۴)

$$(1) A^T = 7A - 10I \quad (2) A^T + 7A + 10I = 0 \quad (3) A^T = 5A + I \quad (4) 2A^T + 5A + I = 0$$

۶۵- دو خط $\frac{x+5}{3} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z+4}{1}$ و $\frac{x+y-z+3}{x-y-5z} = 0$ نسبت به هم چه وضعی دارند؟

(مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری - سراسری ۸۴)

- (۱) موازی‌اند.
 (۲) متناظرند.
 (۳) متقاطع و عمود بر هم‌اند.
 (۴) متقاطع‌اند اما عمود بر هم نیستند.

۶۶- اگر $A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ و $B^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$ باشد در این صورت $-3AB$ کدا است؟

(مهندسی صنایع (سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی - مدیریت سیستم و بهره‌وری) - آزاد ۸۴)

$$(1) \begin{bmatrix} 9 & -3 \\ -12 & 3 \end{bmatrix} \quad (2) \begin{bmatrix} 9 & 3 \\ -12 & 3 \end{bmatrix} \quad (3) \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \quad (4) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

۶۷- حاصل دترمینان زیر کدام است؟ (مهندسی صنایع (سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی - مدیریت سیستم و بهره‌وری) - آزاد ۸۴)

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+b & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1+c \end{vmatrix}$$

$$(1) (1+a)(1+b)(1+c) \quad (2) 1 \quad (3) \text{ صفر} \quad (4) abc$$

۶۸- تابع خطی $f(x, y, z) = (x-y, x-z, 2x-y-z)$ مفروض است، معادله مشخصه ماتریس آن کدام است؟ (MBA - سراسری ۸۴)

$$(1) \lambda^2 - \lambda = 0 \quad (2) \lambda^2 + \lambda = 0 \quad (3) \lambda^2 + \lambda^2 - \lambda = 0 \quad (4) \lambda^2 - \lambda^2 + \lambda = 0$$

۶۹- خط به معادله $\begin{cases} x+2y=1 \\ 2y-z=2 \end{cases}$ موازی صفحه $x+my+(m-1)z=1$ است. m کدام است؟ (ژئوفیزیک - سراسری ۸۴)

$$(1) \frac{2}{3} \quad (2) \frac{4}{3} \quad (3) \frac{2}{4} \quad (4) \frac{2}{3}$$

$$\begin{cases} 2x+ky+z=0 \\ (k-1)x-y+2z=0 \\ 4x+y+4z=0 \end{cases}$$

(مهندسی هسته‌ای - سراسری ۸۴)

$$(1) k=1, k=\frac{9}{4} \quad (2) k=2, k=\frac{9}{4} \quad (3) k=0, k=\frac{9}{4} \quad (4) k=1, k=\frac{2}{3}$$

۷۱- اگر A یک ماتریس m در n ، B یک ماتریس m در m ناکتین یا وارون پذیر باشد و C یک ماتریس $n \times n$ ناکتین باشد، کدام گزینه در مورد رتبه ماتریس‌ها صحیح است؟ (آمار - سراسری ۸۴)

$$(1) r(AC) = r(BA) \neq r(A) \quad (2) r(BAC) \neq r(AC) = r(BA) \\ (3) r(BAC) = r(AC) = r(BA) = r(A) \quad (4) r(BAC) \neq r(AC) \neq r(A)$$

باسخامه تست‌های طبقه‌بندی شده فصل پنجم

۱- گزینه «۲» نقطه $A(1,1,c)$ روی خط قرار دارد.

$$\overline{AB} = (-2, 2, -1) \Rightarrow AB \times \vec{u} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -2 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (2, 0, -4) \Rightarrow d = \frac{|\overline{AB} \times \vec{u}|}{|\vec{u}|} = \frac{\sqrt{4+0+16}}{\sqrt{4+0+1}} = 2$$

۲- گزینه «۴»

$$d = \frac{|6 - (-9)|}{\sqrt{4^2 + (-8)^2 + (-1)^2}} = \frac{15}{9} = \frac{5}{3}$$

۳- گزینه «۱» ماتریس A وارون پذیر نیست، پس دترمینان A برابر صفر است از طرفی حاصل ضرب مقادیر ویژه یک ماتریس برابر دترمینان ماتریس می‌باشد، پس یکی از مقادیر ویژه برابر صفر است. از طرفی مجموع مقادیر ویژه برابر مجموع درایه‌های قطر اصلی ماتریس می‌باشد، بنابراین:

$$1 + 0 + \lambda_3 = 2 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} \Rightarrow \lambda_3 = \frac{1}{4}$$

۴- گزینه «۲»

$$AX + B = X \Rightarrow X - AX = B \Rightarrow X(I - A) = B \Rightarrow X = (I - A)^{-1}B$$

۵- گزینه «۳»

۶- گزینه «۱» سطر اول و سطر چهارم ماتریس با هم برابرند، پس دترمینان ماتریس برابر صفر است.

۷- گزینه «۴» می‌دانیم فاصله نقطه دلخواه P_2 از خط d از فرمول زیر به دست می‌آید:
 فاصله $= \frac{|PP_2 \times u|}{|u|}$

که در آن P نقطه دلخواهی روی خط می‌باشد.

نقطه $P(3, 1, -1)$ روی خط داده شده قرار دارد و $u(2, 0, 1)$ بردارهای خط می‌باشد، بنابراین:

$$PP_0 = (-4, 2, 1) \Rightarrow PP_0 \times u = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -4 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (2, 6, -4) \Rightarrow \text{فاصله} = \frac{|PP_0 \times u|}{|u|} = \frac{\sqrt{4+36+16}}{\sqrt{4+1}} = \frac{2\sqrt{56}}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{70}}{5}$$

۸- هیچ کدام از گزینه‌ها صحیح نیست. رنوس داده شده را به ترتیب A, B, C و D فرض می‌کنیم. در این صورت:

$$AB = (1, -4, 2), AC = (-2, -1, -1), AD = (-2, -2, 2) \Rightarrow AB \cdot (AC \times AD) = \begin{vmatrix} 1 & -4 & 2 \\ -2 & -1 & -1 \\ -2 & -2 & 2 \end{vmatrix} = -24$$

بنابراین حجم چهار وجهی موردنظر برابر است با:

$$V = \frac{1}{6} |AB \cdot (AC \times AD)| = \frac{1}{6} \times 24 = 4$$

۹- گزینه «۲» ابتدا مقادیر ویژه ماتریس داده شده را به دست می‌آوریم:

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 5 - \lambda & 4 \\ 1 & 2 - \lambda \end{vmatrix} = (5 - \lambda)(2 - \lambda) - 4 = \lambda^2 - 7\lambda + 6 = 0 \Rightarrow \lambda = 1, 6$$

حال بردارهای ویژه متناظر با مقادیر فوق را محاسبه می‌کنیم:

$$\begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 1 \times \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 5x + 4y = x \\ x + 2y = y \end{cases} \Rightarrow y = -x$$

بنابراین $(1, -1)$ و هر مضربی از آن یک بردار ویژه ماتریس مزبور می‌باشد.

۱۰- گزینه «۳» می‌دانیم مجموع مقادیر ویژه برابر مجموع درایه‌های قطر اصلی ماتریس می‌باشد، بنابراین:

$$1 + 1 + 1 = 5 - 5 + a \Rightarrow a = 3$$

۱۱- گزینه «۴» به سادگی می‌توان نشان داد $|A| = -3$. برای محاسبه درایه سطر سوم و ستون دوم ماتریس A^{-1} لازم است همسازه درایه a_{32} ماتریس A را به دست آوریم.

$$a_{32} = \frac{-5}{|A|} = \frac{-5}{-3} = \frac{5}{3} \Rightarrow \frac{-5}{-3} = \frac{5}{3} \Rightarrow (-1)^{2+2} \times \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -5$$

۱۲- گزینه «۳» در متن درس حل شده است.

۱۳- گزینه «۳»

$$\vec{A} = 2i - j + 2k \Rightarrow |\vec{A}| = \sqrt{4+1+4} = 3$$

چون طول بردار A برابر ۳ است، پس بردار موردنظر $3A$ خواهد بود.

۱۴- گزینه «۳»

$$1 \times (x-1) - 1 \times (y-2) + 2 \times (z-3) = 0 \Rightarrow x - y + 2z = 8$$

۱۵- گزینه «۲»

$$(A+B)' = A' + B' = A + B$$

۱۶- گزینه «۳» ابتدا توجه کنید که $|A| = 1$ ، بنابراین $|A|^{100} = 1$ و تنها گزینه‌ای که دترمینان آن برابر ۱ می‌باشد، گزینه (۳) است.

۱۷- گزینه «۴»

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 2 - \lambda & 1 \\ 3 & 4 - \lambda \end{vmatrix} = (2 - \lambda)(4 - \lambda) - 3 = \lambda^2 - 6\lambda + 5 = 0 \Rightarrow \lambda = 1, 5$$

۱۸- گزینه «۳»

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} -5 - \lambda & 9 \\ -6 & 10 - \lambda \end{vmatrix} = (\lambda + 5)(\lambda - 10) + 54 = \lambda^2 - 5\lambda + 4 = 0 \Rightarrow \lambda = 1, 4$$

درایه‌های قطر اصلی ماتریس قطری موردنظر همان مقادیر ویژه ماتریس A می‌باشند، بنابراین:

$$D = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

۱۹- گزینه «۱» چون $\det A < 0$ ، بنابراین A نمی‌تواند معین مثبت باشد.

۲۰- گزینه «۲»

$$A^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow A^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \dots$$

۲۱- گزینه «۲» می‌دانیم مجموع مقادیر ویژه برابر مجموع درایه‌های قطر اصلی و حاصل ضرب مقادیر ویژه برابر دترمینان ماتریس است، بنابراین:

$$\begin{cases} 2 + \lambda_1 + \lambda_2 = 2 + 5 + 2 \\ 2\lambda_1\lambda_2 = 26 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = 9 \\ \lambda_1\lambda_2 = 13 \end{cases} \Rightarrow \lambda_1 = 2, \lambda_2 = 6$$

۲۲- گزینه «۲» به ازای $x = 2$ ، سطر اول و دوم با هم برابر می‌شوند و بنابراین دترمینان برابر صفر خواهد بود. به ازای $x = -3$ سطر اول و سوم با هم برابر می‌شوند و بنابراین دترمینان صفر خواهد بود.

۲۳- گزینه «۱»

$$AX = \lambda X \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda x \\ \lambda y \\ \lambda z \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 2x + z = 0 \\ x - y + z = 0 \\ x + y = 0 \end{cases} \Rightarrow y = -x, z = -2x$$

پس بردار ویژه $(x, -x, -2x)$ و یا $x(1, -1, -2)$ خواهد بود.

۲۴- گزینه «۳» چون ماتریس بالا مثلثی است پس دترمینان آن حاصل ضرب قطر اصلی خواهد بود، یعنی $|A| = 8$. برای محاسبه درایه a_{22} در ماتریس A^{-1} لازم است همسازه درایه a_{21} در ماتریس A را به دست آوریم.

$$a_{21} = \frac{2}{|A|} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{2}{8} = \frac{1}{4} \Rightarrow (-1)^{2+1} \times \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2$$

۲۵- گزینه «۳» برای به دست آوردن بردار عمود بر \vec{A} و \vec{B} ، کافی است $\vec{A} \times \vec{B}$ را به دست آوریم.

$$\vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 4 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & -2 \end{vmatrix} = -i + 2j + 2k \Rightarrow \vec{N} = \frac{\vec{A} \times \vec{B}}{|\vec{A} \times \vec{B}|} = \frac{1}{3}(-1, 2, 2)$$

۲۶- گزینه «۲» B بر A تصویر $\frac{A \cdot B}{|B|^2} B = \frac{-2-2+6}{4+1+4}(2i-j+2k) = \frac{2}{9}i - \frac{2}{9}j + \frac{4}{9}k$

۲۷- گزینه «۴»

$$\begin{cases} 2x - y + z = 1 \\ 4x + y + 2z = 2 \\ 2x - 2y - z = 1 \end{cases} \xrightarrow{\text{جمع معادله (۱) و (۲)}} \begin{cases} 6x + 4z = 3 \\ 10x + 5z = 5 \end{cases} \Rightarrow x = \frac{1}{2}, z = 0$$

۲۸- گزینه «۲» دو سطر اول و دوم مستقل می‌باشند. سطر سوم برابر دو برابر سطر دوم منهای سطر اول است، و سطر چهارم برابر سه برابر سطر دوم منهای دو برابر سطر اول می‌باشد. (می‌توانیم از عملیات سطری پلکانی نیز استفاده کنیم).

۲۹- گزینه «۳» از عملیات سطری پلکانی استفاده می‌کنیم:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & -2 \\ -1 & 1 & -1 & -1 \\ 2 & 4 & -1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 6 & -5 & 5 \\ 0 & 6 & -7 & 11 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 6 & -5 & 5 \\ 0 & 0 & -2 & 6 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 6 & -5 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & 6 & -5 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

۳۰- گزینه «۲» سه صفحه نقطه مشترکی ندارند، هرگاه دستگاه مقابل جواب نداشته باشد و برای اینکه دستگاه جواب نداشته باشد، لازم است دترمینان ضرایب برابر صفر باشد.

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 6 \\ x + 5y + 2z = 7 \\ 2x + 7y + az = 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 5 & 2 \\ 2 & 7 & a \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow a = 5$$

۳۱- گزینه «۴» بردار هادی خط موردنظر برابر حاصل ضرب خارجی بردار هادی خط L و بردار نرمال صفحه می‌باشد. بنابراین:

$$\vec{u} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = \left(\frac{-5}{2}, \frac{3}{2}, 2\right) = \frac{1}{2}(-5, 3, 4)$$

برای به دست آوردن نقطه P دستگاه زیر را حل می‌کنیم:

$$\begin{cases} x + 2y - z + 4 = 0 \\ y - 2z = 0 \\ x - 2z - 3 = 0 \end{cases} \xrightarrow{\text{جایگزینی در معادله اول}} \begin{cases} 2z + 2 + 6z - z + 4 = 0 \\ y = 2z, x = 2z + 3 \end{cases} \Rightarrow z = -1, y = -2, x = 1 \Rightarrow P(1, -2, -1)$$

$$\frac{x-1}{-5} = \frac{y+2}{2} = \frac{z+1}{4}$$

بنابراین معادله خط موردنظر به صورت روبرو است:

۳۲- گزینه «۴» $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & a \end{bmatrix} \Rightarrow |A| = a+2 \Rightarrow |A^T| = |A| = (a+2)^T = 9 \Rightarrow a = 1, -5$

۳۳- هیچکدام از گزینه‌ها صحیح نیست. می‌دانیم فاصله بین دو خط متناظر که نقاط A و B روی آنها قرار دارند u_1 و u_2 بردارهای هادی آنها می‌باشند، از فرمول روبرو به دست می‌آید:

$$d = \frac{|AB \cdot (u_1 \times u_2)|}{|u_1 \times u_2|}$$

$$u_1 \times u_2 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = (3, 0, -2), AB = (1, 1, 2) \Rightarrow d = \frac{|3 \times 1 + 0 \times 1 - 2 \times 2|}{\sqrt{9+0+4}} = \frac{6}{\sqrt{13}} = \sqrt{2}$$

۳۴- گزینه «۲» می‌دانیم مجموع مقادیر ویژه $\text{tr}(A)$ می‌باشد و چون $\text{tr}(A) = 3$ ، پس تنها گزینه (۲) می‌تواند صحیح باشد.

۳۵- گزینه «۲ و ۳»

$$\vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 2\vec{i} - 2\vec{j} = 2(\vec{i} - \vec{j})$$

بردار $2\vec{i} - 2\vec{j}$ و هر مضربی از آن پاسخ مسأله می‌باشد.

۳۶- گزینه «۱»

۳۷- گزینه «۴» حاصل ضرب خارجی دو بردار، بر دو بردار اولیه عمود است، بنابراین:

$$u \times v = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 4 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix} = -8i + 10j + 14k$$

۳۸- گزینه «۴» از $a \cdot (b \times c) = 0$ نتیجه می‌شود سه بردار هم صفحه‌اند و چون b و c طبق فرض غیرموازی‌اند پس یک صفحه از آنها عبور می‌کند و چون a در همان صفحه قرار دارد پس با صفحه حاصل از آنها موازی است.

۳۹- گزینه «۳» دو خط موازی نیستند زیرا بردارهای هادی آنها با هم موازی نیست.

حال به بررسی مقاطع یا متناظر بودن دو خط می‌پردازیم. اگر دو خط متقاطع باشند، لازم است دستگاه زیر جواب داشته باشد.

$$\begin{cases} z = 1 \\ 2x + y = 2 \\ x + 2y = -1 \\ 3y + z = 1 \end{cases} \xrightarrow{z=1} y = 0 \Rightarrow x = 1, x = -1$$

چون دو مقدار مختلف برای x به دست می‌آید، پس نقطه تقاطع وجود ندارد.

۴۰- گزینه «۴» در ماتریسهای بالا مثلثی یا پایین مثلثی، درایه‌های قطر اصلی مقادیر ویژه ماتریس می‌باشند.

۴۱- گزینه «۲» می‌دانیم مجموع مقادیر ویژه یک ماتریس برابر مجموع درایه‌های قطر اصلی ماتریس می‌باشد. بنابراین:

$$1 + 2 + \lambda_3 = -2 + 5 - 1 \Rightarrow \lambda_3 = -1$$

۴۲- گزینه «۴»

۴۳- گزینه «۳» با کمی دقت به معادلات سه صفحه می‌توان متوجه شد که $x + z = 2$ ، از جمع معادلات دو صفحه اول به دست آمده است. پس این صفحه در فصل مشترک دو صفحه اول که یک خط است قرار دارد.

۴۴- گزینه «۲» با کمی دقت می‌توان ملاحظه کرد که ستون چهارم ماتریس ضرب ستون اول ماتریس است، پس دترمینان برابر صفر می‌شود.

۴۵- گزینه «۲»

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 3 \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 2x_1 + x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_3 = 0 \end{cases}$$

از دستگاه معادلات فوق نتیجه می شود $x_2 = -x_1$ و $x_3 = -2x_1$. بنابراین $(c, -c, -2c)$ بردار ویژه مربوطه می باشد.

$$\vec{A} + t\vec{B} = (1-t, 2+2t, 3+t) \Rightarrow (\vec{A} + t\vec{B}) \cdot \vec{C} = 3 - 2t + 2 + 2t = 0$$

۴۶- گزینه «۲»

که از معادله فوق $t = 5$ به دست می آید.۴۷- گزینه «۳» نقطه $(3, -1, -1)$ در محل تلاقی دو صفحه قرار دارد. در بین گزینه های تنها گزینه ای که نقطه $(3, -1, -1)$ در آن صدق می کند، گزینه (۳) می باشد.

۴۸- گزینه «۱»

روش اول:

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 \\ -1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(2-\lambda) = 0 \Rightarrow \lambda = 1, 2$$

روش دوم: در ماتریس بالا مثلثی یا پایین مثلثی معادیر ویژه همان درایه های روی قطر اصلی ماتریس می باشد.

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 5-\lambda & 4 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (5-\lambda)(2-\lambda) - 4 = \lambda^2 - 7\lambda + 6 = 0 \Rightarrow \lambda = 1, 6$$

۴۹- گزینه «۴»

$$\vec{a} \cdot \vec{b} \times \vec{c} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 3$$

۵۰- گزینه «۱»

$$\text{Proj}_{\vec{b}} \vec{a} = \frac{(\vec{a} \cdot \vec{b})}{|\vec{b}|^2} \vec{b} = \frac{(2 \times 1 + 1 \times (-1) - 1 \times 2)}{2^2 + 1^2 + (-1)^2} (2, 1, -1) = \left(\frac{-1}{3}, \frac{-1}{6}, \frac{1}{6}\right)$$

۵۱- گزینه «۴»

$$P_1: x - y + 2z + 1 = 0, P_2: x - y + 2z + 3 = 0$$

۵۲- گزینه «۳»

$$d = \frac{|1-3|}{\sqrt{1+1+4}} = \frac{2}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

۵۳- گزینه «۲»

$$AX = \lambda X \Rightarrow \begin{bmatrix} b-1 & 1 \\ 2 & -3 \\ 2 & -2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} b-1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda \\ 0 \\ -\lambda \end{bmatrix}$$

از تساوی فوق نتیجه می شود $\lambda = 1$ و بنابراین $b = 2$.۵۴- گزینه «۱» ماتریس داده شده ماتریس وارون به اندازه $\frac{\pi}{4}$ می باشد، یعنی:

$$\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}^{12} = \begin{bmatrix} \cos \frac{\pi}{4} & -\sin \frac{\pi}{4} \\ \sin \frac{\pi}{4} & \cos \frac{\pi}{4} \end{bmatrix}^{12} = \begin{bmatrix} \cos 3\pi & -\sin 3\pi \\ \sin 3\pi & \cos 3\pi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

یادآوری: ماتریس دوران به اندازه θ از فرمول $\begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$ به دست می آید و داریم:

$$\begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} \cos n\theta & -\sin n\theta \\ \sin n\theta & \cos n\theta \end{bmatrix}$$

۵۵- گزینه «۴» حاصل ضرب داخلی ستون دوم و ستون سوم ماتریس داده شده برابر ۲- است. پس این ماتریس متعامد نیست.

یادآوری: ماتریس A را متعامد می گوئیم هرگاه $A^T = A^{-1}$. در ماتریس متعامد ستونها دو به دو بر هم عمودند و دارای طول واحد می باشند. همچنین در ماتریس متعامد $|A| = \pm 1$.

۵۶- گزینه «۳» چون ماتریس A متعارن می باشد، لذا بردارهای ویژه بر هم عمودند.

۵۷- گزینه «۳» بردار هادی خط موردنظر برابر حاصل ضرب خارجی بردار نرمال صفحه و بردار هادی خط داده شده می باشد. بنابراین:

$$\vec{u} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & \frac{1}{2} & 1 \end{vmatrix} = \left(\frac{3}{2}, -2, \frac{-1}{2}\right)$$

$$\frac{x}{\frac{3}{2}} = \frac{y}{-2} = \frac{z}{-\frac{1}{2}} \Rightarrow \frac{2x}{3} = \frac{y}{-2} = -2z$$

در نتیجه معادله خط موردنظر به صورت روبرو می باشد:

می توان ملاحظه کرد نقطه $(-1, -4, +3)$ در معادله فوق صدق می کند.۵۸- گزینه «۱» نقطه $(0, 1, 0)$ روی خط داده شده قرار دارد، بنابراین بایستی روی صفحه موردنظر نیز باشد. تنها گزینه ای نقطه $(0, 1, 0)$ در آن صدق می کند، گزینه (۱) می باشد.

۵۹- گزینه «۲» باید دترمینان ماتریس برابر صفر باشد.

۶۰- هیچ کدام از گزینه صحیح نیست. به چند دلیل مسأله اشکال دارد. اول اینکه تعداد سطر و ستونهای ماتریس A داده نشده، ثانیاً دترمینان جمع و تفریق چند ماتریس را نمی توان برحسب دترمینان خود آن ماتریسها پیدا کرد.

۶۱- گزینه «۱» ماتریس M یک ماتریس متعارن می باشد، بنابراین سه بردار ویژه متعامد مستقل خطی دارد.

۶۲- گزینه «۱» برای محاسبه دترمینان، حول ستون اول بسط می دهیم:

$$\begin{vmatrix} -2-\lambda & 3 & 1 \\ 0 & 1-\lambda & 1 \\ -3 & 4 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (-2-\lambda)((1-\lambda)(1-\lambda) - 4) - 3(3 - (1-\lambda)) = 0$$

$$\Rightarrow (-2-\lambda)((1-\lambda)^2 - 1) = 0 \Rightarrow \lambda = -2, 2, 0$$

۶۳- گزینه «۴» نقطه $A(1, -1, 0)$ روی خط داده شده قرار دارد و بنابراین روی صفحه موردنظر قرار دارد از طرفی نقطه $B(2, 1, 1)$ نیز طبقفرض روی صفحه موردنظر واقع است، بنابراین بردار $\vec{AB} = (1, 2, 1)$ روی صفحه قرار دارد. از طرفی بردار هادی خط داده شده یعنی $\vec{V}(2, -1, 1)$ نیز در صفحه واقع است. بنابراین بردار نرمال صفحه برابر است با:

$$\vec{N} = \vec{AB} \times \vec{V} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 3\vec{i} + \vec{j} - 5\vec{k}$$

$$3(x-2) + 1 \times (y-1) - 5(z-1) = 0 \Rightarrow 3x + y - 5z = 2$$

پس معادله صفحه موردنظر به صورت روبرو است:

در نقطه تقاطع با محور Xها، $Y = Z = 0$ ، بنابراین $X = \frac{2}{3}$.

۶۴- گزینه «۱» طبق قضیه کیلی - همیلتون، هر ماتریس در معادله مشخصه اش صدق می کند. بنابراین:

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 0 & 5-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)(5-\lambda) = \lambda^2 - 7\lambda + 10 = 0 \Rightarrow A^T - 7A + 10I = 0$$

۶۵- گزینه «۱» می‌دانیم بردار هادی خط تقاطع دو صفحه برابر حاصل ضرب بردار نرمال آن دو صفحه می‌باشد. بنابراین:

$$\begin{cases} x+y-z+3=0 \Rightarrow N(1,1,-1) \\ x-y-5z=0 \Rightarrow N'(1,-1,-5) \end{cases} \Rightarrow \vec{V} = \vec{N} \times \vec{N}' = (-6, 4, -2)$$

چون بردار $(-6, 4, -2)$ مضربی از بردار $(+3, -2, 1)$ می‌باشد، پس دو خط موازیند.

۶۶- گزینه «۱» نیازی به دست آوردن ماتریس‌های A, B نمی‌باشد. توجه کنید که $|A^{-1}| = 1, |B^{-1}| = -1$ ، بنابراین $|A| = 1$ و $|B| = -1$.
در نتیجه:
 $| -2AB | = 9 |A| |B| = 9 \times 1 \times -1 = -9$

در بین گزینه‌ها، تنها دترمینان ماتریس گزینه (۱) برابر -9 می‌باشد.

۶۷- گزینه «۴»

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+b & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1+c \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c \end{vmatrix} = 1 \times a \times b \times c = abc$$

۶۸- گزینه «۱» ماتریس تبدیل خطی داده شده به صورت زیر است:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & c \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow |A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 & c \\ 1 & 0-\lambda & -1 \\ 2 & -1 & -1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -\lambda^3 + \lambda = 0$$

۶۹- گزینه «۲» برای اینکه خط موازی صفحه باشد، باید بردار هادی خط بر بردار نرمال صفحه عمود باشد.

$$\vec{u} = (-2, 1, 2), \vec{N} = (1, m, m-1)$$

$$\vec{u} \cdot \vec{N} = 0 \Rightarrow -2 + m + 2(m-1) = 0 \Rightarrow m = \frac{4}{3}$$

$$\begin{vmatrix} 2 & k & 1 \\ k-1 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 4k^2 - 13k + 9 = 0 \Rightarrow k = 1, k = \frac{9}{4}$$

۷۰- گزینه «۱»

۷۱- گزینه «۳»

تست‌های تکمیلی فصل پنجم

۱- حاصل ضرب ریشه‌های معادله $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = 0$ کدام است؟

- (۱) ۲ (۲) -۲ (۳) ۶ (۴) -۶

۲- کدامیک از روابط زیر برقرار است؟

- (۱) $(A' - A)' = A' - A$ (۲) $(ABA') = A'B'A$
(۳) $(AB' + A'B)' = BA' + B'A$ (۴) هیچکدام

۳- حاصل $\begin{vmatrix} \sin x & \cos x & \sin(x+t) \\ \sin y & \cos y & \sin(y+t) \\ \sin z & \cos z & \sin(z+t) \end{vmatrix}$ کدام است؟

- (۱) $\sin(x+y+z)$ (۲) $\sin t$ (۳) $\sin x \sin y \sin z \sin t$ (۴) ۰

۴- کدام رابطه بین a, b, c و برقرار باشد، تا دستگاه زیر جواب غیر بدیهی داشته باشد؟

$$\begin{cases} ax + by + cz = 0 \\ bx + cy + az = 0 \\ cx + ay + bz = 0 \end{cases}$$

- (۱) $a + b + c = 0$ (۲) $a^2 + b^2 + c^2 = ab + bc + ca$
(۳) $a^2 + b^2 + c^2 = 3abc$ (۴) $abc = 0$

۵- به ازای چه مقدار m بردار $(1, 0, -1)$ یک بردار ویژه ماتریس $A = \begin{bmatrix} m & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 3 & 4 \end{bmatrix}$ می‌باشد؟

- (۱) ۲ (۲) -۲ (۳) ۱ (۴) -۱

۶- رتبه ماتریس $\begin{bmatrix} 6 & 1 & 3 & 8 \\ 4 & 2 & 6 & -1 \\ 10 & 3 & 9 & 7 \\ 16 & 4 & 12 & 15 \end{bmatrix}$ کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۷- مقادیر ویژه ماتریس $A = \begin{bmatrix} -1 & -3 & -9 \\ 0 & 5 & 18 \\ - & m & -7 \end{bmatrix}$ با هم برابرند، m چقدر است؟

- (۱) ۲ (۲) -۲ (۳) ۱ (۴) -۱

۸- مقادیر ویژه ماتریس $A = \begin{bmatrix} 5 & 4 & 4 \\ -7 & -3 & -1 \\ 7 & 4 & 3 \end{bmatrix}$ کدامند؟

- (۱) $5, 1, -2$ (۲) $5, 2, 1$ (۳) $5, 2, -1$ (۴) $-1, -2, -5$

۹- حاصل دترمینان $\begin{bmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 1 & 2 & -3 \\ 4 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ کدام است؟

- (۱) ۳۵ (۲) -۳۵ (۳) ۳۶ (۴) -۳۶

۱۰- کدام ماتریس زیر پادمتقارن است؟

- (۱) AA' (۲) $A' + A$ (۳) $A' - A$ (۴) هیچکدام

۱۱- مقادیر ویژه ماتریس $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -13 & 7 \end{bmatrix}$ برابر است با:

- (۱) ۵، ۲، ۱
- (۲) ۵، ۲، ۰
- (۳) ۳، ۱، ۰
- (۴) ۵، ۱، ۰

۱۲- اگر ۱، ۲ و ۳ مقادیر ویژه ماتریس $A_{3 \times 3}$ باشد، مقادیر ویژه ماتریس $A^T + A$ کدام است؟

- (۱) -۱، ۲، ۱
- (۲) ۰، ۶، ۲
- (۳) ۶، ۲، ۱
- (۴) قابل محاسبه نیست.

۱۳- اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ ، در این صورت $A^T - 5A^2 - 3A$ برابر است با:

- (۱) -A
- (۲) A
- (۳) I
- (۴) -2A

۱۴- فاصله نقطه $P(1, -1, 2)$ از صفحه $2x - y + 2z = 3$ کدام است؟

- (۱) ۱
- (۲) $\frac{5}{3}$
- (۳) $\frac{4}{3}$
- (۴) $\frac{2}{3}$

۱۵- اگر \vec{a} و \vec{b} دو بردار باشند، آنگاه $|\vec{a} + \vec{b}|^2 + |\vec{a} - \vec{b}|^2$ برابر است با:

- (۱) $|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2$
- (۲) $2(|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2)$
- (۳) $|\vec{a} \times \vec{b}|^2 + |\vec{a} \cdot \vec{b}|^2$
- (۴) $(|\vec{a}| \times |\vec{b}|)^2$

۱۶- اگر زاویه بین دو بردار \vec{a} و \vec{b} باشد، بردار $\vec{V} = |\vec{b}| \vec{a} + |\vec{a}| \vec{b}$ با دو بردار \vec{a} و \vec{b} چه زاویه‌ای می‌سازد؟

- (۱) 30°
- (۲) 25°
- (۳) 110°
- (۴) 90°

۱۷- برای یک ماتریس متقارن حقیقی:

- (۱) در صورت وجود ریشه‌های تکراری، بردارهای ویژه از هم مستقل خواهند بود.
- (۲) مقادیر ویژه گاهی حقیقی بوده ولی بردارهای ویژه متعامدند.
- (۳) مقادیر ویژه حقیقی و بردارهای ویژه متعامدند.
- (۴) مقادیر ویژه مخالف صفرند.

۱۸- دو صفحه $x + 2y + z = 1$ و $2x + y - z = 1$ نسبت به هم چه وضعی دارند؟

- (۱) با هم موازیند.
- (۲) بر هم عمودند.
- (۳) یکدیگر را در زاویه 45° قطع می‌کنند.
- (۴) یکدیگر را در زاویه 60° قطع می‌کنند.

۱۹- خط به معادله $\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-3}{4}$ صفحه $x + y + z = 15$ را در نقطه $P(a, b, c)$ قطع کرده است، مقدار a کدام است؟

- (۱) -۳
- (۲) ۲
- (۳) ۳
- (۴) ۴

۲۰- خط به معادلات $\frac{2x-1}{3} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+1}{2}$ نسبت به صفحه $4x + 4y - 2z = 1$ چه وضعیتی دارد؟

- (۱) در صفحه
- (۲) عمود بر صفحه
- (۳) موازی صفحه
- (۴) زاویه آن با صفحه $\frac{\pi}{3}$

۲۱- سه صفحه $x - y + z + 3 = 0$ ، $x + y - z - 2 = 0$ و $2x + 1 = 0$ چگونه‌اند؟

- (۱) دارای خطی مشترک هستند.
- (۲) هر سه صفحه موازیند.
- (۳) در یک نقطه متناوب هستند.
- (۴) صفحه سوم عمود بر دو صفحه دیگر است.

۲۲- حاصل $(\vec{A} + \vec{B}) \cdot (\vec{A} \times \vec{B})$ برابر است با:

- (۱) $|\vec{A}|^2 + |\vec{B}|^2$
- (۲) ۰
- (۳) ۰
- (۴) $2\vec{A} \cdot \vec{B}$

۲۳- فرض کنید $\vec{0} = (\vec{A} \times \vec{B}) \times \vec{C}$ و $\vec{A} \cdot \vec{B} = 4$ ، $\vec{B} \cdot \vec{B} = 4$ ، در این صورت مقدار $\vec{A} \cdot \vec{C}$ چقدر است؟

- (۱) ۱
- (۲) ۲
- (۳) ۴
- (۴) ۰

۲۴- کدامیک از گزاره‌های زیر صحیح هستند؟

- (۱) دو ماتریس متشابه‌اند اگر و فقط اگر مقادیر ویژه یکسان داشته باشند.
- (۲) مجموع دو بردار ویژه یک بردار ویژه است.
- (۳) هر ماتریس حقیقی $A_{5 \times 5}$ حداقل یک مقدار ویژه حقیقی دارد.
- (۴) هیچکدام

۲۵- اگر V یک فضای برداری با بعد n باشد، آنگاه:

- (۱) هر زیر مجموعه از V با n بردار، وابسته خطی است.
- (۲) هر زیر مجموعه از V با $(n+1)$ بردار، وابسته خطی است.
- (۳) هر زیر مجموعه از V با $(n-1)$ بردار، مستقل خطی است.
- (۴) هر زیر مجموعه مستقل خطی از V ، n بردار دارد.

۲۶- اگر $\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}, \vec{D}$ چهار بردار هم‌صفحه باشند، آنگاه:

- (۱) $(\vec{A} \times \vec{B}) \cdot (\vec{C} \times \vec{D}) = 0$
- (۲) $(\vec{A} \times \vec{B}) \times (\vec{C} \times \vec{D}) = 0$
- (۳) $(\vec{A} + \vec{B}) \times (\vec{C} \times \vec{D}) = 0$
- (۴) هیچکدام

۲۷- اگر $|\vec{a}| = 2$ و $|\vec{b}| = 3$ باشد، حاصل $|\vec{a} \cdot \vec{b}|^2 + |\vec{a} \times \vec{b}|^2$ کدام است؟

- (۱) ۶
- (۲) ۲۶
- (۳) ۱۳
- (۴) ۱۸

۲۸- صفحات $2x + y + az = 0$ و $-x + by - z + 1 = 0$ با یکدیگر موازیند. $a^T + 2b$ کدام است؟

- (۱) ۵
- (۲) ۳
- (۳) ۲
- (۴) ۱

۲۹- به ازای کدام مقدار k دو صفحه $kx + 2y + z = 0$ و $2x + ky - k^2z = 1$ بر هم عمودند؟

- (۱) ۳ و ۶
- (۲) ۳ و ۰
- (۳) ۰ و ۶
- (۴) ۶ و ۰

۳۰- اگر بردارهای $\vec{a} = (2, 2p + 5, 1)$ و $\vec{b} = (m - 1, m + p - 1, m + n)$ برابر باشند، $\frac{mn}{p}$ کدام است؟

- (۱) -۶
- (۲) ۶
- (۳) $\frac{3}{2}$
- (۴) $\frac{2}{3}$

۳۱- معادله صفحه‌ای که از خط $\frac{x-1}{3} = \frac{y-4}{2} = \frac{z-4}{-2}$ بگذرد و موازی $\frac{x+1}{2} = \frac{y-1}{-4} = \frac{z+2}{1}$ باشد کدام است؟

- (۱) $9x - 7y + 6z = 98$
- (۲) $6x - 7y + 16z = 9$
- (۳) $6x + 7y + 16z = 98$
- (۴) $6x + 7y + 6z = 9$

۳۲- بردارهای $\vec{V}_1(0, 0, a)$ و $\vec{V}_2(0, 1, 2)$ و $\vec{V}_3(1, 2, 3)$:

- (۱) به ازاء $a \neq 0$ مستقل خطی هستند.
- (۲) همواره مستقل خطی هستند.
- (۳) همواره وابسته خطی‌اند.
- (۴) به ازاء $a \neq 0$ وابسته خطی هستند.

۳۳- اگر $\vec{V}_1 = 2i + 3j + k$ و $\vec{V}_2 = i - j + k$ حاصل $\frac{|\vec{V}_1 - 2\vec{V}_2|}{|\vec{V}_1 + 2\vec{V}_2|}$ کدام است؟

- (۱) ۱
- (۲) $\sqrt{6}$
- (۳) $\frac{\sqrt{6}}{6}$
- (۴) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

۳۴- اگر $\vec{a} = 2\vec{i} + 3\vec{j} + \vec{k}$ و $\vec{b} = \vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$ آنگاه کسینوس زاویه بین دو بردار $\vec{a} - \vec{b}$ و \vec{b} کدام است؟

- (۱) $-\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{17}}$
- (۲) $-\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{17}}$
- (۳) $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{17}}$
- (۴) $\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{17}}$

۳۵- معادله صفحه‌ای که از نقطه $A(1, -1, 1)$ بگذرد و با صفحه $2x + 2y + z = 4$ موازی باشد، کدام است؟

- (۱) $2x + 2y + z = 0$
- (۲) $2x + 2y + z = 1$
- (۳) $2x + 2y + z = 4$
- (۴) $2x + y + 2z = 4$

۳۶- اندازه حاصلضرب داخلی دو بردار با اندازه حاصلضرب خارجی این دو بردار برابر است، زاویه این دو بردار چند درجه است؟

- (۱) 30°
- (۲) 45°
- (۳) 60°
- (۴) 90°

۳۷- اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 0 \end{bmatrix}$ عنصر سطر سوم و ستون دوم از ماتریس A^{-1} کدام است؟

- (۱) $-\frac{5}{2}$
- (۲) $-\frac{2}{5}$
- (۳) $\frac{2}{5}$
- (۴) $\frac{1}{7}$

۳۸- معکوس کدامیک از چهار ماتریس زیر وجود ندارد؟

- (۱) $\begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$
- (۲) $\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$
- (۳) $\begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 14 & -1 \end{bmatrix}$
- (۴) $\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ -2 & -5 \end{bmatrix}$

۳۹- درایه واقع در سطر سوم و ستون اول از معکوس ماتریس $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 5 & 3 \\ 2 & 8 & 6 \end{bmatrix}$ کدام است؟

- (۱) $-\frac{2}{5}$ (۲) $\frac{2}{5}$ (۳) صفر (۴) A معکوس ندارد.

۴۰- جوابهای معادله $\begin{vmatrix} x^2 & x & 1 \\ 4 & 2 & 1 \\ 9 & -3 & 1 \end{vmatrix} = 0$ کدام است؟

- (۱) ۲ و -۱ (۲) ۲ و -۳ (۳) ۳ و -۱ (۴) هیچکدام

۴۱- اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ m & 1 \end{bmatrix}$ و $A^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ -6 & a_{22} \end{bmatrix}$ کدامست m ؟

- (۱) -۳ (۲) -۲ (۳) ۳ (۴) ۲

۴۲- اگر حاصل دترمینان $\begin{vmatrix} 1 & 0 & a \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -a \end{vmatrix}$ برابر ۶ باشد، a کدامست؟

- (۱) -۳ (۲) -۲ (۳) ۲ (۴) ۳

۴۳- اگر $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$ حاصل $|A \cdot B| + 2|A + B|$ کدام است؟

- (۱) -۱۹ (۲) ۹۱ (۳) -۷۷ (۴) ۱۰۵

۴۴- اگر ماتریس $\begin{bmatrix} 0 & m+2 & 2 \\ 2m+2 & m^2-1 & 5 \\ -2 & -5 & 0 \end{bmatrix}$ پاد متقارن باشد مجموع درایه‌های ستون دوم چقدر است؟

- (۱) -۲ (۲) -۳ (۳) -۴ (۴) -۵

۴۵- جوابهای معادله $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ 1 \end{bmatrix} = 0$ کدامند؟

- (۱) -۳ و -۱ (۲) ۳ و -۱ (۳) ۳ و -۱ (۴) ۱ و ۳

۴۶- به ازای کدام مقادیر m دستگاه معادلات $\begin{cases} mx + y + 2z = 0 \\ x + 2y + mz = 0 \\ x - y - 2z = 0 \end{cases}$ جواب غیر صفر دارد؟

- (۱) -۴ و -۱ (۲) -۴ و ۱ (۳) ۴ و -۱ (۴) ۴ و ۱

۴۷- اگر ماتریس $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -4 & -3 \end{bmatrix}$ دترمینان ماتریس $AA^T + A^T A$ کدامست؟

- (۱) ۹۰۰ (۲) ۱۶۰۰ (۳) ۲۵۰۰ (۴) ۳۶۰۰

۴۸- به ازای چه مقدار x حاصل دترمینان $\begin{vmatrix} 1 & x & -1 & 2 \\ 1 & x^2 & 1 & -4 \\ 2 & 2x & -2 & 4 \\ -1 & -x & 1 & -2 \end{vmatrix}$ صفر است؟

- (۱) بی‌شمار (۲) ۲ (۳) ۱ (۴) ۰

۴۹- اگر $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 5 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ درایه سطر اول و ستون سوم از ماتریس A^{-1} کدام است؟

- (۱) -۲ (۲) $-\frac{1}{2}$ (۳) $\frac{1}{2}$ (۴) ۲

۵۰- در دترمینان $A = \begin{bmatrix} -2 & 3 & a \\ 0 & 1 & 5 \\ 1 & b & -1 \end{bmatrix}$ مجموع همساز درایه‌های a و b کدام است؟

- (۱) ۶ (۲) ۹ (۳) -۱ (۴) -۴

۵۱- اگر دترمینان ماتریس $A = \begin{bmatrix} x & 0 & 0 \\ 1 & x^2 & 0 \\ 0 & -1 & x^2 \end{bmatrix}$ برابر ۶۴ باشد، مقدار x کدام است؟

- (۱) ± 2 (۲) ± 4 (۳) -۳ (۴) ± 8

۵۲- اگر $i^2 = -1$ و $A = \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{bmatrix}$ آنگاه A^{22} کدام است؟

- (۱) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ (۲) $\begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{bmatrix}$ (۳) $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ (۴) $\begin{bmatrix} -i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix}$

۵۳- اگر $A = \begin{bmatrix} -3 & 5 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$ باشد، آنگاه ماتریس $A(A^{-1} - I)$ کدام است؟

- (۱) $\begin{bmatrix} 4 & -5 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$ (۲) $\begin{bmatrix} 4 & -5 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$ (۳) $\begin{bmatrix} 2 & -5 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$ (۴) $\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -4 \end{bmatrix}$

۵۴- نقطه $A(\sqrt{2}, \sqrt{2})$ را به اندازه $\frac{\pi}{4}$ در صفحه مختصات در جهت مثلثاتی دوران می‌دهیم، مختصات جدید A کدام است؟

- (۱) $A(2, 0)$ (۲) $A(0, 2)$ (۳) $A(2, 2)$ (۴) $A(1, \sqrt{2})$

۵۵- اگر حاصل دترمینان $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ a & b & 1 \\ 2 & 5 & 1 \end{vmatrix}$ برابر D باشد آنگاه حاصل دترمینان $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 5 & 1 \\ a & b & -1 \end{vmatrix}$ برابر کدام است؟

- (۱) $-D - 2$ (۲) $2 - D$ (۳) $D - 1$ (۴) $D + 1$

آن قدر شکست خوردیم، تا راه شکست دادن را آموختیم. «ناپلئون بناپارت»
اراده بطور طبیعی و خودبه خود تکمیل می‌شود، به شرط آنکه تعلیم و تربیت غلط سد راه آن نکند. «فیناگورث»

آزمون (۱)

تعداد سوالات: ۱۰ مدت زمان پیشنهادی: ۱۵ دقیقه سطح آزمون: C

۱- در مورد نقطه بحرانی تابع $f(x,y) = x^2 + y^2 + 6x + 12$ کدام عبارت صحیح است؟

- (۱) تابع در نقطه $(-3, 0)$ ماکزیممی برابر ۳ دارد.
- (۲) تابع در نقطه $(-3, 0)$ می‌نیممی برابر ۳ دارد.
- (۳) تابع در نقطه $(0, -3)$ ماکزیممی برابر ۳ دارد.
- (۴) تابع در نقطه $(3, 0)$ ماکزیممی برابر ۳ دارد.

۲- حاصل انتگرال $\int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 (x-2y+z) dz dy dx$ چقدر است؟

- (۱) ۰
- (۲) ۱
- (۳) ۲
- (۴) ۳

۳- مقدار $\int_0^e \int_x^e \frac{dy dx}{\ln y}$ برابر است با:

- (۱) e
- (۲) ۱
- (۳) $e-1$
- (۴) $\frac{1}{e}$

۴- انتگرال $\int_0^1 \int_0^x xy^2 dy dx$ با کدامیک از انتگرالهای زیر برابر می‌باشد؟

- (۱) $\int_0^1 \int_0^y xy^2 dx dy$
- (۲) $\int_0^1 \int_0^1 xy^2 dx dy$
- (۳) $\int_{-1}^1 \int_{-y}^y xy^2 dx dy$
- (۴) هیچکدام

۵- فرض کنید $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$ در این صورت کدام گزاره زیر صحیح نمی‌باشد؟

- (۱) f در مبدأ پیوسته است.
- (۲) $f_x(0,0)$ موجود می‌باشد.
- (۳) f در کلیه نقاط (x,y) پیوسته است.
- (۴) f_x در مبدأ پیوسته است.

۶- معادله صفحه مماس بر سطحی به معادله $x^2 + y^2 = 4z$ در نقطه $(2, -4, 5)$ واقع بر آن کدام است؟

- (۱) $x + 2y - z = -11$
- (۲) $2x - 2y - 2z = -3$
- (۳) $2x + 2y - z = -9$
- (۴) $x - 2y - z = 5$

۷- کمترین مقدار تابع $f(x,y) = x^2 + 4y^2 - 8x + 16y$ کدام است؟

- (۱) -۸
- (۲) -۱۶
- (۳) -۲۴
- (۴) -۳۲

۸- معادله $x^2 - xy - xz + yz = 0$ بیانگر چه سطحی می‌باشد؟

- (۱) مخروط
- (۲) هذلولی گون
- (۳) سهمیگون
- (۴) دو صفحه

۹- رتبه ماتریس $A = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \end{bmatrix}$ چقدر است؟

- (۱) ۳
- (۲) ۲
- (۳) ۱
- (۴) ۴

۱۰- معادله یکی از نیمسازهای زوایای بین دو خط $x + y = 5$ و $7x - y = 19$ کدام است؟

- (۱) $2x - y = 11$
- (۲) $2x + y = 11$
- (۳) $-2x + y = 11$
- (۴) $-2x - y = 11$

آزمون (۲)

تعداد سوالات: ۱۰ مدت زمان پیشنهادی: ۱۵ دقیقه سطح آزمون: C

۱- مقدار خمیدگی کاردیوئید $r = a(1 - \cos \theta)$ چقدر است؟

- (۱) $\frac{3}{r\sqrt{2a}}$
- (۲) $\frac{2}{r\sqrt{a}}$
- (۳) $\frac{3}{2r\sqrt{a}}$
- (۴) $\frac{1}{r\sqrt{2a}}$

۲- کوتاهترین فاصله روی منحنی $x^2 y = 16$ تا مبدأ مختصات چقدر است؟

- (۱) $2\sqrt{2}$
- (۲) $3\sqrt{2}$
- (۳) $3\sqrt{3}$
- (۴) $2\sqrt{3}$

۳- مقدار انتگرال شارش $F = \nabla(xy^2 z^3)$ روی پاره خط بین $(1, 1, 1)$ و $(2, 1, -1)$ چقدر است؟

- (۱) -۱
- (۲) -۲
- (۳) -۳
- (۴) -۴

۴- اگر $x = e^s \cos t, y = e^s \sin t, z = u(x,y) = v(s,t)$ و آنگاه $\frac{\partial^2 z}{\partial s^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial t^2}$ برابر است با:

- (۱) $xy \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$
- (۲) $x^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$
- (۳) $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$
- (۴) $(x^2 + y^2) \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \right)$

۵- حاصل $\iiint_R (x^2 + y^2) dV$ روی مکعب $0 \leq x, y, z \leq 1$ کدام است؟

- (۱) $\frac{2}{3}$
- (۲) $\frac{2}{3}$
- (۳) $\frac{1}{3}$
- (۴) $\frac{5}{3}$

۶- معادله صفحه گذرا از فصل مشترک صفحات $x + 2y + 5z = 4$ و $x - y - 2z + 7 = 0$ که موازی محور yها باشد، کدام است؟

- (۱) $z + 4x = 22$
- (۲) $2z - 4x = 15$
- (۳) $z - 4x = 17$
- (۴) $2z + x = 19$

۷- معادله $9x^2 - z^2 - 18x - 18y - 6z = 0$ چه نوع سطحی را مشخص می‌سازد؟

- (۱) هذلولی گون
- (۲) سهمی گون هذلولوی
- (۳) دو صفحه
- (۴) هیچکدام

۸- بردار مماس بر منحنی محل تلاقی صفحه $x + y + z = 6$ و کره $x^2 + y^2 + z^2 = 14$ در نقطه $(1, 2, 3)$ کدام است؟

- (۱) $(1, -2, 1)$
- (۲) $(2, 1, -1)$
- (۳) $(2, 1, 1)$
- (۴) $(0, -2, 1)$

۹- مساحت متوازی‌الاضلاع حاصل از دو بردار $a = 6i + 2j - 2k$ و $b = 3i - 2j + 6k$ چقدر است؟

- (۱) ۴۹
- (۲) ۲۶
- (۳) ۹۸
- (۴) ۵۲

۱۰- ماکزیمم حجم یک مکعب مستطیل داخل بیضی گون به معادله $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ کدام است؟

- (۱) $\frac{\lambda abc}{\sqrt{3}}$
- (۲) $\frac{4abc}{3\sqrt{3}}$
- (۳) $\frac{4abc}{\sqrt{3}}$
- (۴) $\frac{\lambda abc}{3\sqrt{3}}$

آزمون (۴)

تعداد سوالات: ۱۰ مدت زمان پیشنهادی: ۱۵ دقیقه سطح آزمون: B

۱- معادله $x^2 + y^2 + 4z^2 - 2xy - 8z + 5 = 0$ چه نوع سطحی را مشخص می‌کند؟

- (۱) سهمی گون
- (۲) بیضی گون
- (۳) مخروط
- (۴) هیچکدام

۲- انتگرال $\int_{\frac{x}{2}}^{2-x} \int_{\frac{x}{2}}^{2-x} \phi(x,y) dy dx$ با کدامیک از موارد زیر برابر است؟

(۱) $\int_0^1 \int_0^{2\sqrt{y}} \phi(x,y) dx dy + \int_1^2 \int_0^{2-y} \phi(x,y) dx dy$

(۲) $\int_0^1 \int_0^{2\sqrt{y}} \phi(x,y) dx dy + \int_1^2 \int_0^{2-y} \phi(x,y) dx dy$

(۳) $\int_0^1 \int_0^{2\sqrt{y}} \phi(x,y) dx dy + \int_1^2 \int_1^{2-y} \phi(x,y) dx dy$

(۴) هیچکدام

۳- مقدار $\iint_S z dS$ بر رویه $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ از $z = 0$ تا $z = 1$ چقدر است؟

- (۱) π
- (۲) $\frac{3\sqrt{2}\pi}{2}$
- (۳) $\frac{2\sqrt{2}\pi}{3}$
- (۴) $\frac{\sqrt{2}\pi}{2}$

۴- جرم ناحیه محصور مابین $x = y^2$ و $y = x^2$ در صورتیکه چگالی در نقطه (x,y) برابر $\rho = x^2 + y^2$ باشد چقدر است؟

- (۱) $\frac{19}{105}$
- (۲) $\frac{17}{105}$
- (۳) $\frac{29}{105}$
- (۴) $\frac{22}{105}$

۵- حجم ناحیه محصور مابین رویه $z = 1 + \frac{y}{4} + x^2$ و صفحه $z = 0$ چقدر است؟

- (۱) π
- (۲) $\frac{2\pi}{3}$
- (۳) $\frac{2\pi}{2}$
- (۴) $\frac{4\pi}{3}$

۶- مساحت محصور مابین دو منحنی $x + y = 1$ و $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1$ چقدر است؟

- (۱) $\frac{1}{2}$
- (۲) $\frac{1}{6}$
- (۳) $\frac{1}{3}$
- (۴) $\frac{1}{4}$

۷- اگر مؤلفه قائم شتاب یک ذره در حال حرکت صفر باشد، کدام گزاره زیر در مورد آن صحیح است؟

- (۱) سرعت ذره ثابت است.
- (۲) مسیر حرکت ذره خط راست است.
- (۳) مسیر حرکت ذره روی یک دایره واقع است.
- (۴) سرعت ذره برابر صفر است.

۸- حاصل انتگرال $\int_{(-1,1)}^{(2,2,1)} (3x^2 dx + \frac{z}{y} dy + 2z \ln y dz)$ چقدر است؟

- (۱) $4 + \ln 2$
- (۲) $4 + 2 \ln 2$
- (۳) $8 + 2 \ln 2$
- (۴) $8 + \ln 2$

۹- فاصله دورترین نقطه منحنی $17x^2 + 12xy + 8y^2 = 100$ از مبدأ مختصات چقدر است؟

- (۱) $\sqrt{5}$
- (۲) $\sqrt{3}$
- (۳) $2\sqrt{3}$
- (۴) $2\sqrt{5}$

۱۰- مختصات نقطه برخورد میان‌های مثلث با رئوس $A(-2, -4)$ ، $B(2, 8)$ و $C(-2, 2)$ کدام است؟

- (۱) $(-1, 2)$
- (۲) $(1, -2)$
- (۳) $(-1, -2)$
- (۴) $(1, 2)$

آزمون (۴)

تعداد سوالات: ۱۰ مدت زمان پیشنهادی: ۱۵ دقیقه سطح آزمون: B

۱- معادلات $\begin{cases} x = u^2 - uv \\ y = 2uv + 2v^2 \end{cases}$ را به عنوان توابعی از (x,y) در همسایگی نقطه $(u,v,x,y) = (-1, 2, 1, 2)$ معرفی می‌کنند.

مقدار $\frac{\partial u}{\partial x}$ در نقطه مزبور چقدر است؟

- (۱) ۵
- (۲) -۵
- (۳) ۷
- (۴) -۷

۲- حاصل $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(\theta + \phi) d\theta d\phi$ برابر است با:

- (۱) ۰
- (۲) ۱
- (۳) ۲
- (۴) ۳

۳- مقدار $\iint_D (x+y)^2 dx dy$ که در آن D ناحیه درون بیضی $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ می‌باشد، چقدر است؟

- (۱) $\pi ab(a^2 + b^2)$
- (۲) $\frac{\pi ab}{2}(a^2 + b^2)$
- (۳) $\frac{\pi ab}{4}(a^2 + b^2)$
- (۴) $2\pi ab(a^2 + b^2)$

۴- اگر $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ و $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ باشد و f تابعی مشتق‌پذیر از r در نظر گرفته شود، آنگاه مقدار $\nabla f(r)$ کدام است؟

- (۱) $f'(r) \cdot \frac{\vec{r}}{r}$
- (۲) $f(r) \cdot \frac{\vec{r}}{r}$
- (۳) $f'(r) \cdot \frac{\vec{r}}{r^2}$
- (۴) $f'(r) \cdot \frac{\vec{r}}{r}$

۵- تاب منحنی $\vec{r}(t) = \sin t \cos t \vec{i} + \sin^2 t \vec{j} + \cos t \vec{k}$ در $t = \frac{\pi}{4}$ چقدر است؟

- (۱) $-\frac{2\sqrt{2}}{2}$
- (۲) $-\frac{3\sqrt{2}}{2}$
- (۳) $-\frac{9\sqrt{2}}{2}$
- (۴) $-\frac{6\sqrt{2}}{2}$

۶- مکان حرکت ذره‌ای به صورت $\vec{R}(t) = (\cos t + t \sin t)\vec{i} + (\sin t - t \cos t)\vec{j}$ می‌باشد، مؤلفه عددی قائم شتاب ذره کدام است؟

- (۱) t
- (۲) t^2
- (۳) $t + 1$
- (۴) $t^2 + 1$

۷- کار انجام شده توسط نیروی $\vec{F} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ روی خم $\vec{R}(t) = \cos t \vec{i} + \sin t \vec{j} + 2t \vec{k}$ در فاصله $0 \leq t \leq 2\pi$ چقدر است؟

- (۱) $4\pi^2$
- (۲) $6\pi^2$
- (۳) $9\pi^2$
- (۴) $18\pi^2$

۸- در ماتریس $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ مجموع درایه‌های A^{10} کدام است؟

- (۱) 2^{10}
- (۲) 2^{11}
- (۳) 2^{12}
- (۴) 2^9

۹- معادله $r^2 + z^2 = fr \cos \theta + 6r \sin \theta + 2z$ ، معادله در مختصات استوانه‌ای می‌باشد.

- (۱) بیضی گون
- (۲) سهمی گون
- (۳) کره
- (۴) هذلولی گون

۱۰- حاصل $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ در صورتی که $z = \arctg \frac{x-y}{1+xy}$ باشد، کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{(1-xy)^2}$
- (۲) صفر
- (۳) $\frac{2(x+y)}{1-xy}$
- (۴) $\frac{y}{1+(1-xy)^2}$

آزمون (۵)

تعداد سوالات: ۱۰ مدت زمان پیشنهادی: ۱۵ دقیقه سطح آزمون: B

۱- حاصل $\int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} (x^2 + y^2) dy dx$ چقدر است؟

- (۱) $\frac{2\pi}{4}$
- (۲) $\frac{2\pi}{2} - 4$
- (۳) $\frac{2\pi}{8} - 1$
- (۴) $\frac{2\pi}{16} - \frac{1}{2}$

۲- ماکسیمم مقدار انحنای منحنی $x = a \cos \theta$ ، $y = b \sin \theta$ چقدر است؟ ($a > b > 0$)

- (۱) $\frac{a}{b^2}$
- (۲) $\frac{ya}{b}$
- (۳) $\frac{b}{a^2}$
- (۴) $\frac{b}{2a}$

۳- مقدار $\iint_S y ds$ که در آن S بخشی از صفحه $z = 1 + y$ می‌باشد که درون مخروط $z = \sqrt{2(x^2 + y^2)}$ قرار دارد. کدام است؟

- (۱) 2π
- (۲) $\frac{\pi}{2}$
- (۳) π
- (۴) π^2

۴- قرینه نقطه $A(1, 1, 1)$ نسبت به صفحه $x + y - 2z - 6 = 0$ عبارتست از:

- (۱) $C(2, -2, -2)$
- (۲) $C(2, 2, 2)$
- (۳) $C(-2, 2, 2)$
- (۴) $C(2, 2, -2)$

۵- حاصل $\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(|x|+|y|)} dx dy$ برابر است با:

- (۱) ۱
- (۲) ۴
- (۳) $\frac{1}{e^2}$
- (۴) واگراست.

۶- مقدار $\oint_C (xy dx + yz dy + xz dz)$ روی مثلثی با رئوس $(0, 0, 1)$ و $(1, 0, 0)$ و $(0, 1, 0)$ کدام است؟

- (۱) ۱
- (۲) ۲
- (۳) $\frac{1}{2}$
- (۴) ۰

۷- حجم محصور درون استوانه $x^2 + y^2 = 2ax$ و رویه $z^2 = 2ax$ کدام است؟

- (۱) $\frac{22}{5} a^2$
- (۲) $\frac{64}{5} a^2$
- (۳) $\frac{64}{15} a^2$
- (۴) $\frac{128}{15} a^2$

۸- طول قوس از خم به معادلات $x = \cos t$ ، $y = \ln \frac{(1 + \sin t)}{\cos t} - \sin t$ از $t = 0$ تا $t = \frac{\pi}{2}$ کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{2}$
- (۲) $\frac{2}{2}$
- (۳) $\ln 2$
- (۴) $1 - \ln 2$

۹- رتبه ماتریس $\begin{bmatrix} 6 & 1 & 3 & 8 \\ 4 & 2 & 6 & -1 \\ 10 & 3 & 9 & 7 \\ 22 & 5 & 15 & 23 \end{bmatrix}$ کدام است؟

- (۱) ۱
- (۲) ۲
- (۳) ۳
- (۴) ۴

۱۰- ناحیه D محدود به منحنی بسته و همواره c است. اگر $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{R} =$ مساحت ناحیه $\vec{F} \cdot \vec{D}$ کدام است؟

- (۱) $\vec{F} = yi + xj$
- (۲) $\vec{F} = 2yi + 3xj$
- (۳) $\vec{F} = -xj$
- (۴) $\vec{F} = \frac{1}{2}yi + \frac{1}{2}xj$

آزمون (۶)

تعداد سوالات: ۱۰ مدت زمان پیشنهادی: ۱۵ دقیقه سطح آزمون: A

۱- حاصل $\int_C x^2 ds$ روی خط حاصل از تقاطع دو صفحه $x - y + z = 0$ و $x + y + 2z = 0$ از مبدأ $(2, 1, -2)$ چقدر است؟

- (۱) $6\sqrt{7}$
- (۲) $2\sqrt{14}$
- (۳) $4\sqrt{7}$
- (۴) $2\sqrt{14}$

۲- حاصل $\iint_R xy dx dy$ که در آن R ناحیه محصور مابین محور x ها، خط $x = 2a$ و منحنی $x^2 = 4ay$ می‌باشد کدام است؟

- (۱) $\frac{a^3}{2}$
- (۲) $\frac{a^3}{3}$
- (۳) $\frac{a^3}{4}$
- (۴) $\frac{3a^3}{4}$

۳- حجم هرم مثلث القاعده به رئوس $P(2, 2, 2)$ ، $Q(4, 2, 4)$ ، $R(4, 5, 4)$ و $S(5, 5, 6)$ چقدر است؟

- (۱) $\frac{2}{3}$
- (۲) $\frac{1}{6}$
- (۳) $\frac{14}{3}$
- (۴) $\frac{14}{9}$

۴- مقدار $\int_0^{\pi} \int_0^{\pi(1+\cos\theta)} r^2 \sin\theta dr d\theta$ برابر است با:

- (۱) $\frac{4}{3} a^2$
- (۲) $\frac{2}{3} a^2$
- (۳) $\frac{2}{3} a^2$
- (۴) $\frac{2}{3} a^2$

۵- مقدار انتگرال $\iint_D e^{-xy} dx dy$ که در آن D ناحیه $0 \leq x < \infty$ و $0 \leq y < \infty$ می‌باشد کدام است؟

- (۱) ۱
- (۲) $\sqrt{\pi}$
- (۳) e
- (۴) واگراست.

۶- فرض کنید $\begin{cases} u = x^2 + xy - y^2 \\ v = y^2 + 2xy \end{cases}$ در این صورت مقدار $(\frac{\partial x}{\partial u})_y$ در نقطه $x = 2$ و $y = -1$ چقدر است؟

- (۱) $\frac{1}{2}$
- (۲) ۲
- (۳) ۳
- (۴) $\frac{1}{2}$

۷- در چه نقطه‌ای روی خم $y = e^x$ شعاع خمیدگی کمترین مقدار ممکن را دارد؟

- (۱) $x = 2 \ln 2$
- (۲) $x = \frac{1}{2} \ln 2$
- (۳) $x = \ln \frac{1}{2}$
- (۴) $x = -\frac{1}{2} \ln 2$

۸- اگر مقدار سرعت ذره‌ای ثابت باشد، آنگاه کدام گزاره زیر صحیح است؟

- (۱) شتاب برابر صفر است.
- (۲) بردار سرعت بر مسیر حرکت عمود است.
- (۳) بردار سرعت در جهت B قرار دارد.
- (۴) بردار شتاب در جهت N قرار دارد.

۹- حاصل $\int_C y dx + (3y^2 - x) dy + z dz$ روی مسیر $\vec{R}(t) = ti + t^2 j + k$ ، $0 \leq t \leq 1$ کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{3}$
- (۲) $\frac{7}{12}$
- (۳) $\frac{5}{12}$
- (۴) $\frac{2}{9}$

۱۰- مساحت بیضی که استوانه $x^2 + y^2 = 1$ از صفحه $z = 2x$ جدا می‌کند، چقدر است؟

- (۱) $\pi\sqrt{5}$
- (۲) $2\pi\sqrt{5}$
- (۳) $2\pi|c|$
- (۴) $\pi\frac{\sqrt{5}}{5}$

آزمون (۷)

تعداد سوالات: ۱۰

مدت زمان پیشنهادی: ۱۵ دقیقه

سطح آزمون: A

۱- فاصله نقطه $(0,0,1)$ از سهمی گون $z = x^2 + 2y^2$ چقدر است؟

- (۱) $\frac{\sqrt{7}}{3}$
- (۲) $\frac{\sqrt{7}}{4}$
- (۳) $\frac{\sqrt{7}}{6}$
- (۴) $\frac{\sqrt{7}}{9}$

۲- مینیمم شعاع انحنای منحنی $y = e^x$ چقدر است؟

- (۱) $\frac{2\sqrt{2}}{3}$
- (۲) $\frac{2\sqrt{2}}{3}$
- (۳) $\frac{2\sqrt{2}}{2}$
- (۴) $\frac{2\sqrt{2}}{3}$

۳- مقدار مساحت بخش کروی مرز ناحیه $1 = x^2 + y^2 + z^2$ و $x^2 + y^2 + x \geq 0$ برابر است با:

- (۱) 4π
- (۲) 8π
- (۳) 4
- (۴) 8

۴- حجم محصور درون استوانه $x^2 + y^2 = 4$ صفحه $z = 3$ و $z = 0$ چقدر است؟

- (۱) 12π
- (۲) 24π
- (۳) 6π
- (۴) 8π

۵- مقدار $\int_0^{\infty} \frac{e^{-2x} - e^{-4x}}{x} dx$ چقدر می‌باشد؟

- (۱) $\frac{e}{2}$
- (۲) $-\frac{e}{2}$
- (۳) $\ln 2$
- (۴) $\ln \frac{1}{2}$

۶- میانگین فاصله نقاط درون دیسک $x^2 + y^2 \leq a^2$ و $x \geq 0$ و $y \geq 0$ از خط $x + y = 0$ برابر است با:

- (۱) $\frac{2\sqrt{2}a}{2\pi}$
- (۲) $\frac{4\sqrt{2}a}{2\pi}$
- (۳) $\frac{4\sqrt{2}a}{2\pi}$
- (۴) $\frac{2\sqrt{2}a}{2\pi}$

۷- معادله $x^2 = yz$ چه نوع سطحی را مشخص می‌سازد؟

- (۱) استوانه
- (۲) سهمی گون
- (۳) هذلولی گون یکپارچه
- (۴) مخروط

۸- اگر α, β, γ زوایای یک مثلث باشند، آنگاه $\sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} \sin \frac{\gamma}{2}$ کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{27}$
- (۲) $\frac{1}{9}$
- (۳) $\frac{1}{8}$
- (۴) $\frac{1}{27}$

۹- حاصل $\oint_C (y dx + z dy + x dz)$ که در آن C خم حاصل از تقاطع کره $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ و صفحه $x + y + z = 0$ می‌باشد، چقدر است؟

- (۱) $\sqrt{2}\pi a^2$
- (۲) $4\pi a^2$
- (۳) $2\pi a^2$
- (۴) $\sqrt{2}\pi a^2$

۱۰- اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ در این صورت $A^2 - 5A^T - A^T$ برابر است با:

- (۱) $-A^T$
- (۲) A^T
- (۳) I
- (۴) $-A$

آزمون (۸)

تعداد سوالات: ۱۰

مدت زمان پیشنهادی: ۱۵ دقیقه

سطح آزمون: A

۱- فرض کنید $F(x,y) = \begin{cases} \frac{2xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$ در این صورت کدام گزاره زیر برقرار می‌باشد؟

- (۱) F_x و F_y در مبدأ موجود نیست.
- (۲) F در مبدأ مختصات پیوسته نمی‌باشد.
- (۳) $F_x(x,y) + F_y(y,x) = 0$
- (۴) هیچکدام

۲- فرض کنید از دستگاه $\begin{cases} xy^2 + xzu + yv^2 = 3 \\ x^2yz + 2xv - u^2v^2 = 2 \end{cases}$ می‌توان (u,v) را برحسب x, y, z در همسایگی نقطه $(1,1,1,1,1)$ به دست آورد. در این صورت مقدار $(\frac{\partial v}{\partial y})_{x,z}$ در نقطه مزبور چقدر است؟

- (۱) $-\frac{5}{4}$
- (۲) $-\frac{7}{4}$
- (۳) -2
- (۴) $-\frac{3}{4}$

۳- به ازای چه مقادیر k انتگرال $\iint_{x^2+y^2 \leq 1} \frac{dA}{(x^2+y^2)^k}$ همگراست؟

- (۱) $k > \frac{1}{2}$
- (۲) $k > 1$
- (۳) $k < 1$
- (۴) $k < \frac{1}{2}$

۴- حجم محصور درون ناحیه محصور بین سه استوانه $x^2 + y^2 = a^2$ ، $x^2 + z^2 = a^2$ و $y^2 + z^2 = a^2$ چقدر است؟

- (۱) $\frac{8a^3}{3}$
- (۲) $16(1 - \frac{\sqrt{2}}{2})a^3$
- (۳) $8\sqrt{2}a^3$
- (۴) $8(\sqrt{2}-1)a^3$

۵- حاصل $\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2-2y^2-3z^2} dx dy dz$ برابر است با:

- (۱) $\pi\sqrt{\pi}$
- (۲) $\pi\sqrt{6\pi}$
- (۳) $6\pi^2$
- (۴) $\pi\sqrt{\pi/6}$

۶- اگر $F(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}) = 0$ آنگاه $x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} + z \frac{\partial z}{\partial z}$ برابر است با:

- (۱) 0
- (۲) z
- (۳) 1
- (۴) $\frac{\partial F / \partial x + \partial F / \partial y}{\partial F / \partial z}$

۷- اگر \vec{A} ، یک بردار یکه (واحد) باشد، آنگاه حاصل $\vec{A} \times [\vec{A} \times (\vec{A} \times \vec{B})]$ کدام است؟

- (۱) 0
- (۲) $A \times B$
- (۳) $B \times A$
- (۴) $(\vec{A} \cdot \vec{B})\vec{A}$

۸- فرض کنید سطح S (با قائم رویه خارج n)، محصور کننده ناحیه بین صفحات $z = 0$ ، $y = 0$ و $y = e$ و سهمی $z = 1 - x^2$ باشد. در این صورت حاصل $\iint_S F \cdot nds$ که در آن $F = (x + \cos y, y + \sin z, z + e^x)$ چقدر است؟

- (۱) 0
- (۲) $\frac{e-1}{4}$
- (۳) $4e$
- (۴) $4e-1$

۹- به ازای چه مقدار a بردار $(1,0,-1)$ یک بردار ویژه ماتریس $\begin{bmatrix} a & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 4 \end{bmatrix}$ می‌باشد؟

- (۱) 2
- (۲) 1
- (۳) -1
- (۴) -2

۱۰- شعاع انحنای منحنی $y = \ln x$ در نقطه $x = \frac{2\sqrt{5}}{5}$ چقدر است؟

- (۱) $\frac{9}{5}$
- (۲) $\frac{12}{5}$
- (۳) $\frac{27}{10}$
- (۴) $\frac{18}{5}$

آزمون (۹)

تعداد سؤالات: ۱۰

مدت زمان پیشنهادی: ۱۵ دقیقه

سطح آزمون: A

۱- اگر نیروی وارد بر ذره‌ای همواره بر بردار سرعت عمود باشد، آنگاه:

- (۱) شتاب ذره ثابت است.
 (۲) مقدار سرعت ثابت است.
 (۳) مسیر حرکت ذره دایره شکل خواهد بود.
 (۴) مقدار سرعت افزایش نمی‌یابد.

۲- کدامیک از فرمولهای زیر برای یک منحنی صحیح می‌باشند؟

$$\tau = \frac{|dN/dt|}{|V|^2} \quad (۱) \quad \tau = \frac{|V \times a|}{|V|^2} \quad (۲) \quad \tau = \frac{|dB/dt|}{|V|} \quad (۳) \quad \tau = \frac{|V \times a|}{|V|^2} \quad (۴)$$

۳- مقدار انتگرال تابع $f(x, y, z) = x + y + z$ بر روی مکعبی که صفحات $x=1$, $y=1$, $z=1$ از یک هشتم اول جدا می‌کنند برابر است با:

$$8 \quad (۱) \quad \frac{8}{3} \quad (۲) \quad 9 \quad (۳) \quad \frac{16}{3} \quad (۴)$$

۴- مقدار انتگرال $\iint_{|x+y| \leq a} e^{x+y} dA$ برابر است با:

$$a \sinh 2a \quad (۱) \quad a^2 \sinh a \quad (۲) \quad 2 \sinh a \quad (۳) \quad 2a \sinh 2a \quad (۴)$$

۵- مقدار $\int_0^1 \int_x^{\sqrt{1-x^2}} \frac{xy dx dy}{\sqrt{x^2+y^2}}$ برابر است با:

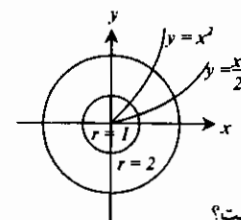
$$\sqrt{2}-1 \quad (۱) \quad 1+\sqrt{2} \quad (۲) \quad 2-\sqrt{2} \quad (۳) \quad 1-\frac{\sqrt{2}}{2} \quad (۴)$$

۶- مساحت مثلث به رئوس $A(-2, -4)$, $B(2, 8)$ و $C(10, 2)$ برابر است با:

$$30 \quad (۱) \quad 60 \quad (۲) \quad 15 \quad (۳) \quad 120 \quad (۴)$$

۷- حاصل $\iint_D \frac{xy^2+x^2}{x^2} dx dy$ که در آن D به صورت زیر است، چقدر است؟

$$\frac{1}{4} \quad (۱) \quad \frac{1}{2} \quad (۲) \quad 1 \quad (۳) \quad \frac{3}{4} \quad (۴)$$

۸- مقدار $I = \iiint_R \frac{dx dy dz}{(x^2+y^2+z^2)^2}$ که R ناحیه بین $x^2+y^2+z^2=9$ و $x^2+y^2+z^2=1$ است، کدام است؟

$$4\pi \ln 2 \quad (۱) \quad 2\pi \ln 3 \quad (۲) \quad 2\pi \ln 6 \quad (۳) \quad 4\pi \ln 2 \quad (۴)$$

۹- حاصل $\iiint_D (3-xy-x-y) dv$ در صورتی که D ناحیه $0 \leq z \leq 1$ و $x^2+y^2+z^2 \leq 1$ باشد، کدام است؟

$$4\pi \quad (۱) \quad 8\pi \quad (۲) \quad 2\pi \quad (۳) \quad 22\pi \quad (۴)$$

۱۰- در مورد تابع $f(x, y) = \begin{cases} \frac{y^2}{x^2+y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$ کدامیک از گزینه‌های زیر صحیح است؟(۱) مشتقات پاره‌ای f در مبدأ موجود و برابر صفر هستند.(۲) $\frac{\partial f}{\partial x}$ در مبدأ ناپیوسته است.(۳) $\frac{\partial f}{\partial y}$ در مبدأ پیوسته است.(۴) f در مبدأ ناپیوسته است.

آزمون (۱۰)

تعداد سؤالات: ۱۰

مدت زمان پیشنهادی: ۱۵ دقیقه

سطح آزمون: A

۱- مقدار انحنای خمیدگی، منحنی $r(t) = \sin t \cos t \bar{i} + \sin^2 t \bar{j} + \cos t \bar{k}$ در $t = \frac{\pi}{4}$ برابر است با:

$$\frac{2\sqrt{29}}{3} \quad (۱) \quad \frac{2\sqrt{29}}{2} \quad (۲) \quad \frac{2\sqrt{29}}{9} \quad (۳) \quad \frac{2\sqrt{29}}{8} \quad (۴)$$

۲- مقدار دترمینان $\begin{vmatrix} 2 & 5 & 7 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ -2 & -3 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 5 & 4 \end{vmatrix}$ چقدر است؟

$$60 \quad (۱) \quad 48 \quad (۲) \quad 70 \quad (۳) \quad 30 \quad (۴)$$

۳- حاصل $\iint_D \frac{dx dy}{(x+y)^2}$ که در آن D ناحیه $0 \leq x \leq 1$ و $0 \leq y \leq x^2$ می‌باشد چقدر است؟

$$2 \ln 2 \quad (۱) \quad \frac{1}{2} \ln 2 \quad (۲) \quad \ln 2 \quad (۳) \quad 2 \ln 2 \quad (۴)$$

۴- شار برونسوی بردار مکان $F = \frac{1}{y} \bar{x}i + \frac{1}{y} \bar{y}j + \frac{1}{y} \bar{z}k$ گذرنده از یک رویه بسته قطعه قطعه هموار برابر است با: (V حجمی است که رویه در بر می‌گیرد).

$$V \quad (۱) \quad \frac{V}{2} \quad (۲) \quad 0 \quad (۳) \quad \text{هیچکدام} \quad (۴)$$

۵- مقدار انتگرال $\iiint \frac{dx dy dz}{\sqrt{1-x^2-y^2-z^2}}$ درون کره $x^2+y^2+z^2=1$ برابر است با:

$$\pi \quad (۱) \quad 2\pi \quad (۲) \quad \pi^2 \quad (۳) \quad 4\pi^2 \quad (۴)$$

۶- معادلات $F(x, y, z) = 0$ و $G(x, y, z) = 0$ ، متغیرهای x و y را برحسب متغیر z بیان می‌کنند، در این صورت $\frac{dx dy dz}{dy dz dx}$ برابر است با:

$$1 \quad (۱) \quad -1 \quad (۲) \quad 0 \quad (۳) \quad \text{هیچکدام} \quad (۴)$$

۷- حاصل $I = \int_0^{\infty} \frac{\arctg x}{x(1+x^2)} dx$ کدام است؟

$$2\pi \ln 2 \quad (۱) \quad \pi \ln 2 \quad (۲) \quad \ln 2 \quad (۳) \quad \frac{\pi}{2} \ln 2 \quad (۴)$$

۸- کدام یک از روابط زیر برقرار نمی‌باشد؟ (F_1 و F_2 میدان برداری و g_1 و g_2 توابع اسکالر می‌باشند).

$$\nabla(g_1 g_2) = g_2 \nabla g_1 + g_1 \nabla g_2 \quad (۱) \quad \text{curl}(g_1 F_1) = (\nabla g_1) \times F_1 + g_1 (\nabla \times F_1) \quad (۲)$$

$$\text{div}(g_1 F_1) = \nabla g_1 \cdot F_1 + g_1 \text{div} F_1 \quad (۳) \quad \text{div}(F_1 \times F_2) = (\text{curl} F_1) \cdot F_2 + (\text{curl} F_2) \cdot F_1 \quad (۴)$$

۹- مساحت رویه‌ای که صفحه $z=0$ از سهمیوار $x^2+y^2+z=1$ جدا می‌کند، برابر کدام است؟

$$\frac{\pi}{3}(\sqrt{5}-1) \quad (۱) \quad \frac{\pi}{2}(\sqrt{5}-1) \quad (۲) \quad \frac{\pi}{6}(\sqrt{5}-1) \quad (۳) \quad \frac{\pi}{4}(\sqrt{5}-1) \quad (۴)$$

۱۰- فرض کنید P صفحه $x+y+z=1$ باشد، در این صورت مقدار $\iint_P \frac{dS}{(x^2+y^2+z^2)^2}$ چقدر است؟

$$\pi \sqrt{2} \quad (۱) \quad 2\pi \sqrt{2} \quad (۲) \quad \frac{\pi \sqrt{2}}{2} \quad (۳) \quad 2\pi \quad (۴)$$

پاسخنامه آزمون‌های خودسنجی

آزمون (۱)				
۱- گزینه «۲»	۲- گزینه «۱»	۳- گزینه «۳»	۴- گزینه «۲»	۵- گزینه «۴»
۶- گزینه «۴»	۷- گزینه «۴»	۸- گزینه «۴»	۹- گزینه «۲»	۱۰- گزینه «۲»
آزمون (۲)				
۱- گزینه «۱»	۲- گزینه «۴»	۳- گزینه «۳»	۴- گزینه «۴»	۵- گزینه «۲»
۶- گزینه «۳»	۷- گزینه «۲»	۸- گزینه «۱»	۹- گزینه «۱»	۱۰- گزینه «۴»
آزمون (۳)				
۱- گزینه «۴»	۲- گزینه «۲»	۳- گزینه «۲»	۴- گزینه «۴»	۵- گزینه «۱»
۶- گزینه «۳»	۷- گزینه «۲»	۸- گزینه «۴»	۹- گزینه «۴»	۱۰- گزینه «۱»
آزمون (۴)				
۱- گزینه «۲»	۲- گزینه «۲»	۳- گزینه «۲»	۴- گزینه «۴»	۵- گزینه «۴»
۶- گزینه «۳»	۷- گزینه «۴»	۸- گزینه «۳»	۹- گزینه «۲»	۱۰- گزینه «۱»
آزمون (۵)				
۱- گزینه «۳»	۲- گزینه «۱»	۳- گزینه «۱»	۴- گزینه «۴»	۵- گزینه «۲»
۶- گزینه «۳»	۷- گزینه «۴»	۸- گزینه «۳»	۹- گزینه «۲»	۱۰- گزینه «۱»
آزمون (۶)				
۱- گزینه «۲»	۲- گزینه «۲»	۳- گزینه «۲»	۴- گزینه «۱»	۵- گزینه «۴»
۶- گزینه «۱»	۷- گزینه «۴»	۸- گزینه «۴»	۹- گزینه «۲»	۱۰- گزینه «۱»
آزمون (۷)				
۱- گزینه «۲»	۲- گزینه «۲»	۳- گزینه «۲»	۴- گزینه «۱»	۵- گزینه «۳»
۶- گزینه «۲»	۷- گزینه «۴»	۸- گزینه «۳»	۹- گزینه «۴»	۱۰- گزینه «۱»
آزمون (۸)				
۱- گزینه «۳»	۲- گزینه «۲»	۳- گزینه «۲»	۴- گزینه «۲»	۵- گزینه «۴»
۶- گزینه «۲»	۷- گزینه «۲»	۸- گزینه «۳»	۹- گزینه «۱»	۱۰- گزینه «۱»
آزمون (۹)				
۱- گزینه «۲»	۲- گزینه «۲»	۳- گزینه «۲»	۴- گزینه «۳»	۵- گزینه «۴»
۶- گزینه «۲»	۷- گزینه «۲»	۸- گزینه «۱»	۹- گزینه «۳»	۱۰- گزینه «۱»
آزمون (۱۰)				
۱- گزینه «۳»	۲- گزینه «۲»	۳- گزینه «۲»	۴- گزینه «۱»	۵- گزینه «۳»
۶- گزینه «۱»	۷- گزینه «۴»	۸- گزینه «۴»	۹- گزینه «۲»	۱۰- گزینه «۱»

تست‌های سراسری ۱۳۸۵

عمران

ک ۱- اگر a و b اعداد ثابت مثبت باشند، ماکزیمم تابع $f(x,y) = \frac{x}{a} + \frac{y}{b}$ با شرط (قید) $x^2 + y^2 = 1$ برابر با چیست؟

(۱) $\frac{a^2 + b^2}{ab}$ (۲) $\frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{ab}$ (۳) $\frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{ab}$ (۴) $\frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{2ab}$

ک ۲- اگر $F(x,y,z) = x\mathbf{i} - 2y\mathbf{j} + z\mathbf{k} = (x, -2y, z)$ و S کره $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ باشد، مقدار انتگرال $\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, dS$ که در آن \mathbf{n} بردار قائم یکه خارجی S است، برابر با چیست؟

(۱) $\frac{4}{3}\pi a^3$ (۲) $2\pi a^3$ (۳) $3\pi a^3$ (۴) $4\pi a^3$

ک ۳- مقدار انتگرال $I = \int_C (x \sin(y^2) - y^2) dx + (x^2 y \cos(y^2) + 2x) dy$ که در آن C مرز دوزنقه به رئوس $(0, -2), (0, 0), (1, -1), (1, 1)$ و $(0, 2)$ می‌باشد و در جهت مثبت (خلاف عقربه‌های ساعت) پیموده شده است، برابر با چیست؟

(۱) ۵ (۲) ۶ (۳) ۸ (۴) ۹

ک ۴- طول قوس منحنی زنجیری به معادله $y = a \cosh\left(\frac{x}{a}\right)$ و $a > 0$ تا نقطه $(0, a)$ تا نقطه (x_1, y_1) ، $x_1 > 0$ ، برابر است با:

(۱) $\sinh\left(\frac{x_1}{a}\right)$ (۲) $a \sinh\left(\frac{x_1}{a}\right)$ (۳) $\frac{1}{a} \sinh\left(\frac{x_1}{a}\right)$ (۴) $a^2 \sinh\left(\frac{x_1}{a}\right)$

ک ۵- حجم محدود به کره $x^2 + y^2 + z^2 = 5$ از بالا و سهمی $z = x^2 + y^2$ از پایین برابر است با:

(۱) $\frac{2}{3}\pi$ (۲) $\frac{2}{3}\pi(5\sqrt{5} - 4)$ (۳) $\frac{2}{3}\pi\sqrt{5}$ (۴) $2\pi(\sqrt{5} - 4)$

ک ۶- λ باید کدامیک از مقادیر زیر باشد تا انتگرال $\int_A^B (z^2 dx + 2y dy + \lambda xz dz)$ از مسیر انتگرال‌گیری مستقل باشد؟

(۱) $\lambda = 0$ (۲) $\lambda = -1$ (۳) $\lambda = 1$ (۴) $\lambda = 2$

ک ۷- مقدار انتگرال روبرو برابر با چیست؟ $\int_1^2 \left[\int_{x^2}^x (x^2 + y^2)^{-1/2} dy \right] dx$

(۱) $\sqrt{2} + 1$ (۲) $2\sqrt{2} - 1$ (۳) $\sqrt{2} - 1$ (۴) $2\sqrt{2} - 2$

عمران - نقشه برداری

ک ۸- انتگرال منحنی‌الخط $I = \int_C yx^2 dx + (x+y) dy$ که در آن C عبارت است از محور y ‌ها از مبدأ تا $(-1, 0)$ و سپس

خط $y = -1$ از $(-1, 0)$ تا $(0, -1)$ و $(0, -1)$ را به عنوان تابعی از x و y تعریف می‌کنند. $\frac{\partial u}{\partial x}$ برابر با چیست؟

(۱) $-\frac{1}{3}$ (۲) $\frac{1}{3}$ (۳) $\frac{2}{3}$ (۴) $\frac{1}{6}$

ک ۹- دو معادله $\begin{cases} 2x = v^2 - u^2 \\ y = uv \end{cases}$ و u, v را به عنوان تابعی از x و y تعریف می‌کنند. $\frac{\partial u}{\partial x}$ برابر با چیست؟

(۱) $\frac{u}{u^2 + v^2}$ (۲) $\frac{v}{u^2 + v^2}$ (۳) $-\frac{u}{u^2 + v^2}$ (۴) $-\frac{v}{u^2 + v^2}$

ک ۱۰- کدامیک از معادلات زیر معادله دایره بوسان منحنی $y = e^x$ در نقطه $(1, 0)$ است؟

(۱) $(x+2)^2 + (y-2)^2 = 8$ (۲) $(x+2)^2 + (y-2)^2 = 4$ (۳) $(x-2)^2 + (y+2)^2 = 8$ (۴) $(x-2)^2 + (y-2)^2 = 4$

ک ۱۱- اگر $F(x,y,z) = (x^2 + y^2, y^2 - z^2, z)$ و S کره $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ باشد، مقدار انتگرال $\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, dS$ که در آن \mathbf{n} بردار قائم خارجی S است، برابر با چیست؟

(۱) πa^3 (۲) $\frac{2}{3}\pi a^3$ (۳) $\frac{4}{3}\pi a^3$ (۴) $\frac{8}{3}\pi a^3$

۱۲- مقدار انتگرال $I = \int_0^1 dx \int_{\sqrt{x}}^1 e^{y^2} dy$ برابر با چیست؟

- (۱) $e-1$ (۲) $\frac{e-1}{2}$ (۳) $\frac{e-1}{3}$ (۴) $\frac{e+1}{2}$

۱۳- مقدار انتگرال $I = \iiint_S \sqrt{x^2+y^2} dx dy dz$ که در آن S جسم محصور بین نیمه بالایی مخروط $z^2 = x^2+y^2$ و صفحه $z=1$ است برابر با چیست؟

- (۱) $\frac{\pi}{3}$ (۲) $\frac{\pi}{6}$ (۳) $\frac{2\pi}{3}$ (۴) $\frac{\pi}{12}$

۱۴- معادله صفحه مماس بر سطح $4x^2+y^2-16z=0$ در نقطه $(2, 4, 2)$ کدامیک از گزینه‌های زیر است؟

- (۱) $x-2y+z=2$ (۲) $x+2y-z=2$ (۳) $2x-y+2z=4$ (۴) $2x+y-2z=4$

۱۵- مقدار انتگرال $\oint_C (xydx - x^2ydy)$ که در آن C مثلثی است به رئوس $(0,0)$ ، $(1,0)$ و $(1,1)$ که یک بار در جهت مثلثاتی پیموده شده است، برابر با چیست؟

- (۱) -1 (۲) $-\frac{5}{12}$ (۳) $-\frac{11}{12}$ (۴) -4

مکانیک

۱۶- تابع f با ضابطه $f(x,y) = x^2 + x^2y + y^2 - 1$ در نقطه $(1, -1)$ در امتداد کدام بردار نزولی است؟

- (۱) $-\vec{i} + \vec{j}$ (۲) $\vec{i} - \vec{j}$ (۳) $-\vec{i} + \vec{j}$ (۴) $\vec{i} - \vec{j}$

۱۷- حجم محصور بالای صفحه xy و بین سهمی $z = x^2 + y^2$ و استوانه‌ای به معادله $x^2 + y^2 = a^2$ برابر است با:

- (۱) $\frac{\pi}{4} a^2$ (۲) $\frac{\pi}{2} a^4$ (۳) $\frac{\pi}{3} a^2$ (۴) $\frac{2\pi}{3} a^2$

۱۸- نزدیک کدام نقاط (r, s) (با چه شرطی) تبدیل $\begin{cases} x = r^2 + 2s \\ y = s^2 - 2r \end{cases}$ را می‌توان برای r و s به عنوان توابعی از x و y حل نمود؟

- (۱) $rs = -1$ (۲) $rs \neq -1$ (۳) $s+r \neq 0$ (۴) $s^2+r^2 \neq 0$

۱۹- انحناى منحنی $\begin{cases} x = \cos u \\ y = \sin u \\ z = u \end{cases}$ در نقطه کلی $P(u)$ برابر است با:

- (۱) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (۲) $\frac{1}{2}$ (۳) 1 (۴) 2

۲۰- مساحت ناحیه محدود به خم‌های $xy = a$ ، $xy = b$ ، $y^2 = \alpha x$ و $y^2 = \beta x$ با شروط $0 < a < b$ و $0 < \alpha < \beta$ که در ربع اول مختصات قرار دارند عبارت است از:

- (۱) $\frac{1}{3}(b-a)\log(\frac{\beta}{\alpha})$ (۲) $\frac{1}{6}(a-b)\log(\frac{\alpha}{\beta})$ (۳) $\frac{1}{3}(\alpha-\beta)\log(\frac{a}{b})$ (۴) $\frac{1}{6}(\beta-\alpha)\log(\frac{b}{a})$

۲۱- اگر C قسمتی از سهمی $y = x^2$ از مبدأ تا $A(2, 4)$ و پاره خط واصل A به مبدأ باشد، حاصل $\oint_C 2ydx + 4xdy$ برابر است با:

- (۱) $-\frac{8}{3}$ (۲) $-\frac{4}{3}$ (۳) $\frac{4}{3}$ (۴) $\frac{8}{3}$

۲۲- رابطه میان ثابت‌های حقیقی a و b و c چگونه باشد تا میدان برداری $F(x,y,z) = (ay^2 + 2czx)\vec{i} + y(bx + cz)\vec{j} + (ay^2 + cx^2)\vec{k}$ پایستار باشد؟

- (۱) $a = b = c$ (۲) $a = b = -c$ (۳) $2a = b = c$ (۴) $2a = b = -c$

آمار

۲۳- برد تابع $f: R^3 \rightarrow R$ با ضابطه $f(x,y,z) = \frac{x}{|y|-|z|}$ کدام مجموعه است؟

- (۱) $R^3 - \{(0,0,0)\}$ (۲) $\{(x,y,z): y \neq z\}$ (۳) $\{(x,y,z): x=y=z\}$ (۴) R

۲۴- معادله خط مماس بر منحنی $\begin{cases} y = x^2 \\ z^2 = 16 - y \end{cases}$ در نقطه $(4, 16, 0)$ کدام است؟

- (۱) $\begin{cases} 4x = y \\ z = 0 \end{cases}$ (۲) $\begin{cases} y - x = 12 \\ z = 0 \end{cases}$ (۳) $\begin{cases} y + x = 20 \\ z = 0 \end{cases}$ (۴) $\begin{cases} x = 4 \\ y = 16 \end{cases}$

۲۵- در نقطه $(e, 1)$ در چه سویی تابع $f(x,y) = x^y$ بیشترین افزایش را دارد؟

- (۱) $(-e, 1)$ (۲) $(1, e)$ (۳) $(e, -1)$ (۴) $(e, 1)$

۲۶- نزدیکترین نقطه منحنی به معادله $y = \sqrt{x^2+1}$ از نقطه $B(1,0)$ کدام است؟

- (۱) $(0, 1)$ (۲) $(1, \sqrt{2})$ (۳) $(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{5}}{2})$ (۴) $(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{5}}{2})$

۲۷- اگر A ناحیه درون دایره به معادله $x^2 + y^2 = x$ باشد، مقدار $\iint_A \frac{dx dy}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$ کدام است؟

- (۱) $\pi - 1$ (۲) $\pi - 2$ (۳) $2\pi - 1$ (۴) $2\pi - 2$

۲۸- اگر S ناحیه بسته محدود به صفحات مختصات و صفحه $x+y+z=1$ باشد مقدار $\iiint_S z^2 dx dy dz$ کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{30}$ (۲) $\frac{1}{25}$ (۳) $\frac{1}{60}$ (۴) $\frac{1}{20}$

مدیریت سیستم و بهره‌وری و مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی

۲۹- انحناى مسیر $r(t) = 2 \cos t \vec{i} + 2 \sin t \vec{j} + 4t \vec{k}$ کدام است؟

- (۱) 1 (۲) $\frac{2}{25}$ (۳) $\frac{2}{4}$ (۴) 5

۳۰- معادله صفحه عمود بر منحنی $x = \sin t$ ، $y = \sin t$ ، $z = \cos 2t$ در نقطه $P = (\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0)$ کدام است؟

- (۱) $\sqrt{2}x + \sqrt{2}y - 4z = 2$ (۲) $\sqrt{2}x - \sqrt{2}y + 4z = 2$ (۳) $-\sqrt{2}x - \sqrt{2}y + 4z = 2$ (۴) $-\sqrt{2}x + \sqrt{2}y - 4z = 2$

۳۱- معادلات خط مماس بر منحنی $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 9 \\ x^2 + y^2 - 8z = 0 \end{cases}$ در نقطه $(2, 2, 1)$ کدامند؟

- (۱) $\frac{x}{2} = \frac{y}{2} = \frac{z}{1}$ (۲) $x + y = 4, z = 1$

(۳) $\frac{x-2}{2} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-1}{1}$ (۴) $x = 2t + 2, y = 2t + 2, z = 2$ پارامتر

۳۲- به ازای چه مقادیری از a دستگاه $\begin{cases} x - y + az = 0 \\ 2x - y + 2z = 0 \\ 6x - 4y + 5z = 0 \end{cases}$ بی‌نهایت جواب دارد؟

- (۱) $a = -1$ (۲) $a = 0$ (۳) $a = 1$ (۴) $a = 2$

۳۳- فرض کنید دستگاه $f_1(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0$ و $f_2(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0$ نسبت به متغیرهای x_1 و x_2 قابل حل باشد و

مقدار $(\frac{\partial f_1}{\partial x_j}) = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & 2 \\ 5 & 1 & -1 & 4 \end{bmatrix}$ کدام است؟

- (۱) -1 (۲) $-\frac{1}{2}$ (۳) $\frac{1}{2}$ (۴) 1

۳۴- فرض کنید در یک همسایگی از نقطه $(x, y) = (1, 1)$ توابع $w = w(x, y)$ و $z = z(x, y)$ در معادله‌های $2x^2 + y^2 + z^2 - zw = 0$

و $x^2 + y^2 + 2z^2 + zw - 8 = 0$ صدق کنند. مقادیر $\frac{\partial w}{\partial x}$ و $\frac{\partial z}{\partial x}$ در نقطه مذکور کدامند؟

- (۱) ± 2 و ± 1 (۲) ± 1 و -1 (۳) ± 1 و -2 (۴) 1 و ± 2

۳۵- ماکسیمم تابع $w = xyz$ نسبت به قید $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ کدام است؟

- (۱) $\sqrt{3}$ (۲) $\frac{1}{\sqrt{3}}$ (۳) $3\sqrt{3}$ (۴) $\frac{1}{3\sqrt{3}}$

۳۶- در نقطه $p(1, 2, 3)$ بزرگترین و کوچکترین مقدار مشتق جهت‌دار تابع $f(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2$ کدامند؟

- (۱) $\pm\sqrt{14}$ (۲) $\pm 2\sqrt{14}$ (۳) $\pm 3\sqrt{14}$ (۴) ± 2

۳۷- نزدیکترین نقطه منحنی $1 = x^2 + y^2 = 1 - xy + y^2 - z^2$ به مبدأ کدام است؟

- (۱) $(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0)$ (۲) $(\frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0)$ (۳) $(\pm \frac{1}{\sqrt{2}}, \pm \frac{1}{\sqrt{2}}, 0)$ (۴) $(0, \pm 1, 0), (\pm 1, 0, 0)$

۳۸- حجم ناحیه محدود به کره $\rho = a$ و مخروط‌های $\phi = \frac{\pi}{3}$ و $\phi = \frac{2\pi}{3}$ کدام است؟

- (۱) πa^3 (۲) $2\pi a^3$ (۳) $\frac{2\pi a^3}{3}$ (۴) $\frac{3\pi a^3}{4}$

۳۹- مقدار انتگرال دوگانه $\int_0^1 \int_0^1 \sin \pi x^2 dx$ کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{\pi}$ (۲) $\frac{2}{\pi}$ (۳) 1 (۴) 2π

۴۰- انتگرال خط $\int_C (x^2 + y^2) dx + (x + 2y)^2 dy$ روی مثلث C با رأس‌های $(0, 0), (1, 1), (0, 2)$ در جهت مثلثاتی کدام است؟

- (۱) $-\frac{2}{3}$ (۲) $-\frac{8}{3}$ (۳) $\frac{2}{3}$ (۴) $\frac{8}{3}$

ریاضی

۴۱- اگر S پوسته جسم توپر W در فضای سه بعدی و n بردار نرمال بکه خارجی بر S و V نیز حجم W باشد آنگاه:

$V = \frac{1}{3} \iint_S (x, y, z) \cdot n dS$ (۱) $V = \frac{1}{3} \iint_S (x, y, z) \cdot dS$ (۲) $V = \frac{1}{3} \iint_S (x, y, z) \cdot n dS$ (۳) $V = \frac{1}{3} \iint_S (x, y, z) \cdot n dS$ (۴)

۴۲- مشتق سوئی تابع $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x}{x-y} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$ در نقطه $(0, 0)$ در کدام جهت موجود است؟

- (۱) در جهت بردار $\vec{i} - \vec{j}$ (۲) در جهت بردار $\vec{i} + \vec{j}$ (۳) در جهت بردار \vec{i} (۴) در جهت بردار \vec{j}

۴۳- مشتق سوئی تابع دیفرانسیل‌پذیر $f(x, y)$ در نقطه $(1, 2)$ و در جهتی به طرف نقطه $(2, 2)$ برابر 2 و در نقطه $(1, 2)$ و در جهتی به طرف $(1, 1)$ برابر -2 است. مشتق سوئی f در نقطه $(1, 2)$ و در جهتی به طرف $(4, 6)$ برابر است با:

- (۱) $-\frac{14}{5}$ (۲) $-\frac{12}{5}$ (۳) $\frac{12}{5}$ (۴) $\frac{14}{5}$

۴۴- اگر S قسمتی از مخروط $X^2 + Y^2 + Z^2 = 1$ باشد که بین صفحات $X = 1$ و $X = 0$ واقع است آنگاه $\iint_S X^2 ds$ برابر است با:

- (۱) $\pi\sqrt{2}$ (۲) $\frac{\pi\sqrt{2}}{2}$ (۳) π (۴) 2π

۴۵- تابع مقابل مفروض است: $f(X, Y) = \begin{cases} \frac{X^2 Y}{X^2 + Y^2} & (X, Y) \neq (0, 0) \\ 0 & (X, Y) = (0, 0) \end{cases}$ کدامیک از موارد زیر درست است؟

- (۱) f در مبدأ پیوسته است. (۲) f در مبدأ دیفرانسیل‌پذیر است. (۳) مشتق سوئی f در مبدأ در هر جهت وجود دارد. (۴) مشتق سوئی f در مبدأ فقط در جهت محور X ها وجود دارد.

۴۶- حاصل $\int (x^2 y \cos x + 2xy \sin x) dx + x^2 \sin x dy$ در امتداد منحنی به معادله $x^2 + y^2 = 1$ کدام است؟

- (۱) صفر (۲) 1 (۳) 2 (۴) 3

۴۷- خط مماس بر منحنی فصل مشترک رویه‌های $z = 4x^2 + 4y^2$ و $z = 4 - 4x^2$ در نقطه $(0, 1, 4)$ موازی کدام بردار است؟

- (۱) $\vec{i} + \vec{j}$ (۲) $\vec{i} - \vec{j}$ (۳) \vec{i} (۴) \vec{j}

۴۸- برای تابع f روی $[a, b]$ کدامیک از موارد زیر درست است؟

(۱) $\frac{1}{2} \int_a^b (\int_a^b f(x)f(y)dy)dx = (\int_a^b f^2(x)dx)^2$ (۲) $\frac{1}{2} \int_a^b (\int_a^b f(x)f(y)dy)dx = \int_a^b f^2(x)dx$

(۳) $2 \int_a^b (\int_a^b f(x)f(y)dy)dx = (\int_a^b f(x)dx)^2$ (۴) $2 \int_a^b (\int_a^b f(x)f(y)dy)dx = (\int_a^b f(x)dx)^2$

۴۹- اگر D ناحیه محصور بین منحنی‌هایی $y = x^2, y = 8x^2, xy = 1, xy = 2$ باشد آنگاه مساحت ناحیه D برابر کدام است؟

- (۱) $\frac{7}{3}$ (۲) $\frac{5}{3}$ (۳) $\frac{2}{3} \ln 2$ (۴) $\ln 2$

MBA

۵۰- بیشترین فاصله نقاط منحنی به معادله $5x^2 + 5y^2 - 6xy = 4$ تا مبدأ مختصات کدام است؟

- (۱) $\sqrt{2}$ (۲) 1 (۳) 2 (۴) $\sqrt{5}$

۵۱- اگر $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 - xy}{x + y} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$ مقدار $\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y}$ در نقطه $(0, 0)$ کدام است؟

- (۱) -1 (۲) 0 (۳) 1 (۴) تعریف نشده

۵۲- اگر $u = \tan^{-1}(\frac{y}{x})$ باشد، مقدار $x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y}$ در نقطه $(3, 2)$ کدام است؟

- (۱) $\frac{3}{5}$ (۲) $\frac{8}{15}$ (۳) $\frac{16}{25}$ (۴) $\frac{12}{25}$

۵۳- اگر $u = x^2 - y^2, v = 2xy, x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$ باشد، حاصل $\frac{\partial(u, v)}{\partial(r, \theta)}$ کدام است؟

- (۱) $2r^2$ (۲) $4r^2$ (۳) $2r^2$ (۴) $4r^2$

۵۴- اگر $f(x) = \int_1^x e^{t^2} dt$ باشد، انتگرال $\int f(x) dx$ کدام است؟

- (۱) $1 + e$ (۲) $1 - e$ (۳) $\frac{1}{2}(1 - e)$ (۴) $\frac{1}{2}(1 + e)$

۵۵- اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & -6 & -4 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & -6 & -3 \end{bmatrix}$ باشد، بردار ویژه آن کدام است؟

- (۱) $\begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix}$ (۲) $\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$ (۳) $\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix}$ (۴) $\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$

۵۶- حاصل i^i ، کدام است؟ ($i = \sqrt{-1}$)

- (۱) $e^{-\pi}$ (۲) $e^{\frac{-\pi}{2}}$ (۳) $\frac{\pi}{ie^{\frac{\pi}{2}}}$ (۴) $\ln(i)$

۵۷- حجم ناحیه مشترک بین دو استوانه $x^2 + y^2 = 9$ و $x^2 + z^2 = 9$ کدام است؟

- (۱) 72π (۲) 36π (۳) 144 (۴) 162

۵۸- حاصل $\iint_D e^{\frac{x-y}{x+y}} dx dy$ داخل مثلثی به معادلات اضلاع $x=0, y=0, x+y=1$ کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{2}(e+\frac{1}{e})$
- (۲) $\frac{1}{2}(e-\frac{1}{e})$
- (۳) $\frac{1}{4}(e+\frac{1}{e})$
- (۴) $\frac{1}{4}(e-\frac{1}{e})$

۵۹- اگر $F = (x+y)i + (y+z)j + (z+x)k$ و Σ سطحی باشد که ناحیه D با مشخصات $0 \leq z \leq 5$ و $0 \leq x^2 + y^2 \leq 9$ را محصور کرده است، حاصل $\iint_{\Sigma} F \cdot dS$ کدام است؟

- (۱) 45π
- (۲) 75π
- (۳) 90π
- (۴) 135π

۶۰- بردار $\text{curl } \vec{r} = r$ و $\vec{r} = xi + yj + zk$ کدام است؟

- (۱) 0
- (۲) $\frac{1}{r}\vec{r}$
- (۳) $n\vec{r}$
- (۴) $\frac{n}{r}\vec{r}$

۶۱- انتگرال منحنی الخط $\int_C (x+2xy)dx + (x^2-y)dy$ بر روی منحنی $2x^2+3y^2=6$ کدام است؟

- (۱) 0
- (۲) 3
- (۳) 4
- (۴) 6

مهندسی هسته‌ای

۶۲- اگر یک متحرک بر روی مسیری با خمیدگی $K(t) \neq 0$ در فضا با سرعت $V(t)$ و شتاب $a(t)$ حرکت کند، آنگاه $V \times a = \alpha B$ که در آن B قائم دوم بر خم است. در این صورت ثابت α برابر است با:

- (۱) $K(t) \| V(t) \|$
- (۲) $K(t) \| V(t) \|^2$
- (۳) $K(t) \| V(t) \|^3$
- (۴) $K(t)$

۶۳- در کدام نقاط (u, v) نمی‌توان دستگاه معادلات $x = uv - v^2$ و $y = u^2 + v^2$ را بر حسب x و y (به عنوان توابعی از u و v) حل نمود؟

- (۱) $u = 2v$
- (۲) $uv = v^2$
- (۳) $u^2 - uv - v^2 = 0$
- (۴) $u^2 - 2uv - v^2 = 0$

۶۴- معادله بردار عمود واحد بر سطح $x^2y + 2xz = 4$ در نقطه $(2, -2, 3)$ چیست؟

- (۱) $\hat{i} - 4\hat{j} + \hat{k}$
- (۲) $-\frac{1}{3}\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$
- (۳) $\hat{i} - \frac{1}{6}\hat{j} + \frac{1}{9}\hat{k}$
- (۴) $-\frac{1}{3}\hat{i} + \frac{2}{3}\hat{j} + \frac{2}{3}\hat{k}$

۶۵- اگر $f(x, y, z) = \frac{m}{r^3}(xi + yj + zk)$ که در آن $m > 0$ ثابت و $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$ ، آنگاه $\text{div } F = \nabla \cdot F$ در نقاط $r \neq 0$ کدام است؟

- (۱) صفر
- (۲) $\frac{6}{r^3}$
- (۳) $-\frac{1}{r^3}$
- (۴) $-\frac{4}{r^3}$

۶۶- جواب معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی $y \frac{\partial z}{\partial x} + x \frac{\partial z}{\partial y} = 0$ کدامیک از توابع زیر است؟

- (۱) $Z = f(\frac{x}{y})$ (تابع دلخواه ولی مشتق‌پذیر)
- (۲) $Z = f(x^2 - y^2)$ (تابع دلخواه ولی مشتق‌پذیر)
- (۳) $Z = f(xy)$ (تابع دلخواه ولی مشتق‌پذیر)
- (۴) $Z = f(x - y)$ (تابع دلخواه ولی مشتق‌پذیر)

۶۷- اگر C خم ساده بسته بیضی $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ در جهت مثلثاتی باشد آنگاه انتگرال روی خم $\int_C (2x^2 - y)dx + (4y^2 - x)dy$ برابر است با:

- (۱) 0
- (۲) $-ab$
- (۳) $2ab$
- (۴) $(a^2 + b^2)$

معماری گشتی

۶۸- اگر $\begin{cases} u = u(x, y) \\ v = v(x, y) \end{cases}$ در این صورت کدام صحیح است؟

- (۱) $v_x \cdot x_v + v_y \cdot y_v = 1, u_x \cdot x_u + u_y \cdot y_u = 1$
- (۲) $u_x \cdot x_v + u_y \cdot y_v = 0, u_x \cdot x_u + u_y \cdot y_u = x_y$
- (۳) $v_x \cdot x_u + v_y \cdot y_u = 0, u_x \cdot x_u - v_x \cdot x_v = 0$
- (۴) $v_x \cdot x_v + v_y \cdot y_v = 0, u_x \cdot x_u + v_y \cdot y_v = x_y$

۶۹- اگر $R(t) = x(t)\hat{i} + y(t)\hat{j} + z(t)\hat{k}$ بردار موضع متحرک غیر ثابت C و S پارامتر طول باشد آنگاه از معادله $|\frac{dR}{ds} \times \frac{d^2R}{ds^2}| = 0$ نتیجه می‌شود که:

- (۱) شکل منحنی همواره یک دایره نیست.
- (۲) منحنی C همواره در یک صفحه قرار دارد.
- (۳) همواره انحنا C برابر با صفر است.
- (۴) شکل منحنی C همواره به صورت یک فتر است.

۷۰- کدامیک از توابع زیر در نقطه $(0, 0)$ دارای حد می‌باشند؟

- (الف) $\frac{x-y}{x+y}$ فقط d
- (ب) $\frac{xy}{|xy|}$ c و d
- (ج) $\frac{xy}{x^2+y^2}$ فقط b
- (د) $\frac{x^2y^2}{x^2+y^2}$ d و f

۷۱- اگر $\begin{cases} x = 2u - v + w \\ y = u + v - w \\ z = 2u + 2v + w \end{cases}$ آنگاه $\frac{\partial(u, v, w)}{\partial(x, y, z)}$ برابر است با:

- (۱) 8
- (۲) 12
- (۳) $\frac{1}{8}$
- (۴) $\frac{1}{12}$

۷۲- حاصل $I = \int_0^1 \int_0^{\sqrt{x}} \sqrt{1-y^2} dy dx$ برابر است با:

- (۱) $\frac{\pi}{8}$
- (۲) $\frac{\pi}{8} + \frac{1}{6}$
- (۳) $\frac{\pi}{4} + \frac{1}{6}$
- (۴) $\frac{\pi}{8} - \frac{1}{6}$

معادن

۷۳- مقدار انحناء در هر نقطه ماریچ $\vec{r}(t) = (a \cos \omega t)\hat{i} + (a \sin \omega t)\hat{j} + (b \omega t)\hat{k}$ که در آن a و ω اعدادی ثابت و مثبت هستند، برابر است با:

- (۱) $k = \frac{a^2 + b^2}{b}$
- (۲) $k = \frac{a^2 + b^2}{a}$
- (۳) $k = \frac{a}{a^2 + b^2}$
- (۴) $k = \frac{b}{a^2 + b^2}$

۷۴- اگر $u = xy$ و $v = x(1-y)$ باشد حاصل $\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}$ (دترمینان ژاکوبی) کدامیک از عبارات داده شده است؟

- (۱) $-\frac{1}{u+v}$
- (۲) $\frac{1}{u+v}$
- (۳) $\frac{u}{u+v}$
- (۴) $-\frac{u}{u+v}$

۷۵- اگر مشتق سونی تابع $f(x, y, z) = x^2 - 2yz$ در $p(1, 1, 1)$ در جهت یک بردار u صفر باشد، آنگاه این بردار u کدام است؟

- (۱) $\hat{i} - \hat{k}$
- (۲) $\hat{i} + \hat{j}$
- (۳) $\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$
- (۴) $\hat{i} - \hat{j} - \hat{k}$

۷۶- زاویه بین استوانه $x^2 + y^2 = 1$ و کره $(x-1)^2 + y^2 + z^2 = 1$ در نقطه $(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}, 0)$ کدام است؟

- (۱) $\frac{\pi}{6}$
- (۲) $\frac{\pi}{4}$
- (۳) $\frac{\pi}{3}$
- (۴) $\frac{\pi}{2}$

۷۷- حاصل $\int_0^{\pi} \int_{\sqrt{x}}^{\pi} \sin \frac{x}{y} dy dx$ کدامیک از عبارات داده شده است؟

- (۱) 2
- (۲) $\frac{\pi^2}{2}$
- (۳) $2 + \frac{\pi^2}{2}$
- (۴) $\pi^2 - \sqrt{\pi}$

۷۸- اگر $\vec{F}(x, y) = (x^2 - xy)\hat{i} + (y^2 - xy)\hat{j}$ و از $(-1, 1)$ تا $(1, 1)$ روی خم سهمی C به معادله $y = x^2$ اثر کند، آنگاه حاصل انتگرال خطی $\int_C (F \cdot T) ds = \int_C M dx + N dy$ روی این خم کدام است؟

- (۱) $-\frac{1}{15}$
- (۲) $-\frac{2}{15}$
- (۳) $\frac{1}{15}$
- (۴) $\frac{2}{15}$

۷۹- جرم پوسته کروی $1 < \rho < 2$ که چگالی جرمی نقاط مختلف آن از رابطه $\delta(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$ محاسبه می‌شود کدام است؟

- (۱) 4π
- (۲) 6π
- (۳) 8π
- (۴) 12π

باسخنامه تست‌های سراسری ۱۳۸۵

۱- گزینه «۳» با توجه به شرایط داده شده در مسأله می‌توان $x = \cos \theta$ و $y = \sin \theta$ فرض کرد. در این صورت:

$$f(x, y) = \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = \frac{\cos \theta}{a} + \frac{\sin \theta}{b} = \frac{a \sin \theta + b \cos \theta}{ab}$$

با توجه به اینکه $-\sqrt{a^2 + b^2} \leq a \sin \theta + b \cos \theta \leq \sqrt{a^2 + b^2}$ پس ماکسیمم f برابر $\frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{ab}$ می‌باشد.

۲- گزینه «۴» از قضیه دیورژانس استفاده می‌کنیم:

$$F = x\mathbf{i} - 2y\mathbf{j} + 4z\mathbf{k} \Rightarrow \text{div} F = 1 - 2 + 4 = 3$$

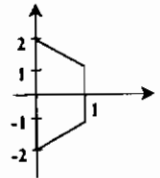
$$\iint_S F \cdot n \, dS = \iiint_V \text{div} F \, dV = \iiint_V 3 \, dV = 3 \times (\text{حجم کره}) = 4\pi a^3$$

۳- گزینه «۴» چون مرز C یک مسیر بسته قطعه قطعه هموار می‌باشد، بنابراین از قضیه گرین استفاده می‌کنیم.

$$\frac{\partial F_x}{\partial x} - \frac{\partial F_y}{\partial y} = (2xy \cos(y^2) + 2) - (2xy \cos(y^2) - 2y) = 2 + 2y$$

$$\Rightarrow I = \int_C (x \sin(y^2) - y^2) dx + (x^2 y \cos(y^2) + 2x) dy = \iint_D (2 + 2y) dA$$

چون $2y$ تابع فرد می‌باشد و ناحیه انتگرال گیری نسبت به y متقارن است (با توجه به شکل مقابل)، پس انتگرال $2y$ برابر صفر است.



$$\Rightarrow I = \iint_D 2 \, dA = 2 \times (\text{مساحت دوزنقه}) = 2 \times \frac{(4+2) \times 1}{2} = 6$$

۴- گزینه «۲»

$$ds = \sqrt{1 + y'^2} dx = \sqrt{1 + \sinh^2 \frac{x}{a}} dx = \sqrt{\cosh^2 \frac{x}{a}} dx = \cosh \frac{x}{a} dx \Rightarrow S = \int_0^{x_1} \cosh \frac{x}{a} dx = a \sinh \frac{x}{a} \Big|_0^{x_1} = a \sinh \frac{x_1}{a}$$

۵- گزینه «۲» از مختصات استوانه‌ای استفاده می‌کنیم. برای به دست آوردن تصویر ناحیه بر صفحه xy ، کره را با سهمی گون تلاقی می‌دهیم. در این صورت:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 5 \\ z^2 + 4z = 5 \Rightarrow z = 1 \Rightarrow x^2 + y^2 = 4 \\ 4z = x^2 + y^2 \end{cases}$$

پس ناحیه تصویر در مختصات استوانه‌ای $r = 2$ می‌باشد.

$$V = \int_0^{2\pi} \int_0^2 \int_{\frac{r^2}{4}}^{\sqrt{5-r^2}} r \, dz \, dr \, d\pi = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 (r\sqrt{5-r^2} - \frac{r^3}{4}) dr = \frac{2\pi}{3} (5\sqrt{5} - 4)$$

۶- گزینه «۴» قرار می‌دهیم $\vec{F} = (z^2, 2y, \lambda xz)$. برای مستقل بودن انتگرال داده شده از مسیر، لازم است $\text{curl} \vec{F} = 0$. بنابراین:

$$\text{curl} \vec{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ z^2 & 2y & \lambda xz \end{vmatrix} = (0, 2z - \lambda z, 0) \xrightarrow{\text{curl} \vec{F} = 0} \lambda z = 2z \Rightarrow \lambda = 2$$

۸۰- اگر $F(x, y, z) = (\frac{x^2}{3}, \frac{2y^2}{3}, \frac{z^2}{3})$ و S رویه بیضی‌وار $x^2 + 2y^2 + z^2 = 1$ باشد مقدار انتگرال سطح (رویه‌ای) $\iiint_S \vec{F} \cdot \vec{n} \, d\sigma$ برابر است با (n قائم یکه برونسور بر رویه S و dσ جزء مساحت رویه است).

(۱) $\frac{4\pi}{5}$ (۲) $\frac{4\pi}{3}$ (۳) $\frac{4\pi}{3\sqrt{2}}$ (۴) $\frac{4\pi}{5\sqrt{2}}$

۸۱- وارون (معکوس) ماتریس $\begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$ کدام است؟

(۱) $\begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 2 & 1 \\ 9 & 45 \end{bmatrix}$ (۲) $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 9 & 45 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ (۳) $\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 1 \\ 9 & 45 \end{bmatrix}$ (۴) $\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 9 & 45 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$

مهندسی نفت

۸۲- اگر S یک چهار ضلعی با رئوس $(\pi, 0), (0, \pi), (\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}), (\frac{3\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ باشد، آنگاه مقدار انتگرال دوگانه $\iint_S (x-y) \sin(x+y) dx dy$ برابر است با:

(۱) $-\pi$ (۲) 0 (۳) π (۴) 2π

۸۳- اگر $\phi(t)$ تابعی صعودی و در هر نقطه دامنه تعریفش $\phi'(t) \neq 0$ موجود باشد، آنگاه بیشترین مقدار افزایش تابع $f(x, y, z) = \phi(ax + by + cz)$ در نقطه (x, y, z) در کدام جهت است؟ (a, b, c ثابت حقیقی)

(۱) $ai + bj + ck$ (۲) $xi + yj + zk$

(۳) $(ai + bj + ck) \times (xi + yj + zk)$ (۴) چون تابع ϕ کلی است، لذا جواب به ϕ بستگی دارد.

۸۴- فرض کنیم $f = L n \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. مطلوب است $\iint_S \frac{\partial f}{\partial n} d\sigma$ که در آن n بردار واحد قائم بر رویه S می‌باشد، و dσ جزء سطح

است و S قسمت واقع شده از کره $\rho^2 = a^2$ در $\frac{1}{a}$ اول فضا است.

(۱) $\frac{\pi a}{4}$ (۲) $\frac{\pi a^2}{6}$ (۳) $\frac{\pi^2 a}{36}$ (۴) $\frac{\pi^2 a^2}{36}$

۸۵- فرض کنیم $I = \oint \frac{y dx - x dy}{x^2 + y^2}$ مقدار I روی دایره‌ای به مرکز مبدأ و شعاع $a > 0$ در جهت مثلثاتی کدام است؟

(۱) -2π (۲) 2π (۳) صفر (۴) $2\pi a$ یعنی محیط دایره

۸۶- مطلوب است مساحت قسمتی از کره $\rho^2 = 4a^2$ که به وسیله استوانه $r^2 = 2ar \sin \theta$ بریده می‌شود (قسمت بالای صفحه xy) $a \neq 1$.

(۱) 4π (۲) $a^2 \pi$ (۳) $4a^2$ (۴) $4a^2(\pi - 2)$

مهندسی کشاورزی

۸۷- از رابطه $z^2 - xz + xy^2 = 6$ مقدار $\frac{\partial z}{\partial x}$ در نقطه $(1, 2, -1)$ کدام است؟

(۱) $\frac{5}{3}$ (۲) $\frac{2}{5}$ (۳) $-\frac{2}{3}$ (۴) $-\frac{2}{5}$

۸۸- اندازه مشتق سویی $f(x, y, z) = x^2 - yz + xz^2$ در نقطه $(-1, 0, 1)$ در امتداد $\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k}$ در کدام است؟

(۱) $-\frac{\sqrt{6}}{3}$ (۲) $\frac{-2\sqrt{6}}{3}$ (۳) $\frac{2\sqrt{6}}{3}$ (۴) $\frac{\sqrt{6}}{3}$

۸۹- کمترین مقدار تابع $z = x^2 + y^2 + xy$ با شرط $x + 2y = 6$ کدام است؟

(۱) 4 (۲) 6 (۳) 8 (۴) 9

۹۰- اگر $z = x^2 + \text{Arctg} \frac{y}{x}$ و $x = r \cos \theta$ و $y = r \sin \theta$ مقدار $\frac{\partial z}{\partial r}$ به ازای $\theta = \frac{\pi}{4}$ و $r = 1$ کدام است؟

(۱) 0 (۲) $\sqrt{2}$ (۳) 1 (۴) 2

۷- گزینه «۳»

روش اول:

$$\int_0^1 \int_{x^2}^x \frac{dy dx}{\sqrt{y^2 + x^2}} = \int_0^1 \text{Ln}(y + \sqrt{y^2 + x^2}) \Big|_{x^2}^x dx = \int_0^1 (\text{Ln}(x + \sqrt{x^2 + x^2}) - \text{Ln}(x^2 + \sqrt{x^4 + x^2})) dx$$

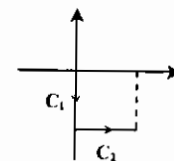
$$= \int_0^1 (\text{Ln}(1 + \sqrt{2}) - \text{Ln}(x + \sqrt{x^2 + 1})) dx = \text{Ln}(1 + \sqrt{2}) - \int_0^1 \text{Ln}(x + \sqrt{x^2 + 1}) dx$$

جزء به جزء

$$= \text{Ln}(1 + \sqrt{2}) - x \text{Ln}(x + \sqrt{x^2 + 1}) \Big|_0^1 + \int_0^1 \frac{x dx}{\sqrt{x^2 + 1}} = \sqrt{x^2 + 1} \Big|_0^1 = \sqrt{2} - 1$$

روش دوم: می‌توان از تغییر مختصات قطبی نیز استفاده کرد.

۸- گزینه «۴» برای محاسبه انتگرال منحنی‌الخط روی مسیر C، انتگرال را روی مسیرهای C₁ و C₂ به دست آورده و با هم جمع می‌کنیم. مسیر C₁ خط $x=0, 0 \leq y \leq 1$ است. در این صورت $dx=0$ و بنابراین (منفی پشت انتگرال به خاطر جهت مسیر C₁ می‌باشد).



$$\int_{C_1} yx^2 dx + (x+y)dy = - \int_0^1 y dy = -\frac{1}{2}$$

$$\int_{C_2} yx^2 dx + (x+y)dy = \int_0^1 -x^2 dx = -\frac{1}{3}$$

مسیر C₂ خط $y=-1, 0 \leq x \leq 1$ است. در این صورت $dy=0$ و بنابراین:

$$\int_C = \int_{C_1} + \int_{C_2} = -\frac{1}{2} - \frac{1}{3} = -\frac{5}{6}$$

در نتیجه:

۹- گزینه «۳» روابط داده شده را به صورت $F_1 = v^2 - u^2 - 2x = 0$ و $F_2 = uv - y = 0$ می‌نویسیم. در این صورت:

$$\frac{\partial(F_1, F_2)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} -2u & 2v \\ v & u \end{vmatrix} = -2(u^2 + v^2)$$

$$\frac{\partial(F_1, F_2)}{\partial(x, v)} = \begin{vmatrix} -2 & 2v \\ 0 & u \end{vmatrix} = -2u$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\frac{\partial(F_1, F_2)}{\partial(x, v)}}{\frac{\partial(F_1, F_2)}{\partial(u, v)}} = \frac{-2u}{-2(u^2 + v^2)} = -\frac{u}{u^2 + v^2}$$

بنابراین:

۱۰- گزینه «۱» به طور کلی مختصات مرکز دایره بوسان تابع $y = f(x)$ در نقطه $P(x, y)$ از فرمول زیر به دست می‌آید:

$$x_c = x - \frac{y'(1+y'^2)}{y''}, \quad y_c = y + \frac{1+y'^2}{y''}$$

$$x_c = x - \frac{e^{-x}(1+e^{2x})}{e^x} \Big|_{P(0,1)} = -2, \quad y_c = y + \frac{1+e^{2x}}{e^x} \Big|_{P(0,1)} = 3$$

بنابراین برای تابع $y = e^{-x}$ در نقطه $P(0, 1)$ داریم:

پس معادله دایره به صورت $(x+2)^2 + (y-3)^2 = R^2$ در می‌آید و با توجه به اینکه دایره از نقطه $P(0, 1)$ عبور می‌کند، مقدار $R = \sqrt{8}$ به دست می‌آید. بنابراین معادله دایره بوسان $(x+2)^2 + (y-3)^2 = 8$ می‌باشد.

$$\iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S} = \iiint_V \text{div} \vec{F} dV = \iiint_V (2x + 2y + 1) dV$$

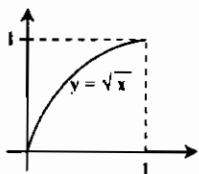
۱۱- گزینه «۳» از قضیه دیورانس استفاده می‌کنیم.

چون توابع $2x$ و $2y$ فرد هستند و ناحیه انتگرال‌گیری نسبت به x و y متقارن است، لذا $\iiint_V 2x dV = 0$ و $\iiint_V 2y dV = 0$. بنابراین:

$$\iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S} = \iiint_V dV = a \text{ حجم کره به شعاع } = \frac{4}{3} \pi a^3$$

۱۲- گزینه «۲»

با توجه به شکل مقابل ترتیب انتگرال‌گیری را عوض می‌کنیم:



$$I = \int_0^1 \int_{\sqrt{x}}^1 e^{y^2} dy dx = \int_0^1 \int_0^{y^2} e^{y^2} dx dy = \int_0^1 y^2 e^{y^2} dy = \frac{1}{3} e^{y^2} \Big|_0^1 = \frac{1}{3}(e-1)$$

۱۳- گزینه «۲» برای محاسبه انتگرال داده شده از مختصات استوانه‌ای استفاده می‌کنیم. در این صورت معادله مخروط به صورت $Z = 2$ در می‌آید. تغییرات Z از $Z = 2$ تا $Z = 1$ می‌باشد و برای محاسبه ناحیه تصویر در صفحه xy کافی است بین دو معادله $Z = 1$ و $Z = 2$ متغیر Z از حذف کنیم که از آن به دست می‌آید $r = 1$. بنابراین:

$$I = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_2^1 r \times r dz dr d\theta = \int_0^{2\pi} \int_0^1 r \times r dz dr d\theta = \int_0^{2\pi} \int_0^1 (r^2 - r^2) dr d\theta = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 (r^2 - r^2) dr = \frac{\pi}{6}$$

۱۴- گزینه «۴» بردار نرمال صفحه موردنظر، بردار گرادیان رویه $F = 4x^2 + y^2 - 16z = 0$ می‌باشد. بنابراین:

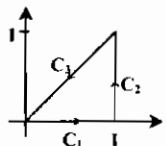
$$\vec{N} = \nabla F = (8x, 2y, -16) \Big|_{(2, 4, 2)} = (16, 8, -16)$$

$$16(x-2) + 8(y-4) - 16(z-2) = 0 \Rightarrow 2x + y - 2z = 4$$

بنابراین معادله صفحه موردنظر به صورت روبرو است:

۱۵- گزینه «۳»

انتگرال داده شده را روی مسیرهای C₁, C₂ و C₃ به دست آورده و با هم جمع می‌کنیم.



$$C_1: y=0, dy=0, 0 \leq x \leq 1 \Rightarrow \int_{C_1} 2xy dx - x^2 y dy = 0$$

$$C_2: x=1, dx=0, 0 \leq y \leq 1 \Rightarrow \int_{C_2} 2xy dx - x^2 y dy = \int_0^1 -y dy = -\frac{1}{2}$$

$$C_3: y=x, dy=dx, 0 \leq x \leq 1 \Rightarrow \int_{C_3} 2xy dx - x^2 y dy = - \int_0^1 (2x^2 - x^2) dx = -\frac{5}{12}$$

$$\Rightarrow \int_C 2xy dx - x^2 y dy = 0 - \frac{1}{2} - \frac{5}{12} = -\frac{11}{12}$$

$$f(x, y) = x^2 + x^2 y + y^2 - 1 \Rightarrow \nabla f = (2x^2 + 2xy, x^2 + 2y) \Big|_{(-1, 1)} = (1, 2)$$

۱۶- گزینه «۲» مشتق سونی تابع f در جهت بردار موردنظر باید منفی باشد. و با توجه به گزینه‌ها، گزینه (۲) این خاصیت را دارد.

$$D_u f = (1, 2) \cdot \frac{(1, -1)}{\sqrt{2}} = -\sqrt{2} < 0$$

۱۷- گزینه «۲» از مختصات استوانه‌ای استفاده می‌کنیم. تصویر ناحیه موردنظر بر صفحه xy درون دایره $x^2 + y^2 = a^2$ می‌باشد. معادله

$$V = \int_0^{2\pi} \int_0^a \int_0^a r dz dr d\theta = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^a r^2 dr = \frac{\pi a^3}{3}$$

سه‌موی به صورت $Z = r^2$ در می‌آید. بنابراین:

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(r, s)} = \begin{vmatrix} 2r & 2 \\ -2 & 2s \end{vmatrix} = 4rs + 4$$

۱۸- گزینه «۲» شرط موردنظر $\frac{\partial(x, y)}{\partial(r, s)} \neq 0$ می‌باشد. که از آن نتیجه می‌شود $rs \neq -1$.

۱۹- گزینه «۲»

$$V(u) = (-\sin u, \cos u, 1), a(u) = (-\cos u, -\sin u, 0)$$

$$V \times a = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -\sin u & \cos u & 1 \\ -\cos u & -\sin u & 0 \end{vmatrix} = (\sin u, -\cos u, 1) \Rightarrow |V \times a| = \sqrt{2}, |V| = \sqrt{2}$$

$$k = \frac{|V \times a|}{|V|^2} = \frac{\sqrt{2}}{(\sqrt{2})^2} = \frac{1}{2}$$

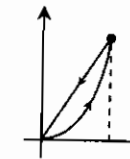
بنابراین:

۲۰- گزینه «۱» از تغییر متغیر $u = xy$ و $v = \frac{y}{x}$ استفاده می‌کنیم. در این صورت مرزهای ناحیه انتگرال‌گیری به صورت $u = a$ و $u = b$ در $v = \beta, v = \alpha$ می‌آیند.

$$\frac{1}{J} = \frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} = \begin{vmatrix} y & x \\ -y^2 & y^2/x \end{vmatrix} = \frac{ry^2}{x} \Rightarrow J = \frac{x}{ry^2} = \frac{1}{ry}$$

$$S = \int_a^b \int_\alpha^\beta \frac{1}{ry} dv du = \frac{1}{r} \int_a^b du \times \int_\alpha^\beta \frac{dy}{y} = \frac{1}{r} (b-a) \ln \frac{\beta}{\alpha}$$

۲۱- گزینه «۴» از قضیه گرین استفاده می‌کنیم:



$$\int_C ry dx + rx dy = \iint_D \left(\frac{\partial}{\partial x}(rx) - \frac{\partial}{\partial y}(ry) \right) dy dx = \int_0^r \int_{x^2}^{rx} r dy dx = r \int_0^r (rx - x^2) dx = \frac{r}{3}$$

۲۲- گزینه «۳» برای پایستار بودن میدان F ، لازم است $\text{curl} F = 0$ ، بنابراین:

$$\text{curl} F = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ ay^2 + rczx & bxy + cyz & ay^2 + cx^2 \end{vmatrix} = (2ay - cy, rcx - rcx, by - ray)$$

از نتیجه $\text{curl} F = 0$ نتیجه می‌شود $2a = b = c$.

۲۳- گزینه «۴»

روش اول: قرار می‌دهیم $z = 0, y = 1$. در این صورت تابع f به صورت $f(x, y, z) = x$ در می‌آید. که به ازای x های مختلف تمام مقادیر ممکن را اتخاذ خواهد کرد. بنابراین برد f مجموعه R می‌باشد.

روش دوم: گزینه‌های ۱، ۲ و ۳ هرگز نمی‌توانند، برد یک تابع $f: R^3 \rightarrow R$ باشند.

۲۴- گزینه «۴» منحنی موردنظر تلاقی دو رویه $F_1(x, y, z) = y - x^2 = 0$ و $F_2(x, y, z) = z^2 + y - 16 = 0$ می‌باشد. بردارهای خط موردنظر $\nabla F_1 \times \nabla F_2$ می‌باشد.

$$\begin{cases} \nabla F_1 = (-2x, 1, 0) \\ \nabla F_2 = (0, 1, 2z) \end{cases} \Rightarrow \nabla F_1 \times \nabla F_2 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -2x & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2z \end{vmatrix} = (0, 0, -2x)$$

با توجه به اینکه مؤلفه‌های اول و دوم بردار هادی خط برابر صفرند، معادله خط به صورت زیر در می‌آید:

$$\begin{cases} x - 4 = 0 \\ y - 16 = 0 \end{cases}$$

۲۵- گزینه «۲» جهت بیشترین افزایش، جهت بردار گرادیان می‌باشد. $f(x, y) = x^y \Rightarrow \nabla f = (yx^{y-1}, x^y \ln x) \Big|_{(e, 1)} = (1, e)$

۲۶- گزینه «۳» نقطه $P(x, \sqrt{x^2+1})$ یک نقطه دلخواه روی منحنی می‌باشد. و فاصله P از نقطه B برابر $d = \sqrt{(x-1)^2 + x^2 + 1}$ می‌باشد.

می‌خواهیم $f(x) = d^2 = 2x^2 - 2x + 2$ را مینیمم کنیم. $f'(x) = 4x - 2 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2}, y = \frac{\sqrt{5}}{2}$

۲۷- گزینه «۲» برای محاسبه انتگرال از مختصات قطبی استفاده می‌کنیم. معادله دایره داده شده به صورت $r^2 = r \cos \theta$ و یا $r = \cos \theta$ در می‌آید $(-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2})$. بنابراین:

$$\iint_A \frac{dx dy}{\sqrt{1-x^2-y^2}} = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\cos \theta} \frac{r dr d\theta}{\sqrt{1-r^2}} = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} -\sqrt{1-r^2} \Big|_0^{\cos \theta} d\theta = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (1 - |\sin \theta|) d\theta$$

$$= 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin \theta) d\theta = 2(\theta + \cos \theta) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \pi - 2$$

$$\iiint_S z^2 dx dy dz = \int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{1-x-y} z^2 dz dy dx = \int_0^1 \int_0^{1-x} \frac{(1-x-y)^2}{2} dy dx$$

$$= \int_0^1 \left[-\frac{(1-x-y)^2}{2} \right]_0^{1-x} dx = \int_0^1 \frac{(1-x)^2}{2} dx = \frac{-(1-x)^3}{6} \Big|_0^1 = \frac{1}{6}$$

۲۹- گزینه «۲» $r(t) = (r \cos t, r \sin t, ct) \Rightarrow v(t) = (-r \sin t, r \cos t, c) \Rightarrow a(t) = (-r \cos t, -r \sin t, 0)$

$$v \times a = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -r \sin t & r \cos t & c \\ -r \cos t & -r \sin t & 0 \end{vmatrix} = (12 \sin t, -12 \cos t, 9) \Rightarrow |v \times a| = 15, |v| = 5$$

$$k = \frac{|v \times a|}{|v|^2} = \frac{15}{5^2} = \frac{3}{5}$$

۳۰- گزینه «۱»

روش اول: معادله منحنی داده شده را به صورت $r(t) = (\sin t, \sin t, \cos 2t)$ در نظر می‌گیریم. در این صورت بردار نرمال صفحه موردنظر $r'(t) = (\cos t, \cos t, -2 \sin 2t)$ خواهد بود.

نقطه P داده شده متناظر $t = \frac{\pi}{4}$ روی منحنی می‌باشد. بنابراین بردار نرمال به صورت $\vec{N} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, -2 \right)$ خواهد بود. و در نتیجه معادله صفحه

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \left(x - \frac{\sqrt{2}}{2} \right) + \frac{\sqrt{2}}{2} \left(y - \frac{\sqrt{2}}{2} \right) - 2(z - 0) = 0 \Rightarrow \sqrt{2}x + \sqrt{2}y - 4z = 2$$

موردنظر عبارتست از: روش دوم: تنها گزینه‌ای که مختصات نقطه P در آن صدق می‌کند گزینه (۱) می‌باشد.

۳۱- گزینه «۲» قرار می‌دهیم $F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 9 = 0$ و $G(x, y, z) = x^2 + y^2 - 4z = 0$ در این صورت بردارهای خط موردنظر برابر $\nabla F \times \nabla G$ خواهد بود.

$$\nabla F = (2x, 2y, 2z) \Big|_{(2, 2, 1)} = (4, 4, 2), \nabla G = (2x, 2y, -4) \Big|_{(2, 2, 1)} = (4, 4, -8) \Rightarrow \nabla F \times \nabla G = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 4 & 4 & 2 \\ 4 & 4 & -8 \end{vmatrix} = (-40, 40, 0)$$

$$\frac{x-2}{-40} = \frac{y-2}{40} = \frac{z-1}{0} \Rightarrow \begin{cases} x+y=4 \\ z=1 \end{cases}$$

بنابراین معادله خط موردنظر به صورت روبرو خواهد بود:

۳۲- گزینه «۳» شرط داشتن بینهایت جواب برای یک دستگاه همگن آن است که دترمینان ضرایب برابر صفر باشد.

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & a \\ 2 & -1 & 2 \\ 6 & -4 & 5 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow a = 1$$

۳۳- گزینه «۳»

$$\frac{\partial(f_1, f_2)}{\partial(x_1, x_2)} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 2, \quad \frac{\partial(f_1, f_2)}{\partial(x_1, x_2)} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = -2 \Rightarrow \frac{\partial x_1}{\partial x_2} = -\frac{\frac{\partial(f_1, f_2)}{\partial(x_2, x_2)}}{\frac{\partial(f_1, f_2)}{\partial(x_1, x_2)}} = -\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

۳۴- هیچکدام از گزینه‌ها صحیح نیست. معادلات داده شده را به ترتیب F_1 و F_2 فرض می‌کنیم، در این صورت:

$$\frac{\partial(F_1, F_2)}{\partial(z, \omega)} = \begin{vmatrix} 2z - \omega & -z \\ 4z + \omega & z \end{vmatrix} = 6z^2$$

$$\frac{\partial(F_1, F_2)}{\partial(x, \omega)} = \begin{vmatrix} 4x & -z \\ 2x & z \end{vmatrix} = 6xz, \quad \frac{\partial(F_1, F_2)}{\partial(z, x)} = \begin{vmatrix} 2z - \omega & 4x \\ 4z + \omega & 2x \end{vmatrix} = -12xz - 6\omega x$$

در همسایگی نقطه $(1, 1)$ ، مقادیر $z = 1, \omega = 4$ و $z = -1, \omega = -4$ به دست می‌آیند، بنابراین:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\frac{\partial(F_1, F_2)}{\partial(x, \omega)}}{\frac{\partial(F_1, F_2)}{\partial(z, \omega)}} = \frac{6xz}{6z^2} = \frac{x}{z} = \pm 1$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial x} = \frac{\frac{\partial(F_1, F_2)}{\partial(z, x)}}{\frac{\partial(F_1, F_2)}{\partial(z, \omega)}} = \frac{-12xz - 6\omega x}{6z^2} = \frac{x(2z + \omega)}{z^2} = \pm 6$$

۳۵- گزینه «۴» می‌خواهیم عبارت $\omega = xyz$ یا به طور معادل $\omega^2 = x^2 y^2 z^2$ را تحت قید $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ ماکسیم کنیم. چون مجموع متغیرها ثابت است، حاصل ضرب وقتی ماکسیم است که متغیرها با هم برابر باشند، در نتیجه $x = y = z = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}$ و از آنجا $3x^2 = 1$ و $x = y = z = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}$

بنابراین:

$$\text{Max}(\omega) = \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{1}{3\sqrt{3}}$$

۳۶- گزینه «۲»

$$\nabla f = (2x, 2y, -2z) \Big|_{(1, 2, 2)} = (2, 4, -6) \Rightarrow |\nabla f| = 2\sqrt{14}$$

بزرگترین و کوچکترین مقدار مشتق جهتی همواره به ترتیب برابر $|\nabla f|$ و $-|\nabla f|$ می‌باشند.

۳۷- گزینه «۴» هیچکدام از گزینه‌های (۱)، (۲) و (۳) روی منحنی داده شده قرار ندارند. پس فقط گزینه (۴) می‌تواند پاسخ صحیح باشد.

۳۸- گزینه «۳»

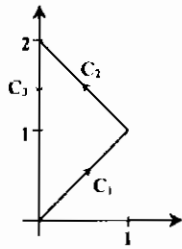
$$V = \int_0^{2\pi} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \int_0^a \rho^2 \sin \phi \, d\rho \, d\phi \, d\theta = \int_0^{2\pi} d\theta \cdot \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \sin \phi \, d\phi \cdot \int_0^a \rho^2 \, d\rho = 2\pi \times 1 \times \frac{a^3}{3} = \frac{2\pi a^3}{3}$$

۳۹- گزینه «۱» ترتیب انتگرال گیری را عوض می‌کنیم:

$$\int_0^1 \int_y^1 \sin \pi x^2 \, dx \, dy = \int_0^1 \int_0^x \sin \pi x^2 \, dy \, dx = \int_0^1 x \sin \pi x^2 \, dx = \left. -\frac{1}{2\pi} \cos \pi x^2 \right|_0^1 = \frac{1}{\pi}$$

۴۰- گزینه «۴»

روش اول: انتگرال داده شده را به ترتیب روی C_1, C_2 و C_3 به دست آورده و حاصل را با هم جمع می‌کنیم.



مسیر C_1 ، پاره خط $0 \leq x \leq 1, y = x$ می‌باشد، در این صورت $dy = dx$ ، بنابراین:

$$\int_{C_1} (x^2 + y^2) dx + (x + 2y)^2 dy = \int_0^1 11x^2 dx = \frac{11}{3}$$

مسیر C_2 ، پاره خط $1 \leq y \leq 2, x = 2 - y$ می‌باشد و در این صورت $dx = -dy$ ، بنابراین:

$$\int_{C_2} (x^2 + y^2) dx + (x + 2y)^2 dy = \int_0^1 (4y - y^2) dy = \frac{29}{3}$$

و بالاخره مسیر $C_3, x = 0, 0 \leq y \leq 2$ می‌باشد، در این صورت $dx = 0$ و بنابراین:

$$\int_{C_3} (x^2 + y^2) dx + (x + 2y)^2 dy = -\int_2^0 4y^2 dy = \frac{-32}{3}$$

(علامت پست انتگرال به خاطر جهت مسیر C_3 می‌باشد.)

در نتیجه مقدار انتگرال خط موردنظر برابر $\frac{11}{3} + \frac{29}{3} - \frac{32}{3} = \frac{8}{3}$ است.

روش دوم: قرار می‌دهیم $F_1 = x^2 + y^2$ و $F_2 = (x + 2y)^2$ ، در این صورت طبق قضیه گرین داریم:

$$\int_C F_1 dx + F_2 dy = \iint_D \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) dx dy = \iint_D (2x + 2y) dx dy = \int_0^1 \int_x^{2-x} (2x + 2y) dy dx = \frac{8}{3}$$

۴۱- گزینه «۳» با توجه به قضیه دیورژانس

۴۲- گزینه «۴» به طور کلی مشتق سونی تابع f در نقطه دلخواه $P(x_0, y_0)$ در راستای بردار دلخواه $v = (v_1, v_2)$ از فرمول زیر به دست می‌آید:

$$D_u f = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + tv_1, y_0 + tv_2) - f(x_0, y_0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t v_1 - t v_2}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} (v_1 - v_2)$$

برای اینکه حد فوق موجود باشد، لازم است $v_1 = 0$ ، بنابراین بردار v به صورت $v = (0, 1)$ خواهد بود.

۴۳- گزینه «۴» اگر نقاط $(1, 2), (1, 1)$ و $(2, 2)$ را به ترتیب P, Q, R بنامیم، جهتی که P را به Q وصل می‌کند بردار i و جهتی که P را به R وصل می‌کند بردار j خواهد بود. بنابراین با توجه به مفروضات گفته شده در مسأله داریم:

$$D_{\vec{i}}(P) = 2, \quad D_{\vec{j}}(P) = -2 \Rightarrow D_{\vec{j}}(P) = 2$$

$$\vec{PS} = (3, 4) \Rightarrow \vec{u} = \frac{\vec{PS}}{|\vec{PS}|} = \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5} \right) = \frac{3}{5} \vec{i} + \frac{4}{5} \vec{j}$$

بردار یک‌ای که نقطه $P(1, 2)$ را به $S(4, 6)$ وصل می‌کند به صورت روبرو است:

$$D_{\vec{u}}(P) = \frac{3}{5} D_{\vec{i}}(P) + \frac{4}{5} D_{\vec{j}}(P) = \frac{3}{5} \times 2 + \frac{4}{5} \times 2 = \frac{14}{5}$$

بنابراین:

۴۴- گزینه «۲» می‌خواهیم انتگرال تابع $f(x, y, z) = x^2$ را روی سطح S به دست آوریم. صفحه تصویر را صفحه YZ در نظر می‌گیریم در این صورت با فرض $g(x, y, z) = x^2 - y^2 - z^2 = 0$ داریم:

$$dS = \frac{|\nabla g|}{|\nabla g \cdot i|} dA = \frac{\sqrt{4x^2 + 4y^2 + 4z^2}}{2x} dA = \sqrt{2} dA$$

ناحیه انتگرال گیری درون دایره $y^2 + z^2 = 1$ قرار دارد، بنابراین:

$$\iint_S x^2 dS = \iint_D (y^2 + z^2) \times \sqrt{2} dA \stackrel{\text{مختصات قطبی}}{=} \int_0^{2\pi} \int_0^1 \sqrt{2} r^2 \cdot r dr d\theta = \sqrt{2} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 r^3 dr = \frac{\pi\sqrt{2}}{2}$$

۴۵- گزینه «۳» مشتق سونی f در نقطه $P(0,0)$ در جهت بردار دلخواه $v = (v_1, v_2)$ برابر است با:

$$D_v f(P) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(0 + tv_1, 0 + tv_2) - f(0,0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^2 v_1^2 + t^2 v_2^2}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{v_1^2 v_2^2}{t^2 v_1^2 + v_2^2}$$

اگر $v_1 = 0, v_2 \neq 0$ آنگاه $D_v f(P) = 0$ و اگر $v_1 \neq 0, v_2 = 0$ آنگاه $D_v f(P) = \frac{v_1^2}{v_2}$ یعنی در هر حال حد فوق وجود دارد.

۴۶- گزینه «۱» ابتدا توجه کنید که: $P(x, y) = x^2 y \cos x + 2xy \sin x \Rightarrow \frac{\partial P}{\partial y} = x^2 \cos x + 2x \sin x$

$Q(x, y) = x^2 \sin x \Rightarrow \frac{\partial Q}{\partial x} = 2x \sin x + x^2 \cos x$
 بنابراین میدان داده شده پایستار (ایجابی) می‌باشد و مسیر موردنظر نیز بسته است، پس مقدار انتگرال موردنظر برابر صفر است.

۴۷- گزینه «۳» رویه‌های داده شده را به صورت $g_1(x, y, z) = 4 - 4x^2 - z = 0$ و $g_2(x, y, z) = 4x^2 + 4y^2 - z = 0$ می‌نویسیم. در این صورت بردار موردنظر موازی $\nabla g_1 \times \nabla g_2$ خواهد بود.

$$\nabla g_1 = (\lambda x, \lambda y, -1) \Big|_{(0,1,4)} = (\lambda, \lambda, -1), \nabla g_2 = (-\lambda x, -\lambda y, -1) \Big|_{(0,1,4)} = (0, -\lambda, -1)$$

$$\nabla g_1 \times \nabla g_2 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \lambda & \lambda & -1 \\ 0 & -\lambda & -1 \end{vmatrix} = -\lambda i = -\lambda(1, 0, 0)$$

۴۸- گزینه «۴» به کمک تعویض ترتیب انتگرال گیری

۴۹- گزینه «۴» با توجه به منحنی‌های داده شده و ناحیه انتگرال گیری از تغییر متغیر $u = \frac{y}{x}$ و $v = xy$ استفاده می‌کنیم با این تغییر متغیر ناحیه انتگرال گیری به صورت $1 \leq v \leq 2, 1 \leq u \leq 8$ در می‌آید.

$$\frac{1}{J} = \frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} = \begin{vmatrix} -\frac{2y}{x^2} & \frac{1}{x^2} \\ y & x \end{vmatrix} = \frac{-2y}{x^2} = -2u \Rightarrow |J| = \frac{1}{2u}$$

$$S = \int_1^2 \int_1^8 \frac{1}{2u} du dv = \frac{1}{2} \int_1^2 dv \int_1^8 \frac{du}{u} = \frac{1}{2} \ln 8 = \ln 2$$

۵۰- گزینه «۱»

روش اول: می‌خواهیم عبارت $d = \sqrt{x^2 + y^2}$ یا به طور معادل تابع $f(x, y) = x^2 + y^2$ را تحت قید $g(x, y) = \delta x^2 + \delta y^2 - \epsilon xy = 4$ ماکسیم کنیم.

$$\nabla f = \lambda \nabla g \Rightarrow \begin{cases} 2x = \lambda(2\delta x - \epsilon y) \Rightarrow 2x^2 = \lambda(2\delta x^2 - \epsilon xy) \\ 2y = \lambda(2\delta y - \epsilon x) \Rightarrow 2y^2 = \lambda(2\delta y^2 - \epsilon xy) \end{cases}$$

از کم کردن روابط اخیر از یکدیگر به رابطه $x^2 - y^2 = \delta \lambda (x^2 - y^2)$ می‌رسیم. برای برقراری تساوی اخیر دو حالت وجود دارد:

الف) $\delta \lambda = 1$ و از آنجا $\lambda = \frac{1}{\delta}$ که با جایگذاری در دستگاه فوق $x = y = 0$ به دست می‌آید که در قید مسأله صدق نمی‌کند.

ب) $x^2 - y^2 = 0$ که از آن نتیجه می‌شود $y = \pm x$ ، $f(x, y) = 2$ ، $y = x \Rightarrow g(x, y) = \delta x^2 + \delta x^2 - \epsilon x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 1$

$y = -x \Rightarrow g(x, y) = \delta x^2 + \delta x^2 + \epsilon x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm \frac{1}{\sqrt{\delta}}, y = \pm \frac{1}{\sqrt{\delta}} \Rightarrow f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{\delta}}$

بنابراین بیشترین فاصله $d = \sqrt{2}$ و کمترین فاصله $d = \frac{\sqrt{2}}{2}$ می‌باشد.

روش دوم: رابطه داده شده را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$r(x^2 + y^2 - 2xy) + r(x^2 + y^2) = 4 \Rightarrow r(x - y)^2 + r(x^2 + y^2) = 4 \Rightarrow x^2 + y^2 = \frac{1}{r}(4 - r(x - y))$$

می‌خواهیم عبارت $x^2 + y^2$ بیشترین مقدار ممکن را داشته باشد، لذا عبارت سمت راست باید بیشترین مقدار ممکن خود را داشته باشد، بدین منظور باید $x - y = 0$ باشد که از آن نتیجه می‌شود.

$$x^2 + y^2 = 2 \Rightarrow d = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{2}$$

۵۱- گزینه «۳»

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h, 0) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h - 0}{h} = 1$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0, h) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0 - 0}{h} = 0$$

$$u = \tan^{-1}\left(\frac{y^r}{x}\right) \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{-\frac{y^r}{x^2}}{1 + \left(\frac{y^r}{x}\right)^2} = \frac{-y^r}{x^2 + y^{2r}}, \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\frac{ry}{x}}{1 + \left(\frac{y^r}{x}\right)^2} = \frac{rxy}{x^2 + y^{2r}}$$

$$x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{xy^r}{x^2 + y^{2r}} = \frac{1}{r}$$

۵۲- گزینه «۳» ابتدا u و v را بر حسب r و θ به دست می‌آوریم.

$$\begin{aligned} v &= rxy = r^2 \sin \theta \cos \theta = r^2 \sin 2\theta \\ u &= x^r - y^r = r^r \cos^r \theta - r^r \sin^r \theta = r^r \cos r\theta \end{aligned} \Rightarrow \frac{\partial(u, v)}{\partial(r, \theta)} = \begin{vmatrix} r^2 \cos 2\theta & -2r^2 \sin 2\theta \\ r^r \sin r\theta & r^r \cos r\theta \end{vmatrix} = 2r^r$$

۵۴- گزینه «۳» ترتیب انتگرال گیری را عوض می‌کنیم.

$$\int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 \int_1^x e^{1-t} dt dx = - \int_1^0 \int_x^1 e^{1-t} dt dx = - \int_0^1 \int_0^1 e^{1-t} dx dt = - \int_0^1 t e^{1-t} dt = \frac{-1}{2} (e - 1) = \frac{1}{2} (1 - e)$$

۵۵- گزینه «۲»

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -\epsilon & -\epsilon \\ 0 & \epsilon - \lambda & \epsilon \\ 0 & -\epsilon & -\epsilon - \lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)((\epsilon - \lambda)(-\epsilon - \lambda) + \epsilon^2) = (1-\lambda)(\lambda^2 - \lambda) = 0 \Rightarrow \lambda = 0, 1$$

بنابراین $\lambda = 0$ کوچکترین مقدار ویژه می‌باشد. برای به دست آوردن بردار ویژه بایستی دستگاه $AX = \lambda X$ را حل کنیم.

$$AX = 0 \Rightarrow \begin{cases} x - \epsilon y - \epsilon z = 0 \\ \epsilon y + \epsilon z = 0 \\ -\epsilon y - \epsilon z = 0 \end{cases}$$

از معادله دوم $z = -y$ به دست می‌آید، که با جایگزینی در معادله اول $x = -2y$ به دست می‌آید، بنابراین $(-2y, y, -y)$ و یا $(2, -1, 1)$ بردار ویژه موردنظر می‌باشد.

$$i^i = (e^{\frac{\pi}{2}i})^i = e^{-\frac{\pi}{2}}$$

۵۶- گزینه «۲»

۵۷- گزینه «۳»

$$V = \int_0^2 \int_0^{\sqrt{4-x^2}} \int_0^{\sqrt{4-x^2-y^2}} dz dy dx = \int_0^2 \int_0^{\sqrt{4-x^2}} \sqrt{4-x^2-y^2} dy dx = \int_0^2 (9-x^2) dx = \left. 9x - \frac{x^3}{3} \right|_0^2 = 144$$

۵۸- گزینه «۲» از تغییر متغیر $v = x - y, u = x + y$ استفاده می‌کنیم. در این صورت ناحیه انتگرال‌گیری به صورت $0 \leq u \leq 1$ و $-u \leq v \leq u$ در می‌آید.

$$\frac{1}{J} = \frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 \Rightarrow |J| = \frac{1}{2}$$

$$\iint_D e^{\frac{x-y}{x+y}} dx dy = \frac{1}{2} \int_0^1 \int_{-u}^u e^{\frac{v}{u}} dv du = \frac{1}{2} \int_0^1 u e^{\frac{v}{u}} \Big|_{-u}^u du = \frac{1}{2} (e - \frac{1}{e}) \int_0^1 u du = \frac{1}{4} (e - \frac{1}{e})$$

۵۹- گزینه «۴» از قضیه دیورژانس استفاده کنید.

۶۰- گزینه «۱»

$$P(x, y) = x + 2xy \Rightarrow \frac{\partial P}{\partial y} = 2x$$

۶۱- گزینه «۱» ابتدا توجه کنید که:

$$Q(x, y) = x^2 - y \Rightarrow \frac{\partial Q}{\partial x} = 2x$$

بنابراین میدان پایستار است و چون مسیر داده شده بسته است، پس مقدار انتگرال برابر صفر است.

$$B = \frac{V \times a}{\|V \times a\|} \Rightarrow V \times a = B \|V \times a\|$$

۶۲- گزینه «۳» می‌دانیم:

$$k(t) = \frac{\|V \times a\|}{\|V\|^2} \Rightarrow \|V \times a\| = k(t) \|V\|^2$$

بنابراین $\alpha = \|V \times a\|$ از طرفی:

۶۳- گزینه «۴» قرار می‌دهیم $x = f(u, v) = uv - v^2$ و $y = g(u, v) = u^2 + v^2$. در این صورت در نقاطی که $\frac{\partial(f, g)}{\partial(u, v)} = 0$ باشد،

می‌توان u و v را به عنوان تابعی از x و y در نظر گرفت.

$$\frac{\partial(f, g)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} v & u-2v \\ 2u & 2v \end{vmatrix} = 2v^2 - 2uv + 4uv = 0 \Rightarrow u^2 - 2uv - v^2 = 0$$

۶۴- گزینه «۴» ابتدا قرار می‌دهیم $F(x, y, z) = x^2 y + 2xz - 4 = 0$. در این صورت بردار بردار واحد عمود بر سطح بردار $u = \frac{\nabla F}{\|\nabla F\|}$ خواهد بود.

$$\nabla F = (2xy + 2z, x^2, 2x) \Big|_{(2, -2, 2)} = (-2, 4, 4) \Rightarrow u = \left(\frac{-1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3} \right)$$

۶۵- گزینه «۱» $f(x, y, z) = m\left(\frac{x}{r}, \frac{y}{r}, \frac{z}{r}\right)$

$$\text{div} f = \frac{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}} - 2x^2(x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}} + (x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}} - 2y^2(x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}} + (x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}} - 2z^2(x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}}}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$= \frac{2(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}} - 2(x^2+y^2+z^2)(x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}}}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} = 0$$

۶۶- گزینه «۲» $z = f(x^2 - y^2) \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial x} = 2xf'(x^2 - y^2), \frac{\partial z}{\partial y} = -2yf'(x^2 - y^2) \Rightarrow y \frac{\partial z}{\partial x} + x \frac{\partial z}{\partial y} = 0$

۶۷- گزینه «۱» قرار می‌دهیم $F_1 = 3x^2 - y$ و $F_2 = 4y^2 - x$. چون $\frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{\partial F_2}{\partial x} = -1$ پس میدان پایستار می‌باشد و چون مسیر C بسته است، پس حاصل انتگرال برابر صفر است.

۶۸- گزینه «۱» به منظور سهولت در بررسی گزینه‌ها می‌توانیم فرض کنیم $u = x$ و $v = y$. در این صورت فقط گزینه (۱) برقرار خواهد بود.

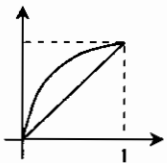
۶۹- گزینه «۳» از معادله داده شده نتیجه می‌شود انحناء منحنی برابر صفر است.

۷۰- گزینه «۱» موارد (الف)، (ب) و (ج)، روی خط $y = mx$ دارای حد وابسته به m خواهند بود، بنابراین حد ندارند. حال نشان می‌دهیم مورد (د)، در $(0, 0)$ دارای حد است.

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y^2}{x^2 + y^2} = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \left(\frac{x^2}{x^2 + y^2} \right) y^2 \leq \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} y^2 = 0$$

۷۱- گزینه «۴» $\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 12 \Rightarrow \frac{\partial(u, v, w)}{\partial(x, y, z)} = \frac{1}{12}$

۷۲- گزینه «۲» با توجه به شکل مقابل، با تعویض ترتیب انتگرال‌گیری خواهیم داشت:



$$I = \int_0^1 \int_x^{\sqrt{1-x^2}} \sqrt{1-y^2} dy dx = \int_0^1 \int_y^1 \sqrt{1-y^2} dx dy = \int_0^1 (y\sqrt{1-y^2} - y^2\sqrt{1-y^2}) dy$$

$$= \int_0^1 y\sqrt{1-(y^2)^2} dy - \int_0^1 y^2\sqrt{1-y^2} dy$$

برای محاسبه انتگرال اول از تغییر متغیر $u = y^2$ ، $du = 2y dy$ و برای محاسبه انتگرال دوم از تغییر متغیر $u = 1 - y^2$ ، $du = -2y dy$ استفاده می‌کنیم.

$$I = \frac{1}{2} \int_0^1 \sqrt{1-u} du + \frac{1}{4} \int_0^1 \sqrt{u} du = \frac{\pi}{8} + \frac{1}{6}$$

۷۳- گزینه «۳»

روش اول: $V(t) = (-a\omega \sin \omega t, a\omega \cos \omega t, b\omega)$, $a(t) = (-a\omega^2 \cos \omega t, a\omega^2 \sin \omega t, c)$

$$V(t) \times a(t) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -a\omega \sin \omega t & a\omega \cos \omega t & b\omega \\ -a\omega^2 \cos \omega t & -a\omega^2 \sin \omega t & c \end{vmatrix} = (ab\omega^2 \sin \omega t, -ab\omega^2 \cos \omega t, a^2\omega^2)$$

$$\Rightarrow \|V \times a\| = a\omega^2 \sqrt{a^2 + b^2}, \|V\| = \omega \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$k = \frac{\|V \times a\|}{\|V\|^2} = \frac{a\omega^2 \sqrt{a^2 + b^2}}{(\omega \sqrt{a^2 + b^2})^2} = \frac{a}{a^2 + b^2}$$

$$\vec{r}(t) = (a \cos \omega t, a \sin \omega t, c)$$

روش دوم: با فرض $b = 0$ ، خم به صورت روبرو در می‌آید:

یعنی در این حالت خم یک دایره به شعاع a می‌باشد که انحناء آن $\frac{1}{a}$ خواهد بود و در بین گزینه‌ها، تنها گزینه (۳) به ازای $b = 0$ برابر $\frac{1}{a}$ می‌باشد. پس فقط گزینه (۳) می‌تواند صحیح باشد.

۷۴- گزینه «۱»

$$\begin{cases} u = xy \\ v = x - xy \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = u + v \\ y = \frac{u}{u+v} \end{cases} \Rightarrow \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \frac{1}{u+v} & \frac{-u}{(u+v)^2} \end{vmatrix} = \frac{-1}{u+v}$$

۷۵- گزینه «۲»

$$\nabla f = (2x, -2z, -2y) \Big|_{(1,1,1)} = (2, -2, -2)$$

بردار u را باید طوری انتخاب کنیم که $\nabla f \cdot u = 0$ باشد. که با توجه به گزینه‌ها، گزینه (۲) صحیح است.

۷۶- گزینه «۳» زاویه بین دو رویه، برابر زاویه بین بردارهای گرادیان آنها می‌باشد.

$$\nabla f_1 = (2x, 2y, 0) \Big|_{(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0)} = (1, \sqrt{2}, 0), \nabla f_2 = (2(x-1), 2y, 2z) \Big|_{(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0)} = (-1, \sqrt{2}, 0)$$

$$\cos \theta = \frac{\nabla f_1 \cdot \nabla f_2}{|\nabla f_1| |\nabla f_2|} = \frac{-1 + 2 + 0}{\sqrt{2} \times \sqrt{2}} = \frac{1}{2} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{3}$$

۷۷- گزینه «۳» ترتیب انتگرال‌گیری را عوض می‌کنیم.

$$\int_0^{\pi/2} \int_{\sqrt{x}}^{\pi} \sin \frac{x}{y} dy dx = \int_0^{\pi} \int_0^{\sqrt{y}} \sin \frac{x}{y} dx dy = \int_0^{\pi} -y \cos \frac{x}{y} \Big|_0^{\sqrt{y}} dy$$

$$= \int_0^{\pi} (-y \cos y + y) dy = (-y \sin y - \cos y + \frac{y^2}{2}) \Big|_0^{\pi} = 2 + \frac{\pi^2}{2}$$

۷۸- گزینه «۲» در روی خم $y = x^2$ ، انتگرال، منحنی الخط داده شده به صورت زیر در می‌آید:

$$\int_C M dx + N dy = \int_{-1}^1 ((x^2 - x^2) dx + (x^2 - x^2) 2x dx) = \int_{-1}^1 (2x^3 - 2x^3 - x^2 + x^2) dx = \frac{-2}{15}$$

۷۹- گزینه «۲»

$$M = \int \delta dV = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_1^2 \frac{1}{\rho} \rho^2 \sin \phi d\rho d\phi d\theta = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi} \sin \phi \int_1^2 \rho d\rho = 6\pi$$

۸۰- گزینه «۴» از قضیه دیورژانس استفاده می‌کنیم:

$$\iint_S F \cdot n d\sigma = \iiint_V \text{div} F dV = \iiint_V (x^2 + 2y^2 + z^2) dV$$

چون ناحیه انتگرال‌گیری، بیضی‌گون $x^2 + \frac{y^2}{(\sqrt{2})^2} + z^2 = 1$ می‌باشد. از تغییر متغیر زیر استفاده می‌کنیم:

$$x = \rho \sin \phi \cos \theta, y = \frac{\rho}{\sqrt{2}} \sin \phi \sin \theta, z = \rho \cos \phi \Rightarrow J = \frac{1}{\sqrt{2}} \rho^2 \sin \phi$$

در این صورت:

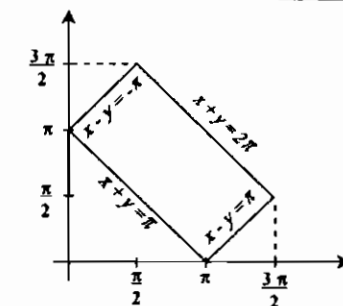
$$\iint_S F \cdot n d\sigma = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_0^1 \rho^2 \sin \phi d\rho d\phi d\theta = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi} \sin \phi \int_0^1 \rho^3 d\rho = \frac{4\pi}{5\sqrt{2}}$$

۸۱- گزینه «۱» به طور کلی وارون ماتریس $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ از فرمول روبه‌دست می‌آید:

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

۸۲- گزینه «۲» با توجه به تابع مقابل انتگرال از تغییر متغیرهای زیر استفاده می‌کنیم:

$$\begin{cases} u = x - y \\ v = x + y \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{J} = \frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \Rightarrow J = \frac{1}{2}$$



با توجه به اینکه معادلات مرزهای ناحیه S به صورت $x - y = \pm\pi$ و $x + y = 2\pi$ ، $x + y = \pi$ هستند، بنابراین مرزهای S در دستگاه جدید به صورت $-\pi \leq u \leq \pi$ و $\pi \leq v \leq 2\pi$ در می‌آیند.

$$\iint_S (x - y) \sin(x + y) dx dy = \int_{-\pi}^{\pi} \int_{\pi}^{2\pi} u \sin v dv du = \int_{-\pi}^{\pi} u du \times \int_{\pi}^{2\pi} \sin v dv = 0$$

۸۳- گزینه «۱» به طور کلی راستای بیشترین افزایش، راستای بردار گرادیان می‌باشد.

$$\nabla f = a\phi'(ax + by + cz)\vec{i} + b\phi'(ax + by + cz)\vec{j} + c\phi'(ax + by + cz)\vec{k} = (a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k})\phi'(ax + by + cz)$$

۸۴- هیچکدام از گزینه‌ها صحیح نیست. منظور از $\frac{\partial f}{\partial n}$ ، مشتق سونی f در جهت بردار واحد \vec{n} می‌باشد. بنابراین:

$$\iint_S \frac{\partial f}{\partial n} d\sigma = \iint_S \nabla f \cdot \vec{n} d\sigma$$

صفحه تصویر را صفحه xy در نظر می‌گیریم. در این صورت تصویر کره داده شده در صفحه xy داخل دایره $x^2 + y^2 = a^2$ در ربع اول خواهد بود. از طرفی:

$$f = \text{Ln} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \frac{1}{2} \text{Ln}(x^2 + y^2 + z^2) \Rightarrow \nabla f = \left(\frac{x}{x^2 + y^2 + z^2}, \frac{y}{x^2 + y^2 + z^2}, \frac{z}{x^2 + y^2 + z^2} \right)$$

اگر معادله کره داده شده را به صورت $g(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - a^2 = 0$ در نظر بگیریم، آنگاه

$$n\sigma = \frac{\nabla g}{|\nabla g \cdot \vec{k}|} dx dy = \frac{(2x, 2y, 2z)}{2z} dx dy = \frac{(x, y, z)}{z} dx dy \Rightarrow \nabla f \cdot n\sigma = \frac{1}{z} dx dy = \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} dx dy$$

در نتیجه:

$$\iint_S \frac{\partial f}{\partial n} d\sigma = \iint_S \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} dx dy = \int_0^{\pi/2} \int_0^a \frac{r}{\sqrt{a^2 - r^2}} dr d\theta = \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^a \frac{r dr}{\sqrt{a^2 - r^2}} = \frac{\pi}{2} a$$

۸۵- گزینه «۱»

روش اول: طبق نکات گفته شده در درس $\int \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2}$ روی هر مسیر بسته شامل مبدأ برابر 2π است، بنابراین مقدار انتگرال خواسته شده در مسأله -2π خواهد بود.

روش دوم: دایره به شعاع a را به صورت پارامتری $x = a \cos t$ ، $y = a \sin t$ می‌نویسیم که $t \in [0, 2\pi]$. در این صورت:

$$\frac{ydx - xdy}{x^2 + y^2} = \frac{a \sin t \times (-a \sin t dt) - a \cos t \times (a \cos t dt)}{a^2 \cos^2 t + a^2 \sin^2 t} = -dt$$

بنابراین:

$$\int_C \frac{ydx - xdy}{x^2 + y^2} = \int_0^{2\pi} -dt = -2\pi$$

۸۶- گزینه «۴» معادله کره داده شده در مختصات دکارتی $g(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 4a^2 = 0$ و معادله استوانه

$x^2 + (y - a)^2 = a^2$ می‌باشد. صفحه تصویر را صفحه xy در نظر می‌گیریم. واضح است که تصویر سطح کره بر صفحه xy درون دایره $x^2 + (y - a)^2 = a^2$ قرار دارد. از طرفی:

$$dS = \frac{|\nabla g|}{|\nabla g \cdot \vec{k}|} dA = \frac{\sqrt{4x^2 + 4y^2 + 4z^2}}{2z} dA = \frac{2a}{z} dA = \frac{2a}{\sqrt{4a^2 - x^2 - y^2}} dA$$

بنابراین: مختصات قطبی

$$= \iint \frac{|\nabla g|}{|\nabla g \cdot \vec{k}|} dA = \int_0^{\pi} \int_0^{2a \sin \theta} \frac{2a}{\sqrt{4a^2 - r^2}} \times r dr d\theta = 2a \int_0^{\pi} \left. -\sqrt{4a^2 - r^2} \right|_0^{2a \sin \theta} d\theta$$

$$= 2a \int_0^{\pi} (2a - 2a |\cos \theta|) d\theta = 4a^2 \left(\int_0^{\pi/2} (1 - \cos \theta) d\theta + \int_{\pi/2}^{\pi} (1 + \cos \theta) d\theta \right) = 4a^2 (\pi - 2)$$

۸۷- گزینه «۱»

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{-z+y^2}{2z-x} \Big|_{(1,2,-1)} = \frac{-1+4}{-2-1} = \frac{5}{-3}$$

۸۸- گزینه «۳»

$$f(x,y,z) = x^2 - yz + xz^2 \Rightarrow \vec{\nabla} f = (2xz^2 + z^2, -z, -y + 2xz) = (4, -1, -2)$$

$$\vec{u} = \frac{i+2j-k}{\sqrt{1+4+1}} = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{-1}{\sqrt{6}}\right)$$

$$D_u f = \vec{\nabla} f \cdot \vec{u} = (4, -1, -2) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{-1}{\sqrt{6}}\right) = \frac{4}{\sqrt{6}} = \frac{2\sqrt{6}}{3}$$

۸۹- گزینه «۴» مسأله را می‌توان به روش ضرایب لاگرانژ حل نمود. ولی جایگذاری مستقیم در این مورد ساده‌تر می‌باشد.

$$x = 6 - 2y \Rightarrow z = (6 - 2y)^2 + y^2 + (6 - 2y)y = 3y^2 - 18y + 36$$

$$z'_y = 6y - 18 = 0 \Rightarrow y = 3, x = 0 \Rightarrow z = 9$$

۹۰- گزینه «۳» مقدار $\frac{\partial z}{\partial r}$ را می‌توان به روش مشتق‌گیری زنجیری محاسبه کرد. ولی جایگزینی و سپس مشتق‌گیری ساده‌تر می‌باشد.

$$z = r^2 \cos^2 \theta + \text{Arctg} \frac{r \sin \theta}{r \cos \theta} = r^2 \cos^2 \theta + \theta$$

$$\frac{\partial z}{\partial r} = 2r \cos^2 \theta + 0 = 2r \cos^2 \theta \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial r} \Big|_{(1, \frac{\pi}{4})} = 2 \times 1 \times \cos^2 \frac{\pi}{4} = 1$$

«افلاطون»

«کارل لایب»

عشق تنها مرضی است که بیمار از آن لذت می‌برد.
تجربه بهترین درس است هر چند که حق‌التدریس آن گران باشد.

تست‌های سراسری ۱۳۸۶

MBA

۱- فاصله مرکز ثقل جسم همگن محدود به رویه $z = x^2 + y^2$ و صفحه $z = 4$ از صفحه xy چقدر است؟

(۱) $\frac{11}{4}$ (۲) $\frac{8}{3}$ (۳) $\frac{7}{3}$ (۴) $\frac{5}{2}$

۲- متحرکی در صفحه چنان حرکت می‌کند که در لحظه $r = 4$ و $\theta = \frac{\pi}{6}$ مقادیر $\frac{dr}{dt} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ و $\frac{d\theta}{dt} = \frac{-1}{2}$ است. اندازه تصویر بردار سرعت بر روی محور قطبی در این لحظه چقدر است؟

(۱) -1 (۲) $\frac{1}{2}$ (۳) $\frac{2}{3}$ (۴) 1

۳- در تابع $z = \frac{\log x - \log y}{x^2 + y^2}$ اگر $z \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} + az = 0$ باشد. a کدام است؟

(۱) $\log e$ (۲) $\ln 10$ (۳) -2 (۴) 2

۴- اگر $u = \frac{1}{y}x - 3y$ و $u \cdot v = 2y$ باشد. حاصل $\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$ کدام است؟

(۱) u (۲) v (۳) $u+v$ (۴) $u-v$

۵- حاصل $\int_0^1 \int_x^{1-x} \frac{x}{y} dy dx$ برابر $\ln A$ است. A کدام است؟

(۱) $\frac{4}{e}$ (۲) $\frac{2}{e}$ (۳) $\frac{e}{2}$ (۴) $\frac{e}{4}$

۶- حاصل $\iiint_S xz^2 dy dz + (x^2y - z) dx dz + (xy + y^2z) dx dy$ که در آن S سطح نیم‌کره به معادله $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$ و صفحه $z = 0$ می‌باشد. چند برابر a^5 است؟

(۱) $\frac{2\pi}{5}$ (۲) $\frac{2\pi}{3}$ (۳) $\frac{2\pi}{2}$ (۴) $\frac{\pi}{2}$

۷- بردار ویژه نظیر بزرگترین مقادیر ویژه ماتریس $\begin{bmatrix} -1 & 6 & 4 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & -6 & -3 \end{bmatrix}$ کدام است؟

(۱) $\begin{bmatrix} 0 \\ -a \\ 2a \end{bmatrix}$ (۲) $\begin{bmatrix} 0 \\ -2a \\ 3a \end{bmatrix}$ (۳) $\begin{bmatrix} 1 \\ -2a \\ 2a \end{bmatrix}$ (۴) $\begin{bmatrix} -1 \\ 2a \\ 2a \end{bmatrix}$

۸- حاصل $\oint_C 2xyz^2 dx + x^2z^2 dy + 3x^2yz^2 dz$ که در آن منحنی C فصل مشترک استوانه $z = 4 - x^2 - y^2$ با صفحه به معادله $x + 2z = 0$ باشد. برابر کدام است؟

(۱) صفر (۲) $\frac{5\pi}{2}$ (۳) 4 (۴) 8

۹- اگر $f(x,y,z) = \ln \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ و \vec{n} بردار قائم بر نیم‌کره $z = \sqrt{16 - x^2 - y^2}$ باشد. مشتق سویی تابع f در امتداد بردار \vec{n} چقدر است؟

(۱) $\frac{1}{2}$ (۲) $\frac{1}{4}$ (۳) 2 (۴) 4

۱۰- صفحه قائم بر منحنی (C) فصل مشترک استوانه $x^2 + y^2 = 5$ و رویه $z = xy$ در نقطه $(2, -1, -2)$ محور x ها را با کدام طول قطع می‌کند؟

(۱) 5 (۲) 3 (۳) -4 (۴) -6

۱۱- معادله دیفرانسیل $x^2 y'' + 2xy' + y' = x^2$ با تعویض متغیر مناسب به کدام صورت بیان می‌شود؟

(۱) $y'' + y' = (\ln t)^2$ (۲) $y'' + y' = \ln t$ (۳) $y'' = 2e^{2t}$ (۴) $y'' = e^{2t}$

ریاضی

۱۲- کدام حکم در مورد نقاط $M_1(0, -4, 0)$ و $M_2(-1, -2, -4)$ متعلق به سطح $z = 4xy^2 + xy^3 + x^2y^2$ درست است؟
 (۱) M_2 نقطهٔ مینیمم است و M_1 نه ماکزیمم است و نه مینیمم. (۲) M_1 و M_2 نقطه‌های مینیمم هستند.
 (۳) M_1 و M_2 نقطه‌های ماکزیمم هستند. (۴) هیچ‌کدام از نقاط M_1 و M_2 اکسترمم نیست.

۱۳- می‌خواهیم جعبه مکعب مستطیل شکل دربازی با حجم ثابت ۱۶ بسازیم. ابعاد جعبه را طوری تعیین می‌کنیم تا مساحت کل حداقل شود. مساحت جعبه کدام است؟

- (۱) $8\sqrt{2}$ (۲) $16\sqrt{2}$ (۳) $24\sqrt{2}$ (۴) $64\sqrt{2}$

۱۴- نقاط $A(2, 1, -1)$ و $B(1, 1, 1)$ و $C(2, -1, 1)$ مفروض‌اند. برداری هم‌راستا با نیمساز زاویه \hat{ABC} کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{\sqrt{5}} \langle 2, 1, -1 \rangle$ (۲) $\frac{1}{\sqrt{5}} \langle 2, -1, 2 \rangle$ (۳) $\frac{1}{\sqrt{5}} \langle 2, -2, -2 \rangle$ (۴) $\frac{1}{\sqrt{5}} \langle 2, 2, -2 \rangle$

۱۵- صفحه‌ای از نقطه $A(2, 3, 4)$ گذشته و حجم محصور بین آن و صفحات مختصات می‌نیم شده است. این حجم کدام است؟
 (۱) ۱۰۴ (۲) ۱۰۸ (۳) ۱۱۰ (۴) ۱۱۲

۱۶- انتگرال دوگانه زیر پس از تعویض ترتیب با کدام انتگرال مکرر برابر است؟

$$I = \int_{x=0}^{\sqrt{1/2}} \int_{y=0}^{\sqrt{1-x^2}} f(x, y) dy dx + \int_{x=1/\sqrt{2}}^1 \int_{y=0}^{\sqrt{1-x^2}} f(x, y) dy dx$$

$$I = \int_{y=0}^{\sqrt{1/2}} \int_{x=y}^{\sqrt{1-y^2}} f(x, y) dx dy \quad (2)$$

$$I = \int_{y=0}^1 \int_{x=y}^{\sqrt{1-y^2}} f(x, y) dx dy \quad (4)$$

$$I = \int_{y=0}^1 \int_{x=2y}^{\sqrt{1-2y^2}} f(x, y) dx dy \quad (1)$$

$$I = \int_{y=0}^1 \int_{x=-y}^{\sqrt{1-y^2}} f(x, y) dx dy \quad (3)$$

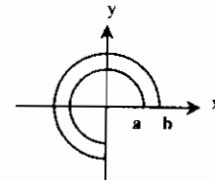
۱۷- اگر $f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{|x|+|y|} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 1 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$ کدام است؟

- (۱) ۰ (۲) ۱ (۳) ∞ (۴) $\frac{|y|}{(|x|+|y|)^2}$

۱۸- اگر $f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$ مشتق سویی f در مبدأ در کدام جهت موجود است؟

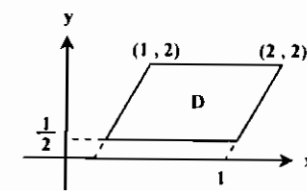
- (۱) \hat{i} (۲) $\frac{\sqrt{2}}{2}\hat{i} - \frac{\sqrt{2}}{2}\hat{j}$ (۳) $\frac{\sqrt{2}}{2}\hat{i} + \frac{\sqrt{2}}{2}\hat{j}$ (۴) $\frac{\sqrt{2}}{2}\hat{i} + \frac{1}{2}\hat{j}$

۱۹- ناحیه D در شکل مقابل بخشی از صفحه xOy و محدود به دو دایره به شعاع‌های a و b است. اگر $\delta(x, y) = |x| + |y|$ چگالی (جرم مخصوص) هر نقطه از ناحیه جرم‌دار باشد جرم کل ناحیه کدام است؟



- (۱) $\frac{2}{3}(b^3 - a^3)$ (۲) $2(b^2 - a^2)$ (۳) $\frac{2}{3}(a^3 - b^3)$ (۴) $\frac{1}{6}(a^2 - a^2 - b^2 + b^2)$

۲۰- مقدار انتگرال $I = \iint_D \frac{(y-2x)^2}{y^2} dA$ که در آن D ناحیه شکل مقابل است. کدام است؟



- (۱) $\frac{4}{3}$ (۲) $\frac{8}{3}$ (۳) $\frac{2}{3}$ (۴) $\frac{8}{3}$

۲۱- مساحت قسمتی از رویه $z = x^2 - y^2$ که در داخل استوانه $x^2 + y^2 = 4$ قرار دارد کدام است؟

- (۱) $\frac{3\pi}{2}(\sqrt{17}-1)$ (۲) $\frac{7\pi}{6}(\sqrt{17}-1)$ (۳) $\frac{17\pi}{6}(\sqrt{17}-1)$ (۴) $\frac{37}{6\pi}(17\sqrt{17}-1)$

۲۲- اگر Σ کره $x^2 + y^2 + z^2 = 2$ و $F(x, y, z) = 2xz\hat{i} + 2yz\hat{j} + 2zk\hat{k}$ مقدار $\iint_{\Sigma} F \cdot \vec{n} ds$ کدام است؟

- (۱) $4\sqrt{2}\pi$ (۲) $8\sqrt{2}\pi$ (۳) $16\sqrt{2}\pi$ (۴) $32\sqrt{2}\pi$

۲۳- حاصل $\int_C (x+y+z) ds$ که در آن C محل برخورد صفحه $y = x$ و کره $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ در یک هشتم اول با جهت از نقطه $(\sqrt{2}, \sqrt{2}, 0)$ به $(0, 0, 2)$ می‌باشد کدام است؟

- (۱) $4 + 4\sqrt{2}$ (۲) $4\sqrt{2}$ (۳) $4 + 2\sqrt{2}$ (۴) $2\sqrt{2} + 2$

۲۴- مساحت قسمتی از رویه به معادله $z = \sqrt{1-x^2-y^2}$ وقتی که تصویر این قسمت از رویه بر صفحه xy ناحیه محدود به دایره $4x^2 + 4y^2 = 1$ باشد کدام است؟

- (۱) $(\sqrt{3}-1)\pi$ (۲) $(2-\sqrt{3})\pi$ (۳) $(\sqrt{3}+1)\pi$ (۴) $(2+\sqrt{3})\pi$

۲۵- منحنی به معادله $y = x^2 + 3$ مفروض است متحرکی از نقطه $(0, 3)$ روی منحنی با سرعت ثابت ۲ متر در ثانیه حرکت می‌کند. شتاب متحرک روی منحنی در نقطه $x = 2$ کدام است؟

- (۱) $\frac{8}{17\sqrt{17}}$ (۲) $\frac{4}{17\sqrt{17}}$ (۳) $\frac{1}{17\sqrt{17}}$ (۴) $\frac{9}{17\sqrt{17}}$

۲۶- صفحه P به معادله $3x + y + z = 1$ و نقاط $A(1, 0, 2)$ و $B(2, 2, 4)$ مفروض‌اند. به ازای کدام نقطه M روی صفحه P مقدار $|MA - MB|$ ماکسیمم است؟

- (۱) $M(-5, 6, 10)$ (۲) $M(-5, 8, 8)$ (۳) $M(5, -6, -8)$ (۴) $M(5, -8, -6)$

عمران

۲۷- تابع $\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$ وقتی که $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ دارای حدی:

- (۱) برابر ۱- است. (۲) برابر ۱ است. (۳) برابر ∞ است. (۴) نیست.

۲۸- مقدار انتگرال $\iiint_{x^2+y^2+z^2 \leq a^2} (2+x+\sin z) dx dy dz$ برابر با چیست؟

- (۱) πa^3 (۲) $2\pi a^3$ (۳) $\frac{4}{3}\pi a^3$ (۴) $\frac{8}{3}\pi a^3$

۲۹- مقدار انتگرال $\int_0^1 \int_0^x \frac{dy dx}{\sqrt{x^2+y^2}}$ برابر با چیست؟

- (۱) ۱ (۲) $\sqrt{2}$ (۳) $\sqrt{2}-1$ (۴) $\sqrt{2}+1$

۳۰- کار انجام شده توسط میدان نیروی $F(x, y, z) = (x, y, z)$ روی مارپیچ $\vec{R}(t) = (\cos t)\hat{i} + (\sin t)\hat{j} + t\hat{k}$ ، $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$ برابر چیست؟

- (۱) $\frac{\pi}{2} - 1$ (۲) $2\pi - 1$ (۳) $\pi - \frac{1}{2}$ (۴) $\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}$

۳۱- مقدار انتگرال $I = \iint_S \text{Curl} F \cdot \vec{n} ds$ که در آن S قسمتی از کره $x^2 + y^2 + (z-2)^2 = 8$ است که در بالای صفحه xy قرار دارد و \hat{i} بردار قائم یکه خارجی S است و $F(x, y, z) = (y^2 \cos xz, x^2 e^{yz}, e^{-xyz})$ برابر چیست؟

- (۱) ۰ (۲) 2π (۳) 6π (۴) 12π

۳۲- مقدار انتگرال روی سطح $\iint_S (x^2 + y^2) dS$ که در آن S کره $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ می‌باشد. برابر با چیست؟ (راهنمایی: از قضیه دیورژانس استفاده کنید.)

- (۱) $\frac{4}{3}\pi a^4$ (۲) $\frac{4}{3}\pi a^3$ (۳) $\frac{4}{3}\pi a^2$ (۴) $\frac{4}{3}\pi a$

۳۳- مقدار انتگرال $I = \oint_C y^2 dx + x dy$ که در آن C دایره به مرکز مبدأ و شعاع ۲ می‌باشد که یک بار در جهت خلاف عقربه‌های ساعت بپیمود شده است، برابر با چیست؟
 (۱) 4π (۲) 3π (۳) 2π (۴) π

مکانیک

۳۴- بردار یکه قائم اصلی یعنی $\vec{N}(t)$ برای مارپیچ $\vec{R}(t) = (\cos t)\vec{i} + (\sin t)\vec{j} + t\vec{k}$ کدام است؟
 (۱) $(-\cos t)\vec{i} + (\sin t)\vec{j}$ (۲) $(-\cos t)\vec{i} + (-\sin t)\vec{j}$ (۳) $(\cos t)\vec{i} + (-\sin t)\vec{j}$ (۴) $(\cos t)\vec{i} + (\sin t)\vec{j}$

۳۵- فرض کنید $\iiint_D dx dy dz = \int_0^1 \int_0^{1-y} \int_0^{1-y-z} dz dy dx$. حدود انتگرال سمت راست کدام است؟
 (۱) $\int_0^1 \int_0^{1-z} \int_0^{1-y} dx dy dz$ (۲) $\int_0^1 \int_0^{1-y} \int_0^{1-z} dx dy dz$ (۳) $\int_0^1 \int_0^{1-z} \int_0^y dx dy dz$ (۴) $\int_0^1 \int_0^y \int_0^{1-z} dx dy dz$

۳۶- فرض کنید $\vec{F} = ax\vec{i} + by\vec{j} + cz\vec{k}$ و S رویه بیضی گون $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ و بردار یکه قائم بر بیضی گون S و رو به خارج باشد. مقدار انتگرال رویه‌ای زیر کدام است؟
 $\iint_S (\vec{F} \cdot \vec{n}) d\sigma$, $(a > 0, b > 0, c > 0)$

(۱) $\pi a^2 b^2 c^2$ (۲) $\frac{4}{3} \pi a^2 b^2 c^2$ (۳) $\pi abc(a+b+c)$ (۴) $\frac{4}{3} \pi abc(a+b+c)$

۳۷- بردار مماس بر منحنی فصل مشترک دو رویه زیر در نقطه $(-3, 2, 5)$ کدام است؟
 $z = x^2 - y^2, xyz + 3 = 0$
 (۱) $9\vec{i} - 46\vec{j} + 13\vec{k}$ (۲) $9\vec{i} + 46\vec{j} + 13\vec{k}$ (۳) $9\vec{i} - 46\vec{j} - 13\vec{k}$ (۴) $9\vec{i} + 46\vec{j} - 13\vec{k}$

۳۸- اگر دو بردار $A \in \mathbb{R}^T$ و $B \in \mathbb{R}^T$ غیر صفر بوده و در یک راستا نباشند و دو ستون ماتریس $M = [A \ B]$ از این دو بردار تشکیل شده باشد، آنگاه کدامیک از گزاره‌های زیر در مورد $X^T M^T M X$ صحیح است؟
 $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^T$

(۱) عبارت مذکور مثبت است به ازای هر $X \neq 0$
 (۲) به ازای بردارهای $X \neq 0$ هر علامتی را می‌تواند داشته باشد.
 (۳) عبارت مذکور صفر هم می‌تواند باشد به ازای برخی $X \neq 0$
 (۴) عبارت مذکور منفی هم می‌تواند باشد به ازای برخی $X \neq 0$

۳۹- مقدار انتگرال $\oint_C y dx + 3x dy$ روی خم بیضی $C: x^2 + 4y^2 = 1$ در جهت مثلثاتی کدام است؟
 (۱) $\frac{\pi}{2}$ (۲) π (۳) 2π (۴) 4π

۴۰- تابع $f(x, y) = x^2 + y^2 - 9xy + 27$ مفروض است. کدامیک از گزینه‌های زیر در مورد این تابع درست است؟
 (۱) $(0, 0)$ و $(3, 3)$ هر دو نقطه زینی تابع f هستند.
 (۲) $(0, 0)$ نقطه زینی و $(3, 3)$ نقطه مینیمم نسبی تابع f است.
 (۳) $(0, 0)$ نقطه مینیمم نسبی و $(3, 3)$ نقطه ماکزیمم نسبی تابع f است.
 (۴) $(0, 0)$ نقطه زینی و $(3, 3)$ نقطه ماکزیمم نسبی تابع f است.

معادله

۴۱- شکل منحنی به معادله $2x^2 + 2\sqrt{3}xy + y^2 - 8x + 8\sqrt{3}y = 0$ کدامیک از منحنی‌های داده شده است؟
 (۱) هذلولی است. (۲) بیضی است. (۳) سهمی است. (۴) دو خط مستقیم است.

۴۲- اگر $f(x, y, z) = xyz + e^{xz}$ ، آنگاه حاصل $\text{div grad } f$ برابر است با:
 (۱) $(x^2 + y^2)e^{xy}$ (۲) $(z^2 + y^2)e^{zy}$ (۳) $(x+z)e^{xz}$ (۴) $(x^2 + z^2)e^{xz}$

۴۳- می‌دانیم تابع برداری X به صورت $\vec{X} = (2xz^2 - 2xz^2, 2xz^2 + y^2 - yz^2, 4zx^2 + 2zy^2)$ تعریف شده. $\text{Curl } X$ مساوی کدامیک از عبارات داده شده است.
 (۱) $6zy\vec{i} - 12xz\vec{j} + 6xy\vec{k}$ (۲) $6zy\vec{i} + 12xz\vec{j} + 6xy\vec{k}$ (۳) $6zy\vec{i} + 12xz\vec{j} - 6xy\vec{k}$ (۴) $6zy\vec{i} - 12xz\vec{j} - 6xy\vec{k}$

۴۴- تابع پتانسیل تابع برداری $\vec{F} = (yze^{xyz} - fx)\vec{i} + (xze^{xyz} + z)\vec{j} + (xye^{xyz} + y)\vec{k}$ برابر است با:
 (۱) $\phi = e^{xyz} - 2xz^2 + zy + c$
 (۲) $\phi = e^{xyz} - 2xz^2 - zy + c$
 (۳) $\phi = e^{xyz} + 2xz^2 + zy + c$
 (۴) $\phi = zy - e^{xyz} - 2xz^2 + c$

۴۵- اگر $C: x^2 + y^2 = r^2$ در جهت مثبت، آنگاه حاصل $\oint_C \frac{-y dx}{x^2 + y^2} + \frac{x dy}{x^2 + y^2}$ برابر است با:
 (۱) صفر (۲) π (۳) 2π (۴) $2\pi r$

۴۶- حجم مشترک بین دو استوانه $x^2 + y^2 = a^2$ و $x^2 + z^2 = a^2$ را حساب کنید.
 (۱) $2a^2$ (۲) $16a^2$ (۳) $\frac{16}{3}a^2$ (۴) $\frac{2}{16}a^2$

۴۷- فرض کنید $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y^2}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ c, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$ در این صورت کدام گزاره درست است؟
 (۱) f در $(0, 0)$ پیوسته است.
 (۲) f در $(0, 0)$ مشتق پذیر است.
 (۳) $f_x(0, 0)$ و $f_y(0, 0)$ وجود ندارند.
 (۴) $f_x(0, 0)$ و $f_y(0, 0)$ وجود دارند ولی f در $(0, 0)$ مشتق پذیر نیست.

۴۸- شار میدان $\vec{F} = 2x\vec{i} - 3y\vec{j}$ در امتداد بیضی $y = 4 \sin t$ و $x = \cos t$ و $0 \leq t \leq 2\pi$ و رو به خارج را پیدا نمایید.
 (۱) -2π (۲) -4π (۳) 2π (۴) -2π

۴۹- مشتق $f(x, y, z) = x^2 - xy^2 - z$ در نقطه $P_0(1, 1, 0)$ و در جهت بردار $\vec{a} = 2\vec{i} - 3\vec{j} + 6\vec{k}$ را بیابید.
 (۱) $\frac{4}{5}$ (۲) $\frac{4}{\sqrt{5}}$ (۳) $\frac{2}{\sqrt{5}}$ (۴) $\frac{2}{5}$

آمار

۵۰- زاویه بین دو صفحه $2x + y - 7z + 11 = 0$ و $5x - 2y + 5z - 12 = 0$ کدام است؟
 (۱) 30° درجه (۲) 75° درجه (۳) 90° درجه (۴) 120° درجه

۵۱- جرمی با چگالی $p(x, y) = 1 + 2x + y$ در ناحیه مثلثی شکل به رئوس $(0, 0)$ ، $(1, 0)$ و $(0, 2)$ توزیع شده است. اندازه جرم کدام است؟
 (۱) $\frac{2}{8}$ (۲) $\frac{2}{3}$ (۳) $\frac{8}{3}$ (۴) 5

۵۲- مقدار $\iint_A e^{-2x-3y} dx dy$ که در آن $A = \{(x, y) : x \geq 0, y \geq 0\}$ کدام است؟
 (۱) $\frac{1}{6}$ (۲) 1 (۳) 6 (۴) ∞

۵۳- مقدار انتگرال خط $\int_C x^2 dx + xy dy$ که در آن C مثلثی به رئوس $(0, 0)$ ، $(1, 0)$ و $(0, 1)$ است و در جهت عکس عقربه‌های ساعت طی می‌شود، کدام است؟
 (۱) $\frac{1}{6}$ (۲) $\frac{1}{3}$ (۳) $\frac{1}{2}$ (۴) 1

۵۴- حجم محصور بین صفحه xoy و سهمیگون $z = 1 - x^2 - y^2$ کدام است؟
 (۱) $\frac{\pi}{4}$ (۲) $\frac{\pi}{3}$ (۳) $\frac{\pi}{2}$ (۴) 1

۵۵- مقدار انتگرال تابع $f(x, y) = xy$ در ناحیه $0 < x < y < 1$ کدام است؟
 (۱) $\frac{1}{8}$ (۲) $\frac{1}{4}$ (۳) $\frac{1}{2}$ (۴) 1



۶۸- مرکز جرم سیمی با چگالی $\delta = 2(1-y)$ و به شکل نیم دایره که در نقاط $(1,0)$ و $(-1,0)$ به محور x ها بسته شده است و در نیم صفحه بالایی قرار دارد. کدام است؟

- (۱) $(0, \frac{1}{2})$ (۲) $(0, \frac{4+\pi}{2(\pi-2)})$ (۳) $(0, \frac{4-\pi}{2(\pi-2)})$ (۴) $(0, \frac{4-\pi}{2(\pi-2)})$

۶۹- کدام میدان پایستار است؟

- (۱) $F(x, y) = yi - xj$ (۲) $F(x, y) = 2xyi + xy^2j$
 (۳) $F(x, y) = (2 + 2xy)i + (x^2 - 2y^2)j$ (۴) $F(x, y) = (x^2 + y^2)i + (x^2 + y^2)j$

۷۰- مساحت محدود به خم $r(t) = t^2i + (\frac{t^3}{3} - t)j, -\sqrt{3} \leq t \leq \sqrt{3}$ کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{5}$ (۲) $\frac{\sqrt{3}}{5}$ (۳) $2\sqrt{3}$ (۴) $\frac{2\sqrt{3}}{5}$

۷۱- مقدار $\int \int \int \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} dx dy dz$ کدام است؟

- (۱) $\frac{\pi a}{2}$ (۲) $\frac{\pi a^2}{4}$ (۳) $\frac{\pi a^2}{6}$ (۴) $\frac{\pi a^2}{8}$

۷۲- ماکسیمم خمیدگی تابع $y = e^x$ کدام است و به ازای چه مقداری از x به دست می‌آید؟

- (۱) $x = 0, 2\sqrt{2}$ (۲) $x = 1, e$ (۳) $x = 0, \frac{1}{2\sqrt{2}}$ (۴) $x = 1, \frac{e}{1+e}$

۷۳- معادله $2 = x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx$ معرف کدام رویه است؟

- (۱) کره (۲) بیضی گون (۳) هذلولی گون یک پارچه (۴) هذلولی گون دو پارچه

۷۴- ماکسیمم و می‌نیمم تابع $f(x, y) = x^2 - y^2$ نسبت به قید $x^2 + y^2 = 1$ کدام‌اند؟

- (۱) $-1, 0$ (۲) $-1, 1$ (۳) $0, 1$ (۴) $-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}$

۷۵- مشتق سویی تابع $f(x, y) = x^2 - 2xy + 4y^2$ در نقطه $(1, 2)$ و در سوی $u = (\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2})$ کدام است؟

- (۱) $-\frac{1}{2}(12 + 2\sqrt{3})$ (۲) $\frac{1}{2}(12 - 2\sqrt{3})$ (۳) $\frac{1}{2}(12 + 2\sqrt{3})$ (۴) $\frac{1}{2}(12\sqrt{3} - 2)$

۷۶- اگر $x = st^2, y = s^2t, z = e^x \sin y$ به ازای $s = 0$ و $t = 1$ کدام است؟

- (۱) -2 (۲) -1 (۳) 0 (۴) 1

۷۷- معادله صفحه مماس بر سهمی گون $z = 2x^2 + y^2$ در نقطه $(1, 1, 3)$ کدام است؟

- (۱) $4x - 2y - z + 2 = 0$ (۲) $4x - 2y + z + 2 = 0$ (۳) $4x + 2y - z - 2 = 0$ (۴) $4x - 2y - z + 2 = 0$

۷۸- کدام تابع در نقطه $(0, 0)$ می‌تواند با تعریف مجدد (در صورت لزوم) به تابع پیوسته‌ای در آن نقطه تبدیل شود؟

- (۱) $\frac{2xy}{x^2 + y^2}$ (۲) $\frac{x^2}{x^2 + y^2}$ (۳) $\frac{x^2y}{x^2 + y^2}$ (۴) $\frac{\sin(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2}$

۷۹- مساحت بخشی از رویه $z = x^2 + y^2$ که زیر صفحه $z = 2$ قرار دارد، کدام است؟

- (۱) $\frac{2}{13}$ (۲) $\frac{12\pi}{3}$ (۳) $\frac{12}{3}$ (۴) $\frac{2\pi}{13}$

۸۰- شار برونسوی میدان $F(x, y) = (x - y)i + xj$ گذرنده از دایره C به معادلات پارامتری $x = \cos t, y = \sin t$ و $0 \leq t \leq 2\pi$ در جهت مثلثاتی کدام است؟

- (۱) 0 (۲) π (۳) 2π (۴) 2

۸۱- گردش تابع برداری $F(x, y) = (x - y)i + xj$ روی دایره واحد کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{2}$ (۲) π (۳) 2π (۴) 1

۵۶- انتگرال سه‌گانه $I = \iiint_V (x+y+z)^2 dV$ که در آن V ناحیه محدود به صفحه $x+y+z=1$ و صفحات مختصات است، کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{2}$ (۲) $\frac{1}{3}$ (۳) $\frac{1}{4}$ (۴) $\frac{1}{10}$

۵۷- معادله صفحه مماس بر سهمی گون $z = 2x^2 + y^2$ در نقطه‌ای به طول ۱ و عرض ۲ کدام است؟

- (۱) $4x - 2y - z = -2$ (۲) $4x + 2y - z = -2$ (۳) $4x - 2y - z = 2$ (۴) $4x + 2y - z = 2$

۵۸- اگر $x = st^2, y = s^2t, z = e^x \sin y$ مقدار $\frac{\partial z}{\partial t}$ به ازای $s = 1$ و $t = 0$ کدام است؟

- (۱) -1 (۲) 0 (۳) 1 (۴) 2

۵۹- مشتق جهت‌دار تابع $f(x, y) = x^2 - 2xy + 4y^2$ در نقطه $(1, 2)$ و در جهت $u = (\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2})$ کدام است؟

- (۱) $-\frac{1}{2}(12 + 2\sqrt{3})$ (۲) $\frac{1}{2}(12 - 2\sqrt{3})$ (۳) $\frac{1}{2}(12 + 2\sqrt{3})$ (۴) $\frac{1}{2}(12\sqrt{3} - 2)$

۶۰- نقطه $(-2, 3)$ و مقدار -13 برای تابع $f(x, y) = x^2 + 4x + y^2 - 6y$ چه نوع نقطه و مقداری هستند؟

- (۱) نقطه ماکسیمم و مقدار ماکسیمم نسبی (۲) نقطه می‌نیمم نسبی و مقدار می‌نیمم نسبی
 (۳) نقطه زینی و مقدار معمولی (۴) نقطه غیر بحرانی و مقدار معمولی

مکاترونیگ

۶۱- فرض کنید C مسیری مثلثی به رئوس $(0, 0), (1, 1), (0, 1)$ است که در جهت مثلثاتی طی می‌شود. $\int_C x^2 dx + xy dy$ کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{2}$ (۲) $\frac{1}{3}$ (۳) $\frac{1}{6}$ (۴) $\frac{1}{2}$

۶۲- مشتق سویی تابع $f(x, y) = x^2 - 2xy + 4y^2$ در نقطه $(1, 0)$ و در سویی که زاویه $\frac{\pi}{6}$ معین می‌کند کدام است؟

- (۱) $\frac{2}{3}$ (۲) $\frac{2}{3}\sqrt{3}$ (۳) $\frac{2}{3}(\sqrt{3} - 1)$ (۴) $\frac{2}{3}(\sqrt{3} + 1)$

۶۳- معادلات خط قائم بر رویه $\frac{x^2}{4} + y^2 + \frac{z^2}{9} = 2$ در نقطه $(-2, 1, -3)$ کدامند؟

- (۱) $\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-2}{2}$ (۲) $\frac{x+2}{-1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+2}{-2}$ (۳) $\frac{x-2}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-9}{2}$ (۴) $\frac{x+2}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-2}{2}$

۶۴- مؤلفه‌های مماسی و قائم متحرکی با مختصات $t \geq 0, x(t) = 2t^2$ و $y(t) = t^3$ در لحظه $t = 1$ کدامند؟

- (۱) $a_T = 10, a_N = \frac{3}{5}$ (۲) $a_T = \frac{17}{25}, a_N = \frac{2}{5}$ (۳) $a_T = \frac{14}{5}, a_N = \frac{7}{5}$ (۴) $a_T = \frac{24}{5}, a_N = \frac{12}{5}$

مدیریت سیستم و بهره‌وری و مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی

۶۵- انحناى منحنی $y = \frac{1}{e} x^2$ در نقطه $x = 1$ کدام است؟

- (۱) $\frac{5}{8}$ (۲) 8 (۳) $\frac{8}{5\sqrt{5}}$ (۴) $\frac{5\sqrt{5}}{8}$

۶۶- $\int \int \frac{\sin y}{y} dy dx$ کدام است؟

- (۱) $1 - \cos 1$ (۲) $1 + \sin 1$ (۳) $\cos 1$ (۴) 2

۶۷- مقدار انتگرال دوگانه $\iint_R (2y^2 - x) dA$ که در آن $R = [0, 2] \times [1, 2]$ کدام است؟

- (۱) 0 (۲) 2 (۳) 7 (۴) 12

باسخامه تست‌های سراسری ۱۳۸۶

۱- گزینه «۲»

$$M_{xy} = \iiint_V z dV \xrightarrow{\text{مختصات استوانه‌ای}} \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{r}} \int_0^{\sqrt{r}} z r dz dr d\theta = \frac{1}{r} \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{r}} r(16-r^2) dr d\theta = \frac{1}{r} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{r}} (16r-r^3) dr = \frac{64\pi}{3}$$

$$M = \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{r}} \int_0^{\sqrt{r}} r dz dr d\theta = \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{r}} (r^2 - r^3) dr d\theta = 8\pi$$

بنابراین فاصله مرکز ثقل از مبدأ $\bar{z} = \frac{64\pi}{8\pi} = \frac{8}{3}$ است.

۲- گزینه «۳»

$$V = \frac{dr}{dt} \bar{r} + r \frac{d\theta}{dt} \bar{\theta} = \frac{dr}{dt} (\cos\theta, \sin\theta) + r \frac{d\theta}{dt} (-\sin\theta, \cos\theta) = \left(\frac{dr}{dt} \cos\theta - r \frac{d\theta}{dt} \sin\theta, \frac{dr}{dt} \sin\theta + r \frac{d\theta}{dt} \cos\theta \right)$$

$$\Rightarrow \text{اندازه تصویر بردار سرعت بر روی محور قطبی} = \frac{dr}{dt} \cos\theta - r \frac{d\theta}{dt} \sin\theta = \frac{\sqrt{r}}{3} \cos \frac{\pi}{6} - r \left(\frac{-1}{r} \right) \sin \frac{\pi}{6} = \frac{r}{2}$$

۳- گزینه «۴» ابتدا توجه کنید که:

$$z = \frac{\log x - \log y}{x^2 + y^2} = \frac{\log \frac{x}{y}}{x^2 + y^2}$$

$$x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = -2z \Rightarrow x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} + 2z = 0$$

بنابراین Z یک تابع همگن از درجه ۲- می‌باشد، و در نتیجه طبق قضیه اولر:

$$\left\{ \begin{array}{l} y = \frac{1}{r} uv \\ x = ru + rv \end{array} \right. \Rightarrow \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} r+rv & ru \\ \frac{1}{r}v & \frac{1}{r}u \end{vmatrix} = u + \frac{r}{r}uv - \frac{r}{r}uv = u$$

۴- گزینه «۱» از روابط داده شده نتیجه می‌شود:

۵- گزینه «۱» مشابه بسیاری از تست‌های فصل ۳ کتاب می‌باشد.

$$\int_0^1 \int_x^{1-x} \frac{x}{y} dy dx = \int_0^1 (x \ln y) \Big|_x^{1-x} dx = \int_0^1 (x \ln(1-x) - x \ln x) dx = \ln \frac{4}{e}$$

۶- گزینه «۱» از قضیه دیورژانس استفاده می‌کنیم:

$$\vec{F} = (xz^2, x^2y - z, xy + y^2z) \Rightarrow \text{div} \vec{F} = z^2 + x^2 + y^2$$

$$\Rightarrow \text{شار} = \int_V (x^2 + y^2 + z^2) dV \xrightarrow{\text{مختصات کروی}} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_0^a \rho^2 \times \rho^2 \sin \phi d\rho d\phi d\theta = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi} \sin \phi d\phi \int_0^a \rho^4 d\rho = \frac{2\pi}{5} a^5$$

۷- گزینه «۲» ابتدا مقادیر ویژه ماتریس را به دست می‌آوریم:

$$|A - \lambda I| = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} -1-\lambda & 6 & 4 \\ 0 & 4-\lambda & 2 \\ 0 & -6 & -3-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (-1-\lambda)((4-\lambda)(-3-\lambda) + 12) = 0 \Rightarrow \lambda = -1, 0, 1$$

پس $\lambda = 1$ بزرگترین مقدار ویژه ماتریس می‌باشد.

$$AX = \lambda X \Rightarrow \begin{cases} -x + 6y + 4z = x \\ 4y + 2z = y \\ -6y - 2z = z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - 2y - 2z = 0 \\ 3y + 2z = 0 \\ 3y + 2z = 0 \end{cases} \Rightarrow (0, -2a, 2a)$$

۸- گزینه «۱» از قضیه استوکس استفاده می‌کنیم.

$$\vec{F} = (2xyz^2, x^2z^2, 2x^2yz^2) \Rightarrow \text{curl} \vec{F} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 2xyz^2 & x^2z^2 & 2x^2yz^2 \end{vmatrix} = (0, 0, 0) \Rightarrow \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_A \text{curl} \vec{F} \cdot n dS = 0$$

۹- گزینه «۲»

$$z = \sqrt{16 - x^2 - y^2} \Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 = 16 = f'(x, y, z)$$

$$\vec{n} = \frac{\nabla f'}{|\nabla f'|} = \frac{(2x, 2y, 2z)}{\sqrt{4x^2 + 4y^2 + 4z^2}} = \left(\frac{x}{4}, \frac{y}{4}, \frac{z}{4} \right)$$

$$f(x, y, z) = \frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2 + z^2) \Rightarrow \nabla f = \left(\frac{x}{x^2 + y^2 + z^2}, \frac{y}{x^2 + y^2 + z^2}, \frac{z}{x^2 + y^2 + z^2} \right)$$

$$\Rightarrow \text{مشتق سونی} = \nabla f \cdot \vec{n} = \frac{x^2}{4(x^2 + y^2 + z^2)} + \frac{y^2}{4(x^2 + y^2 + z^2)} + \frac{z^2}{4(x^2 + y^2 + z^2)} = \frac{1}{4}$$

۱۰- گزینه «۴»

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 - z = 0 \Rightarrow \nabla f = (2x, 2y, -1)$$

$$g(x, y, z) = xy - z = 0 \Rightarrow \nabla g = (y, x, -1)$$

$$\vec{N} = \nabla f \times \nabla g = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2x & 2y & -1 \\ y & x & -1 \end{vmatrix} = (-2y, +2x, 2x^2 - 2y^2) = (2, 4, 6)$$

$$\Rightarrow 2(x-2) + 4(y+1) + 6(z+2) = 0 \Rightarrow x + 2y + 3z + 6 = 0$$

برای به دست آوردن نقطه تلاقی صفحه با محور x ها قرار می‌دهیم $y = z = 0$ در این صورت: $x + 6 = 0 \Rightarrow x = -6$

۱۱- گزینه «۴» با ضرب طرفین معادله در x، معادله به صورت $x^2 y''' + 2x^2 y'' + xy' = x^2$ در می‌آید که یک معادله اولر می‌باشد. می‌دانیم برای

حل معادله اولر از تغییر متغیر $x = e^t$ استفاده می‌شود که در این صورت معادله به شکل مقابل در می‌آید:

$$y''' = e^{3t}$$

۱۲- گزینه «۱»

$$\begin{cases} f_x = 4y^2 + y^2 + 2xy^2 \\ f_y = 8xy + 2xy^2 + 2x^2y \end{cases}$$

در هر دو نقطه M_1 و M_2 ، مقادیر f_x و f_y برابر صفرند. پس این نقاط، نقاط بحرانی تابع f می‌باشند.

$$\Delta = f_{xx} f_{yy} - f_{xy}^2 = 2y^2 \times (\lambda x + 6xy + 2x^2) - (\lambda y + 2y^2 + 4xy)^2$$

در نقطه M_1 ، مقدار $\Delta < 0$ است، پس M_1 نقطه زینی است. در نقطه M_2 ، $\Delta > 0$ و $f_{xx} > 0$ پس M_2 نقطه می‌نیم است.

۱۳- گزینه «۳» طول، عرض و ارتفاع مستطیل را x، y و z فرض می‌کنیم. در این صورت حجم مکعب مستطیل $f(x, y, z) = xyz = 16$

$$xyz = 16 \Rightarrow x^2 y^2 z^2 = 16^2 \Rightarrow xy(2xz)(2yz) = 2^8$$

مساحت جانبی مکعب مستطیل در باز $g(x, y, z) = xy + 2xz + 2yz$ است. حاصل جمع آنها وقتی می‌نیم است که متغیرها با هم برابر باشند، یعنی:

$$xy = 2xz = 2yz \Rightarrow y = 2z, x = 2z, x = y$$

از روابط فوق و $xyz = 16$ نتیجه می‌شود:

$$4z^3 = 16 \Rightarrow z = \sqrt[3]{4}, y = 2\sqrt[3]{4}, x = 2\sqrt[3]{4}$$

$$\Rightarrow \text{جانبی} S = xy + 2xz + 2yz = 4\sqrt[3]{16} + 4\sqrt[3]{16} + 4\sqrt[3]{16} = 12\sqrt[3]{16}$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d}{dt} \left(\frac{2}{\sqrt{1+4x^2}} \right) = \frac{d}{dx} \left(\frac{2}{\sqrt{1+4x^2}} \right) \frac{dx}{dt} = \frac{-8x}{(1+4x^2)\sqrt{1+4x^2}} \times \frac{2}{\sqrt{1+4x^2}} = \frac{-16x}{(1+4x^2)^2}$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{4x}{\sqrt{1+4x^2}} \Rightarrow \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{4}{(1+4x^2)\sqrt{1+4x^2}} \times \frac{2}{\sqrt{1+4x^2}} = \frac{8}{(1+4x^2)^2}$$

در نقطه $x=2$ ، مقادیر $\frac{d^2y}{dt^2}$ و $\frac{d^2x}{dt^2}$ به ترتیب $\frac{8}{17^2}$ و $\frac{-32}{17^2}$ می‌باشند. بنابراین:

$$|a| = \sqrt{\left(\frac{32}{17^2}\right)^2 + \left(\frac{8}{17^2}\right)^2} = \frac{8}{17\sqrt{17}}$$

گزینه «۴»

گزینه «۴» حد تابع داده شده را روی مسیر $y = mx$ مورد بررسی قرار می‌دهیم.

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - m^2x^2}{x^2 + m^2x^2} = \frac{1 - m^2}{1 + m^2}$$

با توجه به اینکه حاصل حد به مقدار m بستگی دارد، پس تابع در $(0,0)$ دارای حد نیست.

گزینه «۴» با توجه به اینکه دامنه انتگرالگیری نسبت به محور x ها و z ها متقارن است و توابع x و $\sin z$ فرد می‌باشند پس انتگرال آنها

$$\iiint (\tau + x + \sin z) dx dy dz = \tau \times a \text{ حجم کره به شعاع } \tau = \tau \times \frac{4}{3} \pi \tau^3 = \frac{4}{3} \pi \tau^4$$

گزینه «۳» می‌توان انتگرال را به طور مستقیم محاسبه کرد ولی شاید استفاده از مختصات قطبی بهتر باشد.

$$\int_0^1 \int_{x^2}^x \frac{dy dx}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \int_0^1 \int_0^{\frac{\sin \theta}{\cos^2 \theta}} dr d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin \theta d\theta}{\cos^2 \theta} = \frac{1}{\cos \theta} \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \sqrt{2} - 1$$

گزینه «۳» هیچ کدام از گزینه‌ها صحیح نمی‌باشد.

$$\alpha(t) = (\cos t, \sin t, t) \Rightarrow \alpha'(t) = (-\sin t, \cos t, 1)$$

$$F(\alpha(t)) \cdot \alpha'(t) = -\sin t \cos t + \sin t \cos t + t = t$$

$$\Rightarrow \text{کار} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} F(\alpha(t)) \cdot \alpha'(t) dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} t dt = \frac{t^2}{2} \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi^2}{8}$$

گزینه «۴» محاسبه انتگرال بر روی سطح S ساده نیست. لذا سطح دیگری که هم مرز با آن باشد را انتخاب می‌کنیم. این سطح جدید همان

تلاقی کره با صفحه xy می‌باشد. سطح $S' : x^2 + y^2 = 4, z=0 \Rightarrow x^2 + y^2 + 4 = 4 \Rightarrow x^2 + y^2 = 0$

$$\text{curl } F = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y^2 \cos xz & x^2 e^{yz} & e^{-xyz} \end{vmatrix} \Rightarrow \text{curl } F \cdot \vec{k} = 2xy e^{yz} - 2y \cos xz$$

با توجه به اینکه در روی سطح $S', z=0$ است. لذا $\text{curl } F \cdot \vec{k} = 2xy$. در نتیجه:

با توجه به اینکه سطح S' متقارن است لذا $\int_{S'} -2y ds = 0$ و چون سطح S' روی صفحه xy قرار دارد پس $ds = dA$.

$$I = \iint_{S'} (2xy - 2y) dS = \int_0^{2\pi} \int_0^2 2r^2 \cos^2 \theta \cdot r dr d\theta = \int_0^{2\pi} 2r^3 dr \int_0^{\pi} \cos^2 \theta d\theta = 12\pi$$

مختصات قطبی $I = 12\pi$

$$\overline{BA} = (+1, 0, -2), \overline{BC} = (1, -2, 0)$$

گزینه «۳»

بردار \overline{BD} و هر مضربی از آن نیمساز است $\Rightarrow \overline{BD} = \overline{BA} + \overline{BC} = (2, -2, -2)$

گزینه «۲»

گزینه «۴»

$$f_x(0,0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h-1}{h} = \infty$$

گزینه «۳»

گزینه «۱»

گزینه «۲» با توجه به تقارن شکل در نواحی اول، دوم و سوم و یکنواختی چگالی در این نواحی کافی است جرم در ناحیه اول محاسبه و در ۳ ضرب شود.

$$M = \tau \iiint \delta dA \stackrel{\text{قطبی}}{=} \tau \int_a^b \int_0^{\frac{\pi}{2}} (r \cos \theta + r \sin \theta) r dr d\theta = \tau \int_a^b r^2 dr \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos \theta + \sin \theta) d\theta$$

$$= \tau^2 \Big|_a^b (\sin \theta - \cos \theta) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \tau(b^2 - a^2)$$

گزینه «۳»

گزینه «۳»

گزینه «۳» از قضیه دیورژانس استفاده می‌کنیم.

$$A = \iiint_{\Sigma} F \cdot nds = \iiint \text{div } F dV = \iiint (\tau + \tau + \tau) dV = 6 \times (\text{حجم کره}) = 6 \times \frac{4}{3} \pi \times (\sqrt{2})^3 = 16\sqrt{2}\pi$$

گزینه «۱» خم C را به صورت زیر پارامتری می‌کنیم:

$$x = \sqrt{2} \cos t, y = \sqrt{2} \sin t, z = \tau \sin t \quad 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$$

$$ds = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}$$

$$dt = \sqrt{(-\sqrt{2} \sin t)^2 + (\sqrt{2} \cos t)^2 + (\tau \cos t)^2} = \tau$$

$$\Rightarrow \int_C (x + y + z) ds = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \tau (\sqrt{2} \cos t + \sqrt{2} \sin t) dt = (\sqrt{2} \sin t - \sqrt{2} \cos t) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 4\sqrt{2} + 4$$

گزینه «۲»

$$y = x^2 + \tau \Rightarrow \frac{dy}{dt} = 2x \frac{dx}{dt}$$

گزینه «۱»

$$v = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + 4x^2 \left(\frac{dx}{dt}\right)^2} = \tau \Rightarrow \frac{dx}{dt} = \frac{\tau}{\sqrt{1+4x^2}}$$

۳۲- گزینه «۱» با توجه به راهنمایی گفته شده در سؤاله از قضیه دیورژانس استفاده می‌کنیم. بردار قائم بر کره داده شده $\vec{n} = \left(\frac{x}{a}, \frac{y}{a}, \frac{z}{a}\right)$ است. حال تابع \vec{F} را طوری انتخاب می‌کنیم که حاصل $\vec{F} \cdot \vec{n}$ برابر $x^2 + y^2$ شود بدین منظور \vec{F} را برابر $\vec{F}(x, y, z) = (ax, ay, 0)$ در نظر می‌گیریم. در اینصورت طبق قضیه دیورژانس داریم:

$$\int_S (x^2 + y^2) dS = \int_S \vec{F} \cdot \vec{n} dS \stackrel{\text{قضیه دیورژانس}}{=} \iiint \text{div} \vec{F} dV = \iiint (a + a) dV = 2a \times \text{حجم کره} = \frac{8\pi}{3} a^3$$

۳۳- گزینه «۱» از قضیه گرین استفاده می‌کنیم.

$$\vec{F} = (y^2, x) \Rightarrow \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} = 1 - 2y = 1$$

$$\Rightarrow I = \iint_D (1 - 2y) dA = 2 \times \text{مساحت دایره} = \pi \times 2^2 = 4\pi$$

۳۴- گزینه «۲»

$$R(t) = (\cos t)\vec{i} + (\sin t)\vec{j} + t\vec{k}$$

$$V(t) = (-\sin t)\vec{i} + (\cos t)\vec{j} + \vec{k} \Rightarrow \vec{T} = \frac{\vec{V}}{|\vec{V}|} = \left(\frac{-1}{\sqrt{2}} \sin t, \frac{1}{\sqrt{2}} \cos t, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$\vec{N} = \frac{d\vec{T}/dt}{|d\vec{T}/dt|} = \frac{\left(\frac{-1}{\sqrt{2}} \cos t, \frac{-1}{\sqrt{2}} \sin t, 0\right)}{\sqrt{\frac{1}{2} \cos^2 t + \frac{1}{2} \sin^2 t}} = (-\cos t, -\sin t, 0)$$

۳۵- گزینه «۳» توجه کنید که کران انتگرال مربوط به متغیر x مستقل از y و z می‌باشد. پس کافی است کران انتگرال دوگانه مربوط به y و z عوض شود.

۳۶- گزینه «۴» از قضیه دیورژانس استفاده می‌کنیم.

$$\text{div} \vec{F} = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z} = a + b + c$$

$$\Rightarrow \iint_S (\vec{F} \cdot \vec{n}) d\sigma = \iiint \text{div} \vec{F} dV = (a + b + c) \times \text{حجم بیضی گون} = \frac{4}{3} \pi abc (a + b + c)$$

۳۷- گزینه «۱»

$$f(x, y, z) = xyz + 30 \Rightarrow \nabla f = (yz, xz, xy) = (10, -15, -6)$$

$$g(x, y, z) = x^2 - y^2 - z = 0 \Rightarrow \nabla g = (2x, -2y, -1) = (-6, -4, -1)$$

$$N = \nabla f \times \nabla g = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 10 & -15 & -6 \\ -6 & -4 & -1 \end{vmatrix} = -9\vec{i} + 46\vec{j} - 13\vec{k}$$

۳۸- گزینه «۱»

۳۹- گزینه «۲» از قضیه گرین استفاده می‌کنیم.

$$\int_C y dx + 2x dy = \iint_D \left(\frac{\partial(2x)}{\partial x} - \frac{\partial(y)}{\partial y}\right) dA = \iint_D 2 dA = 2 \times \text{مساحت بیضی} = \pi$$

۴۰- گزینه «۲»

$$f(x, y) = x^2 + y^2 - 9xy + 27$$

$$\begin{cases} f_x = 2x - 9y = 0 \\ f_y = 2y - 9x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 = 9y \\ y^2 = 9x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 = 9\sqrt{x} \\ \sqrt{x} = 9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 27 \\ x = 81 \end{cases}$$

$$\Delta = f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 = 6 \times 6 - (-9)^2 = 36 - 81 = -45$$

در نقطه $(0, 0)$ مقدار $\Delta < 0$ است پس $(0, 0)$ نقطه زینی و در نقطه $(2, 2)$ و $(9, 9)$ مقدار $\Delta > 0$ است پس نقطه بحرانی نقطه می‌نیم است.

۴۱- گزینه «۳» با توجه به اینکه $\Delta = (\sqrt{2})^2 - 4 \times 2 \times 1 = 0$ پس منحنی داده شده سهمی است.

۴۲- گزینه «۴»

$$f(x, y, z) = xyz + e^{xz} \Rightarrow \text{grad} f = (yz + ze^{xz}, xz, xy + xe^{xz})$$

$$\text{div}(\text{grad} f) = z^2 e^{xz} + x^2 e^{xz} = (x^2 + z^2) e^{xz}$$

۴۳- گزینه «۱»

$$\text{curl} \vec{X} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 2xz^2 - 2xz^2 & 2x^2y + y^2 - yz^2 & 2zx^2 + 2zy^2 \end{vmatrix} = (6yz, -12xz, 6xy)$$

۴۴- گزینه «۱»

۴۵- گزینه «۳» منحنی C را می‌توان به صورت پارامتری $\alpha(t) = (r \cos t, r \sin t)$ در نظر گرفت. در این صورت:

$$\alpha'(t) = (-r \sin t, r \cos t) \Rightarrow F(\alpha(t)) = \left(\frac{-r \sin t}{r^2}, \frac{r \cos t}{r^2}\right) \Rightarrow F(\alpha(t)) \cdot \alpha'(t) = 1$$

$$\Rightarrow \int_C \frac{-y dx + x dy}{x^2 + y^2} = \int_0^{2\pi} 1 dt = 2\pi$$

۴۶- گزینه «۳» با توجه به تقارن ناحیه نسبت به z, y, x کافی است حجم قسمتی را که در $\frac{1}{8}$ اول واقع است به دست آورده و جواب را در ۸ ضرب کنیم.

$$\Rightarrow V = 8 \int_0^a \int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} \int_0^{\sqrt{a^2-x^2-y^2}} dz dy dx = 8 \int_0^a (a^2 - x^2) dx = \frac{16a^3}{3}$$

توضیح: این تست تا کنون حداقل ۷ بار در کنکورهای سالهای گذشته تکرار شده است.

۴۷- گزینه «۴» به سادگی می‌توان نشان داد f در $(0, 0)$ پیوسته نیست. کافی است دو مسیر $x = c$ و $y = x^2$ را در نظر بگیرید و بنابراین f در $(c, 0)$ مشتق‌پذیر نیست.

۴۸- گزینه «۲» از قضیه گرین استفاده می‌کنیم.

$$\vec{F} = (2x, -2y) \Rightarrow \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} = 2 - 2 = 0$$

$$\int_C \vec{F} \cdot \vec{n} ds = \iint_D -1 dA = -(\text{مساحت بیضی}) = -\pi \times 1 \times 4 = -4\pi$$

۴۹- گزینه «۲»

$$f(x, y, z) = x^2 - xy^2 - z \Rightarrow \nabla f = (2x^2 - y^2, -2xy, -1) \Big|_{(1,1,0)} = (2, -2, -1)$$

$$\vec{a} = 2\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k} \Rightarrow \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = \left(\frac{2}{3}, \frac{-2}{3}, \frac{1}{3}\right)$$

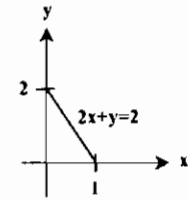
$$D_{\vec{a}} f = (2, -2, -1) \cdot \left(\frac{2}{3}, \frac{-2}{3}, \frac{1}{3}\right) = \frac{4}{3} + \frac{4}{3} - \frac{1}{3} = \frac{7}{3}$$

۵۰- گزینه «۴» زاویه بین دو صفحه، برابر زاویه بین بردارهای نرمال دو صفحه است.

$$N_1 = (2, 1, -7) \quad N_2 = (5, -2, 5)$$

$$\cos \theta = \frac{N_1 \cdot N_2}{|N_1| |N_2|} = \frac{2 \times 5 + 1 \times (-2) + (-7) \times 5}{\sqrt{4+1+49} \sqrt{25+4+25}} = \frac{-27}{54} = \frac{-1}{2} \Rightarrow \theta = \frac{2\pi}{3}$$

۵۱- گزینه «۳»



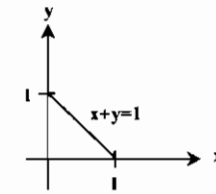
$$m = \int_0^1 \int_0^{2-2x} (1+2x+y) dy dx = \int_0^1 \left(y + 2xy + \frac{y^2}{2} \right) \Big|_0^{2-2x} dx$$

$$= \int_0^1 (2-2x + 2x(2-2x) + \frac{(2-2x)^2}{2}) dx = \int_0^1 (2-2x + 4x - 4x^2 + 2 - 2x + 2x^2) dx = \int_0^1 (-2x^2 + 4) dx = \left(-\frac{2}{3}x^3 + 4x \right) \Big|_0^1 = \frac{10}{3}$$

۵۲- گزینه «۱»

$$\iint_A e^{-2x-3y} dA = \int_0^\infty e^{-2x} dx \int_0^\infty e^{-3y} dy = \left[-\frac{1}{2}e^{-2x} \right]_0^\infty \times \left[-\frac{1}{3}e^{-3y} \right]_0^\infty = \frac{1}{6}$$

۵۳- گزینه «۱» از قضیه گرین استفاده می‌کنیم:



$$\int_C x^2 dx + xy dy = \iint_D \left(\frac{\partial(xy)}{\partial x} - \frac{\partial(x^2)}{\partial y} \right) dA$$

$$= \int_0^1 \int_0^{1-x} y dy dx = \int_0^1 \left(\frac{(1-x)^2}{2} \right) dx = \frac{-(1-x)^3}{6} \Big|_0^1 = \frac{1}{6}$$

۵۴- گزینه «۳»

$$V = \iint_D (1-x^2-y^2) dA = \int_0^{2\pi} \int_0^1 (1-r^2) \times r dr d\theta = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 (r-r^3) dr = 2\pi \times \frac{1}{4} = \frac{\pi}{2}$$

۵۵- گزینه «۱»

$$I = \int_0^1 \int_x^1 xy dy dx = \int_0^1 \left(x \cdot \frac{y^2}{2} \Big|_x^1 \right) dx = \int_0^1 \left(\frac{x}{2} - \frac{x^2}{2} \right) dx = \frac{1}{8}$$

۵۶- گزینه «۴»

$$\iiint_V (x+y+z)^2 dV = \int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{1-x-y} (x+y+z)^2 dz dy dx = \int_0^1 \int_0^{1-x} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{3}(x+y)^2 \right) dy dx$$

$$= \int_0^1 \left(\frac{y}{3} - \frac{1}{12}(x+y)^2 \right) \Big|_0^{1-x} dx = \int_0^1 \left(\frac{1-x}{3} - \frac{1}{12} + \frac{1}{12}x^2 \right) dx = \int_0^1 \left(\frac{1}{6} - \frac{x}{3} + \frac{1}{12}x^2 \right) dx = \frac{1}{10}$$

۵۷- گزینه «۹» به ازای $x=1$ و $y=2$ مقدار $z=4$ به دست می‌آید.

$$2x^2 + y^2 - z = 0 \Rightarrow \nabla f = (4x, 2y, -1) = (4, 4, -1) \Rightarrow 4(x-1) + 4(y-2) - 1(z-4) = 0 \Rightarrow 4x + 4y - z = 8$$

۵۸- گزینه «۳» به ازای $t=0$ و $s=1$ مقادیر $x=0$ و $y=0$ به دست می‌آیند.

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t} = e^x \sin y \times rst + e^x \cos y \times s^2 = 1$$

۵۹- گزینه «۲»

$$f(x,y) = x^2 - 2xy + 4y^2 \Rightarrow \nabla f = (2x-2y, -2x+8y)$$

$$\nabla f \Big|_{(1,2)} = (-2, 12) \Rightarrow D_u f = \nabla f \cdot \vec{u} = (-2, 12) \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{2}(12 - 2\sqrt{2})$$

۶۰- گزینه «۲»

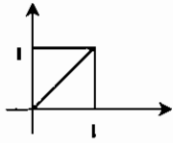
$$f(x,y) = x^2 + 4x + y^2 - 6y$$

$$\begin{cases} f_x = 2x + 4 = 0 \Rightarrow x = -2 \\ f_y = 2y - 6 = 0 \Rightarrow y = 3 \end{cases} \Rightarrow P(-2, 3) \quad \text{نقطه بحرانی}$$

$$\Delta = f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 = 2 \times 2 - 0^2 = 4$$

چون $\Delta > 0$ و $f_{xx} > 0$ پس نقطه بحرانی، نقطه می‌نیم می‌باشد.

۶۱- گزینه «۳» از قضیه گرین استفاده می‌کنیم:



$$\int_C x^2 dx + xy dy = \iint_D \left(\frac{\partial(xy)}{\partial x} - \frac{\partial(x^2)}{\partial y} \right) dA = \int_0^1 \int_0^1 y dx dy = \int_0^1 y^2 dy = \frac{1}{3}$$

۶۲- گزینه «۳»

$$\vec{u} = \left(\cos \frac{\pi}{6}, \sin \frac{\pi}{6} \right) = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2} \right)$$

$$\nabla f = (2x^2 - 2y, -2x + 4y) \xrightarrow{x=1, y=0} \nabla f = (2, -2)$$

$$D_u f = \nabla f \cdot \vec{u} = (2, -2) \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2} \right) = \sqrt{3} - 1$$

۶۳- گزینه «۲» مشابه مثال ۹۱ صفحه ۳۱ می‌باشد.

$$\nabla f = \left(\frac{x}{2}, 2y, \frac{z}{2} \right) \xrightarrow{x=-2, y=1, z=-2} \nabla f = (-1, 2, -1) \Rightarrow \text{معادله خط قائم: } \frac{x+2}{-1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+2}{-2}$$

۶۴- گزینه «۴»

$$R(t) = (rt^2, t^3)$$

$$V(t) = (2t, 3t^2), a(t) = (2, 6t) \Rightarrow |a| = \sqrt{4 + 36t^2} \xrightarrow{t=1} \sqrt{40}$$

$$|V| = \sqrt{4t^2 + 9t^4} \Rightarrow a_T = \frac{d}{dt} |V| = \frac{2t + 18t^3}{2\sqrt{4t^2 + 9t^4}} \xrightarrow{t=1} \frac{20}{10} = 2$$

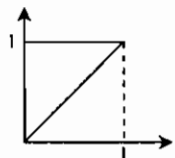
$$a_N = \sqrt{|a|^2 - a_T^2} = \sqrt{40 - 4} = \sqrt{36} = 6$$

۶۵- گزینه «۳» انحنای منحنی $y = f(x)$ از فرمول زیر به دست می‌آید:

$$k = \frac{|y''|}{(1+y'^2)^{3/2}}$$

$$y = \frac{1}{6}x^2 \Rightarrow y' = \frac{1}{3}x \Rightarrow y'' = \frac{1}{3} \Rightarrow k = \frac{|\frac{1}{3}|}{(1 + \frac{1}{9}x^2)^{3/2}} \xrightarrow{x=1} \frac{1}{(\frac{10}{9})^{3/2}} = \frac{27}{5\sqrt{10}}$$

۶۶- گزینه «۱» با تعویض ترتیب انتگرال‌گیری داریم:



$$\Rightarrow \int_0^1 \int_x^1 \frac{\sin y}{y} dy dx = \int_0^1 \int_0^y \frac{\sin y}{y} dx dy$$

$$= \int_0^1 \left(x \frac{\sin y}{y} \right) \Big|_x^1 dy = \int_0^1 \sin y dy = -\cos y \Big|_0^1 = 1 - \cos 1$$

۶۷- گزینه «۴»

$$\int_0^2 \int_1^2 (2y^2 - x) dy dx = \int_1^2 (y^2 - xy) \Big|_1^2 dx = \int_1^2 (4 - 2x) dx = (4x - x^2) \Big|_1^2 = 12$$

۶۸- گزینه «۳»

$$P(x,y) = 2 + 2xy, Q(x,y) = x^2 - 2y^2 \Rightarrow \frac{\partial P}{\partial y} = 2x, \frac{\partial Q}{\partial x} = 2x$$

۶۹- گزینه «۳»

۷۰- هیچ کدام از گزینه‌ها صحیح نیست.

$$\begin{cases} x = t^2 \\ y = \frac{t^2}{3} - t \end{cases} \quad -\sqrt{3} \leq t \leq \sqrt{3}$$

$$\begin{aligned} S &= 2 \int |y| dx = 2 \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} (t - \frac{t^2}{3}) 2t dt = 2 \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} (2t^2 - \frac{2t^3}{3}) dt = 2 \left[\frac{2t^3}{3} - \frac{2t^4}{12} \right]_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \\ &= 2 \left[\frac{2(\sqrt{3})^3}{3} - \frac{2(\sqrt{3})^4}{12} - \left(\frac{2(-\sqrt{3})^3}{3} - \frac{2(-\sqrt{3})^4}{12} \right) \right] = 2 \left[\frac{12\sqrt{3}}{3} - \frac{6}{12} - \left(-\frac{12\sqrt{3}}{3} - \frac{6}{12} \right) \right] = \frac{24\sqrt{3}}{3} = 8\sqrt{3} \end{aligned}$$

۷۱- گزینه «۴» از تبدیل مختصات کروی استفاده می‌کنیم. در این صورت انتگرال موردنظر به صورت زیر در می‌آید.

$$\int_0^{\pi} \int_0^{\pi} \int_0^a \rho \rho^2 \sin \phi d\rho d\phi d\theta = \int_0^{\pi} d\theta \int_0^{\pi} \sin \phi d\phi \int_0^a \rho^3 d\rho = \pi \times 1 \times \frac{a^4}{4} = \frac{\pi a^4}{4}$$

۷۲- هیچکدام از گزینه‌ها صحیح نیست. خمیدگی $y = f(x)$ از فرمول $k = \frac{|y''|}{(1+y'^2)^{3/2}}$ به دست می‌آید، بنابراین:

$$k = \frac{e^x}{(1+e^{2x})^2} \Rightarrow k' = \frac{e^x(1+e^{2x})^2 - 2e^{2x}(1+e^{2x})}{(1+e^{2x})^4} = 0 \Rightarrow 2e^{2x} = 1 \Rightarrow e^{2x} = \frac{1}{2} \Rightarrow 2x = \ln \frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{1}{2} \ln \frac{1}{2}$$

۷۳- گزینه «۱» معادله داده شده را به شکل مقابل در می‌آوریم:

$$\frac{1}{2}(x-y)^2 + \frac{1}{2}(y-z)^2 + \frac{1}{2}(z-x)^2 = 2$$

حال با تغییر مختصات $w = z - x$ و $v = y - z$ ، $u = x - y$ معادله فوق به صورت زیر در می‌آید:

$$\frac{1}{2}u^2 + \frac{1}{2}v^2 + \frac{1}{2}w^2 = 2 \Rightarrow$$

۷۴- گزینه «۲» واضح است که ماکسیمم به ازای $x = 1$ و $y = 0$ به دست می‌آید و مقدار آن $f(1, 0) = 1$ است و همچنین می‌تیمیم به ازای $x = 0$ و $y = 1$ حاصل می‌شود و مقدار می‌نیمم برابر $f(0, 1) = -1$ است.

$$\nabla f = (2x^2 - 2y, -2x + 2y) \Big|_{(1, 2)} = (-2, 12) \quad \text{گزینه «۲»}$$

$$\Rightarrow D_u f = \nabla f \cdot \vec{u} = (-2, 12) \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{2}(12 - 2\sqrt{2})$$

۷۶- گزینه «۳» به ازای $s = 0$ و $t = 1$ مقدار $x = 0$ و $y = 0$ به دست می‌آید. $\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t} = e^x \sin y \cdot 2st + e^x \cos y \cdot s^2$ با توجه به مقادیر متغیرها مقدار $\frac{\partial z}{\partial t}$ برابر ۰ به دست می‌آید.۷۷- گزینه «۳» معادله سهمی‌گون را به صورت $f(x, y, z) = 2x^2 + y^2 - z = 0$ می‌نویسیم. در این صورت داریم:

$$\nabla f = (4x, 2y, -1) \Big|_{(1, 1, 2)} = (4, 2, -1)$$

$$\Rightarrow 4(x-1) + 2(y-1) - (z-2) = 0 \Rightarrow 4x + 2y - z - 2 = 0$$

۷۸- گزینه «۴» گزینه‌های (۱)، (۲) و (۳) هیچکدام در $(0, 0)$ حد ندارد بنابراین پیوسته نمی‌باشند ولی تابع $f(x, y) = \frac{\sin(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2}$ درنقطه $(0, 0)$ دارای حد یک است و بنابراین می‌توان آنرا به تابعی پیوسته تبدیل کرد.۷۹- گزینه «۲» اگر سطح S را به صورت $z = h(x, y)$ باشد. آنگاه:

$$dS = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial h}{\partial y}\right)^2}$$

$$dS = \sqrt{1 + (2x)^2 + (2y)^2} = \sqrt{1 + 4(x^2 + y^2)} \xrightarrow{\text{قطبی}} dS = \sqrt{1 + 4r^2}$$

و مساحت رویه برابر $\int dS$ است. بنابراین:

$$\Rightarrow \text{مساحت} = \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{2}} r \sqrt{1 + 4r^2} dr d\theta = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{2}} r \sqrt{1 + 4r^2} dr = \theta \left[\frac{1}{12}(1 + 4r^2)^{3/2} \right]_0^{\sqrt{2}} = 2\pi \left(\frac{27}{12} - \frac{1}{12} \right) = \frac{12\pi}{3}$$

۸۰- گزینه «۲» از قضیه گرین استفاده می‌کنیم:

$$F(x, y) = (x - y)\vec{i} + x\vec{j} \Rightarrow \text{div} \vec{F} = 1 + 0 = 1$$

$$\Rightarrow \int_C \vec{F} \cdot d\vec{s} = \iint_D \text{div} \vec{F} dA = \iint_D dA = (\text{مساحت دایره}) = \pi \times 1^2 = \pi$$

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{L} = \iint_S (\nabla \times \vec{F}) \cdot d\vec{s} \quad \text{گزینه «۳»}$$

$$\oint P dx + Q dy = \iint \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy$$

$$\oint_C (x - y) dx + x dy = \iint (1 - (-1)) dx dy = 2 \iint dx dy = 2s = 2\pi$$

نابلتون بناپارت)

(ضرب المثل انگلیسی)

نایاب‌ترین چیزها صمیمیت و یگانگی است.

تاخیر، بهتر از هرگز است.

تست‌های سراسری ۱۳۸۷

MBA

۱- اگر S مساحت متوازی‌الاضلاعی باشد که بر روی دو برابر $v_1(a_1, b_1)$ و $v_2(a_2, b_2)$ ساخته می‌شود، آن‌گاه دترمینان ماتریس

$$\begin{vmatrix} v_1 & v_2 \\ v_2 & v_1 \end{vmatrix} \cdot |v_1 \quad v_2|$$

کدام است؟

- (۱) S (۲) S^T (۳) \sqrt{S} (۴) $2S$

۲- نقطه متحرک در هر زمان t مسیر حرکت به معادله $x = e^t \cos t$ و $y = e^t \sin t$ را مشخص می‌کند. زاویه بین بردار شعاع حاصل و بردار شتاب کدام است؟

- (۱) π (۲) $\frac{\pi}{2}$ (۳) $\frac{\pi}{4}$ (۴) متغیر است.

۳- معادله صفحه قائم بر منحنی C فصل مشترک دو رویه $z = x^2 + y^2$ و $z = x^2 - y^2 = 1$ در نقطه $(1, -2, 5)$ کدام است؟

- (۱) $4z - y = 22$ (۲) $2x + y + 4z = 20$ (۳) $4x - y + 2z = 16$ (۴) $2x + y = 5$

۴- اگر $u = \text{Arctg} \frac{x^2 - xy}{x + y}$ باشد، حاصل $x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y}$ کدام است؟

- (۱) $-\frac{1}{3} \sin 2u$ (۲) $\frac{1}{3} \sin 2u$ (۳) $\frac{1}{2} \cos u$ (۴) $\frac{1}{2} \lg 2u$

۵- حجم واقع بین رویه $z = \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{25} = z$ و صفحه $z = 10$ ، کدام است؟

- (۱) 200π (۲) 400π (۳) 500π (۴) 1000π

۶- اگر $\vec{u} \neq \vec{v}$ و $\vec{w} \times \vec{u} = \vec{w} \times \vec{v}$ باشد، کدام نتیجه‌گیری نادرست است؟

- (۱) \vec{w} عمود بر $\vec{u} - \vec{v}$ (۲) \vec{w} موازی $\vec{u} - \vec{v}$ (۳) $\vec{w} \cdot (\vec{u} \times \vec{v}) = 0$ (۴) $\vec{w} \cdot (\vec{u} \times \vec{v}) = 0$

۷- اگر $u = x + y + z$ و $uv = y + z$ و $uvw = z$ باشد، آنگاه حاصل $\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)}$ کدام است؟

- (۱) $\frac{u}{v}$ (۲) $2uv$ (۳) uv^2 (۴) u^2v

۸- حوضی به شکل مکعب مستطیل با حجم ۲۵۶ واحد مکعب مورد نیاز است. ارتفاع حوض چند واحد طول انتخاب شود تا هزینه عایق‌بندی آن می‌نیم شود؟

- (۱) ۲ (۲) ۴ (۳) ۶ (۴) ۸

۹- رتبه ماتریس $\begin{bmatrix} 3 & 2 & 5 & 7 & 12 \\ 1 & 1 & 2 & 3 & 5 \\ 3 & 3 & 6 & 9 & 15 \end{bmatrix}$ کدام است؟

- (۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۳

۱۰- طول نقطه ماکسیمم تابع $z = x^2 + y^2 - 6x + 4y - 6z$ ، کدام است؟

- (۱) -۷ (۲) -۳ (۳) ۳ (۴) ۷

۱۱- اگر $\vec{r} = xi + yz + zk$ باشد آنگاه $\text{div}(\frac{\vec{r}}{r})$ کدام است؟

- (۱) $-\frac{1}{r^2}$ (۲) $-\frac{2}{r^2}$ (۳) صفر (۴) $\frac{2}{r}$

۱۲- مساحت قسمتی از کره $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ که داخل استوانه با معادله $x^2 + y^2 = 3y$ قرار می‌گیرد، کدام است؟

- (۱) $9(\pi - 1)$ (۲) $9(\pi - 2)$ (۳) $12(\pi - 1)$ (۴) $18(\pi - 2)$

۱۳- اگر R ناحیه محدود به بیضی $x = \cos t$ ، $y = 2 \sin t$ و dA عنصر مساحت باشد، حاصل $\iint_R (x^2 + y^2) dA$ ، کدام است؟

- (۱) $\frac{15\pi}{2}$ (۲) $\frac{8\pi}{3}$ (۳) $\frac{7\pi}{2}$ (۴) 5π

۱۴- کار انجام شده توسط نیروی $\vec{F} = (x+2)\vec{i} + (x-z)\vec{j} + (y-z)\vec{k}$ بر مسیری از نقطه $A(2, 0, 0)$ به $B(0, 2, 0)$ سپس به نقطه $C(0, 0, 6)$ و در ادامه به A با استفاده از قضیه استوکس، کدام است؟

- (۱) ۹ (۲) ۱۵ (۳) ۱۲ (۴) ۳۱

۱۵- جرم هر نقطه در داخل نیمکره به شعاع a برابر $(a - \rho)$ است که در آن ρ فاصله آن نقطه تا مرکز کره است. وزن این نیمکره چقدر است؟

- (۱) $\frac{\pi}{6} a^3$ (۲) $\frac{\pi}{12} a^3$ (۳) $\frac{\pi}{6} a^4$ (۴) $\frac{\pi}{12} a^4$

ریاضی

۱۶- حجم جسم محدود به رویه $z = 9 - x^2 - y^2$ در \mathbb{R}^3 و $z = 0$ عبارت است از:

- (۱) $\frac{27\pi}{2}$ (۲) 18π (۳) $\frac{81\pi}{2}$ (۴) 81π

۱۷- برای تابع برداری با ضابطه $F(t) = (\cos t, \sin t, t)$ مقدار $\frac{(F' \times F'') \cdot F''}{|F' \times F''|^2}$ کدام است؟

- (۱) صفر (۲) $\frac{1}{2}$ (۳) $\frac{2}{5}$ (۴) ۱

۱۸- با تغییر دستگاه از دکارتی به قطبی اگر $z = x^2 - y^2$ ، آنگاه $\frac{\partial z}{\partial r}$ کدام است؟

- (۱) $-2r^2 \sin \theta$ (۲) $-2r \sin \theta$ (۳) $r \sin 2\theta$ (۴) $2r \cos 2\theta$

۱۹- اگر بدانیم که مقدار انتگرال $\int_C (x + 2y + az)dx + (bx - 2y - z)dy + (4x + cy + 2z)dz$ مستقل از مسیر است، مقدار $a + b + c$ کدام است؟

- (۱) -۵ (۲) ۴ (۳) ۵ (۴) ۶

۲۰- به ازای کدام مقدار m ، میدان برداری $\vec{F}(x, y, z) = (3x^2 + y^2)\vec{i} + mxy\vec{j} - 3z^2\vec{k}$ یک میدان پایستار است؟

- (۱) -۲ (۲) -۱ (۳) ۱ (۴) ۲

۲۱- اگر \vec{T} برداریکه مماس بر دایره‌ای به شعاع $\frac{1}{3}$ باشد، $\oint_C \vec{T} \cdot d\vec{R}$ کدام است؟

- (۱) $\frac{\pi}{4}$ (۲) ۰ (۳) π (۴) 2π

۲۲- مختصات نزدیک‌ترین نقاط روی هدلولی $x^2 - y^2 = 4$ از نقطه $(2, 0)$ عبارتند از:

- (۱) $(0, \pm 1)$ (۲) $(\pm 2, 0)$ (۳) $(1, \pm \sqrt{5})$ (۴) $(1, \pm \sqrt{8})$

۲۳- معادله صفحه مماس بر رویه $z = e^{2x+2y}$ در نقطه $(-6, 3, 1)$ کدام یک از موارد زیر است؟

- (۱) $2x + 6y - z = -5$ (۲) $2x + 6y - z = 5$ (۳) $x + y - z = -2$ (۴) $x + y - z = -4$

۲۴- مقدار انتگرال $\iint_R (x^2 y^2 + xy^2) dx dy$ که در آن R مستطیل $1 \leq x \leq 1$ و $0 \leq y \leq 1$ می‌باشد کدام است؟

- (۱) ۰ (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۳

۲۵- با فرض $F(x, y) = \int_0^{xy} \sin \sqrt{t} dt$ ، $\frac{\partial F}{\partial x}(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ کدام است؟

- (۱) $\frac{\pi}{3}$ (۲) $\frac{\pi}{4}$ (۳) $\frac{\pi}{2}$ (۴) π

۲۶- اندازه انحناء ماریچ $z = \frac{1}{3}t^2$ و $y = \frac{1}{4}t^2$ و $x = t$ در نقطه $A(1, \frac{1}{4}, \frac{1}{3})$ کدام است؟

- (۱) $\frac{\sqrt{2}}{9}$ (۲) $\frac{\sqrt{2}}{3}$ (۳) $\frac{1}{3}$ (۴) $\sqrt{2}$

۲۷- کدام گزینه معادله صفحه گذرا بر نقطه $A(4, 0, -2)$ و عمود بر دو صفحه $x - y + z = 0$ و $2x + y - 4z = 5$ است؟
 (۱) $x + 2y + z = 2$ (۲) $2x - y - z = 1$ (۳) $x - 2y + z = 2$ (۴) $2x - y - z = 2$

۲۸- حاصل $\int_1^4 \int_{\sqrt{y}}^2 \frac{e^{x^2} - 2x}{x+1} dx dy$ کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{2}(e^2 + \frac{1}{e})$ (۲) $\frac{1}{2}(e^2 - \frac{1}{e})$ (۳) $\frac{1}{2}(e - \frac{1}{e^2})$ (۴) $\frac{1}{2}(e + \frac{1}{e^2})$

مکانیک

۲۹- معادله خط مماس بر منحنی فصل مشترک دو رویه زیر در نقطه $(1, 1, 1)$ کدام است؟

$xyz = 1, x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 6$

- (۱) $\begin{cases} y = z \\ 2y + x = 2 \end{cases}$ (۲) $\begin{cases} x = z \\ y + 2x = 2 \end{cases}$ (۳) $\begin{cases} x = z \\ 2y + x = 2 \end{cases}$ (۴) $\begin{cases} y = z \\ y + 2x = 2 \end{cases}$

۳۰- حجم محصور به دو رویه زیر کدام است؟

$z = x^2 + y^2, 2z = x^2 + y^2 + 1$

- (۱) $\frac{2}{4}$ (۲) 1 (۳) $\frac{2\pi}{4}$ (۴) $\frac{\pi}{4}$

۳۱- فرض کنید S رویه بسته متشکل از کره $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ در یک هشتم اول فضا و صفحات مختصات باشد. اگر \vec{n} بردار یکه قائم بر رویه رو به خارج و $\vec{F} = x^2\vec{i} - 2xy\vec{j} + 3z\vec{k}$ باشد. مقدار انتگرال زیر کدام است؟

$\int_S \vec{F} \cdot \vec{n} d\sigma$

- (۱) 2π (۲) 6π (۳) 4π (۴) 8π

۳۲- فرض کنید $\vec{F}(x, y, z) = (e^x \cos y + ayz)\vec{i} + (axz + be^x \sin y)\vec{j} + (cxy + az)\vec{k}$. بازا چه مقادیری از a, b, c مقدار انتگرال زیر مستقل از مسیر است؟ $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{R}$

- (۱) $a = b = c = -1$ (۲) $a = b = c = 1$ (۳) $a = b = -1, c = 1$ (۴) $a = c = -1, b = 1$

۳۳- مشتق جهتی (سونی) تابع f در نقطه $(1, 0, 1)$ در جهت بردار $U = 2\vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k}$ کدام است؟

$f(x, y, z) = x \tan^{-1} \frac{y}{z}$

- (۱) 1 (۲) $\frac{2}{3}$ (۳) $\frac{2}{3}$ (۴) $\frac{1}{3}$

معدن

۳۴- تابع $f(x, y) = \frac{x^2 + y^2 - x^2 y^2}{x^2 + y^2}$ در $(x, y) \neq (0, 0)$ در $(0, 0)$ چگونه تعریف شود تا در صفحه پیوسته باشد؟

- (۱) $f(0, 0) = 1$ (۲) $f(0, 0) = 0$ (۳) $f(0, 0) = -1$ (۴) $f(0, 0)$ به منظور فوق قابل تعریف نیست.

۳۵- مقدار می‌نیمم مطلق تابع زیر چند است؟ $z = x^2 - 2xy + 2y^2 - 2x + 2y + 1$

- (۱) -2 (۲) -1 (۳) 0 (۴) 1

۳۶- مقدار انتگرال زیر کدام است؟

$\int_0^2 \int_0^{\sqrt{2-x^2}} \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} dy dx$

- (۱) $\frac{2}{3}$ (۲) $\frac{4}{3}$ (۳) $\frac{2}{6}$ (۴) 1

۳۷- اگر C دایره $(x-2)^2 + (y-3)^2 = 4$ در جهت مثلثاتی باشد. مقدار انتگرال زیر را حساب کنید.

$\int_C (6y + x^2) dx + (y^2 + 2x) dy$

- (۱) -16π (۲) -48 (۳) 16π (۴) 48

۳۸- انحناء (یا خمیدگی) خم $\vec{r}(t) = (t + \cos t)\vec{i} + (t - \cos t)\vec{j} + \sqrt{2} \sin t \vec{k}$ کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (۲) $\frac{1}{2}$ (۳) $\frac{1}{2\sqrt{2}}$ (۴) $\frac{1}{4\sqrt{2}}$

آمار

۳۹- اگر طول بردار \vec{v} یک باشد. بردار $[\vec{v} \times (\vec{v} \times \vec{u})]$ کدام است؟

- (۱) $-\vec{v} \times \vec{u}$ (۲) $(\vec{v} \cdot \vec{u})\vec{v}$ (۳) $(\vec{v} \cdot \vec{u})\vec{u}$ (۴) $(\vec{v} \cdot \vec{u})(\vec{v} \times \vec{u})$

۴۰- ماکسیمم و می‌نیمم مطلق تابع $f(x, y) = 4x^2 + 2xy - 3y^2$ بر روی مربع $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1$ به ترتیب کدامند؟

- (۱) $0, 0$ (۲) $0, 4$ (۳) $-2, \frac{12}{3}$ (۴) $-2, 2$

۴۱- برای تابع $f(x, y, z) = e^{xyz} + \ln(1 + x^2 + y^2 + z^2)$ امتداد حداکثر افزایش در نقطه $(1, 1, 0)$ کدام است؟

- (۱) $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ (۲) $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ (۳) $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ (۴) $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$

۴۲- مقدار انتگرال دوگانه $\int_{\sqrt{x}}^2 \int_{\sqrt{x}}^2 \sin(\pi y^2) dy dx$ کدام است؟

- (۱) صفر (۲) یک (۳) $\frac{\pi}{2}$ (۴) π

۴۳- مقدار $\int_0^\infty \int_0^\infty e^{-\frac{1}{2}(x^2 + y^2)} dx dy$ کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{2}$ (۲) $\frac{\pi}{2}$ (۳) π (۴) 2π

۴۴- حجم جسمی که در ناحیه اول از هشت ناحیه فضا قرار گرفته و به رویه‌های $x^2 + y^2 = 4$ و $z^2 = x^2 + y^2$ محدود است. کدام است؟

- (۱) $\frac{\pi}{2}$ (۲) $\frac{2\pi}{3}$ (۳) $\frac{2\pi}{2}$ (۴) $\frac{4\pi}{3}$

۴۵- شار برونسوی میدان برداری $\vec{F} = z\vec{i} + 2y\vec{j} + x\vec{k}$ از کره $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ کدام است؟

- (۱) π (۲) 2π (۳) 2π (۴) 4π

مدیریت سیستم و بهره‌وری و مهندسی سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی

۴۶- ماکسیمم و می‌نیمم مطلق تابع $f(x, y) = x^2 - y^2$ در ناحیه $x^2 + y^2 \leq 4$ کدام است؟

- (۱) -4 و 0 (۲) 2 و -2 (۳) 4 و 0 (۴) -4 و 4

۴۷- کدام معادله معرف یک رویه دوار است؟

- (۱) $z = 2y^2 + y$ (۲) $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{5} = 1$ (۳) $z^2 + x^2 - 2y^2 = y$ (۴) $z = 2(x^2 + y^2)^2 + \sqrt{x^2 + y^2}$

۴۸- تاب خم $z = 4t^2 - 4$ و $y = 1 - 2t^2$ و $x = 1 + t^2$ در لحظه $t = 1$ کدام است؟

- (۱) 0 (۲) 1 (۳) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (۴) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

۴۹- مقدار انتگرال خط $\int_{\gamma} yz dx + xdy$ که در آن γ مسیر نیم‌دایره‌ای $x = \cos t, y = \sin t, 0 \leq t \leq \pi$ است، کدام است؟

- (۱) π (۲) $-\pi$ (۳) $\frac{\pi}{2}$ (۴) $-\frac{\pi}{2}$

۵۰- $\iint_D \frac{x}{y^2} dA$ که در آن D ناحیه محدود به هذلولی‌های $xy = 2, xy = 4$ و سهمی‌های $y^2 = 2x$ و $y^2 = x$ است، کدام است؟

- (۱) $\frac{2}{3}$ (۲) $\frac{4}{9}$ (۳) $\frac{8}{27}$ (۴) $\frac{1}{3}$

۵۱- کدام قضیه رابط انتگرال رویه و انتگرال خط است؟
(۱) قضیه گرین (۲) قضیه استوکس (۳) قضیه دیورژانس (۴) قضیه مقدار میانگین

۵۲- کدام میدان یک میدان گرادیان است؟

- (۱) $F(x, y) = (xy, y)$ (۲) $F(x, y) = (4x + y, x + 2y)$
(۳) $F(x, y) = (xy, 2x - y)$ (۴) $F(x, y) = (xy + 2, 2x + y)$

معماری گشتی

۵۳- نقاط A, B, C, D در یک صفحه واقعند اگر:

- (۱) $\overline{AD} \cdot (\overline{AB} + \overline{BC}) = 0$ (۲) $\overline{AD} \times \overline{AB} \times \overline{BC} = 0$ (۳) $\overline{AD} \cdot (\overline{AB} \times \overline{BC}) = 0$ (۴) $\overline{AD} + \overline{AB} + \overline{BC} = 0$

۵۴- حجم بین استوانه $z = 4 - x^2$ و صفحات $x = 0, y = 0, y = 6$ و $z = 0$ برابر است با:

- (۱) ۱۸ (۲) ۲۴ (۳) ۳۲ (۴) ۴۰

۵۵- عبارت $\frac{d}{du} \{A \cdot (B \times C)\}$ برابر است با:

- (۱) $\frac{dA}{du} \cdot (B \times C)$ (۲) $A \cdot \left\{ \frac{dB}{du} \times C + B \times \frac{dC}{du} \right\}$
(۳) $A \cdot \frac{d}{du} (B \times C)$ (۴) $\frac{dA}{du} \cdot (B \times C) + A \cdot \left(\frac{dB}{du} \times C \right) + A \cdot \left(B \times \frac{dC}{du} \right)$

۵۶- سطح محصور به منحنی $r^2 = 2a^2 \cos 2\theta$ برابر است با:

- (۱) a^2 (۲) πa^2 (۳) $2a^2$ (۴) $\frac{\pi}{2} a^2$

۵۷- وضعیت خط $\frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-2}{4}$ با صفحه $x - 2y + z = 6$ چگونه است؟

- (۱) بر هم عمودند. (۲) موازی همد

- (۳) با زاویه 30° همدیگر را قطع می‌کنند. (۴) با زاویه 45° همدیگر را قطع می‌کنند.

۵۸- رویه $\rho = a \cos \phi$:

- (۱) یک دلتمای دوار است. (۲) یک بیضیگون است. (۳) یک سهمیگون است. (۴) یک کره است.

مهندسی نفت

۵۹- به ازای چه مقداری از k دستگاه زیر جواب غیربدهی (غیر صفر) دارد.

$$\begin{cases} 2x + ky + z = 0 \\ (k-1)x - y + 2z = 0 \\ 4x + y + 4z = 0 \end{cases}$$

- (۱) -1 و $\frac{4}{9}$ (۲) 1 و $\frac{9}{4}$ (۳) $\frac{4}{9}$ و $\frac{9}{4}$ (۴) $\frac{9}{4}$ و $-\frac{9}{4}$

۶۰- اگر $u = x + y$ و $v = x - y$ باشد، مقدار $\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}$ برابر است با:

- (۱) ۲ (۲) -2 (۳) $\frac{1}{2}$ (۴) $-\frac{1}{2}$

۶۱- مقدار می‌نیم تابع $f(x, y) = x^2 - 4x + y^2 - y - xy$ برابر است با:

- (۱) -7 (۲) ۲ (۳) ۷ (۴) -2

مهندسی کشاورزی

۶۲- مسیر متحرکی در مختصات قطبی به صورت $r = \frac{2}{\sin \theta + \cos \theta}$ است. این مسیر امتدادهای $\theta = -\frac{\pi}{4}$ را در A و B قطع می‌کند اگر

نقطه O نمایش $r = 0$ باشد، مساحت مثلث OAB کدام است؟

- (۱) $\sqrt{2}$ (۲) ۲ (۳) $2\sqrt{2}$ (۴) ۴

۶۳- اگر $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ و I ماتریس واحد باشد، ماتریس $\Delta A - A^T$ کدام است؟

- (۱) $I - A$ (۲) $I + A$ (۳) $9I$ (۴) $10I$

۶۴- اگر $w = r^2 \cos 2\theta$ و $x = r \cos \theta$ و $y = r \sin \theta$ آن‌گاه $\frac{\partial w}{\partial y}$ کدام است؟

- (۱) $-2y$ (۲) $-\frac{2}{y}$ (۳) $\frac{2}{y}$ (۴) $2y$

۶۵- حجم بریده شده از کره $\rho = a$ توسط مخروط دوار $\phi = \frac{\pi}{3}$ برابر کدام است؟

- (۱) $\frac{\pi a^3}{6}$ (۲) $\frac{\pi a^3}{2}$ (۳) $\frac{\pi a^3}{3}$ (۴) $\frac{\pi a^3 \sqrt{3}}{2}$

۶۶- فاصله مرکز ثقل نیم‌کره همگن به شعاع a واحد از صفحه قاعده این نیم‌کره چقدر است؟

- (۱) $\frac{2}{4}$ (۲) $\frac{4}{3}$ (۳) $\frac{2}{3}$ (۴) ۲

باسخنامه تست‌های سراسری ۱۳۸۷

۱- گزینه «۲» می‌دانیم دترمینان حاصلضرب دو ماتریس برابر حاصلضرب دترمینان آنها می‌باشد.

۲- گزینه «۲»

۳- گزینه «۱» قرار می‌دهیم $F(x, y, z) = x^2 + y^2 - z = 0$ و $G(x, y, z) = x^2 z - y^2 - 1 = 0$ در این صورت:

$$\nabla F \times \nabla G = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & -4 & -1 \\ 2x & 2y & z \end{vmatrix} = (0, 17, 68)$$

$\Rightarrow 4z - y = 22$ معادله صفحه قائم

۴- گزینه «۲» به طور کلی اگر $F(u) = f(x, y)$ و f تابعی همگن از درجه n باشد، آنگاه:

۵- گزینه «۴» $V = \int_D \int (1 - \frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{25}) dx dy$ تغییر مختصات بیضوی $\int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{10}} (1 - r^2) \times r dr d\theta$

$= 2\pi \int_0^{\sqrt{10}} (1 - r^2) dr = 2\pi \times 2\pi \times 25 = 1000\pi$

۶- گزینه «۱» $\vec{\omega} \times \vec{u} = \vec{\omega} \times \vec{v} \Rightarrow \vec{\omega} \times (\vec{u} - \vec{v}) = 0 \Rightarrow u - v$ موازی $\vec{\omega}$

۷- گزینه «۴»

$$\begin{cases} z = uv\omega \\ y = uv - uv\omega \\ x = u - uv \end{cases} \Rightarrow \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, \omega)} = \begin{vmatrix} 1-v & -u & 0 \\ v-v\omega & u-uv\omega & -uv \\ v\omega & u\omega & uv \end{vmatrix} = u^2 v$$

۸- گزینه «۲» اگر طول، عرض و ارتفاع حوض را به ترتیب x, y, z انتخاب کنیم. در این صورت می‌خواهیم عبارت $F = xy + xz + yz$ را تحت قید $xyz = 256$ می‌نیم کنیم، که در این صورت با استفاده از روش ضرایب لاگرانژ $x = 8, y = 8$ و $z = 4$ بدست می‌آید.

۹- گزینه «۳» به سادگی مشاهده می‌شود که تنها ۲ ستون اول ماتریس مستقل هستند، و ستون‌های بعدی هر کدام جمع دو ستون قبل می‌باشند.

۱۰- گزینه «۱» $\begin{cases} Z_x = 2x^2 + 12y - 6z = 0 \\ Z_y = 2y^2 + 12x - 6z = 0 \end{cases} \Rightarrow x = y = -7$

۱۱- گزینه «۴» $\vec{r} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \vec{i} + \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \vec{j} + \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \vec{k} \Rightarrow \text{div}(\frac{\vec{r}}{r}) = \frac{2}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$

۱۲- گزینه «۴»

۱۳- گزینه «۱» $\int_R \int (x^2 + y^2) dA$ تغییر مختصات بیضوی $\int_0^{2\pi} \int_0^1 (r^2 \cos^2 \theta + r^2 \sin^2 \theta) \times r dr d\theta$

$= \int_0^{2\pi} (1 + 8 \sin^2 \theta) d\theta \int_0^1 r^3 dr = 10\pi \times \frac{1}{4} = \frac{15\pi}{2}$

۱۴- گزینه «۴»

$$\int_C F \cdot dr = \iint \text{curl} F \cdot n dS = 21$$

۱۵- گزینه «۳» $\text{جرم} = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \int_0^a (a - \rho) \rho^2 \sin \phi d\rho d\phi d\theta = (2\pi)(1)(a \frac{\rho^3}{3} - \frac{\rho^4}{4}) \Big|_0^a = \frac{\pi a^4}{6}$

۱۶- گزینه «۳» حجم مورد نظر را در مختصات استوانه‌ای محاسبه می‌کنیم:

$$V = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \int_0^{1-r^2} r dz dr d\theta = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi/2} (1 - r^2) dr = \theta \left[r - \frac{r^3}{3} \right]_0^{\pi/2} = \frac{81\pi}{2}$$

۱۷- گزینه «۲» مقدار مورد نظر همان تاب منحنی F می‌باشد.

$$F'(t) = (-\sin, \cos t, 1), F''(t) = (-\cos t, -\sin t, 0), F'''(t) = (\sin t, -\cos t, 0) \Rightarrow \frac{(F' \times F'') \cdot F'''}{|F' \times F''|^2} = \frac{1}{2}$$

۱۸- گزینه «۴» $Z = x^2 - y^2 = r^2 \cos 2\theta \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial r} = 2r \cos 2\theta$

۱۹- گزینه «۳» $\begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x+2y+az & bx-2y-z & fx+cy+2z \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow c+1=0, a-4=0, b-2=0 \Rightarrow a+b+c=5$

۲۰- گزینه «۴» لازم است $\text{curl} F = 0$ باشد که در آن $m = 2$ به دست می‌آید.

۲۱- گزینه «۳» انتگرال مورد نظر برای محیط خم مورد نظر می‌باشد، بنابراین کافی است محیط دایره‌ای به شعاع $\frac{1}{2}$ را محاسبه کنیم، محیط برابر π به دست می‌آید.

۲۲- گزینه «۳» $d = \sqrt{(x-2)^2 + y^2} = \sqrt{2x^2 - 4x + 8} \Rightarrow d' = \frac{4x-4}{2\sqrt{2x^2-4x+8}} = 0 \Rightarrow x=1, y = \pm\sqrt{5}$

۲۳- گزینه «۲» قرار می‌دهیم $F(x, y, z) = e^{2+2x+y^2}$ در این صورت:

$$\nabla F \Rightarrow (2e^{2+2x+y^2}, 2ye^{2+2x+y^2}, -1) \Big|_{(-6, 2, 1)} = (2, 6, -1) \Rightarrow$$

معادله صفحه مورد نظر: $2(x+6) + 6(y-2) + (-1)(z-1) = 0 \Rightarrow 2x + 6y - z = 5$

۲۴- گزینه «۱» چون تابع مقابل انتگرال نسبت به متغیر x فرد و ناحیه انتگرال گیری نسبت به محور y ها متقارن است پس انتگرال مورد نظر برابر صفر است.

۲۵- گزینه «۳» $\frac{\partial F}{\partial x} = y \sin \sqrt{xy} \xrightarrow{x=y=\frac{\pi}{2}} \frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\pi}{2}$

۲۶- گزینه «۲»

۲۷- گزینه «۱»

۲۸- گزینه «۲» کافی است ترتیب انتگرال گیری عوض شود.

۲۹- گزینه «۳» قرار می‌دهیم $f_1(x,y,z) = xyz - 1 = 0$ و $f_2(x,y,z) = x^2 + 2y^2 + 3z^2 - 6 = 0$ در این صورت:

$$\nabla f_1 = (yz, xy, xz) \Rightarrow \nabla f_1 = (1, 1, 1) = (2, 4, 6)$$

$$\nabla f_2 = (2x, 4y, 6z) \Rightarrow \nabla f_2 = (1, 1, 1) = (1, 1, 1)$$

$$\nabla f_1 \times \nabla f_2 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 6 \end{vmatrix} = -2i + 4j - 2k \Rightarrow \text{معادله خط مورد نظر } \frac{x-1}{-2} = \frac{y-1}{4} = \frac{z-1}{-2} \Rightarrow \begin{cases} z = x \\ 2x + y = 3 \end{cases}$$

۳۰- گزینه «۴»

برای محاسبه حجم مورد نظر از مختصات استوانه‌ای استفاده می‌کنیم.

$$\Rightarrow V = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_{\frac{r}{2}}^{\frac{r}{\sqrt{2}}} r dz dr d\theta = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \frac{r-r^2}{\sqrt{2}} dr d\theta = \int_0^{2\pi} d\theta \times \left(\frac{r^2}{2\sqrt{2}} - \frac{r^3}{3\sqrt{2}} \right) \Big|_0^1 = 2\pi \times \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$$

۳۱- گزینه «۳» با توجه به قضیه دیورژانس داریم:

$$\iiint_S \text{div } F dV = \iiint_V \text{div } F dV = \iiint_V 2 dV = 2 \times \text{حجم کره به شعاع } \frac{1}{2} = 2 \times \frac{4}{3} \pi \times \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{2\pi}{3}$$

با توجه به اینکه انتگرال مورد نظر فقط در یک هشتم اول فضا مورد نظر است پس جواب انتگرال مورد نظر $\frac{1}{8}$ مقدار بدست آمده یعنی $\frac{2\pi}{3}$ است.

۳۲- گزینه «۱» برای اینکه انتگرال مورد نظر مستقل از مسیر باشد، لازم است $\text{curl } \vec{F} = 0$ باشد.

$$\text{curl } \vec{F} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ e^x \cos y + ayz & axz + be^x \sin y & cxy + az \end{vmatrix} = (cx - ax)\vec{i} + (ay - cy)\vec{j} + (b + 1)e^x \sin y \vec{k}$$

بنابراین لازم است $a = c$ و $b = -1$ باشد. که تنها گزینه (۱) می‌تواند صحیح باشد.

۳۳- گزینه «۴» نیازی به محاسبه $\frac{\partial f}{\partial z}$ نیست، زیرا در نقطه داده شده مقادیر آنها برابر صفر است و در محاسبه مقدار مشتق سوئی تاثیری ندارند.

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x \times \frac{1}{1 + \left(\frac{y}{z}\right)^2} \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial y} \Big|_{(1,0,1)} = 1$$

$$\vec{U} = 2\vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k} \Rightarrow \vec{u} = \left(\frac{2}{\sqrt{9}}, \frac{1}{\sqrt{9}}, \frac{-2}{\sqrt{9}}\right) \Rightarrow D_{\vec{u}} f = \vec{\nabla} f \cdot \vec{u} = \frac{1}{3}$$

$$f(c,0) = \lim_{(x,y) \rightarrow (c,0)} f(x,y) = \lim_{(x,y) \rightarrow (c,0)} \left(1 - \frac{x^2 y^2}{x^2 + y^2}\right) = 1 - c = 1$$

۳۴- گزینه «۱»

۳۵- گزینه «۴»

$$\begin{cases} Z_x = 2x - 2y - 2 = 0 \\ Z_y = -2x + 4y + 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - y = 1 \\ 2y - x = -1 \end{cases} \Rightarrow x = 1, y = 0$$

به ازای $x = 1$ و $y = 0$ مقدار $Z = 0$ بدست می‌آید.

۳۶- گزینه «۲» برای محاسبه انتگرال مورد نظر از مختصات قطبی استفاده می‌کنیم.

$$I = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \frac{r^2 \sin \theta \cos \theta}{r} \times r dr d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} \sin \theta d\theta \int_0^1 r^2 dr = \frac{-1}{4} \cos \theta \Big|_0^{2\pi} \times \frac{r^3}{3} \Big|_0^1 = \frac{4}{3}$$

۳۷- گزینه «۱» برای محاسبه انتگرال مورد نظر از قضیه گرین استفاده می‌کنیم.

$$\int_C (6y + x^2) dx + (y^2 + 2x) dy = \iint_D (2 - 6) dx dy = -4 \times (\text{مساحت دایره به شعاع } 2) = -16\pi$$

۳۸- گزینه «۳»

$$v(t) = (1 - \sin t)\vec{i} + (1 + \sin t)\vec{j} + \sqrt{t} \cos t \vec{k}$$

$$a(t) = -\cos t \vec{i} + \cos t \vec{j} - \sqrt{t} \sin t \vec{k}$$

$$v \times a = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 - \sin t & 1 + \sin t & \sqrt{t} \cos t \\ -\cos t & \cos t & -\sqrt{t} \sin t \end{vmatrix} = (-\sqrt{t} \sin t - \sqrt{t})\vec{i} + (-\sqrt{t} + \sqrt{t} \sin t)\vec{j} + t \cos t \vec{k}$$

$$|v \times a| = \sqrt{t(\sin t + 1)^2 + t(\sin t - 1)^2 + t \cos^2 t} = \sqrt{4t}$$

$$|v| = \sqrt{(1 - \sin t)^2 + (1 + \sin t)^2 + t \cos^2 t} = 2 \Rightarrow k = \frac{|v \times a|}{|v|^2} = \frac{\sqrt{4t}}{4} = \frac{1}{\sqrt{t}}$$

۳۹- گزینه «۱» از رابطه $A \times (B \times C) = (A \cdot C)B - (A \cdot B)C$ استفاده می‌کنیم.

$$v \times [(v \times u)] = v \times [(v \cdot u)v - (v \cdot v)u] = \underbrace{v \times (v \cdot u)v}_{\text{صفر}} - v \times u = -v \times u$$

۴۰- گزینه «۴»

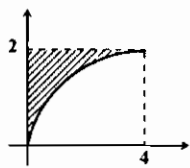
$$\begin{cases} f_x = 8x + 2y = 0 \\ f_y = 2x - 6y = 0 \end{cases} \Rightarrow x = y = 0$$

نقاط مرزی مربع نقاط $D(1,1)$ و $C(0,1)$, $B(1,0)$, $A(0,0)$ می‌باشد که با جایگزینی این نقاط در f مقدار ماکزیمم برابر ۳ و مقدار می‌نیمم برابر -۳ حاصل می‌شود.

۴۱- گزینه «۴»

$$\nabla f = \left(yze^{xyz} + \frac{2x}{1+x^2+y^2+z^2}, xze^{xyz} + \frac{2y}{1+x^2+y^2+z^2}, xye^{xyz} + \frac{2z}{1+x^2+y^2+z^2} \right) \Rightarrow \nabla f \Big|_{(1,1,1)} = \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3} \right)$$

۴۲- گزینه «۱»



$$\int_0^2 \int_0^{\sqrt{4-y^2}} \sin(\pi y^2) dy dx = \int_0^2 \int_0^{\sqrt{4-y^2}} \sin(\pi y^2) dx dy = \int_0^2 y^2 \sin(\pi y^2) dy = \left[\frac{-1}{3\pi} \cos(\pi y^2) \right]_0^2 = 0$$

۴۳- گزینه ۲»

$$\int_0^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)} dx dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\infty} e^{-\frac{1}{2}r^2} \times r dr d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{\infty} re^{-\frac{1}{2}r^2} dr = \theta \left[-e^{-\frac{1}{2}r^2} \right]_0^{\infty} = \frac{\pi}{2}$$

۴۴- گزینه ۴» از مختصات استوانه‌ای استفاده می‌کنیم.

$$V = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} r dz dr d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} r^2 dr d\theta = \frac{4\pi}{3}$$

۴۵- گزینه ۴» از قضیه دیورژانس استفاده می‌کنیم.

$$\iint F \cdot n dS = \iiint \text{div} F dV = \iiint r dV = r \times (\text{حجم کره به شعاع } 1) = 4\pi$$

۴۶- گزینه ۴» واضح است که ماکسیمم مطلق تابع به ازای $x=2$ و $y=0$ و می‌نیمم مطلق تابع به ازای $x=0$ و $y=2$ حاصل می‌شود.

۴۷- گزینه ۴»

۴۸- گزینه ۱»

$$V = (2, 1, -9, 1, 2, 1) \Rightarrow V(1) = (2, 0, -9, 1, 2)$$

$$a = (2, 0, -18, 2, 4) \Rightarrow a(1) = (2, 0, -18, 2, 4), a' = (0, -18, 2, 4)$$

۴۹- گزینه ۲»

$$\int r y dx + x dy = \int_0^{\pi} (-r \sin^2 t + \cos^2 t) dt = \int_0^{\pi} (-r \times \frac{1 - \cos 2t}{2} + \frac{1 + \cos 2t}{2}) dt = -\pi$$

۵۰- گزینه ۳» با تغییر متغیر $u = xy$ و $v = \frac{y}{x}$ و $J = \frac{x}{3y^2}$ نتیجه می‌شود:

$$\int_1^2 \int_{\frac{1}{x}}^{\frac{1}{2x}} \frac{1}{3y^2} du dv = \frac{1}{27}$$

۵۱- گزینه ۲»

۵۲- گزینه ۲»

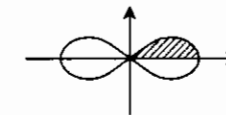
۵۳- گزینه ۳»

۵۴- گزینه ۲»

$$V = \int_0^1 \int_0^1 \int_0^{1-x^2} dz dx dy = \int_0^1 dy \int_0^1 (1-x^2) dx = y \left[x - \frac{x^3}{3} \right]_0^1 = 2/3$$

۵۵- گزینه ۴»

۵۶- گزینه ۳»



معادله داده شده لمینسکات می‌باشد. با توجه به تقارن نمودار کافی است مساحت هاشور خورده را محاسبه کنیم و حاصل را در ۴ ضرب کنیم.

$$S = 4 \times \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} r^2 d\theta = 2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} r a^2 \cos^2 \theta d\theta = 2 a^2 \sin^2 \theta \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = a^2$$

۵۷- گزینه ۲» بردار هادی خط داده شده $\vec{V}(2, 3, 4)$ و بردار نرمال صفحه $\vec{N}(1, -2, 1)$ می‌باشد و با توجه به اینکه $\vec{N} \cdot \vec{V} = 0$ است پس بردار \vec{V} عمود بر نرمال صفحه است پس با خود صفحه موازی است.

۵۸- گزینه ۴»

$$\rho = a \cos \phi \Rightarrow \rho^2 = a \rho \cos \theta \Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 = az \Rightarrow x^2 + y^2 + (z - \frac{a}{2})^2 = \frac{a^2}{4}$$

۵۹- گزینه ۲» دستگاه وقتی جواب غیر صفر دارد که دترمینان ضرایب صفر شود.

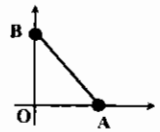
$$\begin{vmatrix} 2 & k & 1 \\ k-1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 2(-4-2) - k((2k-4)-8) + (k-1+4) = 0 \Rightarrow -2k^2 + 12k - 9 = 0 \Rightarrow 1, \frac{9}{2}$$

۶۰- گزینه ۴»

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 \Rightarrow \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \frac{-1}{2}$$

۶۱- گزینه ۱»

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 2x - y - 4 = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 2y - x - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow x = 2, y = 2 \Rightarrow f(2,2) = -7$$



۶۲- گزینه ۲» به ازای $\theta = 0$ مقدار $r = 2$ و به ازای $\theta = \frac{\pi}{2}$ مقدار $r = 2$ حاصل می‌شود.

$$S_{OAB} = \frac{OA \times OB}{2} = 2$$

۶۳- گزینه ۴»

$$\Delta A - A^T = \Delta \times \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 10 \end{bmatrix} = 10I$$

۶۴- گزینه ۱»

$$w = r^2 \cos^2 \theta = r^2 \cos^2 \theta - r^2 \sin^2 \theta = x^2 - y^2 \Rightarrow \frac{\partial w}{\partial y} = -2y$$

۶۵- گزینه ۳»

$$V = \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^a \rho^2 \sin \phi d\rho d\phi d\theta = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \phi d\phi \int_0^a \rho^2 d\rho = 2\pi \times \frac{1}{2} \times \frac{a^3}{3} = \frac{\pi a^3}{3}$$

۶۶- گزینه ۲»

(حضرت علی (ع))

(سهراب سپهری)

تدبیر قبل از کار، تو را از پشیمانی ایمن می‌کند.

بد نگوئیم به مهتاب اگر تب داریم.

باسخنامه تست‌های تکمیلی

فصل اول : توابع چند متغیره

۱- گزینه ۳	۲- گزینه ۲	۳- گزینه ۳	۴- گزینه ۳	۵- گزینه ۱
۶- گزینه ۳	۷- گزینه ۱	۸- گزینه ۲	۹- گزینه ۳	۱۰- گزینه ۱
۱۱- گزینه ۴	۱۲- گزینه ۱	۱۳- گزینه ۴	۱۴- گزینه ۳	۱۵- گزینه ۲
۱۶- گزینه ۱	۱۷- گزینه ۴	۱۸- گزینه ۴	۱۹- گزینه ۴	۲۰- گزینه ۳
۲۱- گزینه ۲	۲۲- گزینه ۲	۲۳- گزینه ۱	۲۴- گزینه ۲	۲۵- گزینه ۲
۲۶- گزینه ۲	۲۷- گزینه ۴	۲۸- گزینه ۱	۲۹- گزینه ۲	۳۰- گزینه ۴
۳۱- گزینه ۴	۳۲- گزینه ۴	۳۳- گزینه ۴	۳۴- گزینه ۳	۳۵- گزینه ۱
۳۶- گزینه ۴	۳۷- گزینه ۳	۳۸- گزینه ۴	۳۹- گزینه ۱	۴۰- گزینه ۲
۴۱- گزینه ۳	۴۲- گزینه ۲	۴۳- گزینه ۲	۴۴- گزینه ۳	۴۵- گزینه ۴
۴۶- گزینه ۲	۴۷- گزینه ۴	۴۸- گزینه ۴	۴۹- گزینه ۴	۵۰- گزینه ۳

فصل دوم : رویه‌ها، خم‌ها و توابع برداری

۱- گزینه ۲	۲- گزینه ۲	۳- گزینه ۴	۴- گزینه ۳	۵- گزینه ۲
۶- گزینه ۱	۷- گزینه ۴	۸- گزینه ۲	۹- گزینه ۱	۱۰- گزینه ۳
۱۱- گزینه ۳	۱۲- گزینه ۴	۱۳- گزینه ۳	۱۴- گزینه ۲	۱۵- گزینه ۳

فصل سوم : انتگرال توابع چند متغیره

۱- گزینه ۴	۲- گزینه ۲	۳- گزینه ۲	۴- گزینه ۱	۵- گزینه ۲
۶- گزینه ۴	۷- گزینه ۲	۸- گزینه ۱	۹- گزینه ۳	۱۰- گزینه ۴
۱۱- گزینه ۲	۱۲- گزینه ۱	۱۳- گزینه ۱	۱۴- گزینه ۳	۱۵- گزینه ۱
۱۶- گزینه ۲	۱۷- گزینه ۴	۱۸- گزینه ۳	۱۹- گزینه ۱	۲۰- گزینه ۲
۲۱- گزینه ۱	۲۲- گزینه ۲	۲۳- گزینه ۲	۲۴- گزینه ۱	۲۵- گزینه ۲
۲۶- گزینه ۳	۲۷- گزینه ۱	۲۸- گزینه ۳	۲۹- گزینه ۱	۳۰- گزینه ۲
۳۱- گزینه ۳	۳۲- گزینه ۲	۳۳- گزینه ۲	۳۴- گزینه ۳	۳۵- گزینه ۲
۳۶- گزینه ۱	۳۷- گزینه ۲	۳۸- گزینه ۱	۳۹- گزینه ۳	۴۰- گزینه ۲
۴۱- گزینه ۴	۴۲- گزینه ۱	۴۳- گزینه ۴	۴۴- گزینه ۴	۴۵- گزینه ۱
۴۶- گزینه ۳	۴۷- گزینه ۲	۴۸- گزینه ۱	۴۹- گزینه ۴	۵۰- گزینه ۱
۵۱- گزینه ۲	۵۲- گزینه ۱	۵۳- گزینه ۱	۵۴- گزینه ۴	۵۵- گزینه ۴
۵۶- گزینه ۲	۵۷- گزینه ۴	۵۸- گزینه ۱	۵۹- گزینه ۴	۶۰- گزینه ۱
۶۱- گزینه ۲	۶۲- گزینه ۱	۶۳- گزینه ۳	۶۴- گزینه ۳	۶۵- گزینه ۱
۶۶- گزینه ۳	۶۷- گزینه ۴	۶۸- گزینه ۳	۶۹- گزینه ۴	۷۰- گزینه ۳

فصل چهارم : میدانهای برداری و انتگرال گیری روی مسیریها و سطوح

۱- گزینه ۴	۲- گزینه ۲	۳- گزینه ۲	۴- گزینه ۲	۵- گزینه ۳
۶- گزینه ۱	۷- گزینه ۲	۸- گزینه ۲	۹- گزینه ۴	۱۰- گزینه ۲
۱۱- گزینه ۴	۱۲- گزینه ۱	۱۳- گزینه ۱	۱۴- گزینه ۴	۱۵- گزینه ۲
۱۶- گزینه ۱	۱۷- گزینه ۲	۱۸- گزینه ۱	۱۹- گزینه ۴	۲۰- گزینه ۲
۲۱- گزینه ۱	۲۲- گزینه ۱	۲۳- گزینه ۲	۲۴- گزینه ۱	۲۵- گزینه ۲
۲۶- گزینه ۳	۲۷- گزینه ۲	۲۸- گزینه ۳	۲۹- گزینه ۱	۳۰- گزینه ۲
۳۱- گزینه ۴	۳۲- گزینه ۲	۳۳- گزینه ۴	۳۴- گزینه ۱	۳۵- گزینه ۲
۳۶- گزینه ۲	۳۷- گزینه ۳	۳۸- گزینه ۱	۳۹- گزینه ۲	۴۰- گزینه ۲
۴۱- گزینه ۲	۴۲- گزینه ۳	۴۳- گزینه ۴	۴۴- گزینه ۱	۴۵- گزینه ۲
۴۶- گزینه ۲	۴۷- گزینه ۳	۴۸- گزینه ۱	۴۹- گزینه ۱	۵۰- گزینه ۲
۵۱- گزینه ۱	۵۲- گزینه ۱	۵۳- گزینه ۲	۵۴- گزینه ۲	۵۵- گزینه ۴

فصل پنجم : بردار

۱- گزینه ۴	۲- گزینه ۲	۳- گزینه ۲	۴- گزینه ۳	۵- گزینه ۱
۶- گزینه ۲	۷- گزینه ۲	۸- گزینه ۱	۹- گزینه ۱	۱۰- گزینه ۳
۱۱- گزینه ۲	۱۲- گزینه ۲	۱۳- گزینه ۱	۱۴- گزینه ۳	۱۵- گزینه ۲
۱۶- گزینه ۲	۱۷- گزینه ۲	۱۸- گزینه ۴	۱۹- گزینه ۱	۲۰- گزینه ۳
۲۱- گزینه ۱	۲۲- گزینه ۲	۲۳- گزینه ۴	۲۴- گزینه ۳	۲۵- گزینه ۲
۲۶- گزینه ۲	۲۷- گزینه ۲	۲۸- گزینه ۲	۲۹- گزینه ۳	۳۰- گزینه ۱
۳۱- گزینه ۲	۳۲- گزینه ۱	۳۳- گزینه ۱	۳۴- گزینه ۴	۳۵- گزینه ۲
۳۶- گزینه ۲	۳۷- گزینه ۴	۳۸- گزینه ۱	۳۹- گزینه ۴	۴۰- گزینه ۲
۴۱- گزینه ۱	۴۲- گزینه ۲	۴۳- گزینه ۱	۴۴- گزینه ۲	۴۵- گزینه ۳
۴۶- گزینه ۲	۴۷- گزینه ۳	۴۸- گزینه ۱	۴۹- گزینه ۲	۵۰- گزینه ۱
۵۱- گزینه ۱	۵۲- گزینه ۴	۵۳- گزینه ۱	۵۴- گزینه ۲	۵۵- گزینه ۱

منابع و مآخذ :

- 1) LEITHOLD, Louis, «The calculus with Analytic Geometry».
 - 2) SILVERMAN, RICHARD, A: «Modern calculus and Analytic Geometry» Macmillan Company.
 - 3) ENGINEERING MATHEMATICS c. s. sharma / i. j. s. sarna (c. b. s)
 - 4) General Mathematics Volume two by J.A.Maron
 - 5) Elliott Mendelson. Schaum's 3000 Solved Problems in calculus, 1986 McGraw – Hill
- ۶) تمرینها و مسائل آنالیز ریاضی از ب - ب - دمیدوویچ، ترجمه پرویز شهریاری
- ۷) حساب دیفرانسیل و انتگرال و هندسه تحلیلی - جرج توماس - راس فیسی، ترجمه مرکز نشر دانشگاهی، تهران .
- ۸) مجموعه فرمولهای ریاضی از مورای . و . اشپیگل، انتشارات استاد مشهد ۱۳۷۳.
- ۹) مجموعه آزمونهای مؤسسه مدرسان شریف.