برنامه‌ریزی خطی:

مفاهیم کلی برنامه‌ریزی خطی:

مراحل اجزای هر مدل برنامه‌ریزی خطی عبارتند از:

۱) متغیرهای تصمیم‌گیری که باید مشخص شوند.

۲) محدودیت‌های مسأله که در قالب معادله یا نامعادله بیان می‌شوند.

۳) تابع هدف که عبارت از خطی است که در واقع هدف هر مدل، بهینه‌سازی آن می‌باشد و به صورت max یا min تعریف می‌شود.

در حالت کلی مسألهٔ برنامه‌ریزی خطی به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$(\max \text{ یا } \min) \qquad Z = C_1x_1 + C_2x_2 + \dots + C_nx_n$$

$$\begin{aligned} \text{S.t.} \quad & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \ (\le \text{ یا } \ge \text{ یا } =) b_1 \\ & \vdots \\ & a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \ (\le \text{ یا } \ge \text{ یا } =) b_m \\ & x_1, x_2, \dots, x_n \ (\ge 0 \text{ یا } \le 0 \text{ یا نامقید}) \end{aligned}$$

فرم ماتریسی LP:

$$(\text{Max یا Min}) \qquad Z = CX$$

$$\begin{aligned} \text{S.t.} \quad & AX (\le \text{ یا } \ge \text{ یا } =) b \\ & X (\ge 0 \text{ یا } \le 0 \text{ یا نامقید}) \end{aligned}$$

$$C = (C_1, C_2, \dots, C_n) \qquad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{mn} \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

مفروضات برنامه‌ریزی خطی:

۱) **تناسب:** این به این معنا است که اگر x_j (مقدار فعالیت jام) دو برابر شود، سهم آن در هزینه و نیز در هر یک از محدودیت‌ها نیز دو برابر شود، یعنی هیچگونه صرفه‌جویی، درآمد یا پس‌اندازی با x_j مرتبط نیست و نیز هزینه راه اندازی برای شروع فعالیت نیز وجود ندارد.

۲) **جمع‌پذیری:** این فرض تضمین می‌کند که هزینهٔ کل برابر با مجموع هر یک از هزینه‌های فعالیت‌های انفرادی است و تأثیرات جانبی و متقابل بین فعالیت‌ها وجود ندارد.

۳) **بخش‌پذیری:** این فرض بیانگر این است که متغیرهای تصمیم‌گیری هر اندازه می‌توانند تقسیم شوند و بنابراین مقدار ناصحیح را نیز می‌توانند بگیرند.

٤) **قطعیت:** طبق این فرض تمامی ضرایب b_i, a_{ij}, c_j همگی معین هستند و تمامی عناصر احتمالی یا تصادفی در تقاضا، هزینه، قیمت‌ها و منابع موجود و غیره با معادل قطعی‌شان تقریب زده شده‌اند.

چند نکته در دستکاری مسألهٔ LP:

۱) تبدیل نامساوی به تساوی

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \le b_i \to \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j + x_{n+1} = b_i \qquad x_{n+1} \ge 0$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \ge b_i \to \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j - x_{n+1} = b_i \qquad x_{n+1} \ge 0$$

۲) تبدیل تساوی به نامساوی

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i \to \begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \ge b_i \\ \text{و} \\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \le b_i \end{cases}$$

۳) تغییر جهت نامساوی

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \ge b_i \to -\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \le -b_i$$

۴) تبدیلات قدر مطلق در محدودیت‌ها

$$|px_1 + qx_2| \le b \to \begin{cases} px_1 + qx_2 \le b \\ \text{و} \\ px_1 + qx_2 \ge -b \end{cases} \qquad |px_1 + qx_2| \ge b \to \begin{cases} px_1 + qx_2 \le -b \\ \text{یا} \\ px_1 + qx_2 \ge b \end{cases}$$

نکته: وقتی محدودیت به صورت اخیر باشد $(|px_1 + qx_2| \ge b)$ مسأله به **فرم برنامه‌ریزی خطی صحیح** مطرح است، چون باید فقط یکی از دو نامساوی برقرار باشد و لذا مسأله دیگر از نوع LP نخواهد بود.

۵) متغیرهای نامقید (آزاد)

هر متغیر آزاد را می‌توان به صورت تفاضل دو متغیر مثبت بیان کرد

$$x_j = x'_j - x''_j \qquad x''_j, x'_j > 0$$

در صورتی که $x_1, x_2, \dots, x_k$ یک مجموعهٔ k عضوی از k متغیرهای آزاد مسأله باشد، در آن صورت با افزودن فقط یک متغیر (x'') می‌توان عمل جایگزینی را انجام داد:

$$\begin{aligned} x_1 &= x'_1 - x''_1 \to x_1 = x'_1 - x'' \\ x_2 &= x'_2 - x''_2 \to x_2 = x'_2 - x'' \\ &\vdots \\ x_k &= x'_k - x''_k \to x_k = x'_k - x'' \end{aligned} \qquad x'' = \max\{x''_j, x''_j \ge 0\}$$

هم چنین اگر x_j به صورت قدرمطلق در مسأله ظاهر شده باشد به صورت زیر جایگزین خواهد شد $|x_j| = x'_j + x''_j$

۶) تبدیل مسألهٔ ماکزیمم‌سازی به مینیمم سازی و بالعکس

برای تبدیل مسألهٔ ماکزیمم به مینیمم و بالعکس کافی است که هم ضرایب تابع هدف و هم خود تابع هدف را در یک منفی ضرب کرد.

$$\max \sum_{j=1}^{n} C_j x_j = -\min \sum_{j=1}^{n} -C_j x_j$$

اشکال متعارفی و استاندارد مسألهٔ LP:

	مساله max سازی	مساله min سازی
شکل استاندارد	$\max \sum_{i=1}^{n} C_j x_i$ S.t. $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i$ $i = 1,\dots,m$ $j = 1,\dots,n \quad x_j \geq 0$	$\min \sum_{i=1}^{n} C_j x_j$ S.t. $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i$ $i = 1,\dots,m$ $j = 1,\dots,n \quad x_j \geq 0$
شکل متعارفی	$\max \sum_{i=1}^{n} C_j x_i$ S.t. $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i$ $i = 1,\dots,m$ $j = 1,\dots,n \quad x_j \geq 0$	$\min \sum_{i=1}^{n} C_j x_j$ S.t. $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \geq b_i$ $i = 1,\dots,m$ $j = 1,\dots,n \quad x_j \geq 0$

نکته: روش simplex تنها مسائل LP به فرم استاندارد را حل می‌کند.

روش‌های حل برنامه‌ریزی خطی:

۱) روش‌های ترسیمی ۲) روش simplex

روش‌های ترسیمی

هر دستگاه نامعادلهٔ خطی به صورت b (= یا > یا <) $a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n$ یک نیم فضا در فضای دو بعدی می‌باشد. برای رسم منطقهٔ موجه ابتدا نامعادله را به صورت تساوی تبدیل کرده و خط مورد نظر را رسم می‌کنیم. سپس منطقهٔ مورد نظر را با توجه به جهت نامعادله هاشور می‌زنیم. اشتراک تمام محدودیت‌ها منطقهٔ موجه مسأله را تشکیل می‌دهد. سپس از بردار c (ضرایب تابع هدف) که همان بردار گرادیان تابع هدف است و بر آن عمود است برای یافتن نقطهٔ بهینه تابع هدف استفاده می‌کنیم.

- در مسألهٔ min سازی تابع هدف را در جهت خلاف بردار $\vec{C}$ حرکت می‌دهیم.
- در مسألهٔ max سازی تابع هدف را در جهت برادر $\vec{C}$ حرکت می‌دهیم.

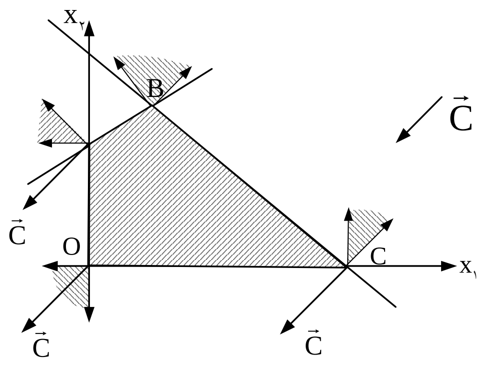
در فضای شدنی آخرین نقطه‌ای که تابع هدف از آن می‌گذرد مقدار بهینه تابع هدف را به ما می‌دهد.

نکته: اگر مسألهٔ LP به فرم استاندارد یا متعارفی جواب بهینه متناهی داشته باشد، آنگاه دارای جواب بهینه گوشه‌ای هم هست.
با توجه به نکته ذکر شده از روش دیگری نیز می‌توان برای یافتن نقطهٔ بهینه استفاده کرد.

رسم بردار گرادیان محدودیت‌های گذرنده از نقاط رأسی

در این روش مسألهٔ LP را به شکل استاندارد مبدل ساخته و سپس بردارگرادیان محدودیت‌های گذرنده از نقاط رأسی را (به سمت خارج فضای شدنی) رسم کرده و مخروط حاصل را هاشور می‌زنیم. سپس بردار $\vec{C}$ در مسألهٔ max سازی و ($-\vec{C}$ را در مسألهٔ min سازی) را از نقطهٔ رأسی رسم می‌کنیم. در صورتی که این بردار داخل مخروط حاصله بیافتد، نقطهٔ رأسی متناظرش جواب بهینه مسأله خواهد بود.

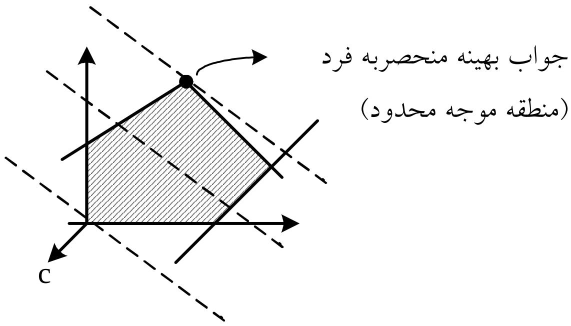
مثال: یک مسألهٔ max سازی با فضای شدنی و محدودیت‌هایی مطابق شکل زیر در نظر بگیرید، با استفاده از روش رسم بردارگرادیان نقطهٔ O نقطهٔ بهینه مسأله خواهد بود.

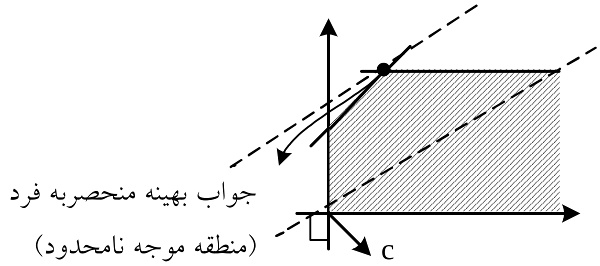


حالت‌های ممکن در مسألهٔ LP

۱) جواب بهینه منحصر به فرد متناهی.

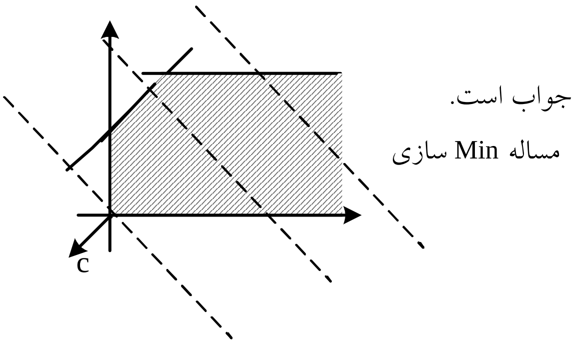
در این حالت یک نقطه بهینه آن هم فقط رأسی برای مسأله وجود دارد. در این حالت منطقهٔ موجه می‌تواند محدود و نامحدود باشد.





۲) جواب بهینه نامتناهی

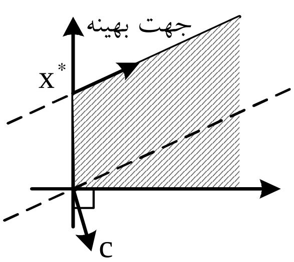
در این حالت جواب بهینه نامحدود است.



نکته: شرط لازم برای وجود جواب بهینه نامتناهی، نامحدود بودن فضای جواب است.

نکته: در این حالت مجموعهٔ جواب بهینه، تهی است.

۳) جواب بهینهٔ چندگانه متناهی

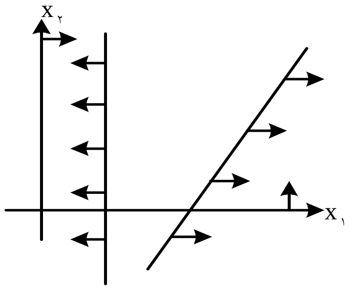


در این حالت مقدار بهینه تابع هدف به ازای بیش از یک (بی‌نهایت) نقطه به دست می‌آید.

نکته: در مسألهٔ LP اگر بیش از یک جواب داشته باشیم حتماً بی‌نهایت جواب بهینه خواهیم داشت.

۴) نشدنی (ناموجه)

در این حالت هیچ اشتراکی بین کل محدودیت‌های مسأله وجود ندارد و فضای شدنی مسأله تهی است.

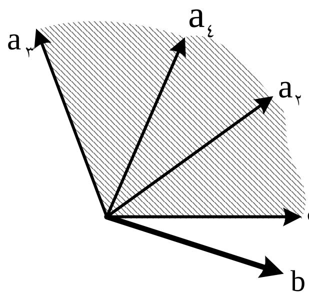


فضای ایجاد (فضای احتیاج)

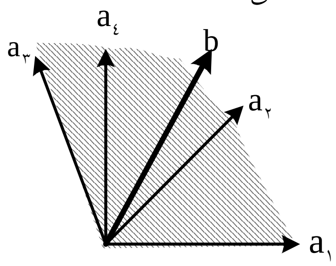
مسألهٔ LP را می‌توان در فضای ایجاد (احتیاج) نیز حل و تفسیر کرد. مجموعه بردارهای $a_۱, a_۲, \ldots, a_n$ تشکیل یک مخروط می‌دهند.

۱) در حالتی که مسألهٔ LP به فرم استاندارد باشد اگر و فقط اگر بردار b داخل مخروط حاصله قرار گیرد، مسأله شدنی است.

ناحیه شدنی تهی است

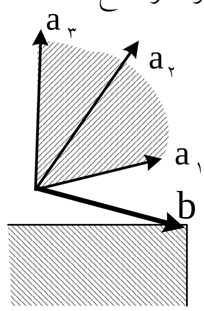


ناحیه شدنی تهی نیست

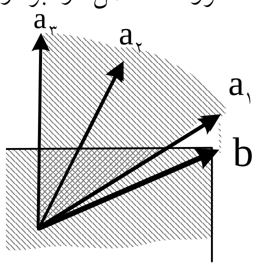


۲) در حالتی که محدودیت‌ها به فرم $j = ۱, ۲, \ldots, n \quad x \geq ۰ \quad \sum_{j=۱}^{n} a_j x_j \leq b$ باشند اگر و فقط اگر مخروط حاصل از بردارهای $a_۱, a_۲, \ldots, a_n$ بردارهای کوچکتر یا مساوی بردار b را قطع کند مسأله شدنی است.

فضای شدنی تهی است

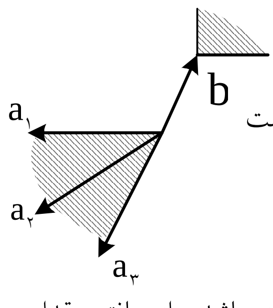


فضای شدنی تهی نیست

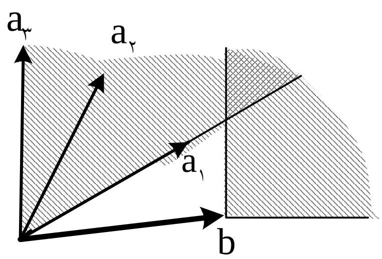


۳) در حالتی که محدودیت‌ها به فرم $j = ۱, \ldots, n$ ، $x \geq ۰$ ، $\sum_{j=۱}^{n} a_j x_j \geq b$ باشند اگر و فقط اگر مخروط حاصل از بردارهای $a_۱, a_۲, \ldots, a_n$ بردارهای بزرگتر یا مساوی بردار b را قطع کند مسأله شدنی است.

فضای شدنی تهی است



فضای شدنی تهی نیست



بهینگی

در حالتی که فضای ما دو بعدی باشد برای یافتن مقدار بهینه کافی است مقدار متغیرها را طوری پیدا کنیم که با توجه به عبارت

$$\begin{bmatrix} c_۱ \\ a_۱ \end{bmatrix} x_۱ + \begin{bmatrix} c_۲ \\ a_۲ \end{bmatrix} x_۲ + \ldots + \begin{bmatrix} c_n \\ a_n \end{bmatrix} (\leq \text{ یا } = \text{ یا } \geq) \begin{bmatrix} Z \\ b \end{bmatrix}$$

مقدار z بهینه شود.

برای این کار کافی است مخروط حاصله از بردارهای $\begin{bmatrix} c_۱ \\ a_۱ \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} c_۲ \\ a \end{bmatrix}, \ldots, \begin{bmatrix} c_n \\ a_n \end{bmatrix}$ را پیدا کرده و با حرکت بردار $\begin{bmatrix} Z \\ b \end{bmatrix}$ مقدار z را طوری کنیم که در ضمن تأمین احتیاجات مقدار آن بهینه شود.

چند نکته:

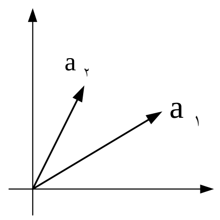
۱) تعداد نقاط گوشه‌ای هر مسألهٔ LP از رابطهٔ $\frac{(m+n)!}{m!n!}$ بدست می‌آید که در آن m تعداد محدودیت‌ها و n تعداد متغیرها است.

۲) با افزودن یک متغیر و یا حذف یک محدودیت ناحیهٔ شدنی کوچکتر نمی‌شود و تابع هدف نیز بدتر نمی‌شود.

۳) با حذف یک متغیر و یا افزودن یک محدودیت ناحیهٔ شدنی بزرگتر نمی‌شود و تابع هدف نیز بهتر نمی‌شود.

جبر خطی

ترکیب خطی

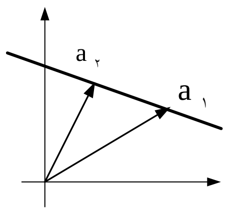


بردار b ترکیب خطی بردارهای $a_1, a_2, \dots, a_k$ است اگر $b = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \dots + \lambda_k a_k$

$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$: اعداد حقیقی

نکته: در فضای دو بعدی ترکیب خطی دو بردار کل فضا را به ما می‌دهد.

ترکیب آفین

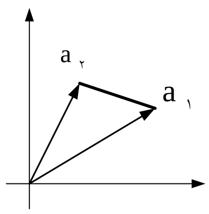


بردار b ترکیب آفین بردارهای $a_1, a_2, \dots, a_k$ است اگر $b = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \dots + \lambda_k a_k$

به طوریکه: $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1$

نکته: در فضای دو بعدی ترکیب آفین دو بردار، راستای خط واصل بین انتهای دو بردار را می‌دهد.

ترکیب محدب



بردار b ترکیب محدب بردارهای $a_1, a_2, \dots, a_k$ است اگر $b = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \dots + \lambda_k a_k$

$\sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1 \quad , \quad \lambda_i \geq 0$

نکته: در فضای دو بعدی ترکیب محدب دو بردار، پاره خط واصله بین انتهای دو بردار را می‌دهد.

استقلال خطی

بردارهای $a_1, \dots, a_k$ مستقل خطی هستند، اگر $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i a_i = 0$ باشد آنگاه به ازای هر $i = 1, \dots, k$ داشته باشیم $\lambda_i = 0$.

مجموعهٔ مولد

مجموعهٔ بردارهای $a_1, \dots, a_k$ در یک فضای n بعدی مولد هستند اگر هر بردار را در این فضا بتوان با ترکیب خطی بردارهای $a_1, a_2, \dots, a_k$ نوشت.

نکته: نمایش هر بردار با بردارهای مولد به صورت منحصر به فرد نیست.

پایه

مجموعه n عضوی بردارهای $a_1, a_2, \ldots, a_k$ در فضای n بعدی پایه هستند اگر

۱) $a_1, a_2, \ldots, a_k$ مستقل خطی باشند

۲) در فضای E^n یک مجموعهٔ مولد باشند

نکته: نمایش هر بردار با بردارهای پایه منحصر به فرد است. ولی بردار پایه در فضای E^n منحصر به فرد نیست.

تعویض یک بردار پایه با بردار پایهٔ دیگر

در روش حل simplex می‌بایست در هر مرحله بردار پایه با یک بردار پایهٔ دیگر جایگزین شود و نکتهٔ حائز اهمیت این است که بعد از جایگزینی یک بردار با یک بردار دیگر مجموعهٔ بردارها هم چنان مستقل خطی باشند.

نکته: اگر یک مجموعه بردار پایه داشته باشیم شرط لازم و کافی پایه ماندن بردارها، در صورت جایگزینی یکی از آنها، با b این است که بردار جایگزین شده در رابطه زیر ضریبی مخالف صفر داشته باشد. $b = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \ldots + \lambda_n a_n$

ماتریس‌ها

نکات اصلی

- $AB \neq BA$
- اگر $A=A^t$ (A^t ترانهادهٔ A) باشد A یک ماتریس متقارن است.
- اگر $A= -A^t$ (A^t ترانهادهٔ A) باشد A یک ماتریس کج متقارن است.
- $A= (A^t)^t$
- اگر B,A هم بعد باشند $(A+B)^t=A^t+B^t$
- $(AB)^t=B^tA^t$
- در صورتی که $|A| \neq 0$ (|A|: دترمینال ماتریس A) آنگاه معکوس ماتریس A وجود خواهد داشت و محاسبهٔ آن به طریق زیر می‌باشد:

اگر ماتریس واحد را به ماتریس A الحاق کرده و با عملیات سطری ماتریس A را به ماتریس واحد تبدیل کرده در این صورت ماتریس واحد به A^{-1} تبدیل خواهد شد.

چند نکته:

- اگر A معکوس داشته باشد A^t هم معکوس دارد و داریم $(A^{-1})^t=(A^t)^{-1}$
- اگر B,A معکوس داشته باشند AB هم معکوس دارد $(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$
- اگر A یک ماتریس مثلثی باشد آنگاه |A|= حاصلضرب عناصر قطری
- اگر B, A مربعی باشند، آنگاه $|AB|= |A|\times|B|$

رتبهٔ ماتریس

رتبهٔ سطری: حداکثر تعداد سطرهای مستقل از هم در ماتریس را رتبهٔ سطری ماتریس گویند.

رتبهٔ ستونی: حداکثر تعداد ستون‌های مستقل از هم در ماتریس را رتبهٔ ستونی ماتریس گویند.

نکته: رتبهٔ سطری در یک ماتریس همواره برابر رتبهٔ ستونی است.

نکته: اگر A یک ماتریس $m\times n$ باشد $\operatorname{rank} A \le \min(m,n)$ اگر $\operatorname{rank} A = \min(m.n)$ باشد A رتبهٔ کامل دارد.

دستگاه معادلات خطی هم زمان

دستگاه $Ax \;(\le \text{ یا } \ge \text{ یا } =)\; b$ را در نظر بگیرید.

برای تعیین تعداد جواب‌های این دستگاه کافی است کلیهٔ محدودیت‌ها را به حالت مساوی تبدیل کرد و سپس حالات مختلف را بررسی کرد.

۱) اگر $\text{Rank}\,(A|b) \ne \text{Rank}\,(A)$ باشد دستگاه جواب ندارد. چون نمی‌توان b را به صورت ترکیب خطی $a_1, a_2, \dots, a_k$ نوشت.

۲) اگر $\text{Rank}\,(A) = R\,(A|b) = k < n < m$ باشد، دستگاه بی‌نهایت جواب دارد.

۳) اگر $R\,(A) = R\,(A|b) = k = n$ باشد، دستگاه جواب منحصر به فرد دارد.

چند تعریف

۱- مجموعهٔ محدب

اگر به ازای هر $x_1, x_2 \in x$ و مخالف هم داشته باشیم $\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2 \in X \quad , \quad 0 \le \lambda \le 1$

آنگاه مجموعهٔ X محدب خواهد بود. به بیان دیگر مجموعه‌ای محدب است که، ترکیب محدب هر دو عضو دلخواه در مجموعه باشد.

نکته: ناحیهٔ شدنی مسألهٔ LP یک مجموعهٔ محدب است.

مثال: مجموعه‌های زیر همگی محدب هستند:

۱) $\left\{(x_1, x_2) : x_1^2 + x_2^2 \le 1\right\}$

۲) $\{x : Ax = b, x \ge 0\}$ که A یک ماتریس $m\times n$ و b یک m بردار است.

۲- نقطهٔ رأسی

$x \in X \ne \phi$ را نقطهٔ رأسی گوییم هر گاه نتوان آن را به صورت ترکیب محدب اکید دو نقطهٔ متمایز عضو x نوشت. (منظور از واژهٔ اکید در این جا این است که تنها $0 < \lambda < 1$ باشد.)

۳- ابر صفحه

ابرصفحه H یک مجموعه به صورت $\{x|\ Px = k\}$ است که در آن p یک بردار ناصفر در E^n و k یک اسکالر است.

نکته: در فضای دو بعدی ابرصفحه یک خط و در فضای سه بعدی یک صفحه است.

نکته: در تعریف ابرصفحه p یک بردار معلوم و گرادیان ابرصفحه است.

نکته: ابرصفحه یک مجموعهٔ محدب است.

۴- نیم فضا

هر ابرصفحه فضای خود را به دو نیم فضا تقسیم می‌کند که برای آن داریم:

$$H^+ = \{x \mid px \le k\} \qquad H^- = \{x \mid px \ge k\}$$

$$H^- \cup H^+ = E^n \qquad H^- \cap H^+ = H$$

۵- چند وجهی

اشتراک تعداد متناهی ابرصفحه یا نیم‌فضا را چندوجهی گویند.

۶- مخروط

C را مخروط گوییم هر گاه $\forall x \in c, \forall \lambda \geq 0$ داشته باشیم $\lambda x \in c$

چند نکته:

- مخروط در واقع چندوجهی است که از اشتراک تعداد متناهی نیم‌فضا یا ابرصفحه که از مبدأ عبور می‌کنند، حاصل می‌آید.
- $\bar{x} \in X \neq \phi$ را نقطهٔ رأسی یک مجموعهٔ محدب گویند هر گاه $X - \{\bar{x}\}$ هم چنان محدب باشد.
- $\bar{x} \in X \neq \phi$ را نقطهٔ رأسی یک چندوجهی گویند هر گاه محل برخورد حداقل یک دستهٔ n تایی ابرصفحه مستقل تعریف کنندهٔ چند وجهی باشد.
- dim (نقطهٔ رأسی) =0
- $\bar{x}$ را نقطهٔ رأسی تباهیده یا تبهگن گویند هر گاه محل برخورد بیش از یک دستهٔ n تایی ابرصفحه مستقل تعریف کنندهٔ ناحیهٔ شدنی باشد.
- چندوجهی با حداقل یک نقطهٔ رأسی تباهیده، چندوجهی تباهیده نامیده می‌شود.

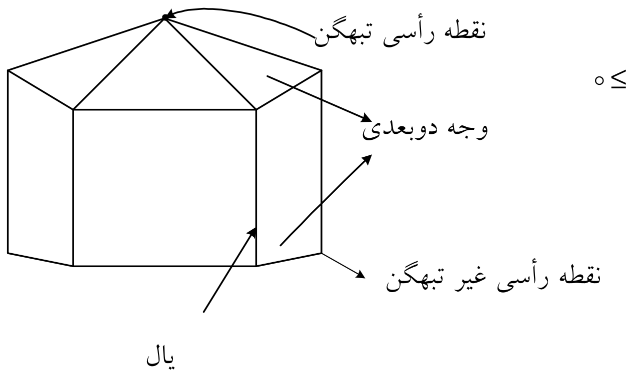
۷- یال

$F \subseteq X \neq \phi$ را یال گوییم هر گاه محل برخورد حداقل $n-1$ ابرصفحهٔ مستقل تعریف کنندهٔ ناحیهٔ شدنی باشد و نقطه‌ای در آن وجود داشته باشد که دقیقاً از آن n-1 ابرصفحهٔ مستقل گذشته باشد. $\dim(F) = n-(n-1) = 1$

نکته: دو نقطهٔ رأسی مجاور گفته می‌شوند هر گاه قطعهٔ خط واصل آنها یک یال باشد.

۸- وجه

$F \subseteq X \neq \phi$ را وجه گوییم هر گاه محل برخورد تعدادی ابرصفحهٔ مستقل تعریف کنندهٔ ناحیهٔ شدنی باشد.



$$0 \leq \dim F \leq n-1$$

۹- جهت دور شونده

$d \neq 0$ یک جهت دور شونده برای نقطهٔ $\bar{x} \in X \neq \phi$ تعریف می‌شود هرگاه $\bar{x} + \lambda d \in X \quad \forall \lambda \geq 0$

طبق این تعریف مجموعهٔ کران‌دار دارای جهت دور شونده نیست.

چند نکته:

۱) $d \neq 0$ یک جهت دور شونده برای دستگاه $Ax = b, x \geq 0$ است اگر و فقط اگر $Ad = 0, d \geq 0, d \neq 0$ جواب داشته باشد.

۲) $d \neq 0$ یک جهت دور شونده برای دستگاه $Ax \geq b, x \geq 0$ است اگر و فقط اگر $Ad \geq 0, d \geq 0, d \neq 0$ جواب داشته باشد.

۳) $d \neq 0$ یک جهت دور شونده برای دستگاه $Ax \leq b, x \geq 0$ است اگر و فقط اگر $Ad \leq 0, d \geq 0, d \neq 0$ جواب داشته باشد.

۱۰- جهت رأسی

$d \neq 0$ را جهت رأسی گوییم هر گاه نتوان آن را ترکیب خطی نامنفی اکید دو جهت متمایز در ناحیهٔ شدنی نوشت.

۱۱- شعاع

مجموعهٔ $\{\bar{x} + \lambda d, \lambda \geq 0\}$ را شعاع گوییم که در آن $\bar{x}$ رأس شعاع (نقطه رأسی) و $d \neq 0$ جهت شعاع (جهت رأسی) می‌باشد.

قضیهٔ نمایش

اگر $X = \{x \mid Ax = b, x \geq 0\}$ و $X \neq \phi$ آنگاه

۱) نقاط $x_1,\ldots,x_k$ نقاط رأسی مسأله هستند.

۲) جهت‌های $d_1,\ldots,d_L$ در صورت وجود (بی‌کران بودن X) جهت‌های دور شوندهٔ رأسی مسأله هستند.

۳) $\bar{x} \in X$ است اگر و فقط اگر

$$\bar{x} = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j x_j + \sum_{j=1}^{L} \mu_j d_j$$

که در آن

$$\sum_{j=1}^{k} \lambda_j = 1$$
$$\lambda_j \geq 0 \; ; \; j = 1,\ldots,k$$
$$\mu_j \geq 0 : \; j = 1,\ldots,L$$

نقاط راسی و بهینگی

مسأله LP زیر را با نقاط رأسی $x_1,x_2,...x_k$ و جهات رأسی $d_1,...,d_L$ در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned}&\min \quad cx\\ &Ax=b\\ &x\geq 0\end{aligned}$$

براساس قضیه نمایش برای هر x دلخواه داریم:

$$x=\sum_{j=1}^{k}\lambda_j x_j+\sum_{j=1}^{L}\mu_j d_j$$

$$\sum_{j=1}^{k}\lambda_j=1$$

$$j=1,\cdots,k \quad \lambda_j\geq 0 \quad , \quad j=1,\cdots,L \quad \mu_j\geq 0$$

بنابراین مساله را می‌توان به فرم زیر تبدیل نمود:

$$\min \sum_{j=1}^{k}(cx_j)\lambda_j+\sum_{j=1}^{L}(cd_j)\mu_j$$

$$\sum_{j=1}^{k}\lambda_j=1$$

$$j=1,\cdots,k \quad \lambda_j\geq 0 \quad , \quad j=1,\cdots,L \quad \mu_j\geq 0$$

در صورتی‌که به ازای مقادیری از j، $cd_j<0,\ j=1,...k$ باشد تابع را می‌توان با انتخاب مقدار مناسب μ_j، هر قدر کوچک نمود، لذا جواب مسئله بی‌کران خواهد شد.

ولی در صورتی‌که به ازای تمام مقادیر j، $cd_j\geq 0,\ j=1,...k$ باشد تابع دارای مقدار متناهی خواهد شد. چون با صفر قرار دادن μ_j متناظر هر جهت رأسی و یافتن λ_jها به سادگی مقدار بهینه مسأله مشخص می‌گردد.

پس می‌توان گفت در مسأله به فرم

$$\begin{aligned}&\min \quad cx\\ &Ax=b\\ &x\geq 0\end{aligned}$$

شرط لازم و کافی برای اینکه:

- ✓ مسأله جواب بی‌کران داشته باشد این است که به ازای برخی از jها، $cd_j<0,\ j=1,...k$ باشد.
- ✓ مسأله جواب بهینه متناهی داشته باشد این است که به ازای تمام jها، $cd_j\geq 0,\ j=1,...k$ باشد.

و اگر داشته باشیم:

$$\begin{aligned}&\max \quad cx\\ &Ax=b\\ &x\geq 0\end{aligned}$$

شرط لازم و کافی برای اینکه:

- ✓ مسأله جواب بی‌کران داشته باشد این است که به ازای برخی از مقادیر jها، $cd_j > ۰,\ j = ۱,...k$ باشد.
- ✓ مسأله جواب بهینه متناهی داشته باشد این است که به ازای تمام jها، $cd_j \le ۰,\ j = ۱,...k$ باشد.

نکته: مجموعه نقاط بهینه در هر مسأله برنامه‌ریزی خطی عبارتست از، ترکیب خطی نامنفی جهات رأسی d_j (که در آنها $cd_j = ۰$ باشد) و ترکیب محدب نقاط رأسی بهین.

نکته: اگر x^* یک نقطه بهین باشد و آن را به فرم زیر، به صورت ترکیب خطی نقاط رأسی مسأله، نشان داده باشیم:

نقاط رأسی مسأله $x_۱,\cdots,x_k$ $\qquad \lambda_j \ge ۰ \qquad \sum_{j=۱}^{k}\lambda_j = ۱ \qquad x^* = \lambda_۱ x_۱ + \lambda_۲ x_۲ + \cdots + \lambda_k x_k$

نقاط رأسی که ضریب آنها $(۱ \le P \le k; \lambda p)$ مخالف صفر باشد، نقاط رأسی بهینه هستند ولی در مورد نقاط رأسی با ضریب صفر اظهار نظر نمی‌توان کرد.

مثال: مسأله min سازی به فرم $۴x_۱ - x_۲$ با نقاط رأسی $\begin{pmatrix}۰\\۰\end{pmatrix},\begin{pmatrix}۰\\۲\end{pmatrix},\begin{pmatrix}۲\\۴\end{pmatrix},\begin{pmatrix}۱\\۰\end{pmatrix},\begin{pmatrix}۲\\۱\end{pmatrix}$ و جهات رأسی $\begin{pmatrix}۱\\۰\end{pmatrix},\begin{pmatrix}۲\\۱\end{pmatrix}$ را در نظر بگیرید، مجموعه جواب بهینه کدام است؟

حل

$$cx_۱ = (۴,-۱)\begin{pmatrix}۰\\۰\end{pmatrix} = ۰ \qquad cx_۲ = (۴,-۱)\begin{pmatrix}۰\\۲\end{pmatrix} = -۲$$

$$cx_۳ = (۴,-۱)\begin{pmatrix}۱\\۰\end{pmatrix} = ۴ \qquad cx_۴ = (۴,-۱)\begin{pmatrix}۲\\۱\end{pmatrix} = ۷$$

مسأله معادل است با:

$$\begin{aligned}&\min\ ۰\lambda_۱ - ۲\lambda_۲ + ۴\lambda_۳ + ۴\mu_۱ + ۷\mu_۲\\ &\text{s.t.}\ \ \lambda_۱ + \lambda_۲ + \lambda_۳ = ۱\\ &\qquad \lambda_۱,\lambda_۲,\lambda_۳,\mu_۱,\mu_۲ \ge ۰\end{aligned}$$

از آنجا که ضرایب جهات رأسی $\mu_۲,\mu_۱$ و مثبت هستند، آنها را مساوی صفر قرار داده و برای بهینه‌سازی ضرایب $\lambda_۳,\lambda_۲,\lambda_۱$ را پیدا می‌کنیم.

$$\left.\begin{aligned}&\min\ ۰\lambda_۱ - ۲\lambda_۲ + ۴\lambda_۳\\ &\lambda_۱ + \lambda_۲ + \lambda_۳ = ۱\\ &\lambda_۱,\lambda_۲,\lambda_۳ \ge ۰\end{aligned}\right\}\ \begin{aligned}\lambda_۱ &= ۰\\ \lambda_۲ &= ۱\\ \lambda_۳ &= ۰\end{aligned}$$

با توجه به اینکه تنها ضریب $x_۲$ مخالف صفر است لذا تنها $x_۲$ نقطه بهینه مسأله می‌باشد.

جواب شدنی پایه

در سیستم $Ax = b, x \ge ۰$ اگر $A_{m\times n}$ ماتریس محدودیت‌ها و b یک m بردار باشد. در صورتی که $\text{Rank}(A|b) = m$(باشد اگر ماتریس A به فرم A=(B,N) که B یک ماتریس $m\times m$ معکوس‌پذیر $(|B| \ne ۰)$ و N ماتریس $m\times(n-m)$ است مبدل شود، آنگاه جواب معادلات ماتریس Ax=b $x = \begin{pmatrix}x_B\\x_N\end{pmatrix}$ خواهد بود که در آن

$$x_B = B^{-۱}b \quad , \quad x_N = ۰$$

در این صورت اگر $x_B \ge ۰$ آنگاه x جواب شدنی پایه برای سیستم است.

چند نکته:

– مؤلفه‌های x_B در ماتریس x متغیرهای پایه‌ای (وابسته) و مؤلفه‌های x_N متغیرهای غیر پایه‌ای (مستقل) هستند.

– در صوتی که $x_B>0$، x جواب شدنی پایه ناتباهیده و اگر حداقل یکی از مؤلفه‌های $x_B=0$ باشد آنگاه x جواب شدنی پایه تباهیده است.

– در هر سیستم تعداد جواب‌های شدنی پایه همواره کوچکتر یا مساوی $\binom{n}{m}$ خواهد بود.

– یک نقطه جواب شدنی پایه است اگر و فقط اگر یک نقطه رأسی باشد.

– در هر مسأله برنامه‌ریزی خطی به ازای هر نقطه رأسی (جواب شدنی پایه) یک ماتریس پایه وجود دارد که این پایه منحصربه‌فرد نیست و برعکس به ازای هر ماتریس پایه یک نقطه رأسی منحصربه‌فرد وجود دارد.

– نقطه رأسی که بیش از یک پایه داشته باشد تباهیده است. برعکس نقطه تباهیده بیش از یک پایه دارد اگر و فقط اگر دستگاه $Ax=b$ به صورت خودبه‌خود نتیجه ندهد که متغیری در همه جای مسأله صفر بوده است.

مثال: دستگاه زیر را در نظر بگیرید:

$$x_1+x_2+x_3=1$$
$$-x_1+x_2+x_3=1$$
$$x_1,x_2,x_4\geq 0$$

دراین دستگاه نقطه $x(0,1,0)$ یک جواب شدنی پایه متناظر با متغیرهای x_1 و x_2 است. این نقطه یک نقطه تباهیده برای مسأله است ولی تنها یک پایه برای آن وجود دارد زیرا دستگاه $Ax=b$ خود به خود نتیجه خواهد داد که $x_1=0$ پس ستون‌های متناظر x_1 در ماتریس A به عنوان پایه محسوب نخواهد شد.

روش سیمپلکس

نکته: روش سیمپلکس حل مسأله را از یک نقطه رأسی شروع کرده و با این هدف که در هر تکرار تابع هدف بدتر نشود روی نقاط رأسی (جواب شدنی پایه) حرکت می‌کند تا به مقدار بهینه برسد.

نکته: برای حل مسأله از روش سیمپلکس ابتدا باید مسأله را به فرم استاندارد مبدل ساخت، لذا به محدودیت‌ها یک متغیر کمکی اضافه یا کم می‌کنیم تا به فرم استاندارد تبدیل شوند.

*گام‌های حل یک مسأله به روش سیمپلکس

۱) کلیه متغیرهای تابع هدف را به سمت چپ تساوی منتقل می‌کنیم تا طرف دوم به حالت تساوی تبدیل شود($z-cx=0$)

۲) انتخاب متغیر وارد شونده: در هر مرحله تکرار روش سیمپلکس، در صورتی که مسأله max سازی باشد، هر متغیری که ضریب سطر تابع هدف آن منفی (و در min سازی مثبت) باشد شرط ورود به پایه را دارد ولی سیمپلکس در max سازی منفی ترین (و در min سازی مثبت‌ترین) ضریب را انتخاب می کند و این تنها یک فرض احتمالی برای ایجاد بیشترین مقدار بهبود در تابع هدف است. در این حالت ستون مربوط به متغیر وارد شونده ستون محوری نامیده می‌شود.

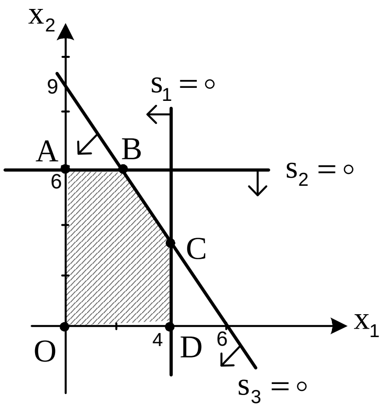
۳) انتخاب متغیر خارج شونده: در روش سیمپلکس برای انتخاب متغیر خارج شونده اعداد سمت راست جدول را بر اعداد مثبت ستون محوری تقسیم و از میان آنها کوچکترین عدد را انتخاب می‌کنیم. سطر مربوط به کوچکترین عدد، سطر محوری و متغیر مربوط به آن متغیر خارج شونده نامیده می‌شود.

نکته: در انتخاب متغیر خارج شونده، اعداد منفی در ستون محوری معرف نقاط پایه نشدنی هستند.

٤) برای محاسبه جدول جدید (مشخص شدنی نقطه رأسی بهتر) سطر محوری را بر عنصر محوری یا عنصر پاشنه گردی (نقطه تقاطع سطر و ستون محوری) تقسیم کرده و مابقی اعداد ستون محوری را با استفاده از عملیات سطری، صفر می‌کنیم.

مثال:

$$\begin{array}{lcl} \max z = ۳x_۱ + ۵x_۲ & & \max\ z - ۳x_۱ - ۵x_۲ = ۰ \\ x_۱ \le ۴ & & x_۱ + s_۱ = ۴ \\ ۲x_۲ \le ۱۲ & & ۲x_۲ + s_۲ = ۱۲ \\ ۳x_۱ + ۲x_۲ \le ۱۸ & \Rightarrow & ۳x_۱ + ۲x_۲ + s_۳ = ۱۸ \\ x_۱, x_۲ \ge ۰ & & x_۱, x_۲, s_۱, s_۲, s_۳ \ge ۰ \end{array}$$



متغیر وارد شونده

	$x_۱$	$x_۲$	$s_۱$	$s_۲$	$s_۳$	R.H.S
$s_۱$	۱	۰	۱	۰	۰	٤
$s_۲$	۰	۲	۰	۱	۰	۱۲
$s_۳$	۳	۲	۰	۰	۱	۱۸
z	-۳	-۵	۰	۰	۰	۰

متغیر خارج شونده

عنصر محوری

سطر محوری

در این جدول $s_۱$،$s_۲$،$s_۳$ متغیرهای پایه‌ای هستند که دارای مقادیر سمت راست مخالف صفر هستند و $x_۱=x_۲=0$ متغیرهای غیر پایه هستند. این جدول معرف نقطه O است که هیچ تولیدی نداریم.

نکته: در جدول سیمپلکس ضریب متغیر پایه‌ای در سطر خودش ۱ و در سطرهای دیگر ۰ است به بیان دیگر ماتریس مربوط به متغیرهای پایه‌ای یکه است.

جدول سیمپلکس مرحله بعد با هدف بهتر شدن تابع هدف شکل می‌گیرد.

جدول دوم معرف نقطه رأسی A است. در این جدول $x_۲$ وارد شده و $S_۲$ براساس تست صورت گرفته $\left(\frac{۱۲}{۲} < \frac{۱۸}{۲}\right)$ از جدول خارج می‌شود.

	$x_۱$	$x_۲$	$s_۱$	$s_۲$	$s_۳$	R.H.S
$s_۱$	۱	۰	۱	۰	۰	٤
$x_۲$	۰	۱	۰	$\frac{۱}{۲}$	۰	٦
$s_۳$	۳	۰	۰	-۱	۱	٦
z_j-c_j	-۳	۰	۰	$\frac{۵}{۲}$	۰	۳۰

اساس این تست بر این است که منبعی که زودتر تمام می‌شود (ضریب مصرف بیشتری در مقابل مقدار منبع دارد) به عنوان متغیر خارج شونده از پایه انتخاب شود. متغیرهای نظیر نقطه رأسی A در جدول دوم عبارتند از:

$s_۱ = ۴, s_۲ = , s_۳ = ۶$

$x_۱ = ۰, x_۲ = ۶$

$z = ۳۰$

نکته: تا زمانی که در سطر z_j-c_j عنصر منفی باشد (زمانی که تابع هدف max سازی است) هنوز امکان بهینه‌تر کردن تابع هدف وجود دارد لذا حل سیمپلکس ادامه دارد.

	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	R.H.S
s_1	۰	۰	۱	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	۲
x_2	۰	۱	۰	$\frac{1}{2}$	۰	٦
x_1	۱	۰	۰	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	۲
z_j-c_j	۰	۰	۰	$\frac{3}{2}$	۱	۳٦

در جدول بعدی x_1 متغیر وارد شونده و s_3 متغیر خارج شونده است.

جدول سوم معرف نقطه رأسی B است.

متغیرهای نظیر نقطه رأسی B در این حالت عبارتند از:

$$s_1 = 2, s_2 = 0, s_3 = 0$$
$$x_1 = 2 \quad x_2 = 6$$
$$z = 36$$

در این حالت چون در سطر zj-cj هیچ عنصر منفی وجود ندارد لذا جدول سیمپلکس به مقدار بهینه رسیده است یعنی نقطه B مقدار بهینه تابع هدف است.

چند نکته:

۱) مقدار تابع هدف در جداول سیمپلکس هیچ‌گاه بدتر نمی‌شود. (یا ثابت می‌ماند و یا بهتر می‌شود.) بدتر شدن تابع هدف به معنای انتخاب ناصحیح **متغیر وارد شونده** است.

۲) در جداول سیمپلکس مقادیر سمت راست هیچ‌گاه منفی نمی‌شوند. منفی شدن مقادیر سمت راست به معنای انتخاب ناصحیح **متغیر خارج شونده** است.

۳) همواره تعداد متغیرهای پایه‌ای برابر تعداد محدودیت‌ها است.

٤) در هر مرحله میزان تغییر تابع هدف عبارتست از: (ضریب سطر هدف متغیر وارد شونده) × (نتیجه تست متغیر وارد شونده) $- = \Delta Z$

٥) دو گوشه هنگامی مجاور هستند که تنها در یک متغیر پایه‌ای غیرمشترک باشند. روش سیمپلکس تنها روی گوشه‌های موجه مجاور حرکت می‌کند.

٦) در هر مرحله مقدار متغیر وارد شونده به پایه برابر است با مقدار نتیجه تست.

۷) روش سیمپلکس تنها مسائل با محدودیت‌های به فرم $Ax \le b$ را به آسانی حل خواهد کرد، یعنی وقتی متغیرهای کمکی با ضرایب مثبت باشند و برای سایر مسائل باید از روش‌های خاصی برای راه‌اندازی روش سیمپلکس استفاده کرد.

جبر روش سیمپلکس

مسأله برنامه‌ریزی خطی زیر را در نظر بگیرید.

$$\begin{aligned} \min \quad & z = cx \\ \text{s.t.} \quad & Ax = b \\ & x \ge 0 \end{aligned}$$

اگر ماتریس A به فرم A=(B,N) که در آن B ماتریس m×m معکوس‌پذیر و N ماتریس m×(n-m) و همچنین متغیرهای x به صورت x_N, x_B تجزیه شده باشند که x_B متغیرهای پایه ای و x_N متغیرهای غیرپایه‌ای نامیده می‌شوند.

$$Ax = b = (B, N)\begin{pmatrix} x_B \\ x_N \end{pmatrix} = b \qquad , \qquad Bx_B + Nx_N = b \to x_B = B^{-1}b - B^{-1}x_N N$$

از طرفی برای تابع هدف هم داریم:

$$Z=(c_B, c_N)\begin{pmatrix} x_B \\ x_N \end{pmatrix}=c_Bx_B+c_Nx_N$$

از روابط فوق نتیجتا داریم:

$$x_B=B^{-1}b-\sum_{j\in R} B^{-1}a_jx_j \qquad z=c_BB^{-1}b-\sum_{j\in R}\left(c_BB^{-1}a_j-c_j\right)x_j \quad \text{یا} \quad z=c_BB^{-1}b-\left(c_BB^{-1}N-c_N\right)x_N$$

(R مجموعه اندیس‌های متغیرهای غیر پایه‌ای)

مسأله برنامه‌ریزی خطی نتیجتا به فرم زیر بازنویسی می‌شود.

$$\begin{aligned} \min \quad & z+\left(c_BB^{-1}N-c_N\right)x_N=c_BB^{-1}b \\ \text{s.t.} \quad & x_B+B^{-1}x_N=B^{-1}b \\ & x_N, x_B \geq 0 \end{aligned}$$

تعبیر اجزای جدول سیمپلکس

	X_B	X_N	R.H.S
X_B	I	$B^{-1}N$	$B^{-1}b$
Z	O	$c_BB^{-1}N-c_N$	$c_BB^{-1}b$

	x_{B_1} … x_{B_r} … x_{B_m}	… x_j …	R.H.S
x_{B_1}		y_{1j}	$\bar{b}_1$
⋮		⋮	⋮
x_{B_r}	I	y_{ij}	$\bar{b}_r$
⋮		⋮	⋮
x_{B_m}		y_{mj}	$\bar{b}_m$
Z	O	$c_BB^{-1}a_j-c_j$	c_BBb

مثال: جدول زیر را در نظر بگیرید:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	R.H.S
x_3	۱	۰	۱	۰	۰	۴
x_2	۰	۱	۰	$\frac{۱}{۲}$	۰	۶
x_5	۳	۰	۰	−۱	۱	۶
z	−۳	۰	۰	$\frac{۵}{۲}$	۰	۳۰

در این مسأله برنامه‌ریزی خطی max سازی مقدار تابع هدف و عناصر پایه‌ای جدول بعدی کدام است؟

حل

$$x_B=B^{-1}b-\sum_{j\in R}B^{-1}a_jx_j=B^{-1}b-B^{-1}a_1x_1-B^{-1}a_4x_4$$

در این جدول با توجه به مقادیر سطر هدف، متغیر وارد شونده x_1 است لذا مقدار x_4 (عنصر غیرپایه‌ای) در جدول بعد همچنان ۰ خواهد بود

و مقدار x_1 عبارتست از نتیجه تست مینیمم یعنی $\frac{۶}{۳}=۲$ ، پس داریم:

$$x_B=\begin{pmatrix} ۴ \\ ۶ \\ ۴ \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} ۱ \\ ۰ \\ ۳ \end{pmatrix}\times ۲-\begin{pmatrix} ۰ \\ \frac{۱}{۲} \\ -۱ \end{pmatrix}\times ۰=\begin{pmatrix} ۲ \\ ۶ \\ ۰ \end{pmatrix}\begin{matrix} \leftarrow x_3 \\ \leftarrow x_2 \\ \leftarrow x_5 \end{matrix}$$

در نتیجه x_5 متغیر خارج شونده می‌باشد.

لذا در جدول بعد عناصر پایه‌ای عبارتند از: x_1,x_2,x_3

$$x_B=\begin{pmatrix}x_3\\x_2\\x_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\6\\2\end{pmatrix}$$

و برای تعیین میزان تابع هدف داریم:

$$Z_{new}=c_BB^{-1}b-\sum_{j\in R}\left(c_BB^{-1}a_j-c_j\right)x_j=30-(-3)\times 2-\left(\frac{5}{2}\right)\times 0=36$$

حالت‌های خاص حل روش سیمپلکس

۱) جواب بهنه منحصربه‌فرد متناهی

اگر به ازای تمام متغیرهای غیر پایه‌ای، در جدول بهینه $z_j-c_j\neq 0$ باشند آنگاه جواب بهینه منحصربه‌فرد برای مسأله وجود دارد.

۲) جواب بهینه چندگانه

هرگاه به ازای یک متغیر غیر پایه‌ای، در جدول بهینه $z_j-c_j=0$ آنگاه این متغیر برای رسیدن به جواب بهینه وارد پایه خواهد شد و در صورتی که نتیجه تست برای خروج متغیر پایه‌ای مخالف صفر باشد، آنگاه مسأله حتما جواب بهینه چندگانه خواهد داشت.

$$Z_{new}=Z_0-\overset{0}{\cancel{\left(z_k-c_k\right)}}x_k=z_0$$

۳) جواب بهینه نامتناهی

اگر در حل مسأله برنامه‌ریزی خطی به روش سیمپلکس متغیری شرط ورود به پایه را داشته باشد ولی به علت منفی یا صفر بودن عناصر ستون محوری متغیری را نتوان از پایه خارج نمود، مسأله دارای جواب بهینه نامتناهی است. زیرا متغیر وارد شونده می‌تواند مقدار مثبت اختیار کند و تابع هدف را بهبود دهد ولی متغیر خارج شونده یا متغیر مسدود کننده‌ای وجود ندارد که جلوی رشد آن را بگیرد، لذا متغیر وارد شونده می‌تواند تا بی‌نهایت بزرگ شود و تابع را بهبود دهد.

$$z_{new}=z_0-(z_k-c_k)x_k \qquad x_k\geq 0$$

با توجه به اینکه $x_k\geq 0$ است با دادن هر عددی به آن می‌توان مقداری برای تابع هدف پیدا کرد لذا جواب بهینه نامتناهی برای مسأله وجود دارد.

در این حالت جواب بهینه معادل است با یک شعاع به رأس جواب شدنی پایه جاری $\begin{pmatrix}B^{-1}b\\0\end{pmatrix}$ و جهت دور شونده d که

$$d=\begin{pmatrix}-y_k\\0\\\vdots\\1\\\vdots\\0\end{pmatrix}$$

اگر x_k متناظر با عنصر وارد شونده باشد، در سطر مربوط به آن عدد ۱ ظاهر خواهد شد.

نکته: با توجه به تعریف ارائه شده برای جهت دور شونده d داریم:

$$cd=\left(c_B,c_N\right)d=-c_By_k+c_k=-z_k+c_k$$

با توجه به اینکه $c_k-z_k<0$ در مسأله max سازی شرط ورود به پایه متغیر x_k است، مقدار cd>0 بوده که این خود شرط لازم و کافی نامتناهی بودن جواب است.

مثال: مسأله برنامه‌ریزی خطی min سازی با جدول سیمپلکس زیر را در نظر بگیرید.

	x_1	x_2	x_3	x_4	R.H.S
x_3	۱-	۰	۱	۲	۱۰
x_2	۱-	۱	۰	۱	۳
	٤	۰	۰	۳-	۹-

در این جدول x_1 شرط ورود به پایه را دارد ولی چون تمام عناصر ستون محوری مربوط به آن منفی هستند، مسأله جواب بهینه نامتناهی و در امتداد شعاع روبرو دارد. $\{(0,3,10,0)+x_1(1,1,1,0): x_1 \geq 0\}$

نکته: در ناتباهیدگی $\bar{b}_r > 0$ و بنابراین در صورت انجام تست $x_k = \frac{\bar{b}_r}{y_{rk}} > 0$ است یعنی مقدار تابع هدف در مرحله بعد (در مسأله min سازی) به اندازه $x_k(z_k - c_k) > 0$ بهبود می‌یابد، لذا تابع هدف در هر تکرار به طور اکید کاهش می‌یابد و جواب شدنی پایه در هر تکرار متمایز خواهد بود. بنابراین می‌توان اطمینان داشت در ناتباهیدگی (و با قبول شدنی بودن) روش سیمپلکس در تعداد متناهی تکرار با جواب شدنی پایه بهینه متناهی یا جواب بهینه نامتناهی توقف می‌کند.

نکته: طبق نکته قبل اگر مسأله برنامه‌ریزی خطی تباهیده نباشد، روش سیمپلکس حتما همگراست، اگر تباهیدگی داشته باشیم ممکن است سیمپلکس در یک حلقه نامتناهی گرفتار شود.

تعبیر اجزای جدول

	x_B	x_N	R.H.S
x_B	I	$B^{-1}N$	$B^{-1}b$
Z	O	$c_B B^{-1}N - c_N$	$c_B B^{-1}b$

برای محاسبه میزان تابع هدف داریم: $z = c_B B^{-1}b + \sum_{j \in R}(c_j - z_j)x_j$

در نتیجه داریم:

$$\frac{\text{میزان تغییر تابع هدف}}{\text{میزان تغییر (افزایش) یک واحد متغیر غیر پایه‌ای }(x_j)} = c_j - z_j \quad , \quad \frac{\text{میزان تغییر تابع هدف}}{\text{میزات تغییر (افزایش) یک واحد سمت راست محدودیت } i \text{ ام}} = (C_B B^{-1})_i$$

همچنین متغیرهای پایه‌ای را می‌توان برحسب متغیرهای غیرپایه‌ای بیان کرد:

$$x_B = B^{-1}b - \sum_{j \in R} y_j x_j$$

در نتیجه داریم:

(j،i) امین عنصر

$$\frac{\text{میزان تغییر متغیر پایه‌ای } x_{B_i}}{\text{میزان تغییر (افزایش) یک واحد متغیر غیر پایه‌ای }(x_j)} = -y_{ij} \quad , \quad \frac{\text{میزان تغییر متغیر پایه‌ای } x_{B_i}}{\text{میزان تغییر (افزایش) یک واحد سمت راست محدودیت } j \text{ ام}} = B^{-1}$$

نکته: اگر ضرایب هزینه متغیرهای کمکی صفر باشد آنگاه عناصر زیر متغیرهای کمکی در سطر هدف جدول سیمپلکس مقدار $c_B B^{-1}$ را به ما می‌دهد.

نکته: اگر در جدول آغازین سیمپلکس $B=I$ باشد، آنگاه B^{-1} جدول در هر مرحله، ماتریس سطرهای زیر متغیرهای پایه جدول آغازین می‌باشد.

مثال: مسأله min سازی با جدول زیر را در نظر بگیرید.

$$\begin{aligned} \min \quad & x_۱ + x_۲ - ۴x_۳ \\ s.t. \quad & x_۱ + x_۲ + ۲x_۳ \le ۹ \\ & x_۱ + x_۲ - x_۳ \le ۲ \\ & -x_۱ + x_۲ + x_۳ \le ۴ \\ & x_۱, x_۲, x_۳ \ge ۰ \end{aligned}$$

	$x_۱$	$x_۲$	$x_۳$	$x_۴$	$x_۵$	$x_۶$	R.H.S
$x_۴$	۳	−۱	۰	۱	۰	−۲	1
$x_۵$	۰	۲	۰	۰	۱	۱	٦
$x_۳$	−۱	۱	۱	۰	۰	۱	٤
	۳	−٥	۰	۰	۰	−٤	−۱٦

بر این اساس داریم:

$$\frac{\delta z}{\delta x_۱} = -۳ \qquad \frac{\delta z}{\delta x_۲} = ۵ \qquad \frac{\delta z}{\delta x_۶} = ۴$$

$$\frac{\delta x_۴}{\delta x_۱} = -۳ \qquad \frac{\delta x_۵}{\delta x_۱} = ۰ \qquad \frac{\delta x_۳}{\delta x_۶} = -۱$$

$$\frac{\delta x_B}{\delta x_۲} = \begin{pmatrix} ۱ \\ -۲ \\ -۱ \end{pmatrix} \qquad B^{-۱} = \begin{pmatrix} ۱ & ۰ & -۲ \\ ۰ & ۱ & ۱ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{pmatrix}$$

$$\frac{\delta z}{\delta b_۱} = ۰ \qquad \frac{\delta z}{\delta b_۲} = ۰ \qquad \frac{\delta z}{\delta b_۳} = -۴$$

$$\frac{\delta x_۵}{\delta b_۲} = ۱ \qquad \frac{\delta x_۴}{\delta b_۳} = -۲$$

متغیرهای مصنوعی

اگر در مسأله برنامه‌ریزی خطی بعد از تعریف متغیرهای کمکی، روش سیمپلکس را نتوان با یک جواب پایهٔ شدنی که B=I باشد شروع کرد، به مساله متیغرهای مصنوعی نسبت داده و سیمپلکس را شروع می‌کنیم. این متغیرهای مصنوعی، تنها جهت حصول جواب شدنی اولیه مساله اصلی هستند و لذا در نهایت باید صفر شوند.

۱) روش دو مرحله‌ای

در این حالت مساله در دو مرحله حل خواهد شد. در مرحله اول مساله با یک تابع هدف W که آن را min جمع متغیرهای مصنوعی می‌نامیم، حل می‌شود و بعد از اتمام آن (در صورت وجود جواب شدنی برای مسأله اصلی) مقادیر R_iها و مقدار تابع هدف w برابر صفر می‌شوند. در این حالت یک جواب شدنی پایه برای مسأله تعریف می‌شود.در مرحلهٔ دوم مسالهٔ اصلی با یک جواب شدنی پایه که در مرحلهٔ قبل پیدا شده است، آغاز می‌شود.

نکته: اگر در انتهای مرحلهٔ اول، در حالت بهینگی w، مقادیر متغیرهای مصنوعی صفر نشود مسأله اصلی جواب شدنی ندارد.

مثال:

$$\begin{aligned} \min \quad & x_۱ - ۲x_۲ \\ & x_۱ + x_۲ \geq ۲ \\ & -x_۱ + x_۲ \geq ۱ \\ & x_۲ \leq ۳ \\ & x_۱, x_۲ \geq ۰ \end{aligned}$$

حل در این مساله چون بعد از افزودن متغیرهای کمکی، جواب شدنی پایه آغازین با B= I برای مساله وجود ندارد، لذا متغیرهای مصنوعی $x_۶$ و $x_۷$ را نیز به مسأله می‌افزاییم. لذا مرحلهٔ اول با مسأله $\min \omega = x_۶ + x_۷$ آغاز می‌شود.

	$x_۱$	$x_۲$	$x_۳$	$x_۴$	$x_۵$	$x_۶$	$x_۷$	R.H.S
$x_۶$	۱	۱	−۱	۰	۰	۱	۰	۲
$x_۷$	−۱	۱	۰	−۱	۰	۰	۱	۱
$x_۵$	۰	۱	۰	۰	۱	۰	۰	۳
	۰	۰	۰	۰	−۱	−۱	۰	۰

ابتدا سطرهای اول و دوم را با سطر هدف جمع می‌کنیم تا مقادیر $Z_۶ - C_۶$ و $Z_۷ - C_۷$ هر دو صفر شوند. سپس مسأله را به فرم عادی سیمپلکس حل می‌کنیم.

	$x_۱$	$x_۲$	$x_۳$	$x_۴$	$x_۵$	$x_۶$	$x_۷$	R.H.S
$x_۶$	۱	۱	−۱	۰	۰	۱	۰	۲
$x_۷$	−۱	۱	۰	−۱	۰	۰	۱	۱
$x_۵$	۰	۱	۰	۰	۱	۰	۰	۳
	۰	۲	−۱	−۱	۰	۰	۰	۳

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	R.H.S
x_1	۱	۰	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	۰	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
x_2	۰	۱	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	۰	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$
x_5	۰	۰	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	۱	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$
	۰	۰	۰	۰	۰	-1	-1	۰

همانطور که مشاهده می‌شود در انتهای مرحلهٔ اول، یک جواب شدنی پایه به صورت $(x_1,x_2)=\left(\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right)$ برای مسأله اصلی پیدا شده است. لذا در مرحلهٔ دوم مسأله اصلی را با شروع از این نقطهٔ رأسی حل می‌کنیم.

این جدول، جدول آغازین مرحلهٔ دوم است. برای حل ابتدا جدول را یکه کرده (مقادیر Z_1-C_1 و Z_2-C_2 را صفر می‌کنیم) و سپس مساله را حل می‌کنیم.

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	R.H.S
x_1	۱	۰	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	۰	$\frac{1}{2}$
x_2	۰	۱	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	۰	$\frac{3}{2}$
x_5	۰	۰	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	۱	$\frac{3}{2}$
	-1	۲	۰	۰	۰	۰

در حل مساله به روش دو مرحله‌ای ممکن است با یکی از حالت‌های زیر مواجه شویم.

۱) در انتهای مرحله اول تمام متغیرهای مصنوعی خارج پایه باشند، در این حالت وارد مرحله دوم می‌شویم و مساله اصلی را حل می‌کنیم (مانند مثال فوق)

۲) در انتهای مرحله اول برخی از متغیرهای مصنوعی با مقدار غیر صفر داخل پایه باشند، در این حالت مساله اصلی نشدنی است.

۳) در انتهای مرحله اول برخی از متغیرهای مصنوعی با مقدار صفر داخل پایه باشند، در این حالت تباهیدگی برای مساله اتفاق می‌افتد. جدول سیمپلکس انتهای مرحله اول در این حالت در زیر نشان داده شده است.

	$\underbrace{x_1\cdots x_k}$ متغیرهای مجاز پایه	$\underbrace{x_{k+1}\cdots x_n}$ متغیرهای مجاز غیرپایه	$\underbrace{x_{n+1}\cdots x_{n+k}}$ متغیرهای مصنوعی غیرپایه	$\underbrace{L_{n+k+1}\cdots x_{n+m}}$ متغیرهای مصنوعی پایه	R.H.S
x_1 ⋮ x_k	I	R_1	R_3	O	$\bar{b}$
x_{n+k+1} ⋮ x_{n+m}	O	R_2	R_4	I	O

۱-۳: در صورتی که تمامی مؤلفه‌های R_2 ، بزرگتر یا مساوی صفر باشند، در صورتی که $x_j\ (j=k+1,\dots,n)$ شرط ورود به پایه را داشته باشد، با انجام آزمون مینیمم نسبت، متغیر مصنوعی $x_{n+i}\ (i=k+1,\dots,m)$ از پایه خارج شده و این عمل تا خروج کامل تمام متغیرهای مصنوعی از پایه ادامه می‌یابد. در این حالت ستون مربوط به متغیرهای مصنوعی از جدول حذف می‌شود و وارد مرحلهٔ دوم می‌شویم.

۲-۳: اگر حداقل یکی از مؤلفه‌های R_2، کوچکتر از صفر باشند با افزایش x_j، متغیر مصنوعی x_{n+r} استعداد مثبت شدن دارد لذا شرط شدنی بودن جدول به هم می‌خورد. در این حالت به جای استفاده از آزمون مینیمم نسبت، محورگیری را در $y_{ij} < 0$ انجام می‌دهیم و عنصر مربوط به آن x_{n+i} را از جدول حذف می‌کنیم. (لازم به ذکر است در این حالت با وجود منفی بودن y_{ij} شرط شدنی بودن جدول به هم نمی‌خورد چون سمت راست مربوط به آن صفر است)

۳-۳: اگر تمام مؤلفه‌های R_2، صفر باشند، هیچ یک از متغیرهای مصنوعی را نمی‌توان از پایه خارج کرد. در این حالت قیود مربوط به این متغیرهای مصنوعی زائد بوده‌اند، لذا آنها را کنار گذاشته و مستقیماً وارد مرحلهٔ دوم می‌شویم.

۲) روش M بزرگ

در این روش برای حذف متغیرهای مصنوعی، در تابع هدف مسأله اصلی ضرایبی به آنها اختصاص می‌دهیم بگونه‌ای که حضور آنها در پایه از نظر تابع هدف منطقی نباشد، در این حالت روش سیمپلکس به طور عادی سعی در حذف متغیرهای مصنوعی دارد.

مثال:

$$\begin{array}{lcl} \min z = x_1 - 2x_2 & & \min w = x_1 - 2x_2 + Mx_6 + Mx_7 \\ x_1 + x_2 \ge 2 & & x_1 + x_2 - x_3 + x_6 = 2 \\ -x_1 + x_2 \ge 1 & \longrightarrow & -x_1 + x_2 - x_4 + x_7 = 1 \\ x_2 \le 3 & & x_2 + x_5 = 3 \\ x_1, x_2 \ge 0 & & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7 \ge 0 \end{array}$$

همانطور که مشاهده می‌شود در روش M بزرگ تابع هدف به صورت فوق تغییر می‌یابد که در آن M یک عدد بسیار بزرگ مثبت است. حال از روش سیمپلکس برای حل استفاده می‌کنیم.

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	R.H.S
x_5	۱	۱	-۱	۰	۰	۱	۰	۲
x_6	-۱	۱	۰	-۱	۰	۰	۱	۱
x_7	۰	۱	۰	۰	۱	۰	۰	۳
	-۱	۲	۰	۰	۰	-M	-M	۰

جدول یکه شده مساله:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	R.H.S
x_5	۱	۱	-۱	۰	۰	۱	۰	۲
x_6	-۱	۱	۰	-۱	۰	۰	۱	۱
x_7	۰	۱	۰	۰	۱	۰	۰	۳
	-۱	۲+۲M	-M	-M	۰	۰	۰ ۰	۳M

ادامه حل به روش سیمپلکس تا رسیدن به حل بهینه ادامه می یابد.

آنالیز روش M بزرگ

مساله P:

$$\begin{array}{ll} \min & cx \\ s.t. & Ax = b \\ & x \ge 0 \end{array}$$

مساله P(M) :

$$\begin{array}{l} \min Cx + Mx_a \\ s.t. \quad Ax + x_a = b \\ \qquad x, x_a \ge 0 \end{array}$$

نکته: مساله P(M) حتماً شدنی است $(x = 0, x_a = b)$ و در حل آن همواره با دو حالت مواجه هستیم:

۱) $P(M)$ جواب بهینه متناهی دارد. (x^*, x_a^*)

الف) تمامی متغیرهای مصنوعی صفر هستند $(x_a^* = ۰)$ در این حالت x^* جواب بهینه مسأله اصلی است.

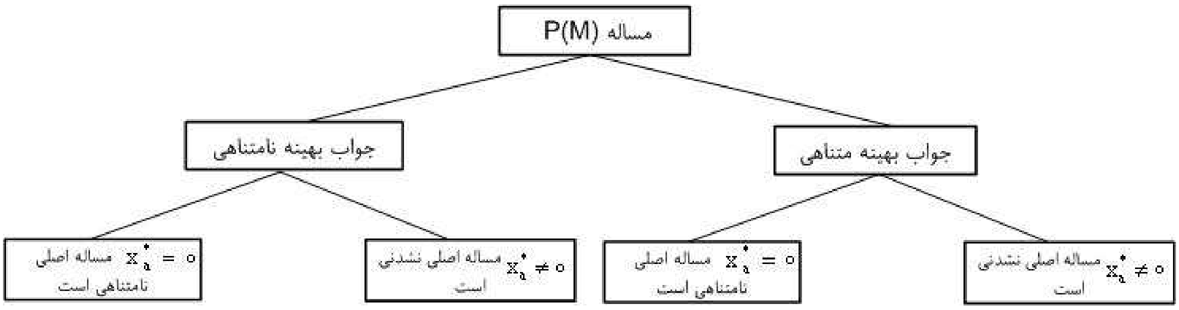
ب) تمام متغیرهای مصنوعی صفر نیستند $(x_a^* \neq ۰)$ در این حالت چون M یک عدد بسیار بزرگ است لذا جواب شدنی برای مسأله P وجود ندارد.

۲) $P(M)$ جواب بی‌کران دارد، یعنی $z_k - c_k = \max(z_j - c_j) > ۰$ و $y_k \leq ۰$ است.

الف) تمامی متغیرهای مصنوعی صفر هستند. در این حالت مسأله اصلی هم جواب بی‌کران دارد.

ب) تمامی متغیرهای مصنوعی صفر نیستند. در این حالت مسأله اصلی نشدنی است.

نکته: در صورتی که در جدول برخی از $۰ < z_j - c_j$ و $y_j \leq ۰$ باشند دیگر نمی‌توان در مورد مسأله اصلی اظهار نظر کرد نکات ارائه شده در فوق جهت آنالیز روش M بزرگ در شکل زیر خلاصه شده است.



انتخاب مقدار M

در صورتی که مسأله اصلی شدنی باشد، M می‌تواند آنقدر بزرگ اختیار شود که مقدار تابع هدف به ازای جواب شدنی پایه $P(M)$ با تمام متغیرهای مصنوعی مساوی صفر به طور اکید بهتر از مقدار تابع هدف آن به ازای بهترین جواب شدنی پایه $P(M)$ باشد وقتی که تمام متغیرهای مصنوعی صفر نیست.

$$\min \quad cx + Mx_a$$

$$\text{s.t.} \quad Ax + x_a = b$$

$$x, x_a \geq ۰$$

۱) جواب بهینه: $(x^*, ۰)$، مقدار تابع هدف: cx^*

۲) جواب بهینه $(x^*, x_a^* \neq ۰)$، مقدار تابه هدف $cx^{*\prime} + Mx_a^*$

$$cx^* < cx^{*\prime} + Mx_a^* \Rightarrow \frac{cx^* - cx^{*\prime}}{x_a^*} < M$$

روش تک متغیر مصنوعی

برای راه‌اندازی مساله تنها با استفاده از یک متغیر مصنوعی، ابتدا برای مساله یک ماتریس پایه B نه لزوماً شدنی در نظر می‌گیریم، سپس متغیر مصنوعی را با ضریب ۱− به هر محدودیت با $(\bar{b} = B^{-1}b)\bar{b}_i < ۰$ و با ضریب ۰ به هر محدودیت با $\bar{b}_i \geq ۰$ اضافه می‌کنیم. سپس محورگیری را با سطر r ام مربوط به حداقل $\bar{b}_i$ ها $(\bar{b}_i < ۰)$ انجام می‌دهیم. جدول در این حالت برای به کارگیری روش دو مرحله یا M بزرگ آماده است و با انتخاب یکی از این روش‌ها مسأله را حل می‌کنیم.

*****

دور افتادگی

اگر مساله تباهیده نباشد در تعداد متناهی تکرار به حل بهینه می‌رسیم اما در صورت وجود تباهیدگی ممکن است در یک دور گرفتار شده و تباهیدگی رفع نشود. در این حالت از دو قاعده می‌توان برای ممانعت از دور افتادگی استفاده کنیم.

۱) قاعده الفبایی (Lexicography)

نکته: اگر تست min نسبت در بیش از یک مکان اتفاق بیفتد جدول بعدی حتماً تبهگن است. قاعده الفبایی وقتی به کار می‌رود که تست min نسبت یکتا نباشد.

در حالتی که تست min نسبت یکتا نباشد، عناصر سمت راست که نتیجه تست min نسبت آنها یکی است را با اولین ستون B^{-1} تعویض و دوباره تست min را انجام می‌دهیم. در صورتی که باز هم نتیجهٔ تست یکتا نشده، این کار را برای دومین ستون B^{-1} و ... انجام می‌دهیم. نهایتاً در تعویض سمت راست با m ستون ماتریس B^{-1} به تست min یکتا خواهیم رسید. زیرا در غیر این صورت حتماً دو سطر ماتریس B^{-1} به هم وابسته بوده‌اند.

تذکر: شایان ذکر است در استفاده از این روش فرض شده است که سیمپلکس با یک ماتریس پایه اولیه $B=I$ (نظیر با متغیرهای کمکی و یا مصنوعی) آغاز شده است لذا B^{-1} جدول همواره ستون‌های زیر متغیرهایی است که ماتریس پایهٔ اولیه $B=I$ را به ما می‌دهند.

۲) قاعده بلاند (Beland)

برای استفاده از این روش ابتدا کلیه متغیرهای مساله را مرتب می‌کنیم $x_1,\ldots,x_n$، سپس از میان متغیرهایی که شرط ورود به پایه را دارند متغیری که کوچکترین اندیس را دارد را انتخاب می‌کنیم تا وارد پایه شود. سپس در ستون مربوطه به متغیر ورودی متغیری را که شرط خروج از پایه را دارد و کوچکترین اندیس را نیز دارا است را از پایه خارج می‌کنیم. این قاعده تضمین می‌کند پس از محورگیری به این روش جدول بعدی حتماً ناتباهیده است و در تعداد تکرار متناهی به جواب بهینه خواهیم رسید.

مثال: مساله min سازی با جدول آغازین زیر را در نظر بگیرید:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	R.H.S
x_5	۱	۰	۰	$\frac{1}{4}$	-8	-1	۹	۰
x_6	۰	۱	۰	$\frac{1}{2}$	-12	$-\frac{1}{2}$	۳	۰
x_7	۰	۰	۱	۰	۰	۰	۰	۱
	۰	۰	۰	$\frac{3}{4}$	-20	$\frac{1}{2}$	-6	۰

✓ طبق قاعدهٔ الفبایی متغیر وارد شونده x_4 و متغیر خارج شونده x_2 است.

✓ طبق قاعدهٔ بلاند متغیر وارد شونده x_4 و متغیر خارج شونده x_2 است.

******

دوگان

برای هر مسأله برنامه‌ریزی خطی مساله دیگری به نام دوگان وجود دارد که این مساله منحصر به فرد است. فرمول‌بندی مساله دوگان به صورت زیر انجام می‌شود.

$$\begin{array}{llll} P:\min & cx & D:\max & wb \\ \text{s.t.} & Ax\geq b & \text{s.t.} & wA\leq C \\ & x\geq 0 & & w\geq 0 \end{array}$$

در فرمول‌بندی دوگان دقیقاً یک متغیر دوگان برای هر محدودیت اولیه و دقیقاً یک محدودیت دوگان برای هر متغیر اولیه وجود دارد.

مثال:

$$\begin{array}{llll} P:\min & ۶x_۱+۸x_۲ & D:\max & ۴w_۱+۷w_۲ \\ s.t. & ۳x_۱+x_۲\geq ۴ & s.t. & ۳w_۱+۵w_۲\leq ۶ \\ & ۵x_۱+۲x_۲\geq ۷ & & w_۱+۲w_۲\leq ۸ \\ & x_۱,x_۲\geq ۰ & & w_۱,w_۲\geq ۰ \end{array}$$

روابط بین مسأله اصلی و دوگان به صورت زیر تعریف می‌شود.

	مساله اصلی (یا دوگان)		مساله دوگان (یا اصلی)	
	تابع هدف به صورت Max	$\longleftrightarrow$	تابع هدف به صورت Min	
	ضرایب تابع هدف	$\longleftrightarrow$	سمت راست	
	سمت راست	$\longleftrightarrow$	ضرایب تابع هدف	
	تعداد محدودیتها	$\longleftrightarrow$	تعداد متغیرها	
	تعداد متغیرها	$\longleftrightarrow$	تعداد محدودیتها	
محدودیت ها	محدودیت iام به صورت $\leq$	$\longleftrightarrow$	متغیر iام به صورت ≥ ۰	**متغیرها**
	محدودیت iام به صورت =	$\longleftrightarrow$	متغیر iام به صورت آزاد	
	محدودیت iام به صورت $\geq$	$\longleftrightarrow$	متغیر iام به صورت ≤ ۰	
متغیرها	متغیر iام به صورت ≥ ۰	$\longleftrightarrow$	محدودیت iام به صورت $\leq$	**محدودیت ها**
	متغیر iام به صورت آزاد	$\longleftrightarrow$	محدودیت iام به صورت =	
	متغیر iام به صورت ≤ ۰	$\longleftrightarrow$	محدودیت iام به صورت $\geq$	

مثال:

$$\begin{array}{llll} P:\min\ z=۵x_۱+۷x_۲+۹x_۳ & & D:\max & z=۲w_۱+۳w_۳ \\ s.t. & ۲x_۱-x_۲\leq ۲ & s.t. & ۲w_۱+۴w_۲\geq ۵ \\ & ۴x_۱+۳x_۲-۲x_۳\geq ۰ & & -w_۱+۳w_۲\leq ۷ \\ & ۵x_۲-x_۳=۳ & & -۲w_۲-w_۳=۹ \\ & x_۱\leq ۰, x_۲\geq ۰, x_۳\ \text{آزاد} & & x_۱\leq ۰, x_۲\geq ۰, x_۳\ \text{آزاد} \end{array}$$

نکته: دوگان هر مساله دوگان خود مساله اصلی را به ما می‌دهد.

نکته: **ارتباط مقادیر تابع هدف مساله اصلی و دوگان:** مساله اصلی از یک جواب پایه‌ای شدنی شروع می‌کند و به جواب بهینه می‌رسد، در حالیکه مساله دوگان از یک جواب پایه ای نشدنی شروع می کند و به جواب بهینه می رسد، لذا بین توابع هدف این دو مساله رابطه زیر برقرار است:

$$\sum_{i=۱}^{n} c_j x_j \geq \sum_{i=۱}^{n} b_i w_i \qquad \text{(وقتی تابع هدف مساله اصلی min سازی باشد)}$$

که در بهینگی این دو مقدار با هم برابرند.

همگن دوگان

$$\begin{array}{llll} P: \min & cx & HD: \max & wb \\ & Ax \geq b & & wA \leq 0 \\ & x \geq 0 & & w \geq 0 \end{array}$$

نکته: جواب‌های غیر صفر مساله همگن دوگان، جهت‌های دور شونده مساله دوگان را می‌دهد.

نکته: دوگان مساله HD (همگن دوگان) ناحیه شدنی مساله P است. پس مساله اصلی نشدنی است اگر و فقط اگر همگن دوگان آن جواب بی‌کران داشته باشد.

ارتباط حالت‌های خاص در مساله اصلی و دوگان

مساله اصلی		مساله دوگان
جواب بهینه متناهی	$\leftrightarrow$	جواب بهینه متناهی
جواب بهینه نامتناهی	$\rightarrow$	نشدنی
نشدنی	$\rightarrow$	نشدنی
		جواب بهینه نامتناهی
جواب بهینه چندگانه	$\rightarrow$	جواب بهینه تباهیده
جواب بهینه تباهیده	? $\rightarrow$	جواب بهینه چندگانه

نکته: طبق جدول بالا اگر مساله اصلی و دوگان هر دو شدنی باشند حتماً هر دو جواب بهینه متناهی با مقدار یکسان دارند.

شرایط بهینگی k.k.T

بر اساس این شرایط x^* یک نقطه بهینه برای مساله $Ax \geq b, x \geq 0$ و $\min cx$ است اگر و فقط اگر شرایط زیر برقرار باشد:

۱) x^* برای مساله شدنی باشد یعنی $Ax \geq b, x \geq 0$

۲) برای مساله دوگان w^* شدنی وجود داشته باشد. $w^* b \leq c, w^* \geq 0$

۳) داشته باشیم $w^*(Ax^* - b) = 0$ و $x^*(c - w^* A) = 0$ یا به عبارت دیگر $w^* b = cx^*$

شرایط مکمل زائد

اگر x^* و w^* جواب‌های شدنی دلخواه مسائل اولیه و دوگان در شکل متعارفی باشند، بهینه هستند اگر و فقط اگر

$j = 1, \dots, n$ $(c_j - w^* a_j) x^* = 0$ یا $u^* x^* = 0$ (u ماتریس متغیرهای کمکی مساله دوگان)

$i = 1, \dots, m$ $w^*(a^i x^* - b_i) = 0$ یا $v^* w^* = 0$ (v ماتریس متغیرهای کمکی مساله اولیه)

مثال:

$$\begin{array}{lll} P: \min & 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 2x_4 + 3x_5 \\ s.t. & x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 + 3x_5 \geq 4 \\ & 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 + x_4 + x_5 \geq 3 \\ & x_j \geq 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} D: \max & 4w_1 + 3w_2 \\ s.t. & w_1 + 2w_2 \leq 2 \\ & w_1 - 2w_2 \leq 3 \\ & 2w_1 + 3w_2 \leq 5 \\ & w_1 + w_2 \leq 2 \\ & 3w_1 + w_2 \leq 3 \\ & w_i \geq 0 \end{array}$$

از طریق حل ترسیمی مساله دوگان می‌توان جواب بهینه را پیدا کرد: $Z_D^* = ۵ , w_۲^* = \frac{۳}{۵} , w_۱^* = \frac{۴}{۵}$. با قرار دادن مقدار بهینه مساله دوگان در محدودیت‌ها، مشخص می‌شود که تنها محدودیت ۱ و ۵ فعال هستند.

نکته: محدودیت فعال محدودیتی است که نقطه بهینه روی آن قرار دارد.

بنابراین در مساله اصلی $x_۱^*$ و $x_۵^*$ متغیرهای پایه‌ای و بقیه متغیرها غیر پایه‌ای با مقدار صفر هستند $(x_۲^* = x_۳^* = x_۴^* = ۰)$ و چون مقادیر $w_۱^*$ و $w_۵^*$ هر دو مخالف صفر هستند لذا محدودیت‌های مساله اصلی هر دو فعال هستند و می‌توان مقادیر $x_۱^*$ و $x_۵^*$ را از روی آنها محاسبه کرد $x_۱^* + ۳x_۵^* = ۴$ و $۲x_۱^* + x_۵^* = ۳$. نتیجتاً $x_۱^* = ۱$ و $x_۵^* = ۱$.

بهینگی اولیه ← شدنی بودن دوگان

اگر مسأله اصلی به فرم مساله min سازی در شکل متعارفی باشد، در بهینگی وقتی به ازای تمام jها، $z_j - c_j \le ۰$ شد آنگاه متغیر دوگان متناظر با آن $(w^* = c_B B^{-۱})$ شدنی می‌شود. در این حالت مقدار تابع هدف مسألهٔ اصلی و دوگان از رابطهٔ $C_B B^{-۱} b = w^* b$ قابل محاسبه است.

روش سیمپلکس دوگان

در صورتی که مساله برنامه‌ریزی خطی به فرم زیر باشد، یافتن جواب بدون استفاده از متغیرهای مصنوعی بسیار مشکل است.

$$\begin{aligned} \min \quad & cx \\ \text{s.t.} \quad & Ax \ge b \\ & x \ge ۰ \end{aligned}$$

در این حال می‌توان از روش سیمپلکس دوگان استفاده کرد. این روش از یک جواب پایه‌ای نا موجه در حالت بهینگی شروع می‌کند و با حفظ بهینگی جدول در صورت وجود به یک پایه موجه می‌رسد.

در این روش از ستون سمت راست برای خروج متغیر استفاده می‌کنیم. از میان $\bar{b}$ها سطر محوری را از رابطهٔ $\bar{b}_r = \min\{\bar{b}_i , \bar{b}_i < ۰\}$ انتخاب می‌کنیم. همچنین ستون محوری را نیز از رابطهٔ زیر به دست می‌آوریم: $\min\left\{\frac{z_j - c_j}{y_{rj}} : y_{rj} < ۰\right\}$

با انتخاب ستون محوری، دوگان موجه باقی می‌ماند و ضمن حفظ بهینگی مقدار تابع هدف بهتر نمی‌شود.

– اگر در جریان کار $\bar{b}_i \ge ۰$ $(i = ۱,...,m)$ در این صورت جواب فعلی بهینه است.

– اگر برای سطری مانند r $\bar{b}_r < ۰$, $y_{rj} \ge ۰$ $(j = ۱,..,n)$ در این صورت مساله اولیه ناموجد و دوگان دارای جواب نامتناهی است.

نکته: اگر مساله به فرم max سازی باشد برای یافتن ستون محوری از رابطهٔ زیر استفاده می‌شود. $\min\left\{\left|\frac{z_j - c_j}{y_{rj}}\right| : y_{rj} < ۰\right\}$

تحلیل حساسیت

تغییر در بردار هزینه

۱) حالت اول: تغییر ضریب تابع هدف یک متغیر غیر پایه‌ای $(C_k \to C'_k)$

اگر ضریب تابع هدف یک متغیر غیر پایه‌ای تغییر کند تنها روی z_j-c_j خودش تأثیر می‌گذارد. در این حالت کافی است مقدار جدید $(z_j - c'_j)$ را محاسبه کنیم. اگر جدول در شرایط جدید بهینه باشد روی مسأله ثأثیری نمی‌گذارد، ولی اگر جدول جدید شرط بهینگی را نداشته باشد و متغیر مذکور در شرایط جدید بتواند وارد پایه شود، مراحل سیمپلکس را تا رسیدن به جواب بهینه انجام می‌دهیم.

۲) حالت دوم: تغییر ضریب تابع هدف یک تغییر پایه‌ای $(C_B \to C'_B)$

در این حالت میزان تابع هدف به $Z' = c'_B B^{-۱} b$ متغیر می‌کند همچنین z_j-c_j متغیرهای پایه‌ای همچنان صفر باقی می‌مانند ولی در مورد متغیرهای غیر پایه‌ای عبارت به $Z'_j - C_j = C'_B B^{-۱} a_j - c_j$ تغییر می‌کند.

در این حالت باز عبارت جدید محاسبه می‌شود و تست بهینگی همانند حالت اول انجام می‌گیرد.

مثال:

$$\begin{array}{ll} \min & -۲x_۱ + x_۲ - x_۳ \\ \text{s.t} & x_۱ + x_۲ + x_۳ \le ۶ \\ & -x_۱ + ۲x_۲ \le ۴ \\ & x_۱, x_۲, x_۳ \ge ۰ \end{array}$$

	$x_۱$	$x_۲$	$x_۳$	$x_۴$	$x_۵$	R.H.S
$x_۱$	۱	۱	۱	۱	۰	۶
$x_۵$	۰	۳	۱	۱	۱	۱۰
	۰	−۳	−۱	−۲	۰	−۱۲

۱) $C_۲ \to -۳$

چون x_2 غیر پایه‌ای است تنها سطر هزینه مربوط به متغیر x_2 تغییر می‌کند: $z_۲ - c'_۲ = (z_۲ - c_۲) + (c_۲ - c'_۲) = -۳ + ۴ = ۱$

چون x_2 شرط ورود به پایه را دارد، وارد پایه شده و روش سیمپلکس تا رسیدن به جواب بهینه ادامه می‌یابد.

۲) $C_۱ \to ۰$

در این حالت سطر هزینه مربوط به x_1 همان صفر باقی می‌ماند ولی چون ماتریس C_B تغییر یافته است، سطر هزینه کلیه متغیرهای غیر پایه‌ای تغییر می‌کند:

$$z_۲ - c_۲ = C'_B B^{-۱} a_۲ - c_۲ = (۰,۰) B^{-۱} a_۲ - (۱) = -۱$$
$$z_۳ - c_۳ = C'_B B^{-۱} a_۳ - c_۳ = (۰,۰) B^{-۱} a_۳ - (-۱) = ۱$$
$$z_۴ - c_۴ = C'_B B^{-۱} a_۴ - c_۴ = (۰,۰) B^{-۱} a_۴ - ۰ = ۰$$
$$z' = C'_B B^{-۱} b = (۰,۰) B^{-۱} b = ۰$$

در جدول بعد x_3 وارد پایه شده و جدول سیمپلکس تا رسیدن به جواب بهینه ادامه می‌یابد.

تغییر در سمت راست $(b \to b')$

در این حالت عبارت سمت راست از $B^{-۱}b$ به $B^{-۱}b'$ تغییر می‌کند لذا ممکن است شدنی بودن مسأله تحت اشعاع قرار گیرد به همین جهت $B^{-۱}b'$ جدید را محاسبه می‌کنیم در صورتی که $B^{-۱}b' \ge ۰$ باشد جدول بهینه است و گرنه از روش سیمپلکس دوگان مسأله را حل

می‌کنیم تا به جواب بهینه برسیم.

تغییر در ماتریس محدودیت‌ها

حالت اول: تغییرات در ستون‌های متغیرهای غیر پایه‌ای $\left(a_k \to a'_k\right)$

در این حالت تنها سطر هدف مربوط به متغیر غیر پایه‌ای عوض می‌شود. که باید آنرا $\left(z_i - c'_j = c_B B^{-1} a'_i - c_k\right)$ محاسبه کرد و شرط بهینگی جدول را تست نمود. اگر جدول بهینه باشد کار تمام است و تغییری روی آن داده نمی‌شود، اما اگر جدول بهینه نباشد، با ورود متغیر x_k روش سیمپلکس تا رسیدن به جواب بهینه دنبال می‌شود.

حالت دوم: تغییرات در ستون‌های متغیرهای پایه‌ای $\left(a_k \to a'_k\right)$

در این حالت هم شرط بهینگی و هم شرط شدنی بودن به هم می‌خورد چون ماتریس پایه (B) تغییر می‌کند و ممکن است ماتریس جدید دیگر پایه نباشد. در این حالت فرض می‌کنیم فعالیت جدید x'_j با ستون a'_j و ضرایب تابع هدف c_j به مسأله اضافه شده است که این ستون جدید را وارد جدول می‌کنیم. در این حالت ستون مربوط به متغیر x_j را با استفاده از ماتریس B جدید و a'_j محاسبه می‌کنیم $\left(y'_j = B^{-1} a'_j, z'_j - c_j = c_B B^{-1} a'_j - c_j\right)$ در صورتی که y'_{jj} متناظر با ستون x'_j و سطر x_j صفر نباشد، x_j را از جدول حذف و x'_j را به جای آن در جدول قرار می‌دهیم و نیز ستون مربوط به x_j را نیز از جدول حذف می‌کنیم. اما اگر y'_{jj} صفر باشد دیگر نمی‌توان عمل جایگزینی را انجام داد، در این حالت با x_j به عنوان یک متغیر مصنوعی که نباید در پایه باشد عمل می‌کنیم و ضریب تابع هدف آنرا، اگر مسأله min سازی باشد M+ و اگر max سازی باشد M- قرار داده (M یک عدد بسیار بزرگ) و مسأله را حل می‌کنیم.

افزون یک متغیر جدید (x_{n+1})

در این حالت را محاسبه می‌کنیم، در صورتی که جدول در شرایط جدید، شرط بهینگی را داشته باشد، بهینه جواب قبلی است و تولید متغیر جدید به صرفه نمی‌باشد، اما اگر، جدول شرط بهینگی را نداشته باشد، متغیر x_{n+1} وارد پایه شده و روش سیمپلکس تا رسیدن به جواب بهینه ادامه می‌یابد.

حذف یک متغیر

الف) متغیر حذف شده غیر پایه‌ای باشد: حذف یک متغیر غیرپایه‌ای تأثیری روی مسأله ندارد چون مقدارش صفر است.

ب) متغیر حذف شده پایه‌ای باشد: در صورتی که یک متغیر پایه‌ای حذف شود آنرا ابتدا از پایه خارج می‌کنیم و سپس به عنوان یک متغیر غیر پایه‌ای آنرا حذف می‌کنیم (چون مقدار متغیر غیر پایه‌ای صفر است حذف آن تأثیری روی مسأله ندارد.)

افزودن یک محدودیت جدید

در این حالت نقطه بهینه را در محدودیت جدید قرار می‌دهیم اگر صدق کرد محدودیت جدید بی‌تأثیر است و اگر صدق نکرد با استفاده از روش سیمپلکس دوگان مسأله را حل می‌کنیم.

مثال: جدول سیمپلکس بهینه زیر را در نظر بگیرید. در صورتی که محدودیت جدید $-x_1 + ۳x_2 \geq ۲$ به مسأله اضافه شود جواب بهینه چه تغییری می‌کند.

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	R.H.S
x_1	۱	۱	۱	۱	۰	۰	٦
x_5	۰	۳	۱	۱	۱	۰	۱۰
x_6	۱	۰	−۳	۰	۰	۱	−۲
	۰	−۳	−۱	−۲	۰	۰	−۱۲

حل: چون جواب بهینه $(x_1, x_2, x_3) = (۶,۰,۰)$ در محدودیت صدق نمی‌کند و چون محدودیت به صورت بزرگتر مساوی است با

ضرب یک منفی در طرفین محدودیت آن را به جدول بالا اضافه می‌نمائیم و سپس جدول را یکه می‌کنیم و چون طرف راست همچنان منفی است از روش سیمپلکس دوگان برای رسیدن به جواب بهینه استفاده می‌کنیم.

حذف محدودیت

در صورتی که محدودیتی فعال نباشد (نقطه بهینه در آن صدق نکند) یا به عبارت دیگر متغیر کمکی نظیر آن صفر نباشد اگر حذف شود تأثیری در جواب بهینه نخواهد داشت. اما اگر متغیر کمکی نظیر آن در پایه نباشد یا به عبارت دیگر محدودیت فعال باشد اگر حذف شود در بهینگی مسأله ایجاد اختلال می‌کند. در این حالت باید متغیر کمکی نظیر آن محدودیت را وارد پایه کرد و بعد از حذف آن محدودیت روش سیمپلکس را ادامه داده و به جواب بهینه رسید. در این حالت چون متغیر کمکی در پایه است و مقدار آن مخالف صفر است محدودیت نظیر آن می‌تواند حذف شود.

****

برنامه‌ریزی عدد صحیح

در صورتی که قید صحیح بودن برای متغیرها وجود داشته باشد، ابتدا مسأله را بدون در نظر گرفتن این قید حل می‌کنیم، اگر پس از حل مقدار متغیرها صحیح بود جواب، بهینه است و گرنه از یک محدودیت جدید استفاده می‌کنیم که این محدودیت جواب برنامه‌ریزی فعلی غیر صحیح بهینه جاری را برش می‌دهد تا به یک جواب جدید صحیح در مسأله برسیم. محدودیت جدیدتضمین می‌کند که هیچ نقطه بهینه صحیحی را از مسأله حذف نکند. این کار آنقدر ادامه می‌یابد تا در صورت شدنی بودن مسأله اصلی به جواب بهینه صحیح برسیم.

تحلیل پارامتری

آشفتگی در بردار هزینه: در برنامه‌ریزی پارامتری ضرایب تابع هدف مدل کلی به صورت زیر است:

$$\begin{aligned} \max \ \text{or} \ \min \quad & z(\lambda)=\left(c+\lambda c'\right)x \\ \text{s.t} \quad & Ax \le b \\ & x \ge 0 \end{aligned}$$

اگر بردار هزینه c در طول جهت هزینه c' آشفته شود یعنی c با $c+\lambda c'$ عوض شود که در آن $\lambda \ge 0$ است آنگاه الگوریتم یافتن جواب‌های بهینه و مقادیر تابع هدف به صورت تابعی از λ به صورت زیرخواهد بود (برای مسأله max سازی)

۱) مسأله را ابتدا با $\lambda=0$ حل می‌کنیم و جواب بهینه را به دست می‌آوریم.

۲) با استفاده از تحلیل حساسیت تغییرات ضرایب تابع هدف را محاسبه می‌کنیم و در جدول می‌نویسم.

۳) مقدار λ را آنقدر افزایش می‌دهیم تا ضریب یکی از متغیرهای غیر پایه‌ای در سطر هزینه منفی شود (λ تا حداکثر مقدار مجاز تعیین شده افزایش می‌دهیم) اگر چنین متغیری وجود نداشته باشد به جواب بهینه رسیده‌ایم.

٤) متغیری را که ضریب آن منفی شده به عنوان متغیر وارد شونده انتخاب و جواب جدید را محاسبه می‌کنیم و به قدم ۳ می‌رویم.

مثال:

$$\begin{aligned} \min \quad & z=-x_1-3x_2 \\ \text{s.t} \quad & x_1+x_2 \le 6 \\ & -x_1+x_2 \le 6 \\ & x \ge 0 \end{aligned} \qquad C=\left(-1+2\lambda,-3+\lambda\right)$$

	x_1	x_2	s_1	s_2	R.H.S
x_1	۱	۰	$\frac{۲}{۳}$	$-\frac{۱}{۳}$	۲
x_2	۰	۱	$\frac{۱}{۳}$	$\frac{۱}{۳}$	٤
	۰	۰	$-\frac{۵}{۳}+\lambda\times\frac{۵}{۳}$	$-\frac{۲}{۳}-\frac{\lambda}{۳}$	$-۱۴+۸\lambda$

$$z_j-c_j=c_BB^{-۱}a_j-c_j$$

$$z_۳-c_۳=(-۱,-۳)\begin{pmatrix}\frac{۲}{۳} & \frac{-۱}{۳}\\ \frac{۱}{۳} & \frac{۱}{۳}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}۱\\ ۰\end{pmatrix}-۰=\frac{-۵}{۳}$$

$$z_۴-c_۴=(-۱,-۳)\begin{pmatrix}\frac{۲}{۳} & \frac{-۱}{۳}\\ \frac{۱}{۳} & \frac{۱}{۳}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}۱\\ ۰\end{pmatrix}-۰=\frac{-۲}{۳}$$

$$z'_۳-c'_۳=(۲,۱)\begin{pmatrix}\frac{۲}{۳} & \frac{-۱}{۳}\\ \frac{۱}{۳} & \frac{۱}{۳}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}۱\\ ۰\end{pmatrix}-۰=\frac{۵}{۳}$$

$$z'_۴-c'_۴=(۲,۱)\begin{pmatrix}\frac{۲}{۳} & \frac{-۱}{۳}\\ \frac{۱}{۳} & \frac{۱}{۳}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}۱\\ ۰\end{pmatrix}-۰=\frac{-۱}{۳}$$

مسأله min سازی $\rightarrow\begin{cases}-\frac{۵}{۳}+\lambda\times\frac{۵}{۳}\le ۰\Rightarrow\lambda\le ۱ \quad \text{I}\\ -\frac{۲}{۳}-\frac{\lambda}{۳}\le ۰\;\Rightarrow\;\lambda\ge-\frac{۲}{۳}\quad \text{II}\end{cases}$ $\quad \text{I}\,\&\,\text{II}\Rightarrow\lambda\in[۰,۱]$

به ازای $\lambda=۱$ متغیر S_1 شرط ورود به پایه را دارد لذا وارد می‌شود و جدول جدید به صورت مقابل در می‌آید:

	x_1	x_2	s_1	s_2	R.H.S
S_1	$\frac{۳}{۲}$	۰	۱	$-\frac{۱}{۲}$	۳
x_2	$-\frac{۱}{۲}$	۱	۰	$\frac{۱}{۲}$	۳
	۰	۰	۰	-۱	-٦

حال در بازه $[۱,\lambda]$، مجددا جدول بهینه را تشکیل می‌دهیم و λ را طوری پیدا می‌کنیم که حداکثر مقدار مجاز باشد تا جـدول همچنـان بهینـه بماند.

	x_1	x_2	s_1	s_2	R.H.S
s_1	$\frac{۳}{۲}$	۰	۱	$-\frac{۱}{۲}$	۳
x_2	$-\frac{۱}{۲}$	۱	۰	$\frac{۱}{۲}$	۳
	$\frac{۵}{۲}-\frac{۵}{۳}\lambda$	۰	۰	$+\frac{۳}{۲}+\frac{\lambda}{۲}$	$-۹+۳\lambda$

$$\frac{۵}{۲}-\frac{۵}{۲}\lambda\le ۰\Rightarrow\lambda\ge ۱\ \text{I}$$

$$\frac{-۳}{۲}+\frac{\lambda}{۲}\le ۰\Rightarrow\lambda\le ۳\ \text{II}$$

$$\text{I},\text{II}\Rightarrow\lambda\in[۱,۳]$$

جدول بهینه بعد از ورود S_2 و خروج x_2:

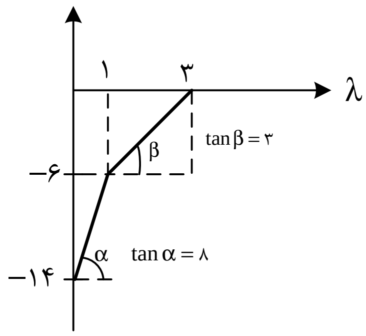
	x_1	x_2	s_1	s_2	R.H.S
s_1	۱	۱	۱	۰	٦
s_2	-۱	۲	۰	1	٦
	-۵	۰	۰	۰	۰

$$z'_۱-c'_۱=-۲$$

$$z'_۲-c'_۲=-۱$$

چون هر دو عبارت منفی هستند لذا به ازای تمام $\lambda\ge ۳$ جدول بهینه خواهد شد.

نمودار تابع هدف بر حسب مقادیر λ در شکل زیر نشان داده شده است:



نکته: در مسأله min سازی اگر ضرایب تابع هدف در جهت بردار C' آشفته شوند، تابع هدف برحسب λ تکه ای خطی و مقعر خواهد بود.

نکته: در مسأله mix سازی اگر ضرایب تابع هدف در جهت بردار C' آشفته شوند، تابع هدف برحسب λ تکه ای خطی و محدب خواهد بود.

نکته: به ازای حدهای بالا و پایین λ (نقاط شکست تابع هدف برحسب λ) مسأله جواب بهینه چندگانه دارد.

آشفتگی سمت راست: در برنامه‌ریزی پارامتری سمت راست، مدل کلی به صورت زیر است:

$$\begin{aligned} &\min \text{ یا } \max \quad z=cx \\ &\text{s.t.} \quad Ax \le b+\lambda b' \\ &\qquad\quad x \ge 0 \end{aligned}$$

اگر سمت راست به صورت $b+\lambda b'$ تغییر کند که در آن $\lambda \ge 0$ آنگاه از الگوریتم زیر برای یافتن جواب بهینه و مقادیر تابع هدف به صورت تابعی برحسب λ استفاده می‌کنیم.

۱) مسأله را ابتدا با $\lambda = 0$ حل می‌کنیم و جواب بهینه را به دست می‌آوریم.

۲) با استفاده از تحلیل حساسیت اثر تغییرات در سمت راست محدودیت‌ها را محاسبه می‌کنیم.

۳) مقدار λ را آنقدر افزایش می‌دهیم تا مقدار یکی از متغیرهای اساسی منفی شود (حداکثر مقدار مجاز برای افزایش λ)، چنانچه چنین متغیری یافت نشود به جواب بهینه رسیده‌ایم.

٤) متغیر منفی به عنوان متغیر خروجی انتخاب و به روش سیمپلکس دوگان جواب جدید را به دست می‌آوریم و به قدم سوم باز می‌گردیم.

نکته: در مسأله min سازی اگر سمت راست محدودیت‌ها در جهت b' آشفته شوند، آنگاه تابع هدف به صورت محدب خواهد بود.

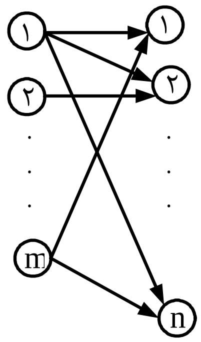
نکته: در مسأله max سازی اگر سمت راست محدودیت‌ها در جهت b' آشفته شوند، آنگاه تابع هدف به صورت مقعر خواهد بود.

****

مدل حمل و نقل

مدل حمل و نقل حالت خاصی از مدل برنامه‌ریزی خطی است که هدف از آن حداقل ساختن هزینه حمل و نقل میان مبدأها و مقاصد می‌باشد، به طوری که تمام تقاضای مقاصد تأمین شود.

مدل کلی مسأله برنامه‌ریزی خطی حمل و نقل به صورت زیر است:



$$\min \quad z = c_{11}x_{11} + \cdots + c_{1n}x_{1n} + \cdots + c_{mn}x_{mn} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} c_{ij}x_{ij}$$

$$\begin{aligned}
\text{s.t.} \quad & x_{11} + x_{12} + \cdots + x_{1n} && \le s_1 \\
& x_{21} + \cdots + x_{2n} && \le s_2 \\
& \vdots && \vdots \\
& x_{m1} + \cdots + x_{mn} && \le s_m \\
& x_{11} + \cdots + x_{m1} && \ge d_1 \\
& x_{12} + \cdots + x_{m2} && \ge d_2 \\
& \vdots && \vdots \\
& x_{1n} + x_{2n} + \cdots + x_{mn} && \ge d_n \\
& j = 1,\cdots,n \qquad i = 1,\cdots,m && x_{ij} \ge 0
\end{aligned}$$

در مدل فوق:

– m مبدأ عرضه و n مقصد (مرکز تقاضا) وجود دارد.

– c_{ij} : هزینه حمل یک واحد کالا (تولید و نگهداری) از مبدأ i به مقصد j

– x_{ij} : میزان کالای حمل شده از مبدأ i به مقصد j

– s_i : میزان عرضه در مبدأ i

– d_j : میزان تقاضا در مقصد j

نکته: فرض اولیه هر مدل حمل و نقل این است که میزان عرضه با میزان تقاضا برابر است، یعنی داریم: $\sum_{i=1}^{m} s_i = \sum_{j=1}^{n} d_j$

و در صورتی که این تساوی برقرار نباشد، با قرار دادن یک مقصد مصنوعی یا مبدأ مصنوعی با ظرفیت $\left|\sum_{i=1}^{m} s_i - \sum_{j=1}^{n} d_j\right|$ و ضریب هزینه صفر این مشکل را حل می‌کنیم.

در این صورت مدل به صورت زیر در خواهد آمد:

$$\min \quad z = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij}$$

$$\begin{aligned}
\text{s.t.} \quad & \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = s_i \quad i = 1,\cdots,m \\
& \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = d_j \quad j =,\cdots,n \\
& x_{ij} \ge 0
\end{aligned}$$

حل مسأله حمل و نقل

مسأله حمل و نقل به دو روش قابل حل است:

۱) روش سیمپلکس　　　　　　　　۲) روش حمل و نقل

هر مسأله حمل و نقل دارای $m+n$ محدودیت و mn متغیر است، لذا به علت تعداد زیاد محدودیت‌ها و متغیرها استفاده از روش سیمپلکس مناسب نمی‌باشد و بهتر آن است که از روش حمل و نقل استفاده شود.

الگوریتم حل

۱) جهت آغاز حل مسأله حمل و نقل نیاز به تعریف یک جواب شدنی پایه است. در مدل حمـل و نقـل بـا توجـه بـه فـرض $\sum_i s_i = \sum_j dj$ همواره یکی از محدودیت‌ها زائد است بنابراین مدل دارای m+n-1 محدودیت مستقل یا به عبارت دیگـر جـواب شـدنی پایـه است. جهـت تعیین جواب شدنی پایه آغازین از یکی از روش‌های زیر استفاده می‌کنیم:

- روش گوشه شمال غربی
- روش کمترین هزینه
- روش حداقل سطر
- روش وگل
- روش حداقل ستون
- روش تخمین راسل

۲) سپس جواب محاسبه شده را با یکی از روش‌های زیر تست (بهینگی) می‌کنیم:

- روش پله‌سنگی
- روش مضارب

۳) چنانچه جواب بهینه نباشد متغیر وارد شونده و خارج شونده را انتخاب کرده و جواب شـدنی پایـه جدیـد را محاسـبه و بـه قـدم دوم بـاز می‌گردیم.

الگوریتم بیان شده را با ذکر یک مثال تشریح می‌دهیم:

مثال: جدول حمل و نقل زیر را در نیربگیرید.

انبار / کارخانه	۱	۲	۳	عرضه
A	۸	۳	۵	۲۰
B	۵	۸	۷	۳۰
C	۶	۹	۸	۳۰
تقاضا	۲۵	۲۵	۳۰	۸۰

الف) تابع هدف و محدودیت‌های مسأله عبارتست از:

$$\min z = ۸x_{A۱} + ۳x_{A۲} + ۵x_{A۳} + ۵x_{B۱} + ۸x_{B۲} + ۷x_{B۳} + ۶x_{C۱} + ۹x_{C۲} + x_{C۳}$$

$$\text{s.t} \quad \left.\begin{array}{l} x_{A۱} + x_{A۲} + x_{A۳} = ۲۰ \\ x_{B۱} + x_{B۲} + x_{B۳} = ۳۰ \\ x_{C۱} + x_{C۲} + x_{C۳} = ۳۰ \end{array}\right\}$$

محدودیت‌های عرضه

$$\left.\begin{array}{l} x_{A۱} + x_{B۱} + x_{C_۱} = ۲۵ \\ x_{A۲} + x_{B۲} + x_{C۲} = ۲۵ \\ x_{A۳} + x_{B۳} + x_{C۳} = ۳۰ \end{array}\right\}$$

محدودیت‌های تقاضا

ب) تعیین جواب شدنی پایه آغازین:

۱) روش گوشه شمال غربی: روش گوشه شمال غربی بدون توجه به هزینه‌های حمل کالا، حداکثر مقداری را کـه مـی‌توانـد بـه خانـه گوشـه شمال غربی اختصاص می‌دهد تا میزان عرضه یا تقاضای مربوط به آن خانه صفر شود و این کار را تا آخر ادامه می‌دهد.

				عرضه
A	۲۰ ۸	۳	۵	~~۲۰~~ ۰
B	۵ ۵	۲۵ ۸	۰ ۷	~~۳۰~~ ~~۲۵~~ ۰
C	۶	۹	۳۰ ۳۰	~~۳۰~~ ۰
تقاضا	~~۲۵~~ ~~۵~~ ۰	~~۲۵~~ ۰	~~۳۰~~ ۰	۸۰

جواب شدنی پایه و تابع هدف در این حالت عبارتند از:

$$x_{A۱}=۲۰ \qquad x_{B۱}=۵ \qquad x_{B۲}=۲۵ \qquad x_{B۳}=۰ \qquad x_{C۳}=۳۰$$
$$Z=۸\times۰+۵\times۵+۲۵\times۸+۳۰\times۸=۶۲۵$$

۲) روش حداقل سطر، حداقل ستون و کمترین هزینه با توجه به هزینه حمل کالا جواب شدنی پایه را مشخص می‌کنند لذا بر روش گوشه شمال غربی ارجهیت دارند.

۳) روش تخمین وگل: الگوریتم این روش به صورت زیر است:

قدم اول: ابتدا اختلاف بین دو کمترین هزینه را در هر سطر و ستون محاسبه می‌کنیم.

قدم دوم: بزرگترین اختلاف میان سطر و ستون‌ها را در نظر گرفته و در آن سطر یا ستون به خانه‌ای که کمترین هزینه را دارد بیشترین مقدار ممکن را تخصیص می‌دهیم.

قدم سوم: عرضه و تقاضا را تعدیل نموده و چنانچه هنوز تقاضای تأمین نشده‌ای باشد، به قدم اول باز می‌گردیم.

حل: مثال قبل از روش وگل:

	۱	۲	۳	عرضه			
A	⌊۸	۲۰ ⌊۳	⌊۵	~~۲۰~~ ۰	۲*	–	
B	۲۵ ⌊۵	⌊۸	۵ ⌊۷	~~۳۰~~ ~~۵~~ ۰	۲	۲*	۱*
C	⌊۶	۵ ⌊۹	۲۵ ⌊۸	~~۳۰~~ ۰	۲	۲	۱
	۰ ~~۲۵~~	~~۲۵~~ ~~۵~~ ۰	~~۲۵~~ ۰ ~~۳۰~~	۸۰			
	۱	۵*	۲				
	۱*	۱	۱				
	–	۱	۱				

$$x_{A۲}=۲۰ \qquad x_{B۱}=۲۵ \qquad x_{B۳}=۵ \qquad x_{C۳}=۲۵$$
$$Z=۳\times۲۰+۵\times۲۵+۷\times۵+۹\times+۸\times۵=۴۶۵$$

میزان هزینه در روش وگل نسبت به روش گوشه شمال غربی بهتر شده یعنی روش وگل نسبت به روش گوشه شمال‌غربی بهتر است.

ج) تست بهینگی: برای انجام تست بهینگی مقادیر $z_{ij}-c_{ij}$ متغیرهای غیرپایه‌ای را محاسبه می‌کنیم، اگر این مقادیر مثبت باشند، جدول بهینه نیست و می‌توان متغیر نظیر مثبت‌ترین مقدار $z_{ij}-c_{ij}$ را به عنوان متغیر وارد شونده به پایه انتخاب کرد.

۱) روش مضارب: جهت تخمین $z_{ij}-c_{ij}$ از دوگان مسأله حمل و نقل کمک می‌گیریم. از آنجا که بهینگی اولیه شدنی بودن دوگان را به همراه دارد، پس $z_{ij}-c_{ij}$ در مسأله اولیه متناظر با یکی از محدودیت‌های دوگان یعنی $u_i+v_j-c_{ij}$ است.

دوگان مسأله حمل و نقل :

$$\max \quad z=\sum_{i=۱}^{m}s_iu_i+\sum_{j=۱}^{n}d_jv_j$$
$$\text{s.t.} \quad u_i+v_j\le c_{ij}$$
$$u_i, v_i \ \text{نا مقید}$$

(u_i و v_j به ترتیب متغیرهای دوگان متناظر با قیود مبدأ و مقصود هستند)

در مثال قبل داریم:

$v_۱=۸$	$v_۲=۱۱$	$v_۳=۱۰$	
۲۰ ⌊۸	⌊۳	⌊۵	$u_۱=۰$
۵ ⌊۵	۲۵ ⌊۸	۰ ⌊۷	$u_۲=-۳$
⌊۶	⌊۹	۳۰ ⌊۸	$u_۳=-۲$

$$Z_{A۳}-C_{A۳}=۱۰+۰-۵=۵>۰ \qquad Z_{A۲}-C_{A۲}=۱۱+۰-۳=۸>۰$$
$$Z_{C۲}-C_{C۲}=۱۱-۲-۹=۰ \qquad Z_{C۱}-C_{C۱}=۸-۲-۶=۰$$

از آنجا که z_{A2} مثبت‌ترین $z_{ij}-c_{ij}$ را دارد به عنوان متغیر وارد شونده انتخاب می‌شود.

برای انتخاب متغیر خارج شونده از روش پله‌سنگی استفاده می‌کنیم.

در این روش با متغیر وارد شونده و متغیرهای پایه‌ای یک دور ایجاد می‌کنیم.

$۲۰-\theta$	θ	
$۵+\theta$	$۲۵-\theta$	

$$\left.\begin{array}{l} ۲۰-\theta=۰ \;\rightarrow\; \theta=۲۰ \\ ۲۵-\theta=۰ \;\rightarrow\; \theta=۲۵ \end{array}\right\} \Rightarrow \min \quad \theta=۲۰$$

در نتیجه براساس تست مینیمم X_{A1} را به عنوان متغیر خارج شونده انتخاب می‌کنیم. در مرحله بعد جواب شدنی پایه عبارتست از:

$$x_{A۲}=۲۰ \quad x_{B۱}=۲۵ \quad x_{B۲}=۵ \quad x_{B۳}=۰ \quad x_{C۳}=۳۰$$

$$Z=۲۰\times ۳+۲۵\times ۵+۵\times +۵\times ۸+۳۰\times ۸=۴۶۵$$

۸	۲۰ ‌ ۳	۵	$u_۱=۰$
۲۵ ‌ ۵	۵ ‌ ۸	۰ ‌ ۷	$u_۲=۵$
۶	۹	۳۰ ‌ ۸	$u_۳=۶$
$v_۱=۰$	$v_۲=۳$	$v_۳=۲$	

$$Z_{A۱}-C_{A۱}=-۸<۰ \qquad Z_{C۱}-C_{C۱}=۰$$

$$Z_{A۳}-C_{A۳}=-۳<۰ \qquad Z_{C۲}-C_{C۲}=۰$$

با توجه به اینکه تمام $z_{ij}-c_{ij}$ها کوچکتر مساوی صفر هستند جواب فوق بهینه است و با توجه بـه اینکـه مقـادیر $z_{C۱}-c_{C۱}$ و $z_{C۲}-c_{C۲}$ صفر هستند مسأله جواب بهینه چندگانه دارد.

۲) روش پله‌سنگی

به جای استفاده از روش مضارب می‌توان از روش پله‌سنگی برای تست بهینگی استفاده کرد. در این روش بعد از ایجاد دور از C_{ij}ها برای محاسبه $z_{ij}-c_{ij}$ کمک می‌گیریم، به عنوان مثال اگر بخواهیم $z_{A۲}-c_{A۲}$ را از این روش محاسبه کنیم، داریم:

$$\begin{array}{ccc} X_{A_۱} & & X_{A_۲} \\ & +۸ \quad -۳ & \\ & -۵ \quad +۸ & \\ X_{B_۱} & & X_{B_۲} \end{array}$$

$$z_{A۲}-c_{A۲}=-(۳)+(۸)-(۵)+(۸)=۸>۰$$

****

مدل تخصیص

مدل تخصیص حالت خاصی از مدل حمل و نقل و مدل برنامه‌ریزی خطی است و برای تخصیص مشاغل به افراد و وظایف به ماشین‌ها استفاده می‌شود که هدف از آن حداقل ساختن هزینه یا حداکثرسازی بهره‌وری است.

در مدل تخصیص تعداد مبدأها و مقاصد با هم برابر است. هر متغیر در این مدل به این صورت تعریف می‌شود:

$$x_{ij}=\begin{cases} ۱ & \text{فرد } i \text{ شکل } j \text{ را بپذیرد} \\ ۰ & \text{فرد } i \text{ شکل } j \text{ را نپذیرد} \end{cases}$$

مدل کلی تخصیص به صورت زیر است:

$$\min \; z=\sum_{i=۱}^{m}\sum_{j=۱}^{m} C_{ij}x_{ij}$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{i=۱}^{m} x_{ij}=۱$$

$$\sum_{i=۱}^{m} x_{ij}=۱$$

$$x_{ij}=۰ \;\text{ or }\; ۱$$

نکته: مدل تخصیص دارای m^2 متغیر و $2m$ محدودیت است. از میان متغیرها، 2m-1 تای آن پایه‌ای است که از میان متغیرهای

پایه‌ای m تای آن همواره ۱ و m-1 تای آن ۰ است بنابراین مدل تخصیص شدیدا تباهیده است.

روش مجارستانی

بهترین روش برای حل مدل تخصیص روش مجارستانی است. الگوریتم روش مجارستانی به صورت زیر است:

۱) در هر سطر کوچکترین عدد را در نظر گرفته و از بقیه اعداد موجود در آن سطر کم می‌کنیم. سپس در هر ستون نیز کوچکترین عـدد را در نظر گرفته و از سایر اعداد موجود آن ستون کم می‌کنیم. ماتریس حاصل ماتریس هزینه تقلیل یافته یا ماتریس هزینه فرصت نام دارد.

۲) با حداقل تعداد خطوط افقی یا عمودی تمامی صفرهای موجود در سطر یا ستون را پوشانده که اگر این تعداد برابر تعداد افـراد یـا مشـاغل (m) باشد مسأله بهینه است و گرنه به قدم سوم می‌رویم.

۳) کوچکترین عددی را که روی آن خط کشیده نشده مشخص و آن را از سایر اعدادی که روی آنها خط کشیده نشده کم کرده و به محل‌های تقاطع خطوط اضافه می‌کنیم. سپس به قدم دوم می‌رویم.

مثال:

شغل / فرد	۱	۲	۳	٤	کمترین عدد در سطر
۱	۱	٤	٦	۳	$P_{۱}=۱$
۲	۹	۷	۱۰	۹	$P_{۲}=۷$
۳	٤	۵	۱۱	۷	$P_{۳}=٤$
٤	۷	۷	۸	۵	$P_{٤}=۵$

	۱	۲	۳	٤
۱	۰	۳	۵	۲
۲	۲	۰	۳	۲
۳	۰	۱	۷	۳
٤	۳	۲	۳	۰
کمترین عدد در ستون	$q_{۱}=۰$	$q_{۲}=۰$	$q_{۳}=۳$	$q_{٤}=۰$

	۱	۲	۳	٤
۱	۰	۳	۲	۲
۲	۲	۰	۰	۲
۳	۰	۱	٤	۳
٤	۳	۲	۰	۰

جواب بهینه:

	۱	۲	۳	٤
۱	۰	۲	۱	۱
۲	۳	۰	۰	۲
۳	۰	۰	۳	۲
٤	٤	۲	۰	۰

$x_{۱۱}=۱$

$x_{۴۴}=۱$

$x_{۲۳}=۱$

$x_{۳۲}=۱$

$Z=۱+۵+۱۰+۵=۲۱$

$Z=P_{۱}+P_{۲}+P_{۳}+q_{۳}+۱$

$=۱+۷+۴+۵+۳+۱=۲۱$