

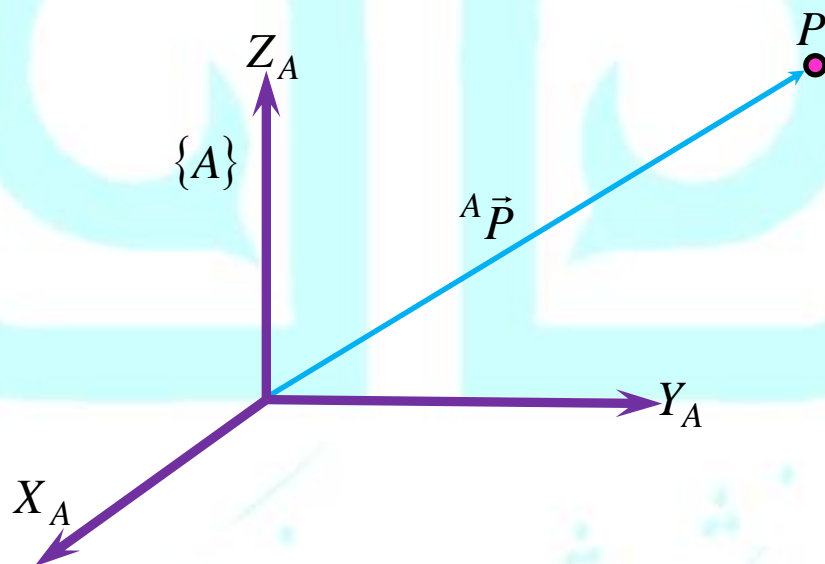
- توصیفهای فضایی (موقعیت، جهتگیری و دستگاه مختصات)

در این قسمت به توصیف مکان، جهتگیری و مفهومی به نام چهارچوب که شامل هر دوی آنهاست می پردازیم.

- توصیف مکان

پس از انتخاب دستگاه مختصات، موقعیت هر نقطه نسبت به آن دستگاه توسط یک بردار مکان 3×1 نشان داده می شود. از آنجا که در بحث مربوط به رباتیک نیازمند معرفی دستگاههای مختصات متعددی هستیم، لذا بردارها باید با نمادهایی که معرف دستگاه مربوط به آنهاست، مشخص شوند.

شکل (۱) دستگاه مختصات $\{A\}$ را نشان می دهد که نقطه P نسبت به مرکز آن با بردار ${}^A\vec{P}$ نشان داده شده است.



شکل (۱): بردار موقعیت نقطه دلخواه P در فضا نسبت به دستگاه مختصات $\{A\}$

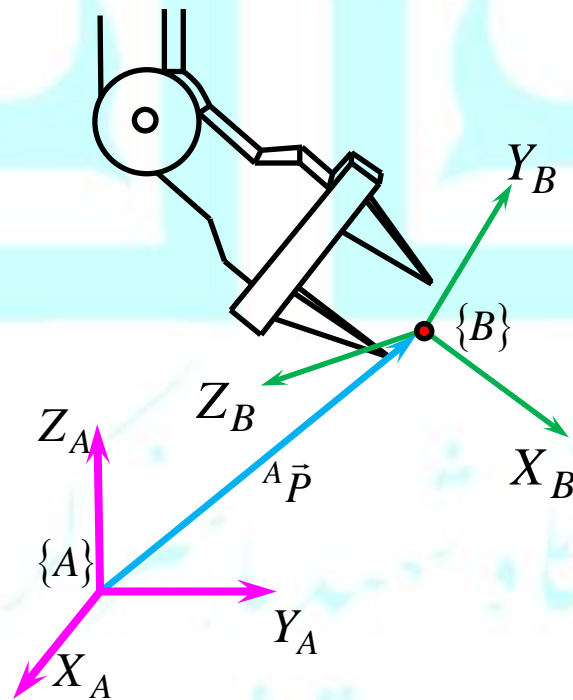
مؤلفه‌های این بردار موقعیت عبارتند از:

$${}^A\bar{P} = \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{bmatrix} \quad (1)$$

که در آن p_x ، p_y و p_z به ترتیب موقعیت نقطه P را در امتدادهای X_A ، Y_A و Z_A نشان می‌دهد.

• توصیف جهتگیری

اغلب علاوه بر نمایش یک نقطه در فضا، به تعریف جهتگیری یک جسم در فضا نیازمندیم. بطور مثال در شکل (۲)، اگر چه موقعیت پنجه ثابت است، اما جهتگیری آن می‌تواند شکل‌های متفاوتی به خود بگیرد. برای توصیف جهتگیری هر جسم، دستگاه مختصاتی به آن متصل می‌کنیم. سپس این دستگاه را نسبت به دستگاه مرجع تعریف می‌کنیم. همانگونه که در شکل (۲) مشاهده می‌گردد، دستگاه $\{B\}$ به طریقی معلوم به جسم متصل شده است. برای تعیین جهتگیری جسم، کافی است دستگاه $\{B\}$ را نسبت به $\{A\}$ توصیف نماییم.



شکل (۲): جهتگیری دستگاه $\{B\}$ نسبت به دستگاه $\{A\}$

• توصیف جهتگیری یک دستگاه مختصات نسبت به دستگاهی دیگر

یکی از روش های توصیف دستگاه مختصات $\{B\}$ (دستگاه متصل به جسم)، نوشتن بردارهای یکه سه محور اصلی آن $(\bar{X}_B, \bar{Y}_B, \bar{Z}_B)$ نسبت به دستگاه مختصات $\{A\}$ است. این بردارهای یکه وقتی که در دستگاه $\{A\}$ بیان شوند با بردارهای ${}^A\bar{X}_B$ ، ${}^A\bar{Y}_B$ و ${}^A\bar{Z}_B$ نمایش داده خواهند شد. ساده تر است اگر این سه بردار را به صورت ستون های یک ماتریس 3×3 نشان دهیم. این ماتریس را ماتریس دوران می نامیم. از طرفی چون این ماتریس دستگاه $\{B\}$ را نسبت به $\{A\}$ توصیف می کند، آن را با نماد ${}^A R_B$ نشان خواهیم داد.

$${}^A R_B = \begin{bmatrix} {}^A\bar{X}_B & {}^A\bar{Y}_B & {}^A\bar{Z}_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix} \quad (2)$$

با توجه به اینکه مؤلفه های هر بردار، تصویر آن بردار در امتداد بردارهای یکه دستگاه مختصات هستند، لذا درایه های ماتریس دوران به صورت حاصلضرب نقطه ای یک زوج از بردارهای یکه به ترتیب زیر ارائه می گردند.

$${}^A R_B = \begin{bmatrix} {}^A\bar{X}_B & {}^A\bar{Y}_B & {}^A\bar{Z}_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{X}_B \cdot \bar{X}_A & \bar{Y}_B \cdot \bar{X}_A & \bar{Z}_B \cdot \bar{X}_A \\ \bar{X}_B \cdot \bar{Y}_A & \bar{Y}_B \cdot \bar{Y}_A & \bar{Z}_B \cdot \bar{Y}_A \\ \bar{X}_B \cdot \bar{Z}_A & \bar{Y}_B \cdot \bar{Z}_A & \bar{Z}_B \cdot \bar{Z}_A \end{bmatrix} \quad (3)$$

با دقت در معادله (3) نتیجه می شود که سطرهای ماتریس، بردارهای یکه دستگاه $\{A\}$ در دستگاه مختصات $\{B\}$ هستند. یعنی:

$${}^A R_B = \begin{bmatrix} {}^A\bar{X}_B & {}^A\bar{Y}_B & {}^A\bar{Z}_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^B\bar{X}_A^T \\ {}^B\bar{Y}_A^T \\ {}^B\bar{Z}_A^T \end{bmatrix} \quad (4)$$

لذا توصیف دستگاه $\{A\}$ نسبت به $\{B\}$ به صورت ترانهاد معادله (3) ارائه می گردد.

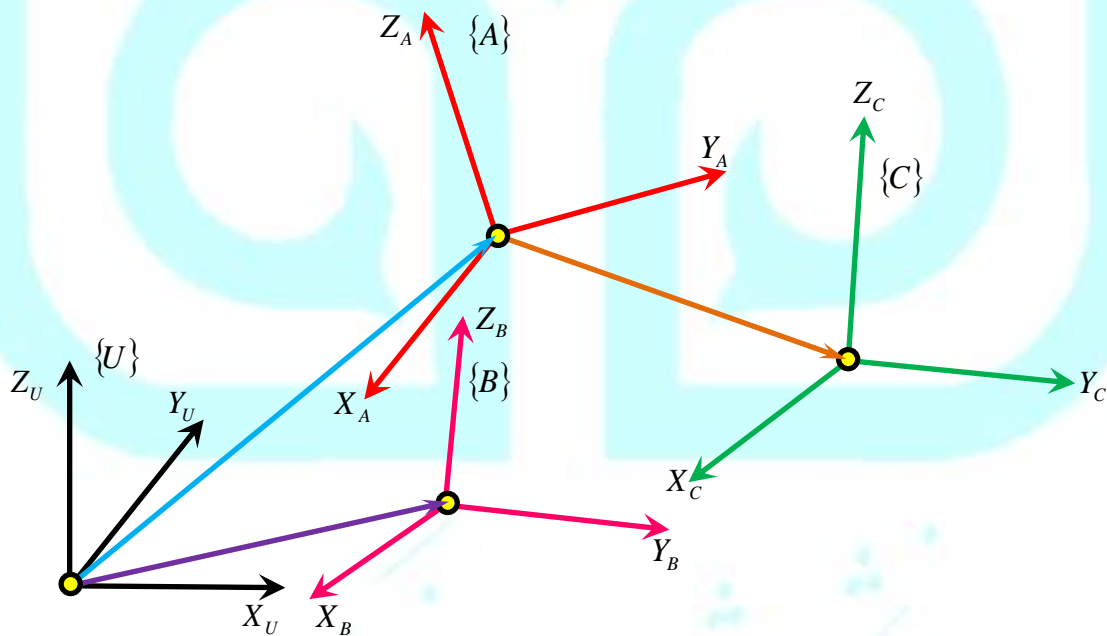
$${}^B R_A = \begin{bmatrix} {}^B\bar{X}_A & {}^B\bar{Y}_A & {}^B\bar{Z}_A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{X}_A \cdot \bar{X}_B & \bar{Y}_A \cdot \bar{X}_B & \bar{Z}_A \cdot \bar{X}_B \\ \bar{X}_A \cdot \bar{Y}_B & \bar{Y}_A \cdot \bar{Y}_B & \bar{Z}_A \cdot \bar{Y}_B \\ \bar{X}_A \cdot \bar{Z}_B & \bar{Y}_A \cdot \bar{Z}_B & \bar{Z}_A \cdot \bar{Z}_B \end{bmatrix} = {}^A R_B^T \quad (5)$$

- توصیف کامل یک چهارچوب

برای توصیف یک چهارچوب هم موقعیت آن و هم جهتگیری آن بایستی مشخص گردد. پیشتر دیدیم که برای بیان موقعیت یک نقطه نسبت به یک دستگاه مختصات از یک بردار 3×1 و برای بیان جهتگیری یک دستگاه نسبت به دستگاه مرجع از 3×1 بردار استفاده می شود. لذا توصیف هر چهارچوب را می توان به صورت یک بردار مکان و یک ماتریس دوران در نظر گرفت. مثلاً چهارچوب $\{B\}$ به وسیله ${}^A R_B$ و ${}^A \bar{P}_{BORG}$ توصیف می شود که در آن ${}^A \bar{P}_{BORG}$ بردار موقعیت مبدأ دستگاه $\{B\}$ نسبت به دستگاه $\{A\}$ می باشد.

$$\{B\} = \{ {}^A R_B, {}^A \bar{P}_{BORG} \} \quad (6)$$

در شکل (۳) نمونه ای از چهارچوبهای متعدد آورده شده است.

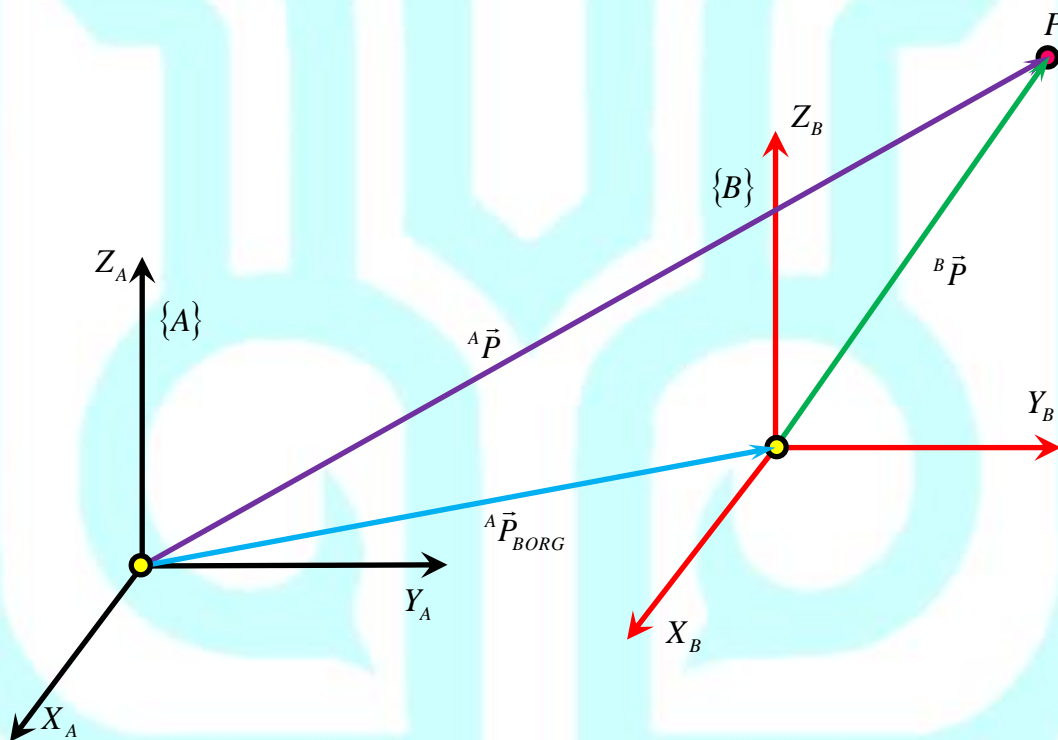


شکل (۳): نمونه ای از چهارچوبهای متفاوت

- نگاشتها: تغییر توصیف کمیت‌های برداری از چهارچوبی به چهارچوب دیگر

در این قسمت به بحث پیرامون ریاضیات نگاشت برای توصیف کمیت‌های برداری از یک چهارچوب به چهارچوب دیگر خواهیم پرداخت.

در شکل (۴)، چهارچوب $\{A\}$ و چهارچوب $\{B\}$ دارای جهتگیری کاملاً یکسانی هستند و تنها تفاوت این دو دستگاه در یک انتقال است که با بردار ${}^A\vec{P}_{BORG}$ نشان داده شده است.



شکل (۴): موقعیت نقطه P در دو دستگاه مختصات با جهتگیری کاملاً یکسان

با توجه به شکل (۴) می‌توان رابطه برداری زیر را نوشت.

$${}^A\vec{P} = {}^B\vec{P} + {}^A\vec{P}_{BORG} \quad (Y)$$

در اینجا بایستی به این نکته اشاره گردد که تنها در حالتی می‌توان بردارها در دستگاههای مختلف را با یکدیگر جمع برداری نمود که این دستگاهها نسبت به یکدیگر دارای جهتگیری یکسان باشند. همانگونه که مشاهده

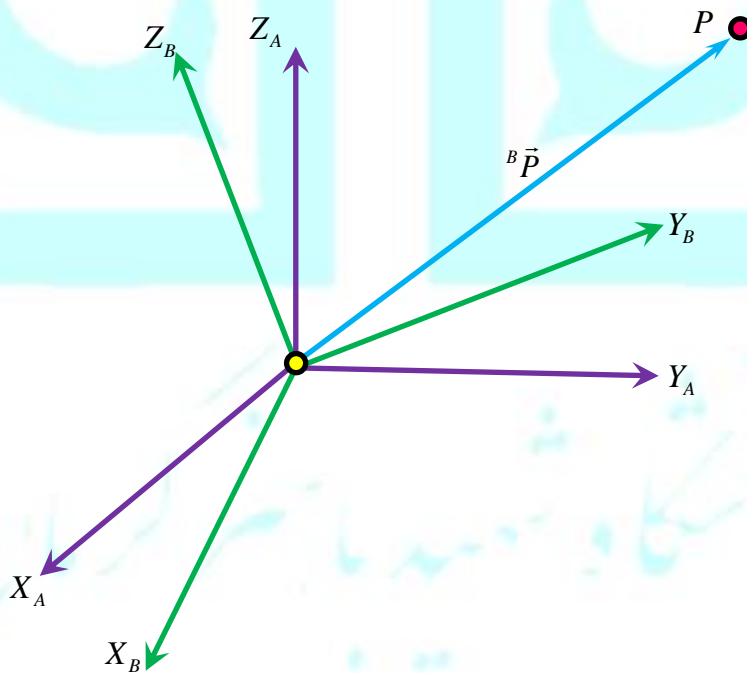
می‌گردد اگر چه در اینجا دو توصیف مختلف از موقعیت نقطه P ارائه شده است (${}^A\vec{P}$ و ${}^B\vec{P}$)؛ ولی موقعیت این نقطه در فضا ثابت است.

• بیان یک بردار در دو دستگاه با جهتگیریهای متفاوت

پیشتر با ماتریس دوران ${}^A R_B$ 3×3 که دستگاه $\{B\}$ را نسبت به دستگاه $\{A\}$ توصیف می‌کند، آشنا شدیم. این ماتریس مجدداً در اینجا ارائه می‌گردد.

$${}^A R_B = \begin{bmatrix} {}^A\vec{X}_B & {}^A\vec{Y}_B & {}^A\vec{Z}_B \end{bmatrix} \quad (8)$$

ستونهای این ماتریس یعنی ${}^A\vec{X}_B$ ، ${}^A\vec{Y}_B$ و ${}^A\vec{Z}_B$ بردارهای یکه دستگاه $\{B\}$ را نشان می‌دهند که در دستگاه $\{A\}$ توصیف شده‌اند. اکنون به دنبال آن هستیم تا با استفاده از این ماتریس دوران رابطه‌ای بین توصیف یک بردار در دو دستگاه $\{A\}$ و $\{B\}$ بیابیم. شکل (۵) را در نظر بگیرید.



شکل (۵): توصیف یک بردار در دو دستگاه با جهتگیریهای متفاوت

در اینجا فرض می‌کنیم توصیف نقطه P در دستگاه $\{B\}$ یعنی ${}^B\vec{P}$ را می‌دانیم و به دنبال توصیف این نقطه در دستگاه $\{A\}$ یعنی ${}^A\vec{P}$ هستیم. همانگونه که پیشتر نیز بیان شد مؤلفه‌های هر بردار، تصویر آن بردار بر روی امتدادهای یکه دستگاهیست که آن بردار در آن بیان شده است. بیان ریاضی این جمله به صورت حاصلضرب نقطه‌ای آن بردار و بردارهای یکه دستگاه مختصات ارائه می‌گردد.

$$\begin{aligned} {}^A p_x &= {}^B \vec{X}_A^T \cdot {}^B \vec{P} \\ {}^A p_y &= {}^B \vec{Y}_A^T \cdot {}^B \vec{P} \\ {}^A p_z &= {}^B \vec{Z}_A^T \cdot {}^B \vec{P} \end{aligned} \quad (9)$$

با نوشتن معادله (۹) به فرم ماترسی خواهیم داشت:

$$\begin{bmatrix} {}^A p_x \\ {}^A p_y \\ {}^A p_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^B \vec{X}_A^T \\ {}^B \vec{Y}_A^T \\ {}^B \vec{Z}_A^T \end{bmatrix} {}^B \vec{P} \quad (10)$$

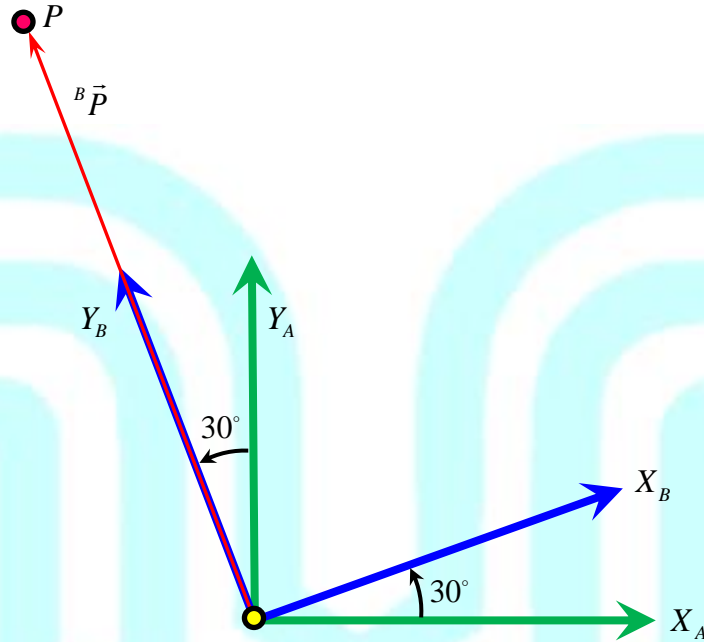
با توجه به معادله (۴) نتیجه می‌شود که ${}^B \vec{X}_A^T$ ، ${}^B \vec{Y}_A^T$ و ${}^B \vec{Z}_A^T$ تشکیل دهنده سطرهای ماترسی دوران ${}^A R_B$ هستند. لذا معادله (۱۰) به فرم زیر ساده می‌گردد.

$${}^A \vec{P} = {}^A R_B {}^B \vec{P} \quad (11)$$

معادله (۱۱) نشان می‌دهد که چگونه می‌توان به کمک ماترسی دوران ${}^A R_B$ بردار ${}^B \vec{P}$ که توصیف آن در دستگاه $\{B\}$ معلوم است را در دستگاه $\{A\}$ بیان نمود.

• مثال

شکل (۶) دستگاه $\{B\}$ را که نسبت به دستگاه $\{A\}$ به اندازه 30° درجه حول محور Z_A دوران یافته است، نشان می‌دهد. با نوشتن بردارهای یکه دستگاه $\{B\}$ نسبت به $\{A\}$ ماترسی دوران ${}^A R_B$ را یافته و به کمک این ماترسی توصیف بردار ${}^B \vec{P}$ را در دستگاه $\{A\}$ تعیین نمایید.



شکل (۶): دستگاه $\{B\}$ به اندازه 30° درجه نسبت به دستگاه $\{A\}$ حول Z_A چرخیده است

با نوشتن بردارهای یکه $\{B\}$ نسبت به $\{A\}$ ، و نمایش آن به صورت ستونهای یک ماتریس دوران خواهیم داشت:

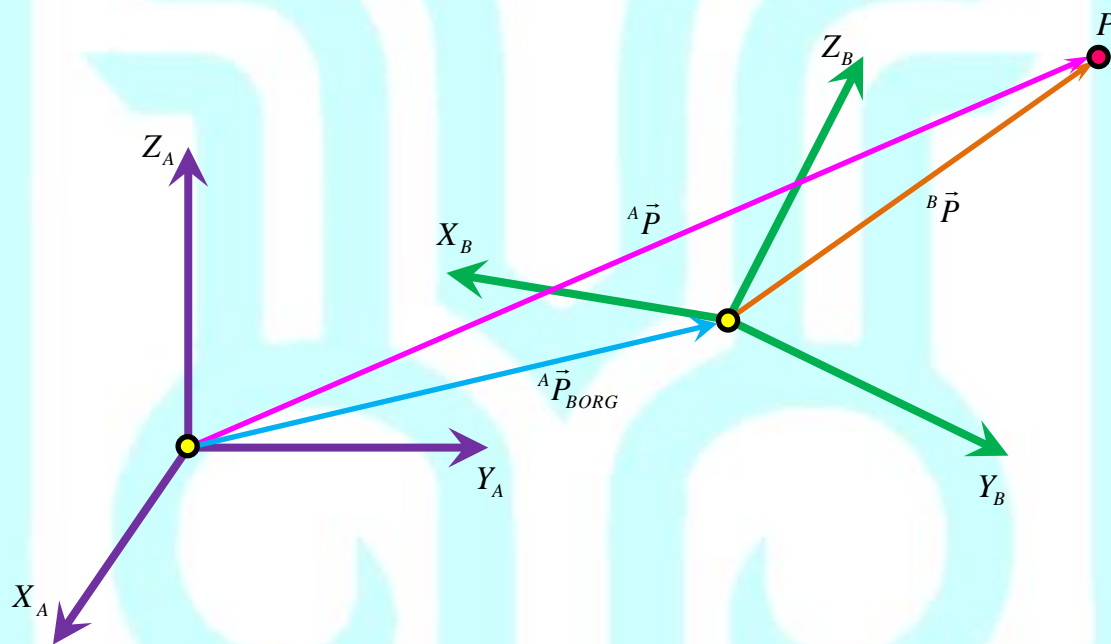
$${}^A R_B = \begin{bmatrix} X_B \cdot X_A & Y_B \cdot X_A & Z_B \cdot X_A \\ X_B \cdot Y_A & Y_B \cdot Y_A & Z_B \cdot Y_A \\ X_B \cdot Z_A & Y_B \cdot Z_A & Z_B \cdot Z_A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos 30^\circ & \cos 120^\circ & \cos 90^\circ \\ \cos 60^\circ & \cos 30^\circ & \cos 90^\circ \\ \cos 90^\circ & \cos 90^\circ & \cos 0^\circ \end{bmatrix} \quad (a)$$

اکنون با داشتن ${}^A R_B$ توصیف ${}^B \vec{P}$ در دستگاه $\{A\}$ به صورت زیر ارائه می گردد.

$${}^A \vec{P} = {}^A R_B {}^B \vec{P} \Rightarrow {}^A \vec{P} = \begin{bmatrix} 0.866 & -0.5 & 0 \\ 0.5 & 0.866 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1.732 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (b)$$

• ماتریسهای تبدیل (ترکیب انتقال و دوران)

اغلب توصیف موقعیت یک ذره را نسبت به چهارچوبی مانند $\{B\}$ در اختیار داریم و می‌خواهیم توصیف آن را نسبت به چهارچوب دیگری چون $\{A\}$ به دست آوریم. در اینجا کلی‌ترین حالت را در نظر می‌گیریم. یعنی حالتی که مبدأ این دو دستگاه بر هم منطبق نباشند و جهتگیری دو دستگاه نسبت به هم متفاوت باشند.



شکل (۷): موقعیت یک نقطه در دو دستگاه با مبدأ و جهتگیری متفاوت

همانگونه که پیشتر نیز تأکید گردید، عملیات بر روی بردارها (شامل جمع، ضرب داخلی، ضرب خارجی و ...) تنها زمانی امکانپذیر است که همه بردارها در یک دستگاه مختصات تعریف شده باشند. لذا همانند قبل نمی‌توان رابطه برداری زیر را نوشت.

$${}^A\vec{P} \neq {}^B\vec{P} + {}^A\vec{P}_{BORG} \quad (۱۲)$$

زیرا بردار ${}^B\vec{P}$ در دستگاه $\{B\}$ تعریف شده است. با توصیف این بردار در دستگاه $\{A\}$ رابطه (۱۲) به شکل زیر اصلاح می‌گردد.

$${}^A\bar{P} = {}^A R_B {}^B\bar{P} + {}^A\bar{P}_{BORG} \quad (13)$$

با نوشتن رابطه (13) به فرم ماتریسی داریم:

$$\begin{bmatrix} {}^A\bar{P} \\ \dots \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^A R_B & | & {}^A\bar{P}_{BORG} \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & | & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}^B\bar{P} \\ \dots \\ 1 \end{bmatrix} \quad (14)$$

و یا به طور خلاصه

$${}^A\bar{P} = {}^A T_B {}^B\bar{P} \quad (15)$$

که در آن ${}^A T_B$ در معادله (15) تبدیل همگن خوانده می شود که هم دوران و هم انتقال را توأمان در بر دارد. در واقع این معادله عمل نگاشت از یک چهارچوب به چهارچوبی دیگر را به شکل یک عملگر ماتریسی ارائه می دهد.

• مثال

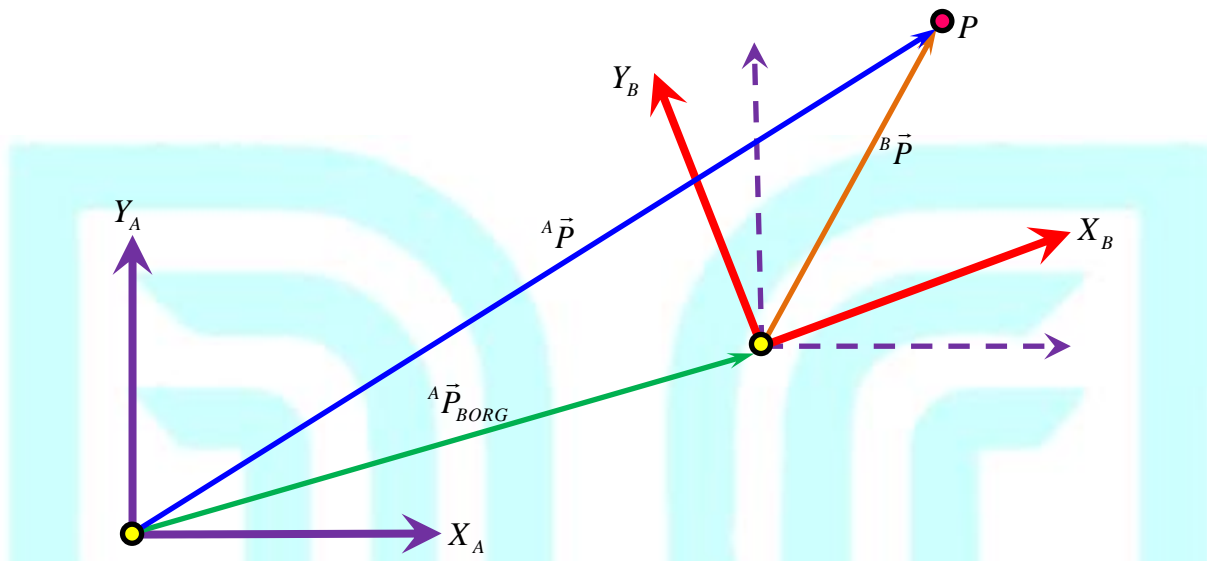
شکل (8) چهارچوب $\{B\}$ را که نسبت به چهارچوب $\{A\}$ به اندازه 30° درجه حول محور Z_A دوران کرده، و به اندازه 10 واحد در راستای X_A و 5 واحد در راستای Y_A انتقال یافته است، نشان می دهد. مطلوبست محاسبه

$${}^A\bar{P}, \text{ در صورتی که } {}^B\bar{P} = [3 \ 7 \ 0]^T.$$

پیشتر در مثال 1 ماتریس 3×3 دوران ${}^A R_B$ را محاسبه نمودیم. اکنون ماتریس 4×4 تبدیل ${}^A T_B$ را با توجه به

معادله (14) ارائه می نماییم.

$${}^A T_B = \begin{bmatrix} 0.866 & -0.5 & 0 & 10 \\ 0.5 & 0.866 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (a)$$



شکل (۸): چهارچوب انتقال و دوران یافته $\{B\}$

با پیش ضرب کردن این ماتریس در بردار ${}^B\vec{P}$ ، توصیف نقطه P در دستگاه $\{A\}$ حاصل می‌گردد.

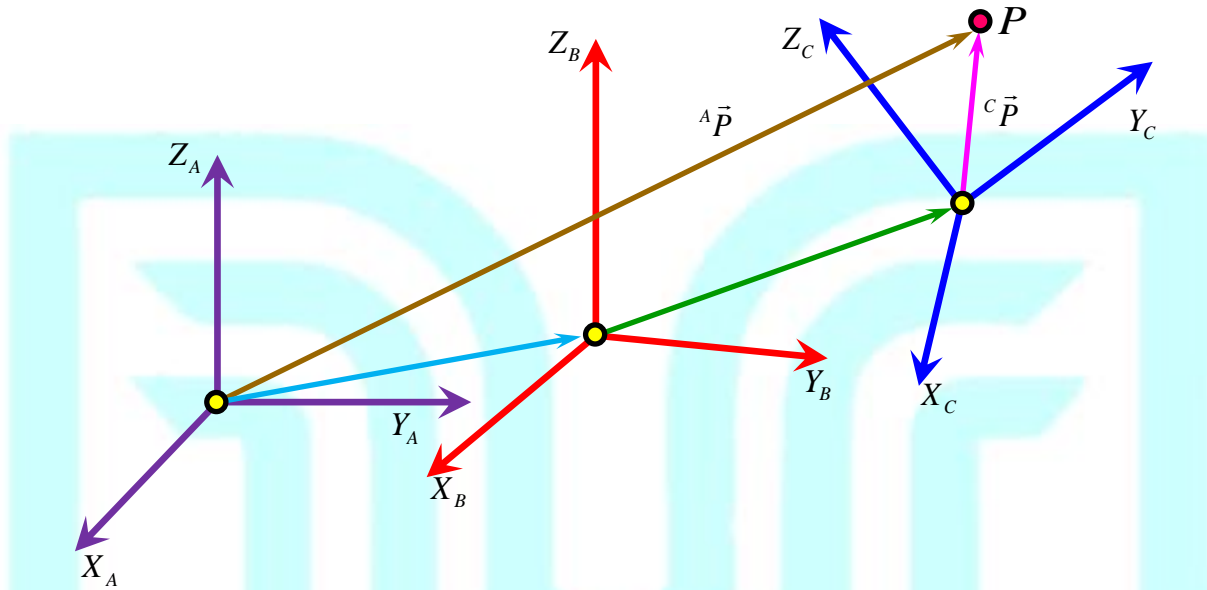
$${}^A\vec{P} = {}^A T_B {}^B\vec{P} = \begin{bmatrix} 0.866 & -0.5 & 0 & 10 \\ 0.5 & 0.866 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9.098 \\ 12.562 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (b)$$

• تبدیلهای مرکب

در شکل (۹)، موقعیت نقطه مادی P در دستگاه $\{C\}$ معلوم است و هدف تعیین موقعیت این نقطه نسبت به دستگاه $\{A\}$ است.

چهارچوب $\{C\}$ نسبت به $\{B\}$ ، و چهارچوب $\{B\}$ نسبت به $\{A\}$ معلوم است. لذا موقعیت نقطه P نسبت به دستگاه $\{B\}$ عبارتست از:

$${}^B\vec{P} = {}^B T_C {}^C\vec{P} \quad (۱۶)$$



شکل (۹): چهارچوب مرکب

به طور مشابه موقعیت نقطه P نسبت به دستگاه $\{A\}$ عبارتست از:

$${}^A\vec{P} = {}^A T_B {}^B\vec{P} \quad (17)$$

با ترکیب معادلات (۱۶) و (۱۷) به دست خواهیم آورد:

$${}^A\vec{P} = {}^A T_B {}^B T_C {}^C\vec{P} \quad (18)$$

با توجه به معادله (۱۸) می توان ماتریس تبدیل مرکب را به صورت زیر تعریف نمود.

$${}^A T_C = {}^A T_B {}^B T_C \quad (19)$$

می توانیم عبارت ${}^A T_C$ را بر حسب توصیف های معلوم از چهارچوب های $\{B\}$ و $\{C\}$ به صورت زیر نمایش دهیم.

$${}^A T_C = \left[\begin{array}{ccc|c} & & & \\ & & & \\ & & & \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \quad (20)$$

• معکوس ماتریس‌های دوران و تبدیل

پیشتر نشان دادیم ماتریس دورانی که دستگاه $\{B\}$ را نسبت به دستگاه $\{A\}$ توصیف می‌کند، به صورت زیر ارائه می‌گردد.

$${}^A R_B = \begin{bmatrix} {}^A \vec{X}_B & {}^A \vec{Y}_B & {}^A \vec{Z}_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^B \vec{X}_A^T \\ {}^B \vec{Y}_A^T \\ {}^B \vec{Z}_A^T \end{bmatrix} \quad (21)$$

به طور مشابه توصیف دستگاه $\{A\}$ نسبت به دستگاه $\{B\}$ عبارت است از:

$${}^B R_A = \begin{bmatrix} {}^B \vec{X}_A & {}^B \vec{Y}_A & {}^B \vec{Z}_A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^A \vec{X}_B^T \\ {}^A \vec{Y}_B^T \\ {}^A \vec{Z}_B^T \end{bmatrix} = {}^A R_B^T \quad (22)$$

به راحتی می‌توان نشان داد که معکوس هر ماتریس دوران با ترانزپوز آن برابر است. زیرا

$${}^A R_B^T {}^A R_B = \begin{bmatrix} {}^A \vec{X}_B^T \\ {}^A \vec{Y}_B^T \\ {}^A \vec{Z}_B^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}^A \vec{X}_B & {}^A \vec{Y}_B & {}^A \vec{Z}_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^A \vec{X}_B^T \cdot {}^A \vec{X}_B & {}^A \vec{X}_B^T \cdot {}^A \vec{Y}_B & {}^A \vec{X}_B^T \cdot {}^A \vec{Z}_B \\ {}^A \vec{Y}_B^T \cdot {}^A \vec{X}_B & {}^A \vec{Y}_B^T \cdot {}^A \vec{Y}_B & {}^A \vec{Y}_B^T \cdot {}^A \vec{Z}_B \\ {}^A \vec{Z}_B^T \cdot {}^A \vec{X}_B & {}^A \vec{Z}_B^T \cdot {}^A \vec{Y}_B & {}^A \vec{Z}_B^T \cdot {}^A \vec{Z}_B \end{bmatrix} = I_{3 \times 3} \quad (23)$$

از طرفی

$${}^A R_B^{-1} {}^A R_B = I_{3 \times 3} \quad (24)$$

از مقایسه روابط (۲۳) و (۲۴) نتیجه می‌شود:

$${}^A R_B^{-1} = {}^A R_B^T \quad (25)$$

رابطه (۲۵) نشان می‌دهد که معکوس هر ماتریس دوران با ترانزپوز آن برابر است.

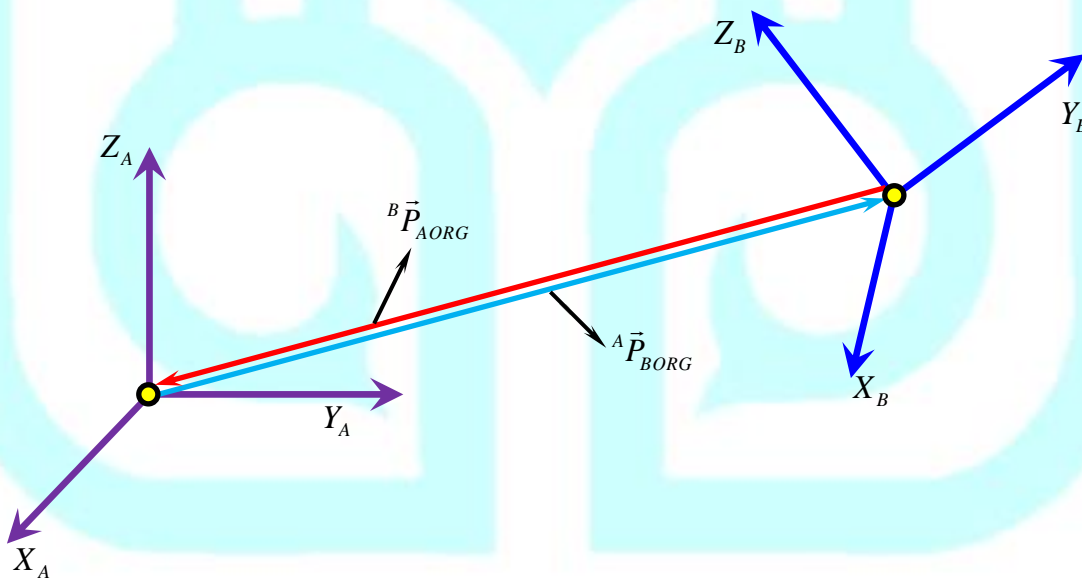
اکنون به دنبال رابطه‌ای برای معکوس ماتریس تبدیل ${}^A T_B$ هستیم. معکوس این ماتریس توصیف دستگاه $\{A\}$ نسبت به $\{B\}$ را نشان می‌دهد. لذا می‌توان نوشت:

$${}^B T_A = {}^A T_B^{-1} = \left[\begin{array}{ccc|c} {}^B R_A & & & {}^B \bar{P}_{AORG} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \quad (26)$$

برای محاسبه ${}^B T_A$ ، باید مقادیر ${}^B R_A$ و ${}^B \bar{P}_{AORG}$ را به ترتیب از ${}^A R_B$ و ${}^A \bar{P}_{BORG}$ به دست آوریم. پیشتر دیدیم در ماتریسهای دوران رابطه زیر برقرار است:

$${}^B R_A = {}^A R_B^T \quad (27)$$

از طرفی ${}^B \bar{P}_{AORG}$ همان بردار ${}^A \bar{P}_{BORG}$ است که جهت آن عکس شده است (شکل (۱۰)).



شکل (۱۰): نمایش ${}^B \bar{P}_{AORG}$ و ${}^A \bar{P}_{BORG}$

ولی از آنجا که این بردار بایستی در دستگاه $\{B\}$ تعریف گردد، لذا آن را در ماتریس دوران ${}^B R_A$ پیش ضرب می‌کنیم. بنابراین:

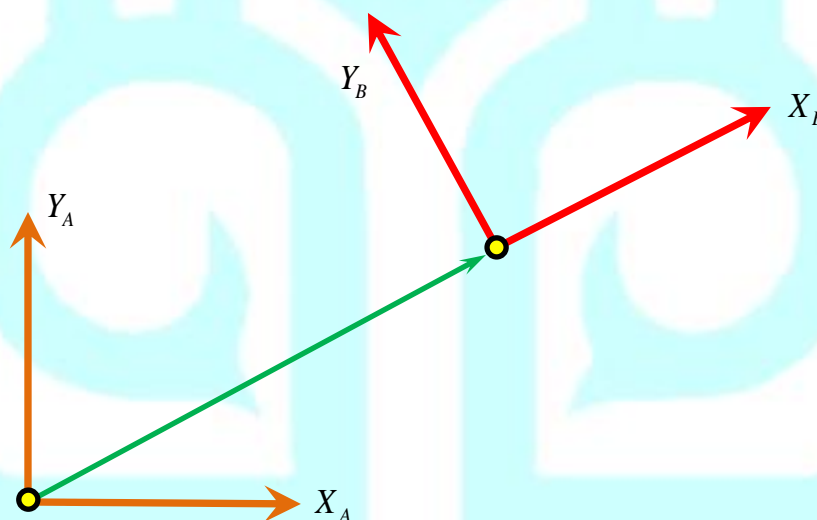
$${}^B \bar{P}_{AORG} = -{}^B R_A {}^A \bar{P}_{BORG} = -{}^A R_B^T {}^A \bar{P}_{BORG} \quad (28)$$

اکنون به کمک روابط (۲۷) و (۲۸) می‌توان معادله (۲۶) را به صورت زیر بازنویسی کرد.

$${}^B T_A = \left[\begin{array}{ccc|c} {}^A R_B^T & & & -{}^A R_B^T \bar{P}_{\text{BORG}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \quad (29)$$

• مثال

شکل (۱۱) چهارچوب $\{B\}$ را نشان می‌دهد که نسبت به چهارچوب $\{A\}$ به اندازه 30° درجه حول محور Z_A دوران کرده و در راستاهای X_A و Y_A به ترتیب ۴ و ۳ واحد انتقال یافته است. لذا ${}^A T_B$ مشخص است. معکوس این ماتریس تبدیل یعنی ${}^B T_A$ را بیابید.



شکل (۱۱): چهارچوب $\{B\}$ نسبت به $\{A\}$

ماتریس تبدیل ${}^A T_B$ چنین ارائه می‌گردد.

$${}^A T_B = \begin{bmatrix} 0.866 & -0.5 & 0 & 4 \\ 0.5 & 0.866 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (a)$$

با استفاده از رابطه (۲۹) داریم:

$${}^A R_B^T = \begin{bmatrix} 0.866 & 0.5 & 0 \\ -0.5 & 0.866 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (b)$$

همچنین

$${}^B \bar{P}_{AORG} = {}^A R_B^T {}^A \bar{P}_{BORG} = \begin{bmatrix} 0.866 & 0.5 & 0 \\ -0.5 & 0.866 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4.964 \\ -0.598 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (c)$$

با توجه به روابط (b) و (c) ماتریس تبدیل ${}^B T_A$ به شکل زیر ارائه می‌گردد.

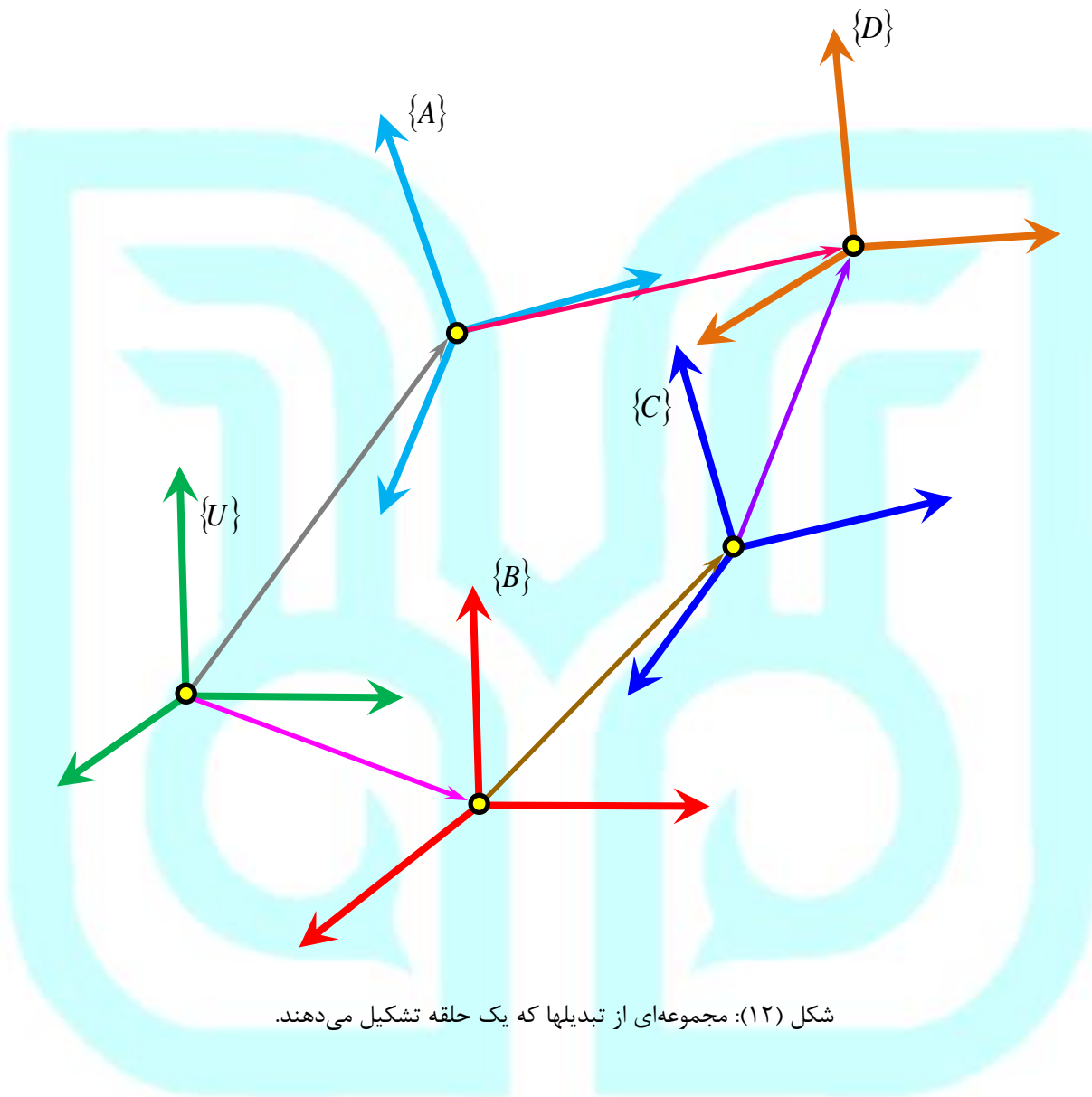
$${}^B T_A = \begin{bmatrix} 0.866 & 0.5 & 0 & -4.964 \\ -0.5 & 0.866 & 0 & -0.598 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (d)$$

• معادله‌های تبدیل

شکل (۱۲) را در نظر بگیرید. در این شکل، چهارچوب $\{D\}$ را می‌توان به دو صورت متفاوت نسبت به چهارچوب مرجع $\{U\}$ بیان کرد.

$${}^U T_D = {}^U T_A {}^A T_D \quad (۳۰-الف)$$

$${}^U T_D = {}^U T_B {}^B T_C {}^C T_D \quad (۳۰-ب)$$



با مساوی قرار دادن این دو معادله رابطه زیر به دست خواهد آمد.

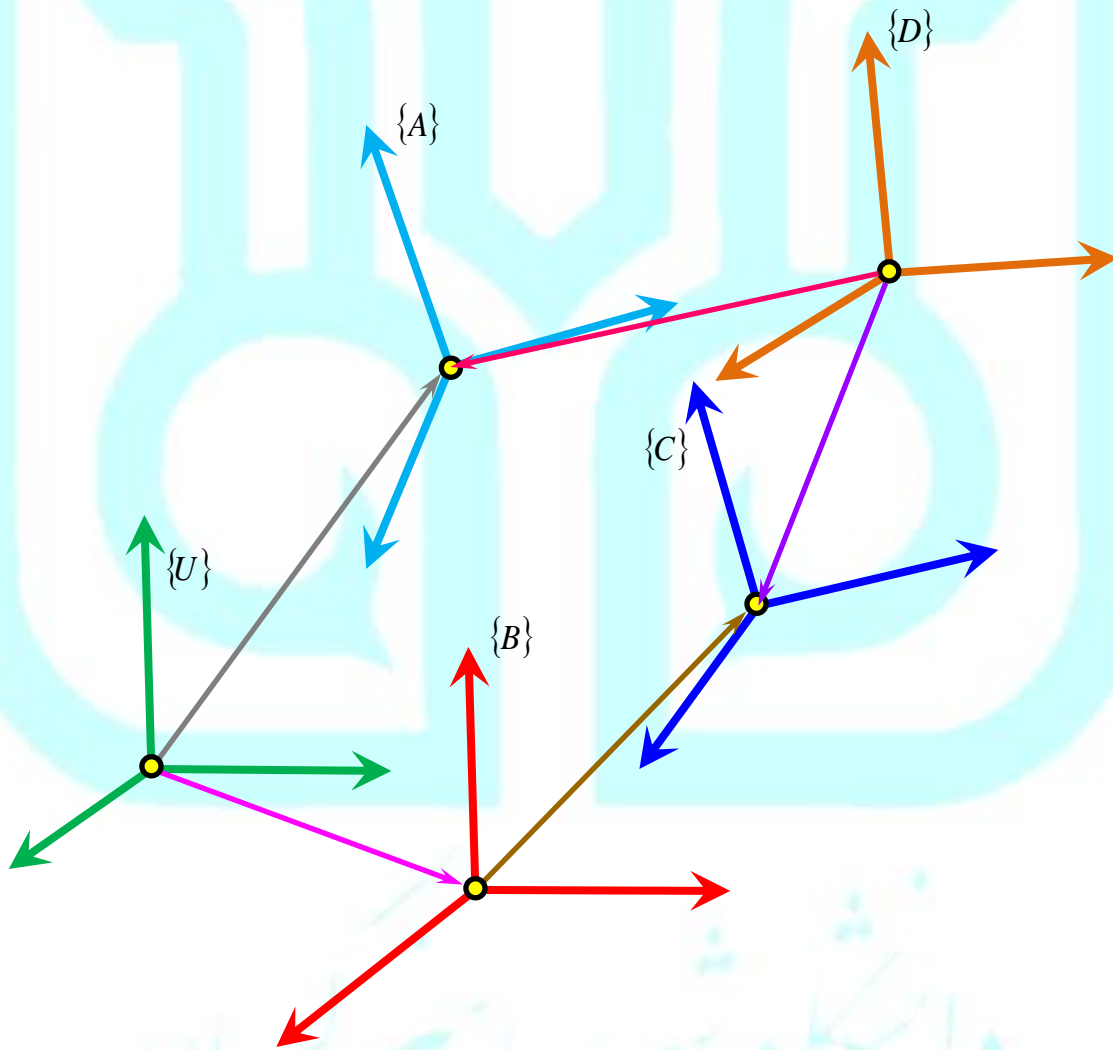
$${}^U T_A {}^A T_D = {}^U T_B {}^B T_C {}^C T_D \quad (31)$$

هر معادله تبدیل می‌تواند برای حل یک تبدیل مجهول استفاده گردد. به طور مثال در معادله (۳۱) فرض می‌کنیم که تبدیل ${}^B T_C$ مجهول است. لذا با پیش ضرب کردن دو طرف معادله (۳۱) در ${}^U T_B^{-1}$ و با پس ضرب کردن این معادله در ${}^C T_D^{-1}$ تبدیل مورد نظر به شکل زیر حاصل خواهد گشت.

$${}^U T_B^{-1} {}^U T_A {}^A T_D {}^C T_D^{-1} = \underbrace{{}^U T_B^{-1} {}^U T_B}^{I_{4 \times 4}} {}^B T_C \underbrace{{}^C T_D {}^C T_D^{-1}}_{I_{4 \times 4}} \quad (32)$$

$$\Rightarrow {}^B T_C = {}^U T_B^{-1} {}^U T_A {}^A T_D {}^C T_D^{-1}$$

در این درس قرار می‌گذاریم تا جهت پیکان تعیین کند که کدام چهارچوب نسبت به دیگری تعریف شده است. به‌طور مثال شکل (۱۳) را در نظر بگیرید.



شکل (۱۳): تعریف یک چهارچوب نسبت به چهارچوبی دیگر توسط جهت پیکان

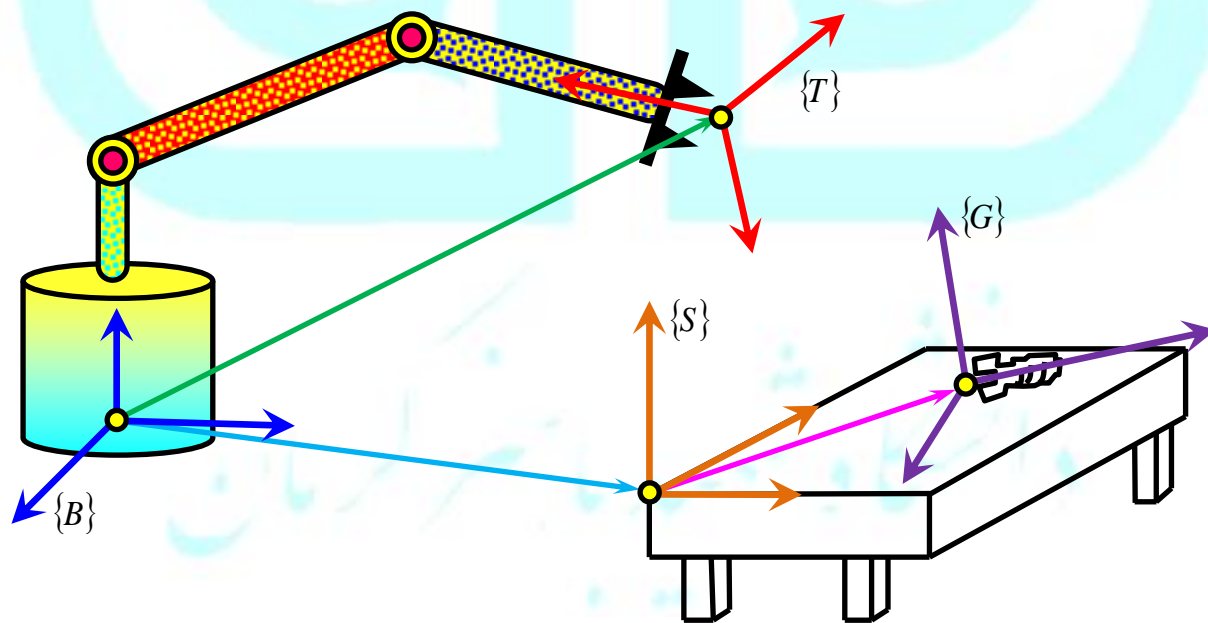
در این شکل چهارچوب $\{A\}$ نسبت به چهارچوب $\{D\}$ تعریف شده است. در حالیکه در شکل (۱۲)، این چهارچوب $\{D\}$ بود که نسبت به چهارچوب $\{A\}$ تعریف شده بود. در شکل (۱۳) دو توصیف از دستگاه $\{C\}$ نسبت به دستگاه مرجع $\{U\}$ به صورت زیر ارائه می‌گردد.

$${}^U T_C = {}^U T_B {}^B T_C \quad (۳۳)$$

$${}^U T_C = {}^U T_A {}^D T_A^{-1} {}^D T_C \quad (۳۴)$$

• مثال

در شکل (۱۴)، تبدیل ${}^B T_T$ که مکان و جهتگیری دستگاه متصل به پنجه ربات $\{T\}$ نسبت به پایه آن $\{B\}$ را نشان می‌دهد، همچنین تبدیل ${}^B T_S$ که مکان و جهتگیری چهارچوب متصل به میز $\{S\}$ نسبت به پایه ربات $\{B\}$ را نشان می‌دهد نیز مشخص است. مکان و جهتگیری پیچی که روی میز قرار دارد نسبت به خود میز با ${}^S T_G$ توصیف می‌گردد. مطلوب است توصیف و جهتگیری پیچ نسبت به دست ربات $({}^T T_G)$.



شکل (۱۴): بازوی مکانیکی ماهر در حال نزدیک شدن به یک پیچ در روی میز کار

می توان چهارچوب پیچ را نسبت به چهارچوب دست به صورت زیر محاسبه کرد.

$${}^T T_G = {}^B T_T^{-1} {}^B T_S {}^S T_G \quad (a)$$

• ماتریس دوران در نقش یک عملگر دورانی

پیشتر از نقش ماتریس دوران به عنوان ابزاری که توصیف یک دستگاه مختصات را نسبت به دیگری ممکن می ساخت، صحبت کردیم. نقش دیگر این ماتریس به صورت عملگر دورانی است. به گونه ای که بردار ${}^A \vec{P}_1$ را از طریق دوران به بردار جدید ${}^A \vec{P}_2$ تغییر می دهد. یعنی

$${}^A \vec{P}_2 = R {}^A \vec{P}_1 \quad (35)$$

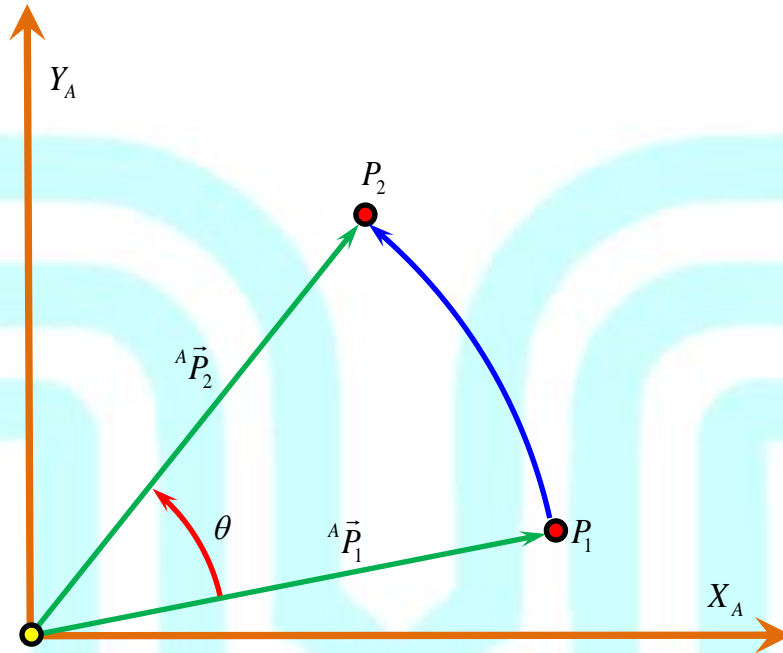
در این حالت چون هر دو بردار در یک دستگاه بیان می شوند، لذا ماتریس دوران به عنوان یک عملگر فاقد هرگونه زیر نویس یا زبر نویسی است. البته می توان نماد دیگری را برای این عملگر دورانی در نظر گرفت که در آن محور دوران به روشنی نشان داده شده است.

$${}^A \vec{P}_2 = R_K(\theta) {}^A \vec{P}_1 \quad (36)$$

در این نماد گذاری " $R_K(\theta)$ " عملگر دورانیست که دورانی را حول راستای \vec{K} به اندازه θ درجه انجام می دهد. به طور مثال همانگونه که در شکل (۱۵) نشان داده شده است، برای دوران هر بردار دلخواه ${}^A \vec{P}_1$ حول محور \vec{Z} به اندازه θ درجه و ایجاد ${}^A \vec{P}_2$ از عملگر دورانی زیر استفاده می کنیم.

$$R_Z(\theta) = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (37)$$

بنابراین ماتریس دورانی که به عنوان یک عملگر موجب دوران یک بردار می شود، همان ماتریس دورانیست که چهارچوب چرخانده شده توسط R را نسبت به چهارچوب مرجع توصیف می کند.



شکل (۱۵): بردار ${}^A\vec{P}_1$ تحت عملگر $R_z(\theta)$ به ${}^A\vec{P}_2$ نگاشته می‌شود.

• توصیف جهتگیری دو دستگاه به وسیله تنها سه پارامتر

تاکنون جهتگیری دو دستگاه نسبت به یکدیگر را تنها توسط یک ماتریس دوران 3×3 نشان داده‌ایم. اما ۹ درایه این ماتریس دوران از یکدیگر مستقل نیستند. همانگونه که پیشتر نیز اشاره شد، می‌توان ماتریس R را به صورت سطری با سه ستون نمایش داد.

$$R = [\vec{X} \quad \vec{Y} \quad \vec{Z}] \quad (38)$$

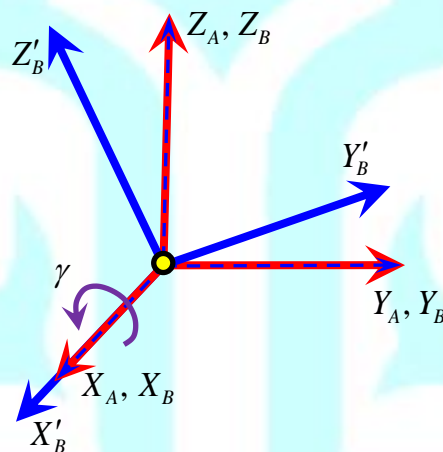
این سه بردار در واقع محورهای یکه چهارچوبی هستند که بر حسب چهارچوب مرجع نوشته شده‌اند. چون این بردارها اولاً یکه هستند و ثانیاً دو به دو بر هم عمودند، شش معادله قیدی زیر برقرار است.

$$\begin{aligned} |\vec{X}| &= 1 & |\vec{Y}| &= 1 & |\vec{Z}| &= 1 \\ \vec{X} \cdot \vec{Y} &= 0 & \vec{X} \cdot \vec{Z} &= 0 & \vec{Y} \cdot \vec{Z} &= 0 \end{aligned} \quad (39)$$

بنابراین طبیعست که بتوان جهتگیری را تنها به وسیله سه پارامتر ارائه نمود. در ادامه چند نمونه از طرز نمایشی که تنها به سه عدد نیاز دارد، معرفی خواهد شد.

• زوایای X-Y-Z ثابت

یکی از روشهای توصیف جهتگیری چهارچوب $\{B\}$ چنین است: از چهارچوبی که بر چهارچوب مرجع و معلوم $\{A\}$ منطبق است، شروع کنید. دستگاه $\{B\}$ را ابتدا حول X_A به اندازه γ درجه دوران دهید تا دستگاه $\{B'\}$ حاصل گردد (شکل (۱۶-الف)).

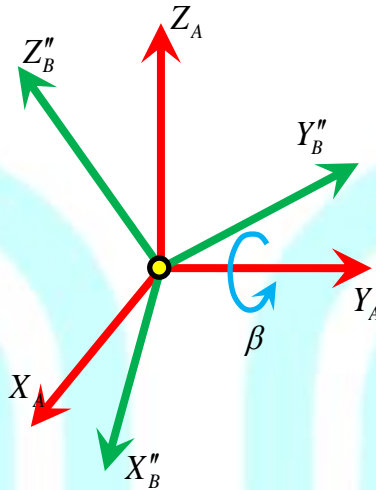


شکل (۱۶-الف): دوران حول X_A به اندازه γ درجه

اگر این دوران را به صورت عملگر فرض کنیم، آنگاه برداری مانند \vec{Y}_B طبق رابطه زیر به بردار \vec{Y}'_B تبدیل می‌گردد.

$$\vec{Y}'_B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & C\gamma & -S\gamma \\ 0 & S\gamma & C\gamma \end{bmatrix} \vec{Y}_A \quad (الف-۴۰)$$

سپس دستگاه $\{B'\}$ را حول Y_A به اندازه β درجه دوران دهید تا دستگاه $\{B''\}$ بدست آید (شکل ۱۶-ب).

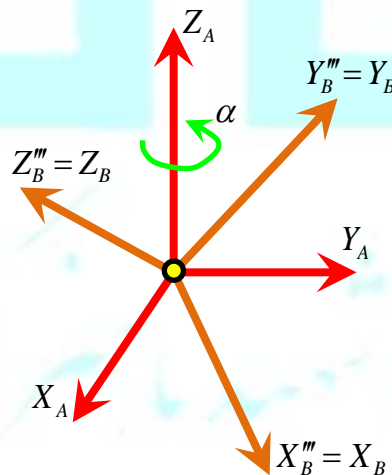


شکل (۱۶-ب): دوران حول Y_A به اندازه β درجه

طی این دوران برداری مانند \vec{Y}_B' طبق رابطه زیر به بردار \vec{Y}_B'' تبدیل می‌گردد.

$$\vec{Y}_B'' = \begin{bmatrix} C\beta & 0 & S\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -S\beta & 0 & C\beta \end{bmatrix} \vec{Y}_B' \quad (۴۰-ب)$$

سرانجام دستگاه $\{B''\}$ را حول Z_A به اندازه α درجه دوران داده تا دستگاه $\{B'''\}$ حاصل گردد (شکل ۱۶-ج).



شکل (۱۶-ج): دوران حول Z_A به اندازه α درجه

در نتیجه این دوران برداری مانند \bar{Y}_B'' مطابق رابطه زیر به بردار \bar{Y}_B''' تبدیل می‌گردد.

$$\bar{Y}_B''' = \begin{bmatrix} C\alpha & -S\alpha & 0 \\ S\alpha & C\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \bar{Y}_B'' \quad (40\text{-ج})$$

با ترکیب روابط (40-الف) تا (40-ج) داریم:

$$\bar{Y}_B''' = \begin{bmatrix} C\alpha & -S\alpha & 0 \\ S\alpha & C\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C\beta & 0 & S\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -S\beta & 0 & C\beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & C\gamma & -S\gamma \\ 0 & S\gamma & C\gamma \end{bmatrix} \bar{Y}_B \quad (41)$$

با ضرب این سه ماتریس، ماتریس دورانی که دستگاه $\{B\}$ را نسبت به دستگاه $\{A\}$ توصیف می‌کند عبارت می‌شود از:

$${}^A R_B(\gamma, \beta, \alpha) = \begin{bmatrix} \underbrace{C\alpha C\beta}_{r_{11}} & \underbrace{C\alpha S\beta S\gamma - S\alpha C\gamma}_{r_{12}} & \underbrace{C\alpha S\beta C\gamma + S\alpha S\gamma}_{r_{13}} \\ \underbrace{S\alpha C\beta}_{r_{21}} & \underbrace{S\alpha S\beta S\gamma + C\alpha C\gamma}_{r_{22}} & \underbrace{S\alpha S\beta C\gamma - C\alpha S\gamma}_{r_{23}} \\ \underbrace{-S\beta}_{r_{31}} & \underbrace{C\beta S\gamma}_{r_{32}} & \underbrace{C\beta C\gamma}_{r_{33}} \end{bmatrix} \quad (42)$$

به این روش تعیین جهتگیری زوایای $X-Y-Z$ ثابت می‌گویند. گاهی از این قرارداد، با نام قرارداد "زوایای رول، پیچ و یاو" یاد می‌شود.

گاهی ماتریس دوران تحت زوایای $X-Y-Z$ ثابت داده شده است و هدف تعیین زوایای دوران است. اگر در

معادله (42) جمع مجموع مربعات درایه‌های r_{11} و r_{21} را محاسبه نماییم، $\cos \beta$ بدست خواهد آمد. سپس

زاویه β با گرفتن آرک تانژانت از نسبت $-r_{31}$ به $\cos \beta$ ، محاسبه می‌شود. تا زمانیکه $\cos \beta \neq 0$ باشد، زاویه

α با گرفتن آرک تانژانت از نسبت $r_{21}/c\beta$ به $r_{11}/c\beta$ ، و γ را با گرفتن آرک تانژانت از نسبت $r_{32}/c\beta$ به $r_{33}/c\beta$

به‌دست آورد. به‌طور خلاصه

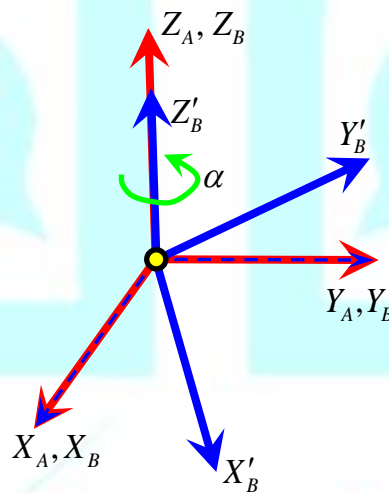
$$\beta = A \tan 2\left(-r_{31}, \sqrt{r_{11}^2 + r_{21}^2}\right)$$

$$\alpha = A \tan 2\left(\frac{r_{21}}{C\beta}, \frac{r_{11}}{C\beta}\right) \quad (43)$$

$$\gamma = A \tan 2\left(\frac{r_{32}}{C\beta}, \frac{r_{33}}{C\beta}\right)$$

• زوایای اویلر Z-Y-X

یکی دیگر از روشهای توصیف چهارچوب $\{B\}$ با استفاده از تنها سه پارامتر به صورت زیر است. از چهارچوبی که بر چهارچوب معلوم $\{A\}$ منطبق است، شروع کنید. $\{B\}$ را ابتدا حول Z_B به اندازه α درجه دوران می دهیم تا دستگاه $\{B'\}$ به دست آید (شکل (۱۷-الف)).

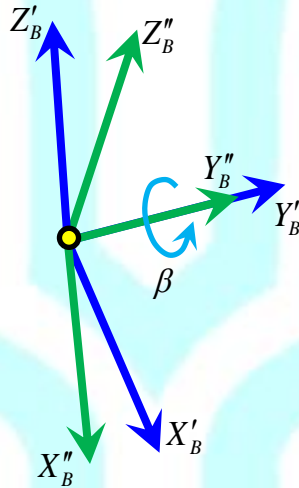


شکل (۱۷-الف): دوران حول Z_B به اندازه α درجه

می توان به راحتی نشان داد که توصیف دستگاه $\{B'\}$ نسبت به دستگاه $\{A\}$ عبارت است از:

$${}^A R_{B'} = \begin{bmatrix} C\alpha & -S\alpha & 0 \\ S\alpha & C\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (44\text{-الف})$$

سپس دستگاه $\{B'\}$ را حول Y'_B به اندازه β درجه دوران داده تا دستگاه $\{B''\}$ حاصل گردد (شکل ۱۷-ب).



شکل ۱۷-ب: دوران حول Y'_B به اندازه β درجه

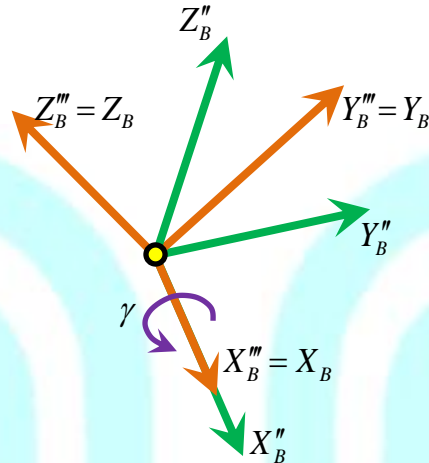
در اینجا نیز به راحتی می توان نشان داد که توصیف دستگاه $\{B''\}$ نسبت به دستگاه $\{B'\}$ عبارتست از:

$${}^{B'} R_{B''} = \begin{bmatrix} C\beta & 0 & S\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -S\beta & 0 & C\beta \end{bmatrix} \quad (44\text{-ب})$$

و سرانجام با دوران دستگاه $\{B''\}$ حول X''_B به اندازه γ درجه، دستگاه $\{B''' \}$ حاصل می گردد (شکل ۱۷-ج).

توصیف دستگاه $\{B''' \}$ نسبت به دستگاه $\{B''\}$ با استفاده از ماتریس دوران زیر امکان پذیر است.

$${}^{B''} R_{B'''} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & C\gamma & -S\gamma \\ 0 & S\gamma & C\gamma \end{bmatrix} \quad (44\text{-ج})$$



شکل (۱۷-ج): دوران سه دوران حول X_B'' به اندازه γ درجه

مجموع این سه دوران را زوایای اوپلر می‌نامند و این نحوه نمایش جهتگیری را زوایای اوپلر $Z-Y-X$ می‌نامیم. از طرفی با ترکیب روابط (۴۴-الف) تا (۴۴-ج) می‌توان جهتگیری نهایی $\{B\}$ نسبت به $\{A\}$ را به طریق زیر ارائه نمود.

$${}^A R_B(\alpha, \beta, \gamma) = {}^A R_{B'} R_{B''} R_B = \begin{bmatrix} C\alpha C\beta & C\alpha S\beta S\gamma - S\alpha C\gamma & C\alpha S\beta C\gamma + S\alpha S\gamma \\ S\alpha C\beta & S\alpha S\beta S\gamma + C\alpha C\gamma & S\alpha S\beta C\gamma - C\alpha S\gamma \\ -S\beta & C\beta S\gamma & C\beta C\gamma \end{bmatrix} \quad (۴۵)$$

توجه کنید که نتیجه فوق، دقیقاً برابر نتیجه‌ای است که برای همین سه دوران حول محورهای ثابت با ترتیب معکوس نتیجه شد. لذا نتیجه زیر در حالت کلی برقرار است:

"جهتگیری نهایی به دست آمده پس از انجام سه دوران حول محورهای ثابت، منطبق است بر جهتگیری نهایی به دست آمده پس از انجام همان سه دوران به ترتیب معکوس حول محورهای چهارچوب متحرک"

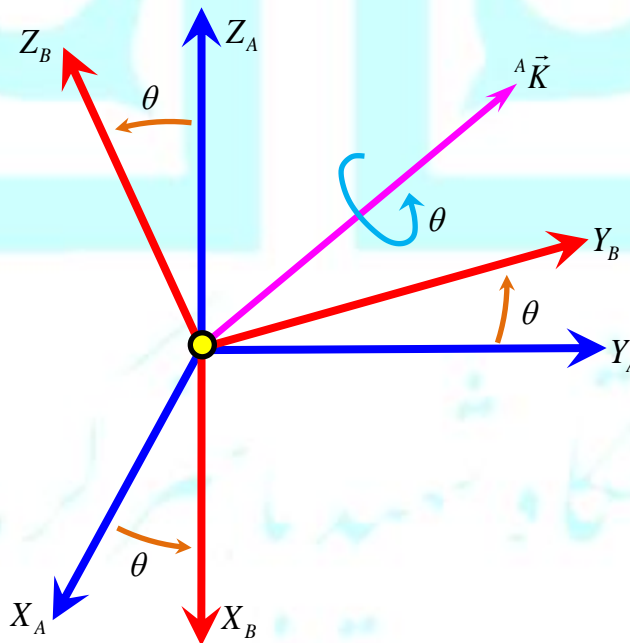
• تمرین

توصیف دستگاه متحرک $\{B\}$ را نسبت به دستگاه ثابت $\{A\}$ تحت زوایای اویلر $Z-Y-Z$ بیابید. سپس با داشتن ماتریس دوران ${}^A R_B$ زوایای اویلر $Z-Y-Z$ را به دست آورید.

راهنمایی: از چهارچوبی که بر چهارچوب معلوم $\{A\}$ منطبق است، شروع کنید. $\{B\}$ را ابتدا حول Z_B به اندازه α درجه دوران دهید تا دستگاه $\{B'\}$ به دست آید. سپس دستگاه $\{B'\}$ را حول Y'_B به اندازه β درجه دوران داده تا دستگاه $\{B''\}$ حاصل گردد. سرانجام با دوران دستگاه $\{B''\}$ حول Z''_B به اندازه γ درجه، دستگاه $\{B'''\}$ حاصل می‌گردد. نهایتاً توصیف دستگاه $\{B'''\} = \{B\}$ نسبت به دستگاه $\{A\}$ تعیین می‌گردد.

• قرارداد محور و زاویه معادل

هر جهتگیری را می‌توان به وسیله محور و زاویه مناسب، به دست آورد. توصیف زیر از چهارچوب $\{B\}$ را در نظر بگیرید. از چهارچوبی که بر چهارچوب معلوم $\{A\}$ منطبق است، شروع کنید. سپس $\{B\}$ را حول بردار ${}^A \vec{K}$ به اندازه زاویه θ درجه طبق قانون دست راست دوران دهید (شکل (۱۸)).



شکل (۱۸): نمایش محور و زاویه معادل

در این حالت جهتگیری کلی $\{B\}$ نسبت به $\{A\}$ را می‌توان با نماد ${}^A R_B(\vec{K}, \theta)$ و یا $R_K(\theta)$ نشان داد و آن را نمایش محور و زاویه معادل خواند.

• تمرین اختیاری

نشان دهید ماتریس دوران معادل در این حالت برابر است با:

$$R_K(\theta) = \begin{bmatrix} k_x k_x v \theta + C \theta & k_x k_y v \theta - k_z S \theta & k_x k_z v \theta + k_y S \theta \\ k_x k_y v \theta + k_z S \theta & k_y k_y v \theta + C \theta & k_y k_z v \theta - k_x S \theta \\ k_x k_z v \theta - k_y S \theta & k_y k_z v \theta + k_x S \theta & k_z k_z v \theta + C \theta \end{bmatrix} \quad (46)$$

که در آن $v \theta = 1 - \cos \theta$ و ${}^A \vec{K} = [k_x \quad k_y \quad k_z]$ است.

حال فرض کنیم که درایه‌های ماتریس دوران $R_K(\theta)$ را به صورت زیر داشته باشیم:

$$R_K(\theta) = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix} \quad (47)$$

در این صورت می‌توان بردار \vec{K} و زاویه θ را به صورت زیر ارائه نمود.

$$\theta = A \cos \left(\frac{r_{11} + r_{22} + r_{33} - 1}{2} \right) \quad (48)$$

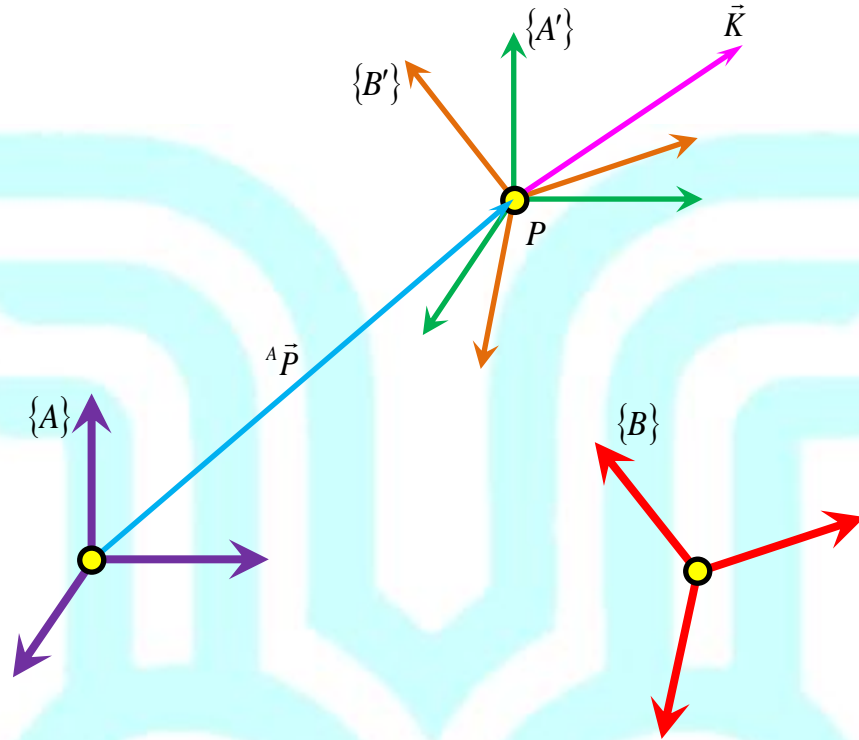
$$\vec{K} = \frac{1}{2 \sin \theta} \begin{bmatrix} r_{32} - r_{23} \\ r_{13} - r_{31} \\ r_{21} - r_{12} \end{bmatrix} \quad (49)$$

• مثال

چهارچوب $\{B\}$ چنین توصیف می‌شود: $\{B\}$ ابتدا بر $\{A\}$ منطبق است، و سپس حول بردار

${}^A \vec{K} = [0.707 \quad 0.707 \quad 0]^T$ که از نقطه $P = [1 \quad 2 \quad 3]$ می‌گذرد، به اندازه θ درجه دوران داده می‌شود.

ماتریس تبدیلی را که چهارچوب $\{B\}$ را توصیف می‌کند، به دست آورید (شکل (۱۹)).



شکل (۱۹): دوران حول محوری که از مبدأ دستگاه $\{A\}$ نمی‌گذرد

پیش از دوران، چهارچوبهای $\{A\}$ و $\{B\}$ کاملاً برهم منطبق فرض می‌شوند. چهارچوبهای $\{A'\}$ و $\{B'\}$ را در نقطه P با جهتگیری کاملاً یکسان با $\{A\}$ و $\{B\}$ تعریف می‌کنیم. در اثر دوران حول محور \bar{K} چهارچوبهای $\{B\}$ و $\{B'\}$ به موقعیت جدید خود منتقل می‌شوند. همانگونه که در شکل (۱۹) نشان داده شده است، ماتریس تبدیلی که دستگاه $\{B\}$ را نسبت به دستگاه $\{A\}$ توصیف می‌کند، دارای معادله تبدیل زیر است.

$${}^A T_B = {}^A T_{A'} {}^{A'} T_{B'} {}^{B'} T_B \quad (a)$$

با توجه به شکل و با استفاده از رابطه (۴۶) این سه ماتریس تبدیل عبارتند از:

$${}^A T_{A'} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (b)$$

$${}^A T_{B'} = \begin{bmatrix} 0.933 & 0.067 & 0.354 & 0 \\ 0.067 & 0.933 & -0.354 & 0 \\ -0.354 & 0.354 & 0.866 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (c)$$

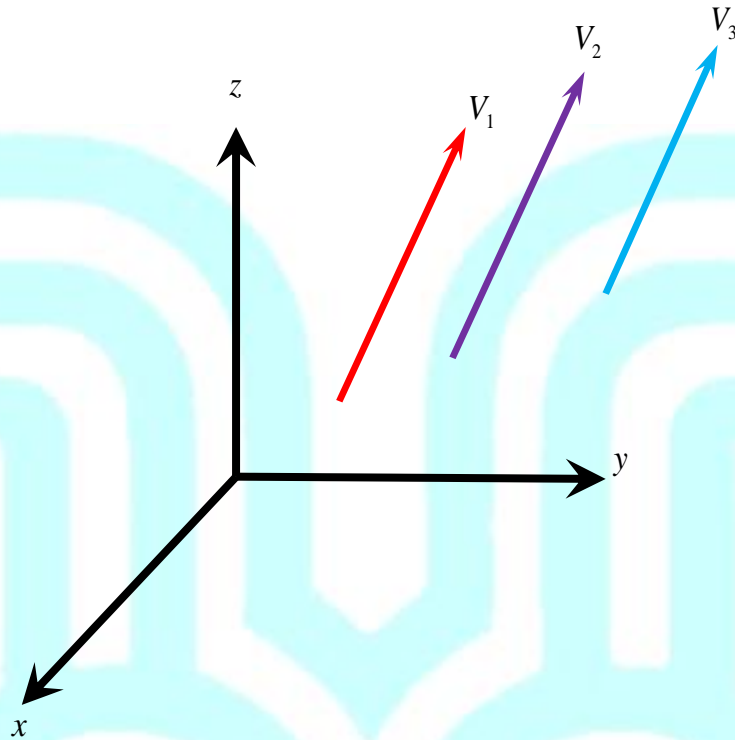
$${}^{B'} T_B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (d)$$

با جایگذاری روابط (b)، (c) و (d) در معادله (a) خواهیم داشت:

$${}^A T_B = \begin{bmatrix} 0.933 & 0.067 & 0.354 & -1.13 \\ 0.067 & 0.933 & -0.354 & 1.13 \\ -0.354 & 0.354 & 0.866 & 0.05 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (e)$$

• انواع بردارها

در مکانیک بین برابری و هم‌ارزی بردارها تفاوت قائل می‌شویم. دو بردار زمانی با یکدیگر برابرند که دیمانسیون، اندازه و جهت آنها یکسان باشند. به‌طور مثال سه بردار نشان داده شده در شکل (۲۰) دارای دیمانسیون برابر، اندازه برابر و جهت یکسان هستند. پس بنابر تعریف، این سه بردار با یکدیگر برابرند. ولی دو بردار را هم‌ارز گویند که اثر یکسانی بر جای گذارند. به‌طور مثال در شکل (۲۰) اگرچه سه بردار با هم برابرند، ولی هم‌ارز نیستند. زیرا دارای ارتفاع‌های متفاوتی نسبت به صفحه xy هستند. در ادامه به تعریف دو نوع اساسی از کمیت‌های برداری خواهیم پرداخت.



شکل (۲۰): بردارهای برابر ولی ناهم‌ارز

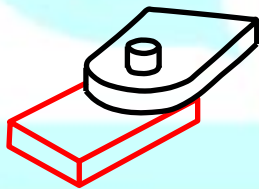
- ✓ **بردار مقید:** برداری که علاوه بر اندازه و جهت، نقطه اثر بردار نیز در آن مهم است. مانند بردار نیرو
- ✓ **بردار آزاد:** برداری که می‌تواند با حفظ اندازه و جهت، در هر مکانی از فضا قرار گیرد، بدون آنکه در مفهوم آن تغییری پدید آید. مانند بردار سرعت و یا بردار گشتاور. در بردارهای آزاد تنها اندازه و جهت اهمیت دارد. لذا در توصیف اینگونه از بردارها در دستگاههای مختلف تنها ماتریس دوران به کار می‌رود و مکان نسبی مبدأ چهارچوبها در محاسبات وارد نمی‌شود.

• سینماتیک بازوهای مکانیکی ماهر

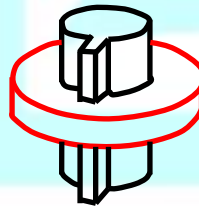
سینماتیک علمی است که حرکت را بدون در نظر گرفتن نیروهای ایجاد کننده آن مطالعه می‌کند. در سینماتیک، موقعیت، سرعت، شتاب و حتی مشتقهای بالاتر از مکان بررسی می‌شوند. لذا سینماتیک بازوهای مکانیکی ماهر ویژگیهای هندسی و وابسته به زمان را در بر دارد. به منظور ساده‌تر کردن مطالعه بازوهای مکانیکی ماهر که هندسه پیچیده‌ای دارند، به ازاء هر درجه آزادی چهارچوبهایی را به قسمتهای مناسب ربات متصل نموده و رابطه بین این چهارچوبها را به دست می‌آوریم. لذا هدف اصلی از این فصل محاسبه مکان و جهتگیری مجری نهایی نسبت به پایه آن به صورت پایه‌ای از متغیرهای مفصل است.

• توصیف رابط

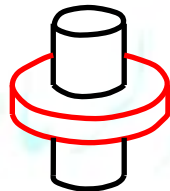
هر بازوی مکانیکی ماهر از مجموعه‌ای از چند جسم صلب که رابط نامیده می‌شوند، تشکیل می‌شود. اتصال این رابط‌ها به یکدیگر توسط مفصل انجام می‌پذیرد. در شکل (۱) چند نمونه اتصال نشان داده شده است.



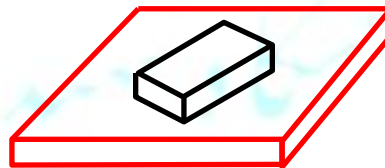
مفصل لولایی



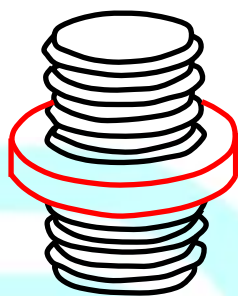
مفصل کشویی



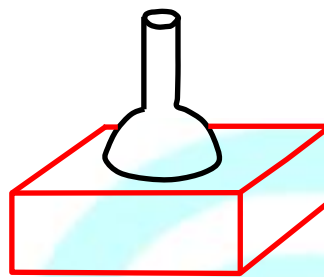
مفصل استوانه‌ای



مفصل صفحه‌ای



مفصل پیچی



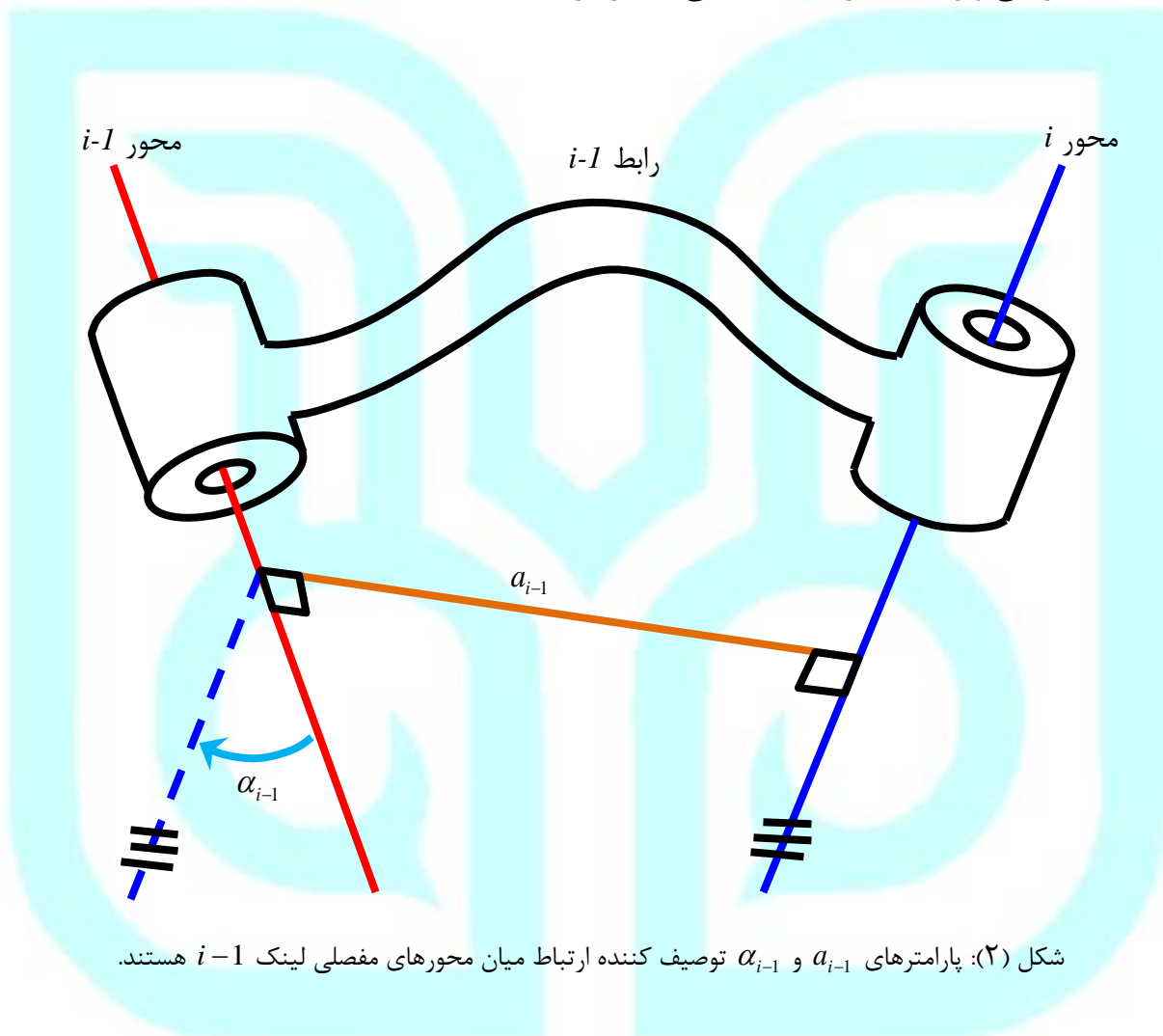
مفصل کروی

شکل (۱): نمایش چند مفصل جهت اتصال رابطها به یکدیگر

شماره‌گذاری رابطها را از پایه ساکن بازو آغاز می‌کنیم و آن را اتصال شماره صفر می‌نامیم. نخستین عضو متحرک، رابط شماره یک و عمل شماره‌گذاری به همین ترتیب ادامه می‌یابد تا به انتهای آزاد بازو، رابط شماره n برسیم. بازوهای مکانیکی معمولاً از مفصلهایی با تنها یک درجه آزادی تشکیل می‌شوند. لذا برای تعیین وضعیت کلی مجری نهایی در فضای سه بعدی به حداقل شش مفصل نیاز است. زیرا برای توصیف هر جسم در فضا به سه پارامتر برای مکان و سه پارامتر برای جهتگیری نیاز داریم.

در هنگام به‌دست آوردن معادله‌های سینماتیکی مکانیزم ربات، هر رابط تنها به‌صورت جسمی صلب که رابطه بین دو محور مفصلی را توصیف می‌کند، در نظر گرفته می‌شود. محور مفصل i ام بردار است که رابط i حول آن نسبت به رابط $i-1$ دوران می‌کند. فاصله بین دو محور در راستای خطی که بر هر دو محور عمود است (عمود مشترک) اندازه‌گیری می‌شود. در شکل (۲) رابط $i-1$ و خط عمود مشترک که طول رابط، a_{i-1} ، در راستای آن اندازه‌گیری می‌شود، نشان داده شده است. دومین پارامتر برای تعریف موقعیت دو محور مفصلی، زاویه پیچش رابط است. در صورتی که صفحه‌ای را بر عمود مشترک دو محور عمود کنیم، و دو محور $i-1$ و i را بر روی این صفحه تصویر کنیم، آنگاه زاویه دو محور از محور $i-1$ به طرف محور i ، حول a_{i-1} را زاویه پیچش رابط می‌نامیم. زاویه پیچش $i-1$ را α_{i-1} خواهیم خواند. در حالتی که دو محور مفصلی یکدیگر را قطع کنند، زاویه

پیچش در صفحه گذرنده از دو محور اندازه گیری می‌شود، اما جهت α_{i-1} نامعین است. در این مورد خاص، علامت α_{i-1} را می‌توان به اختیار مثبت یا منفی اختیار کرد.



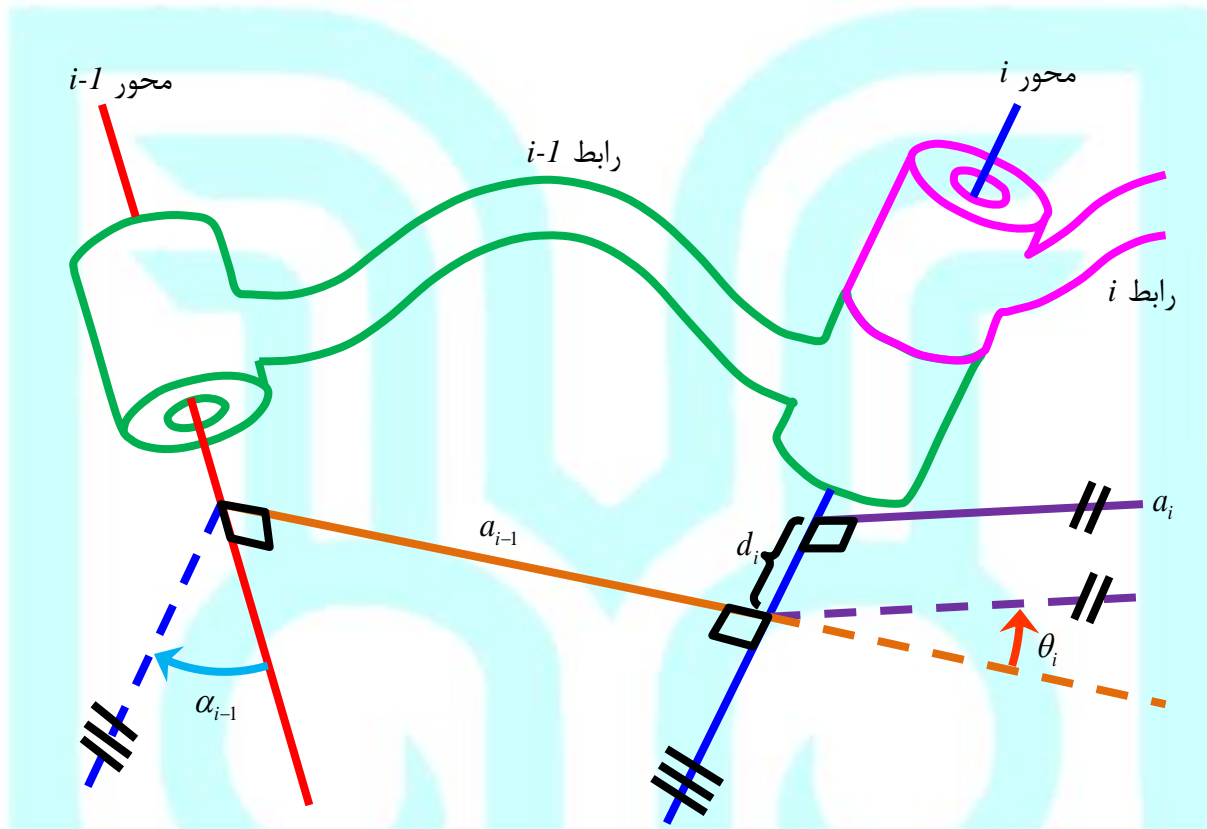
شکل (۲): پارامترهای a_{i-1} و α_{i-1} توصیف کننده ارتباط میان محورهای مفصلی لینک $i-1$ هستند.

- توصیف اتصال رابط

در بحث سینماتیک تنها با دو پارامتر که به طور کامل چگونگی ارتباط دو رابط را مشخص می‌کنند، سروکار خواهیم داشت.

- رابط‌های میانی در زنجیره سینماتیکی

رابطه‌های مجاور محور مفصلی مشترکی دارند. این موضوع در شکل (۳) نشان داده شده است.



شکل (۳): پارامترهای d_i و θ_i توصیف کننده ارتباط میان دو رابط مجاور i و $i-1$ هستند.

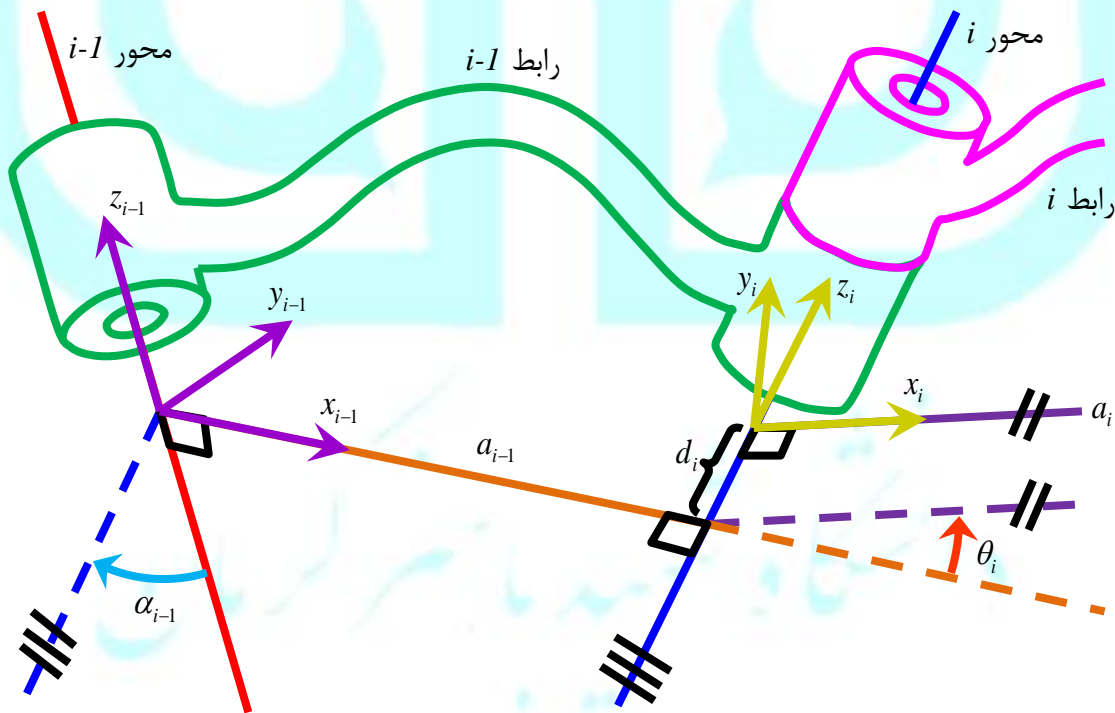
یکی از پارامترهایی که ارتباط دو رابط i و $i-1$ نسبت به یکدیگر را توصیف می‌کند، فاصله بین این دو رابط در راستای محور مشترک i است که انحراف رابط نامیده می‌شود. این انحراف که از نقطه برخورد a_{i-1} با محور i آغاز شده و تا نقطه برخورد این محور با a_i ادامه می‌یابد، در شکل (۳) با d_i نشان داده شده است. لازم به ذکر است برای مفاصل کشویی این پارامتر متغیر است. پارامتر دوم، زاویه بین امتداد a_{i-1} و a_i حول این محور مشترک (i) است که در شکل (۳) با زاویه θ_i نشان داده شده است. این پارامتر را زاویه مفصلی نامیده و برای مفاصل دورانی پارامتری متغیر محسوب می‌گردد.

- قرارداد برای اتصال چهارچوبها به رابطها

در سینماتیک رباتها به هر رابط یک دستگاه مختصات متصل خواهیم کرد. چهارچوب هر رابط همانند خود آنها نامگذاری می‌شوند. بدین معنا که چهارچوب $\{i\}$ به طور صلب به رابط i متصل خواهد شد.

- نحوه اختصاص دستگاه مختصات به رابطهای میانی

محور z_i منطبق بر محور مفصلی i انتخاب می‌شود. مبدأ دستگاه $\{i\}$ در نقطه تقاطع محور مفصلی i با عمود مشترک a_i قرار می‌گیرد. سپس x_i در راستای a_i قرار می‌گیرد و جهت آن از رابط i به سوی رابط $i+1$ است. اگر $a_i = 0$ باشد، آنگاه x_i عمود بر صفحه گذرنده از z_i و z_{i+1} در نظر گرفته می‌شود. α_i مطابق با قاعده دست راست، حول x_i اندازه‌گیری می‌شود. محور Y_i نیز با قاعده دست راست تعریف می‌شود و بدین ترتیب چهارچوب i ام را کامل می‌سازد. شکل (۴) اختصاص دستگاه مختصات به لینکهای i و $i-1$ را نشان می‌دهد.



شکل (۴): نحوه اختصاص دستگاه مختصات به هر لینک

- نحوه اختصاص دستگاه مختصات به اولین و آخرین رابط در زنجیره سینماتیکی

در سینماتیک بازوی مکانیکی، چهارچوب متصل به پایه ربات (رابط صفر) را که ثابت است؛ چهارچوب $\{0\}$ نامیده و به عنوان چهارچوب مرجع در نظر گرفته می‌شود. توصیف همه چهارچوبهای دیگر بایستی نسبت به این دستگاه بیان گردد. هر چند که نحوه اختصاص دستگاه مختصات به پایه ربات دلخواه است، ولی با برخی ملاحظات می‌توان محاسبات را ساده نمود. بهتر است محور z_0 را در امتداد محور ۱ در نظر بگیریم و چهارچوب $\{0\}$ را نیز طوری اختیار نماییم که وقتی متغیر مفصلی صفر است، بر چهارچوب $\{1\}$ منطبق گردد. برای اختصاص دستگاه مختصات برای رابط n نیز ملاحظات زیر را در نظر می‌گیریم.

✓ برای مفصل لولایی n ، جهت x_n را طوری انتخاب می‌کنیم که اگر $\theta_n = 0$ گردد، با x_{n-1} همراستا شود. علاوه بر این مبدأ چهارچوب $\{n\}$ را نیز طوری در نظر می‌گیریم که $d_n = 0$ شود.

✓ برای مفصل کشویی n ، جهت x_n طوری انتخاب می‌شود که $\theta_n = 0$ و مبدأ چهارچوب $\{n\}$ نیز به ازاء $d_n = 0$ بر نقطه تقاطع x_{n-1} و محور مفصلی n منطبق شود.

- پارامترهای ربات پس از اختصاص دستگاه مختصات به هر رابط

در صورتی که چهارچوبها مطابق قرارداد فوق به رابطها متصل شوند، تعریفهای زیر برای پارامترهای رابط معتبر خواهد بود:

$$a_i = \text{فاصله بین } z_i \text{ و } z_{i+1} \text{ اندازه گیری شده در راستای } x_i$$

$$\alpha_i = \text{زاویه بین } z_i \text{ و } z_{i+1} \text{ اندازه گیری شده حول } x_i$$

$$d_i = \text{فاصله بین } x_{i-1} \text{ و } x_i \text{ اندازه گیری شده در راستای } z_i$$

$$\theta_i = \text{زاویه بین } x_{i-1} \text{ و } x_i \text{ اندازه گیری شده حول } z_i$$

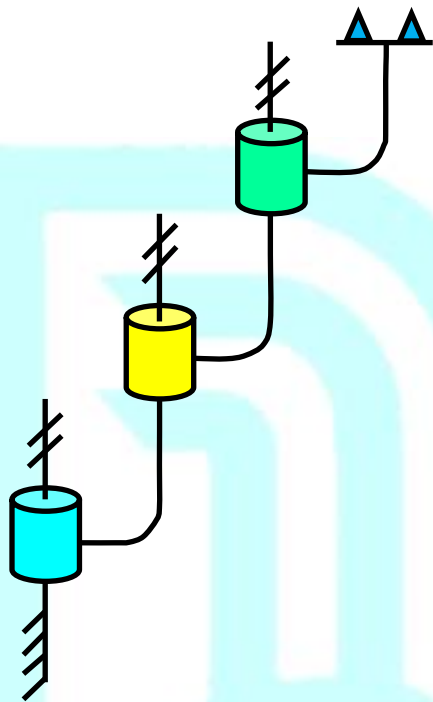
• خلاصه روش اتصال چهارچوب به رابط

در ادامه خلاصه‌ای از دستورالعمل اتصال چهارچوب به رابط که به نمادگذاری دناویت-هارتنبگ معروف است، ارائه می‌گردد.

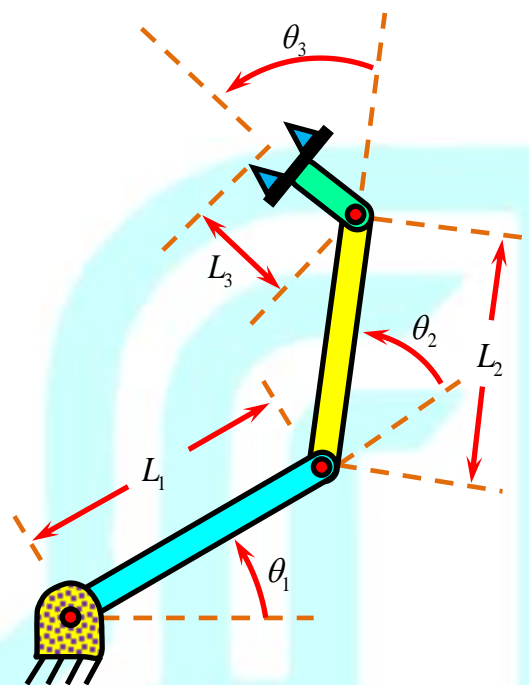
۱. محورهای مفصلی را تعیین نموده و آنها را بصورت خطوطی نامتناهی امتداد می‌دهیم. برای مراحل ۲ تا ۵ دو تا از این خطوط مجاور (واقع بر محورهای i و $i+1$) را در نظر بگیرید.
۲. عمود مشترک، یا نقطه تقاطع دو محور فوق را تعیین کنید. مبدأ دستگاه مختصات متصل به رابط i ام را در نقطه تقاطع دو محور و یا در نقطه تقاطع عمود مشترک و محور i ام قرار دهید.
۳. محور z_i را در راستای محور مفصلی i ام قرار دهید.
۴. محور x_i را در راستای عمود مشترک در نظر بگیرید. اگر محورهای مفصلی یکدیگر را قطع می‌کنند، x_i را عمود بر صفحه گذرنده از دو محور فرض کنید.
۵. محور y_i را طوری اختیار کنید که دستگاه مختصات راستگردی تشکیل شود.
۶. چهارچوب $\{0\}$ را طوری اختیار کنید که به ازاء صفر شدن اولین متغیر مفصلی، بر چهارچوب $\{1\}$ منطبق شود. مبدأ دستگاه $\{n\}$ و جهت x_n را به گونه‌ای در نظر بگیرید تا تعداد بیشتری از پارامترهای مربوط به این رابط صفر شود.

• مثال

در شکل (۵-الف) یک بازوی صفحه‌ای با سه رابط نشان داده شده است. شکل (۵-ب) نیز نمایش شماتیک همین بازوهاست. چهارچوب‌های لازم برای این ربات RRR را تعیین نموده و پارامترهای دناویت-هارتنبگ را به دست آورید.

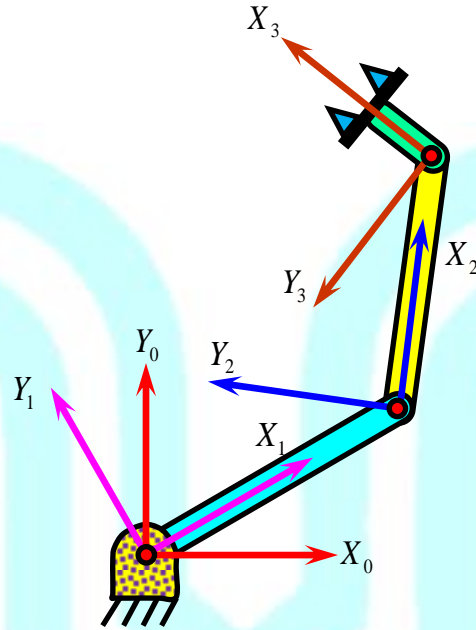


شکل (۵-ب): شکل شماتیک ربات صفحه‌ای RRR



شکل (۵-الف): بازوی مکانیکی صفحه‌ای با سه درجه آزادی دورانی

ابتدا محور دوران هر سه مفصل را به صورت خطوطی نامتناهی عمود بر صفحه کاغذ در نظر می‌گیریم. محور z_i ($i=1,2,3$) را در امتداد این خطوط قرار می‌دهیم. محور x_i را در امتداد عمود مشترک محورهای z_i و z_{i+1} در نظر می‌گیریم. محور y_i بایستی تکمیل کننده یک دستگاه راستگرد باشد. دستگاه $\{0\}$ را به گونه‌ای در نظر می‌گیریم تا با صفر شدن اولین متغیر مفصلی (θ_1) بر چهارچوب $\{1\}$ منطبق گردد. همچنین دستگاه $\{3\}$ را به طریقی به ابتدای لینک سوم متصل می‌کنیم تا با صفر شدن متغیر مفصلی این رابط (θ_3)، دو دستگاه $\{3\}$ و $\{2\}$ دارای یک جهتگیری گردند. در شکل (۶)، دستگاههای مختصات بر روی این رابط نشان داده شده است. همچنین با کمک تعاریفی که پیشتر برای α_{i-1} ، a_{i-1} ، d_i و θ_i ارائه نمودیم، پارامترهای دناویت-هارتنبِرگ برای این ربات به طریق زیر ارائه می‌گردد.



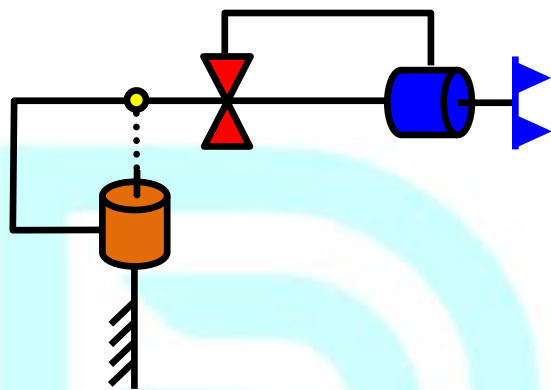
شکل (۶): اختصاص چهارچوبهای مناسب به بازوی مکانیکی صفحه‌ای RRR

جدول (۱): پارامترهای دناویت-هارتنبِrg مربوط به بازوی مکانیکی صفحه‌ای با سه مفصل دورانی

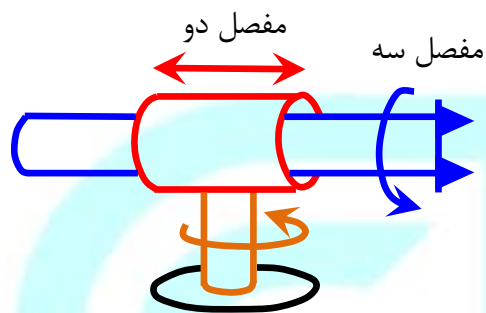
i	α_{i-1}	a_{i-1}	d_i	θ_i
1	0	0	0	θ_1
2	0	L_1	0	θ_2
3	0	L_2	0	θ_3

• مثال

در شکل (۷-الف) یک ربات سه درجه آزادی که یکی از مفاصل آن دارای حرکت کشویی است، نشان داده شده است. همچنین شکل شماتیک این ربات که به RPR موسوم است، در شکل (۷-ب) نشان داده شده است. چهارچوب‌های لازم برای این ربات را تعیین نموده و پارامترهای دناویت-هارتنبِrg را به دست آورید.

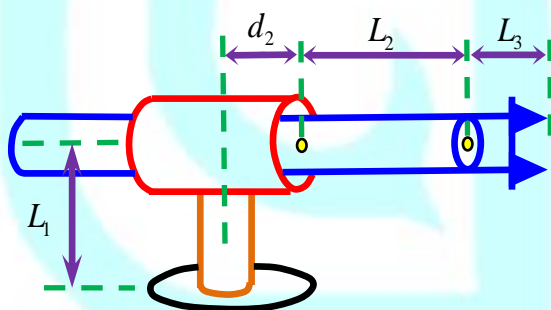


شکل (۷-ب): شکل شماتیک ربات RPR

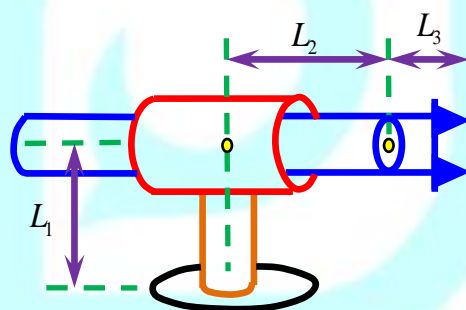


شکل (۷-الف): بازوی مکانیکی صفحه‌ای با دو درجه آزادی دورانی و یک درجه آزادی کشویی

شکل (۸-الف) این بازوی مکانیکی را در حالتی که مفصل کشویی آن به طول مینیمم خود رسیده است، نشان می‌دهد. همچنین شکل (۸-ب) ربات را در حالتی نشان می‌دهد که رابط شماره ۲ به اندازه d_2 باز شده است.



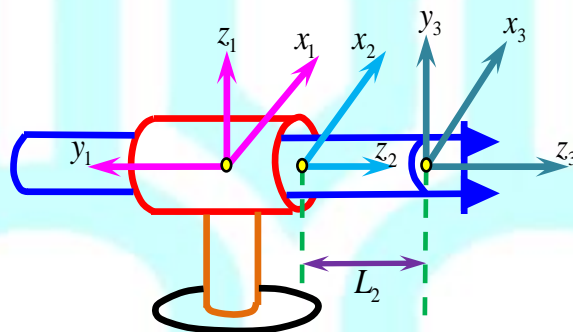
شکل (۸-ب): بازوی مکانیکی RPR در حالی که رابط کشویی ۲ به اندازه d_2 باز شده است.



شکل (۸-الف): بازوی مکانیکی RPR در حالی که رابط کشویی ۲ کمترین طول خود را داراست.

برای اتصال دستگاه مختصات به هر رابط همانند گذشته از محور دوران هر مفصل خطوطی نامتناهی در نظر گرفته و محورهای z_i را بر روی این خطوط قرار می‌دهیم. همانگونه که در شکل (۹) مشاهده می‌گردد، محورهای z_1 و z_2 متقاطع هستند. لذا محور x_1 عمود بر صفحه شامل این دو محور لحاظ می‌گردد. محورهای z_2 و z_3 در یک امتداد هستند. لذا طول عمود مشترک a_2 صفر است. برای آنکه تعداد بیشتری از پارامترهای

میله‌بندی صفر گردد، محور x_2 را هم جهت با x_1 در نظر می‌گیریم. اولین متغیر مفصلی θ_1 است. لذا جهت‌گیری دستگاه مختصات متصل به پایه ربات را به گونه‌ای در نظر می‌گیریم تا به ازاء صفر شدن این متغیر مفصلی، این دو دستگاه $\{0\}$ و $\{1\}$ بر هم منطبق گردند. همچنین آخرین متغیر مفصلی θ_3 است. لذا دستگاه مختصات متصل به این رابط را به گونه‌ای در نظر می‌گیریم تا با صفر شدن این متغیر مفصلی دستگاه‌های $\{2\}$ و $\{3\}$ بر هم منطبق گردند.



شکل (۹): اختصاص چهارچوبهای مناسب به بازوی مکانیکی صفحه‌ای RPR

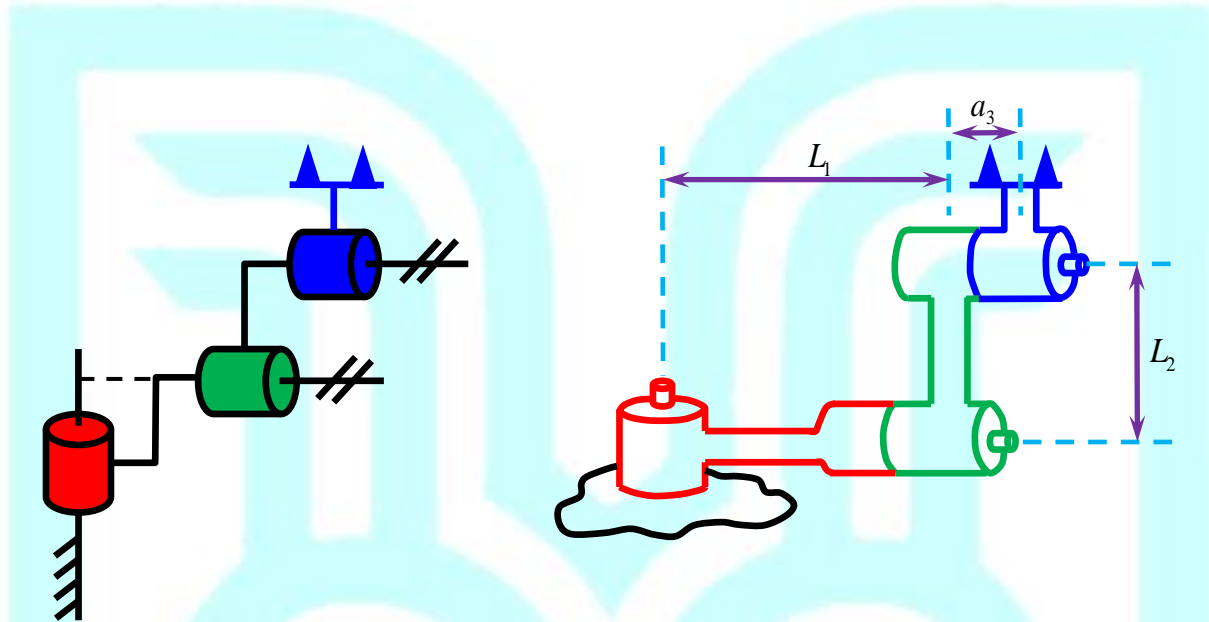
پارامترهای دناویت-هارتنبرگ برای این ربات نیز به طریق زیر ارائه می‌گردد.

جدول (۲): پارامترهای دناویت-هارتنبرگ مربوط به بازوی مکانیکی RPR

i	α_{i-1}	a_{i-1}	d_i	θ_i
1	0	0	0	θ_1
2	90°	0	d_2	0
3	0	0	L_2	θ_3

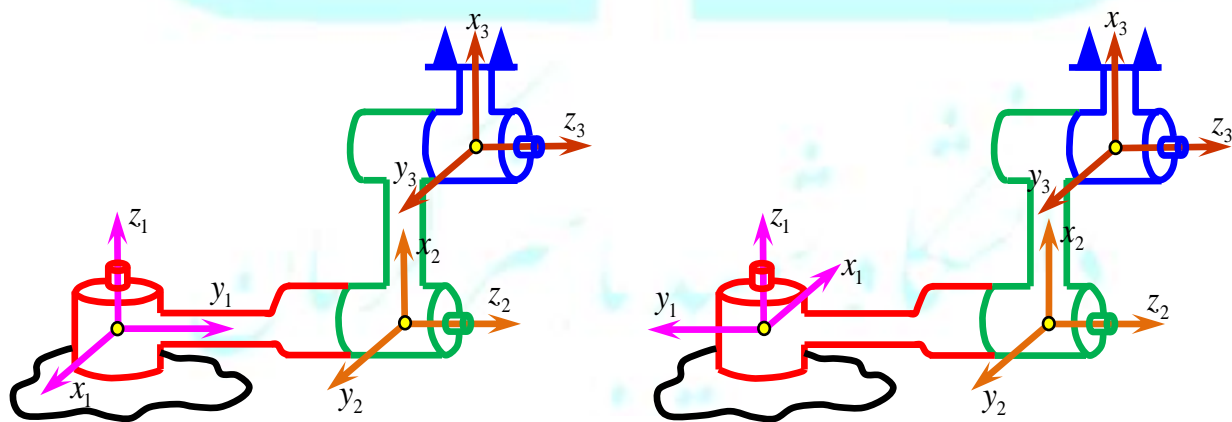
• مثال

در شکل (۱۰)، یک ربات RRR با شکل شماتیک آن آورده شده است. دستگاه مختصات مربوط به هر رابط را تعیین نموده و نشان دهید که این دستگاهها لزوماً منحصر به فرد نیستند.



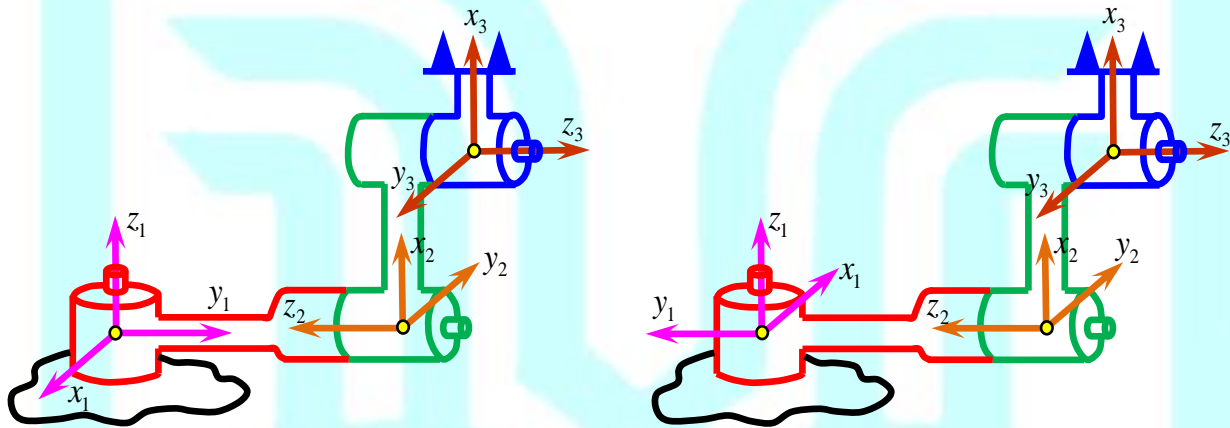
شکل (۱۰): بازوی مکانیکی غیر صفحه‌ای با سه مفصل دورانی

ابتدا محور z_i را بر روی محور مفصلی هر رابط قرار می‌دهیم. بدیهیست که محورهای z_1 و z_2 متقاطع هستند. لذا محور x_1 می‌تواند هم عمود بر صفحه به سمت بیرون و یا عمود بر صفحه به سمت داخل اختیار گردد. شکل (۱۱) این دو حالت مختلف را نشان می‌دهد.



شکل (۱۱): دو روش تخصیص چهارچوبهای رابط

از طرفی اگر برای z_2 راستایی خلاف آنچه که در شکل (۱۱) نشان داده شده است، قائل شویم؛ آنگاه نمایش دستگاهها به صورت زیر خواهد شد.



شکل (۱۲): دو روش دیگر برای تخصیص چهارچوبهای رابط

• **تمرین**

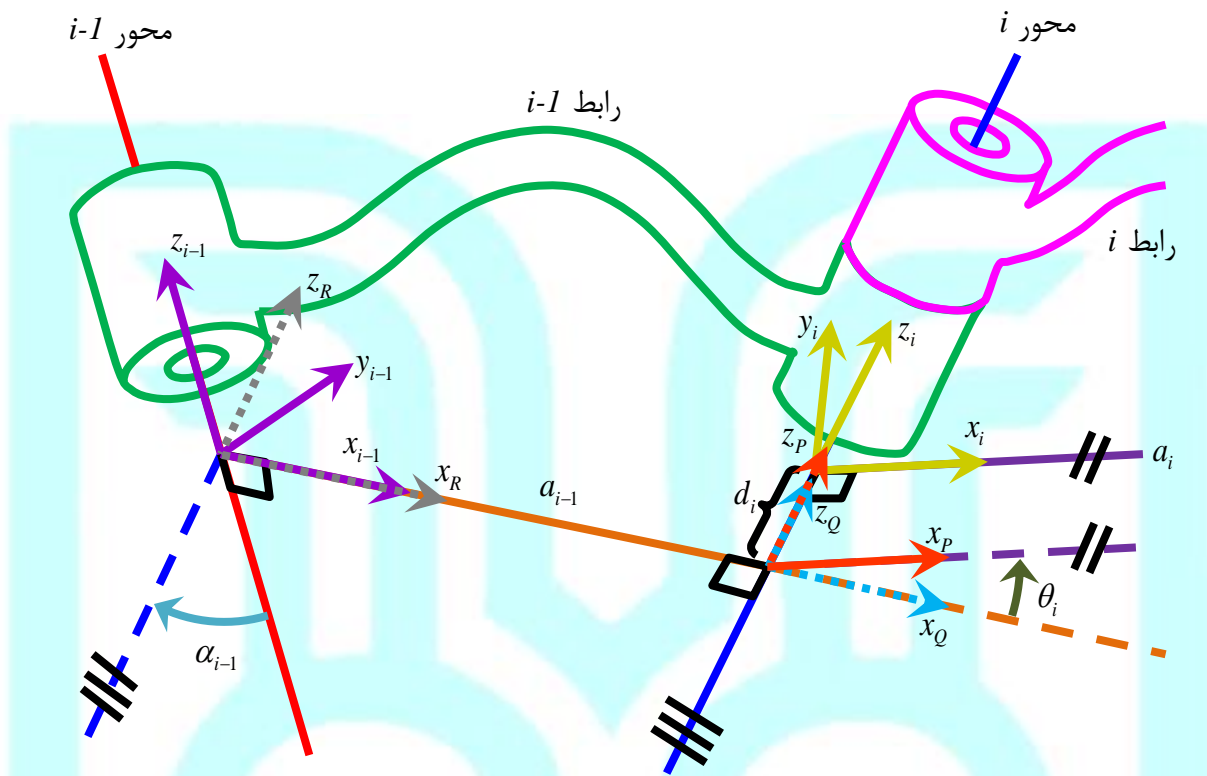
در هر یک از چهار مورد بالا پارامترهای دناویت-هارتنبرگ را تعیین نمایید.

• **سینماتیک بازوهای مکانیکی ماهر**

در ادامه، تبدیل همگنی که چهارچوبهای متصل به رابطهای مجاور را به یکدیگر مربوط می‌سازد، ارائه خواهیم نمود. با ترکیب این تبدیلهای کلی می‌توان مکان و جهتگیری رابط $\{n\}$ را نسبت به رابط $\{0\}$ بدست آورد.

• **محاسبه تبدیل هر رابط**

در اینجا می‌خواهیم تبدیلی را که چهارچوب $\{i\}$ را نسبت به چهارچوب $\{i-1\}$ تعریف می‌کند، تعیین کنیم (شکل (۱۳)).



شکل (۱۳): محل قرار گیری چهارچوبهای میانی P, Q و R

ماتریس تبدیل همگن این دو چهارچوب تابعی از چهار پارامتر دناویت-هارتنبِرج خواهد بود. لذا برای بدست آوردن ${}^{i-1}T_i$ از چهار تبدیل جزئی تر استفاده می‌کنیم. هر یک از این چهار تبدیل جزئی تر تابعی از تنها یک پارامتر رابط خواهد بود. در شکل (۱۳) چهارچوبهای میانی $\{P\}$ ، $\{Q\}$ و $\{R\}$ برای دو مفصل همسایه نشان داده شده است.

تفاوت چهارچوب $\{R\}$ با چهارچوب $\{i-1\}$ تنها در یک دوران به اندازه α_{i-1} است. لذا ماتریس تبدیل بین این دو چهارچوب عبارت می‌شود از:

$${}^{i-1}T_R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & C\alpha_{i-1} & -S\alpha_{i-1} & 0 \\ 0 & S\alpha_{i-1} & C\alpha_{i-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1)$$

تفاوت دستگاه $\{Q\}$ و $\{R\}$ در یک انتقال به مقدار a_{i-1} است. لذا داریم:

$${}^R T_Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a_{i-1} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2)$$

تفاوت چهارچوب $\{P\}$ و $\{Q\}$ نیز در یک دوران به اندازه θ_i خلاصه می‌شود. لذا ماتریس تبدیل این دو دستگاه به صورت زیر ارائه می‌گردد.

$${}^Q T_P = \begin{bmatrix} C\theta_i & -S\theta_i & 0 & 0 \\ S\theta_i & C\theta_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3)$$

و سرانجام تفاوت $\{i\}$ با $\{P\}$ در یک انتقال به اندازه d_i است. ماتریس تبدیل در این حالت به صورت زیر ارائه می‌گردد.

$${}^P T_i = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4)$$

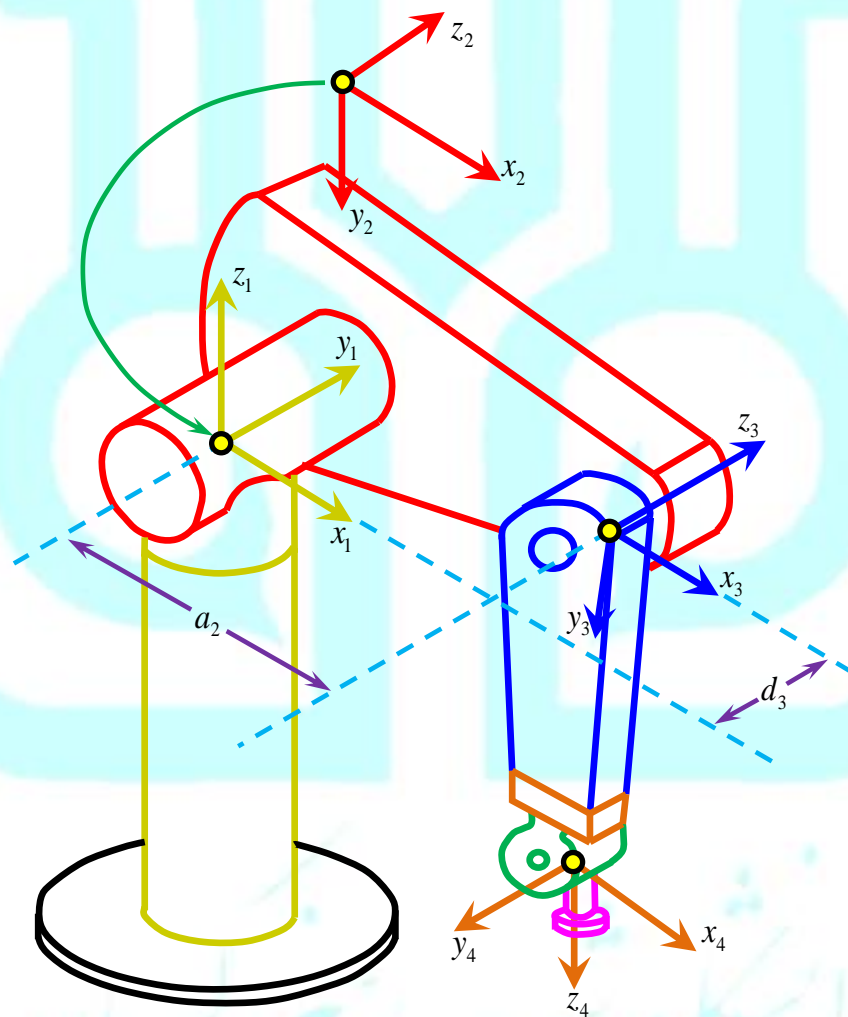
با توجه به روابط (۱) الی (۴) تبدیل بین دستگاه $\{i\}$ و $\{i-1\}$ به صورت زیر ارائه می‌گردد.

$${}^{i-1} T_i = {}^{i-1} T_R {}^R T_Q {}^Q T_P {}^P T_i = \begin{bmatrix} C\theta_i & -S\theta_i & 0 & a_{i-1} \\ S\theta_i C\alpha_{i-1} & C\theta_i C\alpha_{i-1} & -S\alpha_{i-1} & -S\alpha_{i-1} d_i \\ S\theta_i S\alpha_{i-1} & C\theta_i S\alpha_{i-1} & C\alpha_{i-1} & C\alpha_{i-1} d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5)$$

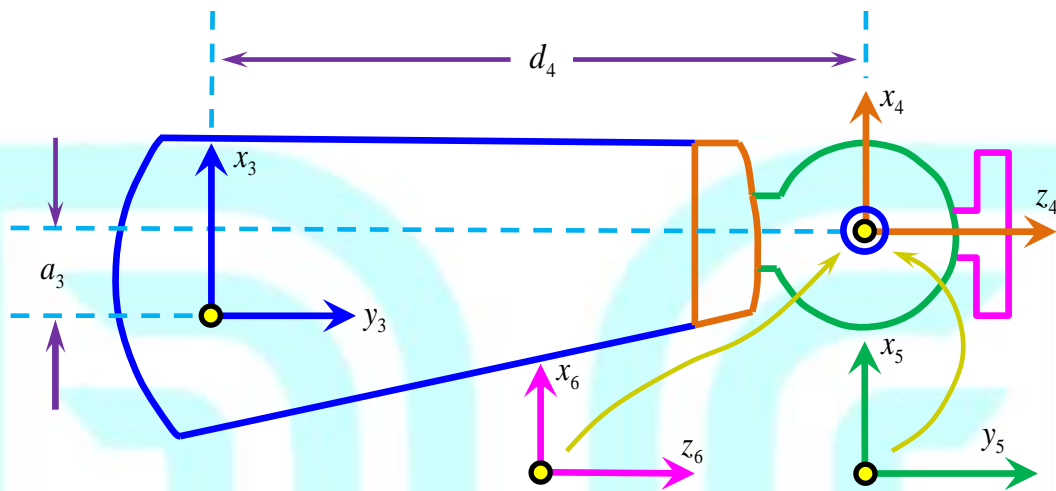
• مثال: سینماتیک ربات پوما ۵۶۰

در شکل (۱۴) ربات پوما ۵۶۰ نشان داده شده است. همه مفصلهای این ربات لولایی و تعداد درجات آزادی آن شش است. در اینجا نیز ابتدا محور مفصلی هر لینک را مشخص نموده و محور z_i را در امتداد این محورهای

مفصلی قرار می‌دهیم. همانگونه که در بسیاری از رباتهای صنعتی مرسوم است، در این ربات نیز محورهای مفصلی ۴، ۵ و ۶ در یک نقطه یکدیگر را قطع می‌کنند. این سه محور که مکانیزم مچ دست ربات را تشکیل می‌دهند، در شکل (۱۵) نشان داده شده‌اند. محورهای x_i و y_i نیز دقیقاً به همان شیوه‌ای که قبلاً ذکر آن رفت، به هر رابط تخصیص خواهد یافت.



شکل (۱۴): چهارچوبهای رابط و برخی پارامترهای سینماتیکی ربات پوما ۵۶۰



شکل (۱۵): پارامترهای سینماتیکی و چهارچوبهای اختصاص یافته به ساعد ربات پوما ۵۶۰

پارامترهای دناویت-هارتنبیگ نیز برای این ربات به طریق زیر ارائه می‌گردد.

جدول (۳): پارامترهای دناویت-هارتنبیگ برای ربات پوما ۵۶۰

i	α_{i-1}	a_{i-1}	d_i	θ_i
1	0	0	0	θ_1
2	-90°	0	0	θ_2
3	0	a_2	d_3	θ_3
4	-90°	a_3	d_4	θ_4
5	90°	0	0	θ_5
6	-90°	0	0	θ_6

با توجه به رابطه (۵) هر یک از تبدیلهای کلی رابطها چنین نوشته می‌شود.

$${}^0T_1 = \begin{bmatrix} C\theta_1 & -S\theta_1 & 0 & 0 \\ S\theta_1 & C\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (۶)$$

$${}^1T_2 = \begin{bmatrix} C\theta_2 & -S\theta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -S\theta_2 & -C\theta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (7)$$

$${}^2T_3 = \begin{bmatrix} C\theta_3 & -S\theta_3 & 0 & a_2 \\ S\theta_3 & C\theta_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (8)$$

$${}^3T_4 = \begin{bmatrix} C\theta_4 & -S\theta_4 & 0 & a_3 \\ 0 & 0 & 1 & d_4 \\ -S\theta_4 & -C\theta_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (9)$$

$${}^4T_5 = \begin{bmatrix} C\theta_5 & -S\theta_5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ S\theta_5 & C\theta_5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (10)$$

$${}^5T_6 = \begin{bmatrix} C\theta_6 & -S\theta_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -S\theta_6 & -C\theta_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (11)$$

حال می‌توان با ضرب ماتریسی این تبدیلهای همگن، تبدیل کلی 0T_6 را محاسبه نمود. با داشتن این ماتریس، موقعیت و جهتگیری مچ ربات نسبت به دستگاه پایه معلوم خواهد بود.

$${}^0T_6 = {}^0T_1 {}^1T_2 {}^2T_3 {}^3T_4 {}^4T_5 {}^5T_6 \quad (12)$$

• تمرین:

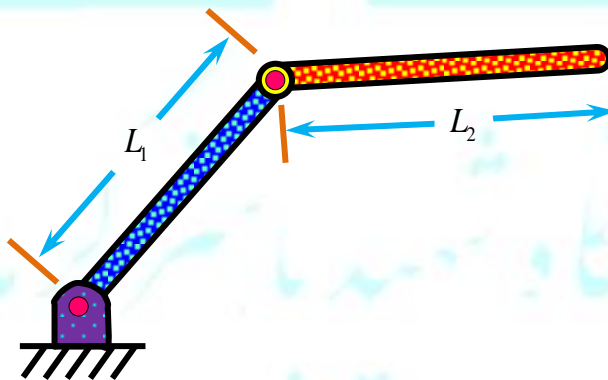
در شکل‌های زیر به هر ربات دستگاه مناسب اختصاص داده و پارامترهای دناویت-هارتنبرگ را تعیین نمایید.

• سینماتیک معکوس

پیشتر با داشتن زوایای مفصلی بازوی مکانیکی و جایگذاری آن در ماتریس تبدیل مکان و جهتگیری مچ ربات تعیین می‌گردید. به مسئله تعیین موقعیت و جهتگیری مچ ربات با داشتن زوایای مفصلی سینماتیک مستقیم می‌گویند. اکنون به دنبال حل مسئله سینماتیک معکوس هستیم. بدین معنا که چگونه می‌توان با داشتن مکان و جهتگیری مطلوب مچ ربات، زوایای مفصلی ربات را تعیین نماییم. بدین منظور ابتدا ماتریسهای تبدیل مورد نیاز برای بدست آوردن توصیف چهارچوب متصل به مچ ربات نسبت به چهارچوب پایه را محاسبه می‌کنیم و سپس برای یافتن زوایای مفصلی از سینماتیک معکوس استفاده خواهیم کرد. در حل دستگاههای جبری غیر خطی باید وجود جواب، جوابهای چند گانه و روشهای حل معادله‌ها بررسی شود.

• وجود جواب

وجود جواب یا عدم وجود جواب، به فضای کاری بازوی مکانیکی ماهر بستگی دارد. فضای کاری حجمی از فضاست که مجری نهایی بازو قادر است آن را تحت پوشش قرار دهد. شرط وجود جواب آن است که نقطه تعیین شده به عنوان هدف، در محدوده فضای کاری باشد. بازوی مکانیکی شکل (۱) را در نظر بگیرید.



شکل (۱): بازوی مکانیکی ماهر با دو رابط به طولهای l_1 و l_2

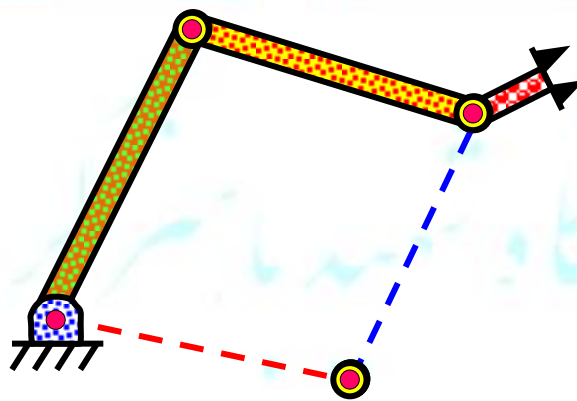
اگر $l_1 \neq l_2$ باشد، آنگاه فضای کاری این بازوی مکانیکی حلقه‌ای به شعاع خارجی $l_1 + l_2$ و شعاع داخلی آن $|l_1 - l_2|$ خواهد بود. البته به شرط آنکه مفصلهای بازوی مکانیکی ماهر 360° دوران کنند. در رباتهای واقعی این امر به ندرت اتفاق می‌افتد. لذا هنگامی که زاویه دوران مفصلها از 360° کمتر باشد، فضای کاری نیز محدود خواهد شد.

همانگونه که می‌دانیم، اگر بازوی مکانیکی کمتر از شش درجه آزادی داشته باشد، نمی‌توان مکان و جهتگیری دلخواهی را برای مجری نهایی قائل شد. در حالت کلی فضای کاری چنین رباتی زیر مجموعه‌ای از یک زیر فضا است.

فضای کاری معمولاً برای مجری نهایی تعریف می‌گردد. در واقع سؤالی که بایستی پاسخ داده شود این است که آیا مکان و جهتگیری مجری نهایی در فضای کاری قرار دارد؟ اگر جواب مثبت باشد آنگاه حداقل یک جواب وجود خواهد داشت.

• جوابهای چندگانه

شکل (۲) یک بازوی صفحه‌ای با سه رابط را نشان می‌دهد که مجری نهایی در مکان و جهتگیری معینی قرار دارد.



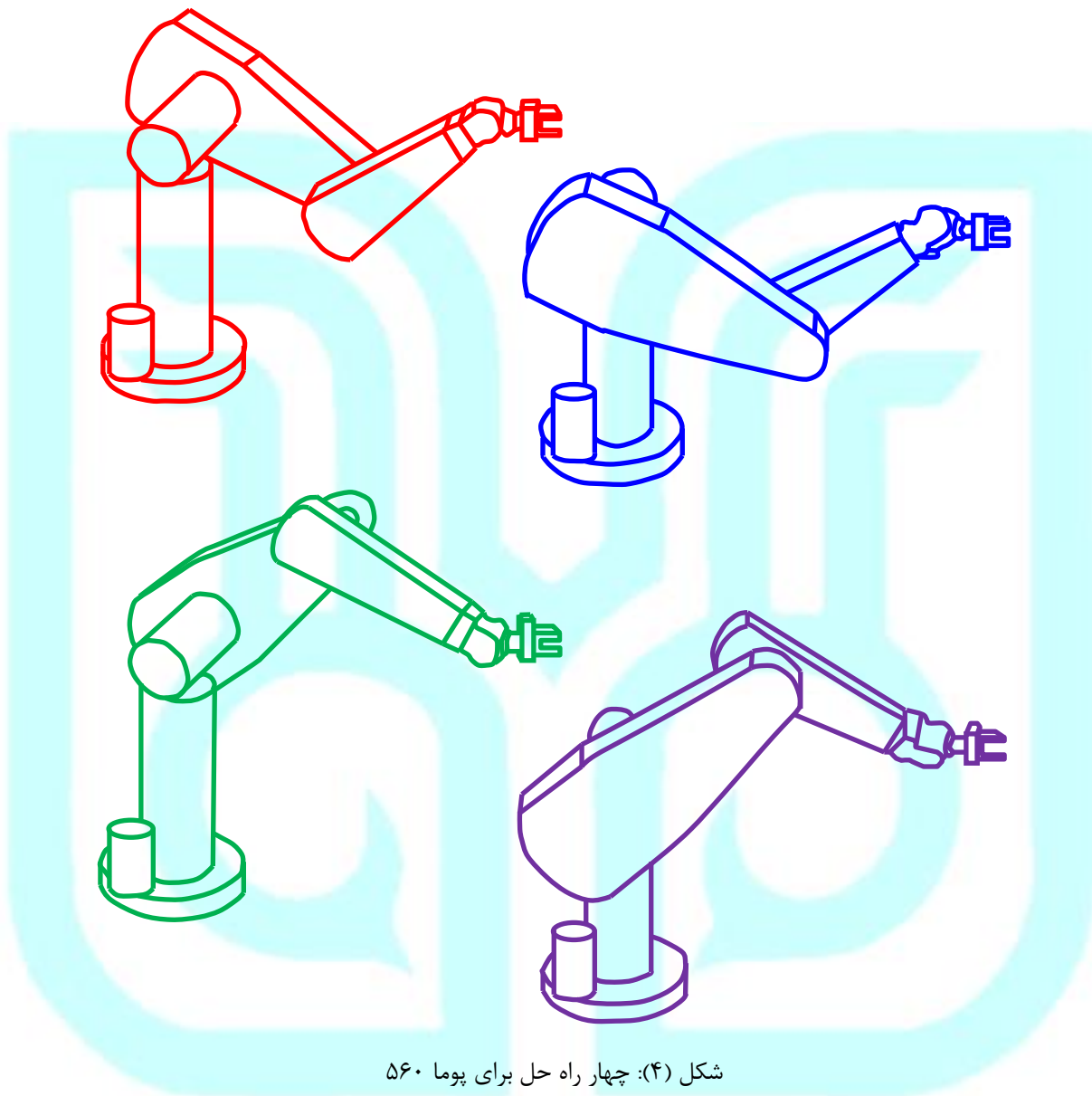
شکل (۲): بازوی مکانیکی ماهر با سه رابط. خط چینها پیکر بندی دوم را مشخص می‌کند.

خط چینها، پیکر بندی دومی را برای رسیدن مجری نهایی به همان مکان و جهتگیری نشان می‌دهد. لذا در اینجا با دو پیکربندی متفاوت، مچ ربات دارای یک موقعیت و یک جهتگیری مشخص است. معمولاً وقتی یک سیستم رباتیکی دارای چند جواب است، نزدیکترین جواب یک انتخاب معقول است. مثلاً در شکل (۳)، اگر بازوی مکانیکی در نقطه A باشد و بخواهیم آن را به نقطه B انتقال دهیم، جوابی که به ازاء آن میزان حرکت هر مفصل مینیمم شود، انتخابی مناسب خواهد بود. البته در صورتیکه در راه حرکت بازو مانعی وجود نداشته باشد. در این صورت به ناچار باید جواب دورتر انتخاب گردد. در این حالت مطابق شکل (۳)، باید برای رسیدن به نقطه B از پیکربندی خط چین پایینی استفاده شود.



شکل (۳): یکی از دو راه حل ممکن برای رسیدن به نقطه B ، باعث برخورد بازو به مانع می‌شود.

به طور مثال ربات پوما ۵۶۰ می‌تواند به ۸ طریق مختلف به برخی از هدفها دسترسی پیدا کند. در شکل (۴) چهار راه حل که همگی دست ربات را در مکان و جهتگیری نهایی یکسانی قرار می‌دهند، نشان داده شده است.



شکل (۴): چهار راه حل برای پوما ۵۶۰

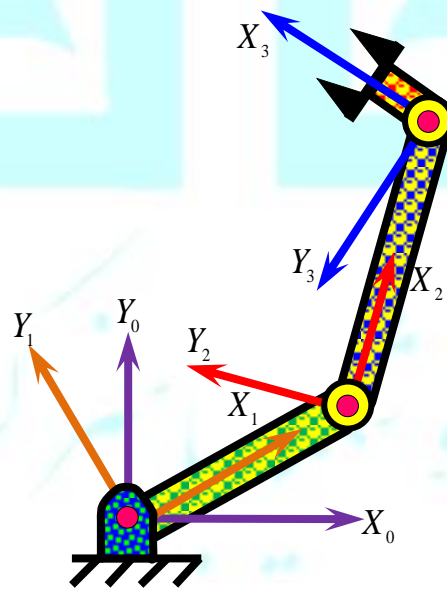
• روش حل

سینماتیک معکوس بازوهای مکانیکی منجر به حل یک دستگاه معادلات غیر خطی می‌گردد. در اینجا روشهای حل معادله‌های بازوهای مکانیکی ماهر را به دو دسته روشهای حل بسته و روشهای عددی تقسیم می‌کنیم. از آنجا که در روشهای حل عددی عملیات تکرار می‌شوند، در حالت کلی این روشها بسیار کندتر از روشهای بسته

هستند. لذا خود را به روشهای حل بسته محدود می‌کنیم. منظور از روشهای بسته، روش حلی است که بر عبارتهای تحلیلی مبتنی است. روشهای حل بسته را می‌توان به دو گروه جبری و هندسی تقسیم کرد. همه سیستمهایی که مفصلهای کشویی و لولایی دارند و جمعاً شش درجه آزادی را در یک زنجیره سری سینماتیکی شامل می‌شوند، قابل حل هستند. نظر به اینکه روشهای عددی بسیار وقت گیرتر از روشهای تحلیلی هستند، باید ربات را طوری طراحی کرد که معادله‌های سینماتیکی آن راه حل تحلیلی داشته باشند. شرط کافی برای آنکه بازویی با شش مفصل لولایی، جواب تحلیلی داشته باشد، آن است که سه محور مفصلی آن یکدیگر را در یک نقطه قطع کنند. تقریباً همه بازوهای مکانیکی ماهر با شش درجه آزادی که امروزه طراحی می‌شوند، سه محور مفصلی متقاطع دارند. مثلاً در پوما ۵۶۰ محورهای ۴ و ۵ و ۶ متقاطع اند.

• مثال

با استفاده از راه حل جبری، معادله‌های سینماتیک معکوس ربات دست سه درجه آزادی صفحه‌ای شکل (۵) را تعیین نمایید.



شکل (۵): بازوی مکانیکی ماهر صفحه‌ای با سه رابط

پارامترهای دناویت-هارتنبرگ ربات فوق عبارتند از:

جدول (۱): پارامترهای دناویت-هارتنبرگ مربوط به ربات دست سه درجه آزادی صفحه‌ای

i	α_{i-1}	a_{i-1}	d_i	θ_i
1	0	0	0	θ_1
2	0	L_1	0	θ_2
3	0	L_2	0	θ_3

با داشتن پارامترهای دناویت-هارتنبرگ و تشکیل ماتریسهای تبدیل، چهارچوب متصل به مچ نسبت به چهارچوب پایه به صورت زیر ارائه می‌گردد.

$${}^0T_3 = \begin{bmatrix} \cos(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) & -\sin(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) & 0 & l_1 \cos(\theta_1) + l_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) \\ \sin(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) & \cos(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) & 0 & l_1 \sin(\theta_1) + l_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (a)$$

چون بازو صفحه‌ای است تعیین نقاط هدف به سادگی با سه پارامتر x و y و ϕ انجام می‌پذیرد. (ϕ جهتگیری رابط 3 در صفحه نسبت به محور X_0 است). لذا موقعیت مچ نسبت به دستگاه پایه عبارت است از:

$${}^0T_3 = \begin{bmatrix} \cos \phi & -\sin \phi & 0 & x \\ \sin \phi & \cos \phi & 0 & y \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (b)$$

با مساوی قرار دادن معادلات (a) و (b) دستگاه زیر حاصل می‌گردد.

$$\cos \phi = \cos(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) \quad (c)$$

$$\sin \phi = \sin(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) \quad (d)$$

$$x = l_1 \cos \theta_1 + l_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) \quad (e)$$

$$y = l_1 \sin \theta_1 + l_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) \quad (f)$$

با کمک معادلات (c) تا (f) می‌توان مجهولات θ_1 ، θ_2 و θ_3 را تعیین نمود. اگر روابط (e) و (f) را به توان دو رسانده و با هم جمع کنیم، نتیجه زیر حاصل می‌گردد.

$$x^2 + y^2 = l_1^2 + l_2^2 + 2l_1l_2 \cos \theta_2 \quad (g)$$

با حل معادله (g)، $\cos \theta_2$ به طریق زیر حاصل می‌گردد.

$$\cos \theta_2 = \frac{x^2 + y^2 - l_1^2 - l_2^2}{2l_1l_2} \quad (h)$$

این معادله در صورتی جواب دارد که سمت راست آن بین یک و منهای یک باشد. در غیر اینصورت نقطه هدف خارج از دسترسی ربات قرار دارد. با داشتن $\cos \theta_2$ می‌توان $\sin \theta_2$ را به طریق زیر محاسبه نمود.

$$\sin \theta_2 = \pm \sqrt{1 - \cos^2 \theta_2} \quad (i)$$

و سرانجام θ_2 با استفاده از تابع $A \tan 2$ به صورت زیر محاسبه می‌گردد.

$$\theta_2 = A \tan 2(\sin \theta_2, \cos \theta_2) \quad (j)$$

با توجه به معادله (i)، نتیجه می‌شود که برای θ_2 دو جواب بدست می‌آید. بسته به آنکه بخواهیم بازوی دوم در بالا و یا پایین باشد، یکی از این دو زاویه را انتخاب می‌کنیم. پس از پیدا کردن عبارتی سیمبولیک برای θ_2 نوبت به یافتن عبارتی نمادین برای θ_1 می‌رسد. معادلات (e) و (f) را بسط داده و به صورت زیر بازنویسی می‌کنیم.

$$x = k_1 \cos \theta_1 - k_2 \sin \theta_1 \quad (k)$$

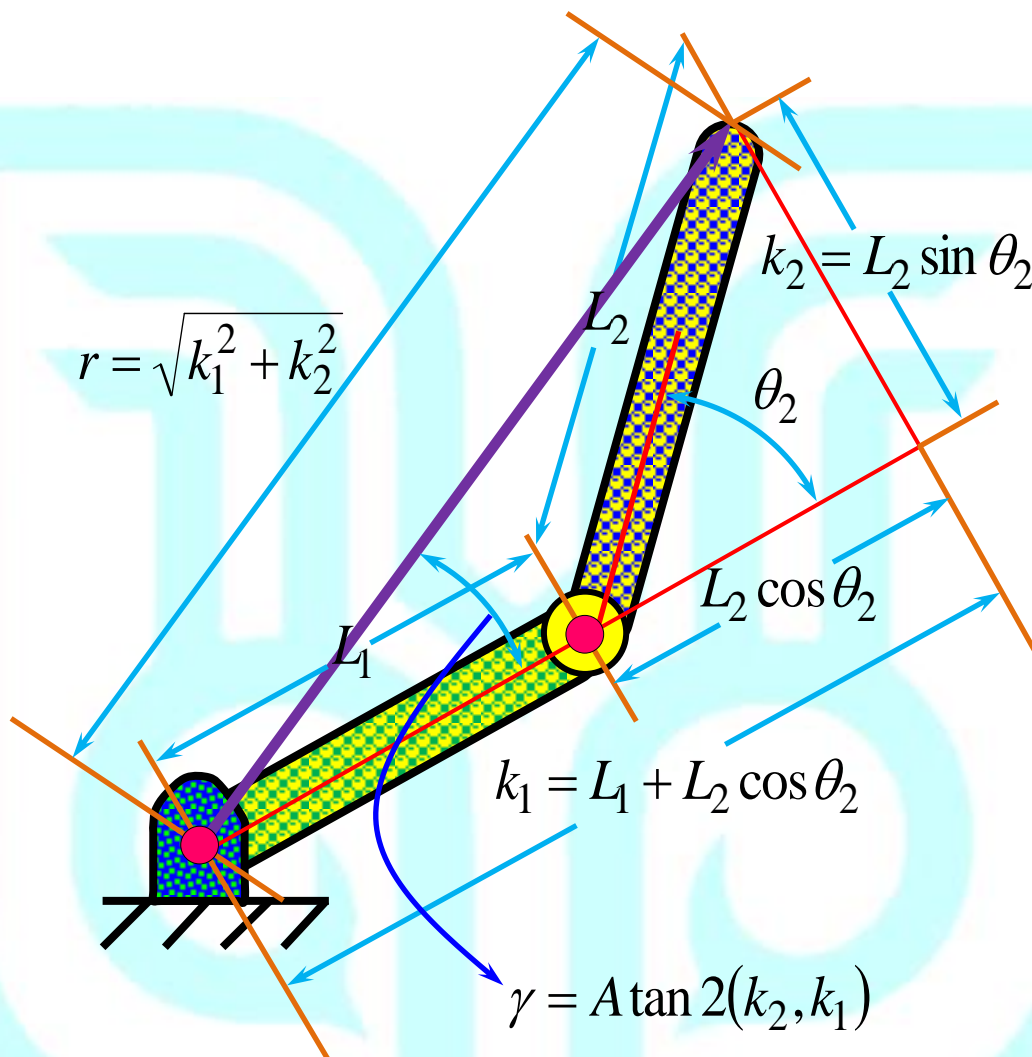
$$y = k_1 \sin \theta_1 + k_2 \cos \theta_1 \quad (l)$$

که در آن

$$k_1 = l_1 + l_2 \cos \theta_2 \quad (m)$$

$$k_2 = l_2 \sin \theta_2 \quad (n)$$

لازم به ذکر است که k_1 و k_2 کمیت‌هایی معلوم هستند. در شکل (۶) این مقادیر بر روی ربات نشان داده شده‌اند.



شکل (۶): پارامترهای k_2 و k_1 بر روی ربات صفحه ای

با توجه به این شکل می توان عبارات معادلی را برای k_1 و k_2 ارائه نمود.

$$k_1 = r \cos \gamma \quad (o)$$

$$k_2 = r \sin \gamma \quad (p)$$

با جایگذاری معادلات (o) و (p) در روابط (k) و (l) و ساده کردن عبارات حاصله داریم:

$$\cos(\gamma + \theta_1) = \frac{x}{r} \quad (q)$$

$$\sin(\gamma + \theta_1) = \frac{y}{r} \quad (r)$$

با استفاده از تابع $A \tan 2$ داریم:

$$\gamma + \theta_1 = A \tan 2\left(\frac{y}{r}, \frac{x}{r}\right) = A \tan 2(y, x) \quad (s)$$

در نتیجه θ_1 به صورت زیر ارائه می‌گردد.

$$\theta_1 = A \tan 2(y, x) - A \tan 2(k_2, k_1) \quad (t)$$

در پایان θ_1 با کمک معادله (c) و یا (d) به طریق زیر ارائه می‌گردد.

$$\theta_3 = \phi - \theta_1 - \theta_2 \quad (u)$$

• راه حل هندسی

در حل معادله‌های سینماتیکی بازوی مکانیکی ماهر به کمک راه حل هندسی، سعی می‌شود هندسه بازو به چند هندسه ساده‌تر تجزیه شود. پس از این مرحله، زوایای مفصلی با استفاده از اصول هندسی بدست می‌آیند.

• مثال

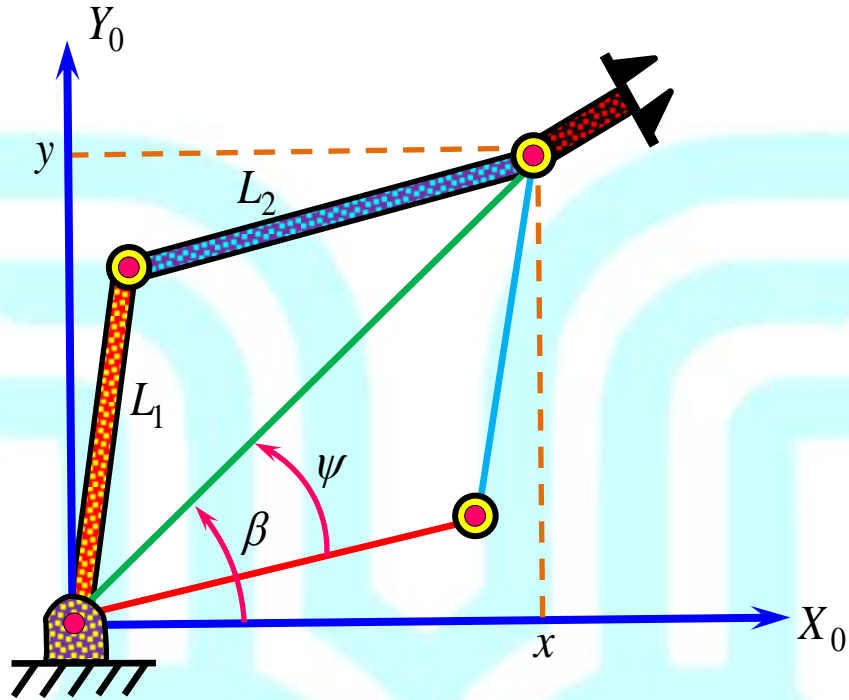
برای ربات با سه درجه آزادی شکل (۷) مشاهده می‌گردد، خط چینها مثلث دیگری را نشان می‌دهند که می‌تواند برای رسیدن به وضعیت یکسانی از چهارچوب {3} به کار رود.

با استفاده از قانون کسینوسها می‌توان نوشت:

$$x^2 + y^2 = L_1^2 + L_2^2 - 2L_1L_2 \cos(180 + \theta_2) \quad (a)$$

با ساده کردن معادله (a) بدست می‌آوریم:

$$\cos \theta_2 = \frac{x^2 + y^2 - L_1^2 - L_2^2}{2L_1L_2} \quad (b)$$



شکل (۷): راه حل هندسی برای حل معادله‌های سینماتیک معکوس ربات صفحه‌ای با سه رابط

برای پیدا کردن کردن θ_1 کفایت زوایای ψ و β را در شکل (۷) به دست آوریم. زاویه β با استفاده از تابع $A \tan 2$ به صورت زیر ارائه می‌گردد.

$$\beta = A \tan 2(y, x) \quad (c)$$

برای بدست آوردن ψ مجدداً از قانون کسینوسها استفاده می‌کنیم.

$$L_1^2 + x^2 + y^2 - 2L_1\sqrt{x^2 + y^2} \cos \psi = L_2^2 \Rightarrow \cos \psi = \frac{L_2^2 - L_1^2 - x^2 - y^2}{-2L_1\sqrt{x^2 + y^2}} \quad (d)$$

با داشتن ψ و β زاویه θ_1 به طریق زیر ارائه می‌گردد.

$$\theta_1 = \beta \pm \psi \quad (e)$$

که در آن علامت مثبت برای $\theta_2 < 0$ و علامت منفی برای حالت $\theta_2 > 0$ به کار می‌رود. نهایتاً θ_3 با داشتن ϕ و محاسبه θ_1 و θ_2 به طریق زیر ارائه می‌گردد.

$$\theta_3 = \phi - \theta_1 - \theta_2 \quad (f)$$

• روش حل پایپر برای سه محور متقاطع در یک نقطه

پایپر بازوهای مکانیکی ماهر با شش درجه آزادی را که در آنها سه محور پیایی یکدیگر را در یک نقطه قطع می کنند، مطالعه کرد. در اینجا مسئله سینماتیک معکوس را برای یک ربات شش درجه آزادی که سه محور آخر متقارب هستند، حل می کنیم. از آنجا که سه محور آخر یکدیگر را در یک نقطه قطع می کنند، مبدأ چهارچوبهای {4}، {5} و {6} در این نقطه تقاطع واقع می شوند. مختصات این نقطه در چهارچوب پایه عبارت است از:

$${}^0P_{4ORG} = {}^0T_1 {}^1T_2 {}^2T_3 {}^3P_{4ORG} \quad (1)$$

که در آن ${}^3P_{4ORG}$ موقعیت مبدأ دستگاه مختصات شماره {4} را نسبت به دستگاه شماره {3} نشان می دهد. پیشتر ماتریس تبدیل بین دو دستگاه {i} و {i-1} را به صورت زیر ارائه نمودیم.

$${}^{i-1}T_i = \begin{bmatrix} C\theta_i & -S\theta_i & 0 & a_{i-1} \\ S\theta_i C\alpha_{i-1} & C\theta_i C\alpha_{i-1} & -S\alpha_{i-1} & -S\alpha_{i-1}d_i \\ S\theta_i S\alpha_{i-1} & C\theta_i S\alpha_{i-1} & C\alpha_{i-1} & C\alpha_{i-1}d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2)$$

که ستون آخر، موقعیت مبدأ مختصات دستگاه {i} را نسبت به دستگاه {i-1} نشان می دهد. لذا با استفاده از این ماتریس، ${}^3P_{4ORG}$ که در رابطه (1) ظاهر شده است، به صورت زیر ارائه می گردد.

$${}^3P_{4ORG} = \begin{bmatrix} a_3 \\ -S\alpha_3 d_4 \\ C\alpha_3 d_4 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (3)$$

با جایگذاری رابطه (3) در معادله (1)، موقعیت مبدأ مختصات دستگاه {4} نسبت به دستگاه مختصات پایه {0} عبارت می شود از:

$${}^0P_{4ORG} = {}^0T_1 {}^1T_2 {}^2T_3 \begin{bmatrix} a_3 \\ -S\alpha_3 d_4 \\ C\alpha_3 d_4 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (4)$$

2T_3 فقط تابعی از θ_3 است. لذا ضرب آن در بردار موقعیت ${}^3P_{4ORG}$ نتیجه زیر را در پی دارد.

$${}^0P_{4ORG} = {}^0T_1 {}^1T_2 \begin{bmatrix} f_1(\theta_3) \\ f_2(\theta_3) \\ f_3(\theta_3) \\ 1 \end{bmatrix} \quad (5)$$

که در آن $f_1(\theta_3)$ ، $f_2(\theta_3)$ و $f_3(\theta_3)$ عبارتند از:

$$\begin{bmatrix} f_1(\theta_3) \\ f_2(\theta_3) \\ f_3(\theta_3) \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C\theta_3 & -S\theta_3 & 0 & a_2 \\ S\theta_3 C\alpha_2 & C\theta_3 C\alpha_2 & -S\alpha_2 & -S\alpha_2 d_3 \\ S\theta_3 S\alpha_2 & C\theta_3 S\alpha_2 & C\alpha_2 & C\alpha_2 d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_3 \\ -S\alpha_3 d_4 \\ C\alpha_3 d_4 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (6)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} f_1 = a_3 C\theta_3 + d_4 S\theta_3 S\alpha_3 + a_2 \\ f_2 = a_3 S\theta_3 C\alpha_2 - d_4 S\alpha_3 C\theta_3 C\alpha_2 - d_4 C\alpha_3 S\alpha_2 - d_3 S\alpha_2 \\ f_3 = a_3 S\theta_3 S\alpha_2 - d_4 S\alpha_3 C\theta_3 S\alpha_2 + d_4 C\alpha_3 C\alpha_2 + d_3 C\alpha_2 \end{cases}$$

با استفاده از رابطه (۲)، مقادیر 0T_1 و 1T_2 را محاسبه نموده و در رابطه (۵) جایگذاری می‌کنیم.

$${}^0P_{4ORG} = \begin{bmatrix} C\theta_1 & -S\theta_1 & 0 & 0 \\ S\theta_1 & C\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C\theta_2 & -S\theta_2 & 0 & a_1 \\ S\theta_2 C\alpha_1 & C\theta_2 C\alpha_1 & -S\alpha_1 & -S\alpha_1 d_2 \\ S\theta_2 S\alpha_1 & C\theta_2 S\alpha_1 & C\alpha_1 & C\alpha_1 d_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1(\theta_3) \\ f_2(\theta_3) \\ f_3(\theta_3) \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C\theta_1 g_1 - S\theta_1 g_2 \\ S\theta_1 g_1 + C\theta_1 g_2 \\ g_3 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (7)$$

که در آن

$$\begin{cases} g_1 = f_1(\theta_3) C\theta_2 - f_2(\theta_3) S\theta_2 + a_1 \\ g_2 = f_1(\theta_3) S\theta_2 C\alpha_1 + f_2(\theta_3) C\theta_2 C\alpha_1 - f_3(\theta_3) S\alpha_1 - d_2 S\alpha_1 \\ g_3 = f_1(\theta_3) S\theta_2 S\alpha_1 + f_2(\theta_3) C\theta_2 S\alpha_1 + f_3(\theta_3) C\alpha_1 + d_2 C\alpha_1 \end{cases} \quad (8)$$

اکنون در رابطه (۷)، مربع بردار ${}^0P_{4ORG}$ را به شکل زیر ارائه می‌نماییم.

$$r = {}^0P_{4ORG}^T \cdot {}^0P_{4ORG} = g_1^2 + g_2^2 + g_3^2 \quad (9)$$

با استفاده از معادله (۸) و جایگذاری مقادیر g_i در معادله (۹) داریم:

$$r = f_1^2(\theta_3) + f_2^2(\theta_3) + f_3^2(\theta_3) + a_1^2 + d_2^2 + 2d_2f_3 + 2a_1(C\theta_2 f_1(\theta_3) - S\theta_2 f_2(\theta_3)) \quad (10)$$

معادله (۱۰) تنها تابعی از θ_3 و θ_2 است. اکنون این معادله را به همراه g_3 (معادله (۸)) که آن نیز تنها تابعی از θ_3 و θ_2 است، به صورت یک دستگاه معادلات به شکل زیر می‌نویسیم.

$$\begin{cases} r = (k_1 C\theta_2 + k_2 S\theta_2)2a_1 + k_3 \\ g_3 = (k_1 S\theta_2 - k_2 C\theta_2)S\alpha_1 + k_4 \end{cases} \quad (11)$$

که در آن

$$\begin{cases} k_1 = f_1(\theta_3) \\ k_2 = -f_2(\theta_3) \\ k_3 = f_1^2(\theta_3) + f_2^2(\theta_3) + f_3^2(\theta_3) + a_1^2 + d_2^2 + 2d_2f_3(\theta_3) \\ k_4 = f_3(\theta_3)C\alpha_1 + d_2C\alpha_1 \end{cases} \quad (12)$$

با حذف $S\theta_2$ و $C\theta_2$ از معادله (۱۱) رابطه زیر حاصل می‌گردد.

$$\begin{cases} (r - k_3)^2 = [(k_1 C\theta_2 + k_2 S\theta_2)2a_1]^2 \\ (g_3 - k_4)^2 = [(k_1 S\theta_2 - k_2 C\theta_2)S\alpha_1]^2 \end{cases} \rightarrow \frac{(r - k_3)^2}{4a_1^2} + \frac{(g_3 - k_4)^2}{S^2\alpha_1} = k_1^2 + k_2^2 \quad (13)$$

با جایگذاری پارامترهای k_i (که همگی تابعی از θ_3 هستند) در معادله (۱۳) و حل معادله حاصله، می‌توان θ_3 را به دست آورد. پس از بدست آوردن θ_3 ، می‌توان معادله (۱۱) را برای بدست آوردن θ_2 و معادله (۷) را برای پیدا کردن θ_1 حل کرد.

• مثال

مسئله سینماتیک معکوس را برای ربات پوما ۵۶۰ حل نمایید.

پیشتر ماتریس تبدیل را برای هر لینک به صورت زیر بدست آوردیم:

$${}^0T_1 = \begin{bmatrix} C_1 & -S_1 & 0 & 0 \\ S_1 & C_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad {}^1T_2 = \begin{bmatrix} C_2 & -S_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -S_2 & -C_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (a-b)$$

$${}^2T_3 = \begin{bmatrix} C_3 & -S_3 & 0 & 0 \\ S_3 & C_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad {}^3T_4 = \begin{bmatrix} C_4 & -S_4 & 0 & a_3 \\ 0 & 0 & 1 & d_4 \\ -S_4 & -C_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{(c-d)}$$

$${}^4T_5 = \begin{bmatrix} C_5 & -S_5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ S_5 & C_5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad {}^5T_6 = \begin{bmatrix} C_6 & -S_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -S_6 & -C_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{(e-f)}$$

از طرفی موقعیت و جهتگیری پنجه ربات نسبت به دستگاه پایه معلوم و عبارت است از:

$${}^0T_6 = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & P_x \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & P_y \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & P_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{(g)}$$

اکنون هدف تعیین عباراتی تحلیلی برای زوایای مفصلی θ_1 تا θ_6 بر حسب r_{11} تا r_{33} و همچنین P_x ، P_y و P_z می‌باشد. رابطه (g) بر حسب ماتریسهای تبدیل عبارت است از:

$${}^0T_6 = {}^0T_1 {}^1T_2 {}^2T_3 {}^3T_4 {}^4T_5 {}^5T_6 \quad \text{(h)}$$

بدیهی است که سمت چپ معادله (h) معلوم و سمت راست آن بر حسب زوایای مفصلی (θ_1 تا θ_6) مجهول است. با پیش ضرب کردن معادله (h) در ${}^1T_0 = [{}^0T_1]^{-1}$ داریم:

$$[{}^0T_1]^{-1} {}^0T_6 = \underbrace{[{}^0T_1]^{-1} {}^0T_1}_{[I]_{4 \times 4}} {}^1T_2 {}^2T_3 {}^3T_4 {}^4T_5 {}^5T_6 \quad \text{(i)}$$

با بسط سمت چپ و سمت راست معادله (i) داریم:

$$\begin{bmatrix} C_1 & S_1 & 0 & 0 \\ -S_1 & C_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & P_x \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & P_y \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & P_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \times & \times & \times & a_2 C_2 + a_3 C_{23} - d_4 S_{23} \\ \times & \times & \times & d_3 \\ \times & \times & \times & -a_3 S_{23} + a_2 S_2 - d_4 C_{23} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{(j)}$$

با مساوی قرار دادن درایه‌های (۲،۴) معادله (j) داریم:

$$-S_1P_x + C_1P_y = d_3 \quad (k)$$

برای حل معادله‌ای با شکل فوق، از جایگزینیهای مثلثاتی زیر استفاده می‌کنیم:

$$\begin{cases} P_x = \rho \cos \phi \\ P_y = \rho \sin \phi \end{cases} \quad (l)$$

با جایگذاری معادله (l) در معادله (k) داریم:

$$\rho(-S_1C_\phi + C_1S_\phi) = d_3 \Rightarrow \begin{cases} \sin(\phi - \theta_1) = \frac{d_3}{\rho} \\ \cos(\phi - \theta_1) = \pm \sqrt{1 - \frac{d_3^2}{\rho^2}} \end{cases} \quad (m)$$

لذا با توجه به معادله (m) داریم:

$$\phi - \theta_1 = A \tan 2 \left(\frac{d_3}{\rho}, \pm \sqrt{1 - \frac{d_3^2}{\rho^2}} \right) \quad (n)$$

با استفاده از معادله (l) به راحتی می‌توان نشان داد:

$$\begin{cases} \phi = A \tan 2(P_y, P_x) \\ \rho^2 = P_x^2 + P_y^2 \end{cases} \quad (o)$$

با کمک معادله (o)، رابطه (n) به فرم زیر ساده می‌گردد:

$$\theta_1 = -A \tan 2 \left(d_3, \pm \sqrt{P_x^2 + P_y^2 - d_3^2} \right) + A \tan 2(P_y, P_x) \quad (p)$$

در ادامه با مساوی قرار دادن درایه‌های (۱.۴)، (۲.۴) و (۳.۴) در معادله (j) داریم:

$$\begin{cases} C_1P_x + S_1P_y = a_2C_2 + a_3C_{23} - d_4S_{23} \\ -S_1P_x + C_1P_y = d_3 \\ P_z = -a_3S_{23} + a_2S_2 - d_4C_{23} \end{cases} \quad (q)$$

اگر معادله‌های دستگاه (q) را به توان دو برسانیم و معادله‌های حاصل را با هم جمع کنیم، داریم:

$$a_3C_3 - d_4S_3 = \underbrace{\frac{P_x^2 + P_y^2 + P_z^2 - a_2^2 - a_3^2 - d_3^2 - d_4^2}{2a_2}}_K \Rightarrow a_3C_3 - d_4S_3 = K \quad (r)$$

همانند قبل، برای حل معادله مثلثاتی (r) از جایگزینیهای زیر استفاده می‌کنیم:

$$\begin{cases} d_4 = \rho' \cos \phi' \\ a_3 = \rho' \sin \phi' \end{cases} \quad (s)$$

با جایگذاری معادله (s) در معادله (r) داریم:

$$\rho'(-S_3 C_{\phi'} + C_3 S_{\phi'}) = K \Rightarrow \begin{cases} \sin(\phi' - \theta_3) = \frac{K}{\rho'} \\ \cos(\phi' - \theta_3) = \pm \sqrt{1 - \frac{K^2}{\rho'^2}} \end{cases} \quad (t)$$

لذا با توجه به معادله (t) داریم:

$$\phi' - \theta_3 = A \tan 2 \left(\frac{K}{\rho'}, \pm \sqrt{1 - \frac{K^2}{\rho'^2}} \right) \quad (u)$$

با استفاده از معادله (s) به راحتی می‌توان نشان داد:

$$\begin{cases} \phi' = A \tan 2(a_3, d_4) \\ \rho'^2 = d_4^2 + a_3^2 \end{cases} \quad (v)$$

با کمک معادله (v)، رابطه (u) به فرم زیر ساده می‌گردد:

$$\theta_3 = -A \tan 2 \left(K, \pm \sqrt{a_3^2 + d_4^2 - K^2} \right) + A \tan 2(a_3, d_4) \quad (w)$$

در ادامه با پیش ضرب کردن معادله (h) در ${}^3T_0 = [{}^0T_3]^{-1}$ داریم:

$$[{}^0T_3]^{-1} {}^0T_6 = \underbrace{[{}^0T_3]^{-1} T_1 T_2 T_3}_{[T]_{4 \times 4}} T_4 T_5 T_6 \quad (x)$$

با بسط سمت چپ و سمت راست معادله (x) داریم:

$$\begin{bmatrix} C_1 C_{23} & S_1 C_{23} & -S_{23} & -a_2 C_3 \\ -C_1 S_{23} & -S_1 S_{23} & -C_{23} & a_2 S_3 \\ -S_1 & C_1 & 0 & -d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & P_x \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & P_y \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & P_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \times & \times & -C_4 S_5 & a_3 \\ \times & \times & \times & d_4 \\ \times & \times & S_4 S_5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (y)$$

در معادله (y) با مساوی قرار دادن درایه‌های (۴،۱) و (۲،۴) داریم:

$$\begin{cases} C_1 C_{23} P_x + S_1 C_{23} P_y - S_{23} P_z - a_2 C_3 = a_3 \\ -C_1 S_{23} P_x - S_1 S_{23} P_y - C_{23} P_z + a_2 S_3 = d_4 \end{cases} \quad (z)$$

در دستگاه معادلات (z) تنها S_{23} و C_{23} مجهول هستند. لذا با حل این دستگاه معادلات داریم:

$$\begin{bmatrix} C_1 P_x + S_1 P_y & -P_z \\ -P_z & -C_1 P_x - S_1 P_y \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} C_{23} \\ S_{23} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} a_3 + a_2 C_3 \\ d_4 - a_2 S_3 \end{Bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} S_{23} = \frac{(-a_3 - a_2 C_3)P_z + (C_1 P_x + S_1 P_y)(a_2 S_3 - d_4)}{P_z^2 + (C_1 P_x + S_1 P_y)^2} \\ C_{23} = \frac{(a_2 S_3 - d_4)P_z - (-a_3 - a_2 C_3)(C_1 P_x + S_1 P_y)}{P_z^2 + (C_1 P_x + S_1 P_y)^2} \end{cases} \quad (a1)$$

با استفاده از معادله (a1)، زاویه θ_{23} به طریق زیر حاصل می‌گردد:

$$\theta_{23} = A \tan 2 \left[\frac{(-a_3 - a_2 C_3)P_z - (C_1 P_x + S_1 P_y)(d_4 - a_2 S_3)}{(a_2 S_3 - d_4)P_z + (a_3 + a_2 C_3)(C_1 P_x + S_1 P_y)} \right] \quad (b1)$$

اکنون با در اختیار داشتن زاوایای θ_{23} (معادله (b1)) و θ_3 (معادله (w))، به راحتی می‌توان زاویه θ_2 را به طریق زیر بدست آورد:

$$\theta_{23} = \theta_2 + \theta_3 \Rightarrow \theta_2 = \theta_{23} - \theta_3 \quad (c1)$$

مجدداً با دقت در معادله (y) و مساوی قرار دادن درایه‌های (۳،۱) و (۳،۳) داریم:

$$\begin{cases} r_{13} C_1 C_{23} + r_{23} S_1 C_{23} - r_{33} S_{23} = -C_4 S_5 \\ -r_{13} S_1 + r_{23} C_1 = S_4 S_5 \end{cases} \quad (d1)$$

در معادله (d1) زاویه θ_4 به طریق زیر حاصل می‌گردد:

$$\theta_4 = A \tan 2 \left[-r_{13} S_1 + r_{23} C_1, -r_{13} C_1 C_{23} - r_{23} S_1 C_{23} + r_{33} S_{23} \right] \quad (e1)$$

در ادامه با پیش ضرب کردن معادله (h) در ${}^4T_0 = [{}^0T_4]^{-1}$ داریم:

$$[{}^0T_4]^{-1} {}^0T_6 = \underbrace{[{}^0T_4]^{-1} {}^0T_1}_{[I]_{4 \times 4}} {}^1T_2 {}^2T_3 {}^3T_4 {}^4T_5 {}^5T_6 \quad (f1)$$

با بسط سمت چپ و سمت راست معادله (f1) داریم:

$$\begin{bmatrix} C_1 C_{23} C_4 + S_1 S_4 & S_1 C_{23} C_4 - C_1 S_4 & -S_{23} C_4 & -a_2 C_3 C_4 + d_3 S_4 - a_3 C_4 \\ -C_1 C_{23} S_4 + S_1 C_4 & -S_1 C_{23} S_4 - C_1 C_4 & S_{23} S_4 & a_2 C_3 S_4 + d_3 C_4 + a_3 S_4 \\ -C_1 S_{23} & -S_1 S_{23} & -C_{23} & a_2 S_3 - d_4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (g1)$$

$$\times \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & P_x \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & P_y \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & P_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \times & \times & -S_5 & \times \\ S_6 & C_6 & \times & \times \\ \times & \times & C_5 & \times \\ \times & \times & \times & \times \end{bmatrix}$$

در معادله (y) با مساوی قرار دادن درایه‌های (۳،۱) و (۳،۳) داریم:

$$\begin{cases} (C_1 C_{23} C_4 + S_1 S_4) r_{13} + (S_1 C_{23} C_4 - C_1 S_4) r_{23} - (S_{23} C_4) r_{33} = -S_5 \\ -(C_1 S_{23}) r_{13} - (S_1 S_{23}) r_{23} - (C_{23}) r_{33} = C_5 \end{cases} \quad (h1)$$

در معادله (h1) زاویه θ_5 به طریق زیر حاصل می‌گردد:

$$\theta_4 = A \tan 2 \left[\frac{-(C_1 C_{23} C_4 + S_1 S_4) r_{13} - (S_1 C_{23} C_4 - C_1 S_4) r_{23} + (S_{23} C_4) r_{33}}{-(C_1 S_{23}) r_{13} - (S_1 S_{23}) r_{23} - (C_{23}) r_{33}} \right] \quad (i1)$$

در پایان برای محاسبه θ_6 با مساوی قرار دادن درایه‌های (۱،۲) و (۲،۲) داریم:

$$\begin{cases} (-C_1 C_{23} S_4 + S_1 C_4) r_{11} + (-S_1 C_{23} S_4 - C_1 C_4) r_{21} + (S_{23} S_4) r_{31} = S_6 \\ (-C_1 C_{23} S_4 + S_1 C_4) r_{12} + (-S_1 C_{23} S_4 - C_1 C_4) r_{22} + (S_{23} S_4) r_{32} = C_6 \end{cases} \quad (j1)$$

در معادله (j1) زاویه θ_6 به طریق زیر حاصل می‌گردد:

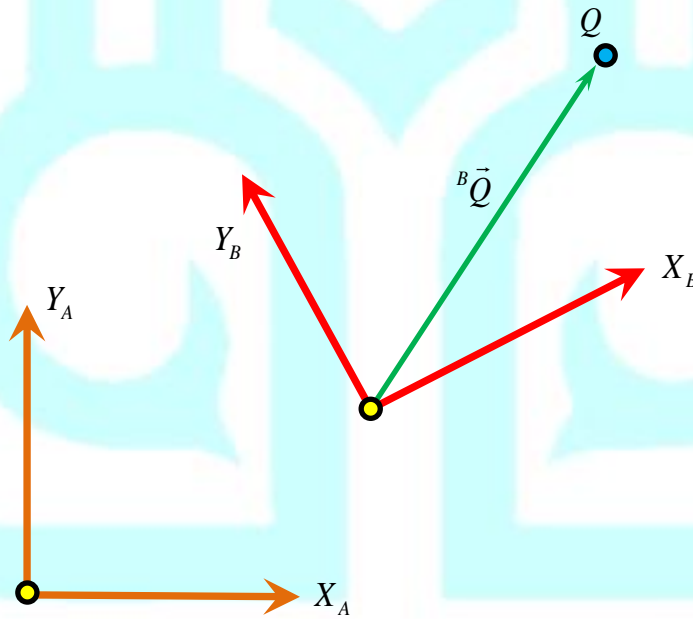
$$\theta_4 = A \tan 2 \left[\frac{(-C_1 C_{23} S_4 + S_1 C_4) r_{11} + (-S_1 C_{23} S_4 - C_1 C_4) r_{21} + (S_{23} S_4) r_{31}}{(-C_1 C_{23} S_4 + S_1 C_4) r_{12} + (-S_1 C_{23} S_4 - C_1 C_4) r_{22} + (S_{23} S_4) r_{32}} \right] \quad (k1)$$

- نمادگذاری برای مکان و جهتگیری متغیر با زمان

در ابتدای این فصل برخی از مفاهیم پایه همچون مشتقگیری از بردارها، سرعت زاویه‌ای و نمادگذاریهای مرتبط با این مفاهیم را بررسی می‌کنیم.

- مشتقگیری از بردارهای مکان

فرض کنید بردار ${}^B\bar{Q}$ ، موقعیت نقطه Q نسبت به مبدأ دستگاه مختصات $\{B\}$ را نشان دهد (شکل (۱)).



شکل (۱): موقعیت نقطه Q نسبت به دستگاه $\{B\}$ با بردار ${}^B\bar{Q}$ نشان داده می‌شود.

نرخ تغییرات این بردار نسبت به زمان به صورت زیر ارائه می‌گردد.

$${}^B\bar{V}_Q = \frac{d}{dt} {}^B\bar{Q} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{{}^B\bar{Q}(t + \Delta t) - {}^B\bar{Q}(t)}{\Delta t} \quad (1)$$

لازم به ذکر است که در رابطه (۱)، نرخ تغییرات بردار ${}^B\vec{Q}$ نسبت به دستگاه $\{B\}$ اندازه‌گیری می‌شود. لذا اگر بردار ${}^B\vec{Q}$ نسبت به دستگاه $\{B\}$ ثابت باشد، آنگاه ${}^B\vec{V}_O$ برابر صفر خواهد شد؛ حتی اگر ${}^B\vec{Q}$ نسبت به چهارچوب دیگری مثل $\{A\}$ دارای تغییرات باشد.

بردار سرعت را نیز مانند هر بردار دیگری می‌توان در هر دستگاه دلخواهی بیان نمود. این چهارچوب با یک پیش‌زبرنویس خارجی نشان داده خواهد شد. به طور مثال بیان بردار ${}^B\vec{V}_O$ نسبت به دستگاه $\{A\}$ عبارت است از:

$${}^A({}^B\vec{V}_O) = \left(\frac{d{}^B\vec{Q}}{dt} \right) \quad (2)$$

لذا در بحث مشتق‌گیری از یک بردار با دو دستگاه مواجه هستیم. چهارچوبی که مشتق‌گیری نسبت به آن انجام می‌گیرد؛ و چهارچوبی که بردار سرعت نسبت به آن دستگاه توصیف می‌گردد. در صورتی که هم مشتق‌گیری و هم بیان بردار در یک دستگاه صورت گیرد، برای سادگی نیازی به نوشتن زبرنویس خارجی وجود ندارد و می‌توان نوشت:

$${}^B({}^B\vec{V}_O) = {}^B\vec{V}_O \quad (3)$$

با استفاده از ماتریس دوران ${}^A R_B$ می‌توان بردار سرعت ${}^B\vec{V}_O$ را در دستگاه $\{A\}$ توصیف نمود.

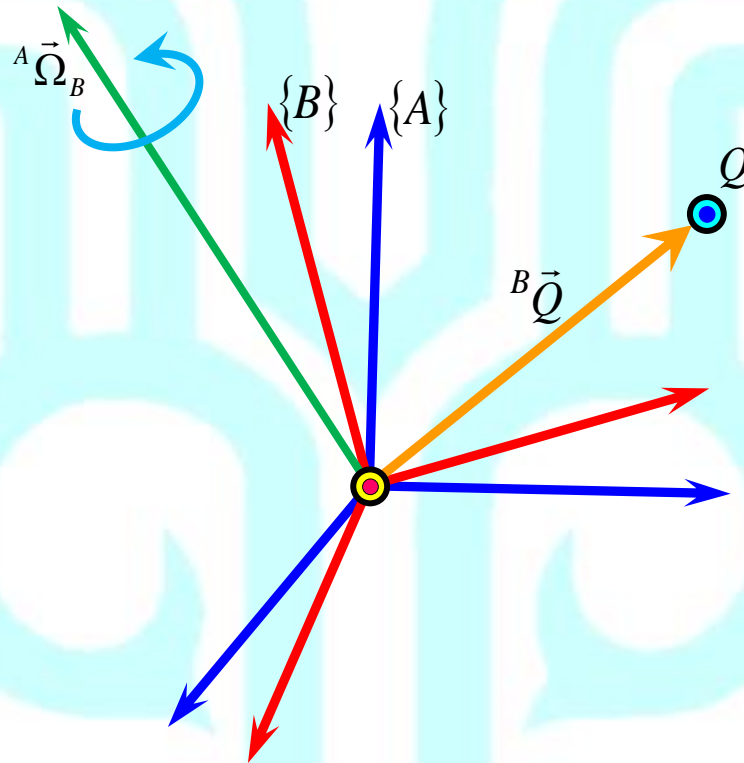
$${}^A({}^B\vec{V}_O) = {}^A R_B {}^B\vec{V}_O \quad (4)$$

نماد سمت چپ معادله (۴) (نوشتن پیش‌زبرنویس خارجی) چندان مرسوم نیست. در این حالت عبارتها به همان صورت سمت راست ارائه می‌گردند. اگر تغییرات بردار سرعت نسبت به دستگاه مرجع اندازه‌گیری شود، از نماد گذاری خلاصه شده زیر استفاده می‌کنیم.

$$\vec{v}_O = {}^U\vec{V}_O \quad (5)$$

• بردار سرعت زاویه‌ای

نرخ تغییرات جهتگیری یک جسم نسبت به زمان را سرعت زاویه‌ای نامیده و آن را با $\vec{\Omega}$ نشان می‌دهیم. از آنجا که در بحث مربوط به رباتیک، همواره به اجسام مورد مطالعه چهارچوبی متصل می‌کنیم، می‌توانیم سرعت زاویه‌ای را به صورت حرکت دورانی یک چهارچوب نیز در نظر بگیریم.



شکل (۲): بردار ${}^B\vec{Q}$ که در چهارچوب $\{B\}$ ثابت است، با سرعت زاویه‌ای ${}^A\vec{\Omega}_B$ نسبت به چهارچوب $\{A\}$ دوران می‌کند

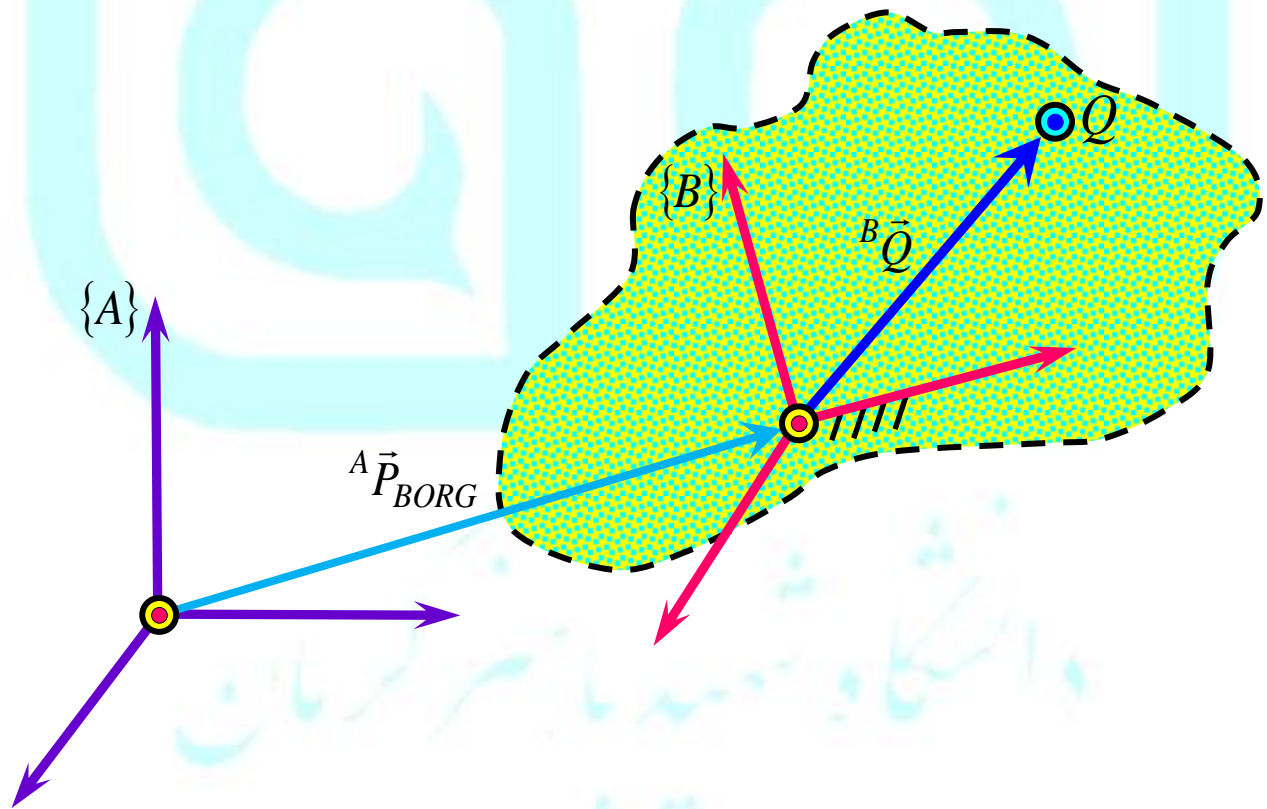
در شکل (۲)، ${}^A\vec{\Omega}_B$ دوران چهارچوب $\{B\}$ را نسبت به $\{A\}$ توصیف می‌کند. بردار سرعت زاویه‌ای نیز همانند هر بردار دیگری می‌تواند در یک دستگاه دلخواه معین توصیف گردد. در این حالت نیز با اضافه کردن یک پیش‌نویس این هدف محقق می‌گردد. به طور مثال ${}^c({}^A\vec{\Omega}_B)$ نمایانگر سرعت زاویه‌ای چهارچوب $\{B\}$ نسبت به $\{A\}$ است که در دستگاه $\{C\}$ توصیف شده است. معمولاً اگر سرعت زاویه‌ای یک دستگاه نسبت به دستگاه مرجع مد نظر باشد، از نماد گذاری زیر استفاده می‌شود.

$$\bar{\omega}_C = {}^U \bar{\Omega}_C \quad (6)$$

که در آن $\bar{\omega}_C$ سرعت زاویه‌ای چهارچوب $\{C\}$ نسبت به دستگاه مرجع $\{U\}$ است. از طرفی ${}^A \bar{\omega}_C$ نمایانگر سرعت زاویه‌ای دستگاه $\{C\}$ نسبت به دستگاه مرجع $\{U\}$ است که در دستگاه $\{A\}$ توصیف شده است.

• سرعت خطی یک جسم انعطاف پذیر

فرض کنید چهارچوب $\{B\}$ به جسم انعطاف پذیر شکل (۳) متصل است و هدف تعیین سرعت نقطه دلخواه Q از این جسم انعطاف پذیر نسبت به چهارچوب $\{A\}$ است. در ضمن فرض می‌شود که جهتگیری دستگاه $\{B\}$ نسبت به $\{A\}$ با گذشت زمان تغییر نمی‌کند. بنابراین سرعت این نقطه از تغییرات بردار ${}^A \bar{P}_{BORG}$ و ${}^B \bar{Q}$ نسبت به زمان ناشی می‌شود.



شکل (۳): دستگاه $\{B\}$ به جسم انعطاف پذیر نشان داده شده وصل شده و هدف تعیین سرعت نقطه Q از این جسم است.

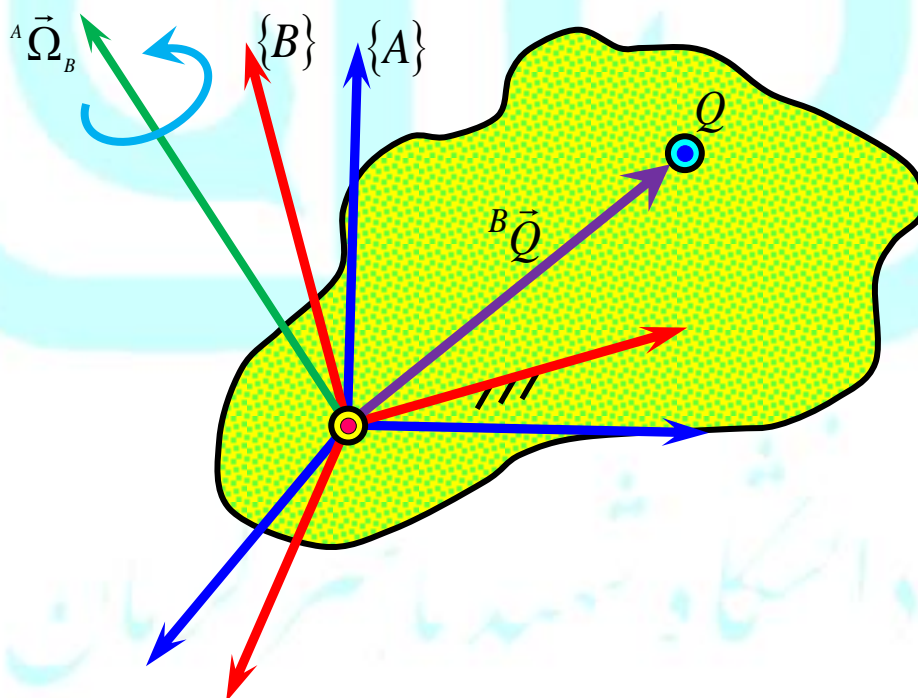
لذا برای بدست آوردن سرعت خطی نقطه Q نسبت به دستگاه $\{A\}$ کافیه هر دو مولفه سرعت را بر حسب دستگاه $\{A\}$ بیان نماییم و آنها را با یکدیگر جمع نماییم.

$${}^A\vec{V}_Q = {}^A\vec{V}_{BORG} + {}^A R_B {}^B\vec{V}_Q \quad (7)$$

معادله (7) تنها برای حالتی که در آن جهتگیری نسبی $\{A\}$ و $\{B\}$ ثابت باقی بماند، صادق است.

• سرعت دورانی یک جسم صلب

حال به بررسی دو چهارچوب با مبدأ مشترک و سرعت خطی صفر می‌پردازیم؛ به طوریکه مبدأ آنها در کلیه لحظات بر یکدیگر منطبق است. همانگونه که در شکل (4) نشان داده شده است، چهارچوب متحرک $\{B\}$ به جسم صلب متصل است و هدف تعیین سرعت نقطه دلخواه Q از این جسم صلب نسبت به چهارچوب $\{A\}$ است.

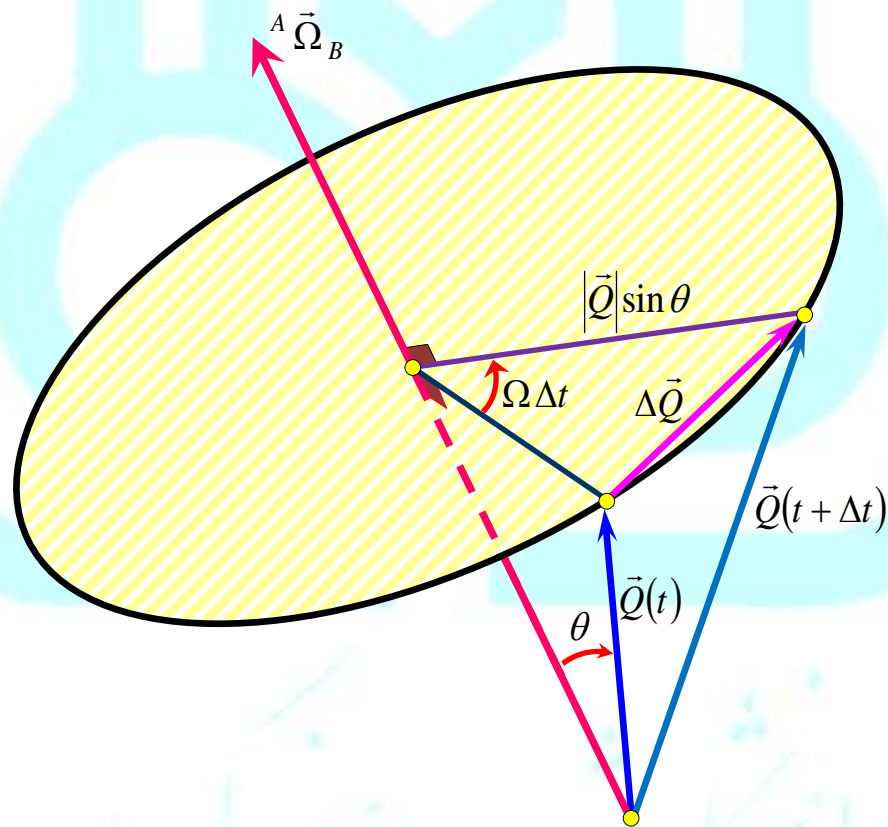


شکل (4): دستگاه $\{B\}$ به جسم صلب نشان داده شده و هدف تعیین سرعت نقطه Q از این جسم است.

همانگونه که در شکل (۴) نشان داده شده است، سرعت دورانی چهارچوب $\{B\}$ نسبت به $\{A\}$ با بردار ${}^A\vec{\Omega}_B$ نشان داده می‌شود. همچنین بردار \vec{Q}_B نسبت به دستگاه $\{B\}$ ثابت است. لذا داریم:

$${}^B\vec{V}_Q = \vec{0} \quad (۸)$$

اکنون هدف محاسبه تغییرات این بردار نسبت به چهارچوب $\{A\}$ است. برای محاسبه سرعت نقطه Q از رهیافت شهودی کمک می‌گیریم. در شکل (۵)، دو لحظه از گردش بردار \vec{Q} حول بردار ${}^A\vec{\Omega}_B$ نشان داده شده است. در واقع این تغییرات توسط ناظر متصل به دستگاه $\{A\}$ مشاهده می‌گردد.



شکل (۵): سرعت یک نقطه، ناشی از وجود سرعت زاویه‌ای

با توجه به شکل (۵) بدیهیست که بردار $\Delta \vec{Q}$ هم بر $\vec{Q}(t)$ و هم بر ${}^A\vec{\Omega}_B$ عمود است. همچنین اندازه این بردار با توجه به شکل عبارت است از:

$$|\Delta \vec{Q}| = (|\vec{Q}| \sin \theta) ({}^A\vec{\Omega}_B |\Delta t|) \quad (9)$$

با تقسیم طرفین بر Δt داریم:

$$\frac{|\Delta \vec{Q}|}{\Delta t} = (|\vec{Q}| \sin \theta) ({}^A\vec{\Omega}_B) \quad (10)$$

شرایط حاکم بر مقدار و جهت بردار $\Delta \vec{Q}$ ، بلافاصله ضرب برداری را تداعی می‌کند. لذا می‌توان نوشت:

$${}^A\vec{V}_Q = \frac{|\Delta \vec{Q}|}{\Delta t} = {}^A\vec{\Omega}_B \times {}^A\vec{Q} \quad (11)$$

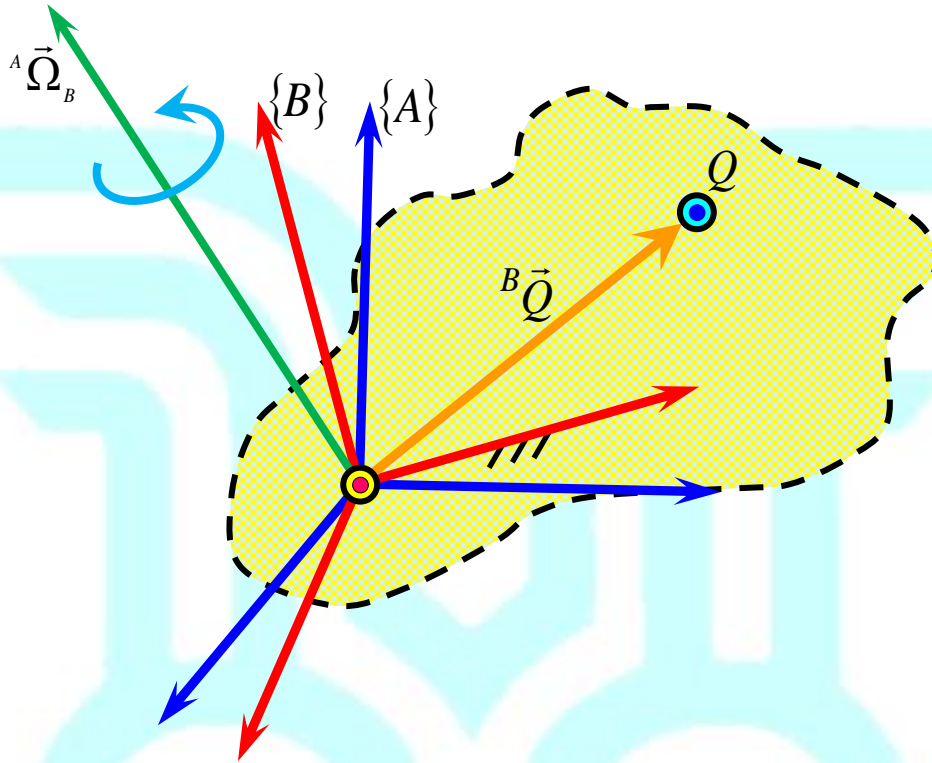
• سرعت دورانی یک جسم انعطاف پذیر

تاکنون فرض بر این بود که بردار \vec{Q}_B نسبت به دستگاه $\{B\}$ ثابت است و هیچگونه تغییری نسبت به این دستگاه ندارد. ولی در حالت کلی، بردار \vec{Q}_B ممکن است نسبت به چهارچوب $\{B\}$ نیز تغییر کند. بطور مثال در شکل (۶)، فرض شده که دستگاه $\{B\}$ به یک جسم انعطاف پذیر متصل است. لذا در این صورت، سرعت نقطه Q نسبت به دستگاه $\{B\}$ غیر صفر خواهد شد. با در نظر گرفتن این عامل داریم:

$${}^A\vec{V}_Q = {}^A({}^B\vec{V}_Q) + {}^A\vec{\Omega}_B \times {}^A\vec{Q} \quad (12)$$

با به کار بردن ماتریس دوران به منظور حذف زبرنویس خارجی و با توجه به اینکه توصیف ${}^A\vec{Q}$ در هر لحظه برابر است با ${}^A\vec{Q} = {}^A R_B {}^B\vec{Q}$ ؛ رابطه (۱۲) به صورت زیر بازنویسی می‌شود.

$${}^A\vec{V}_Q = {}^A R_B {}^B\vec{V}_Q + {}^A\vec{\Omega}_B \times {}^A R_B {}^B\vec{Q} \quad (13)$$

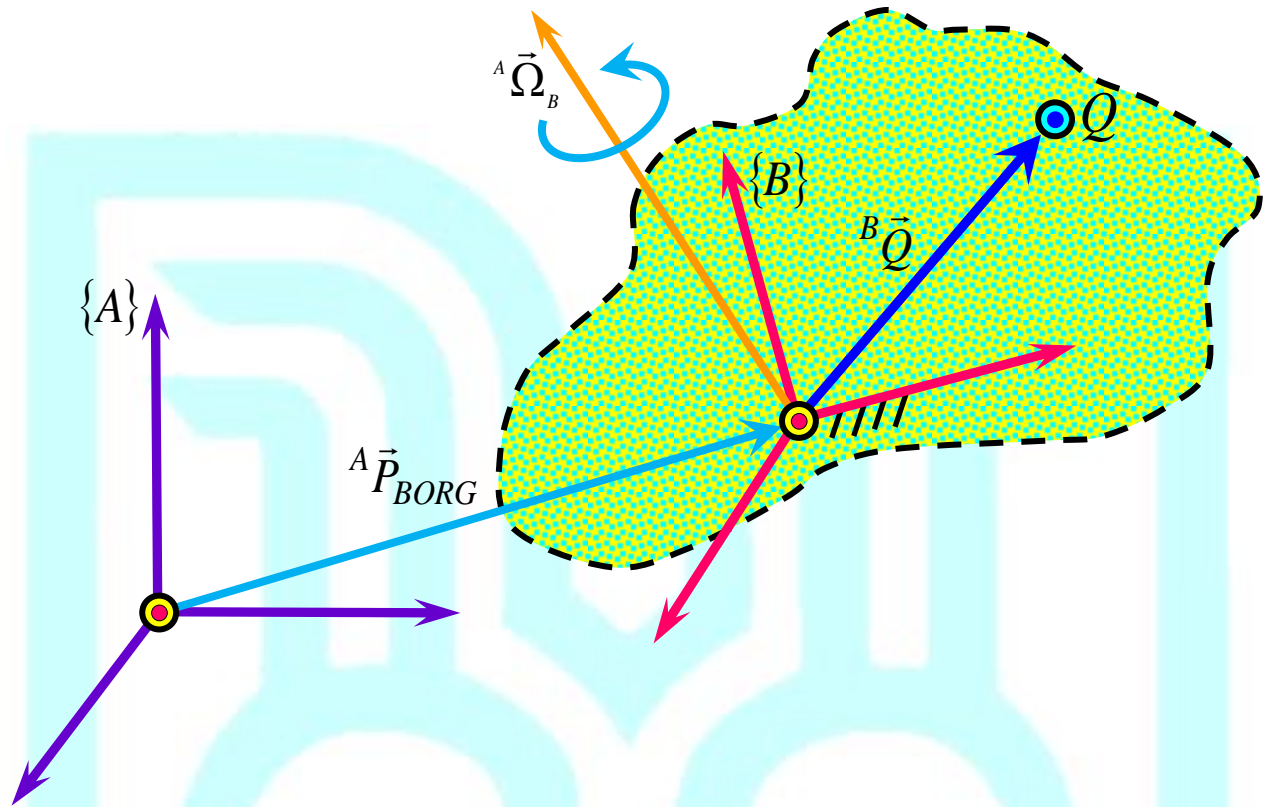


شکل (۶): دستگاه $\{B\}$ به جسم انعطاف پذیر نشان داده شده وصل شده و هدف تعیین سرعت نقطه Q از این جسم است.

• تحلیل سرعت خطی و دورانی یک جسم انعطاف پذیر

در حالتی که دو دستگاه مختصات نسبت به هم علاوه بر دوران، حرکت نیز داشته باشند و نقطه Q نسبت به دستگاه متحرک $\{B\}$ دارای حرکت باشد (شکل (۷))، آنگاه سرعت نقطه Q از دید ناظر واقع در $\{A\}$ چنین بدست می آید.

$${}^A\vec{V}_Q = {}^A\vec{V}_{BORG} + {}^A R_B {}^B\vec{V}_Q + {}^A\vec{\Omega}_B \times {}^A R_B {}^B\vec{Q} \quad (14)$$



شکل (۷): دستگاه $\{B\}$ به جسم انعطاف پذیر نشان داده شده وصل شده و هدف تعیین سرعت نقطه Q از این جسم است.

• سرعت زاویه‌ای از منظری دیگر

در قسمت قبل از رهیافت هندسی برای تعیین سرعت یک نقطه از جسمی که دارای سرعت زاویه‌ای نسبت به چهارچوبی دیگر بود، استفاده نمودیم (معادله (۱۱)). اکنون این مسئله را از دیدگاه ریاضیات ماتریسی مورد بررسی قرار می‌دهیم. پیش از آن، ویژگی مشتق یک ماتریس یکماتعامد (ماتریسی با ستونهایی عمود بر هم که هر ستون دارای اندازه‌ای واحد می‌باشد؛ مانند ماتریسهای دوران) را ارائه می‌نماییم. پیشتر نشان دادیم که معکوس یک ماتریس یکماتعامد با ترانزپوز آن برابر است. یعنی:

$$RR^{-1} = RR^T = I \quad (15)$$

با مشتق گرفتن از معادله (۱۵) نتیجه می‌شود:

$$\dot{R}R^T + R\dot{R}^T = 0 \quad (16)$$

با استفاده از ویژگی ترانهاده، معادله (16) به صورت زیر بازنویسی می‌گردد.

$$\dot{R}R^T + (\dot{R}R^T)^T = 0 \quad (17)$$

با تعریف $S = \dot{R}R^T$ ، معادله (16) به صورت زیر ساده می‌گردد.

$$S + S^T = 0 \quad (18)$$

تنها ماتریسهای پاد متقارن دارای این ویژگی هستند که حاصل جمع خود ماتریس با ترانهاده آن برابر صفر شود. بنابراین ماتریس مربعی S را پاد متقارن می‌نامند هرگاه $S^T = -S$.

$$S = \begin{bmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{bmatrix} \quad (19)$$

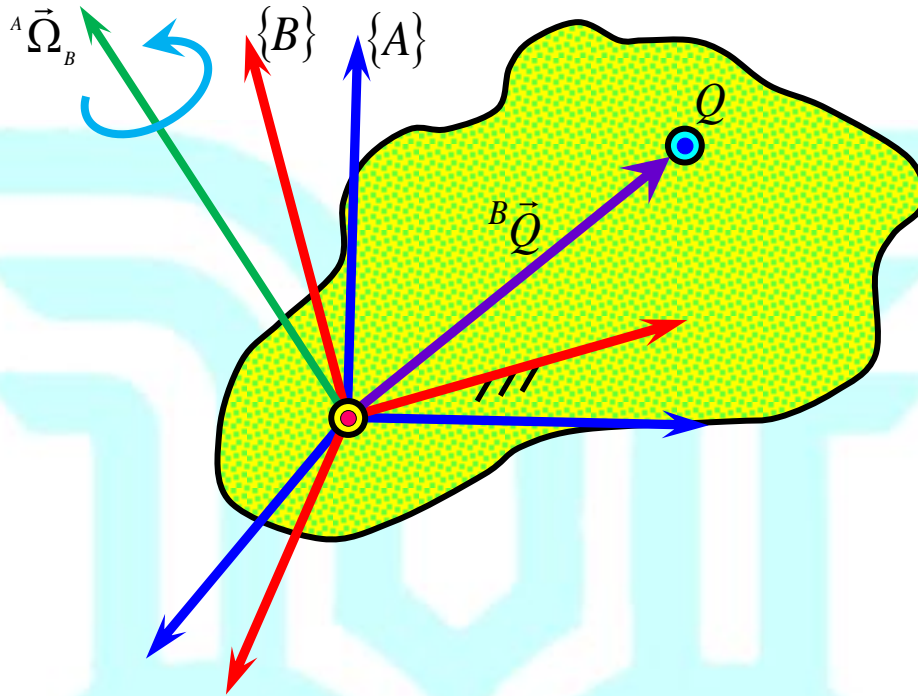
• سرعت دورانی یک جسم صلب از منظری دیگر

پیشتر برای تعیین سرعت یک نقطه از یک جسم در حال دوران از رهیافت هندسی استفاده شد. اکنون همین مسئله را از دیدگاه ریاضی مورد بررسی قرار می‌دهیم. شکل شماره (4) مجدداً در اینجا ارائه می‌گردد. بردار ثابت ${}^B\bar{Q}$ را که نسبت به چهارچوب $\{B\}$ تغییر نمی‌کند، در نظر بگیرید. این بردار در چهارچوب $\{A\}$ چنین تعریف می‌شود.

$${}^A\bar{Q} = {}^A R_B {}^B\bar{Q} \quad (20)$$

اگر چهارچوب $\{B\}$ نسبت به $\{A\}$ در حال دوران باشد، آنگاه ${}^A\bar{Q}$ ، حتی هنگامی که ${}^B\bar{Q}$ ثابت است، تغییر خواهد کرد. یعنی:

$${}^A\dot{\bar{Q}} = {}^A\dot{R}_B {}^B\bar{Q} \quad (21)$$



شکل (۸): دستگاه $\{B\}$ به جسم صلب نشان داده شده وصل شده و هدف تعیین سرعت نقطه Q از این جسم است.

با جایگذاری ${}^B\vec{Q} = {}^B R_A {}^A\vec{Q}$ در معادله (۲۱) خواهیم داشت:

$${}^A\dot{\vec{Q}} = {}^A\dot{R}_B {}^B R_A {}^A\vec{Q} \quad (22)$$

و یا

$${}^A\dot{\vec{Q}} = {}^A\dot{R}_B {}^A R_B^T {}^A\vec{Q} \quad (23)$$

پیشتر نشان دادیم که ${}^A S_B = {}^A\dot{R}_B {}^A R_B^T$ یک ماتریس پادمتقارن است. لذا داریم:

$${}^A\dot{\vec{Q}} = {}^A S_B {}^A\vec{Q} \quad (24)$$

در ادامه خواهیم دید که ${}^A S_B$ را ماتریس سرعت زاویه‌ای می‌نامند.

• ماتریسهای پاد متقارن و ضرب برداری

فرض کنید بردار سرعت زاویه‌ای $\vec{\Omega}$ از عناصر زیر تشکیل شده باشد.

$$\bar{\Omega} = \begin{bmatrix} \Omega_x \\ \Omega_y \\ \Omega_z \end{bmatrix} \quad (25)$$

اکنون درایه‌های این بردار را برای تشکیل یک ماتریس پاد متقارن به صورت زیر مورد استفاده قرار می‌دهیم.

$$S = \begin{bmatrix} 0 & -\Omega_z & \Omega_y \\ \Omega_z & 0 & -\Omega_x \\ -\Omega_y & \Omega_x & 0 \end{bmatrix} \quad (26)$$

به راحتی می‌توان نشان داد که:

$$S\bar{Q} = \bar{\Omega} \times \bar{Q} \quad (27)$$

که در آن \bar{Q} برداری دلخواه و علامت \times نشان دهنده ضرب برداری است. در واقع بردار سرعت زاویه‌ای $\bar{\Omega}$ با ماتریس سرعت زاویه‌ای S متناظر است. لذا می‌توان نوشت:

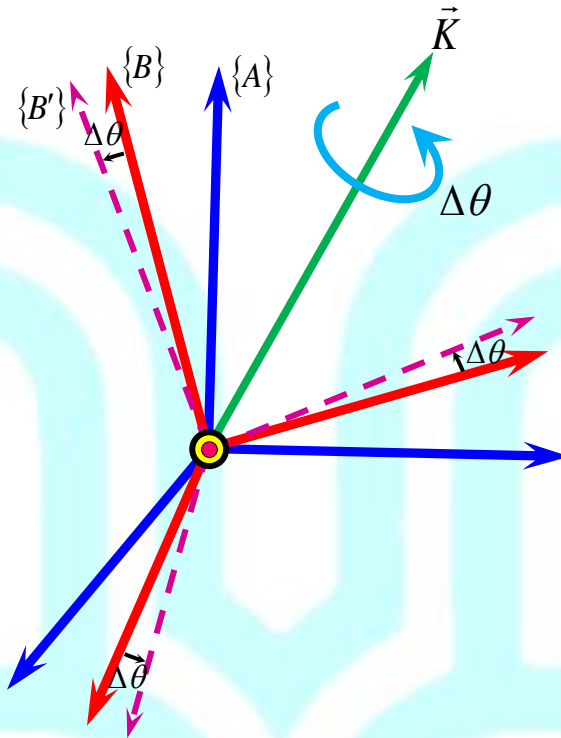
$${}^A\bar{V}_Q = {}^A\bar{\Omega}_B \times {}^A\bar{Q} = {}^A S_B {}^A\bar{Q} \quad (28)$$

• مفهوم فیزیکی بردار سرعت زاویه‌ای

مفهوم فیزیکی بردار سرعت زاویه‌ای $\bar{\Omega}$ با مشتقگیری مستقیم از ماتریس دوران قابل توصیف است. طبق تعریف، مشتقگیری از ماتریس دوران نتیجه زیر را در بر دارد.

$$\dot{R} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{R(t + \Delta t) - R(t)}{\Delta t} \quad (29)$$

برای محاسبه این مشتق شکل (۹) را در نظر بگیرید. فرض کنید که $R(t)$ ماتریس دورانی باشد که جهتگیری دستگاه $\{A\}$ را نسبت به دستگاه $\{B\}$ در لحظه t توصیف کند. اگر دستگاه $\{B\}$ در فاصله زمانی Δt حول محور \bar{K} به اندازه $\Delta\theta$ دوران کند، چهارچوب $\{B'\}$ حاصل می‌گردد. طبق شکل (۹)، ماتریس دورانی که دستگاه $\{A\}$ را نسبت به چهارچوب $\{B'\}$ توصیف می‌کند، عبارت است از:



شکل (۹): دوران دستگاه $\{B\}$ حول محور \vec{K} به اندازه $\Delta\theta$

فرض کنید که $R(t)$ ماتریس دورانی باشد که جهتگیری دستگاه $\{A\}$ را نسبت به دستگاه $\{B\}$ در لحظه t توصیف کند. اگر دستگاه $\{B\}$ در فاصله زمانی Δt حول محور \vec{K} به اندازه $\Delta\theta$ دوران کند، چهارچوب $\{B'\}$ حاصل می‌گردد. طبق شکل (۹)، ماتریس دورانی که دستگاه $\{A\}$ را نسبت به چهارچوب $\{B'\}$ توصیف می‌کند، عبارت است از:

$${}^{B'}R_A = {}^{B'}R_B {}^B R_A \Rightarrow R(t + \Delta t) = R_k(\Delta\theta)R(t) \quad (30)$$

با جایگذاری رابطه (۳۰) در رابطه (۲۹) داریم:

$$\dot{R} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{R_k(\Delta\theta)R(t) - R(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{R_k(\Delta\theta) - I}{\Delta t} R(t) \quad (31)$$

پیشتر $R_k(\theta)$ را به صورت زیر ارائه نمودیم.

$$R_k(\theta) = \begin{bmatrix} k_x k_x v \theta + C \theta & k_x k_y v \theta - k_z S \theta & k_x k_z v \theta + k_y S \theta \\ k_x k_y v \theta + k_z S \theta & k_y k_y v \theta + C \theta & k_y k_z v \theta - k_x S \theta \\ k_x k_z v \theta - k_y S \theta & k_y k_z v \theta + k_x S \theta & k_z k_z v \theta + C \theta \end{bmatrix} \quad (32)$$

این ماتریس دوران برای زوایای کوچک به صورت زیر ساده می‌گردد.

$$R_k(\theta) = \begin{bmatrix} 1 & -k_z \Delta \theta & k_y \Delta \theta \\ k_z \Delta \theta & 1 & -k_x \Delta \theta \\ -k_y \Delta \theta & k_x \Delta \theta & 1 \end{bmatrix} \quad (33)$$

با جایگذاری رابطه (33) در رابطه (31) خواهیم داشت:

$$\dot{R} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\begin{bmatrix} 0 & -k_z \Delta \theta & k_y \Delta \theta \\ k_z \Delta \theta & 0 & -k_x \Delta \theta \\ -k_y \Delta \theta & k_x \Delta \theta & 0 \end{bmatrix} R(t)}{\Delta t} \quad (34)$$

سرانجام با تقسیم همه درایه‌های ماتریس فوق بر Δt و گرفتن حد داریم:

$$\dot{R} = \begin{bmatrix} 0 & -k_z \dot{\theta} & k_y \dot{\theta} \\ k_z \dot{\theta} & 0 & -k_x \dot{\theta} \\ -k_y \dot{\theta} & k_x \dot{\theta} & 0 \end{bmatrix} R(t) \quad (35)$$

با پس ضرب کردن طرفین معادله (35) در $R^{-1}(t)$ نتیجه زیر حاصل می‌گردد.

$$\dot{R}R^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -k_z \dot{\theta} & k_y \dot{\theta} \\ k_z \dot{\theta} & 0 & -k_x \dot{\theta} \\ -k_y \dot{\theta} & k_x \dot{\theta} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\Omega_z & \Omega_y \\ \Omega_z & 0 & -\Omega_x \\ -\Omega_y & \Omega_x & 0 \end{bmatrix} \quad (36)$$

همانگونه که پیشتر نیز نشان دادیم $S = \dot{R}R^{-1}$ همان ماتریس سرعت زاویه‌ای است. لذا بردار سرعت زاویه‌ای

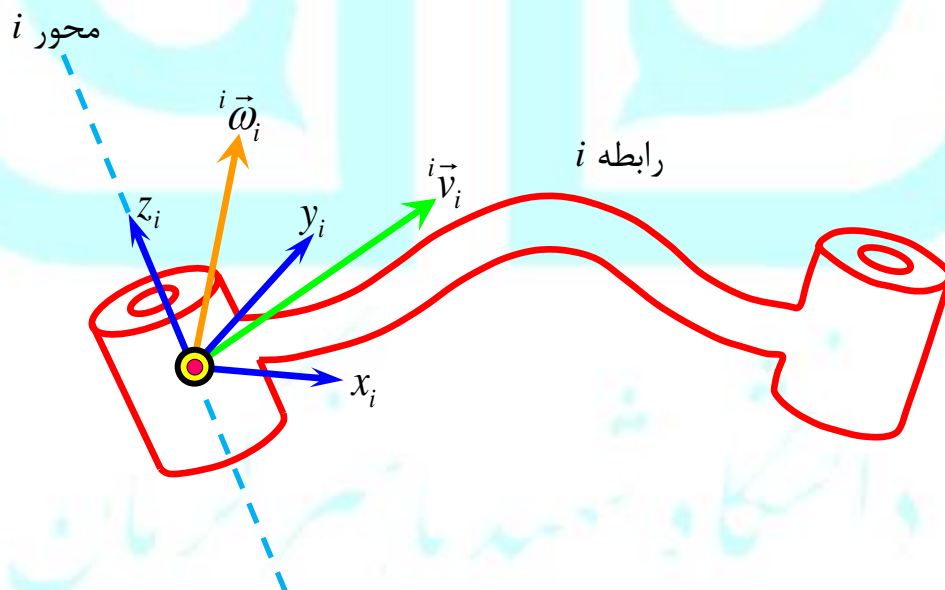
عبارت می‌شود از:

$$\vec{\Omega} = \begin{bmatrix} \Omega_x \\ \Omega_y \\ \Omega_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_x \dot{\theta} \\ k_y \dot{\theta} \\ k_z \dot{\theta} \end{bmatrix} = \dot{\theta} \vec{K} \quad (37)$$

مفهوم فیزیکی بردار سرعت زاویه‌ای، $\vec{\Omega}$ ، آن است که در هر لحظه تغییر جهتگیری هر چهارچوب در حال دوران را می‌توان به صورت دورانی حول محوری چون \vec{K} در نظر گرفت. این محور آنی دوران، بردار سرعت زاویه‌ای را بدست خواهد داد.

• سرعت خطی و سرعت زاویه‌ای بازوهای ربات

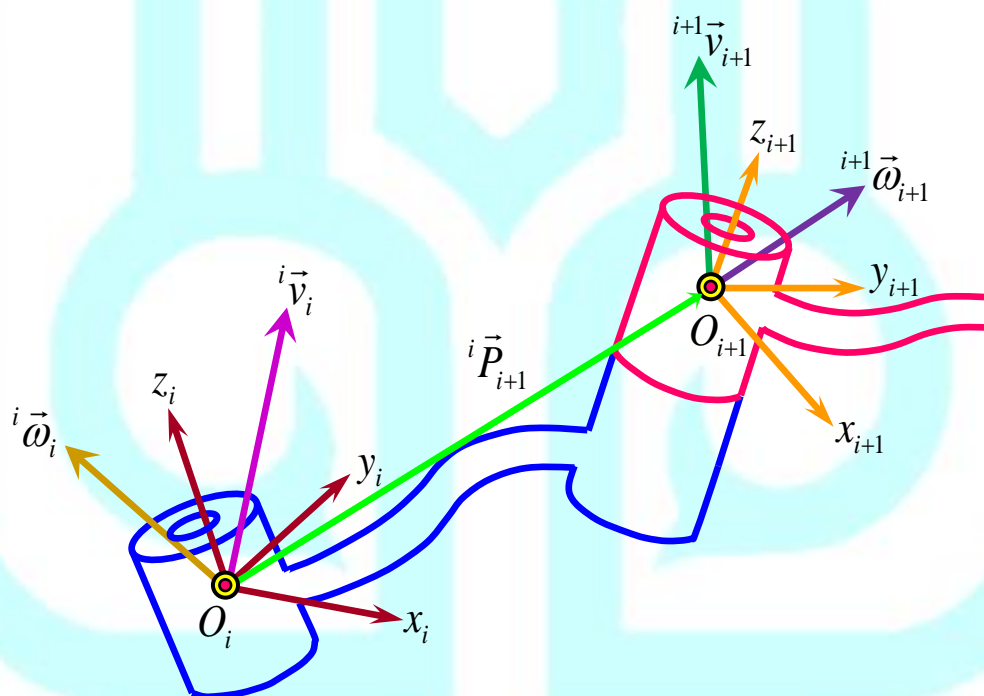
در این درس سرعت خطی و سرعت زاویه‌ای ربات همواره نسبت به چهارچوب مرجع اندازه‌گیری می‌شود. بنابراین مقادیری مطلق هستند. لذا \vec{v}_i سرعت خطی مبدأ چهارچوب $\{i\}$ و $\vec{\omega}_i$ سرعت زاویه‌ای این چهارچوب است که هر دو نسبت به دستگاه مرجع اندازه‌گیری شده‌اند. این بردارها می‌توانند در هر دستگاهی همچون $\{i\}$ بیان گردند. در این صورت منظور از \vec{v}_i و $\vec{\omega}_i$ به ترتیب سرعت مطلق خطی و سرعت مطلق زاویه‌ای چهارچوب $\{i\}$ است که در همان دستگاه $\{i\}$ نیز توصیف شده است (شکل (۱۰)).



شکل (۱۰): سرعت خطی و زاویه‌ای رابط $\{i\}$ که در همان دستگاه $\{i\}$ نیز توصیف شده‌اند

• چگونگی اشاعه سرعت از رابطی به رابط دیگر

چنانچه در شکل (۱۱) نشان داده شده است، هر بازوی مکانیکی ماهر، زنجیره‌ای از اجسام است که هر یک از آنها نسبت به اجسام مجاور خود حرکت می‌کنند. لذا می‌توان سرعت هر یک از این لینک‌ها را به صورت بازگشتی به‌دست آورد. برای این منظور، باید از پایه ربات شروع کرد. سرعت زاویه‌ای رابط $i+1$ همان سرعت زاویه‌ای رابط i است، به‌علاوه هر مؤلفه جدیدی که در نتیجه سرعت دورانی رابط $i+1$ وارد مسئله می‌شود.



شکل (۱۱): بردارهای سرعت رابط‌های i و $i+1$ زمانی که هر دو مفصل دورانی هستند

رابطه سرعتها را می‌توان نسبت به چهارچوب $\{i\}$ چنین نوشت.

$${}^{i+1}\vec{\omega}_{i+1} = {}^{i+1}R_i {}^i\vec{\omega}_i + \dot{\theta}_{i+1} {}^{i+1}\vec{z}_{i+1} \quad (۳۸)$$

که در آن

$$\dot{\theta}_{i+1} \vec{z}_{i+1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_{i+1} \end{bmatrix} \quad (39)$$

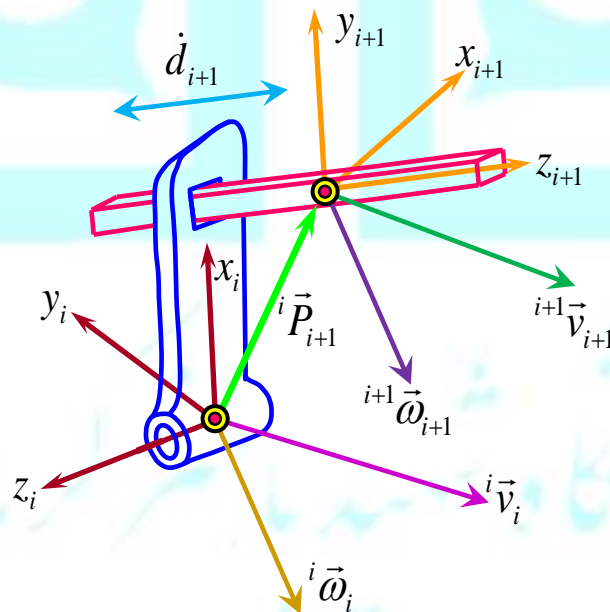
همچنین سرعت خطی مبدأ چهارچوب $\{i+1\}$ برابر است با سرعت خطی مبدأ چهارچوب $\{i\}$ ، به علاوه مؤلفه جدیدی که بر اثر سرعت دورانی رابط $\{i\}$ حاصل می‌شود. لذا می‌توان نوشت:

$${}^{i+1}\vec{v}_{i+1} = {}^{i+1}R_i \left({}^i\vec{v}_i + {}^i\vec{\omega}_i \times {}^i\vec{P}_{i+1} \right) \quad (40)$$

که در آن بردار ${}^i\vec{P}_{i+1}$ برداریست که موقعیت مبدأ دستگاه $\{i+1\}$ را نسبت به مبدأ دستگاه $\{i\}$ نشان می‌دهد. شکل (۱۲) رابط‌های i و $i+1$ از یک زنجیره رباطی را نشان می‌دهد که در آن مفصل i ام دورانی و مفصل $i+1$ ام رفت و برگشتی هستند. در این حالت سرعت زاویه‌ای رابط $i+1$ و سرعت خطی مبدأ مختصات رابط $i+1$ به ترتیب عبارتند از:

$${}^{i+1}\vec{\omega}_{i+1} = {}^{i+1}R_i {}^i\vec{\omega}_i \quad (41)$$

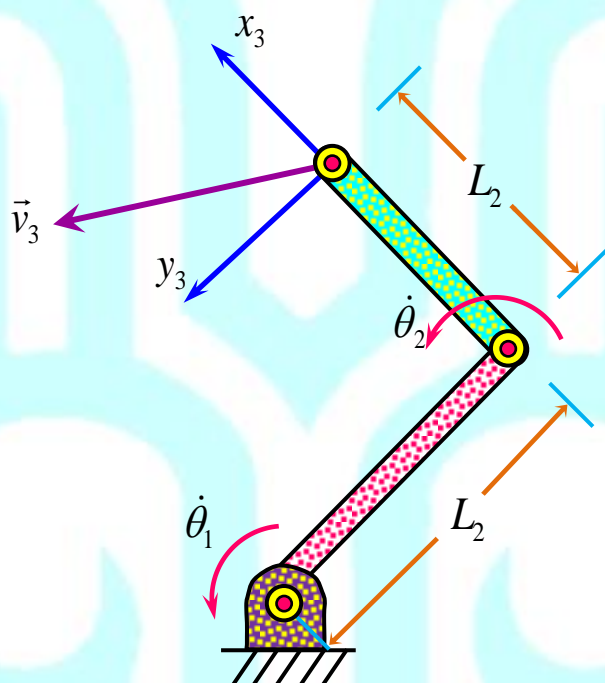
$${}^{i+1}\vec{v}_{i+1} = {}^{i+1}R_i \left({}^i\vec{v}_i + {}^i\vec{\omega}_i \times {}^i\vec{P}_{i+1} \right) + \dot{d}_{i+1} {}^{i+1}\vec{z}_{i+1} \quad (42)$$



شکل (۱۲): بردارهای سرعت رابط‌های i و $i+1$ زمانی که مفصل i دورانی و مفصل $i+1$ کشویی است

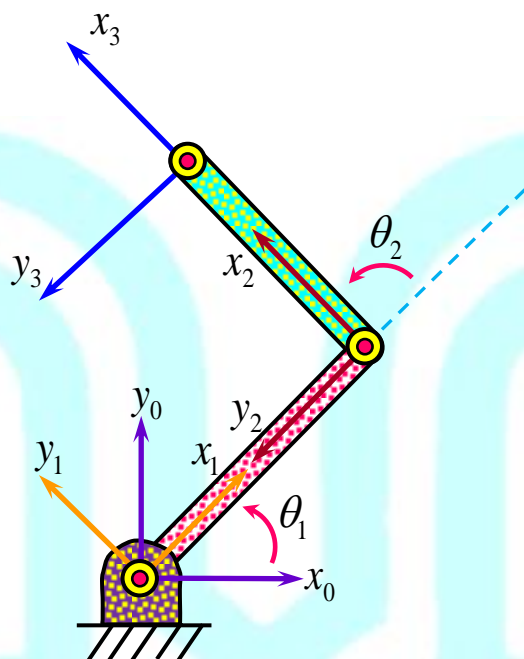
• مثال

بازوی مکانیکی ماهر نشان داده شده در شکل (۱۳) را در نظر بگیرید. سرعت انتهای بازو را به صورت تابعی از زوایای مفصلی بدست آوردید. پاسخ بدست آمده را در دو چهارچوب $\{0\}$ و $\{3\}$ توصیف نمایید.



شکل (۱۳): بازوی مکانیکی ماهر با دو رابط

برای حل مسئله ابتدا دستگاههای مختصات مناسب را به هر بازو اختصاص می‌دهیم (شکل ۱۴). هر چند طبق آنچه که تاکنون آموخته‌ایم نیازی به نصب چهارچوب $\{3\}$ به انتهای لینک شماره ۲ نیست، ولی از آنجایی که هدف تعیین سرعت این نقطه است، لذا دستگاه شماره $\{3\}$ را به انتهای این بازو اختصاص می‌دهیم. با نصب دستگاه مختصات به هر بازو و تعیین پارامترهای دناویت-هارتنبِرج ماتریس‌های تبدیل مربوط به هر رابط به طریق زیر ارائه می‌گردد.



شکل (۱۴): نحوه تخصیص چهارچوبها در بازوی مکانیکی ماهر با دو رابط

$${}^0T_1 = \begin{bmatrix} C\theta_1 & -S\theta_1 & 0 & 0 \\ S\theta_1 & C\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (a)$$

$${}^1T_2 = \begin{bmatrix} C\theta_2 & -S\theta_2 & 0 & L_1 \\ S\theta_2 & C\theta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (b)$$

$${}^2T_3 = \begin{bmatrix} 1 & -S\theta_2 & 0 & L_2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (c)$$

با استفاده از معادله‌های (۳۸) و (۴۰) و با شروع از پایه $\{0\}$ سرعت مبدأ هر بازو به علاوه سرعت زاویه‌ای هر رابط را محاسبه می‌نماییم. نتیجه به صورت زیر ارائه می‌گردد.

$${}^1\vec{\omega}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_1 \end{bmatrix} \quad (d)$$

$${}^1\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (e)$$

$${}^2\vec{\omega}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2 \end{bmatrix} \quad (f)$$

$${}^2\vec{v}_2 = \begin{bmatrix} C\theta_2 & S\theta_2 & 0 \\ -S\theta_2 & C\theta_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} L_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} L_1 S\theta_2 \dot{\theta}_1 \\ L_1 C\theta_2 \dot{\theta}_1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (g)$$

$${}^3\vec{\omega}_3 = {}^2\vec{\omega}_2 \quad (h)$$

$${}^3\vec{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} L_1 S\theta_2 \dot{\theta}_1 \\ L_1 C\theta_2 \dot{\theta}_1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} L_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} L_1 S\theta_2 \dot{\theta}_1 \\ L_1 C\theta_2 \dot{\theta}_1 + L_2 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (i)$$

معادله (h) و (i) به ترتیب سرعت زاویه‌ای و سرعت مبدأ مختصات دستگاه {3} را نشان می‌دهند. برای توصیف

این بردارها در دستگاه پایه کافیت که آنها را در ماتریس دوران 0R_3 پیش ضرب کنیم.

$${}^0\vec{v}_3 = {}^0R_1 {}^1R_2 {}^2R_3 {}^3\vec{v}_3 = \begin{bmatrix} -L_1 \dot{\theta}_1 S\theta_1 - L_2 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) S(\theta_1 + \theta_2) \\ L_1 \dot{\theta}_1 C\theta_1 + L_2 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) C(\theta_1 + \theta_2) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (j)$$

$${}^0\vec{\omega}_3 = {}^0R_1 {}^1R_2 {}^2R_3 {}^3\vec{\omega}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2 \end{bmatrix} \quad (k)$$

• ژاکوبین

ژاکوبین، صورتی چند بعدی از مشتق است. مثلاً توابع y_1 تا y_6 را که هر کدام تابعی از شش متغیر مستقل x_1 تا x_6 هستند را در نظر بگیرید.

$$\begin{aligned} y_1 &= f_1(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) \\ y_2 &= f_2(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) \\ &\vdots \\ y_6 &= f_6(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) \end{aligned} \quad (43)$$

معادله (43) به فرم برداری به صورت زیر ارائه می‌گردد.

$$\vec{Y} = \vec{F}(\vec{X}) \quad (44)$$

با استفاده از قاعده زنجیری دیفرانسیل y_i به صورت زیر ارائه می‌گردد.

$$\begin{aligned} \delta y_1 &= \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \delta x_1 + \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \delta x_2 + \frac{\partial f_1}{\partial x_3} \delta x_3 + \frac{\partial f_1}{\partial x_4} \delta x_4 + \frac{\partial f_1}{\partial x_5} \delta x_5 + \frac{\partial f_1}{\partial x_6} \delta x_6 \\ \delta y_2 &= \frac{\partial f_2}{\partial x_1} \delta x_1 + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \delta x_2 + \frac{\partial f_2}{\partial x_3} \delta x_3 + \frac{\partial f_2}{\partial x_4} \delta x_4 + \frac{\partial f_2}{\partial x_5} \delta x_5 + \frac{\partial f_2}{\partial x_6} \delta x_6 \\ &\vdots \\ \delta y_6 &= \frac{\partial f_6}{\partial x_1} \delta x_1 + \frac{\partial f_6}{\partial x_2} \delta x_2 + \frac{\partial f_6}{\partial x_3} \delta x_3 + \frac{\partial f_6}{\partial x_4} \delta x_4 + \frac{\partial f_6}{\partial x_5} \delta x_5 + \frac{\partial f_6}{\partial x_6} \delta x_6 \end{aligned} \quad (45)$$

معادله (45) به فرم برداری به صورت زیر ارائه می‌گردد.

$$\delta \vec{Y} = \frac{\partial \vec{F}}{\partial \vec{X}} \delta \vec{X} \quad (46)$$

ماتریس 6×6 شامل مشتق‌های جزئی در رابطه (46) را ژاکوبین نامیده و آن را با J نمایش می‌دهیم. لذا معادله (46) به صورت زیر بازنویسی می‌گردد.

$$\delta \vec{Y} = J(\vec{X}) \delta \vec{X} \quad (47)$$

با تقسیم دو طرف معادله (47) بر جزء دیفرانسیلی زمان می‌توان ژاکوبین را به صورت نگاشتی که سرعتها در فضای \vec{X} را به سرعت در فضای \vec{Y} تبدیل می‌کند، تفسیر نمود.

$$\dot{\vec{Y}} = J(\vec{X}) \dot{\vec{X}} \quad (48)$$

در رباتیک اغلب از ژاکوبین به عنوان نگاشتی که سرعتها در فضای مفصلی را به سرعت انتهای بازو در فضای دکارتی مرتبط می‌سازد، استفاده می‌شود. مثلاً

$$\bar{v} = J(\bar{\Theta})\dot{\bar{\Theta}} \quad (49)$$

برای یک ربات با شش مفصل، $J(\bar{\Theta})$ ماتریسی 6×6 ، $\dot{\bar{\Theta}}$ برداری 6×1 و \bar{v} نیز برداری 6×1 است.

$$\bar{v} = [\dot{X} \quad \dot{Y} \quad \dot{Z} \quad \omega_x \quad \omega_y \quad \omega_z]^T \quad (50)$$

$$\dot{\bar{\Theta}} = [\dot{\theta}_1 \quad \dot{\theta}_2 \quad \dot{\theta}_3 \quad \dot{\theta}_4 \quad \dot{\theta}_5 \quad \dot{\theta}_6]^T \quad (51)$$

$$J(\bar{\Theta}) = \begin{bmatrix} J_{11} & J_{12} & \dots & J_{15} & J_{16} \\ J_{21} & J_{22} & \dots & J_{25} & J_{26} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ J_{51} & J_{52} & \dots & J_{55} & J_{56} \\ J_{61} & J_{62} & \dots & J_{65} & J_{66} \end{bmatrix} \quad (52)$$

در معادله (50)، \dot{X} ، \dot{Y} و \dot{Z} به ترتیب سرعت مچ در راستاهای X ، Y و Z هستند. همچنین ω_x ، ω_y و ω_z به ترتیب سرعت زاویه‌ای مچ در راستاهای X ، Y و Z می‌باشند.

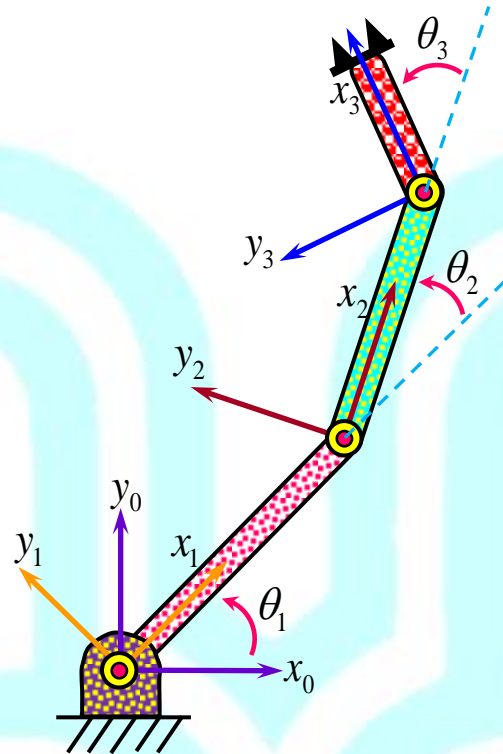
• مثال

برای ربات سه درجه آزادی شکل (15) ماتریس ژاکوبین را بدست آورید.

با نوشتن معادله‌های سینماتیکی موقعیت و جهتگیری مچ ربات به صورت زیر ارائه می‌گردد.

$$\begin{cases} X = L_1 C \theta_1 + L_2 C(\theta_1 + \theta_2) + L_3 C(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) \\ Y = L_1 S \theta_1 + L_2 S(\theta_1 + \theta_2) + L_3 S(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) \\ \phi = \theta_1 + \theta_2 + \theta_3 \end{cases} \quad (a)$$

با مشتق‌گیری از این معادلات سینماتیکی نسبت به زمان داریم:



شکل (۱۵): ربات صفحه‌ای سه درجه آزادی

$$\begin{cases} \dot{X} = -L_1\dot{\theta}_1 S\theta_1 - L_2(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)S(\theta_1 + \theta_2) - L_3(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3)S(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) \\ \dot{Y} = L_1\dot{\theta}_1 C\theta_1 + L_2(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)C(\theta_1 + \theta_2) + L_3(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3)C(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) \\ \dot{\phi} = \dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3 \end{cases} \quad (b)$$

با نوشتن این معادلات به فرم ماتریسی داریم:

$$\underbrace{\begin{Bmatrix} \dot{X} \\ \dot{Y} \\ \dot{\phi} \end{Bmatrix}}_{\dot{v}} = \underbrace{\begin{bmatrix} -L_1 S_1 - L_2 S_{12} - L_3 S_{123} & -L_2 S_{23} - L_3 S_{123} & -L_3 S_{123} \\ L_1 C_1 + L_2 C_{12} + L_3 C_{123} & L_2 C_{12} + L_3 C_{123} & L_3 C_{123} \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}}_{J(\bar{\theta})} \underbrace{\begin{Bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ \dot{\theta}_3 \end{Bmatrix}}_{\dot{\bar{\theta}}} \quad (c)$$

همانگونه که در این مثال مشاهده گردید، ژاکوبین را می‌توان با دیفرانسیل‌گیری مستقیم از معادله‌های سینماتیکی مکانیزم به‌دست آورد. این عمل برای سرعت‌های خطی به راحتی انجام می‌شود، اما در مورد سرعت‌های زاویه‌ای، همواره نمی‌توان یک بردار جهت‌گیری 3×1 یافت که مشتق آن $\dot{\omega}$ شود. در چنین حالتی بایستی با استفاده متوالی از معادله (۳۸) سرعت زاویه‌ای میچ را به‌دست آورد.

• حالت‌های تکین

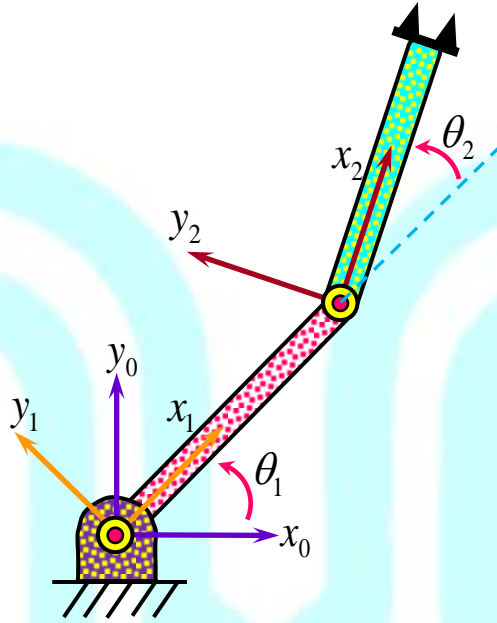
همانگونه که مشاهده گردید ژاکوبین نگاشتی است که سرعتها در فضای مفصلی را به سرعتها در فضای دکارتی تبدیل می‌کند. اکنون سؤالی که مطرح می‌شود این است که آیا می‌توان سرعتها در فضای دکارتی را به سرعت در فضای مفصلی تبدیل نمود. لازمه این امر آن است که ماتریس ژاکوبین معکوس پذیر باشد. یعنی

$$\dot{\bar{\Theta}} = J^{-1}(\bar{\Theta})\dot{\bar{r}} \quad (53)$$

در بیشتر بازوهای مکانیکی ماهر، به ازاء برخی از مقادیر $\bar{\Theta}$ ، ژاکوبین تکین می‌شود ($\det J(\bar{\Theta}) = 0$). در واقع همه بازوهای مکانیکی در مرز فضای کاری خود و بیشتر بازوهای مکانیکی در داخل فضای کاری خود، نقاط تکین دارند. به لحاظ هندسی حالت‌های تکین در مرز فضای کاری زمانی رخ می‌دهد که بازو در کشیدگی کامل و یا خم شدن کامل باشد، به‌گونه‌ای که مجری نهایی در مرز فضای کاری قرار گیرد. از طرفی حالت‌های تکین در داخل فضای کاری حالت‌هایی هستند که اگر چه مجری نهایی دور از مرز فضای کاری قرار دارد، ولی دو یا چند محور مفصلی در یک راستا قرار می‌گیرند. در چنین حالتی ربات یک یا چند درجه آزادی خود را در فضای دکارتی از دست می‌دهد. این بدان معناست که در فضای دکارتی، راستایی وجود دارد که در آن، صرفنظر از آنکه چه سرعت مفصلی انتخاب شود، نمی‌توان دست ربات را حرکت داد.

• مثال

ربات دو درجه آزادی شکل (۱۶) را در نظر بگیرید. حالت‌های تکین را تعیین نموده و آنها را تفسیر نمایید. برای تعیین نقاط تکین هر بازوی مکانیکی، بایستی دترمینان ژاکوبین را بررسی نماییم. در صورتی که این دترمینان صفر باشد، ماتریس ژاکوبین رتبه کامل خود را از دست داده، تکین می‌شود. همانند مثال قبل با نوشتن معادلات سینماتیکی و با مشتقگیری از این معادلات، ماتریس ژاکوبین به طریق زیر ارائه می‌گردد.



شکل (۱۶): ربات صفحه‌ای دو درجه آزادی

$$\begin{cases} X = L_1 C \theta_1 + L_2 C(\theta_1 + \theta_2) \\ Y = L_1 S \theta_1 + L_2 S(\theta_1 + \theta_2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{X} = -L_1 \dot{\theta}_1 S \theta_1 - L_2 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) S(\theta_1 + \theta_2) \\ \dot{Y} = L_1 \dot{\theta}_1 C \theta_1 + L_2 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) C(\theta_1 + \theta_2) \end{cases} \quad (a)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dot{X} \\ \dot{Y} \end{cases} = \underbrace{\begin{bmatrix} -L_1 S \theta_1 - L_2 S(\theta_1 + \theta_2) & -L_2 S(\theta_1 + \theta_2) \\ L_1 C \theta_1 + L_2 C(\theta_1 + \theta_2) & L_2 C(\theta_1 + \theta_2) \end{bmatrix}}_{J(\vec{\theta})} \begin{cases} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \end{cases}$$

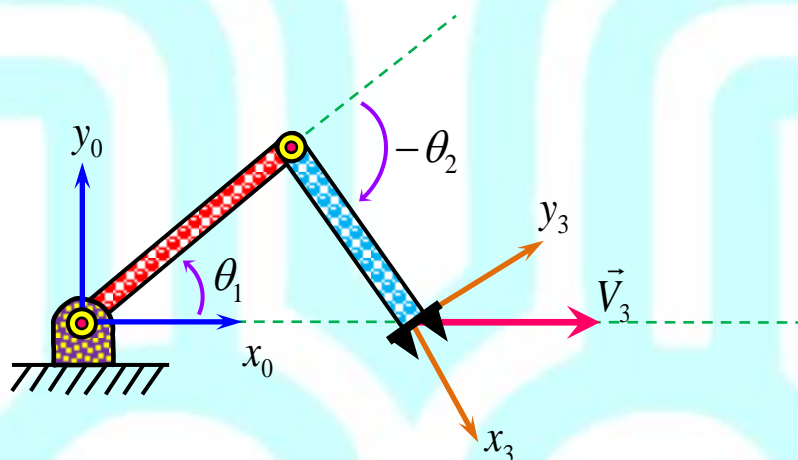
با مساوی صفر قرار دادن دترمینان ماتریس ژاکوبین داریم:

$$DET[J(\vec{\theta})] = 0 \Rightarrow L_1 L_2 S \theta_2 = 0 \quad (b)$$

لذا با توجه به معادله (b)، زمانی که $\theta_2 = 0^\circ$ یا $\theta_2 = 180^\circ$ باشد، با وضعیت تکینگی مواجه می‌شویم. با توجه به شکل (۱۶)، در $\theta_2 = 0^\circ$ دو لینک در یک امتداد قرار دارند (کشیدگی کامل). در این وضعیت، حرکت مجری نهایی تنها در یک امتداد دکارتی (امتداد عمود بر بازو) ممکن خواهد بود. در نتیجه ربات یک درجه آزادی خود را از دست داده است. با توجه به شکل (۱۶)، در $\theta_2 = 180^\circ$ لینک دوم بر روی لینک اول خم می‌شود. در این حالت نیز حرکت مجری نهایی تنها در یک امتداد (به جای دو امتداد) ممکن است.

• مثال

ربات شکل (۱۷) را در نظر بگیرید. فرض کنید که مجری نهایی بایستی با سرعت $1/0 m/s$ در راستای محور X_0 حرکت کند. نشان دهید که سرعتهای مفصلی با نزدیک شدن به نقاط تکین به بینهایت میل می کنند.



شکل (۱۷): بازوی مکانیکی با دو رابط که در آن مجری نهایی با سرعت خطی ثابت حرکت می کند.

با توجه به معادله (a) مثال قبل داریم:

$$\begin{Bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \end{Bmatrix} = [J(\bar{\theta})]^{-1} \begin{Bmatrix} \dot{X} \\ \dot{Y} \end{Bmatrix} \quad (a)$$

که در آن معکوس ماتریس ژاکوبین عبارت است از:

$$[J(\bar{\theta})]^{-1} = \frac{1}{L_1 L_2 S \theta_2} \begin{bmatrix} L_2 C(\theta_1 + \theta_2) & L_2 S(\theta_1 + \theta_2) \\ -L_1 C \theta_1 - L_2 C(\theta_1 + \theta_2) & -L_1 S \theta_1 - L_2 S(\theta_1 + \theta_2) \end{bmatrix} \quad (b)$$

از آنجا که سرعت مجری نهایی عبارت است از $\dot{X} = 1 \frac{m}{s}$ و $\dot{Y} = 0 \frac{m}{s}$ ؛ لذا سرعت زاویه‌ای مفاصل یک و دو

عبارتند از:

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \end{Bmatrix} &= \frac{1}{L_1 L_2 S \theta_2} \begin{bmatrix} L_2 C(\theta_1 + \theta_2) & L_2 S(\theta_1 + \theta_2) \\ -L_1 C \theta_1 - L_2 C(\theta_1 + \theta_2) & -L_1 S \theta_1 - L_2 S(\theta_1 + \theta_2) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \end{Bmatrix} \\ &= \begin{Bmatrix} \frac{C(\theta_1 + \theta_2)}{L_1 S \theta_2} \\ -\frac{C \theta_1}{L_2 S \theta_2} - \frac{C(\theta_1 + \theta_2)}{L_1 S \theta_2} \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (c)$$

همانگونه که مشاهده می‌شود با کشیده شدن بازو و نزدیک شدن آن به وضعیت $\theta_2 = 0^\circ$ ، سرعت‌های مفصلی به بینهایت میل می‌کنند.

• نیروهای استاتیکی در بازوهای مکانیکی ماهر

معمولاً مجری نهایی باری را از یک نقطه به نقطه‌ای دیگر حمل می‌کند. در اینجا می‌خواهیم گشتاورهایی را که برای برقرار کردن تعادل استاتیکی، باید به مفصلهای ربات وارد شوند، به دست آوریم. به منظور تحلیل استاتیکی، نمودار جسم آزاد هر رابط را رسم کرده و روابط تعادل نیرو و گشتاور را نسبت به چهارچوبهای رابط، می‌نویسیم. در پایان، گشتاور استاتیکی را که باید حول محور مفصلی وارد شود تا در بازوی مکانیکی ماهر تعادل استاتیکی ایجاد کند، محاسبه خواهیم کرد. برای بیان نیرو و گشتاور اعمال شده به وسیله رابط مجاور، نمادگذاری زیر را به کار می‌بریم.

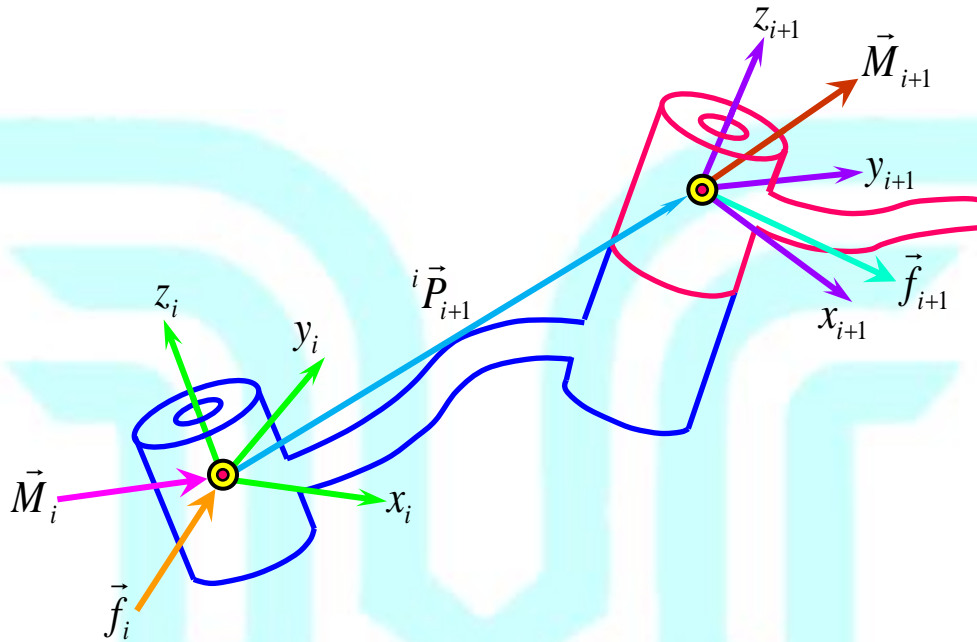
$$\bar{f}_i = \text{نیروی وارد به رابط } i \text{ از طرف رابط } i-1$$

$$\bar{M}_i = \text{گشتاور وارد به رابط } i \text{ از طرف رابط } i-1$$

در شکل (۱۸)، نیروها و گشتاورهای استاتیکی اعمالی به رابط i نشان داده شده‌اند. با نوشتن معادلات تعادل نیرویی و تعادل گشتاوری برای بازوی i ام داریم:

$${}^i \bar{f}_i - {}^i \bar{f}_{i+1} = \bar{0} \quad (۵۴)$$

$${}^i \bar{M}_i - {}^i \bar{M}_{i+1} - {}^i \bar{P}_{i+1} \times {}^i \bar{f}_{i+1} = \bar{0} \quad (۵۵)$$



شکل (۱۸): تعادل استاتیکی نیرو-گشتاور برای یک رابط

برای نوشتن این معادله‌ها بر حسب نیروها و گشتاورهای تعریف شده در چهارچوب خودشان، از ماتریس دوران توصیف کننده چهارچوبهای $\{i\}$ و $\{i+1\}$ استفاده می‌کنیم. لذا داریم:

$${}^i \vec{f}_i = {}^i R_{i+1} {}^{i+1} \vec{f}_{i+1} \quad (۵۶)$$

$${}^i \vec{M}_i = {}^i R_{i+1} {}^{i+1} \vec{M}_{i+1} + {}^i \vec{P}_{i+1} \times {}^i \vec{f}_i \quad (۵۷)$$

رابطه اخیر نشان می‌دهد که اگر بار حمل شده توسط ربات را با نیرو و گشتاور مناسب به دست ربات اعمال کنیم، می‌توانیم نیرو و گشتاور اعمالی به هر رابط را به صورت پسر و محاسبه نماییم. سازه ربات تمامی این نیروها و گشتاورها بجز گشتاور حول محور مفصلی به وسیله سازه خود ربات تحمل می‌شود. برای پیدا کردن گشتاور مفصلی لازم برای تعادل استاتیکی، باید ضرب داخلی بردار محور مفصلی در بردار گشتاور وارد بر رابط را محاسبه کرد. یعنی:

$$\tau_i = {}^i \vec{M}_i^T \cdot {}^i \vec{Z}_i \quad (۵۸)$$

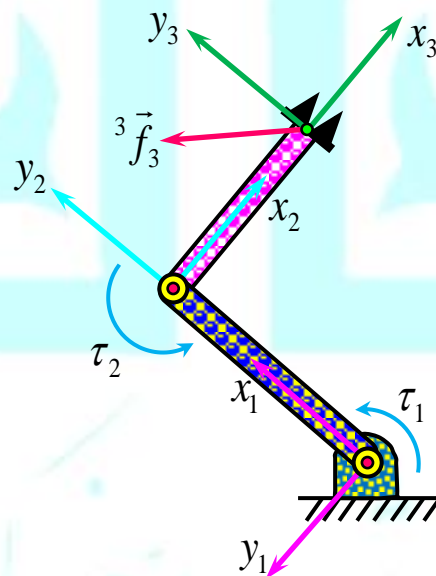
اگر مفصل i کشویی باشد، سازه ربات تمامی نیروها و گشتاورها بجز نیرو در امتداد محور مفصلی را تحمل می‌کند. برای پیدا کردن نیروی کارانداز برای تعادل استاتیکی، باید ضرب داخلی بردار محور کشویی در بردار نیروی وارد بر رابط را محاسبه کرد. یعنی:

$$F_i = {}^i f_i^T \cdot {}^i \vec{Z}_i \quad (59)$$

معادله (58) و (59)، محاسبه گشتاور و نیروی مورد نیاز برای تعادل استاتیکی را امکان پذیر می‌سازد.

• مثال

شکل (19) بازوی مکانیکی با دو رابط را نشان می‌دهد. نیروی ${}^3 \vec{F}$ در جهت نشان داده شده به مجری نهایی این بازو وارد می‌شود. گشتاور مفصلی لازم برای حفظ تعادل استاتیکی این سیستم رباتیکی را محاسبه نمایید.



شکل (19): نیروی اعمالی به ربات صفحه‌ای

معادله (56) و (57) مجدداً در اینجا ارائه می‌گردد.

$${}^i\vec{f}_i = {}^iR_{i+1} {}^{i+1}\vec{f}_{i+1} \quad (a)$$

$${}^i\vec{M}_i = {}^iR_{i+1} {}^{i+1}\vec{M}_{i+1} + {}^i\vec{P}_{i+1} \times {}^i\vec{f}_i \quad (b)$$

توصیف نیروی ${}^3\vec{F}$ در دستگاه {3} عبارت است از:

$${}^3\vec{f}_3 = \begin{bmatrix} f_x \\ f_y \\ 0 \end{bmatrix} \quad (c)$$

با استفاده از معادلات (a) و (b) نیرو و گشتاور در مفصل ۲ به طریق زیر محاسبه می‌گردد.

$${}^2\vec{f}_2 = {}^2R_3 {}^3\vec{f}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_x \\ f_y \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_x \\ f_y \\ 0 \end{bmatrix} \quad (d)$$

$${}^2\vec{M}_2 = {}^2R_3 {}^3\vec{M}_3 + {}^2\vec{P}_3 \times {}^2\vec{f}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} L_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} f_x \\ f_y \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ L_2 f_y \end{bmatrix} \quad (e)$$

به طریق مشابه نیرو و گشتاور در مفصل ۱ عبارتند از:

$${}^1\vec{f}_1 = {}^1R_2 {}^2\vec{f}_2 = \begin{bmatrix} C\theta_2 & -S\theta_2 & 0 \\ S\theta_2 & C\theta_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_x \\ f_y \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C\theta_2 f_x - S\theta_2 f_y \\ S\theta_2 f_x + C\theta_2 f_y \\ 0 \end{bmatrix} \quad (f)$$

$${}^1\vec{M}_1 = {}^1R_2 {}^2\vec{M}_2 + {}^1\vec{P}_2 \times {}^1\vec{f}_1 = \begin{bmatrix} C\theta_2 & -S\theta_2 & 0 \\ S\theta_2 & C\theta_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ L_2 f_y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} L_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} C\theta_2 f_x - S\theta_2 f_y \\ S\theta_2 f_x + C\theta_2 f_y \\ 0 \end{bmatrix} \quad (g)$$

$$= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ L_2 f_y + L_1 S\theta_2 f_x + L_1 C\theta_2 f_y \end{bmatrix}$$

لذا با توجه به معادله (۵۶)، گشتاوری که توسط موتور در مفاصل یک و دو بایستی تحمل شود عبارت است از:

$$\tau_1 = {}^1\vec{M}_1^T \cdot {}^1\vec{Z}_1 = L_2 f_y + L_1 S\theta_2 f_x + L_1 C\theta_2 f_y \quad (h)$$

$$\tau_2 = {}^2\vec{M}_2^T \cdot {}^2\vec{Z}_2 = L_2 f_y \quad (i)$$

• ژاکوبینها در حوزه نیرو

هنگامی که به یک سیستم رباتیکی نیرو وارد می‌شود، کار انجام شده در مختصات دکارتی با کار انجام شده در فضای مفصلی برابر است. لذا می‌توان نوشت:

$$\bar{F}^T \cdot \delta \bar{X} = \bar{\tau}^T \cdot \delta \bar{\Theta} \quad (60)$$

که در آن \bar{F} بردار نیرو-گشتاور است که در مختصات دکارتی بر مجری نهایی وارد می‌شود. همچنین $\delta \bar{X}$ بردار جابجاییهای بسیار کوچک مجری نهایی در فضای دکارتی می‌باشد. $\bar{\tau}$ بردار گشتاورهای اعمالی به مفاصل، و سرانجام $\delta \bar{\Theta}$ نیز بردار جابجاییهای بینهایت کوچک مفاصل می‌باشند. از طرفی ارتباط بین تغییرات بسیار کوچک مجری نهایی در فضای دکارتی و تغییرات بسیار کوچک مفاصل در فضای مفصلی با ماتریس ژاکوبین به هم ارتباط پیدا می‌کنند. لذا داریم:

$$\delta \bar{X} = J(\bar{\Theta}) \delta \bar{\Theta} \quad (61)$$

با جایگذاری معادله (61) در معادله (60) داریم:

$$\bar{F}^T \cdot J(\bar{\Theta}) \delta \bar{\Theta} = \bar{\tau}^T \cdot \delta \bar{\Theta} \Rightarrow (\bar{F}^T \cdot J(\bar{\Theta}) = \bar{\tau}^T) \cdot \delta \bar{\Theta} \quad (62)$$

رابطه فوق باید برای کل مقادیر $\delta \bar{\Theta}$ برقرار باشد. لذا نتیجه می‌شود که:

$$\bar{\tau} = J^T(\bar{\Theta}) \bar{F} \quad (63)$$

رابطه فوق نشان می‌دهد که چگونه می‌توان به کمک ترانزاده ماتریس ژاکوبین، نیروهای دکارتی وارد بر مجری نهایی را به گشتاورهای مفصلی معادل تبدیل نماییم. در اینجا نیز ممکن است در برخی از پیکربندیهای خاص ربات با حالت تکین مواجه شویم. در این حالت با افزایش یا کاهش نیروی \bar{F} در جهتی خاص، تغییری در مقدار محاسبه شده برای $\bar{\tau}$ رخ نمی‌دهد. رابطه (63) از یک منظر دیگر نیز حائز اهمیت است. زیرا به ما اجازه می‌دهد بدون محاسبه توابعی سینماتیکی وارون، یک کمیت دکارتی را به کمیتی در فضای مفصلی تبدیل کنیم. این موضوع در بحث کنترل ربات مورد استفاده قرار می‌گیرد.

• دینامیک بازوهای مکانیکی ماهر

در این فصل، معادله‌های یک بازوی مکانیکی ماهر را بررسی می‌کنیم. این معادله‌ها، چگونگی ایجاد حرکت در ربات را به وسیله گشتاورهای اعمال شده توسط کاراندازها را نشان می‌دهد. در بحث مربوط به دینامیک با دو مسئله مواجه هستیم. دینامیک معکوس که در آن با داشتن $\ddot{\theta}$ و $\dot{\theta}$ در طول مسیر حرکت، بردار گشتاورهای مفصلی $\vec{\tau}$ را به دست می‌آوریم؛ و دینامیک مستقیم که در آن با داشتن بردار گشتاور مفصلی $\vec{\tau}$ ، مقادیر $\ddot{\theta}$ ، $\dot{\theta}$ و θ محاسبه می‌شوند.

• شتاب جسم صلب

با مشتق‌گیری از بردارهای سرعت خطی و سرعت زاویه‌ای، به ترتیب بردارهای شتاب خطی و شتاب زاویه‌ای توسط روابط زیر حاصل می‌گردد.

$${}^B\dot{\vec{V}}_Q = \frac{d}{dt} {}^B\vec{V}_Q = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{{}^B\vec{V}_Q(t + \Delta t) - {}^B\vec{V}_Q(t)}{\Delta t} \quad (1)$$

$${}^A\dot{\vec{\Omega}}_B = \frac{d}{dt} {}^A\vec{\Omega}_B = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{{}^A\vec{\Omega}_B(t + \Delta t) - {}^A\vec{\Omega}_B(t)}{\Delta t} \quad (2)$$

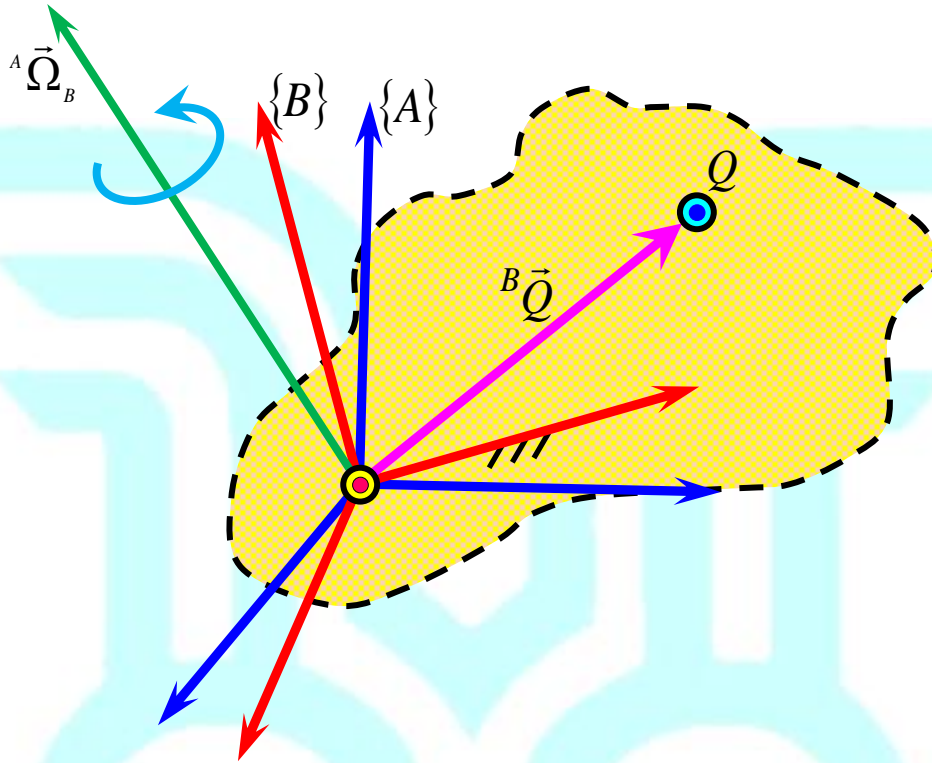
در اینجا نیز اگر تغییرات نسبت به دستگاه مرجع اندازه‌گیری شود، نمادگذاری زیر را به کار خواهیم برد.

$$\dot{\vec{v}}_A = {}^U\dot{\vec{V}}_A \quad (3)$$

$$\dot{\vec{\omega}}_A = {}^U\dot{\vec{\Omega}}_A \quad (4)$$

• شتاب خطی

در فصل قبل، در تحلیل سرعت یک نقطه دلخواه (Q) از یک جسم انعطاف‌پذیر (شکل (۱))، رابطه زیر استنتاج گردید.



شکل (۱): دستگاه $\{B\}$ به جسم انعطاف پذیر نشان داده شده وصل شده و هدف تعیین شتاب نقطه Q از این جسم است.

$${}^A\vec{V}_Q = {}^A R_B {}^B\vec{V}_Q + {}^A\vec{\Omega}_B \times {}^A R_B {}^B\vec{Q} \quad (۵)$$

با مشتقگیری از معادله (۵) به دست می آوریم:

$${}^A\dot{\vec{V}}_Q = {}^A\dot{R}_B {}^B\vec{V}_Q + {}^A R_B {}^B\dot{\vec{V}}_Q + {}^A\dot{\vec{\Omega}}_B \times {}^A R_B {}^B\vec{Q} + {}^A\vec{\Omega}_B \times {}^A\dot{R}_B {}^B\vec{Q} + {}^A\vec{\Omega}_B \times {}^A R_B {}^B\dot{\vec{Q}} \quad (۶)$$

اکنون به ساده کردن معادله (۶) می پردازیم. پیشتر در فصل قبل رابطه مربوط به مشتق یک ماتریس دوران را به صورت زیر استنتاج نمودیم.

$$\dot{R}(t) = \begin{bmatrix} 0 & -k_z \dot{\theta} & k_y \dot{\theta} \\ k_z \dot{\theta} & 0 & -k_x \dot{\theta} \\ -k_y \dot{\theta} & k_x \dot{\theta} & 0 \end{bmatrix} R(t) = S(t)R(t) \quad (۷)$$

که در آن $S(t)$ ماتریس سرعت زاویه ای متناظر با بردار سرعت زاویه ای $\vec{\Omega}$ است. با جایگذاری معادله (۷) در

رابطه (۶) داریم:

$${}^A\dot{\vec{V}}_Q = {}^A S_B {}^A R_B {}^B \vec{V}_Q + {}^A R_B {}^B \dot{\vec{V}}_Q + {}^A \dot{\vec{\Omega}}_B \times {}^A R_B {}^B \vec{Q} + {}^A \vec{\Omega}_B \times {}^A S_B {}^A R_B {}^B \vec{Q} + {}^A \vec{\Omega}_B \times {}^A R_B {}^B \dot{\vec{Q}} \quad (8)$$

معادله (8) با استفاده از خاصیت ماتریسهای پاد متقارن ($S\vec{A} = \vec{\Omega} \times \vec{A}$) به صورت زیر ساده می‌گردد.

$${}^A\dot{\vec{V}}_Q = {}^A \vec{\Omega}_B \times {}^A R_B {}^B \vec{V}_Q + {}^A R_B {}^B \dot{\vec{V}}_Q + {}^A \dot{\vec{\Omega}}_B \times {}^A R_B {}^B \vec{Q} + {}^A \vec{\Omega}_B \times ({}^A \vec{\Omega}_B \times {}^A R_B {}^B \vec{Q}) + {}^A \vec{\Omega}_B \times {}^A R_B {}^B \dot{\vec{Q}} \quad (9)$$

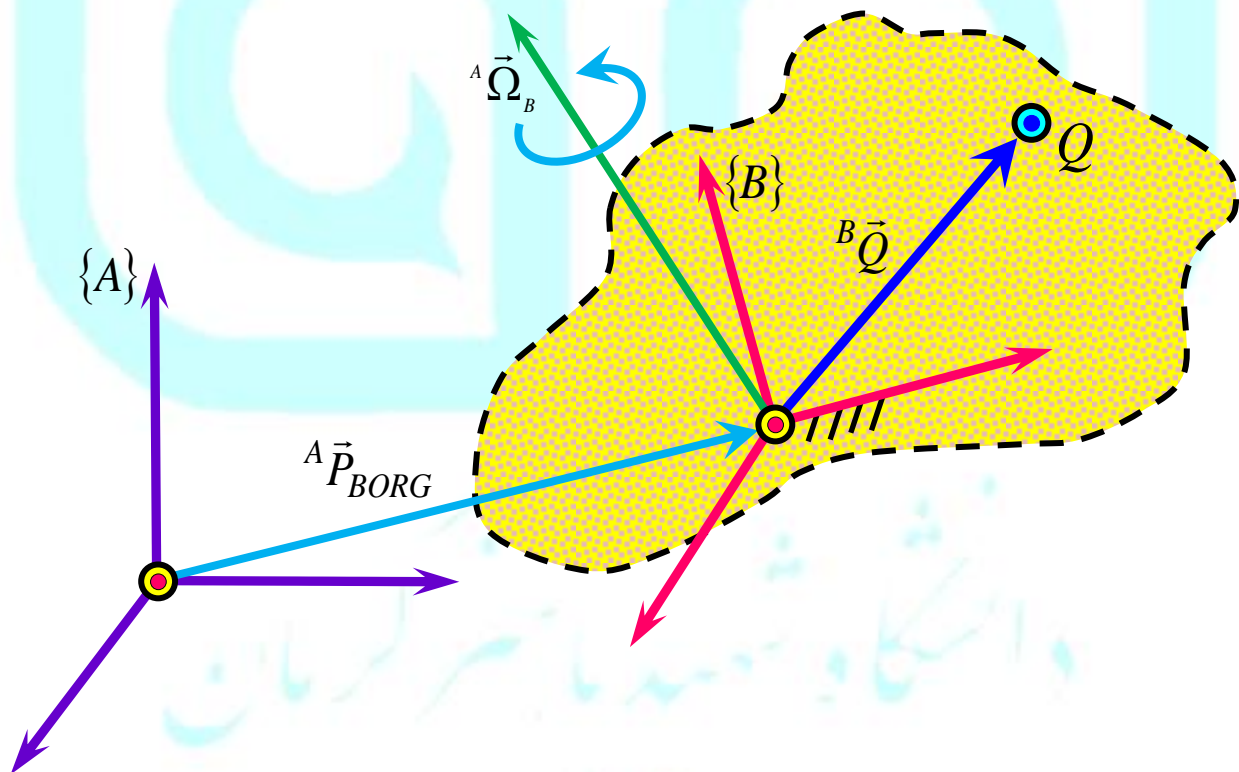
از طرفی ${}^B \dot{\vec{Q}}$ همان ${}^B \vec{V}_Q$ است. لذا فرم نهایی معادله (9) به صورت زیر ارائه می‌گردد.

$${}^A\dot{\vec{V}}_Q = {}^A R_B {}^B \dot{\vec{V}}_Q + {}^A \dot{\vec{\Omega}}_B \times {}^A R_B {}^B \vec{Q} + {}^A \vec{\Omega}_B \times ({}^A \vec{\Omega}_B \times {}^A R_B {}^B \vec{Q}) + 2 {}^A \vec{\Omega}_B \times {}^A R_B {}^B \vec{V}_Q \quad (10)$$

حال اگر مبدأ این دو دستگاه نیز بر هم منطبق نباشند (شکل (2))، جمله‌ای را که نشان دهنده شتاب خطی

مبدأ چهارچوب $\{B\}$ است، بایستی به معادله (10) اضافه گردد. بنابراین این معادله به فرم زیر اصلاح می‌گردد.

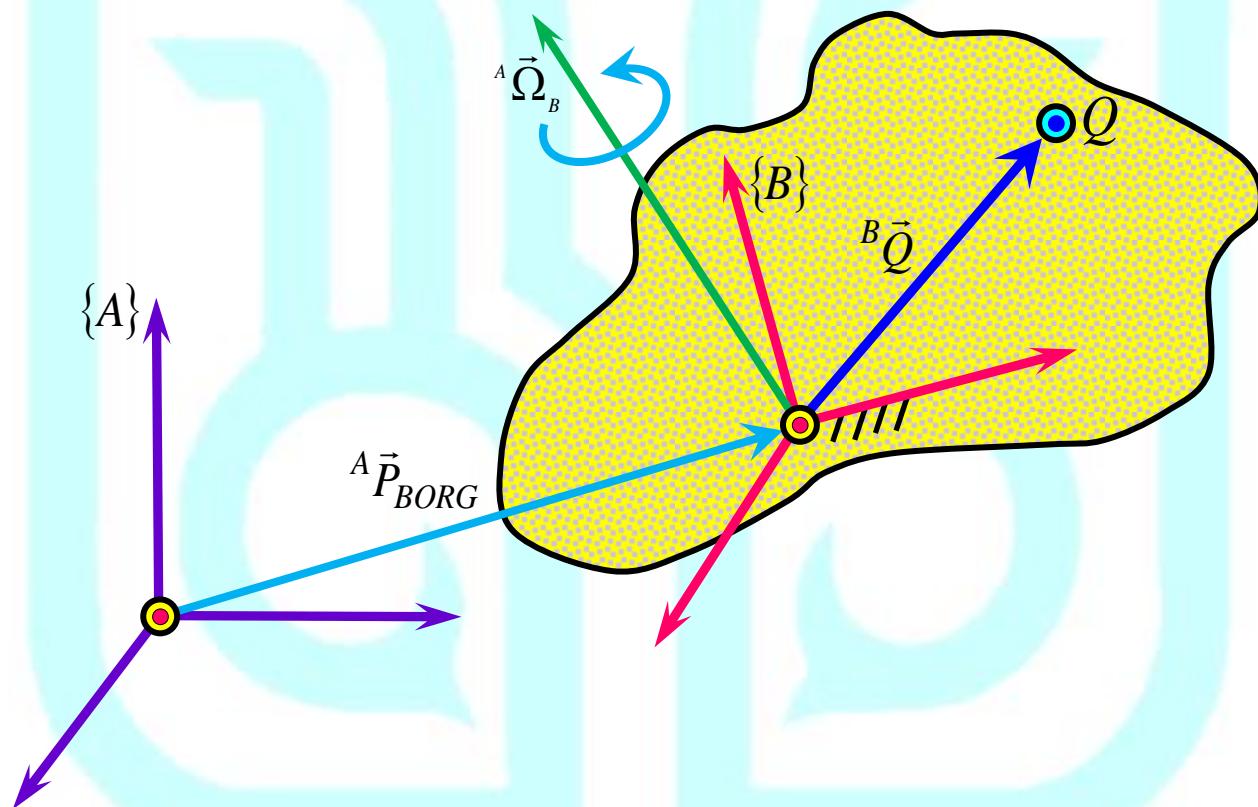
$${}^A\dot{\vec{V}}_Q = {}^B \dot{\vec{V}}_{BORG} + {}^A R_B {}^B \dot{\vec{V}}_Q + {}^A \dot{\vec{\Omega}}_B \times {}^A R_B {}^B \vec{Q} + {}^A \vec{\Omega}_B \times ({}^A \vec{\Omega}_B \times {}^A R_B {}^B \vec{Q}) + 2 {}^A \vec{\Omega}_B \times {}^A R_B {}^B \vec{V}_Q \quad (11)$$



شکل (2): دستگاه $\{B\}$ به جسم انعطاف‌پذیر نشان داده شده وصل شده و هدف تعیین شتاب نقطه Q از این جسم است.

اگر جسم مذکور صلب باشد (شکل (۳))، آنگاه ${}^B\vec{V}_Q = {}^B\dot{\vec{V}}_Q = 0$ خواهد شد. لذا معادله (۱۱) به فرم زیر ساده می‌گردد.

$${}^A\dot{\vec{V}}_Q = {}^B\dot{\vec{V}}_{BORG} + {}^A\vec{\Omega}_B \times {}^A R_B {}^B\vec{Q} + {}^A\vec{\Omega}_B \times ({}^A\vec{\Omega}_B \times {}^A R_B {}^B\vec{Q}) \quad (12)$$



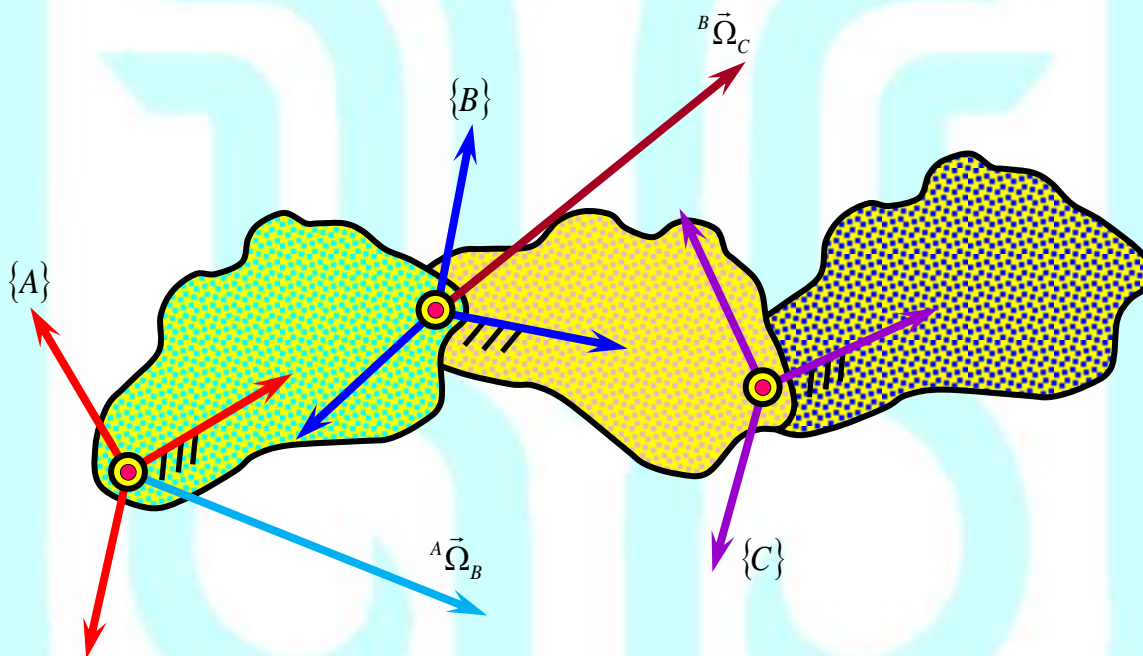
شکل (۳): دستگاه $\{B\}$ به جسم صلب نشان داده شده وصل شده و هدف تعیین شتاب نقطه Q از این جسم است.

• شتاب زاویه‌ای

در شکل (۴) سه جسم توسط اتصالات لولایی، به یکدیگر متصل شده‌اند. فرض کنیم دستگاه $\{B\}$ نسبت به $\{A\}$ با سرعت ${}^A\vec{\Omega}_B$ و چهارچوب $\{C\}$ نسبت به $\{B\}$ با سرعت ${}^B\vec{\Omega}_C$ دوران می‌کند. اکنون به دنبال آن

هستیم تا سرعت زاویه‌ای دستگاه $\{C\}$ نسبت به $\{A\}$ را محاسبه نماییم. با جمع برداری این دو بردار در چهارچوب $\{A\}$ داریم:

$${}^A\bar{\Omega}_C = {}^A\bar{\Omega}_B + {}^A R_B {}^B\bar{\Omega}_C \quad (13)$$



شکل (۴): سه دستگاه $\{A\}$ ، $\{B\}$ و $\{C\}$ که نسبت به هم دارای حرکت دورانی هستند.

اکنون برای محاسبه شتاب زاویه‌ای دستگاه $\{C\}$ نسبت به $\{A\}$ بایستی از رابطه (۱۳) مشتق گرفت. نتیجه به صورت زیر ارائه می‌گردد:

$${}^A\dot{\bar{\Omega}}_C = {}^A\dot{\bar{\Omega}}_B + {}^A\dot{R}_B {}^B\bar{\Omega}_C + {}^A R_B {}^B\dot{\bar{\Omega}}_C \quad (14)$$

با جایگذاری ${}^A\dot{R}_B(t) = {}^A S_B(t) {}^A R_B(t)$ در رابطه (۱۴) خواهیم داشت:

$${}^A\dot{\bar{\Omega}}_C = {}^A\dot{\bar{\Omega}}_B + {}^A S_B {}^A R_B {}^B\bar{\Omega}_C + {}^A R_B {}^B\dot{\bar{\Omega}}_C \quad (15)$$

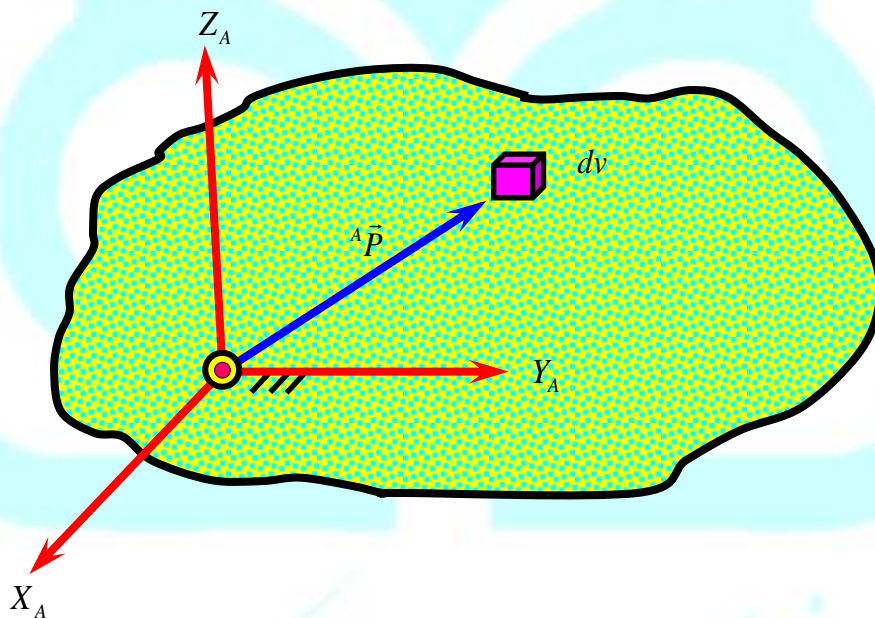
و نهایتاً با استفاده از خاصیت ماتریسهای پاد متقارن $(S\bar{A} = \bar{\Omega} \times \bar{A})$ ، معادله (۱۵) به فرم زیر ساده می‌گردد.

$${}^A\dot{\bar{\Omega}}_C = {}^A\dot{\bar{\Omega}}_B + {}^A\bar{\Omega}_B \times {}^A R_B {}^B\bar{\Omega}_C + {}^A R_B {}^B\dot{\bar{\Omega}}_C \quad (16)$$

از معادله (۱۶)، برای محاسبه شتاب زاویه‌ای رابط‌های بازوی مکانیکی ماهر استفاده خواهیم کرد.

• توزیع جرم

در مورد دوران حول محوری دلخواه، باید چگونگی توزیع جرم حول آن محور را کاملاً مشخص کنیم. لذا در اینجا ماتریس ممان اینرسی را معرفی می‌کنیم. شکل (۵) جسم صلبی را نشان می‌دهد که به آن چهارچوبی متصل است.



شکل (۵): ماتریس اینرسی هر جسم، چگونگی توزیع جرم نسبت به آن دستگاه را نشان می‌دهد.

اگرچه می‌توان ماتریس ممان اینرسی را نسبت به هر چهارچوب دلخواهی تعریف کرد، ولی معمولاً این کمیت نسبت به چهارچوب متصل به همان عضو تعریف می‌گردد. برای مثال ماتریس ممان اینرسی نسبت به دستگاه $\{A\}$ که به جسم صلب نشان داده شده در شکل (۵) متصل است، به صورت زیر تعریف می‌گردد.

$${}^A I = \begin{bmatrix} I_{xx} & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{xy} & I_{yy} & -I_{yz} \\ -I_{xz} & -I_{yz} & I_{zz} \end{bmatrix} \quad (17)$$

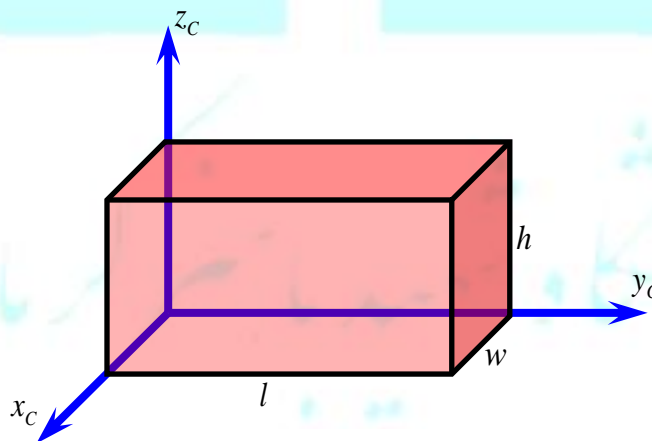
که درایه‌های آن عبارتند از:

$$\begin{aligned} I_{xx} &= \iiint_V (y^2 + z^2) \rho \, dv & I_{yy} &= \iiint_V (x^2 + z^2) \rho \, dv \\ I_{zz} &= \iiint_V (x^2 + y^2) \rho \, dv & I_{xy} &= \iiint_V xy \rho \, dv \\ I_{xz} &= \iiint_V xz \rho \, dv & I_{yz} &= \iiint_V yz \rho \, dv \end{aligned} \quad (18)$$

که در آن dv حجم المان دیفرانسیلی، ρ جرم واحد حجم و x ، y و z درایه‌های بردار ${}^A \bar{P}$ هستند. درایه‌های ماتریس اینرسی به مکان و جهتگیری چهارچوبی که جسم نسبت به آن تعریف شده است، بستگی دارد. اگر این دستگاه را به‌گونه‌ای به جسم متصل کنیم که بجز عناصر واقع بر روی قطر اصلی، بقیه درایه‌ها صفر گردند، آنگاه دستگاه مختصات در امتداد محورهای اصلی جسم قرار گرفته است.

• مثال

ماتریس اینرسی را برای مکعب مستطیل شکل (۶) نسبت به دستگاه $\{A\}$ محاسبه نمایید.



شکل (۶): مکعب مستطیل با چگالی یکنواخت

با توجه به معادله (۱۸)، I_{xx} به طریق زیر محاسبه می‌گردد.

$$I_{xx} = \int_0^h \int_0^l \int_0^w (y^2 + z^2) \rho dx dy dz = \frac{m}{3} (l^2 + h^2) \quad (a)$$

که در آن m جرم کل جسم است. به طریق مشابه I_{yy} و I_{zz} چنین بدست می‌آیند.

$$I_{yy} = \frac{m}{3} (w^2 + h^2) \quad (b)$$

$$I_{zz} = \frac{m}{3} (l^2 + w^2) \quad (c)$$

اکنون I_{yy} را محاسبه می‌کنیم.

$$I_{yy} = \int_0^h \int_0^l \int_0^w (xy) \rho dx dy dz = \frac{m}{4} (wl) \quad (d)$$

به طریق مشابه I_{xz} و I_{yz} چنین بدست می‌آیند.

$$I_{xz} = \frac{m}{4} (hw) \quad (e)$$

$$I_{yz} = \frac{m}{4} (hl) \quad (f)$$

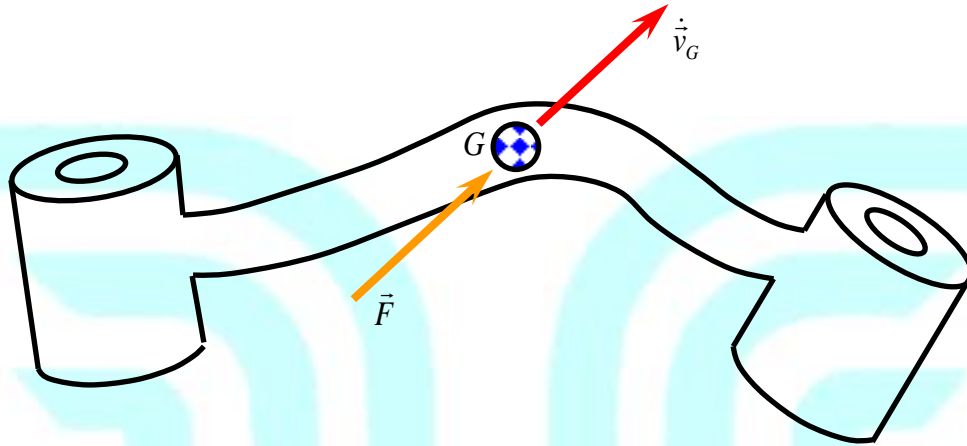
لذا ماتریس اینرسی به طریق زیر ارائه می‌گردد.

$${}^A I = \begin{bmatrix} \frac{m}{3} (l^2 + h^2) & -\frac{m}{4} wl & -\frac{m}{4} hw \\ -\frac{m}{4} wl & \frac{m}{3} (w^2 + h^2) & -\frac{m}{4} hl \\ -\frac{m}{4} hw & -\frac{m}{4} hl & \frac{m}{3} (l^2 + w^2) \end{bmatrix} \quad (g)$$

• معادله نیوتن

در شکل (۷)، جسم صلبی که مرکز جرم آن دارای شتاب $\dot{\vec{v}}_G$ است، نشان داده شده است. در چنین حالتی،

نیروی مورد نیاز برای ایجاد این شتاب با استفاده از قانون دوم نیوتن به صورت زیر ارائه می‌گردد.



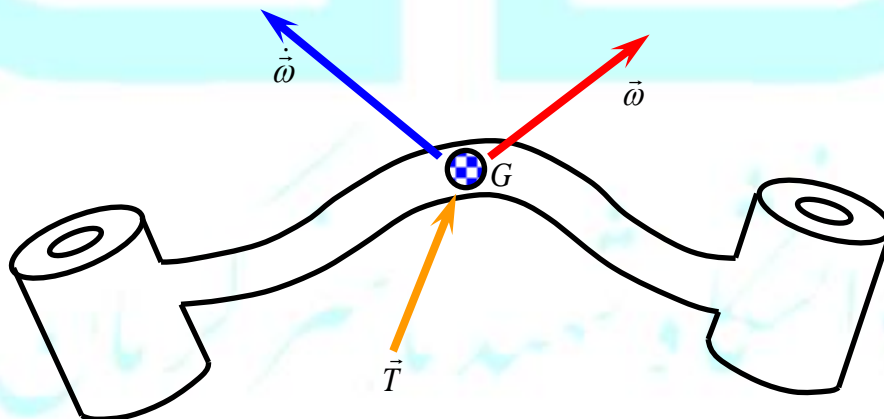
شکل (۷): نیروی \vec{F} وارد شده به مرکز جرم یک جسم، به آن شتاب \dot{v}_G می‌دهد.

$$\vec{F} = m\dot{v}_G \quad (19)$$

که در آن m جرم کل جسم است.

• معادله اویلر

جسم صلب نشان داده شده در شکل (۸) را در نظر بگیرید.



شکل (۸): گشتاور \vec{T} وارد شده به یک جسم، به آن سرعت زاویه‌ای $\vec{\omega}$ و شتاب زاویه‌ای $\dot{\vec{\omega}}$ می‌دهد.

همانگونه که از دینامیک می‌دانیم، بردار اندازه حرکت زاویه‌ای به صورت $\vec{H} = I\vec{\omega}$ تعریف می‌شود. بر طبق معادله اویلر، گشتاور مورد نیاز برای آنکه جسم دارای سرعت زاویه‌ای $\vec{\omega}$ و شتاب زاویه‌ای $\dot{\vec{\omega}}$ باشد، به صورت زیر محاسبه می‌گردد.

$$\vec{T} = \frac{d\vec{H}}{dt} \quad (20)$$

تغییرات بردار \vec{H} از دو منبع ناشی می‌شود. ۱- تغییرات اندازه این بردار و ۲- تغییرات جهت این بردار. لذا معادله (۲۰) به صورت زیر ساده می‌گردد.

$$\vec{T} = I_G \dot{\vec{\omega}} + \vec{\omega} \times I_G \vec{\omega} \quad (21)$$

در اینجا بایستی به این نکته اشاره گردد که دستگاه مختصات به مرکز جرم جسم مورد نظر به گونه‌ای چسبیده است که هیچگونه حرکت نسبی بین جسم و دستگاه مختصات وجود ندارد؛ لذا $I_G = [0]$ است.

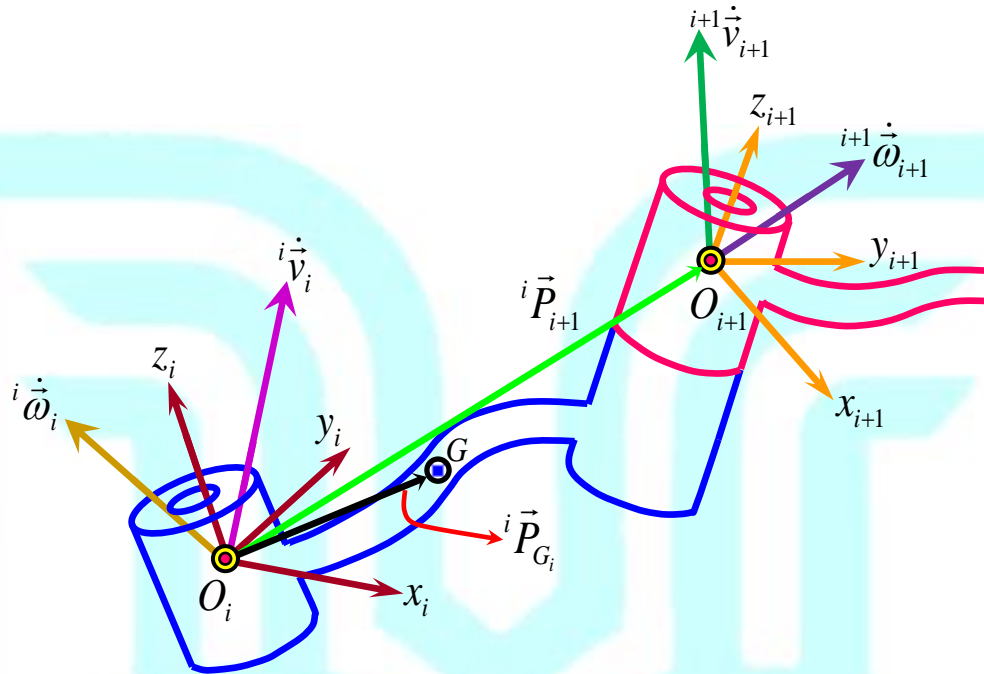
• چگونگی اشاعه شتاب از رابطی به رابط دیگر

همانگونه که در بخش قبل مشاهده گردید، استفاده از معادلات نیوتن-اویلر ایجاب می‌کند تا شتاب خطی و شتاب زاویه‌ای مرکز جرم هر لینک را در اختیار داشته باشیم. در فصل قبل، روابط مربوط به اشاعه سرعت از رابطی به رابط دیگر را به دست آوردیم. این روابط برای مفاصل دورانی (شکل (۹)) مجدداً در اینجا ارائه می‌گردد.

$${}^{i+1}\vec{\omega}_{i+1} = {}^{i+1}R_i {}^i\vec{\omega}_i + \dot{\theta}_{i+1} {}^{i+1}\vec{z}_{i+1} \quad (22)$$

$${}^{i+1}\vec{v}_{i+1} = {}^{i+1}R_i \left({}^i\vec{v}_i + {}^i\vec{\omega}_i \times {}^i\vec{P}_{i+1} \right) \quad (23)$$

با مشتقگیری مستقیم از روابط (۲۲) و (۲۳)، به ترتیب شتاب خطی مفصل $i+1$ ام و شتاب زاویه‌ای لینک $i+1$ ام تعیین خواهد شد. ولی به جای مشتقگیری مستقیم می‌توان از نتایج معادلات (۱۲) و (۱۶) نیز استفاده نمود. استفاده از این معادلات نتایج زیر را در پی دارد.



شکل (۹): بردارهای شتاب رابط‌های i و $i+1$ زمانی که هر دو مفصل دورانی هستند

$${}^{i+1}\dot{\bar{\omega}}_{i+1} = {}^{i+1}R_i {}^i\dot{\bar{\omega}}_i + \ddot{\theta}_{i+1} {}^{i+1}\bar{z}_{i+1} + {}^{i+1}R_i {}^i\bar{\omega}_i \times \dot{\theta}_{i+1} {}^{i+1}\bar{z}_{i+1} \quad (24)$$

$${}^{i+1}\dot{\bar{v}}_{i+1} = {}^{i+1}R_i \left({}^i\dot{\bar{v}}_i + {}^i\bar{\omega}_i \times ({}^i\bar{\omega}_i \times {}^i\bar{P}_{i+1}) + {}^i\dot{\bar{\omega}}_i \times {}^i\bar{P}_{i+1} \right) \quad (25)$$

از طرفی روابط اشاعه سرعت از رابطی به رابط دیگر برای مفاصل کشویی (شکل (۱۰)) به صورت زیر ارائه گردید.

$${}^{i+1}\bar{\omega}_{i+1} = {}^{i+1}R_i {}^i\bar{\omega}_i \quad (26)$$

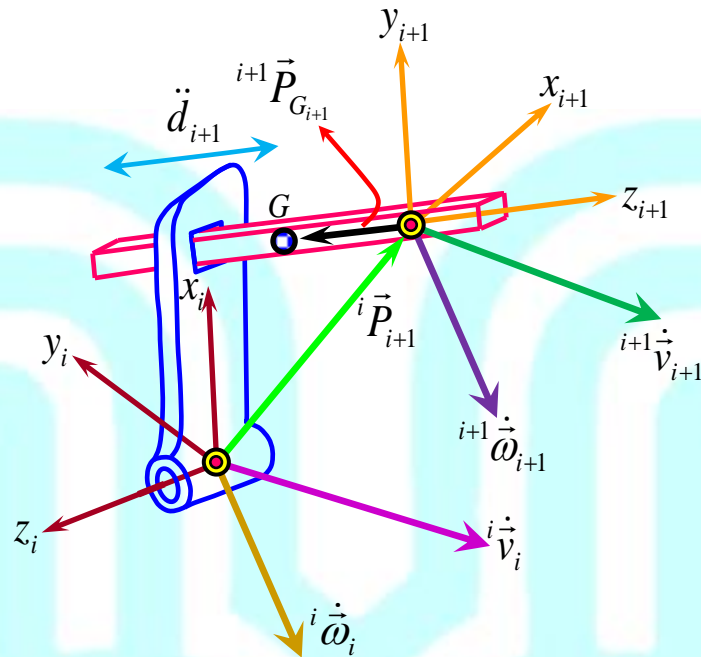
$${}^{i+1}\bar{v}_{i+1} = {}^{i+1}R_i \left({}^i\bar{v}_i + {}^i\bar{\omega}_i \times {}^i\bar{P}_{i+1} \right) + \dot{d}_{i+1} {}^{i+1}\bar{z}_{i+1} \quad (27)$$

مجدداً با استفاده از نتایج بدست آمده در روابط (۱۱) و (۱۶) و بدون نیاز به مشتقگیری مستقیم از روابط (۲۶) و

(۲۷)، روابط مربوط به اشاعه شتاب از رابطی به رابط دیگر برای یک مفصل کشویی به طریق زیر ارائه می‌گردد.

$${}^{i+1}\dot{\bar{\omega}}_{i+1} = {}^{i+1}R_i {}^i\dot{\bar{\omega}}_i \quad (28)$$

$${}^{i+1}\dot{\bar{v}}_{i+1} = {}^{i+1}R_i \left({}^i\dot{\bar{v}}_i + {}^i\bar{\omega}_i \times ({}^i\bar{\omega}_i \times {}^i\bar{P}_{i+1}) + {}^i\dot{\bar{\omega}}_i \times {}^i\bar{P}_{i+1} \right) + 2{}^{i+1}\bar{\omega}_{i+1} \times \dot{d}_{i+1} {}^{i+1}\bar{z}_{i+1} + \ddot{d}_{i+1} {}^{i+1}\bar{z}_{i+1} \quad (29)$$



شکل (۱۰): بردارهای شتاب رابط‌های i و $i+1$ زمانی که مفصل i دورانی و مفصل $i+1$ کشویی است

همانگونه که در معادله (۱۹) مشاهده می‌گردد، در استفاده از قانون دوم نیوتن به شتاب مطلق مرکز جرم هر لینک نیاز داریم. با استفاده از معادله (۱۲) این عبارت به صورت زیر ارائه می‌گردد.

$${}^i\dot{\vec{v}}_{G_i} = {}^i\dot{\vec{v}}_i + {}^i\dot{\vec{\omega}}_i \times ({}^i\dot{\vec{\omega}}_i \times {}^i\vec{P}_{G_i}) + {}^i\dot{\vec{\omega}}_i \times {}^i\vec{P}_{G_i} \quad (30)$$

که در آن برداریست که از مبدأ مختصات چهارچوب i ام به مرکز جرم لینک i ام رسم می‌گردد. در اینجا بایستی به این نکته اشاره گردد که معادله (۳۰) به هیچ وجه به نوع مفصل (دورانی یا کشویی) بستگی ندارد و برای هر دو حالت مفصل می‌تواند به کار گرفته شود.

• نیرو و گشتاور وارد بر یک رابط

اکنون با در اختیار داشتن روابط مربوط به شتاب خطی و زاویه‌ای هر رابط می‌توان نیرو و گشتاور وارد بر هر لینک را با استفاده از معادلات نیوتن-اولر محاسبه نمود. این معادلات مجدداً در اینجا ارائه می‌گردند.

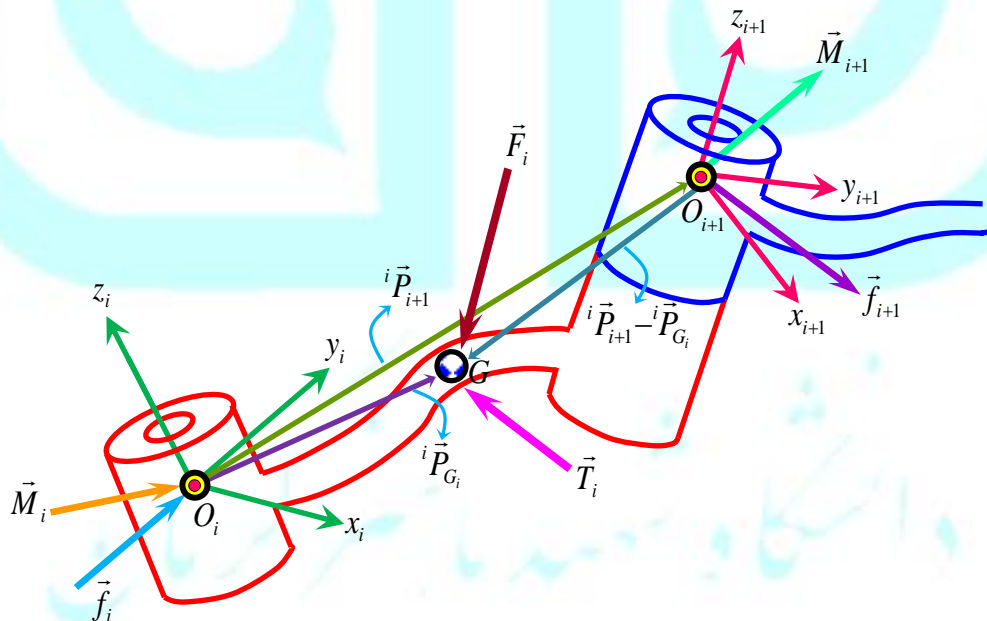
$${}^i \vec{F}_i = m_i \dot{{}^i \vec{v}_{G_i}} \quad (31)$$

$${}^i \vec{T}_i = I_{G_i} \dot{{}^i \vec{\omega}_i} + {}^i \vec{\omega}_i \times I_{G_i} {}^i \vec{\omega}_i \quad (32)$$

که در آن I_{G_i} ممان اینرسی حول مرکز جرم رابط i ام و $\dot{{}^i \vec{v}_{G_i}}$ شتاب مطلق مرکز جرم این لینک می باشد.

• محاسبات بازگشتی برای یافتن نیروها و گشتاورها

پس از آنکه نیروها و گشتاورهای اینرسی هر رابط را محاسبه کردیم، باید گشتاورهای مفصلی را که باعث ایجاد این نیروها و گشتاورهای اینرسی شده اند، نیز بدست آوریم. این کار را می توان با نوشتن معادلات تعادل نیرو و گشتاور با توجه به نمودار جسم آزاد هر رابط انجام داد. همانگونه که در شکل (۱۱) نشان داده شده است به رابط i ام دو نیروی \vec{f}_i و $-\vec{f}_{i+1}$ و دو گشتاور \vec{M}_i و $-\vec{M}_{i+1}$ از رابطهای مجاور $i-1$ و $i+1$ ، همراه با یک نیرو اینرسی \vec{F}_i و گشتاور اینرسی \vec{T}_i وارد می شود.



شکل (۱۱): تعادل نیروها و گشتاورها برای یک رابط از بازوی مکانیکی ماهر

با نوشتن قانون دوم نیوتن برای رابط i ام، به رابطه تعادل نیرویی زیر می‌رسیم.

$${}^i\bar{F}_i = {}^i\bar{f}_i - {}^iR_{i+1} {}^{i+1}\bar{f}_{i+1} \quad (33)$$

همچنین با نوشتن معادله اوپلر برای این رابط، به رابطه تعادل گشتاوری زیر می‌رسیم.

$${}^i\bar{T}_i = {}^i\bar{M}_i - {}^iR_{i+1} {}^{i+1}\bar{M}_{i+1} + ({}^i\bar{P}_{G_i}) \times {}^i\bar{f}_i - ({}^i\bar{P}_{i+1} - {}^i\bar{P}_{G_i}) \times {}^iR_{i+1} {}^{i+1}\bar{f}_{i+1} \quad (34)$$

با استفاده از نتیجه بدست آمده در معادله (33) یعنی ${}^i\bar{f}_i = {}^i\bar{F}_i + {}^iR_{i+1} {}^{i+1}\bar{f}_{i+1}$ و جایگذاری آن در معادله (34) نتیجه زیر حاصل می‌گردد.

$${}^i\bar{T}_i = {}^i\bar{M}_i - {}^iR_{i+1} {}^{i+1}\bar{M}_{i+1} - {}^i\bar{P}_{G_i} \times {}^i\bar{F}_i - {}^i\bar{P}_{i+1} \times {}^iR_{i+1} {}^{i+1}\bar{f}_{i+1} \quad (35)$$

سرانجام با مرتب کردن معادله‌های (33) و (35) به صورت بازگشتی پسرو (از لینک با شماره بالاتر به لینک به شماره پایین‌تر) داریم:

$${}^i\bar{f}_i = {}^iR_{i+1} {}^{i+1}\bar{f}_{i+1} + {}^i\bar{F}_i \quad (36)$$

$${}^i\bar{M}_i = {}^i\bar{T}_i + {}^iR_{i+1} {}^{i+1}\bar{M}_{i+1} + {}^i\bar{P}_{G_i} \times {}^i\bar{F}_i + {}^i\bar{P}_{i+1} \times {}^iR_{i+1} {}^{i+1}\bar{f}_{i+1} \quad (37)$$

مانند حالت استاتیکی، در اینجا نیز گشتاورهای مفصلی مورد نیاز، با انتخاب مؤلفه \bar{z} گشتاور \bar{M} ، بدست می‌آیند.

$$\tau_i = {}^i\bar{M}_i^T \cdot {}^i\bar{z}_i \quad (38)$$

اگر مفصل i کشویی باشد از رابطه زیر استفاده می‌کنیم.

$$\tilde{F}_i = {}^i\bar{f}_i^T \cdot {}^i\bar{z}_i \quad (39)$$

که در آن τ_i و \tilde{F}_i به ترتیب نشان دهنده گشتاور و نیروی کارانداز است. در پایان ذکر این نکته ضروریست که اگر دست ربات با محیط پیرامون خود تماس پیدا کند، نیروها و گشتاورهای حاصل از این تماس، با نماد ${}^{n+1}\bar{f}_{n+1}$ و ${}^{n+1}\bar{M}_{n+1}$ در معادله‌های تعادل نیرو و گشتاور منظور می‌شوند.

• الگوریتم دینامیکی بازگشتی نیوتن-اوپلر

اکنون با استفاده از نتایج بدست آمده در قسمتهای قبل الگوریتمی ارائه می‌گردد که به صورت خودکار و سیستماتیک معادلات حرکت یک منپولاتور متشکل از n بازوی صلب را که توسط مفاصل دورانی بهم مرتبط شده‌اند، استخراج می‌کند. این الگوریتم از دو قسمت تشکیل شده است. در قسمت اول، سرعتها و شتابهای هر رابط با استفاده از روابط بازگشتی پیشرو، از رابط ۱ تا رابط n محاسبه و معادله‌های نیوتن-ویلر برای هر رابط نوشته می‌شوند. سپس در قسمت دوم، نیروها و گشتاورهای کارانداز مفصل، به طور بازگشتی پسرو از رابط n تا رابط ۱، محاسبه می‌شوند.

✓ روابط بازگشتی پیشرو

for $i = 0:1:n-1$

$$\begin{aligned} {}^{i+1}\bar{\omega}_{i+1} &= {}^{i+1}R_i {}^i\bar{\omega}_i + \dot{\theta}_{i+1} {}^{i+1}\bar{z}_{i+1}; \\ {}^{i+1}\dot{\bar{\omega}}_{i+1} &= {}^{i+1}R_i {}^i\dot{\bar{\omega}}_i + \ddot{\theta}_{i+1} {}^{i+1}\bar{z}_{i+1} + {}^{i+1}R_i {}^i\bar{\omega}_i \times \dot{\theta}_{i+1} {}^{i+1}\bar{z}_{i+1}; \\ {}^{i+1}\dot{\bar{v}}_{i+1} &= {}^{i+1}R_i \left({}^i\dot{\bar{v}}_i + {}^i\bar{\omega}_i \times ({}^i\bar{\omega}_i \times {}^i\bar{P}_{i+1}) + {}^i\dot{\bar{\omega}}_i \times {}^i\bar{P}_{i+1} \right); \\ {}^{i+1}\dot{\bar{v}}_{G_{i+1}} &= {}^{i+1}\dot{\bar{v}}_{i+1} + {}^{i+1}\bar{\omega}_{i+1} \times ({}^{i+1}\bar{\omega}_{i+1} \times {}^{i+1}\bar{P}_{G_{i+1}}) + {}^{i+1}\dot{\bar{\omega}}_{i+1} \times {}^{i+1}\bar{P}_{G_{i+1}}; \\ {}^{i+1}\bar{F}_{i+1} &= m_{i+1} {}^{i+1}\dot{\bar{v}}_{G_{i+1}}; \\ {}^{i+1}\bar{T}_{i+1} &= I_{G_{i+1}} {}^{i+1}\dot{\bar{\omega}}_{i+1} + {}^{i+1}\bar{\omega}_{i+1} \times I_{G_{i+1}} {}^{i+1}\bar{\omega}_{i+1}; \end{aligned}$$

✓ روابط بازگشتی پسرو

for $i = n:1:1$

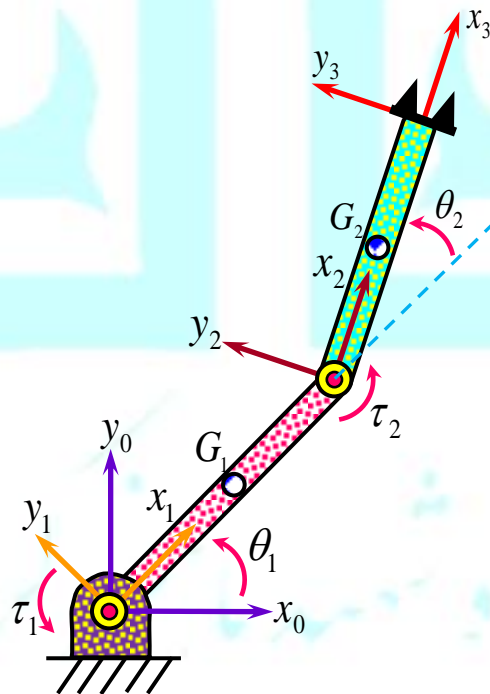
$$\begin{aligned} {}^i\bar{f}_i &= {}^iR_{i+1} {}^{i+1}\bar{f}_{i+1} + {}^i\bar{F}_i \\ {}^i\bar{M}_i &= {}^i\bar{T}_i + {}^iR_{i+1} {}^{i+1}\bar{M}_{i+1} + {}^i\bar{P}_{G_i} \times {}^i\bar{F}_i + {}^i\bar{P}_{i+1} \times {}^iR_{i+1} {}^{i+1}\bar{f}_{i+1} \\ \tau_i &= {}^i\bar{M}_i^T \cdot {}^i\bar{z}_i \end{aligned}$$

✓ در نظر گرفتن اثر ناشی از گرانش زمین در الگوریتم دینامیکی نیوتن-اویلر

تأثیر بارگذاری گرانش بر رابطها را می‌توان به سادگی با قرار دادن ${}^0\dot{v}_0 = \vec{G}$ در نظر گرفت، که در آن \vec{G} بردار گرانش است. در این صورت می‌توان فرض کرد که پایه ربات با شتاب $1G$ به سوی بالا حرکت می‌کند. این شتاب فرضی به سوی بالا، اثری دقیقاً همانند اثر گرانش بر رابطها دارد. بدین ترتیب بدون هیچگونه محاسبات اضافی، می‌توان اثر گرانش را در نظر گرفت.

• مثال

با استفاده از روابط بازگشتی نیوتن-اویلر معادلات دینامیکی بسته را برای ربات صفحه‌ای دو درجه آزادی شکل بدست آورید.



شکل (۱۲): ربات دو درجه آزادی با جرم بر واحد طول یکنواخت

ابتدا تانسور اینرسی حول مرکز جرم هر یک از رابطها با استفاده از معادله (۱۸) به شکل ارائه می‌گردد.

$$I_{G_1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_1 l_1^2 / 12 & 0 \\ 0 & 0 & m_1 l_1^2 / 12 \end{bmatrix} \quad (a)$$

$$I_{G_2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 l_2^2 / 12 & 0 \\ 0 & 0 & m_2 l_2^2 / 12 \end{bmatrix} \quad (b)$$

که در آن m_1 و m_2 به ترتیب جرم رابطهای ۱ و ۲ و l_1 و l_2 به ترتیب طول رابطهای ۱ و ۲ می‌باشند. از آنجایی که به مجری نهایی هیچگونه نیرو و گشتاوری وارد نمی‌شود لذا داریم:

$${}^3\vec{f}_3 = \vec{0} \quad (c)$$

$${}^3\vec{M}_3 = \vec{0} \quad (d)$$

از طرفی پایه ربات دوران نمی‌کند، لذا داریم:

$${}^0\vec{\omega}_0 = \vec{0} \quad (e)$$

$${}^0\dot{\vec{\omega}}_0 = \vec{0} \quad (f)$$

به منظور اعمال تأثیر ناشی از گرانش زمین نیز داریم:

$${}^0\dot{\vec{v}}_0 = g {}^0\vec{y}_0 \quad (g)$$

و نهایتاً ماتریسهای دوران ارتباط دهنده چهارچوبهای متصل به ربات دو درجه آزادی فوق عبارتند از:

$${}^0R_1 = \begin{bmatrix} C\theta_1 & -S\theta_1 & 0 \\ S\theta_1 & C\theta_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (h)$$

$${}^1R_2 = \begin{bmatrix} C\theta_2 & -S\theta_2 & 0 \\ S\theta_2 & C\theta_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (i)$$

$${}^2R_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (j)$$

اکنون همه شرایط برای استفاده از الگوریتمهای بازگشتی ارائه شده در این فصل مهیا است. ابتدا با استفاده از الگوریتم بازگشتی پیشرو، عبارتهای سینماتیکی ربات فوق را به فرم نمادین محاسبه می‌کنیم. به ازاء $i=0$ داریم:

$${}^1\vec{\omega}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_1 \end{bmatrix} \quad (k)$$

$${}^1\dot{\vec{\omega}}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \ddot{\theta}_1 \end{bmatrix} \quad (l)$$

$${}^1\dot{v}_1 = \begin{bmatrix} C\theta_1 & S\theta_1 & 0 \\ -S\theta_1 & C\theta_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ g \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} gS\theta_1 \\ gC\theta_1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (m)$$

$${}^1\dot{v}_{G_1} = \begin{bmatrix} gS\theta_1 \\ gC\theta_1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_1 \end{bmatrix} \times \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} l_1/2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \ddot{\theta}_1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} l_1/2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -l_1\dot{\theta}_1^2/2 + gS\theta_1 \\ l_1\ddot{\theta}_1/2 + gC\theta_1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (n)$$

$${}^1\vec{F}_1 = \begin{bmatrix} -m_1l_1\dot{\theta}_1^2/2 + m_1gS\theta_1 \\ m_1l_1\ddot{\theta}_1/2 + m_1gC\theta_1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (o)$$

$${}^1\vec{T}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_1l_1^2/12 & 0 \\ 0 & 0 & m_1l_1^2/12 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \ddot{\theta}_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_1 \end{bmatrix} \times \left(\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_1l_1^2/12 & 0 \\ 0 & 0 & m_1l_1^2/12 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_1 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ m_1l_1^2\ddot{\theta}_1/12 \end{bmatrix} \quad (p)$$

به ازاء $i=1$ داریم:

$${}^2\vec{\omega}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2 \end{bmatrix} \quad (q)$$

$${}^2\dot{\omega}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2 \end{bmatrix} \quad (r)$$

$${}^2\dot{v}_2 = \begin{bmatrix} C\theta_2 & S\theta_2 & 0 \\ -S\theta_2 & C\theta_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} gS\theta_1 \\ gC\theta_1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_1 \end{bmatrix} \times \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} l_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \ddot{\theta}_1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} l_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right)$$

$$= \begin{bmatrix} l_1\ddot{\theta}_1S\theta_2 - l_1\dot{\theta}_1^2C\theta_2 + gS(\theta_1 + \theta_2) \\ l_1\ddot{\theta}_1C\theta_2 + l_1\dot{\theta}_1^2S\theta_2 + gC(\theta_1 + \theta_2) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (s)$$

$${}^2\dot{v}_{G_2} = \begin{bmatrix} l_1\ddot{\theta}_1S\theta_2 - l_1\dot{\theta}_1^2C\theta_2 + gS(\theta_1 + \theta_2) \\ l_1\ddot{\theta}_1C\theta_2 + l_1\dot{\theta}_1^2S\theta_2 + gC(\theta_1 + \theta_2) \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2 \end{bmatrix} \times \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} l_2/2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} l_2/2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} l_1\ddot{\theta}_1S\theta_2 - l_1\dot{\theta}_1^2C\theta_2 + gS(\theta_1 + \theta_2) - l_2(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)^2/2 \\ l_1\ddot{\theta}_1C\theta_2 + l_1\dot{\theta}_1^2S\theta_2 + gC(\theta_1 + \theta_2) + l_2(\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2)/2 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (t)$$

$${}^2\vec{F}_2 = \begin{bmatrix} m_2l_1\ddot{\theta}_1S\theta_2 - m_2l_1\dot{\theta}_1^2C\theta_2 + m_2gS(\theta_1 + \theta_2) - m_2l_2(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)^2/2 \\ m_2l_1\ddot{\theta}_1C\theta_2 + m_2l_1\dot{\theta}_1^2S\theta_2 + m_2gC(\theta_1 + \theta_2) + m_2l_2(\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2)/2 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (u)$$

$${}^2\vec{T}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_2l_2^2/12 & 0 \\ 0 & 0 & m_2l_2^2/12 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2 \end{bmatrix} \times \left(\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_2l_2^2/12 & 0 \\ 0 & 0 & m_2l_2^2/12 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2 \end{bmatrix} \right)$$

$$= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ m_2l_2^2(\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2)/12 \end{bmatrix} \quad (v)$$

اکنون برای محاسبه نیروها و گشتاورهایی که بین رابطها اعمال می شود از الگوریتم بازگشتی پسرو استفاده می کنیم. به ازاء $i = 2$ داریم:

$${}^2\vec{f}_2 = \begin{bmatrix} m_2l_1\ddot{\theta}_1S\theta_2 - m_2l_1\dot{\theta}_1^2C\theta_2 + m_2gS(\theta_1 + \theta_2) - m_2l_2(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)^2/2 \\ m_2l_1\ddot{\theta}_1C\theta_2 + m_2l_1\dot{\theta}_1^2S\theta_2 + m_2gC(\theta_1 + \theta_2) + m_2l_2(\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2)/2 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (w)$$

$${}^2\bar{M}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{m_2 l_2^2 (\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2)}{12} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{l_2}{2} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} m_2 l_1 \ddot{\theta}_1 S \theta_2 - m_2 l_1 \dot{\theta}_1^2 C \theta_2 + m_2 g S (\theta_1 + \theta_2) - m_2 l_2 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)^2 / 2 \\ m_2 l_1 \ddot{\theta}_1 C \theta_2 + m_2 l_1 \dot{\theta}_1^2 S \theta_2 + m_2 g C (\theta_1 + \theta_2) + m_2 l_2 (\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2) / 2 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (x)$$

$$= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ m_2 l_2^2 (\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2) / 3 + m_2 l_1 l_2 \ddot{\theta}_1 C \theta_2 / 2 + m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1^2 S \theta_2 / 2 + m_2 l_2 g C (\theta_1 + \theta_2) / 2 \end{bmatrix}$$

و نهایتاً به اِزاء $i = 1$ داریم:

$${}^1\bar{f}_1 = \begin{bmatrix} C \theta_2 & -S \theta_2 & 0 \\ S \theta_2 & C \theta_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_2 l_1 \ddot{\theta}_1 S \theta_2 - m_2 l_1 \dot{\theta}_1^2 C \theta_2 + m_2 g S (\theta_1 + \theta_2) - m_2 l_2 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)^2 / 2 \\ m_2 l_1 \ddot{\theta}_1 C \theta_2 + m_2 l_1 \dot{\theta}_1^2 S \theta_2 + m_2 g C (\theta_1 + \theta_2) + m_2 l_2 (\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2) / 2 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (y)$$

$$+ \begin{bmatrix} -m_1 \dot{\theta}_1^2 l_1 / 2 + m_1 g S \theta_1 \\ m_1 \ddot{\theta}_1 l_1 / 2 + m_1 g C \theta_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$${}^1\bar{M}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ m_1 l_1^2 \ddot{\theta}_1 / 12 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C \theta_2 & -S \theta_2 & 0 \\ S \theta_2 & C \theta_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ m_2 l_2^2 (\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2) / 3 + [m_2 l_1 l_2 \ddot{\theta}_1 C \theta_2 + m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1^2 S \theta_2 + m_2 l_2 g C (\theta_1 + \theta_2)] / 2 \end{bmatrix} \quad (z)$$

$$+ \begin{bmatrix} l_1 / 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -m_1 l_1 \dot{\theta}_1^2 / 2 + m_1 g S \theta_1 \\ m_1 l_1 \ddot{\theta}_1 / 2 + m_1 g C \theta_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$+ \begin{bmatrix} l_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} C \theta_2 & -S \theta_2 & 0 \\ S \theta_2 & C \theta_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_2 l_1 \ddot{\theta}_1 S \theta_2 - m_2 l_1 \dot{\theta}_1^2 C \theta_2 + m_2 g S (\theta_1 + \theta_2) - m_2 l_2 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)^2 / 2 \\ m_2 l_1 \ddot{\theta}_1 C \theta_2 + m_2 l_1 \dot{\theta}_1^2 S \theta_2 + m_2 g C (\theta_1 + \theta_2) + m_2 l_2 (\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2) / 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ m_2 l_2^2 (\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2) / 3 + m_2 l_1 l_2 (2\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2) C \theta_2 / 2 + (m_1 / 3 + m_2) l_1^2 \ddot{\theta}_1 \\ -m_2 l_1 l_2 (\dot{\theta}_2^2 + 2\dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2) S \theta_2 / 2 + (m_2 + m_1 / 2) g l_1 C \theta_1 + m_2 l_2 g C (\theta_1 + \theta_2) / 2 \end{bmatrix}$$

با بیرون آوردن مؤلفه‌های \bar{z} از \bar{M}_i ، گشتاورهای مفصلی به دست می‌آیند.

$$\tau_1 = m_2 l_2^2 (\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2) / 3 + m_2 l_1 l_2 (2\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2) C\theta_2 / 2 + (m_1 / 3 + m_2) l_1^2 \ddot{\theta}_1 - m_2 l_1 l_2 (\dot{\theta}_2^2 + 2\dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2) S\theta_2 / 2 + (m_2 + m_1 / 2) g l_1 C\theta_1 + m_2 l_2 g C(\theta_1 + \theta_2) / 2 \quad (a1)$$

$$\tau_2 = m_2 l_2^2 (\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2) / 3 + m_2 l_1 l_2 \ddot{\theta}_1 C\theta_2 / 2 + m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1^2 S\theta_2 / 2 + m_2 l_2 g C(\theta_1 + \theta_2) / 2 \quad (b1)$$

معادله‌های (a1) و (b1) گشتاور مورد نیاز در موتورها را به صورت تابعی از موقعیت زاویه‌ای، سرعت زاویه‌ای و شتاب زاویه‌ای مفاصل ربات نشان می‌دهد. همانگونه که مشاهده می‌گردد برای یک ربات دو درجه آزادی معادلات تا این اندازه پیچیده هستند. با اضافه شدن تعداد لینکها، معادلات به طرز وحشتناکی پیچیده می‌شوند. به‌گونه‌ای که تنها با استفاده از روشهای خودکار و سیمتاتیک می‌توان معادلات حرکت را استخراج نمود.

• ساختار معادله‌های دینامیکی بازوی مکانیک ماهر

ساختار معادله‌های بازوی مکانیکی ماهر به صورت زیر قابل ارائه می‌باشد.

$$\tau = I(\bar{\Theta})\ddot{\bar{\Theta}} + V(\bar{\Theta}, \dot{\bar{\Theta}}) + G(\bar{\Theta}) \quad (40)$$

که در آن $I(\bar{\Theta})$ ماتریس اینرسی $n \times n$ ، بردار $V(\bar{\Theta}, \dot{\bar{\Theta}})$ بردار $n \times 1$ نشان‌دهنده جمله‌های گریز از مرکز و کوریولیس، و $G(\bar{\Theta})$ بردار $n \times 1$ شامل جمله‌های مربوط به گرانش است.

• مثال

برای بازوی مکانیکی مثال قبل، معادلات حرکت را به فرم معادله (40) مرتب نمایید.

معادلات (a1) و (b1) مجدداً در اینجا ارائه می‌گردند.

$$\tau_1 = m_2 l_2^2 (\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2) / 3 + m_2 l_1 l_2 (2\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2) C\theta_2 / 2 + (m_1 / 3 + m_2) l_1^2 \ddot{\theta}_1 - m_2 l_1 l_2 (\dot{\theta}_2^2 + 2\dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2) S\theta_2 / 2 + (m_2 + m_1 / 2) g l_1 C\theta_1 + m_2 l_2 g C(\theta_1 + \theta_2) / 2 \quad (a)$$

$$\tau_2 = m_2 l_2^2 (\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2) / 3 + m_2 l_1 l_2 \ddot{\theta}_1 C\theta_2 / 2 + m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1^2 S\theta_2 / 2 + m_2 l_2 g C(\theta_1 + \theta_2) / 2 \quad (b)$$

همانگونه که در معادله (۴۰) مشاهده می‌گردد، ماتریس اینرسی $I(\vec{\Theta})$ از همه جمله‌هایی تشکیل می‌شود که مضرب $\ddot{\vec{\Theta}}$ اند. لذا داریم:

$$I(\vec{\Theta}) = \begin{bmatrix} \frac{m_2 l_2^2}{3} + m_2 l_1 l_2 C \theta_2 + \left(\frac{m_1}{3} + m_2\right) l_1^2 & \frac{m_2 l_2^2}{3} + \frac{m_2 l_1 l_2 C \theta_2}{2} \\ \frac{m_2 l_2^2}{3} + \frac{m_2 l_1 l_2 C \theta_2}{2} & \frac{m_2 l_2^2}{3} \end{bmatrix} \quad (c)$$

لازم به ذکر است ماتریس جرم بازوی مکانیکی ماهر، همواره متقارن و مثبت معین است. بنابراین همواره معکوس پذیر است. جمله سرعت، $V(\vec{\Theta}, \dot{\vec{\Theta}})$ شامل کلیه عبارتهایی است که به سرعت مفصلها بستگی دارند. پس داریم:

$$V(\vec{\Theta}, \dot{\vec{\Theta}}) = \begin{bmatrix} -m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_2^2 S \theta_2 / 2 - m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 S \theta_2 \\ m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1^2 S \theta_2 / 2 \end{bmatrix} \quad (d)$$

با دقت در معادله (d) نتیجه می‌شود جمله‌ای مانند $-m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_2^2 S \theta_2 / 2$ بر اثر نیروی گریز از مرکز ایجاد می‌شود؛ زیرا توان دوم سرعت در آن ظاهر شده است. ولی جمله ای مانند $-m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 S \theta_2$ بر اثر نیروی کوریولیس پدید می‌آید؛ زیرا حاصلضرب دو سرعت مفصلی در آن ظاهر شده است. جملات ناشی از گرانث، $G(\vec{\Theta})$ ، کلیه جمله‌هایی را در بر می‌گیرد که در آنها g ، ظاهر می‌شوند. پس داریم:

$$G(\vec{\Theta}) = \begin{bmatrix} (m_2 + m_1 / 2) g l_1 C \theta_1 + m_2 l_2 g C(\theta_1 + \theta_2) / 2 \\ m_2 l_2 g C(\theta_1 + \theta_2) / 2 \end{bmatrix} \quad (e)$$

همانگونه که در معادله (e) مشاهده می‌گردد، عبارت $G(\vec{\Theta})$ تنها به $\vec{\Theta}$ بستگی دارد، و هیچگونه مشتقی در آن ظاهر نمی‌شود.

• روش لاگرانژ در بدست آوردن معادله‌های دینامیکی بازوهای مکانیکی

همانگونه که در بخش قبل ملاحظه گردید، رهیافت نیوتن-اویلر بر تحلیل نیروها و گشتاورهای بین رابطها استوار است. در اینجا از فرمولاسیون دینامیکی لاگرانژ برای استخراج معادلات حرکت استفاده می‌گردد. بر خلاف روش

نیوتن-اویلر که مبتنی بر رسم نمودار جسم آزاد هر یک از عضوهای تشکیل دهنده مکانیزم است، در روش لاگرانژ نیازی به جدا کردن اجزاء تشکیل دهنده سیستم نمی‌باشد. در این روش که بر پایه انرژی بنا نهاده شده است، بایستی در ابتدا انرژی جنبشی و پتانسیل سیستم محاسبه گردد. جزئیات این روش در ادامه ارائه می‌گردد. انرژی جنبشی مربوط به یک بازوی مکانیکی ماهر به صورت زیر ارائه می‌گردد:

$$K_i = \frac{1}{2} m_i \vec{v}_{G_i}^T \cdot \vec{v}_{G_i} + \frac{1}{2} \vec{\omega}_i^T \cdot I_{G_i} \vec{\omega}_i \quad (41)$$

که در آن جمله اول انرژی جنبشی مربوط به حرکت انتقالی بازو و جمله دوم انرژی جنبشی مربوط به حرکت دورانی سیستم را نشان می‌دهد. انرژی جنبشی کل سیستم از حاصلجمع انرژی جنبشی تک تک لینکها حاصل می‌گردد.

$$K = \sum_{i=1}^n K_i \quad (42)$$

می‌توان نشان داد که بین انرژی جنبشی سیستم و ماتریس اینرسی سیستم رابطه زیر برقرار است.

$$K(\vec{\Theta}, \dot{\vec{\Theta}}) = \frac{1}{2} \dot{\vec{\Theta}}^T \cdot I(\vec{\Theta}) \dot{\vec{\Theta}} \quad (43)$$

انرژی پتانسیل رابط i ام، P_i را می‌توان چنین نوشت.

$$P_i = -m_i \vec{g}^T \cdot \vec{P}_{G_i} \quad (44)$$

که در آن بردار \vec{g}^T بردار 3×1 ناشی از گرانش زمین و \vec{P}_{G_i} برداری است که موقعیت مرکز جرم لینک i ام را نسبت به دستگاه مرجع متصل به زمین نشان می‌دهد. در اینجا نیز، انرژی پتانسیل کل سیستم از حاصل جمع انرژی پتانسیل تک تک لینکها به صورت زیر ارائه می‌گردد.

$$P = \sum_{i=1}^n P_i \quad (45)$$

پس از محاسبه توابع مربوط به انرژی جنبشی و پتانسیل سیستم، معادلات حرکت با استفاده از فرمولاسیون لاگرانژ به طریق زیر حاصل می‌گردد.

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial K}{\partial \dot{\Theta}} \right) - \frac{\partial K}{\partial \Theta} + \frac{\partial P}{\partial \Theta} = \bar{\tau}$$

or

(۴۶)

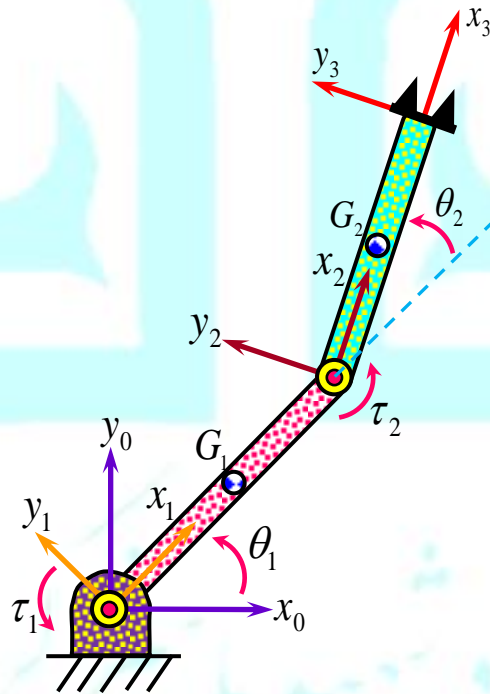
$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial K}{\partial \dot{\theta}_i} \right) - \frac{\partial K}{\partial \theta_i} + \frac{\partial P}{\partial \theta_i} = \bar{\tau} \quad i = 1, 2, \dots, n$$

در ادامه با حل دو مثال، روش فوق را مرور می‌کنیم.

• مثال

با استفاده از فرمولاسیون لاگرانژ معادلات حرکت را برای ربات صفحه‌ای دو درجه آزادی مثال قبل بدست آورید.

شکل شماره (۱۲) مجدداً در اینجا ارائه می‌گردد.



شکل (۱۳): ربات دو درجه آزادی با جرم بر واحد طول یکنواخت

در ابتدا انرژی جنبشی سیستم را جهت استفاده در فرمولاسیون لاگرانژ محاسبه می‌کنیم. برای این منظور به سرعت مطلق مرکز جرم عضوهای یک و دو نیاز داریم. این عبارات به راحتی به کمک روابط زیر حاصل می‌گردد.

$${}^1\vec{v}_{G_1} = {}^1\vec{v}_1 + {}^1\vec{\omega}_1 \times {}^1\vec{P}_{G_1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} l_1/2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ l_1\dot{\theta}_1/2 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad (a)$$

$${}^2\vec{v}_{G_2} = {}^2\vec{v}_2 + {}^2\vec{\omega}_2 \times {}^2\vec{P}_{G_2} = \begin{bmatrix} C\theta_2 & S\theta_2 & 0 \\ -S\theta_2 & C\theta_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ l_1\dot{\theta}_1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} l_2/2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_1\dot{\theta}_1 S\theta_2 \\ l_1\dot{\theta}_1 C\theta_2 + l_2(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)/2 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad (b)$$

همچنین ماتریس اینرسی هر لینک نسبت به دستگاه مختصات متصل به آن رابط به شکل زیر ارائه می‌گردد.

$$I_{G_1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_1 l_1^2 / 12 & 0 \\ 0 & 0 & m_1 l_1^2 / 12 \end{bmatrix}; \quad (c)$$

$$I_{G_2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 l_2^2 / 12 & 0 \\ 0 & 0 & m_2 l_2^2 / 12 \end{bmatrix}; \quad (d)$$

اکنون با استفاده از معادله (۴۱) می‌توان انرژی جنبشی کل سیستم را محاسبه کرد.

$$K = K_1 + K_2 = m_1 l_1^2 \dot{\theta}_1^2 / 6 + m_2 l_1^2 \dot{\theta}_1^2 / 2 + m_2 l_2^2 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)^2 / 6 + m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) C\theta_2 / 2 \quad (e)$$

برای محاسبه انرژی پتانسیل سیستم بایستی از رابطه (۴۴) استفاده نمود.

$$P = P_1 + P_2 = m_1 g l_1 S\theta_1 / 2 + m_2 g (l_1 S\theta_1 + l_2 S(\theta_1 + \theta_2)) / 2 \quad (f)$$

اکنون با استفاده از رابطه (۴۶)، معادلات حرکت به‌طریق زیر استخراج می‌گردد. در رابطه (۴۶) به ازاء $i = 1$ داریم:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial K}{\partial \dot{\theta}_1} \right) &= \frac{d}{dt} \left(2m_1 l_1^2 \dot{\theta}_1 / 6 + m_2 l_1^2 \dot{\theta}_1 + m_2 l_2^2 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) / 3 + m_2 l_1 l_2 (2\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) C\theta_2 / 2 \right) \\ &= \left(m_1 l_1^2 \ddot{\theta}_1 / 3 + m_2 l_1^2 \ddot{\theta}_1 + m_2 l_2^2 (\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2) / 3 \right. \\ &\quad \left. + m_2 l_1 l_2 (2\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2) C\theta_2 / 2 - m_2 l_1 l_2 (2\dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_2^2) S\theta_2 / 2 \right) \end{aligned} \quad (g)$$

$$\frac{\partial K}{\partial \theta_1} = 0 \quad (h)$$

$$\frac{\partial P}{\partial \theta_1} = m_1 g l_1 C \theta_1 / 2 + m_2 g (l_1 C \theta_1 + l_2 C (\theta_1 + \theta_2)) / 2 \quad (i)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial K}{\partial \dot{\theta}_1} \right) - \frac{\partial K}{\partial \theta_1} + \frac{\partial P}{\partial \theta_1} = \tau_1 \quad (j)$$

$$\Rightarrow \tau_1 = m_2 l_2^2 (\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2) / 3 + m_2 l_1 l_2 (2\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2) C \theta_2 / 2 + (m_1 / 3 + m_2) l_1^2 \ddot{\theta}_1 - m_2 l_1 l_2 (\dot{\theta}_2^2 + 2\dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2) S \theta_2 / 2 + (m_2 + m_1 / 2) g l_1 C \theta_1 + m_2 l_2 g C (\theta_1 + \theta_2) / 2$$

در حالیکه به ازاء $i = 2$ نتیجه زیر حاصل می‌گردد.

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial K}{\partial \dot{\theta}_2} \right) = \frac{d}{dt} (m_2 l_2^2 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) / 3 + m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1 C \theta_2 / 2) \quad (k)$$

$$= (m_2 l_2^2 (\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2) / 3 + m_2 l_1 l_2 \ddot{\theta}_1 C \theta_2 / 2 - m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 S \theta_2 / 2)$$

$$\frac{\partial K}{\partial \theta_2} = -m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) S \theta_2 / 2 \quad (l)$$

$$\frac{\partial P}{\partial \theta_2} = m_2 g l_2 C (\theta_1 + \theta_2) / 2 \quad (m)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial K}{\partial \dot{\theta}_2} \right) - \frac{\partial K}{\partial \theta_2} + \frac{\partial P}{\partial \theta_2} = \tau_2 \quad (n)$$

$$\Rightarrow \tau_2 = m_2 l_2^2 (\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2) / 3 + m_2 l_1 l_2 \ddot{\theta}_1 C \theta_2 / 2 + m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1^2 S \theta_2 / 2 + m_2 l_2 g C (\theta_1 + \theta_2) / 2$$

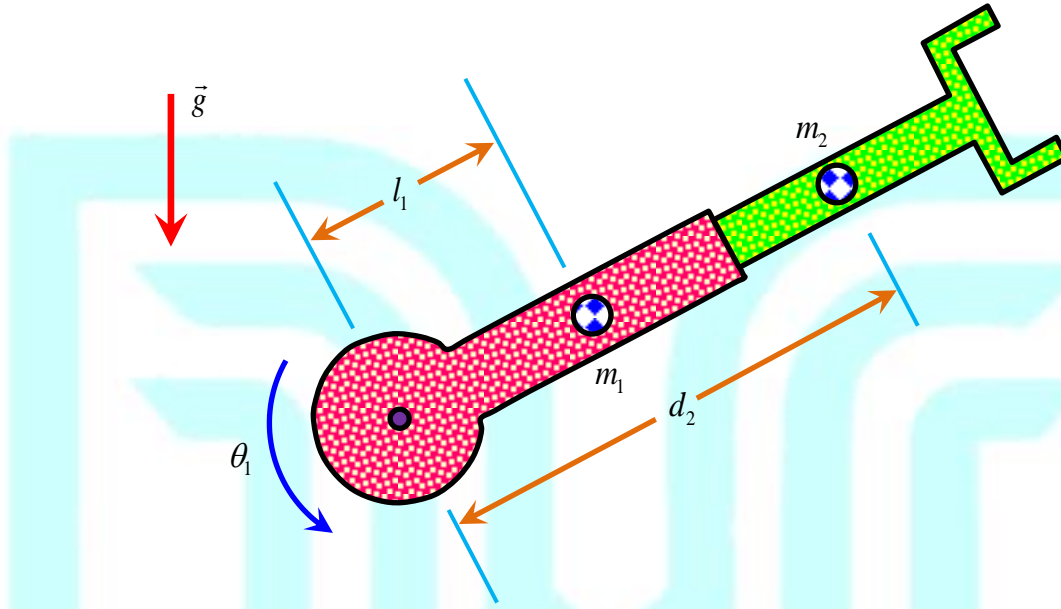
با مقایسه نتایج بدست آمده در دو مثال اخیر این نتیجه حاصل می‌گردد که معادلات حرکت مستقل از روش

بکار گرفته شده (نیوتن-اویلر و یا لاگرانژ)، به یک نتیجه منجر می‌گردد.

• مثال

در شکل (۱۴) یک ربات دو درجه آزادی با مفاصل دورانی و کشویی نشان داده شده است. با استفاده از

فرمولاسیون لاگرانژ معادلات حرکت این سیستم رباتیکی را استخراج نمایید.



شکل (۱۴): ربات دو درجه آزادی با جرم بر واحد طول یکنواخت

فرض می‌کنیم ماتریس ممان اینرسی حول مرکز جرم برای بازوهای این ربات به شکل زیر باشد:

$$I_{G_1} = \begin{bmatrix} I_{xx_1} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy_1} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz_1} \end{bmatrix}; \quad (a)$$

$$I_{G_2} = \begin{bmatrix} I_{xx_2} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy_2} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz_2} \end{bmatrix}; \quad (b)$$

بنابراین می‌توان انرژی جنبشی مربوط به هر یک از لینکها را محاسبه نمود. برای لینک شماره (۱) داریم:

$$K_1 = m_1 l_1^2 \dot{\theta}_1^2 / 2 + I_{zz_1} \dot{\theta}_1^2 / 2 \quad (c)$$

و انرژی جنبشی رابط شماره (۲) عبارت است از:

$$K_2 = m_2 (d_2^2 \dot{\theta}_1^2 + \dot{d}_2^2) / 2 + I_{zz_2} \dot{\theta}_1^2 / 2 \quad (d)$$

لذا انرژی جنبشی کل سیستم از حاصلجمع روابط (c) و (d) به صورت زیر ارائه می‌گردد.

$$K = (m_1 l_1^2 + I_{zz_1} + I_{zz_2} + m_2 d_2^2) \dot{\theta}_1^2 / 2 + m_2 \dot{d}_2^2 / 2 \quad (e)$$

اکنون نوبت به محاسبه انرژی پتانسیل هر یک از لینکها می‌رسد. برای لینک شماره (۱) داریم:

$$P_1 = m_1 g l_1 \sin \theta_1 \quad (f)$$

در حالی که انرژی پتانسیل برای رابط دوم عبارت است از:

$$P_2 = m_2 g d_2 \sin \theta_1 \quad (g)$$

انرژی پتانسیل کل سیستم از حاصلجمع انرژی پتانسیل تک تک لینکها به طریق زیر حاصل می‌گردد:

$$P(\Theta) = g(m_1 l_1 + m_2 d_2) \sin \theta_1 \quad (h)$$

اکنون مشتقات جزئی ظاهر شده در فرمولاسیون لاگرانژ (معادله (۴۶)) به طریق زیر محاسبه می‌گردد.

$$\frac{\partial K}{\partial \dot{\Theta}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial K}{\partial \dot{\theta}_1} \\ \frac{\partial K}{\partial \dot{d}_1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (m_1 l_1^2 + I_{zz_1} + I_{zz_2} + m_2 d_2^2) \dot{\theta}_1 \\ m_2 \dot{d}_2 \end{bmatrix} \quad (i)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial K}{\partial \dot{\Theta}} \right) = \begin{bmatrix} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial K}{\partial \dot{\theta}_1} \right) \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial K}{\partial \dot{d}_1} \right) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (m_1 l_1^2 + I_{zz_1} + I_{zz_2} + m_2 d_2^2) \ddot{\theta}_1 + 2m_2 d_2 \dot{d}_2 \dot{\theta}_1 \\ m_2 \ddot{d}_2 \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial K}{\partial \Theta} = \begin{bmatrix} \frac{\partial K}{\partial \theta_1} \\ \frac{\partial K}{\partial d_1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ m_2 d_2 \dot{\theta}_1^2 \end{bmatrix} \quad (j)$$

$$\frac{\partial P}{\partial \Theta} = \begin{bmatrix} \frac{\partial P}{\partial \theta_1} \\ \frac{\partial P}{\partial d_1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g(m_1 l_1 + m_2 d_2) \cos \theta_1 \\ g m_2 \sin \theta_1 \end{bmatrix} \quad (k)$$

در نهایت، با جایگزین کردن این عبارات در معادله (۴۶)، معادلات حرکت به طریق زیر ارائه می‌گردد.

$$\begin{bmatrix} \tau_1 \\ F_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (m_1 l_1^2 + I_{zz_1} + I_{zz_2} + m_2 d_2^2) \ddot{\theta}_1 + 2m_2 d_2 \dot{d}_2 \dot{\theta}_1 + g(m_1 l_1 + m_2 d_2) \cos \theta_1 \\ m_2 \ddot{d}_2 - m_2 d_2 \dot{\theta}_1^2 + g m_2 \sin \theta_1 \end{bmatrix} \quad (l)$$

با بازنویسی معادلات حرکت (رابطه (1)) به فرم ماتریسی (رابطه (۴۰)) داریم:

$$I(\bar{\theta}) = \begin{bmatrix} m_1 l_1^2 + I_{zz_1} + I_{zz_2} + m_2 d_2^2 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \quad (m)$$

$$V(\bar{\theta}, \dot{\bar{\theta}}) = \begin{bmatrix} 2m_2 d_2 \dot{\theta}_1 \dot{d}_2 \\ -m_2 d_2 \dot{\theta}_1^2 \end{bmatrix} \quad (n)$$

$$G(\bar{\theta}) = \begin{bmatrix} g(m_1 l_1 + m_2 d_2) \cos \theta \\ m_2 g \sin \theta \end{bmatrix} \quad (o)$$

• تولید مسیر

در اینجا منظور از مسیر، مکان، سرعت و شتاب مربوط به هر درجه آزادی در زمانی معین است. همانگونه که در شکل زیر مشاهده می شود، مسئله تعیین مسیر، حرکت دادن بازوی مکانیکی ماهر از مکان اولیه به مکان نهایی مورد نظر است. به عبارت دیگر، می خواهیم چهارچوب ابزار را از مکان اولیه آن، $\{T_{initial}\}$ به محل نهایی مورد نظر، $\{T_{final}\}$ حرکت دهیم. بدیهی است که این حرکت، در حالت کلی هم تغییر مکان و هم تغییر جهتگیری ابزار را نسبت به دستگاه پایه در بر می گیرد.

البته گاهی لازم است که چهارچوب ابزار، در پیمودن مسیر خود، از مکانها و جهتگیریهای بینابینی نیز بگذرد. از طرفی حرکت بازوی مکانیکی باید هموار باشد. حرکتهای خشک و ناگهانی، باعث ساییدگی مکانیزم می شود و با ایجاد حالت تشدید، در آن ارتعاشات زیان آور پدید می آورد. در ادامه نحوه ایجاد تعدادی از این توابع مورد بررسی قرار می گیرد.

• روشهای فضای مفصلی

هر نقطه از مسیر، معمولاً بر حسب مکان و جهتگیری مطلوب برای مجری نهایی نسبت به دستگاه پایه مشخص می شود. سپس با استفاده از سینماتیک معکوس هر یک از این نقاط بینابینی، به مجموعه ای از زوایای مفصلی مورد نظر تبدیل می شوند. در مرحله بعد برای هر یک از این n مفصل باید تابعی هموار پیدا کرد که از نقاط بینابینی گذشته و به نقطه هدف ختم شود. بدین ترتیب، روشهای فضای مفصلی، مکان و جهتگیری مورد نظر را در نقاط میانی فراهم می آورند.

• چند جمله ای درجه سوم

فرض کنید که می‌خواهیم مجری نهایی را از مکان اولیه آن در مدت زمانی مشخص به مکان نهایی ببریم. با حل معادله‌های سینماتیک وارون، می‌توان زوایای مفصلی متناظر با مکان و جهتگیری هدف را محاسبه نمود. در اینجا هدف یافتن تابعی برای هر مفصل است که مقدار آن در t_0 برابر با مکان اولیه مفصل، و در t_f برابر با مکان نهایی مفصل باشد. همانگونه که در شکل زیر مشاهده می‌گردد، می‌توان از تابعهای هموار گوناگون $\theta(t)$ برای این منظور استفاده نمود.

برای ایجاد حرکتی هموار، حداقل چهار قید برای $\theta(t)$ وجود دارد. دو قید مربوط به مقدار اولیه و نهایی تابع می‌باشد. یعنی:

$$\theta(0) = \theta_0 \quad (1)$$

$$\theta(t_f) = \theta_f \quad (2)$$

دو قید دیگر مربوط به صفر بودن سرعت اولیه و سرعت نهایی مفصل می‌باشد. یعنی:

$$\dot{\theta}(0) = 0 \quad (3)$$

$$\dot{\theta}(t_f) = 0 \quad (4)$$

این چهار قید را می‌توان توسط یک تابع چند جمله‌ای حداقل از درجه سوم، ارضا نمود. این تابع عبارت است از:

$$\theta(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 \quad (5)$$

بدیهی است که تابع سرعت زاویه‌ای و شتاب زاویه‌ای مفصل ربات با مشتقگیری از معادله (5) به طریق زیر حاصل می‌گردد:

$$\dot{\theta}(t) = a_1 + 2a_2 t + 3a_3 t^2 \quad (6)$$

$$\ddot{\theta}(t) = 2a_2 + 6a_3 t \quad (7)$$

با اعمال چهار قید ارائه شده در روابط (1) تا (4) در معادلات (5) و (6)، چهار معادله با چهار مجهول به شکل زیر حاصل می‌گردد.

$$\theta_0 = a_0$$

$$\theta_f = a_0 + a_1 t_f + a_2 t_f^2 + a_3 t_f^3 \quad (8)$$

$$0 = a_1$$

$$0 = a_1 + 2a_2 t_f + 3a_3 t_f^2$$

با حل این دستگاه معادلات، ضرایب a_i به شکل زیر حاصل می‌گردد.

$$a_0 = \theta_0$$

$$a_1 = 0$$

$$a_2 = \frac{3}{t_f^2}(\theta_f - \theta_0) \quad (9)$$

$$a_3 = \frac{-2}{t_f^2}(\theta_f - \theta_0)$$

• مثال

رباتی با یک رابط و مفصل لولایی در وضعیت $\theta = 15^\circ$ درجه ساکن است. می‌خواهیم مفصل آن را در مدت 3 ثانیه، در مسیری هموار به وضعیت $\theta = 75^\circ$ درجه حرکت دهیم. ضریبهای چند جمله‌ای درجه سوم را بدست آورید که این کار را انجام دهد و بازو را در نقطه هدف به حالت سکون در آورد. منحنی‌های مکان، سرعت و شتاب را به صورت تابعی از زمان رسم کنید.

با استفاده از معادله (9)، می‌توان ضرایب را چنین محاسبه نمود:

$$a_0 = 15$$

$$a_1 = 0$$

$$a_2 = 20$$

$$a_3 = -4.44$$

(a)

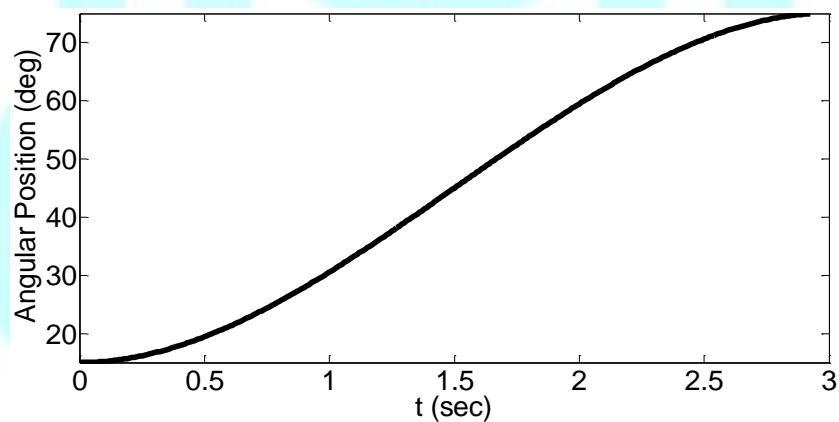
لذا با استفاده از روابط (۵)، (۶) و (۷)، موقعیت زاویه‌ای، سرعت زاویه‌ای و شتاب زاویه‌ای در طول این حرکت عبارت اند از:

$$\theta(t) = 15 + 20t^2 - 4.44t^3 \quad (b)$$

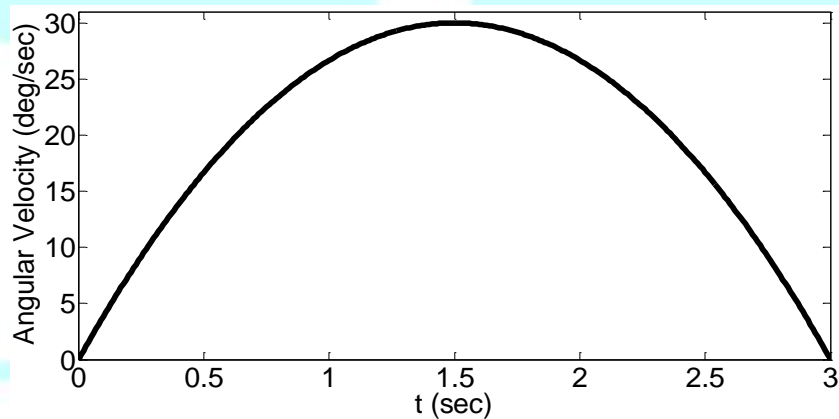
$$\dot{\theta}(t) = 40t - 13.33a_3t^2 \quad (c)$$

$$\ddot{\theta}(t) = 40 - 26.66t \quad (d)$$

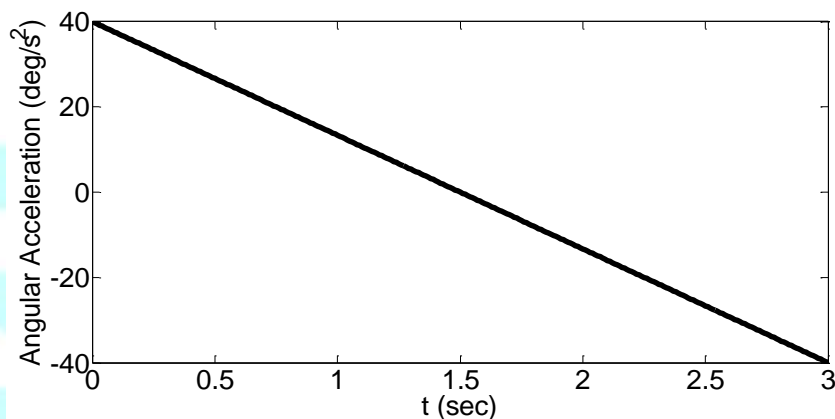
شکل‌های زیر منحنی‌های مکان، سرعت و شتاب این حرکت را که با بسامد 40 Hz (در هر ثانیه ۴۰ داده) نمونه برداری شده است، نشان می‌دهد.



شکل (۱): موقعیت زاویه‌ای بازو



شکل (۲): سرعت زاویه‌ای بازو



شکل (۳): شتاب زاویه‌ای بازو

- چند جمله‌ای درجه سوم برای تولید مسیری با سرعت غیر صفر در ابتدا و انتهای مسیر

اگر سرعت در ابتدا و انتهای مسیر غیر صفر باشد آنگاه شرایط اولیه و نهایی به صورت زیر ارائه می‌گردد:

$$\begin{aligned} \theta(0) &= \theta_0 \\ \dot{\theta}(0) &= \dot{\theta}_0 \\ \theta(t_f) &= \theta_f \\ \dot{\theta}(t_f) &= \dot{\theta}_f \end{aligned} \quad (10)$$

با اعمال این شرایط اولیه و نهایی در معادله درجه سوم $\theta(t) = a_0 + a_1t + a_2t^2 + a_3t^3$ داریم:

$$\begin{aligned} \theta_0 &= a_0 \\ \theta_f &= a_0 + a_1t_f + a_2t_f^2 + a_3t_f^3 \\ \dot{\theta}_0 &= a_1 \\ \dot{\theta}_f &= a_1 + 2a_2t_f + 3a_3t_f^2 \end{aligned} \quad (11)$$

ضرایب مجهول a_0 تا a_3 از حل معادلات (۱۱) به طریق زیر حاصل می‌گردد:

$$\begin{aligned} a_0 &= \theta_0 \\ a_1 &= \dot{\theta}_0 \end{aligned} \quad (12)$$

$$a_2 = \frac{3}{t_f^2}(\theta_f - \theta_0) - \frac{2}{t_f}\dot{\theta}_0 - \frac{1}{t_f}\dot{\theta}_f$$

$$a_3 = -\frac{2}{t_f^3}(\theta_f - \theta_0) + \frac{1}{t_f^2}(\dot{\theta}_f + \dot{\theta}_0)$$

هنگامی که n چند جمله‌ای درجه سوم (n قطعه درجه سوم) داریم، دستگاه معادلات را با تأکید بر سرعت و شتاب پیوسته در نقاط بینابینی حل می‌کنیم. در قالب یک مثال به مسئله فوق می‌پردازیم.

• مثال

ضریبهای دو چند جمله‌ای درجه سوم را که در یک "منحنی دو تکه" به یکدیگر متصل شده‌اند و در نقطه بینابینی شتاب پیوسته دارند، به دست آورید. زاویه اولیه $\theta_0 = 30^\circ$ که باید در زمان $t_{f1} = 2s$ به نقطه بینابینی $\theta_v = 60^\circ$ برسد؛ سپس از این نقطه در مدت زمان $t_{f2} = 2s$ به نقطه هدف $\theta_g = 80^\circ$ برسد. سرعت را در ابتدا و انتهای مسیر صفر فرض کنید.

نخستین چند جمله‌ای درجه سوم چنین است:

$$\theta(t) = a_{10} + a_{11}t + a_{12}t^2 + a_{13}t^3 \quad (a)$$

و دومین چند جمله‌ای عبارت است از:

$$\theta(t) = a_{20} + a_{21}t + a_{22}t^2 + a_{23}t^3 \quad (b)$$

نخستین چند جمله‌ای درجه سوم دارای شرایط اولیه (موقعیت زاویه‌ای و شتاب زاویه‌ای) زیر است:

$$\theta(t) = a_{10} + a_{11}t + a_{12}t^2 + a_{13}t^3 \Big|_{t=0} = \theta_0 \Rightarrow \theta_0 = a_{10} \quad (c)$$

$$\dot{\theta}(t) = a_{11} + 2a_{12}t + 3a_{13}t^2 \Big|_{t=0} = 0 \Rightarrow 0 = a_{11} \quad (d)$$

از طرفی موقعیت، سرعت و شتاب زاویه‌ای برای نخستین چند جمله‌ای در انتهای مسیر عبارت است از:

$$\theta(t) = a_{10} + a_{11}t + a_{12}t^2 + a_{13}t^3 \Big|_{t=t_{f1}} = \theta_v \Rightarrow \theta_v = a_{10} + a_{11}t_{f1} + a_{12}t_{f1}^2 + a_{13}t_{f1}^3 \quad (e)$$

$$\dot{\theta}(t) = a_{11} + 2a_{12}t + 3a_{13}t^2 \Big|_{t=t_{f1}} = \dot{\theta}_v \Rightarrow \dot{\theta}_v = a_{11} + 2a_{12}t_{f1} + 3a_{13}t_{f1}^2 \quad (f)$$

$$\ddot{\theta}(t) = 2a_{12} + 6a_{13}t \Big|_{t=t_{f1}} = \ddot{\theta}_v \Rightarrow \ddot{\theta}_v = 2a_{12} + 6a_{13}t_{f1} \quad (g)$$

برای دومین چند جمله‌ای شرایط اولیه در ابتدای مسیر (موقعیت، سرعت و شتاب زاویه‌ای) عبارتند از:

$$\theta(t) = a_{20} + a_{21}t + a_{22}t^2 + a_{23}t^3 \Big|_{t=0} = \theta_v \Rightarrow \theta_v = a_{20} \quad (h)$$

$$\dot{\theta}(t) = a_{21} + 2a_{22}t + 3a_{23}t^2 \Big|_{t=0} = \dot{\theta}_v \Rightarrow \dot{\theta}_v = a_{21} \quad (i)$$

$$\ddot{\theta}(t) = 2a_{22} + 6a_{23}t \Big|_{t=0} = \ddot{\theta}_v \Rightarrow \ddot{\theta}_v = 2a_{22} \quad (j)$$

و شرایط انتهایی برای این چند جمله‌ای در انتهای مسیر عبارت است از:

$$\theta(t) = a_{20} + a_{21}t + a_{22}t^2 + a_{23}t^3 \Big|_{t=t_{f2}} = \theta_g \Rightarrow \theta_g = a_{20} + a_{21}t_{f2} + a_{22}t_{f2}^2 + a_{23}t_{f2}^3 \quad (k)$$

$$\dot{\theta}(t) = a_{21} + 2a_{22}t + 3a_{23}t^2 \Big|_{t=t_{f2}} = 0 \Rightarrow 0 = a_{21} + 2a_{22}t_{f2} + 3a_{23}t_{f2}^2 \quad (l)$$

از آنجایی که سرعت و شتاب در نقطه بینابینی دارای پیوستگی است، لذا با مساوی قرار دادن معادلات (f) و (i)،

همچنین معادلات (g) و (j) داریم:

$$a_{11} + 2a_{12}t_{f1} + 3a_{13}t_{f1}^2 = a_{21} \quad (m)$$

$$2a_{12} + 6a_{13}t_{f1} = 2a_{22} \quad (n)$$

ترکیب روابط (m) و (n) و معادلات (c)، (d)، (e)، (h)، (k)، (l) تشکیل یک دستگاه هشت معادله، هشت مجهول

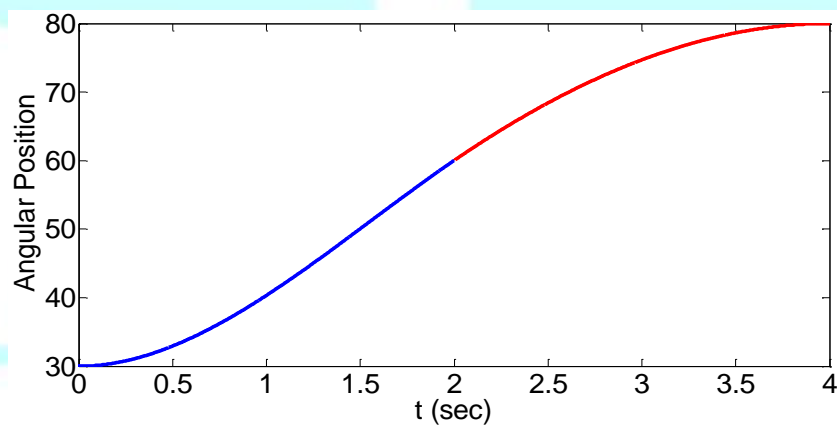
به شکل زیر می‌دهد:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2t_{f1} & 3t_{f1}^2 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 6t_{f1} & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & t_{f1} & t_{f1}^2 & t_{f1}^3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & t_{f2} & t_{f2}^2 & t_{f2}^3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2t_{f2} & 3t_{f2}^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{10} \\ a_{11} \\ a_{12} \\ a_{13} \\ a_{20} \\ a_{21} \\ a_{22} \\ a_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \theta_0 \\ 0 \\ \theta_v \\ \theta_v \\ \theta_g \\ 0 \end{bmatrix} \quad (o)$$

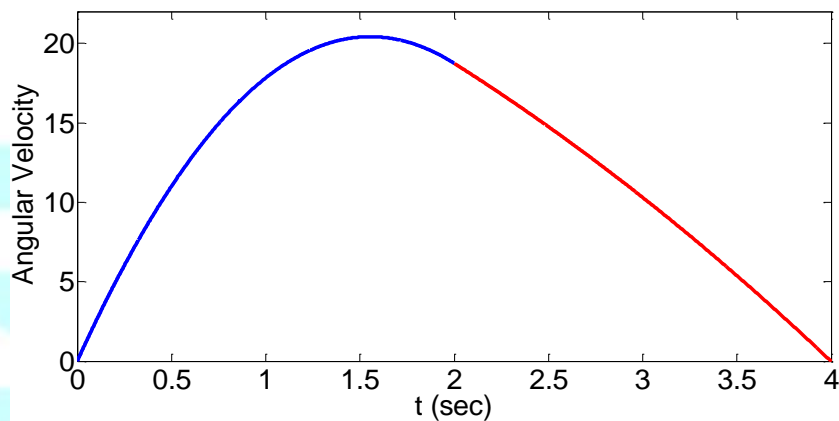
از حل این دستگاه با فرض آنکه $(t_{f1} = t_{f2})$ باشد، داریم:

$$\begin{aligned} a_{10} &= \theta_0 & a_{11} &= 0 \\ a_{12} &= \frac{12\theta_v - 3\theta_g - 9\theta_0}{4t_f^2} & a_{13} &= \frac{-8\theta_v + 3\theta_g + 5\theta_0}{4t_f^3} \\ a_{20} &= \theta_v & a_{21} &= \frac{3\theta_g - 3\theta_0}{4t_f} \\ a_{22} &= \frac{-12\theta_v + 6\theta_g + 6\theta_0}{4t_f^2} & a_{23} &= \frac{8\theta_v - 5\theta_g - 3\theta_0}{4t_f^3} \end{aligned} \quad (p)$$

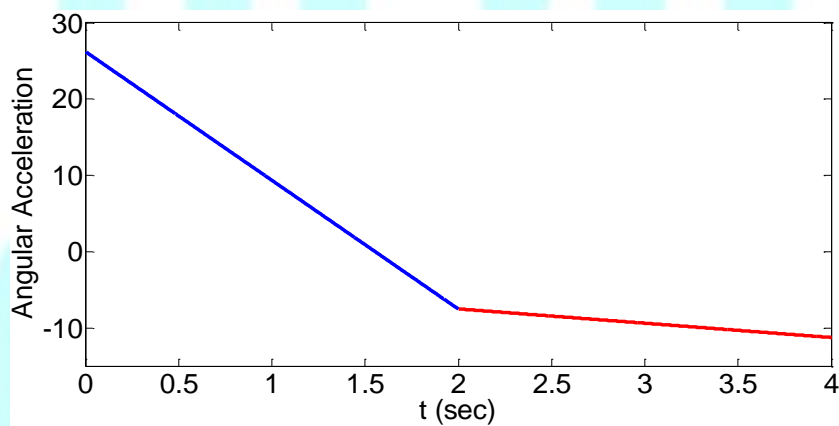
اکنون با در اختیار داشتن $a_{10}, a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{20}, a_{21}, a_{22}, a_{23}$ و جایگذاری این ضرایب در معادلات (a) و (b) می توان موقعیت زاویه‌ای، سرعت زاویه‌ای و شتاب زاویه‌ای را ترسیم نمود.



شکل (۴): موقعیت زاویه‌ای بازو



شکل (۵): سرعت زاویه‌ای بازو



شکل (۶): شتاب زاویه‌ای بازو

• چند جمله‌ایهای درجه بالاتر

اگر موقعیت، سرعت و شتاب زاویه‌ای در ابتدا و انتهای مسیر مشخص باشد، به یک چند جمله‌ای درجه پنجم نیاز خواهیم داشت:

$$\theta(t) = a_0 + a_1t + a_2t^2 + a_3t^3 + a_4t^4 + a_5t^5 \quad (13)$$

شرایط در ابتدای مسیر عبارت است از:

$$\theta(t) = a_0 + a_1t + a_2t^2 + a_3t^3 + a_4t^4 + a_5t^5 \Big|_{t=0} = \theta_0 \Rightarrow a_0 = \theta_0 \quad (14)$$

$$\dot{\theta}(t) = a_1 + 2a_2t + 3a_3t^2 + 4a_4t^3 + 5a_5t^4 \Big|_{t=0} = \dot{\theta}_0 \Rightarrow a_1 = \dot{\theta}_0$$

$$\ddot{\theta}(t) = 2a_2 + 6a_3t + 12a_4t^2 + 20a_5t^3 \Big|_{t=0} = \ddot{\theta}_0 \Rightarrow 2a_2 = \ddot{\theta}_0$$

و شرایط در انتهای مسیر عبارتند از:

$$\theta(t) = a_0 + a_1t + a_2t^2 + a_3t^3 + a_4t^4 + a_5t^5 \Big|_{t=t_f} = \theta_f \Rightarrow a_0 + a_1t_f + a_2t_f^2 + a_3t_f^3 + a_4t_f^4 + a_5t_f^5 = \theta_f$$

$$\dot{\theta}(t) = a_1 + 2a_2t + 3a_3t^2 + 4a_4t^3 + 5a_5t^4 \Big|_{t=t_f} = \dot{\theta}_f \Rightarrow a_1 + 2a_2t_f + 3a_3t_f^2 + 4a_4t_f^3 + 5a_5t_f^4 = \dot{\theta}_f$$

$$\ddot{\theta}(t) = 2a_2 + 6a_3t + 12a_4t^2 + 20a_5t^3 \Big|_{t=t_f} = \ddot{\theta}_f \Rightarrow 2a_2 + 6a_3t_f + 12a_4t_f^2 + 20a_5t_f^3 = \ddot{\theta}_f \quad (15)$$

با حل دستگاه شش معادله و شش مجهول فوق ضرایب a_0 تا a_5 به طریق زیر حاصل می گردد:

$$a_0 = \theta_0$$

$$a_1 = \dot{\theta}_0$$

$$a_2 = \frac{\ddot{\theta}_0}{2}$$

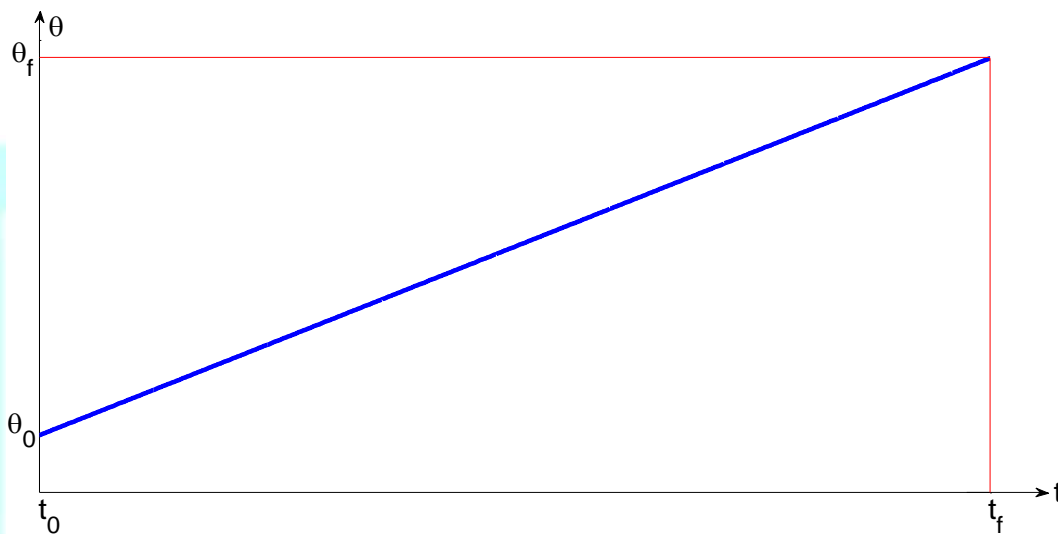
$$a_3 = \frac{20\theta_f - 20\theta_0 - (8\dot{\theta}_f + 12\dot{\theta}_0)t_f - (3\ddot{\theta}_0 - \ddot{\theta}_f)t_f^2}{2t_f^3} \quad (16)$$

$$a_4 = \frac{30\theta_0 - 30\theta_f + (14\dot{\theta}_f + 16\dot{\theta}_0)t_f + (3\ddot{\theta}_0 - 2\ddot{\theta}_f)t_f^2}{2t_f^4}$$

$$a_5 = \frac{12\theta_f - 12\theta_0 - (6\dot{\theta}_f + 6\dot{\theta}_0)t_f - (\ddot{\theta}_0 - \ddot{\theta}_f)t_f^2}{2t_f^5}$$

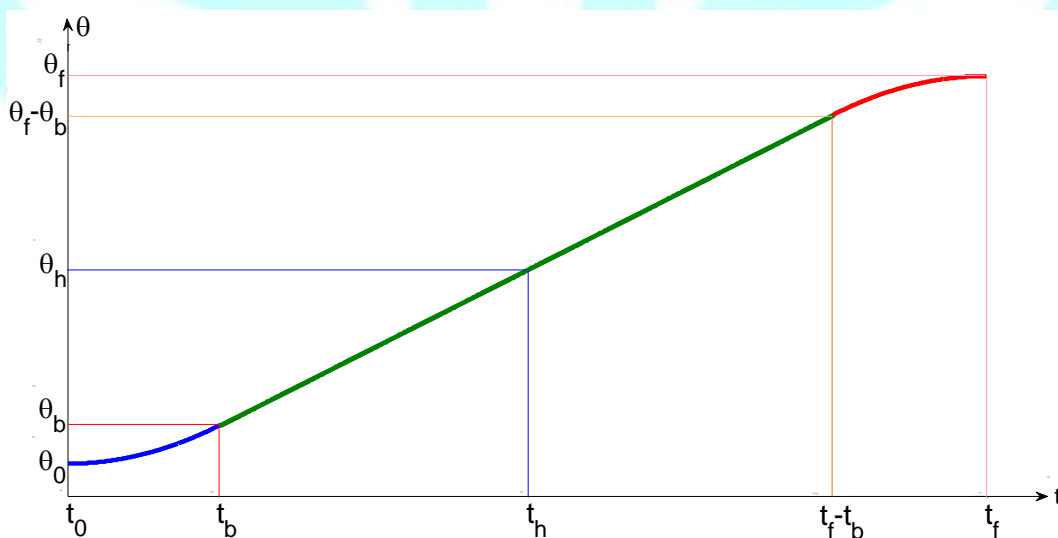
• تابع خطی با مرزهای سهموی

می توان مکان فعلی مفصل را توسط یک خط راست به مکان نهایی آن وصل نمود (شکل ۷). ولی این درونیایی موجب می گردد که سرعت در ابتدا و انتهای حرکت ناپیوسته شود.



شکل (۷): درونیابی خطی

برای ایجاد مسیری هموار با مکان و سرعت پیوسته، شکل مسیر را در ابتدا و انتها سهموی، و در هر نقطه مسیر (نقاط بینابینی)، خطی در نظر خواهیم گرفت. استفاده از شتاب ثابت در قسمت سهموی مسیر، سرعت را به نرمی تغییر می‌دهد (شکل ۸).



شکل (۸): قطعه مسیر خطی با نواحی مرزی سهموی

همانگونه که در این شکل مشاهده می‌شود، تابع خطی و دو انتهای سهموی آن طوری به یکدیگر اتصال یافته‌اند که مکان و سرعت در کل مسیر پیوسته باشند. معادله مسیر در قسمت سهموی عبارت است از:

$$\theta(t) = \frac{1}{2} \ddot{\theta} t^2 + \dot{\theta} t + \theta_0 \quad (17)$$

که در آن $\ddot{\theta}$ شتاب ثابت اعمال شده در ناحیه سهموی است. از آنجایی که سرعت در ابتدای مسیر صفر فرض می‌شود داریم:

$$\theta(t) = \frac{1}{2} \ddot{\theta} t^2 + \theta_0 \quad (18)$$

در انتهای ناحیه سهموی ($t = t_b$)، موقعیت زاویه‌ای $\theta = \theta_b$ عبارت می‌شود از:

$$\theta_b = \frac{1}{2} \ddot{\theta} t_b^2 + \theta_0 \quad (19)$$

از طرفی به دلیل پیوستگی سرعت در قسمت خطی و قسمت سهموی داریم:

$$\ddot{\theta} t_b = \frac{\theta_h - \theta_b}{t_h - t_b} \quad (20)$$

همچنین با توجه به تساوی فواصل زمانی می‌توان رابطه زیر را ارائه نمود:

$$2(\theta_b - \theta_0) + 2(\theta_h - \theta_b) = \theta_f - \theta_0 \quad (21)$$

با جایگذاری رابطه (۱۹) در رابطه (۲۱) داریم:

$$\ddot{\theta} t_b^2 + 2(\theta_h - \theta_b) = \theta_f - \theta_0 \quad (22)$$

از طرفی با جایگذاری رابطه (۲۰) در معادله (۲۲) داریم:

$$\ddot{\theta} t_b^2 + 2(\ddot{\theta} t_b t_h - \ddot{\theta} t_b^2) = \theta_f - \theta_0 \quad (23)$$

با ساده کردن معادله (۲۳) و توجه به این نکته که $t = 2t_h$ داریم:

$$\ddot{\theta} t_b^2 - \ddot{\theta} t t_b + (\theta_f - \theta_0) = 0 \quad (24)$$

در معادله (۲۴)، θ_f ، θ_0 و t کمیتی معلوم و $\ddot{\theta}$ و t_b بایستی انتخاب گردند. با انتخاب $\ddot{\theta}$ ، می توان t_b را با حل معادله درجه دوم به طریق زیر به دست آورد:

$$t_b = \frac{t}{2} \pm \frac{\sqrt{\ddot{\theta}^2 t^2 - 4\ddot{\theta}(\theta_f - \theta_0)}}{2\ddot{\theta}} \quad (25)$$

بدیهی است که مقدار مثبت غیر قابل قبول است؛ زیرا t_b باید کوچکتر از $\frac{t}{2}$ باشد ($t_b \leq \frac{t}{2}$). همچنین شتاب $\ddot{\theta}$ بایستی به گونه‌ای انتخاب گردد که زیر رادیکال منفی نگردد. یعنی:

$$\ddot{\theta} \geq \frac{4(\theta_f - \theta_0)}{t^2} \quad (26)$$

اگر شتاب $\ddot{\theta}$ به گونه‌ای انتخاب گردد که عبارت زیر رادیکال صفر شود، آنگاه طول قسمت خطی صفر می‌شود و مسیر از دو ناحیه سهموی که با شیب مساوی به یکدیگر متصل شده‌اند، تشکیل می‌گردد.

• مثال

رباتی با یک رابط و مفصل لولایی در وضعیت $\theta = 15^\circ$ درجه ساکن است. می‌خواهیم مفصل آن را در مدت 3 ثانیه، در مسیری هموار به وضعیت $\theta = 75^\circ$ درجه حرکت دهیم. تابع خطی با مرزهای سهموی را به گونه‌ای بدست آورید که این کار را انجام دهد و بازو را در نقطه هدف به حالت سکون در آورد. منحنی‌های مکان، سرعت و شتاب را به صورت تابعی از زمان رسم کنید.

اگر شتاب $\ddot{\theta} = 48 \frac{\text{deg}}{\text{s}^2}$ انتخاب گردد، آنگاه با استفاده از معادله (۲۵) زمان t_b عبارت می‌شود از:

$$t_b = \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{(48)^2(3)^2 - 4(48)(75 - 15)}}{2(48)} = 0.5 \quad (a)$$

با استفاده از معادله (۱۸) معادله منحنی سهموی قسمت اول عبارت می‌شود از:

$$\theta(t) = \frac{1}{2}(48)t^2 + 15 \quad 0 \leq t \leq 0.5 \quad (b)$$

در انتهای ناحیه سهموی ($t = 0.5 s$)، موقعیت زاویه‌ای θ_b عبارت می‌شود از:

$$\theta_b = \frac{1}{2}(48)(0.5)^2 + 15 = 21 \quad (c)$$

بدیهی است فاصله زمانی ناحیه خطی عبارت است از:

$$t = 3 - 2(0.5) = 2 \quad (d)$$

در طی این مدت چرخش بازوی ربات عبارت است از:

$$\theta = (75 - 15) - 2(6) = 48 \quad (e)$$

بنابراین معادله ناحیه خطی عبارت می‌شود از:

$$\theta(t) = 21 + \frac{48}{2}(t - 0.5) \quad 0.5 \leq t \leq 2.5 \quad (f)$$

در انتهای ناحیه خطی ($t = 2.5 s$)، موقعیت زاویه‌ای عبارت می‌شود از:

$$\theta = 21 + 24(2.5 - 0.5) = 69 \quad (g)$$

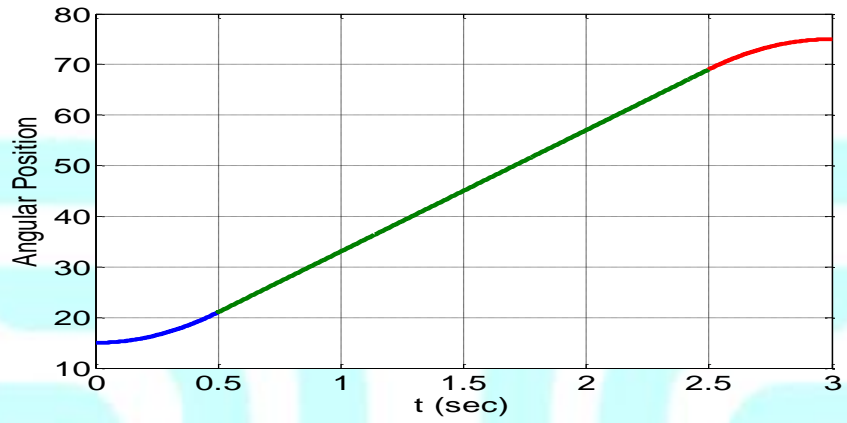
همچنین با مشتق‌گیری از معادله (f)، سرعت در انتهای مسیر خطی عبارت است از:

$$\dot{\theta} = 24 \quad (h)$$

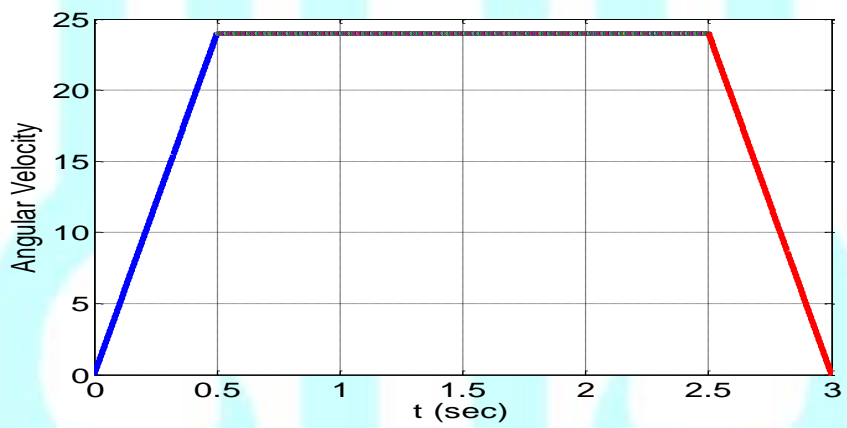
لذا معادله ناحیه سهموی قسمت دوم عبارت می‌شود از:

$$\theta(t) = \frac{1}{2}(-48)(t - 2.5)^2 + 24(t - 2.5) + 69 \quad 2.5 \leq t \leq 3 \quad (i)$$

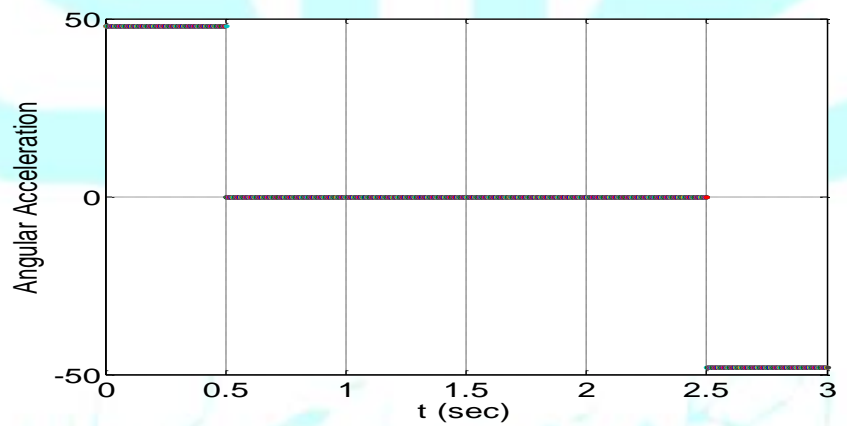
با رسم معادلات (b)، (f) و (i) و همچنین مشتقات اول و دوم آنها داریم:



شکل (۹): موقعیت زاویه‌ای بازو



شکل (۱۰): سرعت زاویه‌ای بازو



شکل (۱۱): شتاب زاویه‌ای بازو