واحد کاشان

موضوع :

احتمال و آمار مهندسی

استاد مربوطه :

جناب آقای دکتر بوجاری

تنظیم کننده :

آرش طریقتی

شماره دانشجویی

860104605

دی ماه **1391**

بسم الله الرحمن الرحیم

احتمال

آمار توصیفی

احتمال قوانین شمارشی و احتمال شرطی

متغییر های تصادفی (گسته، پوسته، تابع توزیع

امید ریاضی خالی تصادفی (گسسته ، پیوسته ، توام ، شرطی)

متغییرهای تصادفی پوسته معروف

توزیع های نمونه ای

احتمال

آزمایش تصادفی : یک عمل با کارکد قبل از عمل نتیجه اش معلوم نیست اما نتایج ممکنه حاصل از انجام عمل معلوم باشد

فضای نمونه ای ϑ

مثال پرتاب سکه

ϑ ={H,T} P(E) = [E وقوع پیشامد احتمال]

S=[0.20]

E=[17.20] پیشامد

آنالیز پیشامد ها

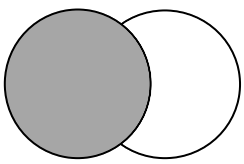
اگر E و F در پیشامد در فضای ϑ باشند

1 -پیشامد EUF $\leftarrow [\begin{array}{|c|}\hline \boldsymbol{E} \\ \hline \boldsymbol{F} \\ \hline \end{array}] \rightarrow$

حداقل یکی از پیشامد رخ بدهد

EF: E $\prod F\lambda$

پیشامد رخ دادن هر دو با هم

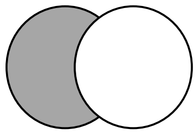


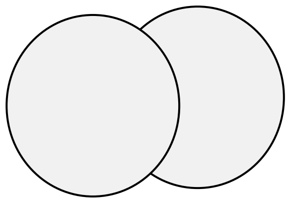
2- $EF=E\bigcap F$

پیش امدن هردو باهم

3-پیشامد E-F

پیشامد رخ دادن فقط E





4-

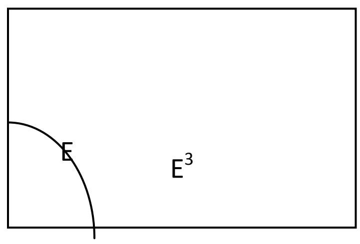
$$E\Delta F = (E-F)\,U\,(\,F-E$$

$$=\left(E\bigcup F\right)-\,(E\bigcap F$$

پیشامد رخ دادن فقط یکی از دو تا

5- پیشامد E

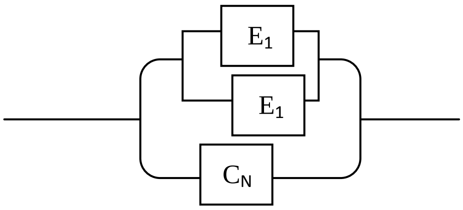
پیشامد رخ دادن E



$$E^2 \cap E = \emptyset$$
$$E^2 \cup E = S$$
$$E^2 = S - E$$

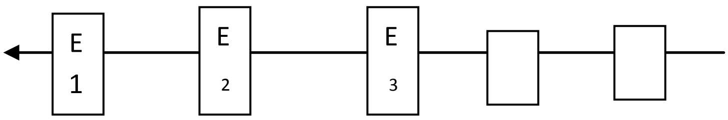
$$\begin{cases} E \bigcup F \\ E \bigcap F \,)\, C = E^2 \bigcup F^C \,)\, C = E^2 \bigcap F^C \end{cases}$$

دمورگان



$$\bigcup_{I=1}^{N} E_{I=E_1 \cup E_1 \,\ldots\ldots\, \cup EN}$$

حداقل برای N پیشامد رخ بدهد



$\cap_{L-I}^{N} E_1 = E_1 \, \cap E_2 \, \ldots \ldots \cap E_N$

$$\begin{cases} (\bigcup_{i=1}^{n} E_i)^c = \bigcap_{i=1}^{n} {E_i}^c \\ (\bigcap_{i=1}^{n} E_i) = \bigcup_{i=1}^{n} {E_i}^c \end{cases}$$

اصول احتمال

1) $0 \le p(E) \le 1$

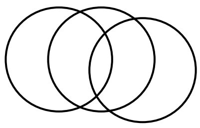
2) $p.(s)=1 \qquad p(\phi)=0$

3) اگر E_1, E_1, E_3........ پیشامدهای دو به دو مجزا باشند

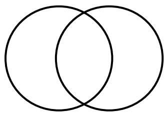
$$P(E1\bigcup_{i=1} E_2VE_3V...)=P(E_1)+P(E_2)+P(E_3).....$$

زمانی می توان جمع کرد که اشتراکی درکار نباشد

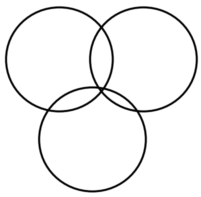
نتایج



1) $P(EVf)=P(E)=p(f-p(eAF)$

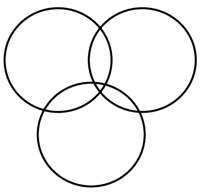


$$P(EAF)=P(6)=p(f)-2p(EAF)$$



تعمیم

$$P(Eufua)= \\ P(E)+p((u)-P(EF)-P(6G) \\ -P(FG)-P(EFG)=1-P(E^c \wedge F^c \wedge G^c)$$



$$P(E\Delta F\Delta G)=P(E)+P(F)+P(G)-2(EF) \\ -2P(EG)-2P(FG)=-2P(EG)+3(EFG)$$

$3\big| p(Ef)=P(E)-(E\wedge F)$

$4\big| P(E)=1-P(E^c)$

$$P(\bigcup_{i=1}^{n} E_i)=1-P(\bigcap_{i=1}^{n} E_i^{\ c})$$

$$P(\bigcup_{i=1}^{n} E_i)=1-P(\bigcap_{i=1}^{n} E_i^{\ c})$$

مثال: سه نفر هر کد ام یک مرتبه به سوی هدفی شلیک می کند اگر احتمال برخورد شلیک هر کدام به ترتیب و $\frac{1}{4},\frac{1}{3},\frac{1}{2}$ باشد .

الف) احتمال آنکه فقط یک نفر به هدف بزند ؟

پیشامد به هدف زدن نفر اول =A

پیشامد به هدف زدن نفر اول =B

پیشامد به هدف زدن نفر اول =C

الف) $P(A\Delta B\Delta c)=p(A)+p(B)+(C)-2(A\wedge B)$

$-2p(A\wedge C)-2p(BAC)+3P(A\wedge B\wedge C)$

$=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-2\,\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}-2\,\frac{1}{2}+\frac{1}{9}-2\,\frac{1}{3}\times\frac{1}{9}+3\,\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{9}$

روش دیگر$(AB^{C}c^{c}\cup A^{C}BC^{c}\cup A^{C}B^{C}C)$

$=\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}.\frac{3}{9}+(1-\frac{1}{2}).(\frac{1}{3}\times\frac{3}{9}+(1-\frac{1}{2})\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{9}$

(فقط دو نفر به هدف بزنند) (ب

$P(ABc^{c}\vee AB^{C}C\vee A^{C}BC)$

$=\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}.\frac{3}{4}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{9}+(1-\frac{1}{2}).\frac{1}{3}\times\frac{1}{4}$

(حداقل یکی به هدف برای)(ج $P(A\vee B\vee C)=$

$P(A)+P(B)+P(C)-P(AC)-P(AB)-P(BC)+P(ABC)$

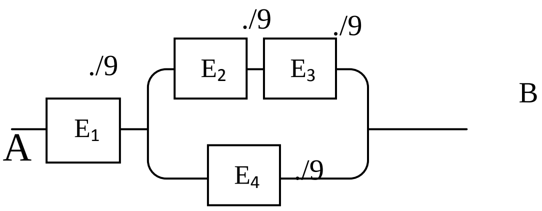
$=\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}-\frac{1}{3}\times\frac{1}{9}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{9}$

$=1-p$ (هیچ کس نزند) $=1-p(A^{c}B^{c}C^{c})=1-(1-\frac{1}{2})\times\frac{2}{3}\times\frac{3}{4}$

$P(BA$ اتصال بین$) = P(E_1 \wedge (\underbrace{(E_2 \wedge E_3)}_{A} \underbrace{\vee E9)}_{B} \quad]$

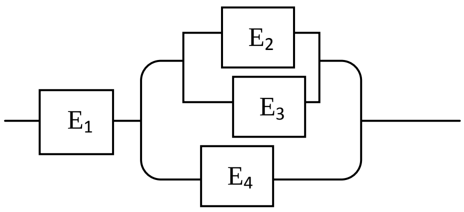
$$= ./9 \times \left[P(E_2 \wedge E_3) + P(E_9) - P(E_2 \wedge E_3 \wedge E_9 \right]$$

$$= ./9 \left[./9 \times ./9 + ./9 - ./9 \times ./9 \times ./9 \right] = ./9 \left[1/71 - ./729 \right]$$

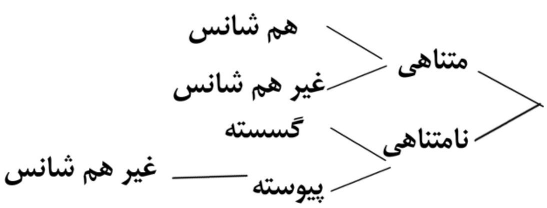


ب) $= ./9 \left[./9 + ./9 + ./9 - ./9 \times ./9 \times ./9 - ./9 \times ./9 - ./9 + ./9 \times ./9 \right]$

$$= ./9 \left[3 \times ./9 - 3 \times (./9)^2 + (./9)^3 \right]$$



p(E)=؟ نحوه محاسبه



پیوسته نامتناهی — یکنواخت / غیر یکنواخت

متناهی هم شانس

$$P(E)=\frac{n(E)}{\pi(s)}$$

متناهی غیر هم شانس یا متناهی گسسته

P(E)= مجموع ساختن تک تک اعضاء $\sum_{i=1}^{k} P(ei)$

یک بعدی : طول

$$P(E)=\frac{E\ \text{طول}}{S\ \text{طول}}$$

دو بعدی : طول

$$P(E)=\frac{E\ \text{مساحت}}{S\ \text{مساحت}}$$

سه بعدی : طول

$$P(E)=\frac{E\ \text{حجم}}{S\ \text{حجم}}$$

مثال) تاسی را پرتاب می کنیم احتمال آنکه عدد ظاهر شده زوج باشد

الف) تاس سالم باشد ؟

ب) شانس هر عدد متناسب با خود عدد باشد؟

الف) $P(E) = \frac{n(E)}{n(S)} = \frac{3}{6} = ./5$]

ب) $P(E = P(2) + P(9) + P(6) = \frac{2}{21} + \frac{4}{21} + \frac{6}{21} + \frac{12}{21}$]

ج) $P(1) + P(2) + P(3) + P(4) + P(5) + +P(6) = 1$

$x + 2x + 5x + 4x + 6x = 9x = 1 =\rangle n = {}^{1}\!/_{27}$

مثال: فرض کنید در یک ظرف چهارمهره سیاه و کیسه مهره قرمز دونفر هر کدام به ترتیب هر بار یک مهره از ظرف بیرون می آورند برنده کسی است که اولین مهرۀ قرمز را بیرون بیاورد ترجیح می دهد شروع کنننده باشید یا نفر دوم ؟

احتمال برنده شدن شروع کننده چقدر است؟

الف) بدون جایگذاری ؟

ب) با جایگذاری؟

بدون جایگذاری

برنده شدن شروع کننده $= A = \{R, bbR.bbbbR\}$

$P(A) = P(R) + P(bbR) + P(bbbbR)$

$= {}^{3}\!/_{7} + {}^{4}\!/_{7} \cdot {}^{3}\!/_{6} \cdot {}^{3}\!/_{5} + {}^{4}\!/_{7} \cdot {}^{3}\!/_{6} \cdot {}^{3}\!/_{5} \cdot {}^{3}\!/_{9} \cdot {}^{3}\!/_{3}$

ب) $A = \{R, bbR, bbbbR, bbbbbbR, ...\}$

$P(A) = {}^{3}\!/_{7} \times ({}^{4}\!/_{7})^{2} \cdot {}^{3}\!/_{7} + ({}^{4}\!/_{7})^{4} \cdot {}^{3}\!/_{7} + ({}^{4}\!/_{7})^{6} \cdot {}^{3}\!/_{7}$

$$= \frac{3/7}{1-(4/7)^2} = \frac{3/7}{\frac{49-16}{49}} = \frac{27}{49-16} = \frac{27}{33} \quad]$$

سکه سالمی آن قدرپرتاب می کنیم تا برای اولین بار شیر مشاهده شود مطلوبست تعداد آنکه پرتابهای لازم عدد زوج باشد ؟

$$E = \{TH, TTTH, TTTTTTH, ...\} \to 1/3$$

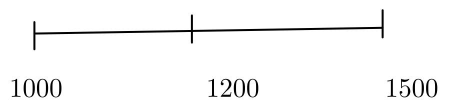
$$P(E) = 1/2 \times 1/2 + (1/2)^4 + (1/2)6 + ...$$

$$= \frac{(1/2)^2}{1-(1/2)^2} = \frac{1/4}{1-1/4} = 1/3 \quad]$$

$$E^c = \{H, TTH, TTTTH, ...\} \to 2/3 \quad]$$

مثال) اگر قیمت یک کالا در بازار بطور یکنواخت در فاصله 1000تا1500 تومان باشد و سه نفر این کالا را خریده باشند:

الف) احتمال آنکه قیمت خرید هر سه کمتر از 1200 باشد



$$P(E) = \frac{E}{S} = \frac{200}{500} = \frac{2}{3} = ./4$$

$$P(1200^{\text{هر سه خرید کمتر از}}) P(6/ \wedge E^2 \wedge E^3) = (./4)^3$$

ب) احتمال‌آنکه قیمت خرید یکی از آنها کمتر از 1200 و دو نفر دیگر بیشتر از 1200 باشد

23 1یا123 یا 13

$$./4(./6)(./6) + (./6)(./4)(./6) + (./6)(./6)(./4)$$

$= (./4)(./6)^2$

از ساعت هشت صبح هر ده دقیقه یک اتوبوس از ایستگاهی حرکت بکنداگر شخصی به

تصادف/یکنواخت در فاصله 9-8 صبح دارد ایستگاه شود احتمال آنکه حد اکثر سه دقیقه معطل شود

چقدر است ؟

$P + \frac{\text{فاصله مطلوب}}{\text{کل فاصله}} = \frac{6\times 3}{60} = \frac{18}{60} = \frac{3}{10} 00/3 \quad]$

به سوی هدف دایره ای شکل به شعاع R شلیک شده است (با فرض قبول یکنواختی محل برخورد)

احتمال آنکه محل برخورد در دایرۀمرکزی به شعاع rباشد چقدر است ؟

$P + \frac{\text{مساحت مطلوب}}{\text{کل مساحت}} = \frac{\pi r^2}{\pi R^2} = \frac{r^2}{R^2}$

ب) اگر احتمال 9/. هدف اصابت کند

جوب $: ./9 \times \frac{r^2}{R^2}$

$P(A) = 1 - P(A^c)$

در طول یک ساعت خاص ود نفر با یکدیگر قرار ملاقات بگذارند و قرار است هر کدام حد اکثر 15

دقیقه منتظر یکدیگر بماند با فرض یکناختی زمان رسیدن آنها به محل قرار احتمال ملاقات چقدر است؟

احتمال ملاقات $P(A) = \frac{\text{مساحت}A}{\text{کل مساحت}} == 1 - \frac{45\times 45}{60.60} = 1 - \frac{9}{10} - \frac{7}{16} \quad]$

اگر مسئله به سه نفر باشد

زمان رسیدن نفر سوم

حال(مهم) دو عدد به تصادف در فاصله صفر و یک انتخاب می شوند مطلوب است احتمال آنکه مجموع این دو عدد کمتر از Aباشد؟

X = عدد اول

y= عدد دوم

$$P(x = y \leq a) = ?$$
$$\leq a \leq 2$$

$$P(x + y \leq a) = \frac{\text{مساحت}A}{\text{کل مساحت}} = \frac{\text{مساحت}A}{1 \times 1} = \quad \text{مساحت}A$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{2} a^2 & a \leq 1 \\ 1 - \frac{(2-a)2}{2} & 1 \leq a \leq 2 \end{cases}$$

مثال) تاس سالمی را 2 بار پرتاب می کنیم احتمال آنکه مجموع دو عدد ظاهر شده 7 باشد ؟

$$8 = \{(1,1)(1,2)(2,1)\ldots(6,5)(5,6)(6,6)$$

$$h(s) = 36 = 6 \times 6$$

$$E = \{(1,6)(6,1)(2,5)(5,2)(3,9)(9,3)$$

تصادف بار معنایی هم شانس بودن

اصول شمارشی اصل جمع یا ←+ یک مراجعه ای

اصل ضرب و چند ←×مرحله ای

$n(s) = \boxed{10}\boxed{10}\boxed{10}$

$$\frac{P= \text{که عدد تکراری نداشته باشد} = \frac{10\times 9\times 8}{1000} = ./72}{P= \text{فقط دو عدد تکراری داشته باشد} = \frac{270}{1000}}$$

ترتیب: 1) ترتیب (جایگشت) nشی مختلف در یک صف :n!

2) ترتیب (جایگشت) nشی مختلف در یک میز گرد (مسیر بسته) : (n-1) !

3) ترتیب (جایگشت) n7شی مختلف در یک ردیف : $\frac{n!}{(n-R)!}$ $\quad 0 \le r \le n$

4) ترتیب ترتیب اشیاء گروه بندی شده : $\begin{pmatrix} n \\ n1, n3, n5, nk \end{pmatrix}$

اشیاءگروه یکسان بین گروه ها تفاوت

مثال: 10 نفر به تصادف در یک ردیف قرار دارند

الف) سه نفر خالص کنار هم باشند؟

ب) اگر این ده نفر 5 سفید پوست و 5 سیاه پوست باشندآنگاه هیچ دو همرنگی کنار هم نباشند؟

ج) این ده نفر 5 زوج مختلف باشند بخواهیم هر زوج کنار هم قرار گیرد؟

الف) $\frac{8!\times 3!}{10!}$

ب) $\frac{5!\times 5!+5!\times 5!}{10!}=\frac{2\times 5!5!}{10!}$

ج) $\frac{5!2!2!2!2!2!}{10!}$

د) احتمال آنکه اعضای هیچ گروهی کنار هم نباشند

با فرض آنکه سال 365 روز باشد و بیست دانشجو در کلاس باشند احتمال آنکه روز تولد هیچ کدامشان یکسان نباشد

$$P=\frac{365\times 364\times \dots \times 346}{365\times 365\times \dots \times 365}=\frac{\frac{365}{365-20}}{365^{20}}=\frac{365!}{345!\times 365^{20}}$$

با سه حروف A و دو حرف B و چهار حرف C رمزهای نه حرفی درست شده احتمال آنکه

الف) اول و آخر رمز مشابه باشد ؟

ب) احتمال آنکه مشابه کنار هم باشند ؟

$AAABBCCCC$

الف) $\frac{1\times (1^7,24)\times 1+1\times (3^7,0,4)\times 1+1\times (3^7,2,2)\times 1}{\binom{9}{3,2,4}}$

ب) $\frac{3!}{\binom{9}{3,2,4}}$

چندرمز 8 تایی بااین 9 حرف می توان ساخت (ب

$$\binom{8}{2,2,4}+\binom{8}{3,1,4}\binom{8}{3,2,3}$$

ترکیب

انتخاب R شی از N شی محتلف بطوریکه ترتیب انتخاب مهم نباشد

$$0 \le r \le n \qquad c_r^n = \binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!} = \frac{n!}{(n-r)!}$$

$$\binom{n}{0} = 1 = \binom{n}{n} \qquad \binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}$$

$$\binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n$$

مثال) از بین 30 محصول موجود در انبار 5 عدد از آنها معیوب است

بتصادف 10 محصول انتخاب می‌کنیم

الف) احتمال آنکه فقط یک معیوب انتخاب شود ؟

ب) احتمال آنکه حد اکثر دومعیوب انتخاب شود؟

الف) $\dfrac{\binom{5}{1} \times \binom{25}{9}}{\binom{30}{10}}$

ب) $\dfrac{\binom{5}{0} \times \binom{25}{10} + \binom{5}{1} \times \binom{25}{9} + \binom{5}{2} \times \binom{25}{8}}{\binom{30}{10}}$

اگر پنج گروه دو نفره محتلف به تصادف اطراف یک میز گرد بنشیند احتمال اینکه اعضای هیچ زوجی کنار هم نباشند ؟

پیشامد آنکه گروه اول کنار هم نباشند A_1

پیشامد آنکه گروه دوم کنار هم نباشند A_2

پیشامد آنکه گروه اول کنار هم نباشند A_3

پیشامد آنکه گروه اول کنار هم نباشند A_4

پیشامد آنکه گروه اول کنار هم نباشند A_5

$$P(A_1^C \cap A_2^C A_3^C \cap A_4^C \cap A_5^C) = 1 - P(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4 \cup A_{5)}$$

$$= 1 - \Big[P(A_1) + \ldots + p(A_5) - P(A_1A_2)\ldots + p(A_1A_2A_3)\ldots.$$

$$-P(A_1A_2A_3A_4)\ldots. + P(A_1A_2\ldots.A_3)\ \Big]$$

$$= 1 - \left[\binom{5}{1}\frac{8!\times 2!}{9!} - \binom{5}{2}\frac{7!\times 2!\times 2!}{6!} + \frac{\binom{5}{3}6!2!2!2!}{8!} - \frac{\binom{5}{4}5!(2!)^4}{9!} + \frac{\binom{5}{5}4!(2!)^5}{9!}\right]$$

الگوها

1) اگر «شی (مهره) درون R ظرف به تصادف ریخته شود (ضرف ها محدودیت مهره ندارند)

تعداد

2^n :سکه تعداد کل حالات ممکن = R^n

6^n: تاس

2) اگر شی

مثال: 20 جایزه مختلف به تصادف بین 5 نفر تقسیم می شود

الف) احتمال آنکه به یک نفر مشخص دقیقاً 5 جایزه برسدچقدر است ؟

ب) احتمال آنکه به هر نفر به تعداد مساوی جایزه برسد؟ $\frac{20}{5!15!}$

الف) $\binom{20}{5} = \frac{\binom{20}{5}.4^{15}}{5^{20}}$ $\qquad$ $\frac{\binom{20}{a}.20a_{4}}{5^{20}}$

ب) $\frac{(\binom{20}{44444})}{5^{20}}$

اگر 20 سوال تستی چهار گزینه ای به تصادف پاسخ داده شود احتمال آنکه همه گزینه ها به

یک *** انتخاب شده باشند ؟ $\frac{(\binom{20}{5555})}{+20}$

3) اگر شی (مهره)یکسان درون R ظرف به تصادف ریخته شود (ظرفها محدودیت دریافت مهره

***)

تعداد کل حالات=$\binom{n+r-1}{r-1}$

4) اگر n شی (مهره) یکسان درون R ظرف به تصادف قرارگیرند بطوریکه به ظرف حداقل mi

مهره برسد

حالات ممکن=$\binom{n-1}{r-1}$ $\quad n! \geq 1$

≥ 1

$y \geq 2 \quad z \geq 3$

$1+2+3=6$

$\binom{10+6+3-1}{3-1}$

$\binom{6}{2} = 15$

$x+y+2=10$

$\binom{10+3-1}{3-1}$

$\binom{12}{2} = 66$

20 جایزه یکسان به تصادف بین 5 نفر تقسیم می شود

الف) احتمال آنکه کسی بدون جایزه نماند؟

ب) احتمال آنکه یک نفر مشخص دقیقاً 5 جایزه بگیرد ؟

ج) این نفر خاص حد اقل 5 تا بگیرد ؟

احتمال آنکه تعداد جایزه ها مساوی به همه برسد؟ $\begin{cases} n = 20 \\ r = 5 \end{cases}$

الف) $\dfrac{\binom{n-1}{r-1}}{\binom{n+r-1}{r-1}} = \dfrac{\binom{20-1}{5-1}}{\binom{20+3-1}{5-1}} = \dfrac{\binom{19}{4}}{\binom{24}{4}}$

ب) $\dfrac{\binom{15+4-1}{9-1}}{\binom{20+3-1}{5-1}}$

ج) $\dfrac{\binom{15+5-1}{5-1}}{\binom{20+5-1}{5-1}}$

د) $\dfrac{1}{\binom{20+5-1}{5-1}}$

هـ) افراد تعداد جایزه های دریافتی شان زوج باشد ؟

هـ) $\dfrac{\binom{10+5-1}{5-1}}{\binom{20+3-1}{3-1}}$

و) اگر هر نفر فرد تا جایزه بگیرند (21مهره)؟

$$و) n = 21\frac{\binom{8+5+1}{5-1}}{\binom{21+5-1}{5-1}}$$

مثال) برای بیست نفر که به تصادف انتخاب شده اند ماه تولدشان را در نظر بگیرید مطلوبست احتمال آنکه در4 ماه از سال هجده ماه سه تولد درچهار ماهدیگر هر ماه دو تولد و در چهار ماه تولدی نداشته باشیم

$$\frac{\binom{12}{4,4,4,}\binom{20}{3,3,3,3,2,2,2,,0,0,0,0},}{\begin{matrix}20\\12\end{matrix}}$$

20 واحد سرمایه داریم که درچهار محل می توان سرمایه گذاری کرد که درمحل حد اقل چهار واحد و درمحل دوم حد اقل سه واحد و درمحل سوم حد اقل دو واحددودرمحل چهارم حد اقل یک واحد سرمایه گذاری کند؟

چند حالت برای سرمایه گذاری وجود دارد اگر بخواهیم حد اقل در سه موقعین سرمایه گذاری کنیم؟

$$n(E) = \binom{20-10+4-1}{4-1} + \left[\binom{20-6+3-1}{3-1} + \binom{20-7+3-1}{3-1} + \binom{20-8+3-1}{3-1} + \binom{20-8+3-1}{3-1}\right]$$

ب) لزومی نداشته باشد که تمام سرمایه مصرف شود؟

$$n(E) = \binom{20-10+5-1}{4-1} + \left[\binom{20-6+4-1}{4-1} + \binom{20-7+4-1}{4-1} + \binom{20-8+4-1}{4-1} + \binom{20-9+4-1}{4-1}\right]$$

مثال) دوازده مسافر در یک آسانسور هست که در پنج طبقه ساختمان پیاده خواهد شد؟

الف) احتمال آنکه در طبقه سوم کسی پیاده نشود؟

ب) فقط در طبقه سوم توقف نکند؟

این مسأله را در دو حالت حل کنید : تمام مسافران یکسان ؟ حالت سوم:دوازده مسافر شامل هفت فرد یکسان و پنج زن یکسان باشد ولی بین زن ومرد تفاوت قائل شوید ؟

حالت اول) $\begin{cases} r=5 \\ n=12 \end{cases}$

یکسان)

الف) $\dfrac{(12+4-1)}{\binom{12+5-1}{5-1}}$

ب) $\dfrac{\binom{n-1}{r-1}}{\binom{12+5-1}{5-1}}=\dfrac{\binom{12-1}{4-1}}{\binom{12+5-1}{5-1}}$

حالت دوم: $\begin{cases} r=5 \\ n_1=7 \\ n_2=5 \end{cases}$

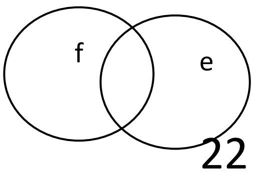
الف) $\dfrac{\binom{7+4-11}{4-1}}{\binom{7+5-1}{5-1}}=\dfrac{\binom{5+4-1}{4-1}}{\binom{5+5-1}{5-1}}$

ب) $\dfrac{\binom{7-1}{4-1}}{\binom{7+5-1}{5-1}}=\dfrac{\binom{5-1}{4-1}}{\binom{5+5-1}{5-1}}$

احتمال شرطی

احتمال وقوع پیشامد Eبه شرط وقوع پیشامد غیر تهی $F=p(E\big|F)$

$=\dfrac{P(EAF)}{P(F)}$



1) کلیه قوانین اصول و روابطی که در احتمال بیان شد در احتمال شرطی نیز برقرار است

دختر مرد $P(\quad) = \frac{25}{75}$ پسر $P($ پسر قبول $|\quad = \frac{18}{31}$

پسر مرد $P(\quad) = \frac{}{P} =$ پسر $?($ پسر قبول $|\quad = \frac{18}{31}$

$$= \frac{12/75}{25/75} = \frac{12}{25}$$

	قبول	رد	
f^c دختر	32	18	30
f پسر	12	13	25
	44	31	75=n

$$P\left(AVB\middle|c\right) = P(A|c) + p(B|c) - p(ANB|c)$$

$$P\left(E\middle|FNG\right) = \frac{P(ENF|G)}{P(F|G)}$$

2) که متناهی و هم شانس: شمارشی $P\left(E\middle|F\right) = \frac{n(EAF)}{n(F)}$

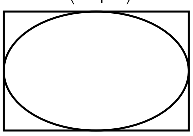
3) قانون ضرب

$$P\left(EnF\right) = P(f).P\left(E\middle|f\right)$$

$$\left\{\begin{matrix} P\left(EnF\right) = P(f).P\left(E\middle|f\right) \\ P\left(EnF^c\right) = P(f^c).P\left(E\middle|f^c\right) \end{matrix}\right\}$$

$$P\left(E\right) = P(ENF).P\left(ENF^c\right)$$

$$= P\left(E\middle|F\right) = P(F) + \left(E\middle|F^c\right)P(F^c)$$



$EAF \big/ EAF^C \qquad = P\left(E\middle|F\right) = P(F) + \left(E\middle|F^c\right)P(F^c)$

$: \frac{12}{25} + \frac{25}{75} + \frac{32}{50} + \frac{50}{75} = \frac{12+32}{75} = \frac{99}{75}$

تعمیم $P\left(E\right) = P(E\left|F_1) + P\left(F_1\right) + (E\right|F_2)P(F_2) + ... + P(E\left|F_K P(F_K)\right.$

5) قانون بیز $P\left(F\middle|E\right) = \frac{P(EAF)}{P(E)}$

$$P\left(F\middle|E\right) = \frac{P(Ec)P(F)}{P(E\left|F)P(F) + P(E\right|F^C)P(F^C)}$$

اگر 20٪ افرد جامعه بیمار باشند یک آزمایش تشخیص برای افراد سالم به اشتباه احتمال 1٪ تشخیص بیماری می دهد و برای افراد بیمار با تشخیص5٪ احتمال بیماری می دهد.

الف) اگر یک نفر ازاین جامعه آزمایش شوداحتمال تشخیص بیماری برایش چقدر است؟

$P(A) = P(E\left|F)P(F\right|T^P(1\left|F^c)P(F^c)\right.$

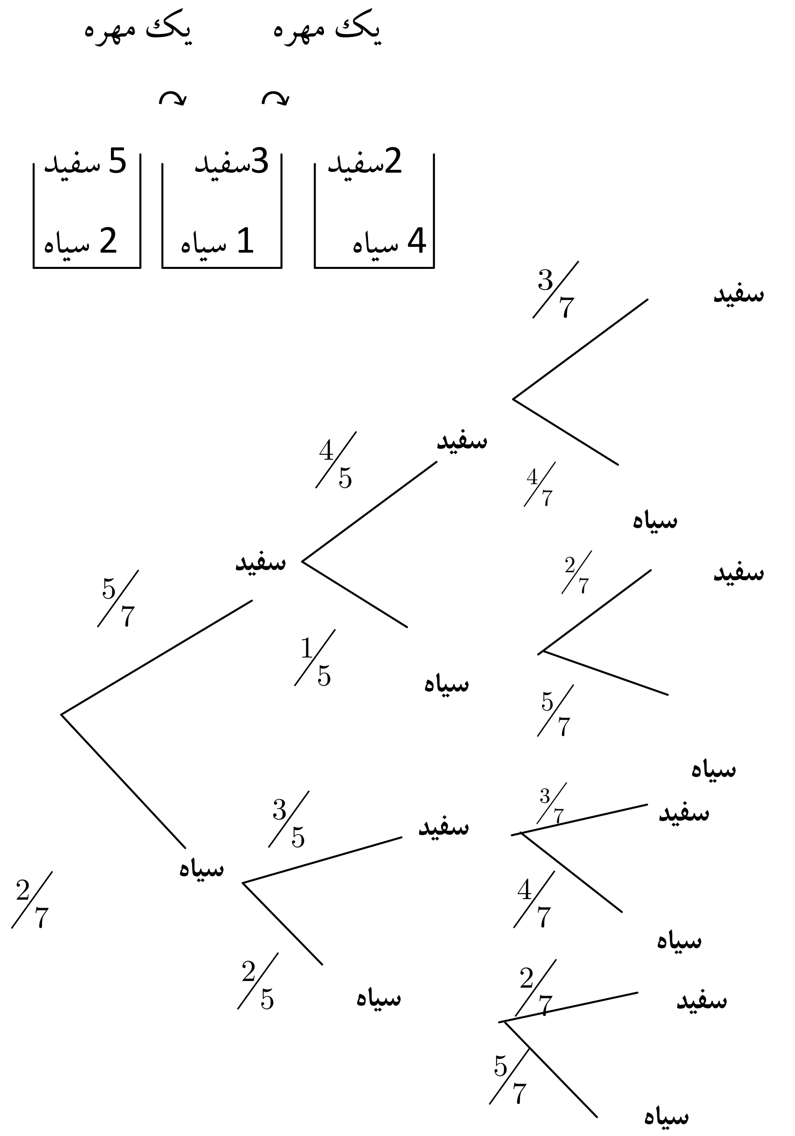
$=> 8500/2 + \%10\%8$

$= \%98 \qquad \%19/5$

$$P(F^c\left|t\right.) = \frac{P(t\left|F)P(F)\right.}{P(t\left|F)P(F) + P((t\right|F^c)P(F^C)}$$

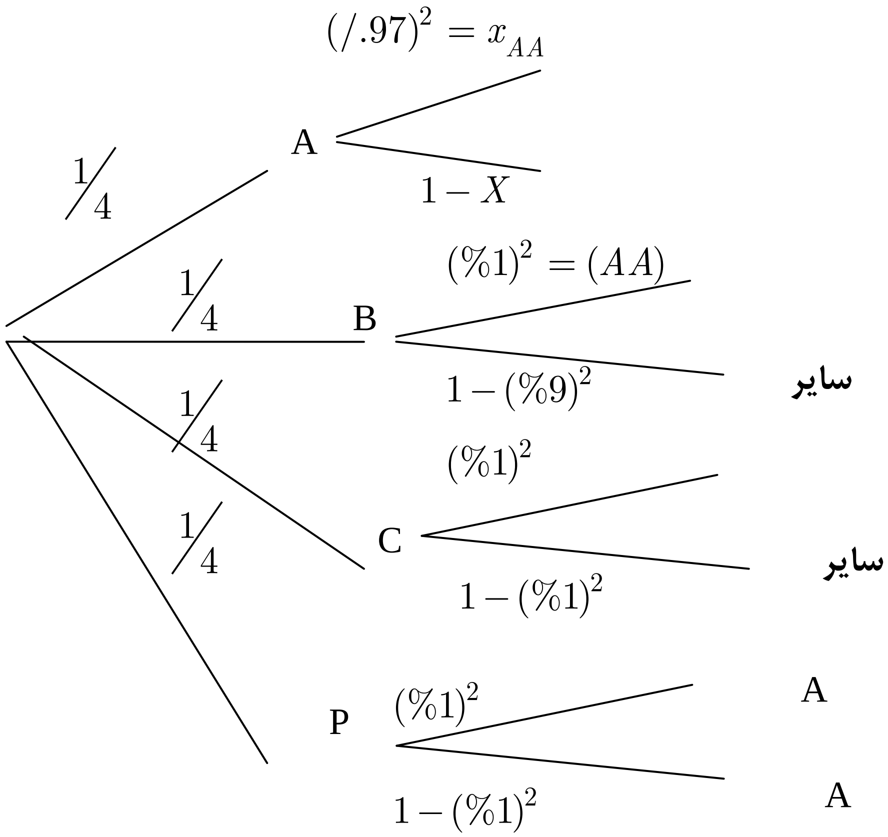
$$= \frac{93 \times ./2}{/.85 \times /.2 + \%1 \times /.8 = \frac{190}{198}}$$

$P(F^c\left|t\right.) = \frac{8}{198}$ احتمال آنکه سالم باشد



$$p\left[\underbrace{\tfrac{5}{7} \times \tfrac{4}{5} \times \tfrac{3}{4}}_{\mathbf{P_1}} \times \underbrace{\tfrac{5}{7} \times \tfrac{1}{5} \times \tfrac{2}{7}}_{\mathbf{P_2}} \times \underbrace{\tfrac{2}{7} \times \tfrac{3}{5} \times \tfrac{3}{7}}_{\mathbf{P_3}} \times \underbrace{\tfrac{2}{7} \times \tfrac{3}{5} \times \tfrac{2}{7}}_{\mathbf{P_4}}\right]$$

مثال: صفحه کلیدی شامل 4 کلید است که شامل حروف A.B.C.D است با فشار دادن کلید هر حرف آن حرف با احتمال 97٪ چاپ شود و احتمال 3٪ سایر حروف چاپ پژوه حال به تصادف یک کلید را انتخاب و ردبار فشار می دهم مشاهده می شود که هر دو بار حروف Aچاپ می شده است مطلوب است احتمال آنکه هر دوبار کلید حرف A را فشار د اده باشیم؟



$$P\left(\frac{\text{کلید}}{A}\Big|AA\right)\frac{\frac{1}{4}(./97)^2}{\frac{1}{4}\left((/.97)^2+(\%1)^2+(\%1)^2+(\%1)^2\right)}$$

$$=\frac{(./97)^2}{(./97)^2+./-3}\simeq 1$$

استقلال

دو پیشامد E و F استقلال از یکدیگر می نامیم اگر $P(E|F)=P(E)$

$$\langle = \rangle \frac{P(EAF)}{P(F)} = P(E)$$ رخ دادن یا رخ ندادن یکی روی رخ ندادن دیگری تأثیری نداشته باشد

$$\langle = \rangle P(EAF) = P(E) - P(F)$$

تصحیح

$$G,F,E \langle = \rangle \begin{cases} P(EAF) = P(E)P(F) \\ P(EAG) = P(E)P(G) \\ P(EAG) = P(F)P(G) \end{cases}$$

نکته : اگر F,E مستقل باشند آنگاه

F^c, E مستقل اند

F, E^C مستقل اند

F^c, E^C مستقل اند

مثال: $E\left\{(1,6)(6,1)(5,2)(2,5)(3,9)(9,3)\right\}$

$F\left\{(1,6)(2,6)(3,6)(4,6)(5,6)(6,4)\right\}$

$$=\rangle P(E) = {}^{6}\!/_{36} = \frac{1}{6}$$

حل) $$=\rangle P(F) = {}^{6}\!/_{36} = \frac{1}{6}$$

$EAF = \left\{(1,6)\right\} =\rangle P(EAF) = \frac{1}{36}$

$P(E)P(F) = P(EAF) = {}^{1}\!/_{6} =\rangle$ F.Eمستطیل اند

F.E نشست همبستگی بین $R\frac{P(EAF)-P(E)P(F)}{\sqrt{P(E)P(E^c)P(F)P(F^c)}}$

مثال) در یک مسابقه هر بار یک جفت تاس پرتاب شوند (هر بار مستقل از دفعه قبل) اگر مجموع دو عدد ظاهر شده عدد هفت باشند نفر A ** می شود اگر مجموع دو عدد ظاهر شده پنج باشد نفر B برنده می شود درغیر این صورت آزمایش تکرار می شوداحتمال هر کدام چقدر است؟

$$\begin{cases} A = \text{برنده شدن نفر اول} \\ B = \text{برنده شدن نفر دوم} \end{cases}$$

پرتاب اول
$$\begin{cases} F_1 = 7 = \text{مجموع} \\ F_2 = 5 = \text{مجموع} \\ f_3 = 7 \simeq 3 \text{ مجموع} \end{cases}$$

$$P(A)=P(E\big|F_1)P(F)+P(E\big|F_2)P(F_2)+P(A\big|F_3)P(F_3)$$

$$P(A)=10\,{}^{6}\!\!\diagup_{6}+00\,{}^{4}\!\!\diagup_{6}+P(A).{}^{26}\!\!\diagup_{36}$$

$$P(A)(1-\frac{26}{36})=\frac{6}{36}=\rangle P(A)=\frac{{}^{3}\!\!\diagup_{36}}{{}^{10}\!\!\diagup_{6}}=\frac{{}^{6}\!\!\diagup_{36}}{{}^{6}\!\!\diagup_{36+{}^{4}\!\diagup_{36}}}=\frac{6}{10}$$

$$P(A)=\frac{P(F_1)}{P(F_1)+P(F_2)}$$

متغیر تصادفی

متغیر تصادفی x در حقیقت تابعی است از فضای نمونه به درون اعداد حقیقی

مثال)

$$S=\underset{\substack{\downarrow\\0}}{(T\,T)}\ \ \underset{\substack{\downarrow\\1}}{(T\,H)}\ \ \underset{\substack{\downarrow\\1}}{(H\,T)}\ \ \underset{\substack{\downarrow\\2}}{(H\,H)}$$

X=تعداد شیرهای ظاهر شده حل $S\underrightarrow{X}\{1,2\}$

$$P(0)=P(X=0)=P(Tt)=1/4$$

$$P(1)=P(X=1)=P(\{(HT)(T,H)\})=2/4$$

$$P(2)=P(X=2)=P(\{(HH)\}=1/4$$

X	0	1	2
$F(X)=P(X)$	$1/4$	$2/4$	$1/4$

$$F(n)=\frac{\binom{X}{n}}{4}$$

$$X=0,1,2$$

مثال)

X= مجموع دو عدد ظاهر شده در پرتاب جفت تاس سالم

تابع احتمال X را بیابید

$$s=\{(1,1)(1,3)-(6,6)$$

X	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$F(X)=P(X)$	$1/56$	$2/36$	$3/36 \ldots$	$6/36$	$5/36 \ldots\ldots$	$6/36$					

$$F=(x)=\frac{6-1x-7}{36}$$

$$X=2,3,\ldots.12$$

مثال) از بین 15 کالای سالم و 5 کالای معیوب به تصادف 3 کالا خریداری می شود اگر تعریف کنیم

تعداد معیوب های خریدن = X $X=2,3,\ldots.12$

$$P(0) = P(X = 0) = \frac{\binom{5}{}\binom{15}{3}}{\binom{20}{3}}$$

$$P(X) = \frac{\binom{5}{2}\binom{15}{1}}{\binom{20}{3}}$$

$$P(1) = P(X = 1)\frac{\binom{5}{1}\binom{15}{2}}{\binom{20}{3}}$$

$$P(3) = \frac{\binom{5}{3}\binom{15}{0}}{\binom{20}{3}}$$

فرمول تابع احتمالX $F(X) = \frac{\binom{5}{X}\binom{15}{3-X}}{\binom{20}{3}}$

$X = 2, 3, ...12$

مثال) از بین اعداد 20 تا 1 به تصادف 3 مورد محتلف انتخاب می کنیم؟ اگر تعریف کنیم $X =$ بزرگترین عدد انتخاب شده تابع x را بیابید

$X = \max(a_1, a_2, a_3)$

$ai\ \varepsilon \left\{1, 2, ...20\right\}$ $F(13) = \frac{\binom{13-1}{2}}{\binom{20}{3}}$

$X = 3, 4, ...20$

$F(X) = \frac{\binom{X-1}{2}}{\binom{20}{3}}$ $F(8) = \frac{\binom{8-1}{X}}{\binom{20}{3}}$

مثال) به سوی هدفی مستقلا شلیک می شود برای اولین بار به هعدف برخورد کنید؟ فرض کنید شانس برخورد در هر شلیک 9/. است؟

تعداد شلیک های لازم =x تا اولین برخورد

تابع احتمال شلیک X را بیابید ؟

Xتابع احتمال: $F(x) = (./3)^{n-1}.(./7) = (1-P)^{n-1}P$

F(3)=P(X=3)=P(ش ش پ)=(./3)(./3)(./7)=(./)^{x}×./7

F(7)=P(X=7)=P(ش ش ش ش ش ش پ)=(./3)^{6} ./7

$$0\langle F(X)\langle 1$$
$$\sum_{Vn} f(0)=1$$

مثال) سکه ای را پرتاب می کنیم اگر شیر آمد ثبت و اگر خط منفی می گیرد .

تعداد شیر	تعداد ضبط
0	2,8

$$f(2)=\frac{\overset{20}{16,2}}{2}=\frac{\overset{(20)(4)^{1}_{X}}{16}}{X^{2e}}$$

$$=\frac{\overset{(20)}{16}}{\underset{X}{20}} \qquad F(0)=\frac{\overset{(20)}{10}}{\underset{X}{20}}$$

$$F(8)=\frac{\overset{(20)}{11,6}}{\underset{2}{20}}=\frac{(20)(\overset{60}{6}}{\underset{2}{20}}=\frac{\overset{(20)}{14}}{\underset{2}{20}}$$

X= امتیاز بدست آمده

احتمال X $(c=F(X)F(X)=\frac{\underset{10}{20+}\frac{1\times1}{2}}{\underset{2}{20}}$

$X:20_{0}18,....2,...,20$

مثال) تابع احتمال متغیر تصادفی X بصورت زیر است مقدار c را بیابید ؟

$F(X)cxP^{x}$

$X:1,2,3,4,...\langle P\langle 1$

حل) $\sum_{v=x}F(X)=1=7\sum_{x-1}cxp^{x}\ =1$

$c:\left[P\left|2p^{2}\right|3P\left|4p^{4}\right|5p^{5}\right|....]$

$$= c : \left| \begin{array}{l} P + p^2 + 3P^3 + P^4 + P^5 + ... \\ +p^2 + p^3 + p^4 + p^5 \\ \quad +p^3 + p^4 + p^5 \\ \quad +p^4 + p^5 \end{array} \right|$$

$$c = \left[\frac{P}{1-P} + \frac{P^2}{1-P} + \frac{P^3}{1-P} + \frac{P4}{1-P} + \frac{P^5}{1-P} + ... \right] = 1$$

$$\frac{CP}{(1-P)^2} = 1....F(x) = cx_1 =^x = \frac{(1-P)^2}{1^2} xP^x = xP^{x-1}(1-P)^3 x = 1,2,....$$

تمرین) تابع احتمال متغیر تصادفی X به صورت زیر است مقدار C را بیابید؟

$$F(X) \frac{C}{X} P^X 0 \langle P \langle 1$$

$$X = 1,2,3,4,...$$

حل) $\sum_{VX} F(X) = 1 = \rangle \sum_{X=1}^{X} \frac{C}{X} P^X = 1$

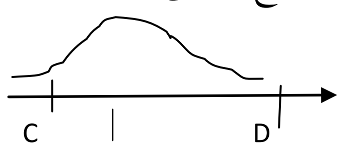
$$C \left[P + \frac{1}{4} P^2 + \frac{1}{3} P^3 \ \frac{1}{4} P^4 \ \frac{1}{5} P^5 + ... \right] = 1$$

$$C \frac{1}{\left[P + \frac{1}{2} P^2 + P \frac{3}{3} + P \frac{4}{4} + ... \right]} = \frac{1}{4}$$

$$\sum_{X=1}^{\infty} = \frac{P^X}{X} = X = ?$$

متغیر تصادفی پیوسته

F(X) تابع چگالی



اگر x یک متغیر تصادفی پیوسته باشد

یک تابع به نام تابع چگالی به فرم F(X)

خواهد داشت

که $F(X) \geq (1$

$\int_{-X}^{+X} F(X) dx = 1 (2$

و داریمها $P\left[Q \leq X \leq B \right] = \int_{Z}^{B} F(X) d$

در پیوسته همیشه نقاط احتمال آنها صفر است

$$P(a)=P(Q\leq X\leq a)=\int_{Q}^{a} f(x)dx=0:\forall a$$

مثال) نرخ تورم یک کالا متغیر تصادفی پیوسته ای است که تابع چگالی آن به فرم زیر است

$F(x)\Big\{cx(1-x)$

$C=?\,P(X\rangle./\,7)=?\,P(n\langle./\,2)=?\,P(./\,\langle X\langle./\,8)$

$P(X=./\overset{4}{4})=?\,2=0\big]$

حل) $1=\int_{-\infty}^{+\infty}F(X)dX=\int_{0}^{1}CX(1-x)dX$

$C=\int\frac{1}{2}X^2-{}^{1}\!/\!_{3}{}^{3}\int_{0}^{1}=\frac{c}{6}=\rangle c=6$

$P=(X\geq./\,7)=\int_{./7}^{1}F(X)d_X=\int_{./7}^{1}6x(1-x)dn=6(\frac{n^2}{2}-\frac{x^3}{3}\quad\Big]_{./7}^{1}=6(\frac{1}{6}-\left[\frac{(./\,7)^2}{2}-\frac{(./\,7)^2}{3}\right])$

, $P=(x\leq./\,2)=\int_{0}^{./2}P(X)X=\int_{0}^{12}6x(1-x)dn=6(\frac{1}{2}x^2-\frac{x}{3}^{3}\quad\Big]_{0}^{./2}=6(\frac{(./\,2)^2}{2}-\frac{(./\,2)^3}{2})$

$F=(./\,3\leq X\leq./\,7)=\int_{./3}^{./7}6X(1-X)dX=6(\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3})\quad\Big]_{./3}^{./7}=6\left[\frac{(./\,7)_2}{2}-\frac{(./\,2)^3}{3}-(\frac{./\,3}{2})^2-(\frac{./\,3}{2})^3\right]$

مثال) می دانیم تورم از 2/. بیشتر است احتمال آنکه از 7/. بیشتر شود؟

$P(x\overset{E}{\geq}./\,7\Big|\overset{F}{X\rangle}./\,2)$

حل) $P=\frac{(X\geq./\,7,X\geq./\,2)}{P(X\geq./\,2)}=\frac{P(X\geq./\,7)}{P(X\geq./\,2)}=\frac{\int_{./7}^{1}6X(1-X)dX}{\int_{./2}^{1}6X(1-X)dX}$

مثال) اگر

$F(X):\Big\{X\quad 0\leq X\leq 1$ تابع چگالی یک متغیر تصادفی

X باشد

الف) $C=?$ ب) $P(X\leq./\,5)=?$

ج) $P(X\leq 1/\,5)=?$ د) $=1=\int_{-\infty}^{+\infty}F(X)d_X$ حل)

$$\int_0^1 dX+\int_1^2 (C-X)d_X=\frac{1}{2}X^2\Big]^1+(CX-\frac{1}{2}X^2\Big]_1^2$$

$$1=\frac{1}{2}+(2C-2-c+\frac{1}{2})=1=\frac{1}{2}+\frac{3}{2}=\rangle c=2\quad\big]2-X\big]$$

$$P(X\le 1/5)=\int_0^{./5}F(X)dX=\int_0^{./5}XdX=\frac{1}{2}X^2\Big]_0^{./5}=\frac{1}{8}$$

$$P(X\le 1/5)=\int_0^{./5}F(X)dx=\int_0^4 xdx+\int_1^{1/5}2Xdx=\frac{1}{2}X^2\Big]_0^1+(2X\frac{1}{2}X2\Big]_1^{1/5}$$

$$=\frac{1}{2}+\left[(3-\frac{2/25}{2})-\frac{(2-\frac{1}{2}}{1/5}\right]=\frac{4-2/25}{2}=\frac{1/75}{2}=./875=7/8$$

مثال) اگر طول عمر یک کالادارای تابع چگالی به فرم زیر باشد

$$F(X).(Xe^{-x/2}\qquad\qquad X\ge 0$$

الف) C=? ب) $P(X\rangle 5)=?$

$$1=\int_0^\infty cXe^{-X2}dX-C\int_0^\infty X\quad e^{-x/2}dX=c(4)\Rightarrow c=\frac{1}{4}\quad\big]$$

$$P(X\rangle 5)=\int_5^\infty F(X)dX=1-\int_0^5 F(X)dX=1-\left[-(2X+4)e^{-x/2}\right]_0^5=1+\left[14e^{-5/2}-4\right]$$

$$\underbrace{\int Xe^{-X/2}dx=(-(1x+4)e^{-X/2}}$$

+X	e-X/2
ضرب-1	$-2e^{-X/2}$
ضرب+1	
	$4e^{-X/2}$

تعریف : تابع توزیع «F»

اگر X یک متغیر تصادفی باشد تابع توزیع X را به صورت زیر تعریف می کنیم

تابع توزیع X $\boxed{FX(t)=P(X\leq t}$

مثال)

$$\begin{array}{c|cccc} X & -1 & 0 & 1 & 2 \\ \hline F(X) & ./2 & ./3 & ./1 & ./4 \end{array}$$

$$F_X(t)=? \qquad FX(t)=P(X\leq t)=\sum_{\forall X\leq t} f(n)=\begin{cases} 0 t\langle -1 \\ ./2 -1\leq t\langle 0 \\ ./5 \quad 0\leq t\langle 1 \\ ./6 \quad 1\leq t\langle 2 \\ 1 \quad 2\leq t \end{cases}$$

$$p(X-1)=FX(1)-FX(1)$$
$$=./6-./5=./1$$

مثال) $F(X)=6x(1-X)0\leq X\leq 1$

مطلوبیت $F_X(t)=?$

حل) $FX(t)=P(X\leq t)=\int_0^t F(X)dx=6(\frac{X^2}{2}-\frac{X^3}{2}\int_0^t=6(\frac{t^2}{2}-\frac{t^3}{3})0\leq t\leq 1$

نکته :اگر FX(t) تابع توزیع متغیر تصادفی X باشد داریم

$$\begin{cases} P(a\langle X\leq b)=FX(b)-FX(a) \\ P(a\leq X\leq b)=FX(b-FX(\bar{a}) \\ P(a\langle X\langle)-FX(b)-\bar{F}X(b) \\ F(a\leq X\langle b)=FX(b)-tX(\bar{a}) \end{cases}$$

$$\begin{cases} P(X\leq a)=FX(a) \\ P(X\langle a)=FX(a) \end{cases}$$

$$\begin{cases} P(X\rangle a)=1-P(X\leq (a)=1FX(a) \\ P(X\geq a)=1-P(X\langle a)=1-FX(\bar{a}) \end{cases}$$

امید /ریاضی

اگر X یک متغیر تصادفی باشد مورد انتظار X (میانگین X، توسط X) (امید /ریاضیX) را به صورت زیر محاسبه می کنیم .

$$\mathrm{M}=E(X)=\begin{cases}\sum_{\forall X}{}^{X}P(X) & \text{گسسته}\\ \int_{-\infty}^{+\infty}XF(X)dX & \text{پیوسته}\end{cases}$$

بطوریکه اگر g (X) تابعی از X باشدآنگاه

$$E=g(X)=\begin{cases}\sum_{\forall X} g\ \ (X)P(X) & \text{گسسته}\\ \int_{-\infty}^{+\infty}g(X)F(X)dx & \text{پیوسته}\end{cases}$$

مثال) تابع احتمالX:

$$\begin{array}{c|cccc} X & -1 & 0 & 1 & 2\\ \hline P(X) & ./\,2 & ./\,3 & ./\,1 & ./\,4\end{array}$$

$$M=E(X)=\sum Xp(X)=(-./\,2)+0+(./\,1)+(./\,7)=./\,7$$

گسسته

$$E=(X^2)=\sum X^2p(X)=(-1)^2\times ./\,2+0^2\times ./\,3+1^2\times ./\,1+2^2\times ./\,4=1/\,9$$

تابع چگالیX

$$F(X)=6X(1-X) \qquad 0\le X\le 1 \Big| 6^2 Var(X)=E(X^2)=E(X^2)-E^2(X)=1/\,9-(./\,7)^2$$

01/9−./49=1/41

پیوسته

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}Xf(X)dX=\int_0^1 X.6X(1-X)dX$$

$$=6\frac{1}{3}X^3-\frac{1}{4}X^4)\int_0^1\frac{1}{2}=./\,5$$

$$E(X2).\int_{-\infty}^{+\infty}X^2.P(X)dx=\int_0^1 X^2.6X(1-X)dX$$

$$=6(\frac{1}{4}X^2-\frac{1}{5}X^5\int_0^1=\frac{3}{10}=./\,3 \quad \Big]$$

$$6^2=Vav(n)=E(X^1)-E^2(X)=(./\,3)=(./\,5)^2$$

$$=./\,3-./\,25=./.5 \quad \Big]$$

$E(bX\Big| = bE(X)$ (2 $\qquad\qquad$ $E(a) = a$ (1

3) $E(ax+b) = aE(X) \underline{+} b$ امید فقط یکبار اثر می گذارد

تعریف : برای متغیر تصادفی X« واریانس X) به صورت زیر محاسبه می شود :

$$6^2 = Vav(X) = E\Big[(X-M)^2\Big] = E(X^2) - E^2(X)$$

واریانس همیشه جنب مثبت است

انحراف معیار X $\quad 6 = \sqrt{Vav(X)}$

انحراف استانداردX

$CV = \frac{6}{M}$ ضریب نفرات به واحد اندازه گیری بستگی ندارد

$X \geq 0 \quad F(X) = e^{-x}$ تابع چگالی (مثال

Cv=?

$$M = E(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} x.F(X)dx = \int_0^{\infty} x.e^{-X}dX = 1$$

$$E = (x^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2.F(X)dx = \int_0^{\infty} x^2.e^{-X}dX = 2$$

$$6^2 = Vav(X) = E(X^2) - E^2(X).2 - 1^2 = 1$$

$$6 = \sqrt{1 = 1}$$

$$X \geq 0 \quad M_{(X.1)}\int_0^{\infty} X^{\Pi} e^{-x} dx = n\underset{0}{1}$$

$$CV = \frac{6}{M} = \frac{1}{1} = 1 \quad \%100$$

انتگرال گاما $\begin{cases} 0\underset{0}{1} = 1 \\ 1\underset{0}{1} = 1 \\ 2\underset{0}{1} = 2 \end{cases}$

سه جعبه داریم هر کدام دارای 2 کشو در صندوق اول دارای یک سکه طلا است در صندوق دوم یک کشو طلا و یک کشو نقره در صندوق سوم هر ک شو یک سکه نقره دارد

یکی از صندوق ها را به تصادف انتخاب میکنیم و یک کشو را باز می کنیم اگر سکه داخل آن طلاباشد احتمال آنکه اینکه کشو دیگر نیز سکه طلا درآن باشد ؟

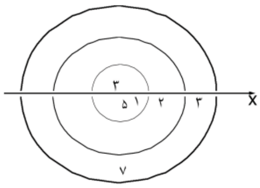
ظرفی شامل 5 سفید و 5 سیاه باشد هر بار مهره ای از طرف بیرون آورده پس از مشاهدهٔ رنگ آن این مهره را به همراه یک مهره همرنگ خودش به ظرف بر می گردانیم این بارده بار تکرار می شود احتمال آنکه فقط یکبار مهرهٔسفید انتخاب شده باشد چقدر است ؟

$$\begin{cases} Wb-b \to \frac{5}{13}\times\frac{X}{14}\times\frac{9}{15}\times\frac{1}{16} \\ bmb- \to \frac{8}{13}\times\frac{5}{14}\times\frac{9}{15}- \\ bb-bw \to \frac{8}{13}\times\frac{9}{14}\times\frac{10}{15}-=P_{10} \end{cases}$$

جواب: $P1+P2+....-P10$

به هدفی دایره ای شکل مطابق شکل زیر 20 مرتبه سیلک شیر اگر احتمال برخورد شلیک به هدف 9/. باشد مطلوب احتمال آنکه 8 برخورد در ناحیه 5 برخورد در ناحیه و 7 برخورد در ناحیه بیرون بزند ؟

برخورد در ناحیه اول $\frac{\pi 1^2}{\pi 3^2} \to \frac{1}{9}$



برخورد در ناحیه اول $\frac{\pi 2^2-\pi 1^2}{\pi 3^2} \to \frac{3}{9}$

برخورد در ناحیه اول $\frac{\pi 3^2-\pi 2^2}{\pi 3^2} \to \frac{5}{9}$

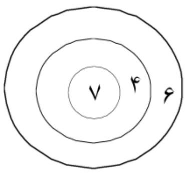
$(\frac{1}{9})^8.(\frac{3}{9})^5.(\frac{5}{9})^7$

$(./9)^{20}.\binom{20}{8,5,7}.(\frac{1}{9})^8(\frac{3}{9})^5(\frac{5}{9})^7$

$(./9)^{20}.\binom{20}{8,5,7}.(\frac{1}{9})^8(\frac{3}{9})^5(\frac{5}{9})^7$

$\binom{20}{8,7,5}.(\frac{1^8.3^5\times 5^7}{1.^{20}}$

اگر از 20 تاکتیک 3 به هدف بخورد



؟

$\binom{20}{3}.(./1)3(./9)17.\binom{17}{7,4,6}.(\frac{1}{9})^7(\frac{3}{9})^4.(\frac{5}{9})^9$

$\binom{20}{X}.(./1)^X(./9)^{20-X}.\binom{20-X}{a,a_2a_3}.(\frac{1}{9})\ (\frac{3}{9})^{a2}.(\frac{5}{9})^{a3}$

$a_1+a_2+a_3+x=20$

امید ریاضی درحالت دو متغیره

اگر Y,X متغیرهای تصافدی توام باشند و q (X,y) تابعی از (X,y) باشد

y,x گسسته

مثال : تابع احتمال توام X,y

	1	2	3
1	./2	./1	./1
2	./3	./2	./1

$$E(XY)=\sum_{\forall y}\sum_{X} Xyf(XY)=\left[1\times 10./2+2\times 1\times ./1+3\times 1\times ./1+1\times \underbrace{3X./2}_{./5}+2\times \underbrace{3\times ./1./1}_{./5}+\underbrace{3\times 3./3}_{.2/7}\right]=4/6$$

$$E(\sin(\pi\frac{X}{y}))$$

$$\frac{\Sigma}{\forall y}\ \frac{\Sigma}{\forall x}\sin(\pi\frac{x}{y})F(xy)=./2Sin\pi+./1S\text{in}\,2\pi+./1Sin3\pi+./2Sin(-\pi/3)+./1$$

$$Sin\frac{2\pi}{3}+./3Sin(2\pi)=./3\sqrt{3/2}$$

مثال : تابع چگالی توام x.y

$$F(x,y)=\begin{cases}8xy & 0\langle x\langle 1\\ 0 & \end{cases}$$ سایر نقاط $$E(Sin(\frac{\pi x}{y})$$

$$=\sum_{\forall y}\sum_{\forall x}Sin(\frac{\pi x}{y}).F(x.y)=\underbrace{./26Sin\pi}_{0}$$

$$=\int_0^1\int_0^g xy-8xy\ \ dxdy=\int_0^1\frac{8}{3}y^2..dy=\frac{8}{3}\int_0^1 y^5dy$$

$$=\frac{8}{18}y^x\int_0^1=\frac{8}{18}=\frac{4}{9}$$

تعریف : همبستگی بین x,y:

$$\text{cov}=E\Big[(x-E(x)(y-E(y)\Big]E(xy)-E(x)E(y)$$

تعریف : همبستگی بین x,y:

$$P=\frac{\text{cov}(x,y)}{\sqrt{Vav(x).Vcv(y)}}$$ قضیه $-1\le P\le 1$

همبستگی معکوس دارد $y,x\Leftarrow -1\le P\langle 0$

همبستگی مستقیم دارد $y,x\langle = 0 \Leftarrow 0\langle P \le 1$

$E(x,y) = E(x)E(y)\langle = \rangle \operatorname{cov}(x,y) = 0\langle\rangle$ ..... $y,x\langle = \rangle P = 0$

y/x	1	2	3
0	./1	./3	./1
1	./2	./1	./2

y	0	1
Fy(y)	./5	./5

y	1	2	3
Fx(x)	./3	./4	./3

$$\begin{cases} E(x) = ./3 + ./8 + ./9 = 2 \\ E(x2) = ./+1/6 + 2/7 = 4/6 \\ Var(x) = E((x^2) - E^2(x) \end{cases}$$

$E(y) = 0 + ./5 = ./5$

$E(y^2) = 0 + ./5 = ./5$

$Vor(y) = E(y^2) - E^2(y)$

$= ./5 - (./5)^2 = ./25$ $= 4/6 - 2^2 = ./6$

$E(xy) = \Sigma\Sigma xyf(x,y) = 0 + 0 + 0 + ./2 + ./2 + ./6 = 1$

$$P = \frac{\operatorname{cov}(x,y)}{\sqrt{Vav(x).Vav(y)}} = \frac{0}{\sqrt{./6 \times ./25}} = 0$$

.........Y,x

$Cov(x,y) = E(x,y) - E(x)E(y)$

$= 1 - 2 \times ./5 = 0$

مثال:

$$f(x,y)=\begin{cases}8xy \\ 0\end{cases}$$

$0 \le x \le y \le 1$

سایر نقاط

$P=?$

$$E(xy)=\int_0^1 \int_0^x xy. = \wedge xydydx=\frac{4}{9}$$

$$Fx(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} F(x,y)=dy=\int_x^1 \wedge xydy=fx(1-x^2)0\langle x\langle 1$$

$$E(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} x.f(x)dx=\int_0^1 n4x(1-x^2)dx=\frac{8}{15}$$

$$E(x^2)=\int_{-\infty}^{+\infty} x^2.fx(x)dx=\int_0^1 x^2.4x(1-x^2)dx=1/3$$

$$Fy(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} F(x,y)cx=\int_0^y \wedge xydx=4y^3 \quad 0\le y\le 1$$

$$E(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} y.Fy(y)dy=\int_0^1 y.4y^3dy=4/5$$

$$E(y^2)=\int_{-\infty}^{+\infty} y^2.Fy(y)dy=\int_0^1 y^2.4y^3dy=4/6=2/3$$

$$Var(y)=E(y^2)-E^2(y)=2/3-(\frac{4}{5})^2$$

$$Cov(x,y)=E(xy)-E(x)E(y)=\frac{4}{9}- \quad \frac{8}{15}-\frac{4}{5}$$

$$P=\frac{Cov(xy)}{\sqrt{Vor(x).Var(y)}}=\frac{4/9-\frac{8}{15}.4/5}{\sqrt{\frac{1}{3}-(\frac{8}{15})^2}.(\frac{2}{3}-(4/5)^2)}$$

خواص کوواریانس

$1)\operatorname{cov}(x,y)=\operatorname{cov}(y,x)=\partial_{x,y}$

$2)\operatorname{cov}(x,a)=0$

$3)\operatorname{cov}(x,x)=Vov(x)$

$4)\operatorname{cov}(ax\underset{-}{t})^5,cy+d)=(a.c)\operatorname{cov}(x,y)$

$$PT,z=\begin{cases}Px.y & a_{1c}\rangle 0 \\ -Px,y & a_c\rangle 0\end{cases}$$

$$5)\ \operatorname{cov}(\overbrace{ax+dy+c}^{x_1},\overbrace{dz+eT+f}^{y_1}$$

$$= ad\operatorname{cov}(x,z)+ae.\operatorname{cov}(x,T)+bd\operatorname{cov}(y,z)+bo\operatorname{cov}(y,T)$$

$$Var(ax+5y+c)=a^2Var(x+b^2Var(y)+2abcar(x,y)$$

مثال) $Var(2x-3y+5=-7)$

$$=\Sigma 7(x)+97(y)+25.7(2)-12\operatorname{cov}(x,y)+20\operatorname{cov}(x,2(-3.6v(y,z)$$

$$P=\frac{\partial xy}{\partial x.6y} \qquad -1\le P\le 1=\rangle\frac{6xy}{6x.dy}\le 1=\rangle\delta xy\le\delta x-\delta y$$

$$=\rangle\operatorname{cov}(x,y)\le\sqrt{Var(x).VAR(Y)}$$

$$\left[\operatorname{cov}(x,y)\right]^2\le\operatorname{var}(x.\operatorname{var}(Y)$$

توزیهای شرطی

اگر (x,y) دو متغیر تصادفی توام باشد

توزیع شرطی x به شرط y=y بیابیم

الف) x وy گسسته

$=Fx|y=y^{(x)}$ تابع احتمال شرطی به شرط y =Y

تابع احتمال توام y, x

$$Px\,/\,y=\overset{(x)}{y}=\frac{P(x=x,y=y)}{P(y=y}$$

$=\frac{f(x,y)}{Fy(y)}$ تابع احتمال کناری y

$$\sum_{\forall x}=fx\Big|y=y(x)=1$$

$$P\langle x\le a\Big|y=y=\sum_{\forall x\le a}Fx\Big|y=\overset{(x)}{y}$$

ب) (x,y) پیوسته:

تابع چگالی کناری y $Fx\Big|y=y\frac{f(x,y)}{Fy(y)}$ تابع چگالی شرطی xبه شرط y=y

$$\int_{-\infty}^{+\infty}Fx\Big|y=\overset{(x)}{y}\;dx=1$$

$$P(x\le a\Big|y=y)\int_{-\infty}^{a}f\int_{y=y}^{x|dx}$$

$$E(g(x)\Big|y=g)=\begin{cases}\Sigma g(x)fxly=y\\ \int_{-\infty}^{+\infty}x(x).f_{xly=y}(x)dx\end{cases}$$

$$Vav(x\Big|y=y)=E(X^2\Big|y=y-E^2(x\Big|y=y$$

$$F_{x|y=y}(x)=\frac{F(x,y)}{Fy(y)}$$

تابع توام احتمال x,y

y/x	1	2	3	
1	./1	./2	./1	0/4
2	./3	./2	./1	0/6
	./4	./2	./2	

الف) $\begin{cases}P(x\le 2\Big|y=2\\ P(X\le 2\Big|y=1\\ Vav(x\Big|y=1)\end{cases}$

حل) $P(x\le 2)=./1+./2+./3+./2=./8$

$Fy(2)=P(y=2)=./6$

الف) $Fx\Big|^{(x)}\ y=2=\dfrac{F(x,2)}{./6}$

تابع احتمال شرطیx

	x	1	2	3	جمع
$Fx\Big|^{(x)}\ y=2\Big|$	1	$\frac{./3}{./6}$	$\frac{./2}{./6}$	$\frac{./1}{./6}$	1

$$P\langle x\le 2\Big|y=2)=\frac{./3}{./6}+\frac{./2}{./6}=\frac{./5}{./6}=\frac{./5}{./6}$$

ب) $F\,xly^{(x)}=\dfrac{F(x,1)}{Fy(1)}-\dfrac{F(x,1)}{./4}$

x	1	2	3
تابع احتمال			
شرطیxبه	$\frac{./1}{./4}$	$\frac{./2}{./4}$	$\frac{./1}{./4}$
شرط y=1			

$P(x \le r \big| y=1) = \frac{./1}{./4} + \frac{./2}{./4} = {}^{3}\!/_{4}$]

$P(\overset{E}{x} \le r) = P(\overset{E}{x} \le 2 \big| \overset{f}{y} = 1)p(\overset{f}{y} = 1)P(\overset{E}{x} \le r \big| \overset{f}{y} = 2^c)p(\overset{f}{y} = 2)$

$= \sum_{\forall y} P(x \le 2 \big| y = y) F(y = y)$

x	1	2	3
$\overset{(x)}{F\,xly}$	${}^{1}\!/_{4}$	${}^{2}\!/_{4}$	${}^{1}\!/_{4}$

(ج

$E(x \big| y=1) = 1 \times {}^{1}\!/_{4} + 2 \times {}^{2}\!/_{4} + 3 \times {}^{1}\!/_{4} = {}^{8}\!/_{4} = 2$

$E(x^2 \big| y=1) = 1^2 \times {}^{1}\!/_{4} + 2^2 \times {}^{2}\!/_{4} + 3^2 \times {}^{1}\!/_{4} = \frac{18}{4} = \frac{4}{2}$

$Vav(x \big| y=1) = (x^2(y=1) - E^2(x \big| y=1) = \frac{9}{2} - (2)^2 = ./5$

x	1	2	3
$F_x(x)$	./4	./4	./4

تابع احتمال

کناری x

$E(x) = 1./4 + 2 \times ./4 + 3 \times ./2 = 1/8$

$E(x^2) = 1 \times ./4 + 4 + 4 \times ./4 + 9 \times ./2$

x	1	2	3
$F_x \big| y = 2$	${}^{3}\!/_{6}$	${}^{2}\!/_{6}$	${}^{1}\!/_{6}$

$E(x \big| y=2) = {}^{3}\!/_{6} + {}^{4}\!/_{6} + {}^{3}\!/_{6} = {}^{10}\!/_{6}$

$E(x^2 \big| y=2) = {}^{3}\!/_{6} + {}^{8}\!/_{6} + {}^{9}\!/_{6} = {}^{20}\!/_{6}$

$Var(x \big| y=2) = {}^{20}\!/_{6} - ({}^{10}\!/_{6})^2 = {}^{20}\!/_{36}$

$T = E(x \big| y = g$	2	${}^{10}\!/_{6}$
P	./4	./6

$E(T) 2 \times ./4 + {}^{10}\!/_{6} \times ./6 = ./8 + 1 = 1/8 = E(V)$

$E(E(x \big| y = y)) = E(x)$

مثال:

$$F(x,y)=\begin{cases}8xy & 0\le x\le y\le 1 \\ 0 & \end{cases}$$ سایر نقاط

$Vav(x\Big|y=./5)=?$ $\qquad$ $P(x\le ./2\Big|y=./5)=?$

حل)

$$Fy\Big|(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}F(x,y)dx=\int_0^y \wedge xydx=4y^3 \qquad 0\langle y\le 1$$

$y=y$ تابع چگالی شرطی $F\,x\Big|y=y=\overset{(x)}{\dfrac{F(x,y)}{Fy(y)}}=\dfrac{\wedge xy}{4y^3}=\dfrac{2x}{y^2}$

$$\int_0^y\frac{2x}{y^2}dx=\frac{x^2}{y^2}\int_0^y-{y^2}\!\!\diagup_{y^2}=17$$

$$P(x\le ./2\Big|6=./5)=\int_0^{./2}fx\Big|y=\overset{(x)dx=}{./5}\int_0^{./2}\frac{2x}{(./5)^2}\quad dx$$

$$=\frac{x2\int_0^{\%2}}{./25}=\frac{\%4}{./25}=4\!\!\diagup_{25}$$

$$P(x\le a\Big|y=y)=\frac{a^2}{y^2}\qquad 0\langle a\langle y$$

$$E(x\Big|y=y)-\int_{-\infty}^{+\infty}\underset{x|y=y}{x.f(x)}\quad dx$$

$$=\int_0^y x.\frac{2^x}{6^2}dx=2\!\!\diagup_{y2}.1\!\!\diagup_3\,x\int_0^y=2\!\!\diagup_3 y$$

$$E(x2\Big|y=y)=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2.Fx\Big|y=y)^{(x)}dx=\int_0^y x^2\,\frac{2x}{62}\,dx$$

$$=\frac{2}{y^2}.1\!\!\diagup_4\,y^4=y^2\!\!\diagup_2$$

$$Var(x\Big|y=y)=E(x^2\Big|y=y)E^2\,(x\Big|y=y)y\,2\!\!\diagup_2-(2\!\!\diagup_3\,y^2)=y\,2\!\!\diagup_{18}$$

$$Var(x\Big|y=./5)=\frac{./25}{18}$$

از اینجا به بعد جز نیست ولی کاملتر است.

$$Fx(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy=\int_x^1\wedge xydy=x(1-x^2)\qquad 0\langle x\langle 1$$

$$p(x\le ./2)=\int_0^{./2}fx(x)dx=\int_0^{./2}4x(1-x^2)dx=4(1\!\!\diagup_2\,x^2-1\!\!\diagup_4\,x^4\int_0^{./2}$$

$$=4(\frac{(./2)^2}{2}-\frac{(./2)^2}{4})=4(\%2-\%1)=\%4\quad\Big]$$

$$E(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} x.fx(x)dx=\int_0^1 x.4x(1-x^2)dx$$

$$=4(1/_3\, x^3-1/_5\, x^3)^1=\frac{8}{15}\ \big]$$

$$E(x^2)=\int_{-\infty}^{+\infty} 4x^2.fx(x)dx=\int_0^1 4x^2.x(1-x^2)dx$$

$$=4(1/_4\, x^4-1/_6\, x6)^1=\frac{8}{14}=1/_3$$

$$E(E(x\big|y=y)=E(2/_3\, y)=\int_0^1 2/_3\, y.fy(y)dy$$

$$=2/_3\int_0^1 y.^4 ydy=\frac{8}{3}.\frac{1}{5}y5\int_0^1=\frac{8}{15}=E(x)\ \big]$$

$$P(x\le a)=\int_0^a f(x)dx=\int_0^a 4x(1-x^2)dx=$$

$$4(\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{4})\int_0^a=2a^2-a^4$$

استقلال متغیرهای تصادفی

اگر y,x متغیرهای تصادفی توام باشند آنگاه x,y مستقل از یکدیگرند اگر و فقط اگر

$$F(x,y)=fx(x).fy(y)$$

مثال) تابع احتمال توام y,x

y/x	-1	0	1	
1	%8	%2	%20	%
2	%12	%18	%30	4 %6
	./2	./3	./5	

x	-1	0	1
$fx(x)$	./2	./3	./5

y	1	2
$fy(y)$	./40	./6

$$f(x,y)=Fx(x).Fy(y)$$

پس y,x مستقل اند

مستقل $y,x\Rightarrow Cov(x.y)=0$

مثال: $f(x,y)=(x,y)=e^{-2x-y/2}$

: تابع احتمال توام y,x

$$Fx(x)\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy=\int_0^\infty e{-2x-y/2}dy=e^{-2x}\int_0^\infty e{-y/2}dy$$

$$= e^{-2x}.\left[-2e^{-6/2}\int_0^{\infty} = 2e^{-2x} \qquad x\rangle 0\right.$$

$$Fy(y)\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dy = \int_0^{\infty} {}^{2x-y/2}dxe - 6/2 \int_0^{\infty} e^{-2x}dx$$

$$= e^{-6/2} = \left[-1/2\, e^{-2}\right]\int_0^{\infty} = 1/2 e^{-6/2} \qquad y\rangle 0$$

$$Fx(x).Fy(y) = 2e^{-2x}.\,1/2\,.e^{-6/2} = e^{-20-6/2} = F(x,y)$$

پس y.x مستقل اند

متغیرهای تصادفی معروف

گسسته

19 متغیر تصادفی دو جمله ای :

تعریف : آزمایش تصادفی که با احتمال مشخص P نتیجه اش پیروزی و با احتمال q=1-f نتیجه اش شکست باشد را آزمایش برنولی می نامیم .

X تعداد پیروزی به دست آمده حاصل از انجام ← شکست

N آزمایش تصادفی مستقل ← پیروزی

X را متغیر تصادفی دو جمله ای با پارامتر های n, p می نامیم

$x \sim \beta in(n,p)$

x تابع احتمال: $P(x=a) = f(a) = (\underset{a}{n})p^{9}q^{n-a}$

$a = 0,1,2,...,$

x تابع توزیع:: $Fx(c) = P(x \le c) = \sum_{\forall a \le c} f(a) =$ جدول

$$\begin{cases} M = E(x) = \sum\limits_{\forall x} x.f(x) = \sum\limits_{x=0}^{x} x.(\overset{n}{x})p^{x}q^{n-x} = np \\ E(x^2) = \sum\limits_{\forall x} x^2.f(x) = \sum\limits_{x=0}^{x} x^2(\overset{n}{x})p^{x}q^{n-x} = npq + n^2p^2 \\ \partial^2 = Var(x) = E(X^2).E^2(x) = (npq + n^2p^2) - (np)^2 = npq \end{cases}$$

مثال: اگر احتمال برخورد هر شلیک به هدف ./6فرض شود و بیست شلیک مستقلاً انجام شود مطلوبست .

الف) حد اکثر 6 شلیک به هدف اثابت کند؟

ب)دقیقاً 12 شلیک به هدف اثابت کند؟

ج) بیش از 10 شلیک به هدف اثابت کند؟

د) همه شلیک ها برخورد کند ؟

X تعداد برخورد در 20 شلیک

$$\begin{cases} P = ./\,6 \\ n = 20 \end{cases}$$

$x \sim \beta in(./\,6,20)$

الف) $P(x \leq 6) = \sum_{x=0}^{20} \binom{}{x}(16)^{x}(./\,4)^{20-x} = ./\,0065 \quad \Big]$

ب) $P(x \leq 12) - P(x \leq 11) = ./\,5841 - ./\,4044 = ./\,1797 \Big]$

$P(x\rangle 17) = -1p(x \leq 17) = 1 - ./\,9964 = ./\,0036$

ج) $P(x\rangle 10) = 1 - p(x \leq 10) = 1 - ./\,2447 = ./\,7663 \quad \Big]$

د) $P(x = 20) = \binom{20}{20}(./\,6)^{20}(./\,4) = (./\,6)^{20} = ./\,000 \Big]$

متغییر تصادفی هندسی

تعریف : آزمایش تصادفی که با احتمال مشخص p نتیجه اش پیروزی با احتمال q=1-f نتیجه اش شکست باشد آزمایش بر نویسی نیاییم

X= تعداد آزمایش لازم تا رسیدن به اولین پیروزی

X=1.2.3....

X ها متغییر تصادفی هندسی با پارمترهای p نیایم

$X=C_R(P)$

تابع احتمال X $P(X=X) = F(N) = Q_{X-1}, P$

X=1.2.3. ....

تابع توزیع X $F_X(C) = P(X_{12}\ 2) = 4^{C}_{X=1Q^{X-1}}\ ,P$

$=P[1+q+q_2 + \ldots\ q2-1]$ $P(X6C) = q^C$

$=P(\frac{1-PC}{1-q}) = 1-q^3$

$M=E(X)=\sum_{7X} X.F(X) = \sum_{X=0}^{M} X.q^{X-1} P = \frac{1}{P}$

$E=(X^2) = \sum_{7N} K^2.F(N) = 4X^2 q^{X-1}.P = \frac{9-1}{P^2}$

$$\Sigma^2 = VaV(X) = E(X^2) - E^2(X) = \frac{q+1}{p^2} - \left(\frac{1^2}{2}\right) = \frac{9}{p^2}$$

P(X=a+B) 1X>b)=P(X=0) هندسی

P(X=8/X>3) = P(X=d) فقدان حافظه

مثال احتمال موفقیت در کنکور0/25 است اگر شخصی مستقلا وپی در پی در کنکور شرکت کند احتمال آنکه در هفتمین آزمون برای اولین بار موفق شود ؟

X= نظر ارتکس را آزمایش تا اولین قبولی

P=0/25

$E(X) = \frac{1}{P} = \frac{1}{0/25} = 4$

الف $P(X=7) = q^6 . P = (0/25)(0/75)_6$

ب $P(X_1 27) = 1 - q_4 = 1 - (0/75)_7$

ج $P(X>5) = 9_5 = (0/75)_5$

متغییر تصادفی دو جمله ای منفی

X= تعداد دفعات تکرار آزمایش برنولی (مستقل)

تا مشاهده، این پیروزی

X متغییر تصادفی دو جمله ای منفی با پارمترهای F,V

R=1 همان متغیر تصادفی هندسی است .

$F(X) = P(X=X) = (\frac{N-1}{V-1})^{P^V} \; q^{N-N}$

NV,V+1,V+2 , -X

پ–ش– – ش پ– پ ش –– ش پ ش – ش ش ش پ ش – ش ش ش

X_4 X_3 X_2 X_1 هندسی

$X = X_1$ TNCT - TCR

$VAV(X) = V(0 V_2) + V(X_2) + \ldots + V(X_2)$

$= \frac{9}{P^2} + \frac{9}{P^2} + \ldots\ldots \frac{9}{P^2} + \frac{9}{P^2}$

X تابع توزیع $FX(C) = P(X_1 \; 2\,C) = P(X_1 \; 2C) = \sum_{N=7}^{C} \left[\frac{N-1}{R-1}\right] P^V \; q^{X-V}$

مثال) احتمال موفقیت آمیز بدون حفر چاه نفت در یک منطقه برابر 0/3 است مطلوب احتمال آنکه سومین چاه نفت در حداکثر دهمین حفاری بدست بیاید ؟

X= نظر از حفاری تا رسیدن به 3 پیروزی

$V=3 \quad P=0/3$

$$P(X_1\ 2/0) = \sum_{N=3}^{10} \left[\frac{N-1}{3-1}\right] P^V\ q^{X-3} = \sum_{X-3}^{10} \left(\frac{N-1}{2}\right)(0/3)3)\binom{0}{7} N-3$$

$$P(X\text{-}10) = \left(\frac{10-1}{3-1}\right)(0/3)_3\ (0/7)_7 = (9/2)\ (0/3)_3\ (0/70)_7$$

$$M = E(N) = \frac{N}{P} = \frac{3}{0/3} = 10$$

$$\vartheta^2 = \mathrm{VAV}(X) = \frac{V}{P9} = \frac{3X0/7}{(0.3)2} = \frac{21}{0/9} = \frac{70}{3} = 23/3\ \ \vartheta = \sqrt{23/3}$$

$$\vartheta = \sqrt{23/6} = 4/6 \qquad CIV = \frac{\sigma}{M} = \frac{4/6}{10} = 0/46$$

متغییر تصادفی پواسن

$$F(N) = P(X = X) = \frac{E^{-\gamma\gamma N}}{X^2}$$

X احتمال قابل X=1,2,3,

X تعداد حادثه درین محدوده / مکانی (زمانی)

2λ=e(N)

λ Y = متوسط تعداد حوادث در آن محدود ه

$$E = (n) = \sum_{n=0}^{\infty} k.e^{\gamma}\ \frac{\gamma x}{x1} = \gamma$$

$$E(X^2), \sum_{N=0}^{05} N^2\ E^{-\gamma} . \frac{\gamma N}{N1}$$

$$vaV(X) - E(X^2) - E^2(X) = \gamma(\gamma+1) - \gamma^2 = \gamma$$

X تابع توز یع $F_X = (C) = P(T_2\ 2C) = \sum_{N=0}^{3} e^{-\gamma} \cdot \frac{\gamma^X}{N1}$

مثال) بطور متوسط در هر شبانه روز 1/4 حادثه رخ می دهد :

الف) احتمال آنکه در 24 ساعت آینده حادثه ای رخ می دهد ؟

ب) احتمال آنکه حداکثر 4 حادثه در شبانه روز آینده رخ بدهد ؟

ج- احتمال آنکه در 48 ساعت آینده دقیقا 3 حادثه رخ ممی دهد ؟

X = تعداد حادثه میانه شبانه روز الف ($P(X=0) = E^{-\gamma - \frac{1}{4} = 0/247}$

ب ($E^{-1/4}\,[\frac{1/4}{01} + \frac{1/4}{11} \pm - - - + (\frac{\frac{1}{4}}{4})]$

مثال 13/5٪ از صفحات یک کتاب غلط چاپی برا رد اگر یک صفحه از این کتاب به تصادف انتخاب شود احتمال آنکه در این صفحه حداکثر سه غلط چاپی وجود داشته باشد ؟

ب) اگر 15 صفحه از این کتاب به تصادف انتخاب شود احتمال آنکه فقط در 4 صفحه هر صفحه بیش از 3 غلط داشته باشد ؟

F(X=0) = 0/135

$$\frac{e^{-\gamma \cdot \gamma}}{.1} = 0/135$$

$$P(X_1^2 3) = ?$$

$$P(X_1 23) = \sum_{0}^{3} E^{-2} \cdot \frac{2^X}{X1}$$

$$E^{-\gamma} = \frac{0}{135} \qquad \gamma = LN\left[\frac{0}{135}\right]$$

Λ=

N		2
	2	
3	0/8571	

در هر 2 ثانیه یک نفر درد یا مقدار میشود

ب)

$$P(X > 3) - 1 - P(X(3) = 1 - \frac{0}{8751}$$

احتمال پیروزی

$$= 0/1429$$

$P(Y=Y) = (N_Y)\ {}_P Y\ {}_Q N\text{-}Y$ N=15

تعداد پیروزی

دو جمله ای

N=15

y= تعداد پیروزی

$P(y=y) = (n_y) p_y q_{n-y}$

P=0/1429

جواب 11 :

$p(y = 4) = \left(\frac{15}{4}\right)(0/1429)4(0/8571)$

صفحات بررسی شده تا اولین صفحه ای که بیش از سه غلط است می شود احتمال آنکه بیش از 10 صفحه بررسی شود (ج)

$p(y > 101 = q^{10} = (0/8571)10$

نکته : تعریف دو جمله پا برداشتن

اگر $\begin{cases} n \\ \mathrm{p} \end{cases}$ آنگاه :

دو جمله ای

$\binom{n}{\mathrm{x}} p^{\mathrm{x}} \mathrm{q}^{\mathrm{n-x}} = e^{\gamma} \frac{\gamma^{x}}{n1}$

$\begin{cases} \mathrm{n} = 0 \\ \mathrm{p} = \end{cases}$ λ=np

مثال) احتمال فوت یک نفر نیمه عمراست قبل از سرو سیبد یم 0/001 است . اگرهزار نفراز این افراد به تصادف انتخاب کنیم احتمال آنکه بیش از یک نفرشان قبل از سر رسید فوت کند چقدر است ؟

تعداد فوت در بین 1000نفر =x

0/001=f

1000=n

$p(x > 1) - 1 - p(x, < 1)$

$$= 1 - \sum_{x=0}^{1} (1000x)(0/001)x\ (0/999)1000 - x$$

$$= 1 - \sum_{x=0}^{1} e^{\,} - \gamma\ \ \frac{\gamma^n}{n1} = 1 - \sum_{n=0}^{1} e^{-1} . \frac{1^n}{\text{n}}$$

=1-0/7358=0/2642]

مثال اگر یک مکان دارای دو نوع مشتری باشد بطوریکه که 30 در صد از مشتریانش از نوع اول و به طور متوسط درهر روز 20 مشتری مراجعه کند دراین صورت مطلوبیت احتمال آنکه در یک روز 3 مشتری نوع یک و 7 مشتری نوع دو مراجعه کنند ؟

5 در صد محصولات یک شرکت معیوب است اگر این محصولات در بسته های صد تایی عرضه شود و سوال میشود شرط کند که اگر بیش از یک معیوب دربسته ببیند آن بسته را مسترد خواهد کرد احتمال مرجوع شدن یک بسته چقدر است ؟

جال اگر مشتری 10 بسته خریداری کرده باشد احتمنال آنکه فقط یکی از آنها را مرجوع کند چقدر است ؟

تعداد خرابی x=100

F=0/05

N=100

$$P(X > 1) = 1 - P(X \leq 1)$$

$$= 1 - \sum_{X=0}^{1} \binom{(100)}{X}\ (0/05\ )X\ (0/95)100 - X$$

$$= 1 - \sum_{N=0}^{1} E^{-\gamma} = \frac{\gamma}{N1} = 1 - \sum_{X=0}^{1} E - 1 . \frac{1}{X1}$$

1-X=1-0/04.4=0/9586

ب) $\begin{cases} N = 1 \\ Y = \\ F = 0/9586 \end{cases}$

$$P(y = g) = \binom{n}{y} = p^y\, q^{n-y}$$

$$P(y = 1) = \binom{10}{1}(0/9586)1(0/0404)9$$

توزیع یکنواخت گسسته

توزیع فوق هندسی

خودمان ازکتاب بخوانیم .

متغییر های تصادفی پیوسته :

یکنواخت

نمائی

گاما

نرمال

اگر x یک متغییر تصادفی پیوسته باشد آنگاه

تابع چگالی x

$$f(x) \begin{cases} f(x \geq . \\ \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dn = 1 \end{cases}$$

$$p(a \leq x \leq b\,) = \int_a^b f(x)dx$$

$$f(x) = p(x \leq a) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$$

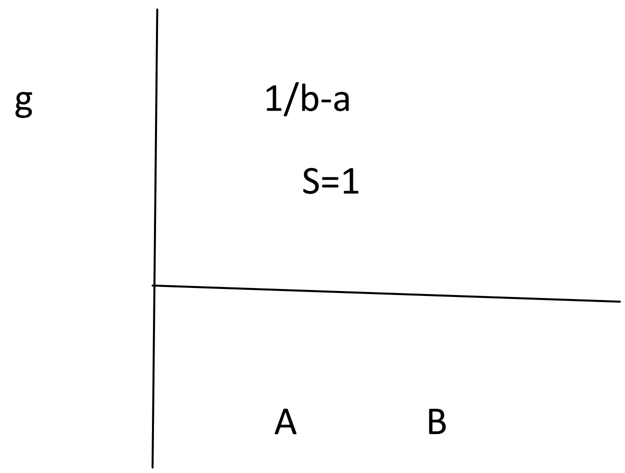
$$E(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx$$

$$E(x^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx$$

1 –متغییر تصادفی یکنواخت

X متغییر تصادفی یکنواخت درفاصله (a,b) 0/1 است هر گاه

$$x \sim v(a,b) f(x) = \int_{0}^{\frac{1}{b-a}} a \leq n \leq b \text{ سایر نقاط}$$



$$p(c \leq x \leq d) = \int_{c}^{d} fx = \frac{d-e}{b-a} = \frac{\text{فاصله مطلوب}}{\text{کل فاصله}}$$

$$= (n) = \int_{a}^{b} n.f(n)dn = \int_{a}^{b} \frac{n}{b-a}\,dx = \frac{1}{2(b-a)} x^2 \Big]_{a}^{b}$$

$$= \frac{a+b}{2}$$

$$E\,(x^2) = \int_x^b x^2 \cdot \frac{1}{\mathrm{b-a}}\,\mathrm{dx} = \frac{a^2 + b^2\,ab}{3}$$

$$vav(n) = E(n^2\,)\text{-}\ E(n) = \frac{b-\ a^2}{12}$$

مثال طول نوعی کالا دارای توزیع یکنواخت در فاصلهٔ 20 در بسیاری طول عمر یک کالا از این نوع کمتر از دو ساعت با میانگینش اختلاف داشته باشد ؟

= x~ v (0.20)

$$m = e(n) = \frac{0+20}{2} = 10$$

$$p(1x - m1 < 2) = p(8 \ < x < 12\,)$$

$$\frac{\text{فاصله مطلوب}}{\text{کل فاصله}} = \frac{12-8}{20-0} = \frac{4}{20} = 0/2$$

مثال) اگر (10 و 2) ~ x مطلوب

$$p(\,x^2\ - 12\,x + 35 >) = > p\,(\,n-6\,)2\ -1 > 1$$

$$= p\,(x-6\,)2\ > 1 = 1 - p\,(-1\,2\,x - 6 < 1\,)$$

$$= p(\,5 < x27\,) = \frac{7-5}{10-2} = \frac{2}{8} = 0/25]$$

مثال اگر (1و0) 7 ~ x

و

y ~ V(0.1)

(y,x مستطیل) مطلوب

$$p(x+y\ 21)=\iint f\ (x,y)dy\,dx\,,\frac{\text{فاصله مطلوب}}{\text{کل فاصله}}=1/_2]\ \mathbf{p(x+y\leq 1)=?}$$

متغییر تصادفی نمائی

$x{\sim}emp\ (\boldsymbol{\gamma})$

X نیز تصادفی پیوست نمائی است هر گاه

$$f(n)=Ne^{-\gamma x}$$

$$x\geq :(\gamma >.)$$

$$\int_0^\infty f(x)dx=\int_0^\infty \gamma e^{-\gamma x}\ dx=-e^{-\gamma x}\,y^\infty=1$$

$$f(x\leq a)=fn(a)=\int_0^a f(x)dn\,.1-e^{-a\gamma}$$

$$f(x>a)=e^{-a\gamma}$$

$$f(a\leq x\leq b)=\left(1-e^{-b\gamma}\right)-\left(1-e^{-a\gamma}\right)=e^{-a\gamma-b\gamma}$$

$$E(x-0)\infty\ \ x.he\ \ -hxd\,n=\frac{1}{\gamma}$$

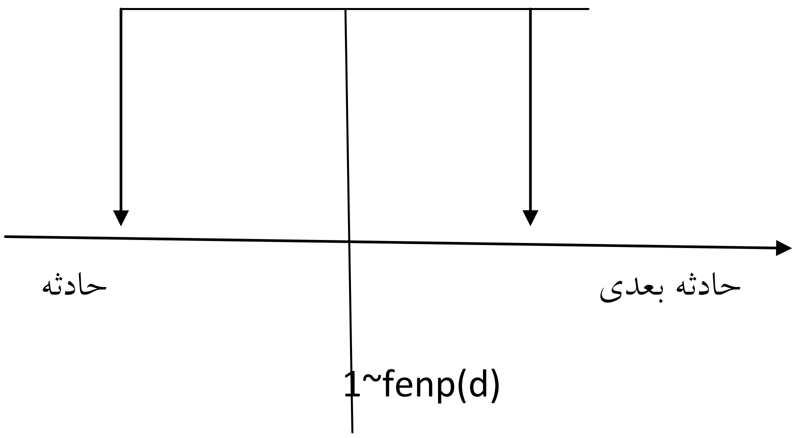
$$vav(x)=E(x^2)-\ E^2(x)=\frac{1}{\gamma^2}$$

نکته :

1 -اگر در توزیع پواسن با پارامتر در یک حادثه رخ بدهد

آ=مدت زمان انتظار تا رخ دادن حادثه بعدی

آ دارای توزیع بزرگی است .



2 –در بین متغییر های تصادفی پیوسته، نقطه نمائی دارای خاصیت فقدان حافظه است .

$$p\left(=> b + \frac{a}{x} > a\right) = p(x > b)$$

$$p\left(x > \frac{3}{x} > 1.\right) = p(x > 3)$$

$$3) p(x \le b) = 1 - e^{-b\gamma}$$

$$= p(x \le b) => b = ?$$

$$= 1 - e^{-b\gamma} => b = \frac{-1}{\gamma}\ln(1 - x)$$

مثال) مدت زمانی که لازم است تا یک ماشین تعمیر شود دارای توزیع نمائی با میانگین سه ساعت بازی :

الف) احتمال آنکه یک تعمیر بیش از سه ساعت طول بکشد؟

ب) اگر یک ساعت از زمان شروع این تعمیر گذشته باشد و هنوز تعمیر ادامه داشته باشد احتمال آنکه تعمیر بیش از چهار ساعت طول بکشد چقدر است ؟

$$f(x \le a) = fx\,(a) = \int_0^a f(x)dx = 1 - e^{-a\gamma}$$

$$f(x \ge a) = e^{-a\gamma}$$

$$f(a \le x \le b) = \left(1 - e^{-b\gamma}\ \right) - \ (1 - e^{-a\gamma}\,) = \ e^{-a\gamma} - e^{b\gamma}$$

$$m = E(x)$$

نمائی x

$$E\,(x) = 3 = \frac{1}{\gamma} => \quad >= {}^{1}/_{3}$$

$$p\sqrt{x} > 3) = \ e^{-3\gamma} = e^{-3{}^{1}/_{3}} \ = e^{-1} = 0/37$$

ب) $p\left(n > \frac{4}{x} > 1\right) = p(x > 3\,) = \ e^{-3\gamma} = \ e^{1} = 0/37)$

مثال) اگر گنجایش مخازن بنزین 5/000/000 لیتر باشد احتمال آنکه در یک روز دچار کمبود بنزین شویم چقدر است ؟

ب- میانه مصرف روزانه بنزین چطور است ؟

ج- دهک اول مصرف بنزین چقدر است ؟

د- احتمال آنکه مجموع مصرف مورد مستقل کمتر از 6/000/000 شود چقدر است ؟

مصرف روزانه بنزین $= X, \lambda = {}^{1}/_{3}$

الف)

$$p(\ n > 5) = \ e^{-5}\ \gamma = e^{-5/3} = e^{-1/67}$$

$$p(\ x \leq x) = \frac{0}{5} => m = \ {}^{-1}/_{m} \ln(\ 1 - 0/5)$$

$$= \ m = \ -3\ln(0/5) = 3\ lm\ (2)$$

$$p(x \leq d1\ ) = 0/1 => d_1 = {}^{-1}/_{ln}\ (\ 1 - 0/1) = \ -3\ln(0/9)$$

$$p(\ n + \ \ y < 6)$$

$$\iint_A \ f(\ x + 2)\ dydx = \iint f(\ n\ ).f(\ y)\ dy\ dx = \iint_a^8 pp.\ \gamma_{dx}^{-\gamma y}$$

$$= \int_0^6 \gamma e^{\ -dx}\ (1 - e^{-\gamma}\ (6 - x))\ d1 = \ -e^{-\gamma x}\ [-e^{-\gamma y}]6 - n$$

$$= \int_0^6 \gamma e^{\ -dx}\ (1 - e^{-\gamma}\ (6 - x))\ d1 = \ -e^{-\gamma x}\ ]6 - (\gamma e^{-6\gamma}\ [x]6$$

$$= 1 - e^{-6\gamma} - 6e^{\ -6\gamma} = 1 - ve^{-y} = 1 - ve^{-1/3}$$

متغییر تصادفی گاما

متغیر تصادفی پیوسته x دارای توزیع گاما با پارمترهای x,d c1

$$m(a) = \int_0^{\infty} x \ \ x - 1\gamma^{x} \ - e^{-\gamma x}\, dx \ \geq .$$

$$f(n) - x^{d-1}\, \gamma^{x} . e^{-\gamma x}$$

$$\Gamma \ (0) \ldots\ldots \ \Gamma(1/_2) = \sqrt{\mathrm{n}}$$

$$\Gamma \ (\mathrm{x}) = (\mathrm{x} - 1) \ \Gamma(\mathrm{x} - 1)$$

$$\text{عدد طبيعي} \ = x\, \pi\, (x) = (x - 1)!$$

$$\begin{cases} E(x) = \dfrac{x}{\lambda} \\ \mathrm{vav}\ (\ \mathrm{x}) = \dfrac{\mathrm{x}}{\lambda} \end{cases}$$

X_1 و x_2 x_n نمائی مستقل با پارامتر λ باشد .

$Y=x_1 + n_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + x_n$

دارای توزیع گاما با پارامترهای n,λ

D=n

در مثال قبل

$$p\ (x + y \leq 4\ ) = \int_0^6 x^{2-1} . (1/_3)2\ . e^{-n/_3} \ \ dx$$

$$= \int_0^6 \frac{\mathrm{x}. \mathrm{e}^{-\mathrm{x}/3}}{3^2.1}\, dx \ = 1/_3 \ \int_0^6 n e^{-x/_3}\, dx \ = 1 - ve^{\ -1/_3}$$

اگر در توزیع گاما تعداد x=1/2 و x=n/2 در نظر گرفته شود آنگاه آنرا توزیع با

x درجه ان را می نامیم

$$x = x^2 (n)$$

$$E(n) = \frac{2}{x} = {}^{n}/_{2} \cdot \frac{1}{{}^{1}/_{2}} = n$$

$$vav (n) = {}^{x}/_{-\lambda^2} = \sqrt[n]{2 - {}^{1}/_{2^2}} = 2n$$

مهم مثال) اگر میزان تغییرات قیمت دارای توزیع کافی دو با 20 درجه آزادی با است

مطلوبیت احتمال انکه تغییرات قیمت کمتر از 19/3 با مثال ؟

$x =$ تغییرات قیمت

$$f(x) = x^{\,n/2}\ \ e^{-x/2}\, e^{-x/2}$$

N=20

$$x = {}^{x}/_{2} = 10$$

$$p\ (x \leq 19/3) = \int_0^{19/3} \frac{x^9 . (4)10\, e^{-x/2}}{9}\ dx$$

جدول = 0/5

متغییر تصادفی نرمال

متغییر تصادفی x دارای توزیع نرمال با میانگین m واریانس x^2 است

هر گاه

تابع چگالی

$$f(x) \quad \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-1/2} \frac{(x-m)2}{\sigma^2}$$

$$\begin{cases} E(n) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \,.\, f(N) d_x \\ E(n^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \,.\, fm) dx = m^2 + \sigma^2 \\ vav\,(x) = E(x^2) - E^2(x) = \delta^2 \end{cases} = m$$

حالت خاص

اگر $m=0$ و $\delta = 1$

نرمال استاندارد «z»

$z \sim n(0,1)$

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2x}} e^{-1/2} z^2$$

جدول =

$$\varphi(c) = p\,(z \leq c) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(z)\, dz = \int_{-\infty}^{c} \frac{1}{\sqrt{2n}} e^{-1/2z\,2}$$

$$p(\, z \leq 2/33) = 1 - (z \leq 2/33)$$

$1 - 0/990$

$$p(z \leq 1 - 96) = 0/9750$$

$$p(z \leq 1/2) = 0/849$$

قضیه : اگر x نرمال با میانگین m واریانس δ^2 باشد .

آنگاه

$$\frac{x-n}{\delta} = z$$

$$p(x \leq a) = p\,(\frac{x-m}{\delta} \leq \frac{a-n}{\delta}$$

$$p(z \leq x) = 0/9$$

X=1/28

$$p(z \leq x) = 0/2$$

X=-0/84

فوریه

$$\int_{e}^{\infty} -x^2\,dx = \sqrt{2/6}$$

جدا از درس

$$\int_{e}^{\infty} -x^2\,dx =$$

جواب ندارد

مثال m=20 نرمال x

δ =5

$$p)\ \ x \leq 24/5) = p(z \leq \frac{\frac{24}{5}-20}{5}) \ = p(\ z \leq 0/9) = 0/8159$$

$$p\left(x > \frac{17}{25}\right) = p(z \geq \frac{\frac{17}{25}-20}{5})=$$

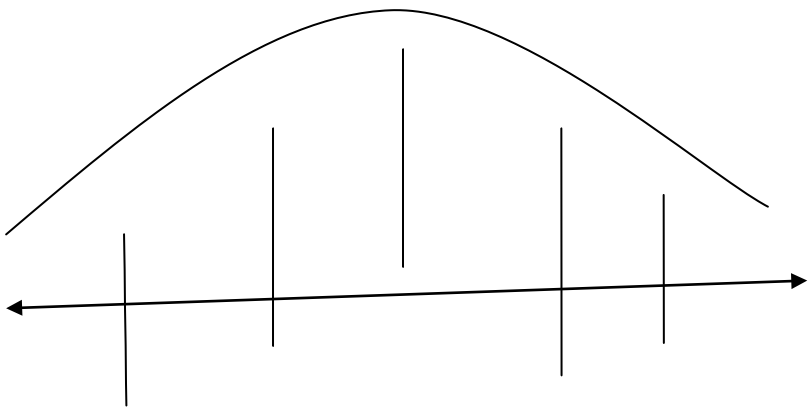
$$p\left(z \geq -\frac{-2/75}{5}\right)p(z \geq -0/55) = 1 - p(z \leq -0/55)$$

$$= 1 - 0/2912 = 0/7088 = p(z \leq 0/55) = 0/7088]$$

$$p(19/9 < x \leq 23/2) = p(\frac{19/9-20}{5} \leq z \leq \frac{23/2-20}{5})$$

$$= p(-0/02 \leq z \leq 0/64) = 0/7389 - 0/4920$$

Ip نرمال



نکته 1:

هرترکیب خطی از چند متغییر تصادفی نرمال ، همچنان دارای توزیع نرمال خواهد بود.

$$\begin{cases} x_1 \sim n(m_{1,}\delta_1^2 \\ x_1 \sim n(m_{2,}\delta_2^2 \\ x_3 \sim n(m_{3,}\delta_3^2 \\ x \ \sim n(m_n\ \delta_n^2 \end{cases}$$

$$y = b2\ b_1^x + b_1 x_2 + \ b_n x_n$$

$$= y \sim n\ (my\,, \delta_y^2$$

$$p(y \le a) = p(z \le \frac{a - ny}{\delta y}$$

$$my = ey = b + b_1 \ \mathrm{m}_2 + \mathrm{b}_3\mathrm{m}_3 + \cdots . . b_n \, \mathrm{m}_n = b + \sum_{i=1}^{n} b_i \, mi$$

$$\delta_y^2 = var\,(y) = 0 + b_1^2 + b_2^1 \, \delta_{2+\cdots . . b_n^2}^2 \, \delta_n^2 + \ 2b1\, b2 \, cov\,(\,x_1, x_{2)}$$

$$+ \cdots \ldots . + 2\, b_n \ b_{n-1} \, cov\,(\ xn + xn - 1$$

مثال کتاب

مستقل ($12–4$)$x_1 \sim n$ نمودار درس ریاضی 4 واحدی

(2و14) $x_2 \sim n$ = نمودار درس آمار 3 واحدی

(2و15) $x_3 \sim n$ = نمودار درس زبان 3 واحدی

اگر یک دانشجو دروس فوق را داشته باشد احتمال انکه معدلش کمتر از 12 شود چقدر است ؟

معدل =

$$y = \frac{4\,x_1 \; 2\,x_2 + 3\,x_3}{10} = y = 0/4x_1 + 0/3\;x_2 + \ 0/3\;x_3$$

نکته 2

تقریب دو جمله ای با نرمال

تعداد پیروزی = x

پیروزی p=p

تعداد آزمایش =x

$$p(x=c)=(nc)\,p^{c}\;.q^{n.c}\quad E(\,n)=\lessdot\;np$$

مثال) احتمال خراب بودن یک کلماتی تولیدی 25٪ است اگر بر تصادف 200 قطعه از این محصولات انتخاب شود احتمال آنکه حداکثر 44 معیوب مشاهده شود چقدر است ؟

$$\begin{cases} n=2 \\ \mathrm{p}=0/25 \end{cases}\qquad np=200\times 0/25=50$$

$$npg=200\times 0/25=37/5$$

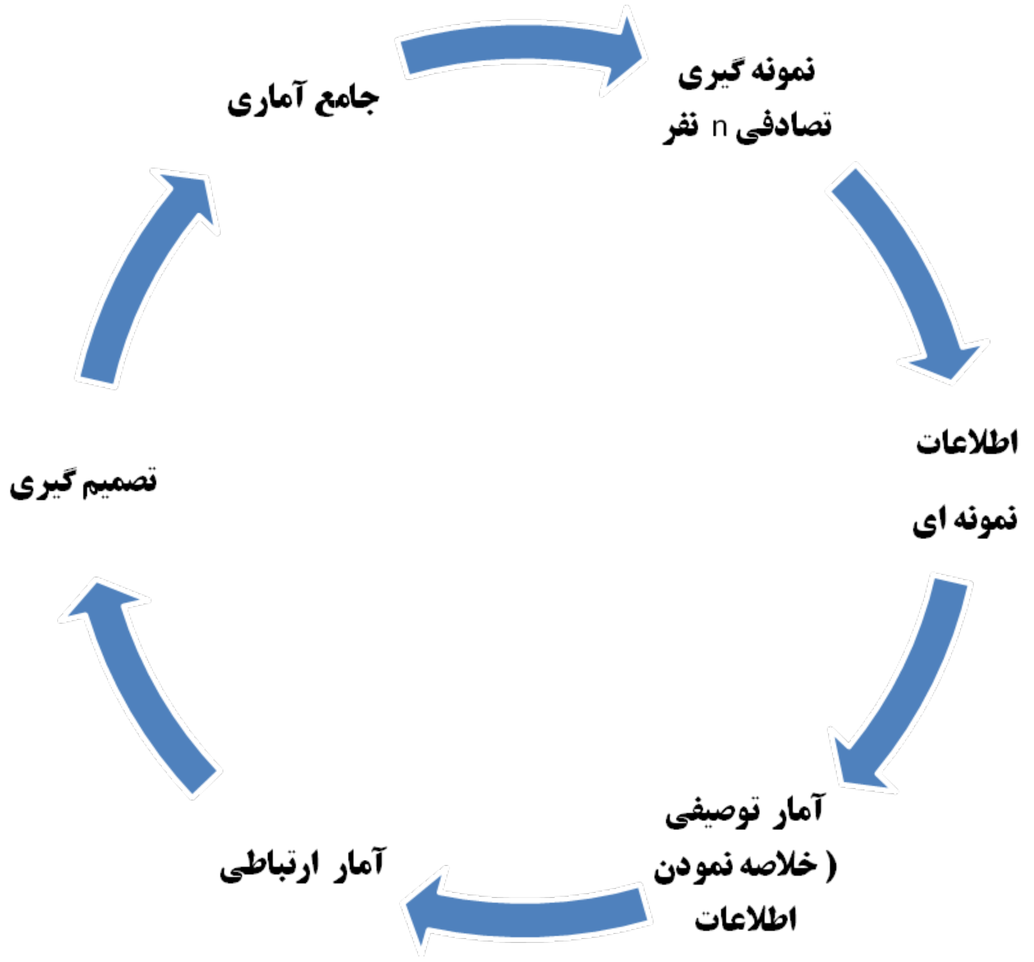
تعداد معیوب نمونه

$$p/x\leq 44)=\sum_{x=0}^{44}\binom{200}{x}\,(0/25)2(0/75)\quad ^{200-x}$$

$$\cong p(z\leq\frac{44/5-np}{\sqrt{npq}}=p(\frac{z\leq 44/5-np}{\sqrt{xpq-37/5}}$$

P(z≤-0/9)=0/1841]

آمار



تجزیه و تحلیل اطلاعات

عبارت بالائیست	چهار بالاست	
ضرر	سود	استخراج
جلوگيري از ضرر	از راست بالا مي شود	عدم استخراج

$\downarrow x = p$ (معیار بالا نباشد و استخراج کنیم)   1% 2/5% (0/5)10%

$\uparrow b = p$ (معیار بالا نباشد و استخراج نکنیم)

تخمین (بر آورد)

فاصله اطمینان

آیکون فرض آماری

M میانگین مجهول جامد

δ^2 واریانس مجهول جامه

P نرخ (مثبت) مجهول در جامه

الف بر آورد نقطه ای

اگر x_1 , x_2..... , x_x مشاهدات تصادفی از یک جامعه باشند .

اگر x_i هم اندیشی باشند

اگر x_i مداوا وزن ارزشی w_iباشد

$$m = \begin{cases} x = \dfrac{\sum xi}{\epsilon} \\ xw = \dfrac{\sum^{\Delta} wi\, ni}{\sum_{i=0}^{n} wi} \\ xc = \sqrt[n]{x_1 x2 \ldots \ldots xn} \end{cases}$$

اگر x_1 نرخ یا مثبت یا در صد باشند

اگر x_i ها هم ارزشی نباشند ولی ارزشها بیان نشده باشند

$$xh = \frac{n}{} \sum_{i=1}^{n} {}^{1}/_{xi}$$

$$\frac{\delta\, 2 \text{ برآورد} = \delta^{\Delta} = \sum_{i=0}^{n}(n_i = n)\, 2}{n-1} = -s^2$$

$$x_i \begin{cases} 1 & \text{تخفیف} \\ 0 & \text{شکست} \end{cases}$$

بر آورد p دقت شود که

بر آورد P

مثال) نرخ تقدم یک کالا

1/2 1/1 1/3 1/25 1/4

u) نرخ تورم متوسط = $\sqrt[5]{1/2 \times 1/1 \times 1/3} \times 1/25 \times 1/4$

مثال) رکورد های یک درونی درصد بهتر بصورت زیر گزارش شده است .

10/5 11 10/7 11/2 10/3

متوسط کروزونی = $\frac{5}{\frac{1}{10/5}+\frac{1}{11}+\frac{1}{10/7}+\frac{1}{11/2}+\frac{1}{10/3}}$

مثال x_i 11 12 13 14 15 16

$$x = \frac{\sum xi}{x} = \frac{11+12+\;\;-0/16}{\text{شش}\, x}$$

بر آورد براین جامع

مثال) اگر در یک گونه 100 تایی از محصولات 93 محصول سالم باشد

برآورد شرح سالم بودن p= $\frac{x}{x} = \frac{93}{100} = 0/93$

ج) آزمون فرنس آماری

1- آزمون فرض برای m (میانگین مجهول):

$\begin{cases} h_i = m \geq m \\ h_1 = m < m \end{cases}$ H رد شود اگر	$\begin{cases} h_i = m \leq m \\ h_1 = m \geq m \end{cases}$ h رد شود اگر :	$\begin{cases} h_i = m = m \\ h_1 = m = m - \end{cases}$ H رد شود اگر
معلوم $z \leq -x_{1x}$	$z > z_{1-x}$	$1z > z_i - x_2$

δ مجهول nبزرگ $z \leq z1$ $z > \frac{z}{x}$ $z \geq z_1 - {}^2/_2$

مثال) متوسط هزینه تولید یک کالا 10/5 $ بوده است ادعا میشود که روش جدید میانگین هزینه تولید را کاهش می دهد بر این منظور یک نمونه تصادفی هشتایی بر اساس و روش جدید تولید شود در نتیجه میانگین هزینه تولید برابر هشت و انحراف معیار هزینه تولید برابر چهار بدست می آید در سطح خطای 5٪ این ادعا را آزمون کنید ؟

X= 0/5

m- = 10/5

$$\begin{cases} h = m \geq 10/5 \\ h_1 m < 10/5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} n = 8 \\ \mathrm{n} - 8 \\ s = 4 \end{cases}$$

$t \leq - t_1 - x = -2_{0/95} = -1/9$ فرم آزادی n-1=8-l=7

$$t = \frac{x - m}{s/\sqrt{n}} = \frac{8 - 10/5}{4/\sqrt{8}} = \frac{-2/5\sqrt{8}}{4}$$

9/9

مثال) میزان هزینه برق 64 خانواده در یک دوره به تصادف انتخاب شده است میانگین هزینه این خانواده ها 20 هزار تومان با انحراف معیار 2/00 تومان بدست آمده است . آیا می توان پذیرفت که میزان متوسط هزینه از 17/0000 تومان بیشتر شده است ؟

$$\begin{cases} x = 0/05 \\ h = m \leq 17 \\ h = m \geq 17 \end{cases}$$

H رد می شود اگر

$$z \geq z_1 - x = z0/95 = 1/64$$

$$z = \frac{x - m}{\sqrt[5]{n}} = \frac{20 - 17}{2/64} = \frac{8 \times 3}{2} = 12 > 1/64$$

H رد می شود (h پذیرفته می شود)

مثال) در یک کارخانه برای محصولات باید به وزن متوسط 500 گرم تولید شود به تصادف 100 محصول انتخاب و وزن آنها اندازه گیری شده است بنابراین نمونه برابر 503 گرم با انحراف معیار 7 گرم بدست آمده است

ایا می توان پذیرفت که انحنا رعایت نمی شود ؟

X=0/05

H_1=m=500

H_1 : m≠ 500

H رد می شود اگر :

$/z/> z_1 - x/2 = 1/96$

$$z = \frac{x - m\ .}{\sqrt[8]{x}} = \frac{503 - 500}{\sqrt[7]{100}} = \frac{30}{7} = 4/3$$

محصولات دراولین تر از حالات

استاندارد $/z/=4/3> 1/96=>$ h رد می شود

توصیه می شوند یعنی h پذیرفته می شود .

فرض کنید که سهم فروش یک کارخانه در بازار آن محصول برای 1/3 بوده است پس از انجام تبلیغات مایلیم برای نیم که سهم فروش افزایش یافته است یا خیر؟ به صورت تصادفی 72 محصول از این نوع که بهفروش رسیده است را بررسی می کنیم مشاهده می شود که 30 عدد از آنها متعلق به آن شرکت است در حدو x=5% تصمیم گیری کنید ؟

$$\begin{cases} h - p \leq 1/2 \\ h_1 = p > 1/2 \end{cases}$$

p= نرخ فروش (سهم بازار) بعد از تبلیغات

X=0/05

N=2

$$z = \frac{x - np}{\sqrt{np.(1-p)}} = \frac{30 - 72x1/3}{\sqrt{72 \times 1/3 \times 2/3}}$$

N=30

$$= \frac{30 - 24}{4} = \frac{6}{4} = 1/5$$

پذیرش $h = > x\ h_1$ و افزایش سهم بازار موثر نبوده است .

همبستگی دو متغیر کمی پیوسته

اگر x یک متغییر مستقل و Y یک متغیر وابسته به x باشد که

[فرض کنیم] $y - f(x) = a + bx$ (یعنی رابطه خطی باشد)

1 -آیا رابطه بین x,y خطی است ؟

2 -اگر رابطه خطی است آن را بیابید ؟

$\begin{cases} a = ? \\ b = ? \end{cases}$ - 3

X	x_1	x_2	…… x_n
Y	y_1	y_2	…… yn

تعریف : ضریب همبستگی خطی پیرامون

$$r = \frac{\sum_{i=0}^{n}(xi - x)(yi - y)}{\sqrt{\sum(xi - x)2 . \sum(yi - y2)}} = \frac{sxy}{\sqrt{s^2 - s^2 y}} = \frac{sxy}{sx . sy}$$

$-1 \leq r \leq 1$

اگر

$$t_{1-x/2}\ (n-2)\ \leq\ \frac{\sqrt{n - 2 \times 1r1}}{\sqrt{1 - r^2}}$$

آنگاه رابطه خطی بین y,x مورد تایید است

آزمون فرض برای واریانس مجهول

$\begin{cases} h. = \delta^2 = \delta^2 \\ h1 = \delta^2 \neq \delta^2 \end{cases}$	$\begin{cases} h. = \delta^2 \geq \delta^2 \\ h1 = \delta^2 \leq \delta^2 \end{cases}$	$\begin{cases} h. = \delta^2 \leq \delta^2 \\ h. = \delta^2 \leq \delta^2 \end{cases}$
H رد مي شود اگر	h رد مي شود اگر	h رد مي شود اگر
$u \leq x^2\ x/2$ & $u > x^2 - z/2$	$v > x^2\ 1\text{-}x$	$u \leq x^2\ x$

n-1 درجه آزادی

آمار و آزمون : $U = (n-1)s^2$

مثال) وزن 20 قطعه از محصولات یک کارخانه انتخاب شده و واریانس وزن این نمونه برابر 100 بدست آمده است مطابق استاندارد نباید انحراف معیار وزن با عدد 9 متفاوت باشد بر اساس این مشاهدات وضعیت این محصول را محاسبه کنید ؟

$$\begin{cases} h. = \delta^2 = 81 \\ h1 = \delta^2 \neq 81 \end{cases}$$

H رد میشود اگر $\dfrac{h \text{ رد} \quad h \text{ پذیرش} \quad h \text{ رد}}{x^2\ x/2 = 8/91 x^2 - x/2 = 32/9}$

1)20

$$s^2 = \frac{\sum(xi-n)2}{n-1} = 100$$

X=0/05

$$u = \frac{(n-1)s^2}{\delta^2} = \frac{(20-1)100}{81} = \frac{19\times 100}{81} = 23/4 *$$

پذیرش h=h رد نمی شود

= از لحاظ استاندارد مشکلی ندارد

آزمون فرض برای p ثبت مجهول

$\begin{cases} h_0\ p = p \\ h_1\ p. \neq p \end{cases}$	$\begin{cases} h_0\ p \geq p \\ h_1\ p. \leq p \end{cases}$	$\begin{cases} h_0\ p \leq p \\ h_1\ p. > p \end{cases}$
H رد می شود اگر	H رد می شود اگر	h رد می شود اگر
1=1≥z/ - x/2	$z < -z_{1-x}$	$z \geq z_{1-x}$

x = تعداد موفقیت در نمونه

$$z = \frac{x-np}{\sqrt{np.(1-p)}}$$

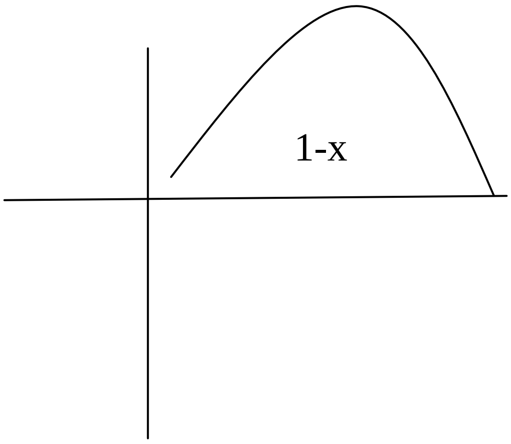
ب) x=64

$$x \pm z_{1-x/_2}\ \sqrt[6]{n}$$
$$x \mp z0/975\sqrt{n}$$
$$170\ \pm 1/96\frac{8}{\sqrt{64}}$$

$$170 \pm 2$$

$$168 \leq m \leq 172$$

فاصله اطمینان (1-x) 100% برای δ^2 واریانس مجهول



$$x^2\ \ (n-1) = \frac{x-1\,s^2}{\delta^2}$$

$$\frac{(n-1)\,s^2}{x^2 1-x/2} \ \leq\ \delta^2\ \leq\ \frac{(n-1\,)s^2}{x^2\,x/2}$$

مثال) برای بررسی دقت طول قطعاتی رخته شد در یک کارخانه یک نمونه تصادفی 25 تایی از محصولات انتخاب شده و طول آنها را اندازه گرفته ایم پس از محاسبه واریانس نمونه برابر 1/06 بدست آمده است یک فاصله اطمینان 90٪ برای واریانس طول قطعات بیابید ؟

$$x = 25 \qquad 90\%\ \left(\frac{25-1-(1/06)}{x^2 0/95} \leq \delta \leq \frac{(25-1\,)(1/06)}{x20/05}\right)$$

$$s^2 = \frac{4(ni-x)2}{n-1} = 1/06$$

$$0/7 \leq \delta^2 \leq 1/84$$

3– فاصله اطمینان 1-x ٪100برای p (نرخ مجهول)

$$p \pm z1 - x/2 \sqrt{p\frac{(1-p)}{x}}$$

که p=x/x

مثال) برای سنجش رضایت مشتریان از یک کالا 100 خریدار به تصادف انتخاب شده برای است اگر 80 نفر از آنها رضایت داشته باشند یک فاصله اطمینان ٪95 برای نرخ رضایت مشتریان بیابید p= x/li = 80/100 =0/8 x=80 x=100

95% <= x=0/05

$$p \pm z_{1-x/2} \sqrt{\frac{\Gamma\,(1-\Gamma)}{x}}$$

$$0/8 \pm z0/975 \sqrt[x]{\frac{\left(\frac{0}{8}\right)(1-0/88}{100}})$$

$$0/8 \pm z0/996 \sqrt[x]{\frac{0/19}{100}})$$

$$0/8 + 1/96 \times 0/04$$

ب) فاصله اطمینان

برای پارامتر مجهول B فاصله (l,v) که p(l<0<u) = 1-x

را در یک فاصله اطمینان 1-x برای 8 می نماییم

$X=0/05 \Leftrightarrow$ بمیزان اطمینان $=95\%$

1 -فاصله اطمینان $(1-x)$ 100% برای 8 میانگین طول

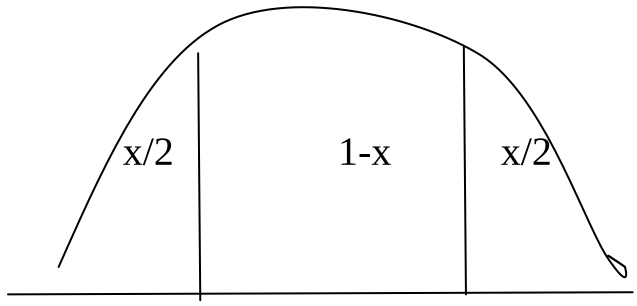
معلوم $\delta \;=> x \pm z_{1-x/2}\, \delta \,/\, \sqrt{n}$

مجهول δ

بزرگ $N => x \pm z_{1-x/2}\, \delta \,/\, \sqrt{n}$

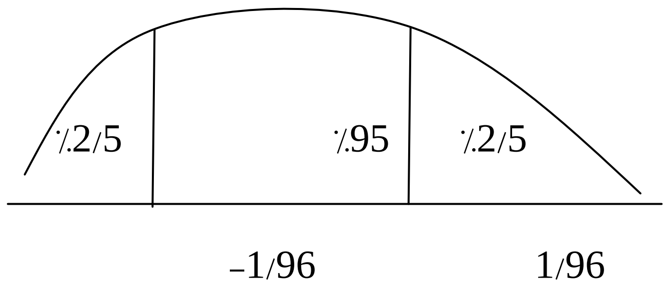
کوچک $n => x \pm z_{1-x/2}\, \delta \,/\, \sqrt{n}$

نرمال استاندارد



Z1-2/2

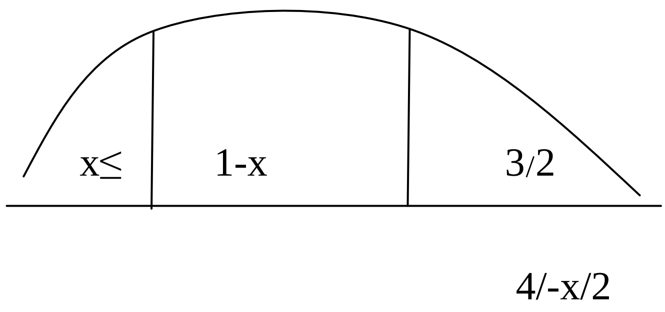
مثال) $-z0/975 = 1/96$ $\qquad$ $x=0/05 => z_1 - x/2$

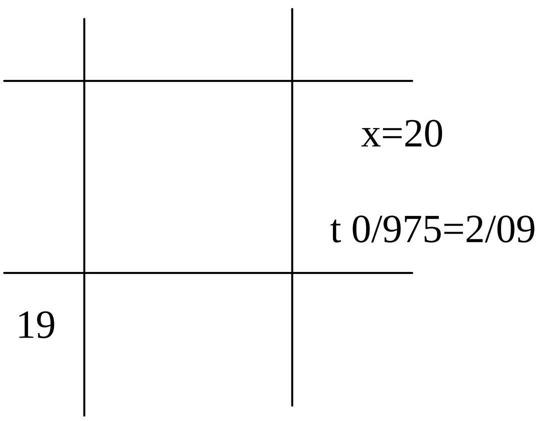


توزیع t استودنت

$$t = \frac{x-m}{\sqrt[6]{x}}$$

پارامتر = درجه آزادی = x-1





مثال) یک نمونه تصادفی از باتر های تولیدی یک کارخانه انتخاب شده است میانگین طول عمر آنها 170 روز با انحراف معیار 8 روز بدست آمده است فاصله اطمینان 95٪ برای میانگین طول عمر بیابید ؟ الف) حجم نمونه برابر 8 باشد ب) جمع نمونه برابر 64 باشد ؟

$$x = \frac{\sum xi}{x} = 170 \qquad \delta^2 = \frac{\sum(x1 - x)2}{n - 1} = 8^2$$

s=8 انحراف معیار نمونه

الف)

$$x \pm t1 - x/2\sqrt[s]{n} \quad 170 \pm 2/36\sqrt{8}.$$
$$x \pm t\, 0/975 \frac{8}{\sqrt{8}} \quad 170 \pm 17$$
$$170 \pm 2/36.\frac{8}{\sqrt{x}} \quad 163 \leq m < 177$$

مقدار دارو و میزان تاثیر آن در ضربان قلب برای 13 نفر بررسی شده است اطلاعات بصورت زیر می باشد .

$$n = 13$$
$$n = \frac{\sum x4}{n} = \frac{26}{13} = 2$$
$$y = \frac{\sum yi}{21} = \frac{198}{13}$$

$$sxy = \sum (xi - x)(gi - y)$$
$$\sum xi\,(l_i - y\,) = \sum yi(xi - x)$$
$$\sum xi\, yi - nxy$$
$$= [0/5 \times\ i + \cdots \ldots .3/5 \times ri\,] - 13(2)(198/13) = 46/5$$

میزانX دارد	متغییر ضربان y
0/5	10
0/75	8
1	12
1/25	12
1/5	14
1/75	12
2	16
2/25	18
3/5	17
2/75	20
3	18
3/25	20
3/5	21
جمع26	198

$$sx^2 = \sum (xi - n)\,2 = \sum_n 2 - nx^{-2}$$

$$= [(0/5)2 + \cdots . + (3/5)2] - 13(2/2 = 11/375)$$

$$= 4(yi - y)2 = 4y2 - \; xy^{-2} = (10^2 \; + \; 8^2 + \; \ldots .(21)\; 2\,) - 13\left(\frac{198}{13}\right)2$$

$$= 3226 - 3009/6 = 216/4]$$

$$r = \frac{\sum(xi - x)(\,yi - y)}{\sqrt{4(\,xi - n)2.\sum(gi - y)2}} = \frac{sxy}{\sqrt{sx2 - sy2}} = \frac{sxy}{sx.sy}$$

$$= \frac{46/5}{\sqrt{(11/375)(216/4)}} = \frac{46/5}{\sqrt{2458/59}} \cong 0/94$$

اگر

$$t(n-2)\{\frac{\sqrt{n-2-1/1}}{\sqrt{1-r^2}}$$

1-x/2

$$\frac{\sqrt{n-2\ \ 11}}{\sqrt{1-r^2}} = \frac{\sqrt{110\,(0/94)}}{\sqrt{1-(0/94)2}} \cong 7$$

T 0/975 (11) = 2/2<7

$$\begin{cases} a = y - ba = \frac{198}{12} - (0/636(r) = 0/545 \\ b = \frac{\text{sxy}}{\text{sx}} = \frac{\sum(\text{xi}-\text{x})(\text{yi}-\text{y})}{\sum(\text{xi}-\text{x}-)2} = \frac{46/5}{11/375} = 0/636 \end{cases}$$

$$y = 0/545 + 0/636x = y \cong 13/6$$