به نام خدا

فصل سوم
متغیر های تصادفی و توابع توزیع

Jalase 1 – sco 1

<u>تعریف متغیر تصادفی</u>

نتایج حاصل از یک آزمایش تصادفی را به صورت های مختلفی می توان بیان نمود . مثلا شیر یا خط را با نمواد 1 و -1 نیز نمایش داد . از آنجا که این اعداد در آزمایش به صورت تصادفی ظاهر می شوند ، می توان آنها را با یک متغیر تصادفی مثل x نمایش داد . با استفاده از متغیر تصافی تفسیر نتایج حاصل از آزمایش های تصادفی ساده تر می شود .

تعریف :

یک متغیر تصادفی ، تابعی است از فضای نمونه به زیر مجموعه ای ناتهی از اعداد حقیقی که آن را با حروف بزرگ مانند X,Y,... نمایش می دهیم .

برای نمایش برد یک متغیر تصادفی یا مجموعه مقادیری که متغیر اختیار می کند ، از حروف کوچک مثل x,y,... استفاده می کنیم .

مثال 1 :

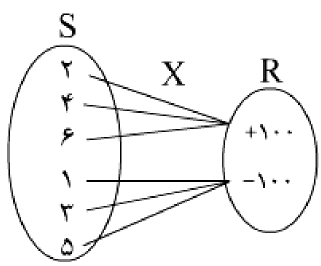
در یک بازی شخصی تاسی را می ریزد ، اگر عدد زوج بیاورد 100 تومان به او می دهیم و اگر عدد فرد بیاورد 100 تومان از او می گیریم . اگرمتغیر تصادفی x در آمد شخص در نظر گرفته شود ، مقادیر آن را بدست آورید .

حل :

ابتدا فضای نمونه را بدست می آوریم .

S = { ۱ ، ۲ ، ۳ ، ۴ ، ۵ ، ۶ }

همان طور ی می بینید با توجه به نمودار زیر فضای نمونه S تحت تابع x به یک زیر مجموعه از R متشکل از دو عضو 100+ و 100- برده شده است .



عدد 100+ را برای دریافت و 100- را برای پرداخت پول در نظر می گیریم .

X : S → R

X (۲) = ۱۰۰	X (۱) = -۱۰۰
X (۴) = ۱۰۰	X (۳) = -۱۰۰
X (۶) = ۱۰۰	X (۵) = -۱۰۰

از آنجا کع احتمال هر یک از اعداد 1 تا 6 برابر $\frac{1}{6}$ می باشد داریم :

$$A = \{ ۲ ، ۴ ، ۶ \}$$

$$P(X = ۱۰۰) = P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{۳}{۶} = \frac{۱}{۲}$$

$$B = \{ ۱ ، ۳ ، ۵ \}$$

$$P(X = -۱۰۰) = P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{۳}{۶} = \frac{۱}{۲}$$

حال می توانیم میانگین درآمد شخص را پس از تکرار بازی به دفعات محاسبه کنیم

X	۱۰۰	-۱۰۰
P	$\frac{۱}{۲}$	$\frac{۱}{۲}$

$$\Rightarrow \bar{x} = \frac{۱۰۰ \times \frac{۱}{۲} + -۱۰۰ \times \frac{۱}{۲}}{\frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۲}} = ۰$$

با توجه به $\overline{X} = 0$ می توان نتیجه گرفت که شخص با تکرار بازی پولی به دست نمی آورد .

Jalase 1 – sco 2

انواع متغیر های تصادفی

متغیر های تصادفی عموما بر 2 دسته می باشند :

1. گسسته : متغیر هایی که برد آن یا مجموعه مقادیری که اختیار می کند ، به صورت از هم جدا و یا شمارش پذیر از اعداد حقیقی باشند .
2. مقادیری اختیار می کند ، که در مجموعه ای پیوسته یا شمارش ناپذیر از اعداد حقیقی قرار دارند .

توجه :

همان طور که در فصل قبل اشاره کردیم احتمال وقوع هر عضو منفرد از مجموعه ای پیوسته برابر صفر می باشد . این مطلب برای متغیر های تصادفی پیوسته نیز برقرار می باشد . یعنی احتمال برابر بودن مقدار یک متغیر تصادفی پیوسته x بت هر عنصر منفرد از فضای برد آن برابر صفر می باشد .

مثال 2 :

در یک جعبه 22 مهره موجود می باشد که هر مهره دارای یکی از شماره های 1و 2و 3و 4 و 5 و 6 می باشد . در ضمن به تعداد عدد نوشته شده بر روی هر مهره از همان مهره درون جعبه موجود می باشد . یک مهره از جعبه خارج می کنیم . اگر متغیر تصادفی x شماره مهره خارج شده باشد ، مطلوبست مقادیر احتکالی که متغیر x به خود می گیرد .

حل :

با توجه به صورت مثال یک مهره با شماره یک خواهیم داشت ، 2مهره با شماره 2 و به همین ترتیب 6 مهره با شماره 6 داریم . فضای نمونه مقادیری که x اختیار می کند :

$S_X = \{ ۱ ، ۲ ، ۳ ، ۴ ، ۵ ، ۶ \}$

در نتیجه تابع احتمال به صورت زیر بدست می آید :

X	۱	۲	۳	۴	۵	۶
$P_X(x)$	$\frac{۱}{۲۱}$	$\frac{۲}{۲۱}$	$\frac{۳}{۲۱}$	$\frac{۴}{۲۱}$	$\frac{۵}{۲۱}$	$\frac{۶}{۲۱}$

مثلا $P(x=6)=\frac{6}{21}$ است .

می توانیم به ازای هر مقدار x احتمال آن را به فرم $P_X(x)$ نشان داد که به آن تابع احتمال متغیر تصادفی x گوییم .

تعریف : تابع احتمال متغیر تصادفی x ، تابعی است که از یک متغیر حقیقی x که با $P_X(x)$ نمایش داده می شود:

$$P_X(x) = P(X = x)$$

هر تابع احتمال برای متغیر تصادفی گسسته x باید در شرایط زیر صدق کند .

۱) به ازای هر X ، $P_X(x) \geq ۰$

۲) $\sum_{\text{برد } X} P_X(x) = ۱$

Jalase 1 – sco 3

<u>توابع توزیع و چگالی برای متغیر تصادفی پیوسته</u>

اگر $P_X(x)$ تابع احتمال متغیر تصادفی گسسته x باشد ، تابع توزیع $F_X(x)$ به صورت زیر تعریف می شود :

$$\forall x \in R \quad ; \quad F_X(x) = p\,(X \leq x) = \sum_{t \leq x} P_X(t)$$

مثال 4 :

تابع توزیع را برای متغیر تصادفی که در مثال قبل حل شد را بدست آورید .

حل :

با توجه به جدول احتمالات متغیر تصادفی x داریم :

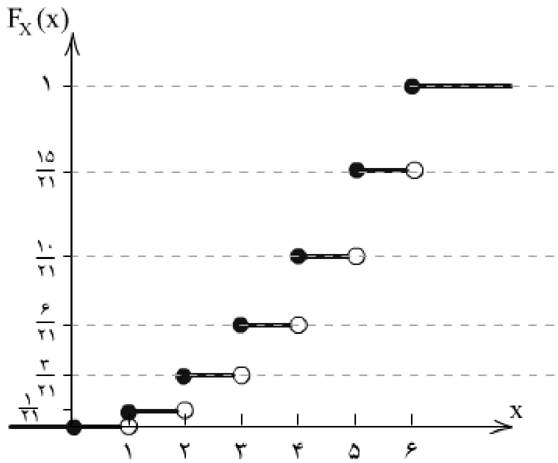
X	۱	۲	۳	۴	۵	۶
$P_X(x)$	$\frac{۱}{۲۱}$	$\frac{۲}{۲۱}$	$\frac{۳}{۲۱}$	$\frac{۴}{۲۱}$	$\frac{۵}{۲۱}$	$\frac{۶}{۲۱}$

$$F_X(۱) = P(X \leq ۱) = \frac{۱}{۲۱}$$

$$F_X(۲/۵) = P(X \leq ۲/۵) = \sum_{t \leq ۲/۵} P_X(t) = P_X(۱) + P_X(۲) = \frac{۳}{۲۱}$$

به ازای هر $x \prec 0$ مقدار تابع توزیع برابر صفر می باشد . داریم :

$$F_X(x) = \begin{cases} ۰ & x < ۰ \\ ۰ & ۰ \leq x < ۱ \\ \frac{۱}{۲۱} & ۱ \leq x < ۲ \\ \frac{۳}{۲۱} & ۲ \leq x < ۳ \\ \frac{۶}{۲۱} & ۳ \leq x < ۴ \\ \frac{۱۰}{۲۱} & ۴ \leq x < ۵ \\ \frac{۱۵}{۲۱} & ۵ \leq x < ۶ \\ ۱ & ۶ \leq x \end{cases}$$



همان طور که مشاهده می شود تعریف تابع توزیع متغیر تصادفی x مشابه تعریف فراوانی تجمعی نسبی تعریف شده در فصل 1 است . مقدار فراوانی تجمعی قبل از 1 برابر 0 از 1 تا نزدیک 2 ، $\frac{1}{21}$ الی آخر است .

Jalase 2 – sco 1

<u>خواص توابع توزیع</u>

توابع توزیع دارای خواص مشترکی می باشند . که با توجه به تعریف آنها بدست می آید . این خصوصیات در مسائل قبل نیز مشاهده می شوند که عبارتند از :

۱) $۰ \le F_X(x) \le ۱ \quad ; \quad \forall x \in R$

۲) $\lim_{x \to +\infty} F_X(x) = ۱ \quad ; \quad \lim_{x \to -\infty} F_X(x) = ۰$

$F_X(\infty) = ۱ \qquad F_X(-\infty) = ۰$

۳) توابع توزیع همواره صعودی (غیر اکید) می باشد .

$\forall a \le b \quad \to \quad F_X(a) \le F_X(b)$

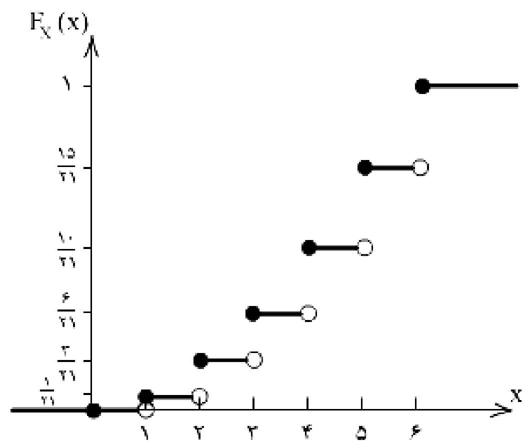
۴) تابع توزیع $F(x)$ در تمام نقاط حداقل از سمت راست ، پیوسته می باشد .

$\lim_{h \to ۰^+} F_X(x+h) = F_X(x)$

Jalase 2 – sco 2

همواره از روی یک تابع توزیع متغیر تصادفی می توان مقادیر احتمال را محاسبه نمود .
به عنوان مثال اگر بخواهیم در مثال قبل مقدار $P(x=4)$ را محاسبه کنیم ، با توجه به گسسته بودن متغیر تصادفی x داریم :

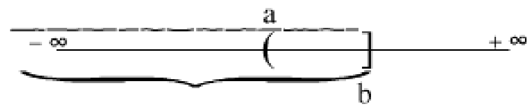
$$F_X(x) = \begin{cases} ۰ & x < ۰ \\ ۰ & ۰ \le x < ۱ \\ \frac{۱}{۲۱} & ۱ \le x < ۲ \\ \frac{۳}{۲۱} & ۲ \le x < ۳ \\ \frac{۶}{۲۱} & ۳ \le x < ۴ \\ \frac{۱۰}{۲۱} & ۴ \le x < ۵ \\ \frac{۱۵}{۲۱} & ۵ \le x < ۶ \\ ۱ & ۶ \le x \end{cases}$$



$$P(X=۴) = \lim_{h \to ۰} P(۴-h < x \le ۴) \qquad ۱-۳$$

در این صورت $P(x=4)$ را خواهیم داشت . برای محاسبه $P(a \prec x \leq b)$ به صورت زیر عمل می کنیم .

$$P(a < X \leq b) = P(X \leq b) - P(X \leq a) = F_X(b) - F_X(a)$$



توجه : برای سادگی در نوشتن می توان اندیس x را از تابع $F_X(x)$ حذف نمود و نوشت $F(x)$. البته اگر به شرطی که بدانیم با متغیر تصادفی x کار می کنیم . بنابراین :

$$P(a < X \leq b) = F(b) - F(a)$$

و داریم :

$$P(X = ۴) = \lim_{h \to ۰} P(۴ - h < x \leq ۴) \qquad ۱-۳$$

$$\lim_{h \to ۰} [F(۴) - F(۴ - h)] = F(۴) - \lim_{h \to ۰} F(۴ - h)$$

که $\lim_{h \to 0} F(4-h)$ برابر حد چپ تابع F_X در نقطه 4 می باشد و با $F(4^-)$ نمایش می دهیم .

حال با توجه به ضابطه تابع F_X :

$$F(۴^-) = \frac{۶}{۲۱}$$

و داریم :

$$P(X = ۴) = F(۴) - F(۴^-) = \frac{۱۰}{۲۱} - \frac{۶}{۲۱} = \frac{۴}{۲۱}$$

درستی حاصل عبارت بالا از روی تابع احتمال $P_X(x)$ نیز آشکار است .

Jalase 2 – sco 3

در حالت کلی می توان رابطه زیر را نوشت :

$$P(X = b) = F(b) - F(b^-)$$

مقدار $P(x=b)$ برابر با میزان جهش نمودار تابع F_X در نقطه b می باشد . همچنین تمامی حالات دیگر را با توجه به فرمول بالا و تعریف تابع توزیع می توان بدست آورد.

۱) $P(a < X \leq b) = P(X \leq b) - P(X \leq a) = F(b) - F(a)$

۲) $P(a \leq X < b) = P(X < b) - P(X < a) = F(b^-) - F(a^-)$

۳) $P(a < X < b) = P(X < b) - P(X \leq a) = F(b^-) - F(a)$

۴) $P(a \leq X \leq b) = P(X \leq b) - P(X < a) = F(b) - F(a^-)$

۵) $P(X > a) = 1 - P(X \leq a) = 1 - F(a)$

۶) $P(X < a) = F(a^-)$

حد چپ تابع توزیع در نقطه a

Jalase 2 – sco 4

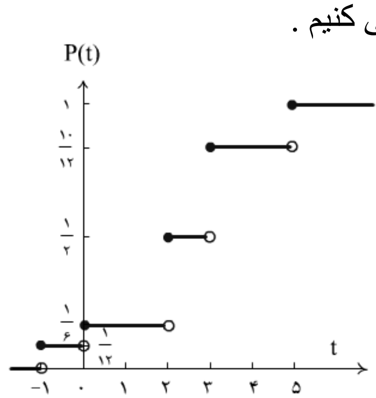
مثال 5 :

تابع توزیع برای متغیر تصادفی گسسته T به صورت زیر است . تابع احتمال آن را بدست بیاورید و نمودار آن را رسم کنید.

$$F(t) = \begin{cases} 0 & t < -1 \\ \frac{1}{12} & -1 \leq t < 0 \\ \frac{1}{6} & 0 \leq t < 2 \\ \frac{1}{2} & 2 \leq t < 3 \\ \frac{10}{12} & 3 \leq t < 5 \\ 1 & 5 \leq t \end{cases}$$

حل:

ابتدا نمودار تابع توزیع را رسم می کنیم .



مقادیری که تابع احتمال $P(T=t)$ می پذیرد ، در نقاط انفصال تابع $F(t)$ رخ می دهد . زیرا در نقاط دیگر مثل T=1 داریم :

$$P(T=۱)=P(۱\leq T\leq ۱)=F(۱)-F(۱^-)=\frac{۱}{۶}-\frac{۱}{۶}=۰$$

مقدار P(t) را در نقطه انفصال تابع توزیع F(t) به دست می آوریم :

$$P(T=-۱)=F(-۱)-F(-۱^-)=\frac{۱}{۱۲}-۰=\frac{۱}{۱۲}$$

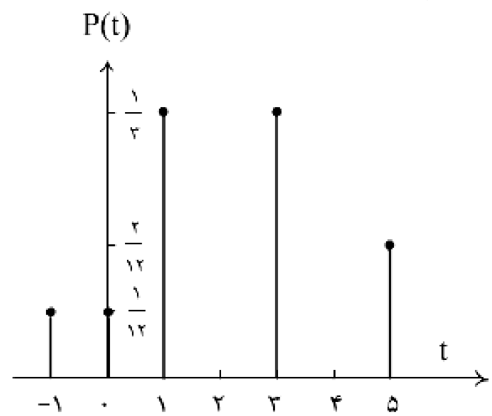
$$P(T=۰)=F(۰)-F(۰^-)=\frac{۱}{۶}-\frac{۱}{۱۲}=\frac{۱}{۱۲}$$

$$P(T=۲)=F(۲)-F(۲^-)=\frac{۱}{۲}-\frac{۱}{۶}=\frac{۱}{۳}$$

$$P(T=۳)=F(۳)-F(۳^-)=\frac{۱۰}{۱۲}-\frac{۱}{۲}=\frac{۴}{۱۲}=\frac{۱}{۳}$$

$$P(T=۵)=F(۵)-F(۵^-)=۱-\frac{۱۰}{۱۲}=\frac{۲}{۱۲}=\frac{۱}{۶}$$

نمودار احتمال P(t) شبیه به نمودار میله ای است .



Jalase 3 – sco 1

<u>توابع چگالی</u>

برای متغیر تصادفی گسسته X تابع چگالی که به فرم $f_X(x)$ نمایش داده می شود به صورت زیر تعریف می شود :

$$f_X(x)=P(X=x)$$ X عدد حقیقی

به عبارت دیگر تابع چگالی همان تابع احتمال متغیر تصادفی گسسته X می باشد که در رابطه زیر صدق کند :

$$F_X(x)=\sum_{\text{برد X}} f_X(x)$$

در برخی از کتاب ها به جای تابع احتمال برای متغیر های تصادفی گسسته مفهوم تابع چگالی را که دقیقا همان تعریف را دارد به کار می برند .

Jalase 3 sco 2

توابع توزیع و چگالی برای متغیر تصادفی پیوسته

قبل از هر چیز به مثال زیر توجه کنید :

مثال :

فرض کنید مدت زمان توقف اتوبوس در ایستگاه و قبل از حرکت به صورت تصادفی 0 الی 15 دقیقه باشد . در این صورت متغیر تصادفی X را مدت زمان تأخیر حرکت اتوبوس پس از 5 دقیقه تعریف می کنیم . مطلوب است احتمال لین که اتوبوس به مدت 5 الی 6 دقیقه تأخیر داشته باشد .

حل :

در این مثال با یک فضای نمونه پیوسته مواجه ایم که می توان آن را به صورت زیر نمایش داد :

$S = \{ ۵ \le x \le ۱۵ \}$

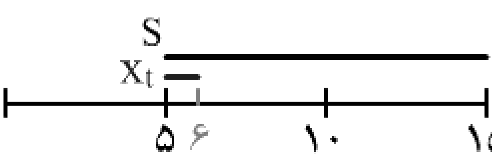
نمایش تابعی متغیر تصادفی X عبارت است از $x_t = t - 5$ و $(t \in S)$ که میزان تأخیر حرکت اتوبوس را نشان می دهد .

به این ترتیب می توان احتمال این که اتوبوس به مدت 5 الی 6 دقیقه تأخیر داشته باشد را محاسبه نمود .

احتمال این که $5 \le x_t \le 6$ باشد برابر است با طول بازه ی $[5,6]$ تقسیم بر طول بازه $[5,15]$.

$$\frac{[۵ \text{،} ۶]}{[۵ \text{،} ۱۵]} = ۰/۱$$

لازم به تذکر است که در این جا تابع احتمال یک فاصله پیشامد مورد نظر به طول فاصله فضای نمونه ، تعریف شده است .



حال با توجه به این مثال به تعریف تابع چگالی ، تابع توزیع احتمال برای متغیر تصادفی پیوسته می پردازیم .

فرض کنید x = متغیر تصادفی پیوسته باشد در این حالت نیز تعاریف تابع توزیع و چگالی در مورد متغیر x صدق می کند . با این تفاوت که در این حالت برای بدست آوردن تابع توزیع با توجه به پیوسته بودن از انتگرال گیری به جای جمع بستن روی تابع چگالی استفاده می کنیم . داریم :

$$F_X(t) = P(X \le t) = \int_{-\infty}^{t} f_X(x)\, dx$$

که $f_X(x)$ تابع چگالی متغیر تصادفی پیوسته x است .
از این رابطه می توان تابع چگالی را بر حسب تابع توزیع بدست آورد ، به کمک مشتق گیری یعنی

$$f_X(x) = \frac{d}{dx} F_X(x)$$

به عبارتی با مشتق گرفتن از تابع توزیع مقدار چگالی به دست می آید . با توجه به تعاریف می توان خواص زیر را توابع توزیع و چگالی متغیر تصادفی پیوسته x بدست آورد.

Jalase 3 – sco 3

1- برای هر $x \in R$ ، داریم $f_X(x) \geq 0$.

توجه کنید که در حالت پیوسته $f_X(x)$ الزاما کوچکتر یا مساوی یک نمی باشد زیرا همان طور که قبلا اشاره کردیم مقدار تابع احتمال برای متغیر تصادفی در یک نقطه صفر می باشد و احتمالات می بایستی در این حالت در یک بازه محاسبه شوند .
-2

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)\, dx = \text{۱}$$

برای محاسبه احتمال قرار گرفتن متغیر تصادفی x در یک بازه به این ترتیب عمل می کنیم :

$$P(a < X \leq b) = F(b) - F(a) = \int_{-\infty}^{b} f_X(x)\, dx - \int_{-\infty}^{a} f_X(x)\, dx$$

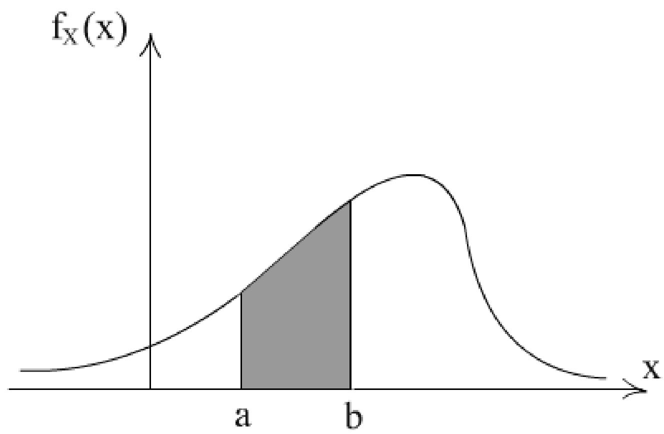
$$= \int_{a}^{b} f_X(x)\, dx$$

از طرفی در حالت پیوسته احتمال این که x برابر عدد دیگری باشد صفر می باشد . بنابراین می توان نوشت:

$$P(a < X < b) = P(a \leq X < b) = P(a < X \leq b) = P(a \leq X \leq b)$$

$$= \int_{a}^{b} f_X(x)\, dx$$

از لحاظ هندسی احتمال قرار گرفتن متغیر تصادفی پیوسته x در بازه a تاb برابر است با سطح زیر منحنی تابع چگالی از a تا b . مطابق شکل زیر :



Jalase 4 – sco 1

مثال :

تابع چگالی احتمال متغیر تصادفی پیوسته x به صورت زیر می باشد :

$$f_X(x) = \begin{cases} x & 0 \le x \le 1 \\ c - x & 1 \le x \le 2 \\ 0 & \text{سایر مقادیر} \end{cases}$$

الف) مقدار متغیر c را بدست آورید .

ب) تابع توزیع متغیر تصادفی x را بدست آورید .

ج) احتمال $P(\frac{1}{2} \le x \le \frac{3}{2})$ را یکبار با استفاده از تابع چگالی $f_X(x)$ و یکبار با استفاده از تابع توزیع $F_X(x)$ در نقطه x محاسبه کنید .

حل :

الف) برای بدست آوردن متغیر c می دانیم مساحت زیر منحنی f_X یعنی تابع چگالی می بایستی برابر واحد باشد . بنابراین :

$$\int_x f_X(x)dx = 1 \quad \Rightarrow \quad \int_0^2 f_X(x)dx = \int_0^1 x\,dx + \int_1^2 (c - x)dx =$$

$$= \frac{x^2}{2}\Big|_0^1 + (cx - \frac{x^2}{2})\Big|_1^2 = \frac{1}{2} + (2c - 2) - c + \frac{1}{2}$$

$$= \frac{1}{2} + 2c - 2 - c + \frac{1}{2} = c - 1$$

$$\Rightarrow \quad c - 1 = 1 \quad \Rightarrow \quad c = 2$$

Jalase 4 – sco 2

ب) مقدار تابع توزیع f_X را محاسبه می کنیم . می دانیم :

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)dt$$

برای حل می بایستی این مقدار را در چهار حالت $x \prec 0$ و $0 \le x \prec 1$ و $1 \le x \prec 2$ و $2 \le x$.

اگر $x < 0 \quad \Rightarrow \quad F_X(x) = \int_{-\infty}^{0} f_X(t)dt = 0$

اگر $0 \le x < 1 \quad \Rightarrow \quad F_X(x) = \int_{-\infty}^{0} f_X(t)dt + \int_{0}^{x} t\,dt$

$$= 0 + \frac{t^2}{2}\Big|_0^x = \frac{x^2}{2}$$

اگر $1 \le x < 2 \quad \Rightarrow F_X(x) = \int_{-\infty}^{0} f_X(t)dt + \int_{0}^{1} f_X(t)dt + \int_{1}^{x} f_X(t)dt$

$$= 0 + \int_0^1 t\,dt + \int_1^x (2 - t)dt =$$

$$= 0 + \frac{t^2}{2}\Big|_0^1 + (2t - \frac{t^2}{2})\Big|_1^x$$

$$= 0 + \frac{1}{2} + (2x - \frac{x^2}{2}) - (2 - \frac{1}{2}) =$$

$$= 0 + \frac{1}{2} + 2x - \frac{x^2}{2} - 2 + \frac{1}{2} = 2x - \frac{x^2}{2} - 1$$

اگر $2 \le x \quad \Rightarrow F_X(x) = \int_{-\infty}^{0} f_X(t)dt + \int_{0}^{1} f_X(t)dt + \int_{1}^{2} f_X(t)dt + \int_{2}^{x} f_X(t)dt =$

$$\Rightarrow F_X(x) = 0 + \int_0^1 t\,dt + \int_1^2 (2 - t)dt + \Big|_2^x f_X(t)dt$$

$$= 0 + \frac{t^2}{2}\Big|_0^1 + (2t - \frac{t^2}{2})\Big|_1^2 + 0$$

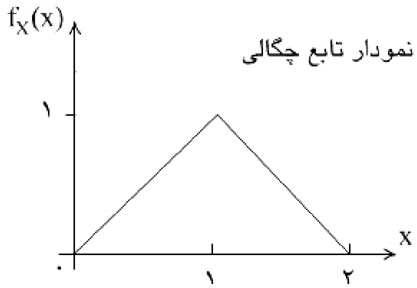
$$= \frac{1}{2} + (4 - 2) - (2 - \frac{1}{2}) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

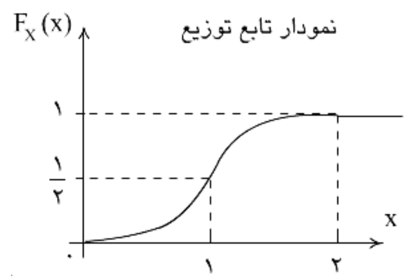
بنابراین ضابطه تابع توزیع $F_X(x)$ برابر است با :

$$F_X(x)=\begin{cases} ۰ & x<۰ \\ \frac{x^۲}{۲} & ۰\le x<۱ \\ ۲x-\frac{x^۲}{۲}-۱ & ۱\le x<۲ \\ ۱ & ۲\le x \end{cases}$$

حال به نمودار دو تابع چگالی و توزیع توجه کنید :

نمودار تابع چگالی به صورت یک مثلث که قاعده پایینی آن بر روی محور x ها حدفاصل 0 تا 2 است ، می باشد .





Jalase 4 – sco 3

ج) ابتدا مقدار $P(\frac{1}{2}\le x\le\frac{3}{2})$ را با استفاده از تابع چگالی $f_X(x)$ بدست می آوریم .

$$P(\frac{۱}{۲}\le X\le\frac{۳}{۲})=\int_{\frac{۱}{۲}}^{\frac{۳}{۲}} f_X(t)dt=\int_{\frac{۱}{۲}}^{۱} t\,dt+\int_{۱}^{\frac{۳}{۲}}(۲-t)dt$$

و این به خاطر این است که ضابطه تعریف تابع چگالی از 1 تا $\frac{3}{2}$ با $\frac{1}{2}$ تا 1 متفاوت است .

$$=\frac{t^۲}{۲}\Big|_{\frac{۱}{۲}}^{۱}+(۲t-\frac{t^۲}{۲})\Big|_{۱}^{\frac{۳}{۲}}=\frac{۱}{۲}-\frac{۱}{۸}+(۳-\frac{۹}{۸})-(۲-\frac{۱}{۲})$$

$$=۲-\frac{۱۰}{۸}=\frac{۶}{۸}=\frac{۳}{۴}=۰/۷۵$$

مجدادا مقدار $P(\frac{1}{2}\le x\le\frac{3}{2})$ را با استفاده از تابع توزیع $F_X(x)$ که در بند ب محاسبه شده است بدست می آوریم.

$$P(\tfrac{۱}{۲} \le X \le \tfrac{۳}{۲}) = F_X(\tfrac{۳}{۲}) - F_X(\tfrac{۱}{۲})$$

$$= ۳ - \tfrac{۹}{۸} - ۱ - \tfrac{۱}{۸} = ۲ - \tfrac{۱۰}{۸} = \tfrac{۳}{۴}$$ تابع توزیع

ملاحظه ی کنید که مقدار احتمال از هر دو راه حل برابر است:

$$= ۲ - \tfrac{۱۰}{۸} = \tfrac{۶}{۸} = \tfrac{۳}{۴} = ۰/۷۵$$ تابع چگالی

Jalase4 - sco 4

مثال :

متغیر تصادفی پیوسته x دارای تابع توزیع $F_X(x)$ با ضابطه زیر می باشد :

$$F_X(x) = \begin{cases} ۰ & x < ۰ \\ c - e^{-ax} & x \ge ۰ \quad , \quad a > ۰ \end{cases}$$

الف) مقدار متغیر c را بدست آورید ؟

ب) تعیین کنید متغیر a چه مقادیری می تواند بگیرد ، به شرطی که $F_X(x)$ همچنان تابع توزیع باقی بماند .

ج) تابع چگالی احتمال متغیر تصادفی x را بدست بیاورید .

د) مقادیر احتمال $P(x \le 1)$ و $P(0 \le x \le 2)$ و $P(x \ge \ln 10)$ را بدست آورید .

ه) به ازای چع مقداری از متغیر y مقدار $P(x \le y) = \dfrac{1}{2}$ می باشد ؟

حل :

می دانیم شرط این که تابعی مثل $F_X(x)$ تابع توزیع باشد برابر است با :

۱ – $۰ \le F_X(x) \le ۱ \quad \forall x$

۲ – $\lim\limits_{x \to -\infty} F_X(x) = ۰ \quad , \quad \lim\limits_{x \to +\infty} F_X(x) = ۱$

۳ – $F_X(a) \le F_X(b) \quad \forall\, a \le b$

۴ – $\lim\limits_{h \to ۰} F_X(x + h) = F_X(x) \quad \forall x$

پس از آن باقی شروط را بررسی می کنیم .

۱ – $\lim\limits_{x \to +\infty} c - e^{-ax} = c - \lim\limits_{x \to +\infty} e^{-ax} = c \;\rightarrow\; c = ۱$

اگر $x < ۰$ آنگاه $F_X(x) = ۰$ می باشد ، که در نتیجه شرط برقرار است .

اگر $x \geq ۰$ آنگاه $F_X(x) = ۱ - e^{-ax}$ داریم :

اگر $x \geq ۰ \Rightarrow ۰ \leq e^{-ax} \leq ۱ \rightarrow -۱ \leq e^{-ax} < ۰ \rightarrow ۱ - ۱ \leq e^{-ax} < ۱$

$\rightarrow ۰ \leq ۱ - e^{-ax} < ۱ \rightarrow ۰ \leq F_X(x) \leq ۱$

$$\forall x \leq y \Rightarrow e^{-ax} \geq e^{-ay} \rightarrow -e^{-ax} \leq -e^{-ay}$$

$$\Rightarrow ۱ - e^{-ax} \leq ۱ - e^{-ay} \rightarrow F_X(x) \leq F_X(y)$$

Jalase 4 – sco 5

همچنین به ازای هر $x \geq 0$ تابع e^{-ax} پیوسته می باشد . بنابراین تابع $1 - e^{-ax}$ نیز حداقل از سمت راست پیوستگی دارد و در نقطه x=0 داریم :

$$\lim_{x \to ۰^+} ۱ - e^{-ax} = F_X(۰) = ۰$$

بنابراین تابع در نقطه 0 پیوسته می باشد . با توجه به برقراری هر 4 شرط می توانیم بگوییم $F_X(x)$ با ضابطه زیر یک تابع توزیع احتمال می باشد .

$$F_X(x) = \begin{cases} ۰ & x < ۰ \\ ۱ - e^{-ax} & x \geq ۰ \end{cases}$$

ب) از آنجایی که تابع $F_X(x)$ مستقل از مقدار a در شرایط تابع توزیع صدق می کند ، بنابراین به ازای همه مقادیر $a \succ 0$ تابع $F_X(x)$ نیز تابع توزیع می باشد .

ج) برای بدست آوردن تابع چگالی $f_X(x)$ کافی است از تابع توزیع مشتق بگیریم به این ترتیب که :

اگر $x < ۰ \qquad F'_X(x) = ۰$

اگر $x \geq ۰ \qquad F'_X(x) = ۰ - (-a)\, e^{-ax} = ae^{-ax}$

توجه کنید که تابع توزیع در نقطه x=0 پیوسته می باشد . اما تابع در این نقطه مشتق ندارد زیرا مشتق چپ و راست در x=0 با هم برابر نمی باشند .

مشتق چپ در صفر $\Rightarrow \quad x < ۰ \rightarrow \quad F'_X(۰) = ۰$

مشتق راست در صفر $\Rightarrow \quad x \geq ۰ \rightarrow \quad F'_X(۰) = ae^{-a(۰)} = a$

بنابراین تابع چگالی احتمال برابر است با :

$$f_X(x) = \begin{cases} ae^{-ax} & x > ۰ \\ ۰ & \text{سایر مقادیر} \end{cases}$$

Jalase 4 – sco 6

د)

$$P(x \leq ۱) = F_X(۱) = \int_{-\infty}^{۱} f_X(x)dx = ۱ - e^{-a}$$

$$P(۰ \leq x \leq ۲) = F_X(۲) - F_X(۰) = ۱ - e^{-۲a} - (۱ - ۱) = ۱ - e^{-۲a}$$

$$P(x \geq Ln۱۰) = ۱ - P(x < Ln۱۰) = ۱ - F_X(Ln۱۰) =$$

$$= ۱ - ۱ + e^{-aLn۱۰} = e^{Ln۱۰^{-a}} = ۱۰^{-a} = \frac{۱}{۱۰^{a}}$$

ه) به فرم زیر عمل می کنیم :

$$P(X \leq y) = \frac{۱}{۲} \Rightarrow ۱ - e^{-ay} = \frac{۱}{۲}$$

$$\Rightarrow \frac{۱}{۲} = e^{-ay} \rightarrow Ln\frac{۱}{۲} = -ay \rightarrow y = \frac{-۱}{a} Ln\frac{۱}{۲}$$