فصل ششم

۶-۱-۱

۱.۶ برخی توابع توزیع گسسته

در فصل قبل با چگونگی بدست آوردن توابع توزیع و چگالی آشنا شدید در این فصل قصد داریم چند تابع چگالی و توزیع خاص را مورد بررسی قرار دهیم. بسیاری از آزمایش‌های تصادفی با وجود اینکه ظاهراً متفاوت می‌باشند اما از ماهیت یکسانی برخوردار می‌باشند و از یک الگو پیروی می‌کنند به همین دلیل است که بررسی توابع چگالی و توزیع آنها مهم می‌باشد.

۱.۱.۶ متغیر تصادفی برنولی و دو جمله‌ای

اگر برای یک آزمایش تصادفی تنها دو نتیجه موفقیت و شکست امکان‌پذیر باشد به آن آزمایش، آزمایش برنولی می‌گوییم و احتمال موفقیت را با p و شکست را با q نمایش می‌دهیم. مثلاً پرتاب یک سکه یک آزمایش برنولی است که دو حالت ممکن را در پی دارد. می‌توانیم آمدن شیر را موفقیت و آمدن خط را شکست در نظر بگیریم. بدیهیست که در این حالت $p=\frac{۱}{۲}$, $q=۱-p=\frac{۱}{۲}$.

۶-۱-۲

یک متغیر تصادفی برنولی عبارتست از تعداد پیروزی (۰ یا ۱ بار) در یک مرتبه انجام آزمایش برنولی. به این ترتیب تابع چگالی برای متغیر تصادفی برنولی X بصورت زیر خواهد بود:

$$f_X(x)=\begin{cases} p & x=۱ \\ q & x=۰ \\ ۰ & \text{سایر مقادیر} \end{cases}$$

متغیر تصادفی برنولی را با نماد $B(۱,p)$ نمایش می‌دهیم که در آن عدد ۱ نمایش دهنده یکبار انجام آزمایش است. تابع چگالی متغیر تصادفی برنولی را بصورت زیر هم می‌توان نوشت:

$$f_{(x)}=p^x\ q^{۱-x} \qquad x=۰\,,۱$$
$$=۰ \qquad \text{سایر مقادیر}$$

حال امید، واریانس و تابع مولد گشتاور متغیر تصادفی برنولی را بدست می‌آوریم:

$$E[X]=۱\times p+۰\times q=p$$
$$E[X^۲]=۱^۲\times p+۰^۲\times q=p$$

پس:

$$\operatorname{var}(x)=E[x^۲]-E^۲[X]=p-p^۲=p(۱-p)=pq$$

به همین ترتیب:

$$m_X(t)=E[e^{tx}]=pe^{t\times ۱}+qe^{t\times ۰}=pe^t+q$$

۶-۲

مثال ۱: شخصی ۵ بلیط می‌فروشد که یکی از آنها قلابی است از وی یک بلیط خریداری می‌نیم، قرار می‌دهیم:

$$X=\begin{cases} ۱ & \text{اگر بلیط اصلي‌را خريداري كرده باشيم} \\ ۰ & \text{اگر بلیط قلابی‌را خریداری کرده باشیم} \end{cases}$$

در این صورت تابع چگالی متغیر تصادفی X را بدست آورید. و $\operatorname{var}[X]\,,E[X]$ را بدست آورید.

حل: با توجه به اینکه متغیر تصادفی X دو حالت موفقیت و شکست را نشان می‌دهد بنابراین از متغیر تصادفی برنولی پیروی می‌کند. حالت مقدار احتمال p و q را محاسبه می‌کنیم:

$p =$ احتمال اینکه بلیط اصلی خریداری شود $= \frac{۴}{۵}$

$q = ۱ - p = \frac{۱}{۵}$

بنابراین تابع چگالی برابر است با:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{۴}{۵} & x = ۱ \\ \frac{۱}{۵} & x = ۰ \\ ۰ & \text{سایر مقادیر} \end{cases}$$

$$E[X] = p = \frac{۴}{۵}$$

$$\text{var}[X] = pq = \frac{۴}{۵}\frac{۱}{۵} = \frac{۴}{۲۵}$$

عدد $E[X] = \frac{۴}{۵}$ نشان می‌دهد که اگر از شخصی مورد نظر مثلاً ۱۰۰ عدد بلیط خریداری کنیم باید انتظار داشته باشیم $۱۰۰ \times \frac{۴}{۵} = ۸۰$ عدد از بلیط‌ها اصلی باشند.

۶-۳ ۲.۶ متغیر تصادفی دو جمله‌ای

اگر یک آزمایش برنولی را n بار بطور مستقل انجام دهیم و متغیر تصادفی X را برابر با تعداد پیروزی‌ها در این n بار انجام آزمایش در نظر بگیریم، در این صورت متغیر تصادفی X را دو جمله‌ای می‌نامیم.

برای بدست آوردن تابع چگالی متغیر تصادفی دو جمله‌ای می‌بایستی مقادیری که X قبول می‌کند و مقدار احتمال آنرا بدست بیاوریم. از آنجا که متغیر تصادفی دو جمله‌ای تعداد پیروزی‌ها در n بار از انجام مستقل آزمایش برنولی می‌باشد بنابراین تعداد پیروزی‌ها می‌تواند هر یک از مقادیر ۰ تا n باشد و احتمال اینکه x بار پیروز و در $n-x$ بار آزمایش باقیمانده شکست بخوریم با توجه به استقلال آزمایشها برابر است با:

$$(p.\underbrace{p\ldots p}_{\text{بار } x})\,(q.\underbrace{q\ldots q}_{\text{بار } n-x}) = p^x q^{n-x}$$

اما این مساله که در کدام یک از n آزمایش پیروز شویم نیز مهم است. با توجه به قواعد شمارشی به $\binom{n}{x}$ صریق می‌توان در n آزمایش پیروز شد

بنابراین تابع چگالی احتمال برای متغیر تصادفی دو جمله‌ای X برابر است با:

$$f_X(x) = \binom{n}{x} p^x q^{n-x} \qquad x = ۰, ۱, ۲, \ldots, n$$

$$= ۰ \qquad \text{سایر مقادیر}$$

اگر $X_۱, X_۲, \ldots, X_n$ مجموعه n متغیر تصادفی برنولی باشند در این صورت با توجه به تعریف متغیر تصادفی دو جمله‌ای X عبارتست از:

$$X = X_۱ + X_۲ + \cdots + X_n$$

متغیر تصادفی دو جمله‌ای را بصورت $X \sim B(n,p)$ نمایش می‌دهیم که شامل دو پارامتر می‌باشد:

$p =$ احتمال پیروزی

$n =$ تعداد آزمایشها

به این تریتب متغیر تصادفی برنولی حالت خاصی از متغیر تصادفی دو جمله‌ای با پارامتر $n = ۱$ می‌باشد.

حال به محاسبه مقادیر امید ریاضی، واریانس و تابع مولد گشتاور برای متغیر تصادفی دو جمله‌ای می‌پردازیم.

برای محاسبه $E[X]$ توجه می‌کنیم که متغیر تصادفی دو جمله‌ای X برابر است با مجموع نتایج حاصله از n بار انجام مستقل آزمایش برنولی بنابراین:

$$E[X] = E\left[\sum_{i=1}^{n} X_i\right] = \sum_{i=1}^{n} E[X_i] = \sum_{i=1}^{n} p = np$$

$$var(X) = VAR(\sum_{i=1}^{n} X_i) = \sum_{i=1}^{n} var(X_i) = \sum_{i=1}^{n} pq = npq$$

به همین ترتیب:

$$m_X(t) = E\left[e^{tx}\right] - E\left[e^{t(\sum_{i=1}^{n} X_i)}\right] = E\left[e^{tX_1 + tX_2 + \cdots + tX_n}\right]$$

$$= E\left[e^{tX_1}\, e^{tX_2} \ldots e^{tX_n}\right] = E\left[e^{tx_1}\right] E\left[e^{tx_2}\right] \cdots E\left[e^{tx_n}\right]$$

$$= (pe^t + q)\,(pe^t + q) \underbrace{\cdots}_{n \text{ بار}} (pe^t + q) = (pe^t + q)^n$$

۵-۶ مثال ۲: اگر در مثال ۱ تعداد ۱۰ بلیط از فروشنده خریداری می‌کنیم و متغیر X را تعداد بلیط‌های اصلی در نظر بگیریم. مطلوبست:

الف) تابع چگالی احتمال متغیر تصادفی X.

ب) رسم نمودار تابع چگالی X.

ج) مقدار مد.

د) امید و واریانس متغیر X.

حل: الف) در این مساله می‌بایستی یک آزمایش برنولی را ۱۰ مرتبه بصورت مستقل تکرار کنیم بنابراین X یک متغیر تصادفی دو جمله‌ای می‌باشد و تابع چگالی آن عبارتست از:

$$X \sim B(10, \frac{4}{5})$$

$$f_X(x) = \binom{10}{x} (\frac{4}{5})^x (\frac{1}{5})^{10-x} \qquad x = 0, 1, 2, \ldots, 10$$

$$= 0 \qquad \text{سایر مقادیر}$$

حال مقدار احتمال را به ازای $x = 0, \ldots, 10$ بدست می‌اوریم:

$$f_X(x=0) = \binom{10}{0} (\frac{4}{5})^0 (\frac{1}{5})^{10} = \frac{1}{5^{10}} = 0$$

$$f_X(x=1) = \binom{10}{1} (\frac{4}{5})^1 (\frac{1}{5})^9 = 10 \frac{4}{5^{10}} = 0$$

$$f_X(x=2) = \binom{10}{2} (\frac{4}{5})^2 (\frac{1}{5})^8 = 45 \frac{4^2}{5^{10}} = 0$$

$$f_X(x=3) = \binom{10}{3} (\frac{4}{5})^3 (\frac{1}{5})^7 = 120 \frac{4^3}{5^{10}} = 0/0007$$

$$f_X(x=3) = \binom{10}{3} (\frac{4}{5})^3 (\frac{1}{5})^7 = 120 \frac{4^3}{5^{10}} = 0/0007$$

$$f_X(x=4) = \binom{10}{4}\left(\frac{4}{5}\right)^{4}\left(\frac{1}{5}\right)^{6} = 210\,\frac{4^{4}}{5^{10}} = 0/0055$$

$$f_X(x=5) = \binom{10}{5}\left(\frac{4}{5}\right)^{5}\left(\frac{1}{5}\right)^{5} = 252\,\frac{4^{5}}{5^{10}} = 0/026$$

$$f_X(x=6) = \binom{10}{6}\left(\frac{4}{5}\right)^{6}\left(\frac{1}{5}\right)^{4} = 210\,\frac{4^{6}}{5^{10}} = 0/088$$

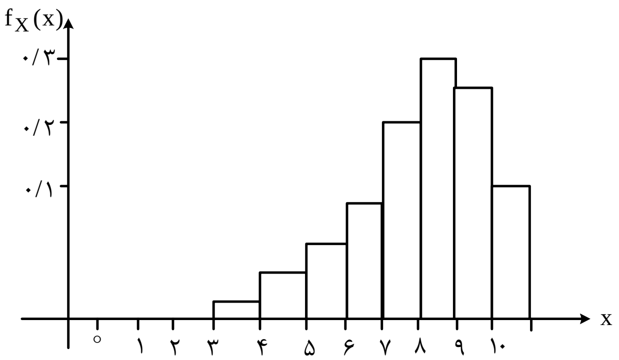
$$f_X(x=7) = \binom{10}{7}\left(\frac{4}{5}\right)^{7}\left(\frac{1}{5}\right)^{3} = 120\,\frac{4^{7}}{5^{10}} = 0/2$$

$$f_X(x=8) = \binom{10}{8}\left(\frac{4}{5}\right)^{8}\left(\frac{1}{5}\right)^{2} = 45\,\frac{4^{8}}{5^{10}} = 0/3$$

$$f_X(x=9) = \binom{10}{9}\left(\frac{4}{5}\right)^{9}\left(\frac{1}{5}\right)^{1} = 10\,\frac{4^{9}}{5^{10}} = 0/268$$

$$f_X(x=10) = \binom{10}{10}\left(\frac{4}{5}\right)^{10}\left(\frac{1}{5}\right)^{0} = 1\,\frac{4^{10}}{5^{10}} = 0/1$$

ب) حال نمودار مستطیلی تابع چگالی متغیر تصادفی X بصورت زیر بدست می‌آید:



توجه کنید که $\sum_{x=0}^{10}\binom{10}{x}\left(\frac{4}{5}\right)^{x}\left(\frac{1}{5}\right)^{10-x} = 1$ می‌باشد.

ج) از فصل دوم به یاد دارید که مد مقداری از X است که به ازای آن تابع چگالی ماکزیمم می‌شود. از روی نمودار به وضوح پیداست که مد متغیر تصادفی X برابر با: $x=8$ می‌باشد. یعنی به ازای هر بار خرید ۱۰ عدد بلیط از فروشنده به احتمال زیاد $(0/3)$ ۸ میانه توزیع نیز می‌باشد زیرا $x=8$ اولین نقطه‌ایست که در آن مقدار تابع توزیع بزرگتر یا مساوی با $\frac{1}{2}$ می‌شود یعنی: $F_X(x=8) \geq \frac{1}{2}$.

د)

$$E[X] = np = 10 \times \frac{4}{5} = 8$$

$$\mathrm{var}(X) = npq = 10\,\frac{4}{5}\,\frac{1}{5} = \frac{8}{5}$$

همانطور که ملاحظه می‌کنید مقدار امید ریاضی X برابر ۸ می‌باشد به همین دلیل است که در مثال ۱ نشان دادیم که اگر ۱۰۰ بلیط از فروشنده دریافت کنیم به طور متوسط $80 = 100 \times \frac{4}{5}$ عدد از آنها اصلی می‌باشند.

۱-۷-۶ 1.2.6 مد توزیع دو جمله‌ای

در مثال قبل برای بدست آوردن مد از تابع چگالی استفاده نمودیم اما می‌توان مقدار مد را بدون استفاده از تابع چگالی و تنها با داشتن مقادیر پارامترهای توزیع دو جمله‌ای بدست آورد. می‌دانیم متغیر تصادفی دو جمله‌ای گسسته می‌باشد از طرفی چون تابع چگالی به ازای مقدار مد بیشترین مقدار را قبول می‌کند بنابراین داریم:

$$\begin{cases} f(x_M) \geq f(x_M - ۱) & (۱) \\ f(x_M) \geq f(x_M + ۱) & (۲) \end{cases}$$

$$(۱) \quad \Rightarrow \quad \binom{n}{x_M} p^{x_M} q^{n-x_M} \geq \binom{n}{x_M + ۱} p^{x_M+۱} q^{n-(x_M+۱)}$$

$$\Rightarrow \frac{n!}{x_M!(n-x_M)!} \geq \frac{n!}{(x_M+۱)!\,(n-(x_M+۱))!} p q^{-۱}$$

$$x_M + ۱ \geq (n - x_M)\; p q^{-۱} \quad \Rightarrow \quad x_M + x_M\; p q^{-۱} \geq n p q^{-۱} - ۱$$

$$\Rightarrow \; x_M \geq \; n p - ۱ + p \quad \Rightarrow \quad x_M \geq \; p(n+۱) - ۱$$

۲-۷-۶ به همین ترتیب از رابطه (۲) می‌توان نتیجه گرفت:

$$x_M \leq (n+۱) p$$

در نتیجه داریم:

$$p(n+۱) - ۱ \quad \leq \quad x_M \leq p(n+۱)$$

حال اگر $p(n+۱)$ عددی صحیح باشد $p(n+۱)-۱$ نیز عددی صحیح است و هر دو مد متغیر تصادفی X می‌باشند در غیر این صورت بین دو عدد $p(n+۱)$ و $p(n+۱)-۱$ تنها یک عدد صجیج وجود دارد که آن عدد مد توزیع دو جمله‌ای می‌باشد.

مثال ۳: مد تغیر تصادفی دو جمله‌ای در مثال قبل را بدون استفاده از تابع چگالی بدست آورید.

حل: X دارای توزیع دو جمله‌ای با پارامترهای $n = ۱۰$, $p = \frac{۴}{۵}$ می‌باشد.

بنابراین:

$$\frac{۴}{۵}(۱۰+۱) - ۱ \leq x_M \leq \frac{۴}{۵}(۱۰+۱)$$

$$۷ + \frac{۱}{۵} \leq x_M \leq ۸ + \frac{۱}{۵} \quad \Rightarrow \quad x_M = ۸$$

۱-۸-۶ ۳.۶ متغیر تصادفی هندسی (نوع اول)

اگر متغیر تصادفی X برابر باشد با تعداد شکستها قبل از رسیدن به اولین پیروزی در انجام آزمایشهای مستقل برنولی، در این صورت به آن متغیر تصادفی هندسی از نوع اول می‌گوییم. به عنوان مثال تعداد دفعات پرتاب یک سکه برای بدست آوردن اولین شیر یا تعداد دفعات شلیک به هدف تا قبل از اولین برخورد گلوله با هدف، نمونه‌هایی از متغیرهای تصادفی هندسی نوع اول می‌باشند.

برای بدست آوردن تابع چگالی متغیر تصادفی هندسی نوع اول توجه می‌کنیم که X مقادیر $۰ , ۱ , \cdots$ را قبول می‌کند و از آنجا که در آخرین آزمایش پیروز می‌شویم بنابراین در x آزمایش قبل شکست خورده‌ایم که به دلیل استقلال آزمایشها، احتمال آن برابر است q^x و برای اینکه در آزمایش بعدی پیروز شویم می‌بایستی احتمال p (پیروزی) را در عدد q^x ضرب کنیم بنابراین:

$$f_X(x) = \begin{cases} p q^x & x = ۰, ۱, \ldots \\ ۰ & \text{سایر مقادیر} \end{cases}$$

حال امید ریاضی، واریانس و تابع مولد گشتاور متغیر تصادفی هندسی نوع اول را محاسبه می‌کنیم:

$$M_X(t) = E\left[e^{tX}\right] = \sum_{x=0}^{\infty} e^{tX}\ pq^x = \sum_{x=0}^{\infty} e^{tX}\ p\ (qe^t)^x = \frac{p}{1-qe^t}$$

برای بدست آوردن امید ریاضی و واریانس از تابع مولد گشتاور استفاده می‌کنیم:

$$E[X] = M'_X(t)\ |_{t=0} = \frac{pqe^t}{(1-qe^t)^2}\ |_{t=0} = \frac{pq}{(1-q)^2} = \frac{q}{p}$$

$$E[X^2] = M''_X(t)\ |_{t=0} = \frac{pqe^t(1-qe^t)^2 + 2qe^t\ (1-qe^t)\ pqe^t}{(1-qe^t)^4}\ |_{t=0} = \frac{qp+q^2}{p^2}$$

پس:

$$\text{var}(X) = E[X^2] - E^2[X] = \frac{pq+q^2}{p^2} - \frac{q^2}{p^2} = \frac{q(p+q)}{p^2} = \frac{q}{p^2}$$

۶-۹ مثال ۴: شخصی به هدفی شلیک می‌کند. گلوله با احتمال $\frac{3}{5}$ به هدف برخورد می‌کند اگر متغیر تصادفی X را تعداد شلیکها قبل از مورد اصابت قرار دادن هدف در نظر بگیریم. مطلوبست:

الف) تابع چگالی متغیر تصادفی X.

ب) احتمال اینکه در شلیک ۷ام هدف را بزند.

ج) به طور متوسط چند بار شلیک قبل از اینکه هدف مورد اصابت قرار بگیرد لازم است.

د) واریانس و تابع مولد گشتاور را برای متغیر تصادفی X محاسبه کنید.

حل: الف) متغیر تصادفی X هندسی از نوع اول می‌باشد و با پارامتر $p = \frac{3}{5}$ بنابراین تابع چگالی آن بصورت زیر بدست می‌آید:

$$f(x) = \frac{2}{5}\ (\frac{2}{5})^x \qquad x = 0, 1, \ldots$$

$$= 0 \qquad \text{سایر مقادیر}$$

ب) برای اینکه در شلیک ۷ام هدف را بزند می‌بایستی ۶ شلیک ناموفق داشته باشیم بنابراین:

$$f(x=6)\ \frac{3}{5}\ (\frac{2}{5})^6 = 0/002$$

ج) برای بدست آوردن متوسط تعداد شلیکها قبل از زدن بایستی امید ریاضی متغیر تصادفی X را بدست آوریم:

$$E[X] = \frac{q}{p} = \frac{\frac{2}{5}}{\frac{3}{5}} = \frac{2}{3}$$

بنابراین شخص می‌بایستی بیشتر اوقات پس از یک شکست هدف را بزند.

د)

$$\text{var}(X) = \frac{q}{p^2} = \frac{\frac{2}{5}}{\frac{9}{25}} = \frac{10}{9}$$

$$M_X(t) = \frac{p}{1-qe^t} = \frac{\frac{3}{5}}{1-\frac{2}{5}e^t} = \frac{3}{5-2e^t}$$

۶-۱۰ ۱.۳.۶ متغیر تصادفی هندسی (نوع اول)

متغیر تصادفی X را تعداد آزمایشها برای رسیدن به اولین پیروزی در آزمایش‌های مستقل برنولی در نظر می‌گیریم. در این صورت X یک متغیر تصادفی هندسی نوع دوم است.برای بدست آوردن تابع چگالی متغیر تصادفی هندسی نوع دوم ابتدا توجه می‌کنیم که حداقل یک آزمایش برای رسیدن به اولین پیروزی مورد نیاز است، احتمال اینکه در آزمایش xام پیروز شویم برابر است با احتمال اینکه در $x-۱$ آزمایش قبلی شکست خورده و در آزمایش آخر پیروز شویم که اولی با احتمال $q^{x-۱}$ و دومی با احتمال p رخ می‌دهد. نتیجه تابع چگالی بصورت زیر بدست می‌آید:

$$f_X(x) = p\,q^{x-۱} \qquad x = ۱, ۲, \ldots$$
$$= ۰ \qquad \text{سایر مقادیر}$$

توجه کنید که بین متغیر تصادفی هندسی نوع اول و دوم رابطه مستقیمی برقرار است، از آنجا که متغیر تصادفی هندسی نوع دوم تعداد آزمایشها برای رسیدن به اولین پیروزی است بنابراین می‌بایستی در تمام آزمایشها شکست بخوریم غیر آزمایش آخر. اگر Y یک متغیر هندسی نوع دوم باشد و X یک متغیر هندسی نوع اول، رابطه $Y = X + ۱$ بین ایندو برقرار می‌باشد. با کمک این رابطه می‌توان به راحتی امید، واریانس و تابع مولد گشتاور متغیر هندسی نوع دوم را از روی نوع اول بدست آورد:

$$E[Y] = E[X+۱] = E[X] + ۱ = \frac{q}{p} + ۱ = \frac{۱}{p}$$

$$\operatorname{var}(Y) = \operatorname{var}(X+۱) = \operatorname{var}(X) = \frac{q}{p^{۲}}$$

$$M_Y(t) = E[e^{tY}] = E[e^{tY+t}] = e^t E[e^{tX}] = e^t \frac{p}{۱ - q e^t}$$

مثال ۵: متغیر تصادفی Y را تعداد شلیکها برای رسیدن به اولین اصابت گلوله به هدف در مثال قبل در نظر می‌گیریم:

مطلوبست:

الف) تابع چگالی متغیر تصادفی X.

ب) احتمال اینکه در کمتر یا مساوی با دئ آزمایش هدف مورد اصابت گلوله قرار گیرد.

ج) متوسط تعداد شلیکها برای زدن هدف.

د) واریانس و تابع مولد گشتاور متغیر تصادفی Y.

حل: الف) Y یک متغیر تصادفی هندسی نوع دوم است بنابراین تاع چگالی آن بصورت زیر می‌باشد:

$$f_Y(y) = \frac{۳}{۵}\left(\frac{۲}{۵}\right)^{y-۱} \qquad y = ۱, ۲, \ldots$$
$$= ۰ \qquad \text{سایر مقادیر}$$

ب) برای اینکه در کمتر یا مساوی با دو آزمایش هدف مورد اصابت قرار گیرد می‌بایستی احتمال $f(y=۱) + f(y=۲)$ را محاسبه کنیم:

$$f(y=۱) + f(y=۲) = \left(\frac{۳}{۵}\right)\left(\frac{۲}{۵}\right)^{۰} + \left(\frac{۳}{۵}\right)\left(\frac{۲}{۵}\right)^{۱} = \frac{۳}{۵}\left(۱ + \frac{۲}{۵}\right) = \frac{۲۱}{۲۵} = ۰/۸۴$$

ج)

$$E[Y] = \frac{۱}{p} = \frac{۱}{\frac{۳}{۵}} = \frac{۵}{۳} = ۱/۶۶$$

به همین ترتیب:

$$\mathrm{var}(Y) = \frac{q}{p^{۲}} = \frac{\frac{۲}{۵}}{\frac{۹}{۲۵}} = \frac{۱۰}{۹}$$

د)

$$m_Y(t) = \frac{\frac{۳}{۵}e^t}{۱-\frac{۲}{۵}e^t} = \frac{۳e^t}{۵-۲e^t}$$

۱-۱۲-۶ ۴.۶ متغیر تصادفی دو جمله‌ای منفی (نوع اول)

اگر متغیر تصادفی X تعداد شکستها قبل از رسیدن به kامین پیروزی در تکرار مستقل آزمایشهای برنولی در نظر گرفته شود به آن متغیر تصادفی دو جمله‌ای منفی از نوع اول می‌گوییم.

توجه کنید که اگر $k=۱$ باشد متغیر تصادفی دو جمله‌ای منفی نوع اول همان متغیر تصادفی هندسی نوع اول می‌باشد. برای بدست آوردن تابع چگالی متغیر تصادفی دو جمله‌ای منفی نوع اول توجه کنید که در آزمایش آخر پیروزی kام رخ می‌دهد.بنابراین در آزمایشهای قبلی $k-۱$ بار پیروزی و x بار شکست رخ داده است یعنی از بین $x+k-۱$ آزمایش می‌بایستی $k-۱$ بار پیروز شویم که احتمال آن $p^{k-۱}$ می‌باشد و احتمال اینکه x بار شکست بخوریم هم مهم است که به $\binom{x+k-۱}{x}$ طریق ممکن است. نهایتاً در آخرین آزمایش هم با احتمال p پیروز می‌شویم که همان kامین پیروزی است. به همین ترتیب با ضرب موارد فوق تابع چگالی بصورت زیر بدست می‌آید:

$$f_X(x) = \binom{x+k-۱}{x} q^x p^k \qquad x = ۰, ۱, ۲, \ldots$$

رابطه‌ای مشابه رابطه بین متغیر تصادفی برنولی و دو جمله‌ای ما بین متغیر تصادفی هندسی نوع اول و متغیر تصادفی دو جمله‌ای منفی نوع اول موجود است. فرض کنید یک آزمایش را که متغیر تصادفی مربوط به آن از متغیر تصادفی هندسی نوع اول می‌باشد، k بار تکرار کنیم و نتایج حاصله را با یکدیگر جمع کنیم در این صورت تعداد شکستها قبل از رسیدن به kامین پیروزی را بدست می‌آوریم که همان متغیر تصادفی دو جمله‌ای منفی نوع اول باشد و $X_۱, X_۲, \ldots X_K$ متغیرهای تصادفی هندسی نوع اول باشند داریم:

$$Y = X_۱ + X_۲ + \cdots + X_K$$

با استفاده از رابطه فوق امید ریاضی، واریانس و تابع مولد گشتاور متغیر تصادفی دو جمله‌ای منفی نوع اول را محاسبه می‌کنیم:

$$E[X] = E\left[\sum_{i=۱}^{k} X_i\right] = \sum_{i=۱}^{k} E[X_K] = \sum_{i=۱}^{k} \frac{q}{p} = k\frac{q}{p}$$

$$\mathrm{var}(X) = \mathrm{var}\left(\sum_{i=۱}^{k} X_i\right) = \sum_{i=۱}^{k} \mathrm{var}(X_i) = \sum_{i=۱}^{k} \frac{q}{p^{۲}} = k\frac{q}{p^{۲}}$$

$$m_X(t) = E\left[e^{tX}\right] = E\left[e^{t\sum_{۱}^{k} X_i}\right] = E\left[e^{tX_۱}\ e^{tX_۲} \ldots\ e^{tX_K}\right]$$

$$E\left[e^{tX_۱}\right] E\left[e^{tX_۲}\right] \ldots E\left[e^{tX_K}\right] =$$

$$= \left(\frac{p}{۱-qe^t}\right)\left(\frac{p}{۱-qe^t}\right) \cdots \left(\frac{p}{۱-qe^t}\right) = \left(\frac{p}{۱-qe^t}\right)^k$$

۱۳-۶ مثال ۶: متغیر تصادفی X را تعداد دفعات به خطا رفتن گلوله قبل از اصابت ۳امین بار گلوله به هدف در مثال ۴ در نظر می‌گیریم، مطلوبست:

الف) تابع چگالی متغیر تصادفی X.
ب) احتمال اینکه پس از ۲ بار خطا رفتن گلوله برای سومین بار به هدف بزنیم.
ج) متوسط تعداد خطا رفتن گلوله قبل از اصابت سوم به هدف.
د) واریانس و تابع مولد گشتاور متغیر تصادفی X.

حل: الف) متغیر تصادفی X از تالع چگالی دو جمله‌ای منفی نوع اول پیروی می‌کند بنابراین تابع چگالی آن با $p=\frac{۳}{۵}$ و $k=۳$ برابر است با:

$$f_X(x)=\binom{x+۳-۱}{x}(\frac{۲}{۵})^x(\frac{۳}{۵})^۳$$

ب):
$$f(x=۲)=\binom{۴}{۲}(\frac{۲}{۵})^۲(\frac{۳}{۵})^۳=۰/۲$$

ج):
$$E[X]=K\frac{q}{p}=۳\,\frac{\frac{۲}{۵}}{\frac{۳}{۵}}=۲$$

یعنی بطور متوسط پس از ۲ بار خطا رفتن گلوله باید بتوان هدف را مورد اصابت قرار داد.
همچنین:

د)
$$var(X)=k\frac{q}{p^۲}=۳\,\frac{\frac{۲}{۵}}{\frac{۹}{۲۵}}=\frac{۳۰}{۹}$$

به همین ترتیب:
$$m_X(t)=(\frac{p}{۱-qe^t})^k=(\frac{\frac{۳}{۵}}{۱-\frac{۲}{۵}e^t})^۳$$

۶-۱۴ ۵.۶ متغیر تصادفی دو جمله‌ای منفی (نوع دوم)

متغیر تصادفی X را برابر با تعدد آزمایشهای لازم برای رسیدن به kامین پیروزی در تکرار مستقل آزمایشهای برنولی در نظر می‌گیریم. در این صورت متغیر تصادفی X را دو جمله‌ای منفی نوع دوم می‌نامین.

برای بدست آوردن تابع چگالی متغیر تصادفی دو جمله‌ای منفی نوع دوم ابتدا توجه کنید که تفاوت اصلی آن با متغیر تصادفی دو جمله‌ای نوع اول در این است که در نوع اول تعداد k بار پیروزی در محاسبه مقادیری که متغیر تصادفی قبول می‌کند در نظر گرفته نمی‌شود بنابراین اگر Y یک متغیر تصادفی دو جمله‌ای منفی نوع دوم باشد و X نوع اول رابطه زیر بین این دو متغیر تصادفی برقرار است:

$$Y=X+K \qquad x=۰,۱,۲,\ldots$$
$$y=k,\ k+۱,\ k+۲,\ldots$$

بنابراین تابع چگالی Y نیز با تغیر X به $Y-K$ در تالع چگالی دو جمله‌ای منفی نوع اول بدست می‌آید:

$$f_X(x)=\binom{x+k-۱}{x}q^x p^k \xrightarrow{x=y-k} f_Y(y)=\binom{y-۱}{y-k}q^{y-k}p^k$$
$$\Rightarrow f_Y(y)=\binom{y-۱}{k-۱}q^{y-k}p^k \qquad y=k,k+۱,k+۲,\ldots$$

اگر $X_۱,X_۲,\ldots X_K$ مجموعه k متغیر تصادفی هندسی نوع دوم باشند و Y یک متغیر تصادفی دو جمله‌ای منفی نوع دوم باشد رابطه زیر بین آنها برقرار است:

$$Y = X_1 + X_2 + \cdots + X_K$$

هر متغیر تصادفی X_i برابر است با تعداد آزمایشها برای رسیدن به اولین پیروزی، حال اگر نتایج حاصل از k آزمایش تصادفی هندسی نوع دوم را با یکدیگر جمع کنیم تعداد آزمایشهای لازم برای رسیدن به kامین پیروزی بدست می‌آید. که همان متغیر تصادفی دو جمله‌ای منفی می‌باشد.

حال با توجه به رابطه فوق مقادیر امید ریاضی، واریانس و تابع مولد گشتاور را برای متغیر تصادفی دو جمله‌ای منفی نوع دوم بدست می‌آوریم:

$$E[X] = E\left[\sum_{i=1}^{k} X_k\right] = \sum_{1}^{k} E[X_k] = \sum_{1}^{k} \frac{1}{p} = \frac{k}{p}$$

$$\operatorname{var}(X) = \operatorname{var}\left(\sum_{1}^{k} X_k\right) = \sum_{1}^{k} \operatorname{var}(X_k) = \sum_{1}^{k} \frac{q}{p^2} = K\frac{q}{p^2}$$

$$m_X(t) = E\left[e^{tX}\right] = E\left[e^{t\sum_{1}^{k} X_K}\right] = E\left[e^{tX_1}\ e^{tX_2}\ \cdots\ e^{tX_K}\right]$$

$$= E[e^{tX_1}]\, E[e^{tX_2}] \cdots E[e^{tX_K}]$$

$$= \left(\frac{pe^t}{1-qe^t}\right)\left(\frac{pe^t}{1-qe^t}\right) \cdots \left(\frac{pe^t}{1-qe^t}\right) = \left(\frac{pe^t}{1-qe^t}\right)^k$$

مثال ۷: اگر در مثال ۴ Y را تعداد دفعات شلیک گلوله برای اصابت ۳ امین بار گلوله به هدف در نظر بگیریم مطلوبست:

الف) تابع چگالی متغیر تصادفی Y.

ب) احتمال اینکه پس از ۵ بار شلیک برای سومین بار هدف را بزنیم.

ج) متوسط تعداد شلیک برای اصابت سه بار گلوله به هدف.

د) واریانس و تابع مولد گشتاور متغیر تصادفی Y.

حل: الف) متغیر تصادفی Y از توزیع دو جمله‌ای منفی نوع دوم پیروی می‌ند بنابراین تابع چگالی آن بصورت زیر خواهد بود:

$$f_Y(y) = \binom{y-1}{2} \left(\frac{2}{5}\right)^{y-3} \left(\frac{3}{5}\right)^3 \qquad y = 3, 4, 5, \ldots$$

ب) می‌بایستی $f(y=5)$ را بدست بیاوریم:

$$f(y=5) = \binom{5-1}{2} \left(\frac{2}{5}\right)^{5-3} \left(\frac{3}{5}\right)^3 = 0/2$$

همانطور که ملاحظه می‌کنید مقدار $f(y=5)$ با مقدار $f(x=2)$ در مثال قبل برابر می‌باشد زیرا رابطه $Y = X + 3$ بین دو متغیر تصادفی X و Y در این دو مثال وجود دارد.

ج):

$$E[Y] = \frac{k}{p} = \frac{3}{\frac{3}{5}} = 5$$

یعنی بطور متوسط از هر ۵ بار شلیک به هدف می‌وان انتظار داشت که ۳ بار گلوله به هدف اصابت کند.

$$\operatorname{var}(Y) = \frac{kq}{p^2} = 3\,\frac{\frac{2}{5}}{\frac{9}{25}} = \frac{30}{9}$$

د):
$$m_X(t) = \left(\frac{pe^t}{۱-qe^t}\right)^k = \left(\frac{\frac{۳}{۵}e^t}{۱-\frac{۲}{۵}e^t}\right)^۳$$

۶-۱۷-۱ ۶.۶ متغیر تصادفی فوق هندسی

فرض کنید ظرفی حاوی N توپ می‌باشد، که M تای آنها سفید می‌باشند. می‌خواهیم یک نمونه nتایی از این ظرف به تصادف و بدون جاگذاری خارج کنیم متغیر تصادفی X را تعداد توپهای سفیدی که در نمونه nتایی موجود می‌باشند در نظر می‌گیریم. در این صورت X یک متغیر تصادفی فوق هندسی نامیده می‌شود.

توجه کنید که در متغیر تصادفی فوق هندسی هر بار یک عدد توپ از ظرف خارج می‌کنیم که در اولین مرتبه، احتمال سفید بودن توپ $p = \frac{M}{N}$ می‌باشد، اما چون توپها را بدون جاگذاری خارج می‌کنیم در دومین انتخاب احتمال سفید بودن توپ به نتیجه آزمایش اول وابسته است به عبارت دقیقتر در انتخاب m توپ از ظرف، که هر انتخاب یک آزمایش برنولی است، بدلیل انتخاب توپها برون جاگذاری آزمایشها از یکدیگر مستقل نمی‌باشند.

اگر توپها را با جایگذاری انتخاب می‌کردیم در این صورت X یک متغیر تصادفی دو جمله‌ای با پارامترهای n , $p = \frac{M}{N}$ می‌بوده.

برای بدست آوردن تابع چگالی متغیر تصادفی فوق هندسی فرض می‌نیم از n توپ انتخاب شده x تای آنها سفید باشند در این صورت x می‌تواند عددی بین ۰ تا M باشد. انتخاب n توپ از N توپ به $\binom{N}{n}$ طریق ممکن است. همینطور سفید بودن x توپ به $\binom{M}{x}$ طریق و مابقی به $\binom{N-M}{n-x}$ طریق ممکن است در نتیجه احتمال $p(X=x)$ بصورت زیر بدست می‌آید:

$$f_X(x) = p(X=x) = \frac{\binom{M}{x}\binom{N-M}{n-x}}{\binom{N}{n}}$$

۶-۱۷-۲ از $\binom{M}{x}$ نتیجه می‌شود که $۰ \le x \le M$ و از $\binom{N-M}{n-x}$ نتیجه می‌شود که:

$$۰ \le n-x \le N-M \quad \Rightarrow \quad n+M-N \le x \le n$$

نهایتاً بازده زیر برای مقادیری که متغیر تصادفی X قبول می‌کند بدست می‌آید:

$$\begin{cases} ۰ \le x \le M \\ n+M-N \le x \le n \end{cases} \Rightarrow \ \mathrm{Max}\,(۰\,,\,n+M-N) \le x \le \mathrm{Min}\,(M\,,\,n)$$

متغیر تصادفی فوق هندسی X را با نماد $X \sim HG(N,M,n)$ نمایش می‌دهیم.

امید ریاضی و واریانس متغیر تصادفی فوق هندسی برابر است با:

$$E[X] = n\frac{M}{N}$$
$$\mathrm{var}(X) = n\frac{M}{N}\left(\frac{N-M}{N}\right)\left(\frac{N-n}{N-۱}\right)$$

۶-۱۸ مثال ۸: در یک چاپخانه از هر ۵۰ برگ چاپ شده ۵ برگ بدلیل کیفیت نامناسب چاپ به دور ریخته می‌شود. برای کنترل کیفیت از هر ۵۰ برگ ۳ برگ کنترل می‌شود و اگر حداقل یک برگ کیفیت نامناسبی داشته باشند آنگاه سایر برگها نیز کنترل می‌شوند. احتمال اینکه مسوول کنترل کیفیت مجبور باشد هر ۵۰ برگ را کنترل کند چقدر می‌باشد؟

حل: متغیر تصادفی X را تعداد برگهای بدون کیفیت در یک نمونه ۳ تایی در نظر می‌گیریم. در این صورت X متغیر تصادفی فوق هندسی با پارامترهای $X \sim HG(۵۰,۵,۳)$ می‌باشد.

$$p(X=x)=\frac{\binom{۵}{x}\binom{۴۵}{۳-x}}{\binom{۵۰}{۳}} \qquad ۰\le x\le ۳$$

برای اینکه مجبور باشیم هر ۵۰ برگ را کنترل کنیم باید حداقل یک برگ انتخابی کیفیت نامناسبی داشته باشند که احتمال آن برابر است با: $p(x\ge ۱)$.

$$p(X\ge ۱)=۱-p(X=۰)=۱-\frac{\binom{۵}{۰}\binom{۴۵}{۳}}{\binom{۵۰}{۳}}=۱-۰/۷۲۳=۰/۲۷۶$$

متوسط تعداد برگهای با کیفیت نامناسب در نمونه عبارتست از:

$$E[X]=n\frac{M}{N}=۳\,\frac{۵}{۵۰}=۰/۳$$

همچنین:

$$\mathrm{var}(X)=۳\,\frac{۵}{۵۰}\,\left(\frac{۵۰-۵}{۵۰}\right)\left(\frac{۵۰-۳}{۵۰-۱}\right)=۰/۲۵$$

۱۹-۶ ۱.۶.۶ تقریب توزیع فوق هندسی بوسیله توزیع دو جمله‌ای

اگر در متغیر تصادفی فوق هندسی مقدار N در مقایسه با n بسیار بزرگ باشد، آنگاه دیگر انتخاب توپها بدون جاگذاری و با جاگذاری تقریباً معادل یکدیگر می‌باشند به همین ذلیل به جای محاسبه تابع احتمال فوق هندسی می‌توانیم از تابع احتمال دو جمله‌ای استفاده کنیم که در این حالت از پارامترهای n , $p=\frac{M}{N}$ استفاده می‌کنیم. در حالت کلی می‌بایستی شروط $N\to\infty$, $\frac{n}{N}\to ۰$ برقرار باشند تا بتوان از توزیع دو جمله‌ای استفاده نمود.

مثال ۹: در یک شهر از میان ۱۰/۰۰۰ خانوار ۴۰۰۰ خانوار دارای فرزند پسر می‌باشند اگر یک نمونه ۵ تایی انتخاب کنیم احتمال اینکه دارای فرزند پسر نباشند چقدر است؟

حل: چون نسبت $\frac{۵}{۱۰/۰۰۰}$ به صفر میل می‌کند و ۱۰۰۰۰ عدد بزرگی محسوب می‌شود می‌توان از تقریب توزیع فوق هندسی به دو جمله‌ای استفاده نمود:

$$p=\frac{M}{N}=\frac{۴۰۰۰}{۱۰۰۰۰}=\frac{۲}{۵} \quad , \quad q=\frac{۳}{۵} \quad , \quad n=۵ \quad \Rightarrow \quad X\sim B(۵,\frac{۲}{۵})$$

پس:

$$p(X=x)=\binom{۵}{x}\left(\frac{۲}{۵}\right)^{x}\left(\frac{۳}{۵}\right)^{۵-x} \qquad x=۰,۱,۲,\ldots,۵$$

$$=۰ \qquad \text{سایر مقادیر}$$

احتمال اینکه فرزند پسری نداشته باشند برابر است با: $p(X=۰)$.

$$p(X=۰)=\binom{۵}{۰}\left(\frac{۲}{۵}\right)^{۰}\left(\frac{۳}{۵}\right)^{۵}=۰/۰۷$$

۲۰-۶ ۷.۶ متغیر تصادفی پواسون

در بعضی از آزمایشها تعداد دفعات رخ دادن پیشامدی را می‌توان بدست آورد ولی تعداد دفعات عدم رخ دادن آنرا نمی‌توان بدست آورد مثلاً تعداد دفعاتی که در طول شبانه روز تلفن یک شرکت زنگ می‌زند شمرد ولی تعداد دفعاتی که تلفن زنگ نمی‌زند را نمی‌توان شمرد. همینطور تعداد خودروهای وارد شده به پمپ بنزین در مقایسه با خودروهای عبوری.

متغیر تصادفی X را به این صورت تعریف می‌کنیم:

■ X تعداد موفقیتها در یک فاصله پیوسته (زمان ، طول)

پارامتر متغیر تصادفی پواسون λ می‌باشد که برابر است با میانگین تعداد موفقیتها در طول یک بازه پیوسته. برای اینکه X متغیر تصادفی پواسون باشد می‌بایستی شرایط زیر برقرار باشد:

۱- در طول فاصله زمانی بسیار کوتاه احتمال رخ دادن یک موفقیت فقط متناسب با طول بازه زمانی باشد و بستگی به تعداد موفقیتها در خارج از فاصله زمانی نداشته باشد.

۲- احتمال روی دادن بیش از یک موفقیت در یک فاصله زمانی کوتاه تقریباً برابر صفر باشد.

۳- تعداد موفقیتهایی که در یک فاصله زمانی مشخص روی می‌دهد از تعداد موفقیتهایی که در یک فاصله زمانی دیگر رخ می‌دهد مستقل باشد.

توجه کنید که در شروط بالا منظور از فاصله زمانی هر بازه پیوسته مثل طول یا یک ناحیه مشخص می‌باشد.

تابع احتمال متغیر تصادفی پواسون با پارامتر λ بصورت زیر می‌باشد:

$$f_X(x) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!} \qquad x = ۰, ۱, ۲, \ldots$$

$$= ۰ \qquad \text{سایر مقادیر}$$

مقادیر امید ریاضی، واریانس و تابع مولد گشتاور عبارتند از:

$$E[X] = \lambda$$

$$var(X) = \lambda$$

$$m_X(t) = e^{-\lambda(۱-e^t)}$$

معمولاً پارامتر λ به صورت $\lambda = rt$ در نظر گرفته می‌شود که در آن t طول بازه مورد نظر و r نرخ وقوع پیشامد در بازه مربوطه است.

مثال ۱۰: یک تایپیست به طور متوسط در هر ۲ صفحه ۵ غلط تایپی دارد مطلوبست:

الف) احتمال اینکه در یک صفحه اصلاً غلط تایپی نداشته باشد؟

ب) احتمال اینکه حداقل ۳ غلط تایپی در ۲ صفحه داشته باشد؟

حل: الف) در یک صفحه ۲/۵ غلط به طور متوسط موجود می‌باشد بنابراین $\lambda = ۲/۵ \times ۱$ و داریم:

$$f_X(x) = \frac{(۲/۵)^x\ e^{-۲/۵}}{x!}$$

برای اینکه اصلاً غلط تایپی نداشته باشیم بایستی $f(x=۰)$ را بدست بیاوریم:

$$f(x=۰) = \frac{(۲/۵)^۰\ e^{-۲/۵}}{۰!} = e^{-۲/۵} = ۰/۰۸$$

ب) در این حالت $\lambda = ۵$ می‌باشد و داریم:

$$f_X(x) = \frac{۵^x e^{-۵}}{x!}$$

$$p(X \geq ۳) = ۱-(p(X=۰)+p(X=۱)+p(X=۲))$$

$$= ۱-(۰/۰۰۶ + ۰/۰۳ + ۰/۰۷۵) = ۰/۸۸۹$$

۶ . ۷ . ۱ مد توزیع پواسون

مد توزیع پواسون همانند توزیع دو جمله‌ای بدست می‌آید یعنی:

$$\begin{cases} f(x_M) \geq f(x_M - ۱) & (۱) \\ f(x_M) \geq f(x_M + ۱) & (۲) \end{cases}$$

از (۱) نتیجه می‌شود:قرار دادن $x_M = \hat{x}$

$$\frac{\lambda^{\hat{x}}\, e^{-\lambda}}{\hat{x}!} \geq \frac{\lambda^{\hat{x}-۱}\, e^{-\lambda}}{(\hat{x}-۱)!} \Rightarrow x \leq \lambda$$

به همین نسبت از رابطه (۲) بدست می‌آید $x \leq \lambda - ۱$ در نتیجه: $\lambda - ۱ \leq x \leq \lambda$

حال اگر λ عددی صحیح باشد λ , $\lambda - ۱$ هر دو مد می‌باشند و اگر λ عددی صحیح نباشد بین λ و $\lambda - ۱$ عددی صحیح موجود است که مد می‌باشد.

مثال ۱۱: برای مثال قبل مقدار مد را برای بند الف و ب محاسبه کنید؟

الف) $\lambda = ۲/۵$, $\lambda - ۱ = ۱/۵$ بنابراین مد برابر است با $x_M = ۲$.

ب) $\lambda = ۵$, $\lambda - ۱ = ۴$ بنابراین مد برابر است با ۴ , $x_M = ۵$.

۶ . ۷ . ۲ تقریب توزیع دو جمله‌ای بوسیله توزیع پواسون

فرض کنید در توزیع دو جمله‌ای $n \to \infty$, $p \to ۰$ می‌توان به جای محاسبه احتمال با استفاده از تابع احتمال دو جمله‌ای از تابع احتمال پواسون استفاده نمود. در این حالت توزیع دو جمله‌ای را با توزیع پواسون با پارامتر $\lambda = np$ تقریب می‌زنیم.

توجه کنید که برای بدست آوردن مقدار λ امید ریاضی تابع پواسون را با امید ریاضی تابع احتمال دو جمله‌ای برابر قرار می‌دهیم که در نتیجه $\lambda = np$ خواهد شد.

مثال ۱۲: در طول یک روز تعداد ۱۰۰/۰۰۰ خودرو از جلوی پمپ بنزین عبور می‌کند که تعداد ۱۰۰ خودرو وارد پمپ بنزین می‌شوندو مطلوبست احتمال اینکه در طول روز حداقل ۵۰ خودرو وارد پمپ بنزین شوند؟

حل: با محاسبه p داریم: $p = \frac{۱۰۰}{۱۰۰/۰۰۰} = ۰/۰۰۱$ که عددی بسیار کوچک می‌باشد و چون n مقداری بزرگ می‌باشد می‌توان از تقریب توزیع دو جمله‌ای به پواسون استفاده نمود:

$$\lambda = np = ۱۰۰/۰۰۰ \times ۰/۰۰۱ = ۱۰۰$$

$$f_X(x) = \frac{۱۰۰^{x}\, e^{-۱۰۰}}{x!}$$

$$p(X \geq ۵۰) = ۱ - p(X < ۵۰) \sim ۰/۹۹۹$$

۲۴-۶ ۶ . ۸ توزیع یکنواخت

متغیر تصادفی X دارای توزیع یکنواخت می‌باشد اگر احتمال رخ دادن هر یک از نقاط $x=۱\,, x=۲\,, \ldots\,, x=n$ با یکدیگر برابر باشد. تابع چگالی متغیر تصادفی یکنواخت برابر است با:

$$f_X(x) = \frac{۱}{n} \qquad x = ۱, ۲, \ldots, n$$

$$= ۰ \qquad \text{سایر مقادیر}$$

امید، واریانس و تابع گشتاور توزیع یکنواخت عبارتند از:

$$E[X] = \sum_{۱}^{n} x\, \frac{۱}{n} = \frac{۱}{n}\left(\frac{n(n+۱)}{۲}\right) = \frac{n+۱}{۲}$$

به همین ترتیب:

$$E[X^2] = \sum_{1}^{n} x^2 \frac{1}{n} = \frac{1}{n}\left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right) = \frac{(n+1)(2n+1)}{6}$$

پس:

$$var(X) = E[X^2] - E^2[X] = \frac{(n+1)(2n+1)}{6} - \left(\frac{n+1}{2}\right)^2 = \frac{n^2-1}{12}$$

$$m_X(t) = E[e^{tx}] = \sum_{x=1}^{n} \frac{e^{tx}}{n} = \frac{1}{n}\sum_{1}^{n} (e^t)^x = \frac{1}{n} e^t \left(\frac{1-e^{nt}}{1-e^t}\right)$$

مثال ۱۳: یک تاس را پرتاب می‌کنیم X را متغیر تصادفی نتیجه حاصل از پرتاب در نظر می‌گیریم مطلوبست:

الف) تابع چگالی احتمال X.

ب) احتمال آمدن عدد زوج.

ج) امید، واریانس و تابع مولد گشتاور X.

حل: الف) X یک متغیر تصادفی یکنواخت است. بنابراین:

$$f(x) = \frac{1}{6} \qquad x = 1, 2, \dots, 6$$
$$= 0 \qquad \text{سایر مقادیر}$$

ب):

$$p(X = \text{عددی زوج}) = p(X=2) + p(X=4) + p(X=6) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

$$E[X] = \frac{6+1}{2} = 3/5$$

ج):

$$var(X) = \frac{36-1}{12} = 2/91$$

$$m_X(t) = \frac{e^t(1-e^{6t})}{6(1-e^t)}$$