آشوب

درس‌نامه‌ی کاربرد کامپیوتر در فیزیک

(اجتهادی، شریف، پاییز ۸۵)

مسئله‌ی آشوب در فیزیک بسیار اهمیت دارد؛ چون که اکثر مسائلی که در طبیعت دیده می‌شود، آشوبناک هستند. در این بخش ابتدا آشوب را تعریف کرده و سپس به بررسی ویژگی‌های مسئله‌های آشوبناک می‌پردازیم.

۱ آشوب

تا حالا معادلات دیفرانسیلی را حل کردید که جواب نهایی، مستقل از این است که از کجا شروع کرده‌اید خیلی با هم فرق ندارد. یعنی اگر از نقطه‌ای مثل $x_{\circ} \pm \delta x$ شروع کنیم، جواب نهایی بعد از زمان t در همسایگی نقطه‌ی $x(t)$ ($x(t) \pm \delta x(t)$) خواهد بود. اگر هم نقطه‌ی $x_{\circ}$ نقطه‌ی جذابی برای مسئله باشد، جواب در لحظه‌ی t همان $x(t)$ خواهد بود. ولی دسته‌ای از مسائل و معادلات دیفرانسیل هست که بدین صورت نیست؛ یعنی اگر هر چه همسایگی $\delta(x)$ را کوچک کنیم باز هم در زمان طولانی اگر صبر کنیم، به نقطه‌ای می‌رسیم که از جوابی که انتظار داریم بسیار دور است. به این گونه مسائل، مسائل آشوبناک گویند. آشوبناکی مسئله، خاصیتی از معادله‌ی دیفرانسیل مسئله است. در فیزیک اکثر مسائل این گونه‌اند. آشوبناک بودن مسئله به این دلیل اهمیت دارد که در اندازه‌گیری‌هایمان خطا داریم و اگر مسئله آشوبناک باشد اگر مکان و سرعت ذره‌ای با دقتی داشته باشیم می‌توانیم مکان و سرعت را با دقتی مناسب داشته باشیم ولی اگر مسئله آشوبناک باشد به علت خطای اولیه‌ای که داریم هیچ چیزی درباره مکان و سرعت نهایی می‌توانیم داشته باشیم یا به طور دقیق‌تر تا جایی جواب در همسایگی قرار دارد ولی از جایی به بعد از بازه‌ی همسایگی خارج می‌شود و در آن فاز دیگر هیچ چیزی نمی‌توان گفت. به همین دلیل است که مثلاً پیش‌بینی آب و هوا غیرممکن است؛ چون سیستم جوی سیستمی آشوبناک است و کمیت‌هایی چون دما، سرعت باد و ... را با دقتی می‌توان اندازه گرفت و به خاطر آشوبناک بودن با هیچ شبیه‌سازی یا معادله‌ای نمی‌توان وضعیت جوی را پیش‌بینی کرد. در صورتی که می‌توان با دقت بسیار خوبی کسوف را در چندین سال آینده پیش‌بینی کرد چون که آشوبناک نیست. به طور دقیق‌تر سیستم زمین و خورشید و ماه هم آشوبناک است؛ با این تفاوت که مقیاس زمانی پیش‌بینی فرق دارد. برای سیستم جوی چندین روز برای اینکه اثرات آشوب را ببینیم کافی است و برای سیستم زمین و خورشید چندین میلیون سال کافی باشد تا بتوان اثرات آشوبناکی را مشاهده کرد. حال برای بررسی مثالی از آشوبناک به جای این که از معادله‌ی دیفرانسیل استفاده کنیم، از یک مثال گسسته استفاده می‌کنیم. این مثال بسیار معروف است چون که اولین بار آشوب با این مسئله مطرح شد. فرض کنید کمیتی مثل X_n بین صفر و یک داریم که مقدار آن در هر قدم از رابطه‌ی

$$X_{n+۱} = ۴rX_n(۱ - X_n) \qquad (۱)$$

شکل ۱: رفتار نگاشت استاندارد به ازای r های مختلف

به دست بیاید که در این رابطه r پارامتری قابل تعیین است و مقداری بین صفر و یک دارد. به این رابطه، «نگاشت استاندارد»[1] گویند. اولین بار این رابطه را آقای فایگن‌بام[2] در ۱۹۷۸ با ماشین‌حساب و به طور دستی محاسبه کرد. این نگاشت را برای r های مختلف بررسی می‌کنیم (شکل ۱). اگر r را خیلی کوچک بگیریم، مستقل از این که مقدار اولیه‌ی x چقدر باشد بعد از مدتی می‌بینید که مقدار X_n به سمت صفر میل می‌کند؛ چون اگر $4r < 1$ باشد در هر قدم عددی کوچکتر از یک در X_n ضرب می‌شود (دقت کنید که X_n همیشه بین صفر و یک دارد) و X_n در هر قدم کوچک‌تر می‌شود. اگر r را بزرگ‌تر کنیم (مثلاً $r = 0.6$)، اتفاقی که می‌افتد این است که از هر جایی که شروع کنیم، بعد از کمی بالا و پایین رفتن به مقدار ثابت غیر صفری می‌رویم. نکته‌ای که باید به آن دقت کرد این است که این مقدار اولیه‌ی دلخواه هر جایی غیر از نقطه‌ی $X_0 = 0$ باشد چون که این نقطه یک نقطه‌ی ثابت[3] بدیهی است و مقدار X_n در هر قدم صفر خواهد شد. اگر $r = 0.8$ بگیریم، خواهیم دید که X_n بعد از کمی افت و خیز، به طور تناوبی دو مقدار خواهد گرفت که در بین آن‌ها نوسان می‌کند. اگر r را بیشتر کنیم و $r = 0.9$ بگیریم، می‌بینیم که از هر جا که شروع کنیم، جواب‌های نهایی متفاوتی می‌گیریم که به هیچ عددی نزدیک نمی‌شود. نکته‌ای که وجود دارد این است که برای سه مقدار r اولیه، اگر از همسایگی نقطه‌ی اولیه شروع کنیم، باز هم به جواب‌هایی مشابه حالت قبل می‌رسیم ولی برای حالت $r = 0.9$ اگر نقطه‌ی اولیه را کمی تغییر دهیم، منحنی کاملاً متفاوتی خواهیم داشت و این نشان‌دهنده‌ی فاز آشوبناک است.

[1] Standard Map
[2] Feigenbaum
[3] Fixed Point

۲ منحنی دوشاخیدگی

برای این که تغییر رفتار به فاز آشوبناک را بهتر بتوان دید، منحنی مشهور دیگری وجود دارد. این منحنی این گونه رسم می‌شود که ابتدا برای r های متفاوت تعدادی قدم صبر می‌کنیم تا نگاشت به حالت پایا برسد، سپس مقدار تعدادی از X_n های بعدی را در نمودار X_n بر حسب r قرار می‌دهیم. برای $r = ۰.۱$ همه‌ی نقاط جوابی برابر $X_۰ = ۰$ خواهد داشت و همه‌ی نقاط روی هم قرار خواهند گرفت. تا جایی که از r مشخصی به بعد تغییر فازی خواهیم داشت و به جای این که $X_۰ = ۰$ نقطه‌ی ثابت باشد، مقداری غیر صفر خواهیم داشت و این نقطه‌ی ثابت غیر صفر با افزایش r بزرگ می‌شود. در این حالت، همچنان همه‌ی نقاط X_n روی هم می‌افتند و در نمودار تنها یک نقطه داریم. می‌دانیم که از r ای به بعد برای X_n جواب نوسانی خواهیم داشت و برای هر تعداد نقطه که روی نمودار بگذاریم، نصف آن‌ها یک نقطه و نصف دیگر نقطه‌ی دیگری از نمودار خواهند شد. در این جا می‌بینیم که منحنی به دو شاخه تقسیم شده که هر شاخه نشان‌دهنده‌ی یکی از جواب‌های مسئله است و این جواب‌ها از هم دور هم می‌شوند. اگر r را همین طور بیشتر کنیم، می‌بینیم که هر شاخه دوباره به دو شاخه‌ی دیگر تبدیل می‌شود و به جای دو شاخه و دو جواب تناوبی، چهار شاخه و چهار جواب تناوبی داریم. همان‌طور که در شکل ۲ می‌بینید روند دو شاخه شدن همین‌طور ادامه دارد و بعد از چهارشاخگی، هشت‌شاخگی، شانزده‌شاخگی و همین طور تا جایی که به طور تئوری تعداد این شاخه‌ها بی‌نهایت می‌شود و وارد فاز آشوبناک می‌شویم. در آن مقادیر r، نگاشت X_n هر مقدار دلخواهی را می‌تواند داشته باشد. این منحنی به «منحنی دوشاخیدگی»[۴] معروف است و چنین منحنی‌ای را برای تمامی مسائل آشوب می‌توان دید.

۳ توجیه گرافیکی رفتار نگاشت استاندارد

می‌توان تصویری گرافیکی ارائه داد که با اجرای نگاشت چه اتفاقی می‌افتد و چرا برای r های مختلف رفتارهای متفاوتی از نگاشت استاندارد می‌بینیم.

اگر نگاشت استاندارد را به صورت تابع

$$f(x) = ۴rx(۱ - x) \tag{۲}$$

نوشت. اگر این معادله را رسم کنیم، سهمی‌ای خواهیم داشت که در نقطه‌ی $(\frac{۱}{۲}, r)$ دارای یک بیشینه است و شیب در نقطه‌ی $(۰, ۰)$ برابر $۴r$ است. اگر منحنی $y = x$ را همزمان با این منحنی قطع دهیم، اجرای نگاشت معادل با این است که روی شکل ۳، مسیر را دنبال کنیم.

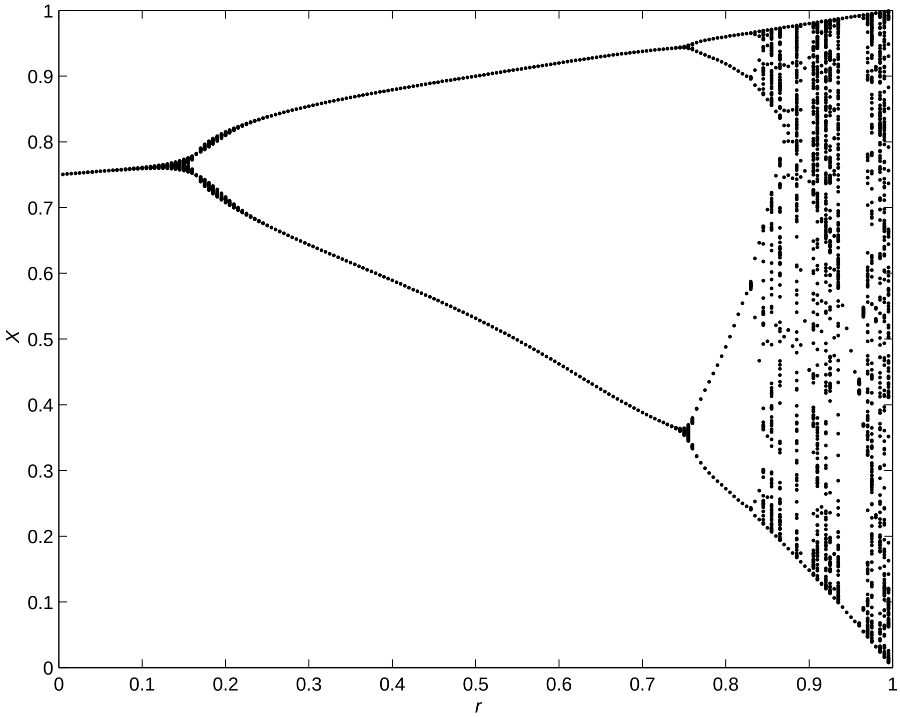
معنی نقطه‌ی ثابت در این نمودار این است مقدار X_n در هر قدم با قدم قبلی‌اش یکسان باشد. یعنی:

$$x = ۴rx(۱ - x) \tag{۳}$$

همان‌طور که می‌بینید این معادله یک جواب بدیهی $x = ۰$ و یک جواب غیر بدیهی $x = ۱ - \frac{۱}{۴r}$ دارد. همان‌طور که می‌بینید چون $۱ > x > ۰$ است اگر $r < \frac{۱}{۴}$ باشد، نقطه‌ی ثابت دوم وجود ندارد و فقط نقطه‌ی ثابت $x = ۰$ را داریم. برای $r < \frac{۱}{۴}$ مانند قسمت (b) شکل ۳ را خواهیم داشت که همان‌طور که می‌بینید نقطه $x = ۰$ نقطه‌ی ثابت جذاب است.

برای $r > \frac{۱}{۴}$ نقطه‌ی ثابت $x = ۱ - \frac{۱}{۴r}$ نقطه‌ی جذاب مسئله خواهد بود. همان طور که می‌دانید اگر r از حدی بیشتر شود، مسئله دارای دو جواب خواهد شد. قسمت (c) شکل ۳ این وضعیت را نشان می‌دهد. همان طور که می‌بینید مسیر

[۴] Bifurcation Curve



شکل ۲: منحنی دوشاخیدگی برای نگاشت استاندارد

در یک حلقه گیر می‌افتد و به جای یک نقطه‌ی ثابت جذاب، یک حلقه‌ی جذاب داریم که از هر جا شروع کنیم به این حلقه می‌رسیم. با افزایش r حلقه‌ی چهارتایی ظاهر می‌شود (قسمت (d) شکل ۳) و از r ای به بعد دیگر هیچ حلقه‌ای نخواهیم داشت. در این وضع که وارد فاز آشوبناک شده‌ایم، x می‌تواند همه‌ی نقاط فضا را بگیرد.

حلقه‌ی دوتایی را می‌توان این گونه به دست آورد که تابع را در خودش قرار دهیم:

$$X_{n+۱} = f(X_n) \tag{۴}$$

$$X_{n+۲} = f(X_{n+۱}) = f(f(X_n)) = g(X_n)$$

با این کار تابع دیگری به دست می آید که در هر بار دو قدم را همزمان انجام می‌دهد و هر بار دو قدم جلوتر را خواهیم داشت. بنابراین اگر در فضای $f(x)$ دارای یک حلقه باشیم، درفضای $g(x)$ یک نقطه‌ی ثابت داریم؛ چون در هر قدم تنها یکی از دو جواب را می‌بینیم. به همین ترتیب برای حلقه‌ی چهارتایی کافی است که چهار بار تابع $f(x)$ را در خودش قرار دهیم یا:

$$X_{n+۴} = g(g(X_n)) \tag{۵}$$

و به این ترتیب می‌توان به صورت تئوری همه‌ی نقاط ثابت را پیدا کرد. اگر هم تابع $f(x)$ وارد فاز آشوبناک بشود، همه‌ی توابع $g(x)$ و $g((x))$ و ... هم آشوبناک می‌شوند.

شکل ۳: تصویر گرافیکی در هنگام اجرای نگاشت استاندارد

نکته‌ی مهمی که در این جا هست این است که اگر منحنی دوشاخیدگی را برای $g(X_n)$ رسم کنیم، منحنی دوشاخیدگی‌ای شبیه به منحنی دوشاخیدگی $f(X_n)$ می‌بینیم؛ با این تفاوت که برای دوشاخیدگی اول تنها یک از شاخه‌ها را می‌بینیم (شکل ۴)؛ و این بدین معنی است که نگاشت $g(X_n)$ شبیه نگاشت $f(X_n)$ رفتار می‌کند. این رفتار مشابه به خاطر خاصیت خودتشابهی[5] در تابع $f(X_n)$ است. خاصیت خودتشابهی را به وضوح می‌توان در منحنی دوشاخیدگی دید. اگر به قسمتی از منحنی نگاه کنید، می‌بینید که شبیه کل منحنی است و با تغییر مقیاس می‌توان آن قسمت را روی کل منحنی انداخت. به همین معنی اگر به بخشی از منحنی دوشاخیدگی $f(X_n)$ نگاه کنیم، منحنی دوشاخیدگی $g(X_n)$ بدست می‌آید.

۴ خودتشابهی و نماهای عمومی در مسئله‌های آشوب

خودتشابهی به این معنی است که می‌توان با مقیاس کردن قسمتی از یک شکل آن را روی خودش انداخت. در بعضی مسائل ممکن است ضریب مقیاس در راستای عمودی و افقی با هم فرق کند بدین معنی که شکل را در دو راستای مختلف باید به اندازه‌های مختلفی مقیاس کرد تا روی شکل اصلی بیفتد. بنابراین در چنین شکل‌هایی دو ضریب مقیاس می‌توان تعریف کرد.

برای نگاشت استاندارد این دو ضریب مقیاس را بررسی می‌کینم. اگر فاصله‌ی دهنه‌ی دوشاخگی منحنی را با d نشان دهیم (شکل ۵)، خودتشابهی در راستای عمودی وقتی برقرار است که برای دهنه‌های متوالی چندشاخگی داشته باشیم:

$$\frac{d_2}{d_1} = \frac{d_3}{d_2} = ... = \frac{d_{i+1}}{d_i} \qquad (٦)$$

این تساوی‌ها در حالت کلی درست نیست؛ ولی هر چه i زیاد می‌شود و سمت چندشاخگی‌ها با تعداد بیشتری می‌رویم،

[5] self-similarity

شکل ۴: منحنی دوشاخیدگی برای نگاشت $g(X_n)$

این نسبت به عددی میل می‌کند که ما آن را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\alpha = \lim_{i\to\infty} \frac{d_{i+۱}}{d_i} \qquad (۷)$$

به طور مشابه می‌توان پارامتری برای مقیاسیدگی[٦] در راستای افقی هم تعریف کرد. اگر مطابق شکل ۵، فاصله‌ی بین r هایی که دوشاخگی‌ها اتفاق می‌افتد را در نظر بگیریم، می‌توان ضریب مقیاس در راستای افقی δ را به صورت زیر تعریف کرد:

$$\delta = \lim_{i\to\infty} \frac{r_{i+۲} - r_{i+۱}}{r_{i+۱} - r_i} \qquad (۸)$$

می‌توان نشان داد که فاصله‌ی هر دوشاخگی با نقطه‌ی r_c (اولین جایی که نقطه‌ی ثابت غیر بدیهی داریم) بر حسب پارامتر δ رابطه‌ای توانی است.

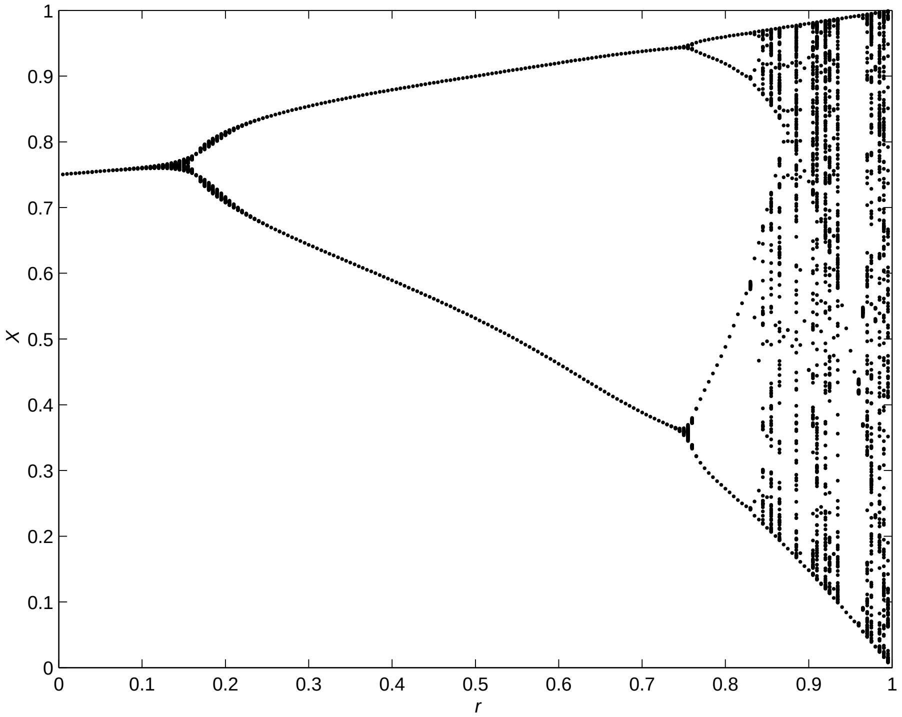
$$r_i - r_c = A\delta^{-i} \qquad (۹)$$

که A صرفاً ضریب تناسب است.

به پارامترهای α و δ به این علت که مستقل از جزئیات مسئله هستند، اصطلاحاً «پارامترهای عمومی (جهانی)[٧]» گویند. تعداد زیادی از مسائل را می‌توان یافت که α و δ ی یکسانی دارند و در واقع مسئله‌های مختلف را می‌توان بر حسب این پارامترها طبقه‌بندی کرد. دقت به این نکته لازم است که ضریب A در رابطه‌ی ۷، پارامتری عمومی نیست و در نگاشت‌های مختلف فرق می‌کند.

محاسبه‌ی α و δ در مسائل آشوب از روی منحنی دوشاخیدگی معمولاً کار ساده‌ای نیست؛ به این علت که یافتن محل دوشاخگی‌ها در عمل کار مشکلی است (اگر چه با داشتن نگاشت، آن‌ها را در تئوری به راحتی می‌توان محاسبه کرد). برای محاسبه‌ی α و δ می‌توان از روش ساده‌تری استفاده کرد. از خاصیت خودتشابهی در منحنی دوشاخیدگی

[٦] Scaling
[٧] Universal



شکل ۵: منحنی دوشاخیدگی برای نگاشت استاندارد. در این شکل r و d مشخص شده است.

استفاده می‌کنیم. نقطه‌ی $x = \frac{1}{2}$ نقطه‌ی خاصی است به این خاطر که یک در میان شاخه‌ها را قطع می‌کند. بنابراین اگر $x = \frac{1}{2}$ خطی افقی رسم کنیم، و r را محل برخورد خط $x = \frac{1}{2}$ با منحنی دوشاخیدگی بگیریم و d را فاصله‌ی محل برخورد تا جواب دیگر در شاخه‌ی دیگر بگیرید.

۵ مثال‌های دیگری از آشوب

در قسمت‌های قبل نگاشت استاندارد را بررسی کردیم. در این قسمت به مثال‌های دیگری از آشوب می‌پردازیم. مسئله‌ی آشوب اولین بار در مسئله‌ی اکولوژی[۸] مطرح شد. اگر جمعیت یک جامعه‌ی حشره را بررسی کنیم، نسل‌های مختلفی از حشرات را مشاهده می‌کنیم. حشرات از تخم خارج می‌شوند، به بلوغ می‌رسند، زاد و ولد می‌کنند، و می‌میرند. بدین معنی می‌توان زمان را به نوعی ناپیوسته و هر قدم زمانی را معادل با یک نسل از حشرات در نظر گرفت. جمعیت این جامعه را می‌توان این گونه مدل کرد که جمعیت نسل بعدی را متناسب با جمعیت نسل قبل در نظر گرفت و نرخ زاد و ولد را به صورت ضریبی برای این تابعیت خطی در نظر گرفت. می‌دانیم که در چنین جامعه‌ای اثرات غیر خطی هم وجود دارد؛ مثلاً احتمال این که یک حشره بتواند جفت‌گیری کند به تعداد حشرات دیگر بستگی دارد، یا با داشتن این قید در جامعه که غذا محدود است، مقدار غذایی که هر حشره می‌تواند بخورد به تعداد سایر حشرات بستگی دارد. این اثرات غیر خطی که ناشی از رقابت حشرات است را در ساده‌ترین حالت می‌توان به صورت مرتبه‌ی دوم جمعیت (که با X_n

[۸] Ecology

می‌نویسیم) نشان داد. بنابراین به طور خلاصه، جمعیت هر نسل از حشرات را می‌توان از روی جمعیت نسل قبلی از رابطه‌ی

$$X_{n+1} = \alpha X_n - \beta X_n^2 \qquad (10)$$

بدست آورد. علامت منفی در جمله‌ی دوم به این خاطر است که رقابت بین حشرات باعث مرگ و میر و در نتیجه کاهش جمعیت در سال بعد می‌شود. اگر این نگاشت را در دستگاه واحدهای کاهیده بنویسیم:

$$X_{n+1} = \alpha X_n(1 - \frac{\beta}{\alpha} X_n)$$

که اگر $\frac{\beta}{\alpha} = 1$ و $\alpha = 4r$ بگیریم، به نگاشت استاندارد می‌رسیم.

همچنین می‌توان نگاشت‌هایی دوبعدی را بررسی کرد. برای مثال جمعیت جامعه‌ای با دو گونه‌ی روباه و خرگوش را در نظر بگیرید که روباه‌ها از خرگوش‌ها تغذیه می‌کنند. چون جمعیت روباه‌ها به جمعیت خرگوش‌ها بستگی دارد و برعکس، برای چنین جامعه‌ای در حالت کلی نگاشتی به صورت

$$X_{n+1} = f(X_n, Y_n) \qquad (11)$$

$$Y_{n+1} = g(X_n, Y_n)$$

می‌توان نوشت که X_n و Y_n به ترتیب جمعیت روباه‌ها و خرگوش‌ها در نسل n ام است. می‌توان نشان داد که این جوامع هم رفتارهای آشوبناک نشان می‌دهند.[9]

در حالت نگاشت یک بعدی دیدیم که برای دیدن فاز آشوب می‌توان از منحنی x بر حسب زمان یا منحنی دوشاخیدگی را رسم کرد. برای حالت نگاشت دو بعدی کار دیگری که می‌توان انجام داد رسم فضای فاز نگاشت (منحنی x بر حسب y) است. در این جا با اجرای نگاشت، در هر قدم یک نقطه‌ی جدید روی منحنی گذاشته می‌شود. در این منحنی هم می‌توان فاز آشوبناک و غیرآشوبناک را از هم تمییز داد. اگر نگاشت یک نقطه‌ی ثابت جذاب داشته باشد، از هر جایی که شروع کنیم به یک نقطه‌ی ثابت می‌رسیم. وقتی که اولین دوشاخیدگی اتفاق می‌افتد، این نقطه‌ی ثابت جذاب بزرگ می‌شود و به تبدیل به یک حلقه‌ی جذاب می‌شود. در واقع حلقه‌ی جذاب در نگاشت دو بعدی معادل دوشاخیدگی در نگاشت یک بعدی است. در مثال روباه و خرگوش حلقه‌ی جذاب بدین معنی است که در یک نسل تعداد خرگوش‌ها بیشتر از روباه‌ها است و در نسل بعد تعداد روباه‌ها بیشتر از خرگوش‌ها. وقتی به فاز چهارشاخگی می‌رسیم، حلقه جذاب یه دو حلقه‌ی داخل هم تبدیل می‌شود (شکل ٦)؛ و همین طور تعداد حلقه‌ها بیشتر می‌شود تا به فاز آشوبناک می‌رسیم. ضمن این که در این جا خود حلقه‌ها هم می‌تواند پهنا داشته باشند و می‌توان داخل حلقه محدوده‌ی آشوب را دید.

اگر علاقمند به محاسبه‌ی نماهای جهانی این مسئله باشیم، باید منحنی‌ای مثل منحنی شکل ۵ رسم کنیم. برای نگاشت‌های چند بعدی، رسم منحنی شکل ۵ کار ساده‌ای نیست. کلکی مرسومی که برای محاسبه‌ی نماهای جهانی استفاده می‌شود، استفاده از «نقشه‌ی پوانکاره»[10] است. در نقشه‌ی پوانکاره، فضای فاز نگاشت را با یک صفحه‌ی فرضی قطع می‌دهیم (در این جا که یک مسئله‌ی دو بعدی داریم، منحنی x بر حسب y را با یک خط قطع می‌دهیم). نقاط تقاطع صفحه‌ی فرضی و نقاط فضای فاز، نقشه‌ی پوانکاره‌ی آن نگاشت را تشکیل می‌دهند. اگر در فضای فاز، نقطه‌ی ثابت جاذب داشته باشیم، یک نقطه‌ی تقاطع داریم و نقشه‌ی پوانکاره یک نقطه خواهد بود. اگر حلقه‌ی جاذب

[9] برای مطالعه‌ی بیشتر می‌توانید به مقاله‌هایی مثل Eur. Phys. J B 13, 601-606 (2000) رجوع کنید.
[10] Poincare map

شکل ۶: فاز غیرآشوبناک و آشوبناک برای نگاشت دوبعدی شکار و شکارچی.

داشته باشیم، دو نقطه‌ی تقاطع و اگر چهارشاخگی داشتیم، چهار نقطه‌ی تقاطع و همین طور برای سایر چندشاخگی‌ها، به تعداد چندشاخگی، نقطه‌ی تقاطع و در نتیجه در نقشه‌ی پوانکاره نقطه داریم. در واقع نقشه‌ی پوانکاره تصویری از فضای چند بعدی به فضای یک بعدی است. با این روش می‌توان منحنی دوشاخیدگی‌ای مثل شکل ۵ را به ازای r های مختلف، برای کمیت‌های مختلف رسم کرده و نماهای α و δ را برای آن‌ها محاسبه کرد.

۶ مثال‌های دیگری از آشوب

نگاشت‌های دیگر

$$f(x) = xe^{5r(1-x)} \tag{12}$$

$$f(x) = r[1 - (2x - 1)^4] \tag{13}$$