دانشگاه صنعتی شریف
گرانش و نسبیت عام-۱

شماره درس ۲۴۱۴۸-۱

گرانش و نسبیت عام ۱

رضا منصوری

بهمن ۱۳۹۲

۱. ثابت‌ها

$$c = ۲/۹۹۷۹۳۰ \times ۱۰^{۱۰} \frac{cm}{s}$$

$$G = ۶/۶۶۸ \times ۱۰^{-۸} g^{-۱} cm^{۳} s^{-۲}$$

$$\mathcal{K} = \frac{۸\pi G}{c^{۲}} = ۱/۸۶۵ \times ۱۰^{-۲۷} g^{-۱} cm$$

$$\frac{۲G}{c^{۲}} = ۱/۴۸۴ \times ۱۰^{-۲۸} g^{-۱} cm$$

۲. داده‌ها

۲.۱ جرم

	m (گرم)	$۲m\frac{G}{c^{۲}}$ (سانتی‌متر)
پروتون	$۱/۶۷ \times ۱۰^{-۲۴}$	$۲/۴۸ \times ۱۰^{-۱۲}$
زمین	۶×۱۰^{۲۷}	$۰/۹$
خورشید	۲×۱۰^{۳۳}	۳×۱۰^{۵}
انبوهه کروی ستاره‌ای ($۱۰^{۶} M_{\odot}$)	$۱۰^{۳۹}$	$۱۰^{۱۱}$
کهکشان ($۱۰^{۱۰} M_{\odot}$)	$۱۰^{۴۳}$	$۱۰^{۱۵}$
خوشه‌های کهکشانی ($۱۰^{۱۴} M_{\odot}$)	$۱۰^{۴۷}$	$۱۰^{۱۹}$
عالم ($۱۰^{۲۱} M_{\odot}$)	$۱۰^{۵۴}$	$۱۰^{۲۷}$

۲.۲ طول

	سانتی‌متر	ثانیه نوری
سال نوری	$۹/۵ \times ۱۰^{۱۷}$	–
پارسک	$۳/۱ \times ۱۰^{۱۸}$	–
شعاع زمین	$۶/۴ \times ۱۰^{۸}$	۲×۱۰^{-۲}
شعاع خورشید	۷×۱۰^{۱۰}	۲
کهکشان	$۱۰^{۲۳}$	$۱۰^{۱۳}$
خوشه کهکشانی	$۱۰^{۲۶}$	$۱۰^{۱۶}$
عالم	$۱۰^{۲۸}$	$۱۰^{۱۸}$

فهرست مطالب

دانشگاه صنعتی شریف
گرانش و نسبیت عام-۱
شماره درس ۲۴۱۴۸-۱

فصل ۱: گرانش و نسبیت عام

رضا منصوری

ویراست ۰.۲

مرداد ۱۳۹۲

۱.۱ تاریخچه و تحولات چند دهه اخیر

اهمیت معرفت شناختی نسبیت عام
ورود به دانشکده‌های فیزیک از دهه ی ۴۰/۶۰ پس از کشف تابش زمینه‌ی کیهانی
تحولات نسبیت از دهه‌ی ۹۰-۷۰/۶۰-۴۰
وضعیت کنونی نسبیت: شباهت با الکترودینامیک
کاربردها و شاخه‌های نسبیت عام:
-امواج گرانشی و رصدخانه‌های امواج گرانشی؛
- اختر فیزیک نسبیتی: تپ اخترها، گاما-فوران گرها، سیاه‌چاله‌ها؛
- همگرایی گرانشی؛
- تابش زمینه‌ی کیهانی؛
-کیهان‌شناسی؛
- GPS و زندگی روزمره؛
- گرانش کوانتومی؛
- مبانی ریاضی: تکینگی‌ها و سانسور کیهانی.

ابداع نسبیت عام پدیده‌ای است خاص در معرفت‌شناسی علم نوین. انگیزه‌ی آن مغایرت نظریه‌های موجود، از جمله گرانش نیوتونی، با تجربه و رصد نبود. نظریه گرانش نیوتون در ابعاد زمینی و نیز در منظومه شمسی با دقت زیاد پدیده‌ها را توصیف و پیش‌بینی می‌کرد. تنها در مورد حضیض عطارد حدود ۴۰ ثانیه قوسی در قرن از ۲۰۰۰ ثانیه قوسی مشکل توضیح داشت که آن هم به حرکت‌های نامنظم در منظومه و یا دقت رصد واگذاشته شده بود. انیشتین اما انگیزه دیگری داشت.

پس از اینکه در سال ۱۲۸۶ / ۱۹۰۷، در زمان مظفرالدین شاه قاجار، مینکوفسکی نسبیت خاص انیشتین را به صورت چهاربعدی فرمول‌بندی کرد و فضازمان به اصطلاح مینکوفسکی را وارد مفاهیم فیزیک کرد، انیشتین با توجه به اصل ماخ کوششی را برای نسبیتی کردن گرانش شروع کرد. به یاد داشته باشیم که پوآنکاره در سال ۱۲۸۴، چند ماه پیش از مقاله نسبیت خاص انیشتین، در مقاله خود که دو اصل نسبیت را فرمول‌بندی کرده بود، مدلی هم از یک میدان گرانش نرده‌ای نسبیت خاصی ارایه داده بود. اما انیشتین از رهیافتی شروع کرد که می‌خواست اصل ماخ و هم‌ارزی شتاب و گرانش را به طریقی در چارچوب نسبیت بیاورد. او می‌دانست که بیان شتاب در نسبیت خاص باعث می‌شود متریک تخت مینکوفسکی در ظاهر به یک متریک فضازمان ناتخت، شبه-ریمانی، تبدیل شود. از این جهت لازم بود ابزار هندسه ریمانی و تانسورها در این فضا را فرابگیرد. این بود که دست کم ۵ سال طول کشید تا توانست اولین فرمول‌بندی خود را برای گرانش در بیان متریک یک فضای ریمانی و معادلات دینامیکی متناظر با آن را ارایه دهد. سرانجام در سال ۱۲۹۴ /۱۹۱۵، در زمان احمدشاه، بود که توانست فرمول‌بندی کنونی نسبیت عام خود را ارایه دهد. به‌این‌ترتیب نظریه پیچیده‌ای به‌دست آمد که انگیزه آن صرفا معرفت شناختی بود و مبتنی بود بر اصل ماخ و نسبیت. توضیح انتقال حضیض عطارد، و به تبع آن انتقال حضیض بقیه سیاره‌ها پس از آن که جواب معادلات نسبیت عام برای توزیع ماده با تقارن کروی را شوارتس‌شیلد پیدا کرد ممکن شد.

گرچه در انتهای جنگ جهانی اول در سال ۱۹۱۸/۱۲۹۷ اولین آزمون مستقیم نسبیت عام یعنی انحراف نور از کنار خورشید ثبت شد، ولی این اهمیت معرفت‌شناختی نسبیت عام بود که در معرفت بشری تحول ایجاد کرد. تصور اینکه فضا ویژگی‌هایی دارد وابسته به ماده آن‌چنان به دور از بینش چندهزار ساله طبیعیون بود که به‌راحتی پذیرفته نشد، به‌ویژه برای فلاسفه پذیرفتنی نبود. از طرف دیگر ریاضیات به نسبت پیچیده آن باعث شد نسبیت عام کمابیش در دانشکده‌های ریاضی و نه فیزیک تدریس شود و کمتر به آن‌عنوان نظریه‌ای فیزیکی نگاه شود، مثلاً آنگونه که به مکانیک کوانتوم نگاه می‌شد. این روال تا آخر دهه ۱۹۵۰/۱۳۳۰ که اثر موسیازر در فیزیک اتمی کشف شد، چنین بود.

پس از کشف اثر موسیازر امکان تحقیق انتقال به سرخ گرانشی در طیف اتم‌ها در آزمایشگاه به‌وجود آمد. پس از اولین آزمون از این نوع نسبیت عام به مرور به‌عنوان نظریه‌ای فیزیکی پذیرش عام یافت. شوک اصلی یا کشف تابش زمینه کیهانی در سال ۱۹۶۵/۱۳۴۴ اتفاق افتاد. هنگامی که با پذیرش دینامیک برای عالم، مدل‌هایی برای عالم و انبساط آن ساخته شد، و معلوم شد عالم از یک مهبانگ شروع به انبساط کرده است. گاموف، فیزیکدان روسی مقیم آمریکا

در سال ۱۹۴۸/۱۳۲۷ محاسبه کرد که باید فوتون‌هایی از عالم اولیه پس از اینکه عالم به اندازه کافی بزرگ شد و این فوتون‌ها از ماده جدا شدند باید هنوز وجود داشته باشند و به‌صورت گازی در حال سرد شدن که دمای کنونی آنها باید حدود ۱۰° کلوین باشد. تابش زمینه کیهانی، نامی که اکنون بر این گاز فوتونی می‌گذاریم. معلوم شد هست و دمای آن $۲/۷^\circ$ کلوین است. این کشف تأثیر تعیین‌کننده‌ای بر پذیرش مدل مهبانگ عالم و نیز آینده نسبیت عام گذاشت. پس از این کشف بود که فیزیکدانان بسیاری از سایر شاخه‌ها، به‌ویژه از فیزیک اتمی و ذرات بنیادی به‌سوی کیهان‌شناسی و نسبیت عام روی آوردند. کشف قوانین مربوط به سیاهچاله‌ها، اخترفیزیک نسبیتی و تحول ستاره‌ها از جمله تپ‌اخترها و فوران–گرها، همگرایی گرانشی، تأثیر زمینه کیهانی، تأثیر نسبیت عام در زندگی روزمره مانند نقش آن در GPS، همگی از تحولات این دوره است.

با پیشرفت در زمینه‌های نظری و کاربردی نسبیت عام اکنون در دهه دوم قرن بیست و یکم این رشته دیگر رشته‌ای کلاسیک از فیزیک شده است شبیه به الکترودینامیک. بخش‌هایی مانند امواج گرانشی آن‌چنان کاربردی شده است که به زمینه آنها در الکترومغناطیس شبیه شده است، البته با زمینه‌ای نظری بسیار پیچیده‌تر و زمینه‌ای تجربی بسیار پرهزینه‌تر با فناوری عالی. به همین دلیل است که نمی‌توان درس نسبیت عام را مانند ۵۰ سال پیش تدریس کرد. لازم است جدا از مبانی نظری آن به اختصار هم به کاربردهای آن پرداخت. حتی مبانی آن را نمی‌توان در یک نیم‌سال تدریس کرد. بعضی از کاربردهای آن نیز هر کدام درس جداگانه‌ای است.

۲.۱ گرانش: ضعیف‌ترین بر هم‌کنش؛ جهانی بودن گرانش

دو برهم‌کنش الکترومغناطیسی و گرانش در ابعاد بزرگ حاکم‌اند. مقایسه این دو بیانگر شدت یا ضعف یکی نسبت به دیگری است. برای این منظور شدت این برهم‌کنش‌ها را برای دو ذره (دو پروتون) مقایسه می‌کنیم:

$$\frac{Gm_p^۲}{r^۲}/\frac{e^۲}{r^۲} = ۰/۸ \times ۱۰^{-۳۶} \tag{۱}$$

این نشان می‌دهد که گرانش بسیار ضعیف یعنی بسیار ضعیف‌تر از الکترومغناطیس است. همین‌طور می‌توان ثابت ساختار ریز الکترومغناطیس را با «ثابت ساختار ریز گرانش» مقایسه کرد:

$$\alpha = \frac{e^۲}{\hbar c} = \frac{۱}{۱۳۷} \tag{۲}$$

$$\alpha_G = \frac{Gm_p^۲}{\hbar c} = ۵/۹ \times ۱۰^{-۳۹}$$

که همان مرتبه بزرگی ضعیف بودن گرانش را نشان می‌دهد. برای جرم‌های زیاد، البته، گرانش‌بر الکترومغناطیس، یا هر برهم‌کنش دیگری سبقت می‌گیرد.

۳.۱ اثرهای نسبیت عامی کجا وارد می‌شود؟

به دو روش می‌توان به این سوال‌ها پاسخ داد. اول اینکه منشأ گرانش را جرم می‌گیریم. به هر جرمی می‌توانیم طولی نسبت دهیم که به آن طول یا شعاع شوارتس‌شیلد می‌گویند:

$$\mathcal{R} = \frac{۲GM}{c^۲} \tag{۳}$$

ضریب ۲ در اینجا تعیین‌کننده نیست اما چون بعدها لزوم آن را از معادلات انیشتین درمی‌یابیم اینجا نیز وارد کرده‌ایم. با دانستن این شعاع می‌گوییم گرانش در اطراف جرمی مرکزی به فاصله‌ی بسیار بیشتر از این شعاع همان گرانش

نیوتونی حاکم است، یعنی گرانش ضعیف است. برای خورشید این شعاع از مرتبه کیلومتر است، و نسبت این شعاع شوارتس‌شیلد به شعاع خورشید برابر است با

$$\frac{\mathcal{R}}{R_\odot} = ۱۰^{-۵} \tag{۴}$$

که این ضعیف بودن گرانش را در اطراف خورشید نشان می‌دهد. این نسبت برای یک سیاره نوترونی برابر ۰/۳ است که نشان می‌دهد باید منتظر پدیده‌های جدیدی در اطراف یک ستاره نوترونی باشیم.
روش دوم استفاده از ویژگی انحنای فضا است. به انحنا در هر نقطه یک شعاع انحنا نسبت داده می‌شود. مقایسه مقیاس‌های مورد بحث با این شعاع هم شهود دیگری از ضعف یا شدت گرانش به ما می‌دهد که در فصل‌های آینده با آن برخورد خواهیم کرد.

۴.۱ تفاوت مفهوم نیرو و میدان و تأثیر آن در فرمول‌بندی نسبیت عام

به دو مفهوم نیروی گرانش و الکترومغناطیس در فیزیک غیرنسبیتی نگاهی می‌اندازیم.نیروی گرانش میان دو ذره برابر است با

$$F = GmM\frac{۱}{r^۲}$$

که معادل است با این پتانسیل گرانشی میان دو ذره

$$V = -GmM\frac{۱}{r}$$

همین‌طور نیروی الکتروستاتیکی را چنین بیان می‌کنیم

$$F = q_۱q_۲\frac{۱}{r^۲}$$

و معادل آن پتانسیل الکتروستاتیکی می‌شود

$$\varphi = -q_۱q_۲\frac{۱}{r}$$

این نیروها به این نحو قابل تعمیم به ۳ بعد (۲+۱) و (۱+۱) بعد نیستند.
به منظور درک ارتباط با نظریه میدان در هر دو مورد معادله لاپلاس را برای پتانسیل می‌نویسیم. داریم

$$\Delta\Psi = \pi\rho \tag{۵}$$

میدان خارج از توزیع جرم کروی (دایروی) یا خارج از ذره و توزیع ماده یا بار برابر است با

$$\Delta\Psi = ۰$$

که در مختصات کروی به این صورت در می‌آید

$$\Delta\Psi = \frac{۱}{r^۲\sin\vartheta}\left[\sin\vartheta\frac{\partial}{\partial r}\left(r^۲\frac{\partial\Psi}{\partial r}\right) + \frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\sin\vartheta\frac{\partial\Psi}{\partial\vartheta}\right) + \frac{۱}{\sin\vartheta}\frac{\partial^۲\Psi}{\partial\varphi^۲}\right] \tag{۶}$$

در نتیجه برای تقارن کروی داریم

$$\Delta\Psi(r) = \frac{\partial^۲\Psi}{\partial r^۲} + \frac{۲}{r}\frac{\partial\Psi}{\partial r} = ۰$$

جواب این معادله در سه‌بعدی می‌شود

$$\Psi \propto \frac{1}{r}$$

اما در دو بعد با استفاده از مختصات استوانه‌ای r, φ داریم

$$\Delta\Psi = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left[r\frac{\partial\Psi}{\partial r}\right] + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\Psi}{\partial\varphi^2} \tag{۷}$$

که در نتیجه تقارن دایره‌ای در صفحه می‌شود

$$\Delta\Psi = \frac{\partial^2\Psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial\Psi}{\partial r} = 0$$

که جواب آن با سه‌بعد متفاوت است

$$\Psi \propto \ln r$$

توجه کنیم که نقطه در دو بعد هم‌ارز است با ریسمان به طول بینهایت. به‌این‌ترتیب تحدید معادلات نیوتون به ۲+۱ بعد مشکلی ایجاد نمی‌کند. اما در مورد معادلات ماکسول چطور؟ به این چهارعملگر دیفرانسیلی در معادله‌های ماکسول نگاه کنید:

$$\nabla . E \qquad , \qquad \nabla \wedge E \qquad , \qquad \nabla . B \qquad , \qquad \nabla \wedge B \tag{۸}$$

از میان این عملگرها تاو در ۲ و یک بعد تعریف نشده است. پس نمی‌توانیم معادله‌های ماکسول را در این شکل به ابعاد کمتر از ۳ تعمیم دهیم. برای تعمیم متوسل به معادلات هموردا می‌شویم با کمیت‌های میدان به صورت زیر:

$$A_i \qquad , \qquad F_{ij} = A_{i,j} - A_{j,i} \qquad , \qquad F_{ij,j} = J_i \tag{۹}$$

$$^*F_{ij,j} = 0$$

A_i و F_{ij} در $n+1$ برای $n \geq 1$ بعد تعریف شده است. پس معادلات کامل ماکسول را می‌توان به این صورت در ۲+۱ و ۱+۱ بعد هم نوشت. از جمله نیروی الکترومغناطیسی در بعد ۲+۱ با همان استنباط کولنی می‌خواند.

می‌توان به گرانش به عنوان نظریه میدان تانسوری در فضای مینکوفسکی نیز نگاه کرد که تفصیل آن در فصل ۲ آمده است. میدان تانسوری $\Psi\mu\nu$ را نماینده‌ی ذره‌ای با اسپین ۲ در نظر بگیرید. معادله‌ی میدان متناظر می‌شود

$$\Psi_{\mu\nu,\sigma}{}^{\sigma} - \Psi_{\lambda\nu,\mu}{}^{\lambda} - \Psi_{\lambda\mu,\nu}{}^{\lambda} + \Psi^{\lambda}_{\lambda,\mu\nu} + \eta_{\mu\nu}(\Psi^{\lambda\sigma}_{,\lambda\sigma} - \Psi^{\sigma}_{\sigma,\lambda}{}^{\lambda}) = 0 \tag{۱۰}$$

که هم‌ارز است با معادلات خطی شده‌ی انیشتین با فرض

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + \Psi_{\mu\nu} \tag{۱۱}$$

و تعبیر $\Psi_{\mu\nu}$ به عنوان یک اختلال ارتباط با میدان گرانش در یک فضای ریمانی برقرار می‌شود. این معادلات را می‌توان همچون معادلات ماکسول در ۲+۱ بعد نیز نوشت. در این تقریب می‌توان دید که ذرات روی مسیرهای ژئودزیک متریک $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + \Psi_{\mu\nu}$ حرکت می‌کنند. به‌این‌ترتیب متریک فضا نه η بلکه g است، یعنی به‌طور مؤثر یک فضای ریمانی است، برخلاف مورد میدان ماکسول در فضای تخت مینکوفسکی!
اما معادلات کامل انیشتین در ۲+۱ بعد و نیز در ۱+۱ بعد پیچیدگی‌های دیگری دارد که در فصل چهارم به آن خواهیم پرداخت.

۵.۱ شتاب و نسبیت خاص

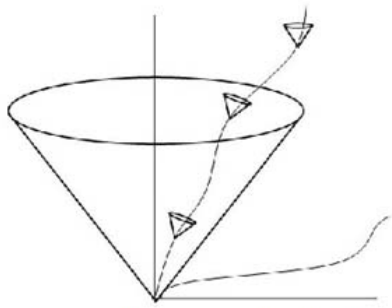
وجود دستگاه لخت در نسبیت خاص از ملزومات ابتدایی است. حرکت ذره آزاد در دستگاه لخت با

$$x^\mu = v^\mu s \qquad , \qquad v^\mu v_\mu = ۱ \tag{۱۲}$$

بیان می‌شود، که در آن s ویژه زمان جسم است. در این دستگاه متریک می‌شود.

$$ds^۲ = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \tag{۱۳}$$

صورت این رابطه تحت تبدیلات لورنتس تغییر نمی‌کند.



شکل ۱: جهان‌خط ذره‌ی شتاب‌دار و مخروط نور

ذره‌ای شتاب‌دار با جهان‌خط خمیده را مطابق شکل ۱ در نظر بگیرید. دستگاه لختی را که هر لحظه همراه ذره است دستگاه همراه می‌نامند. در دستگاه همراه ذره داریم

$$ds = dt \tag{۱۴}$$

به این معنی که زمان و ویژه‌زمان در دستگاه همراه یکی است.
در دستگاه لخت اولیه اما داریم

$$ds = \sqrt{dt^۲ - dx^۲} \tag{۱۵}$$

پس ویژه‌مدت، یا بازه‌ی ویژه‌زمان می‌شود

$$s = \int_A^B dt\sqrt{۱ - v^۲}$$

این مفهوم دستگاه همراه در نسبیت عام تعمیم پیدا می‌کند به هر دستگاه که همراه شاره‌ی مورد نظر باشد. برای روشن‌تر شدن مفهوم دستگاه شتاب‌دار در نسبیت خاص به ناسازنمای دوقلوها در نسبیت می‌پردازیم. از نسبیت خاص می‌دانیم

که زمان سپری شده برای هر یک از دوقلوهای ۱و ۲ را چگونه محاسبه کنیم. داریم

شکل ۲: جهان‌خط مجزای هر یک از دوقلوها

$$S_۱ = T \tag{۱۶}$$

$$S_۲ = \int_A^B ds_۲ = \int_۰^T dt\sqrt{۱ - v^۲(t)} < S_۱ = T \tag{۱۷}$$

چارچوب ۱ و ۲ هم ارز نیستند. اگر بخواهیم آنها را هم ارز تلقی کنیم باید گستره تبدیل‌های مجاز را به تبدیل‌های متناظر با دستگاه‌های شتاب‌دار بسط داد، که مفهوم لختی نسبیت خاص را به هم می‌زند. به این ترتیب است که ناسازنمای دوقلوها در نسبیت خاص درک می‌شود.
اکنون به عنوان نمونه به دو مورد دستگاه شتاب‌دار اشاره می‌کنیم.

مورد ۱: دستگاه همراه یک ذره در سقوط آزاد را با مختصات پریم‌دار نمایش می‌دهیم. داریم

$$\begin{cases} t = t' \\ x = x' + \frac{g}{۲}t^۲ \\ y = y' \\ z = z' \end{cases} \tag{۱۸}$$

متریک بر حسب مختصات جدید شتاب‌دار می‌شود:

$$ds^۲ = \eta_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu = g_{\mu\nu}dx'^\mu dx'^\nu = (۱ - g^۲t'^۲)dt^۲ + ۲gt'dtdx - dy^۲ - dz^۲ \tag{۱۹}$$

گیریم $dy' = dz' = dx' = ۰$، یعنی ساعت ساکن در مبدأ مختصات پریم‌دار را می‌گیریم. داریم

$$ds^۲ = dt^۲(۱ - g^۲t^۲) \tag{۲۰}$$

به این ترتیب در موردی که با دستگاه‌های شتاب‌دار سر و کار داریم باید متریک را به صورت عام‌تر بالا بنویسیم، یعنی ظاهر متریک، بیانگر یک فضای ریمانی است.

مورد ۲: تبدیل مولر
اکنون تبدیل عام‌تر زیر را در نظر بگیرید

$$t = \frac{1}{g}\sinh gt' + x'\sinh gt' \tag{21}$$

$$x = \frac{1}{g}(\cosh gt' - 1) + x'\cosh gt'$$

$$y = y'$$

$$z = z'$$

که نتیجه می‌دهد

$$ds^2 = dt'^2(1+gt')^2 - dx'^2 - dy'^2 - dz'^2$$

به ازای $gt \ll 1$ هر دو تبدیل، یکی می‌شوند، این در حالی است که صورت ظاهری دو متریک در حالت عام با هم متفاوت‌اند.

۶.۱ حرکت در یک میدان گرانش

با این شناخت از حرکت شتاب‌دار و تعمیم به فضای ریمانی، حالا فرض می‌کنیم $ds^2 = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu$ متریک در فضازمانی با حضور گرانش باشد. ذره آزاد در این فضا، شبیه به ذره آزاد در نسبیت خاص و فضای مینکوفسکی باید به‌گونه‌ای باشد که

$$\delta\int_A^B ds = 0 \tag{22}$$

معادله اویلر- لاگرانژ این وردش، یعنی

$$\delta\int_A^B \sqrt{g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu} = \delta\int\sqrt{g_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{d\lambda}\frac{dx^\nu}{d\lambda}}d\lambda = \delta\int\mathcal{L}d\lambda = 0 \tag{23}$$

به سهولت به دست می‌آید:

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x^\mu} = \frac{d}{d\lambda}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{x}^\mu} \Rightarrow \tag{24}$$

نتیجه می‌شود

$$g_{\mu\nu}\ddot{x}^\nu + \Gamma_{\mu\nu\rho}\dot{x}^\nu\dot{x}^\rho = \frac{1}{\mathcal{L}}\frac{d\mathcal{L}}{d\lambda}g_{\mu\nu}\dot{x}^\nu \tag{25}$$

که در آن

$$\Gamma^\mu_{\nu\rho} = g^{\mu\sigma}\Gamma_{\sigma\nu\rho} = \frac{1}{2}g^{\mu\sigma}(g_{\sigma\nu,\rho} + g_{\sigma\rho,\nu} - g_{\nu\rho,\sigma}) \tag{26}$$

می‌توان پارامتر مسیر، λ، را طوری تعیین کرد که سمت راست معادله صفر بشود:

$$\ddot{x}^\mu + \Gamma^\mu_{\nu\rho}\dot{x}^\nu\dot{x}^\rho = 0 \tag{27}$$

این خم‌های ژئودزیک می‌توانند زمان-گونه، نور-گونه یا فضا-گونه باشند. اگر قرار باشد مسیر حرکت آزاد ذره‌ای دنبال شود، پس باید با ژئودزیکی زمان‌گونه سر و کار داشته باشیم!
گیریم در یک میدان گرانش ضعیف باشیم، یعنی

$$g_{\mu\nu}(x) = \eta_{\mu\nu} + ۲\Psi_{\mu\nu}(x) \qquad \Psi_{\mu\nu} \ll ۱ \tag{۲۸}$$

در این صورت $\gamma v \ll \gamma c$ باید داشته باشیم

$$\dot{x}^\mu = \frac{dx^\mu}{ds} \simeq (۱, \vec{o}) \tag{۲۹}$$

بنابراین معادله ژئودزیک می‌شود:

$$\frac{d^۲x^\mu}{ds^۲} + \Gamma^\mu_{..} = ۰ \tag{۳۰}$$

برای شاخص‌های گوناگون داریم

$$\mu = ۰ \qquad : \qquad \Gamma^{.}_{..} \simeq ۰ \Rightarrow \frac{d^۲t}{ds^۲} = ۰! \qquad dt \sim ds$$

$$\mu = i \qquad : \qquad \frac{d^۲x^i}{dt^۲} + \Gamma^i_{..} = ۰$$

اما

$$\Gamma^i_{..} = -\frac{۱}{۲}\left(\frac{\partial g_{.i}}{\partial t} - \frac{\partial g_{.i}}{\partial t} - \frac{\partial g_{..}}{\partial x^i}\right) \simeq \frac{۱}{۲}\frac{\partial g_{..}}{\partial x^i} \tag{۳۱}$$

و از آنجا

$$\frac{d^۲x^i}{dt^۲} = -\frac{۱}{۲}\frac{\partial g_{..}}{\partial x^i} = -\frac{\partial \Psi_{..}}{\partial x^i} = -\frac{\partial U}{\partial x^i} \tag{۳۲}$$

که در آن

$$\Psi_{..} = U \tag{۳۳}$$

پتانسیل گرانشی است. گیریم توزیع جرمی کروی داشته باشیم و بخواهیم حرکت را در نزدیکی آن بررسی کنیم. در این صورت

$$U = -\frac{GM}{r} \tag{۳۴}$$

بنابراین

$$g_{..} = c^۲\left(۱ - \frac{۲GM}{rc^۲}\right) \tag{۳۵}$$

و متریک می‌شود

$$ds^۲ = c^۲\left(۱ - \frac{۲GM}{rc^۲}\right)dt^۲ - d\vec{x}^۲ \tag{۳۶}$$

پس می‌توانیم شعاع شوارتس‌شیلد را اینگونه تعریف کنیم:

$$\mathcal{R} = \frac{۲GM}{c^۲} \tag{۳۷}$$

برای خورشید داریم

$$\mathcal{R} = ۱/۵ \ km$$

بنابراین

$$\Psi_{..} = \frac{\mathcal{R}}{\gamma} \simeq ۲ \times ۱۰^{-۶} \tag{۳۸}$$

که با فرض ضعیف بودن

۷.۱ اصل هم‌ارزی

تساوی جرم لختی و جرم گرانشی در چارچوب قوانین نیوتون بدیهی فرض می‌شود. اما می‌توان قوانین نیوتون را بدون این تساوی نیز نوشت. در نسبیت عام این تساوی توضیح داده می‌شود که مبنای اصل هم‌ارزی است.
دو ماهواره به‌عنوان آزمایشگاه در نظر می‌گیریم که دور زمین «آزادانه» می‌چرخند. ماهواره را آنقدر کوچک فرض می‌کنیم که از ناهمگنی میدان در آن بتوان صرف‌نظر کرد. آنگاه ناظر در این آزمایشگاه تصور می‌کند که شتاب دارد و نه گرانش، یعنی در یک دستگاه لخت است گویی گرانش و شتاب یکدیگر را خنثی کرده‌اند. ناظر در این آزمایشگاه از گرانش اثری نمی‌بیند. پس هر جسمی در این آزمایشگاه آزادانه حرکت می‌کند در امتداد خط مستقیم.
اما آزمایشگاهی که روی زمین ساکن است به دلیل نیرویی که از پایین بر آن وارد می‌شود نسبت به ماهواره مدارگرد شتاب دارد. بنابراین تأثیر نیروی گرانش هم‌ارز است با شتاب دستگاه مختصات این بیان ساده‌ای است از اصل هم‌ارزی.
حالا که این نیروها یعنی شتاب و گرانش ناشی از پدیده‌ی مشترکی است پس باید یک منشأ داشته باشند و تمایزی میان جرم گرانشی و جرم لختی نباید وجود داشته باشد.
از طرف دیگر هرگاه میدان گرانش وجود نداشته باشد، آنگاه در تمام فضازمان یک دستگاه لخت وجود دارد و متریک فضازمان همان متریک مینکوفسکی است. در صورت وجود گرانش اما تنها در یک نقطه (یا همسایگی یک نقطه) می‌توان متریک را به صورت ساده مینکوفسکی نوشت. یعنی ناظری انتخاب کرد که در لحظه لخت باشد. اما ناظر مجاور (لخت) نسبت به این ناظر شتاب دارد. بنابراین متریک شتابدار را برای این ناظر دوم باید نوشت که در نتیجه فضازمان دیگر مینکوفسکی نخواهند ماند و ریمانی خواهند بود. این بیان ریاضی نظیر اصل هم‌ارزی است.
به این ترتیب، بنابر اصل هم‌ارزی در هر میدان گرانش دلخواه می‌توان در هر نقطه «یک چارچوب لخت موضعی» به‌گونه‌ای اختیار کرد که در ناحیه کوچکی اطراف آن نقطه قوانین طبیعت همان صورتی را داشته باشند که در یک دستگاه مختصات لخت در غیاب گرانش دارند. منظور از قوانین فیزیک در اینجا قانون‌های نسبیت خاصی است، و منظور از ناحیه کوچک ناحیه‌ای است که در آن میدان گرانش را بتوان ثابت فرض کرد. هنگامی که منظور از قوانین طبیعت قانون سقوط آزاد ذرات یا برابری جرم گرانشی و جرم لختی باشد از اصل هم‌ارزی ضعیف صحبت می‌کنیم.
هنگامی هم که منظور از قوانین طبیعت تمام قوانین طبیعت باشد اصطلاح اصل هم‌ارزی قوی را به کار می‌بریم.
در نسبیت خاص با اصل هموردایی معادلات فیزیک، یا وابسته نبودن شکل معادلات به ناظر، صحبت کردیم. در اینجا از اصل هموردایی عام صحبت می‌کنیم. منظور این است که یک معادله فیزیکی در میدان گرانش صادق است به شرطی که:
۱) معادله در غیاب گرانش صادق باشد. یعنی با نشاندن $g = \eta$ و $\Gamma = ۰$ قوانین متناظر در نسبیت خاص به دست آید؛
۲) معادلات هموردا باشند، یعنی صورت آنها تحت تبدیلات عام مختصات تغییرنکند.
به این ترتیب برای نوشتن معادلات هر پدیده‌ی فیزیکی در حضور گرانش، ابتدا معادلات نظیر را در نسبیت خاص می‌نویسیم. آنگاه متریک η را به g و مشتق عادی را به مشتق هموردا تبدیل می‌کنیم. معادلات به‌دست آمده هموردای عام هستند و در حد $g \to \eta$ و $\Gamma = ۰$ به معادلات نسبیت خاص برمی‌گردند. این فرآیند معادل است با برهم‌کنش جفت‌شدگی کمینال با گرانش!

مراجع

۱. برای دریافتی از وضعیت کنونی نسبیت عام مراجعه شود به
$T.Damaur,\ General\ Relativity\, Today,\ arxiv\ [gr-qc]$ ۰۷۰۴.۰۷۵۴
۲. برای ارتباط میان ناظر شتابدار و فضای ریندلر رجوع شود به ۰۵۰۸.۳۲۰۹ $arxiv:$

پرسش‌ها

۱. آیا گرانش، آنگونه که ادعا می‌شود، جهانی است؟ آزمونی می‌شناسید که نشان دهد گرانش در ابعاد کم هم وجود دارد؟
۲. چرا گرانش برای جرم‌های زیاد، با وجود ضعیف بودن، بر هر برهم کنشی پیشی می‌گیرد؟
۳. گرانش جهانی است؟ چرا و چگونه؟
۴. از کجا می‌دانیم گرانش در ابعاد کوچک وجود دارد؟ تا چه گستره‌یی گرانش آزموده شده است؟
۵. اگر گرانش در ابعاد کم نباشد چه می‌شود؟ آیا در این صورت در زمان پلانک و در ابعاد پلانک گرانش حضور داشته است؟
۶. عده‌ای بررسی شتاب را در نسبیت خاص مجاز نمی‌دانند. شما موافقید؟ دلیل بیاورید!
۷. رسم است در بررسی شتاب در نسبیت خاص که تبدیل به مختصات شتابدار را در متریک مینکوفسکی اعمال می‌کنند. چرا این کار مجاز است؟
۸. چه تفاوتی هست میان بیان حرکت در طبیعت با استفاده از مفهوم نیرو و بیان از طریق مفهوم میدان؟ آیا قانون گرانش نیوتون، یا قانون نیروی کولنی را می‌توان به هر بعد دلخواه تعمیم داد؟ آیا می‌توان قوانین ماکسول را که با استفاده از عملگر های دیفرانسیلی مرتبه‌ی اول نوشته می‌شوند به هر بعدی تعمیم داد؟ اگر در نظریه‌ی میدان مفهوم نیرو وارد نشود باید نتیجه گرفت این مفهوم اشتباه است؟
۹. اثرهای نسبیت عامی چه موقعی وارد می‌شوند و نمی‌توان از آنها چشم پوشید؟ این پرسش را برای موارد مختلف بررسی کنید؛ مثلا موردی که توده‌ای به جرم M داریم. می‌توانید خودتان مثال دیگری بیاورید؟
۱۰. اثرهای نسبیت عامی اطراف زمین از چه مرتبه‌ی بزرگی است؟
۱۱. تفاوت میان اصل هم ارزی قوی و ضعیف چیست؟
۱۲. چرا به دنبال این هستیم که معادله‌های فیزیک به شکل هموردا باشند؟
۱۳. جفت‌شدگی کمینال چیست؟
۱۴. آیا می‌توان از معادله‌ی ژئودزی برای یک ذره معادله‌ی حرکت ذره را به‌دست آورد؟ یک مورد ساده نشان بدهید!
۱۵. آیا می‌توانید برای لاگرانژی ذره‌ی آزاد از تانسوری غیر از متریک استفاده کنید؟ سعی کنید توضیح دهید چه تفاوتی با لاگرانژی متعارف ذره‌ی آزاد و چه پیامدهایی دارد!

تمرین‌ها

۱. لاگرانژی ذره آزاد را به صورت زیر بگیرید

$$\mathcal{L} = \sqrt{g_{\mu\nu}\dot{x}^{\mu}\dot{x}^{\nu}}$$

الف) معادله حرکت ذره را به دست آورید.
ب) متریک $g_{\mu\nu}$ چه نقشی در این حرکت دارد؟ اگر به جای این لاگرانژی عبارت

$$\mathcal{L} = g_{\mu\nu}\dot{x}^{\mu}\dot{x}^{\nu}$$

را بگیریم در معادلهٔ حرکت چه تفاوتی پیش می‌آید؟
ج) این دو معادله هم‌ارزند؟ چرا؟
د) چرا این دو لاگرانژی به دو نتیجه متفاوت می‌رسند؟
ه) اگر ذره فوتون باشد می توانیم همین روابط را به کار بگیریم؟

دانشگاه صنعتی شریف
گرانش و نسبیت عام-۱

شماره درس ۲۴۱۴۸-۱

فصل ۲: گرانش به‌عنوان یک میدان تانسوری در فضای مینکوفسکی

رضا منصوری

ویراست ۰.۱

مرداد ۱۳۹۲

۱.۲ تاریخچه

انیشتین برای فرمول‌بندی نسبیت عام، بنا را بر اصل هم‌ارزی گذاشت. اصل ماخ نیز که مجموعه‌ای از ایده‌هاست، انگیزه‌ی مهمی در فرمول‌بندی نسبیت عام بود. بنابراین اصل، ماده‌ی موجود در جهان تعیین کننده‌ی ساختار فضا–زمان است. به تعبیر دیگر مفاهیم «لخت» و «ناچرخان» بدون وجود ماده در جهانی بی‌معنی می‌شوند. اما می‌توان این سوال را نیز مطرح کرد: چرا نتوان گرانش را در فضا–زمان تخت مینکوفسکی فرمول‌بندی کرد. یعنی، با این فرض که ساختار فضا–زمان ثابت است، چه اشکالی در فرمول‌بندی گرانش پیش می‌آید. اولین بار پوانکاره در سال ۱۲۸۴ /۱۹۰۵ کوشید گرانش نیوتونی را به قالب نسبیت خاص درآورد. نورداستروم در سال ۱۲۹۱ /۱۹۱۲ یک نظریه ی میدان نسبیتی با استفاده از یک میدان نرده‌ای برای گرانش فرمول‌بندی کرد. انیشتین و فوکر[1] در سال ۱۲۹۳ /۱۹۱۴ و برگمن[2] در سال ۱۳۳۵ /۱۹۵۶ نیز نظریه‌های نرده‌ای برای گرانش ارایه دادند (رک مرجع ۲). پیشگویی تمام این نظریه‌ها در مورد انحراف نور و پیشروی حضیض عطارد با داده‌های رصدی مغایرت دارد.

۲.۲ لاگرانژی فیرتز–پائولی

برای بیان گرانش به‌صورت یک میدان نسبیت خاصی، میدانی متناظر با ذره‌ای به جرم سکون صفر در نظر می گیریم؛ درغیراین‌صورت برد برهم‌کنش گرانشی متناهی می‌شود که مغایر با تجربه است. به‌علاوه ذره‌ی واسط برهم‌کنش گرانشی (گراویتون) نمی‌تواند فرمیون باشد. فرمیون بی‌جرم با اسپین $\frac{1}{2}$ (نوترینو) جوابگوی گرانش نیست، همین‌طور فرمیون‌های دیگر. از میان بوزون‌ها نیز دیدیم که میدان نرده‌ای متناظر با اسپین صفر جوابگوی گرانش نیست. ذره‌ی اسپین یک با یک میدان برداری نمایش داده می‌شود که به الکترودینامیک می‌انجامد و ذرات واسط آن بار مثبت و منفی دارند. به‌این‌ترتیب انتظار می‌رود گراویتون، ذره‌ی واسط برهم‌کنش گرانشی، دارای اسپین دو باشد، که الزاماً با یک میدان تانسوری نمایش داده خواهد شد. فیرتز[3] و پائولی[4] برای اولین بار در دهه‌ی ۳۰ قرن گذشته لاگرانژی یک میدان تانسوری بی‌جرم را در چارچوب نسبیت خاص فرمول‌بندی کردند. لاگرانژی فیرتز–پائولی به این صورت است [۲].

$$L=\frac{1}{2}(h_{\mu\nu,\lambda}h^{\nu\lambda,\mu}-h^{\mu}_{\mu\lambda,}h^{,\lambda})+\frac{1}{4}(h_{,\mu}h^{,\mu}-h^{\lambda}_{\mu\nu,}h^{\mu\nu}_{,\lambda}) \qquad (۳۹)$$

این لاگرانژی تحت تبدیلات پیمانه‌ای

$$h_{\mu\nu}\rightarrow h_{\mu\nu}+\kappa^{-1}(\xi_{\mu,\nu}+\xi_{\nu,\mu}) \qquad (۴۰)$$

ناورداست. در اینجا توابع ξ_μ دلخواه، و κ ثابت دلخواهی است به بعد معکوس جرم. κ را با معکوس جرم پلانک یکی می گیریم:

$$\kappa^2 \rightarrow:=\frac{8\pi}{m_{p^2}}=\frac{8\pi G}{\hbar c} \qquad (۴۱)$$

که در آن G ثابت نیوتون است. معادلات اویلر–لاگرانژ، معادلات میدان، می‌شوند:

$$D^{\alpha\beta}_{\mu\nu}h_{\alpha\beta}=0 \qquad (۴۲)$$

که در آن عملگر $D^{\alpha\beta}_{\mu\nu}$ چنین تعریف شده است:

$$D^{\alpha\beta}_{\mu\nu}:=(\eta^{\alpha}_{\mu}\eta^{\beta}_{\nu}-\eta_{\mu\nu}\eta^{\alpha\beta})\partial^{\rho}\partial_{\rho}+\eta_{\mu\nu}\partial^{\alpha}\partial^{\beta}+\eta^{\alpha\beta}\partial_{\mu}\partial_{\nu}-\eta^{\beta}_{\mu}\partial^{\alpha}\partial_{\nu}-\eta^{\alpha}_{\nu}\partial^{\beta}\partial_{\mu} \qquad (۴۳)$$

---

[1] *Fokker*
[2] *Bergman*
[3] *Fierz*
[4] *Pauli*

می‌توان نشان داد که این عملگر برای $h_{\alpha\beta}$ی متقارن در اتحاد زیر صدق می‌کند:

$$\partial^{\mu} D^{\alpha\beta}_{\mu\nu} = 0 \qquad (۴۴)$$

که آن‌را اتحاد بیانکی [۵] می‌نامند.
مطالعه‌ی جزیی‌تر معادله‌ی (۴۲) و حرکت یک ذره در آن میدان گرانش برای اولین بار توسط تیرینگ [۳ و ۴] و نیز با شرح بیشتر در [۲] انجام شده است. تیرینگ نشان داد که در تقریب اول حرکت ذره در این میدان به‌گونه‌ای است که، گرچه میدان در فضای مینکوفسکی نوشته شده، ذره روی مسیری حرکت می‌کند که گویی فضازمان ریمانی است با متریک $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$ و مسیر یک خم ژئودزیک آن است. پس به‌نظر می‌رسد حرکت ذره در حضور گرانش به‌گونه‌ای است که متریک فضای تخت معنی خود را از دست می‌دهد و به جای آن متریک فضای ریمانی می‌نشیند، و «ذره‌ی آزاد» در این میدان روی ژئودزیک‌های این فضا حرکت می‌کند. تیرینگ این واقعیت را تنها در تقریب اول نشان داد. به‌این معنی که بیان حرکت ذره در میدان تانسوری معادله‌ی میدان را ناسازگار می‌کرد و برای رفع این ناسازگاری افزودن جمله‌هایی از مرتبه‌ی دوم میدان به معادله‌ی میدان الزام‌آور می‌شد. تیرینگ رفع این ناسازگاری را که در هر مرتبه ظاهر می‌شد تنها تا همان مرتبه‌ی دوم حساب کرده بود.
برای درک بهتر این ناسازگاری، میدان فیرتز–پائولی را به ماده‌ی دلخواهی جفت می‌کنیم. گیریم $T_{\mu\nu}$ تانسور انرژی تکانه‌ی ماده در میدان $h_{\mu\nu}$ باشد، پس معادله‌ی میدان به جای (۴۲) می‌شود:

$$D^{\alpha\beta}_{\mu\nu} h_{\alpha\beta} = T_{\mu\nu} \qquad (۴۵)$$

اما از این معادله‌ی میدان و اتحاد (۴۴) نتیجه می‌شود که واگرایی $T_{\mu\nu}$ باید صفر باشد:

$$\partial^{\mu} T_{\mu\nu} = 0 \qquad (۴۶)$$

که این شرط اضافی بر رفتار ماده و میدان است. بنابراین معادله‌ی میدان (۴۵) با خواص ماده ناسازگار است. برای رفع این ناسازگاری جمله‌ی $\delta_2 T_{\mu\nu}$ را به سمت راست معادله می‌افزاییم:

$$D^{\alpha\beta}_{\mu\nu} h_{\alpha\beta} = T_{\mu\nu} + \delta_2 T_{\mu\nu} \qquad (۴۷)$$

جمله‌ی $\delta_2 T_{\mu\nu}$ تانسور انرژی تکانه‌ی خود میدان تانسوری تلقی می‌شود، پس باید از مرتبه‌ی دوم در میدان باشد. این جمله هم باید در اتحاد زیر صدق کند:

$$\partial^{\mu} \delta_2 T_{\mu\nu} = -\partial^{\mu} T_{\mu\nu} \qquad (۴۸)$$

پس معادله (۴۷) را به‌صورت

$$D^{\alpha\beta}_{\mu\nu} h_{\alpha\beta} - \delta_2 T_{\mu\nu} = T_{\mu\nu} \qquad (۴۹)$$

می‌نویسیم. یادمان باشد که این تانسور افزوده از مرتبه‌ی دوم در تانسور میدان است. در این مرحله متوجه می‌شویم که برای سازگار کردن معادلات میدان به ناچار جملات ناخطی (مجذوری) در سمت چپ معادله‌ی میدان وارد شده است. این جملات مجذوری باید ناشی از یک لاگرانژی مرتبه‌ی سوم در $h_{\mu\nu}$ باشد. اما تانسور انرژی تکانه‌ی لاگرانژی مرتبه‌ی سوم، $\delta_3 T_{\mu\nu}$، از مرتبه‌ی سوم است. روش تیرینگ این ناسازگاری را در حرکت ذره به‌خوبی به‌تصویر می‌کشد و نشان می‌دهد که برای رفع آن باید مسیر ذره را خمی ژئودزیک در فضای ریمانی درنظر گرفت.
به‌این ترتیب سازگاری معادلات میدان منجر به جمع زدن روی یک سری بینهایت می‌شود. اوگیه‌وتسکی و پولوبارینوف(۵) در سال ۱۳۴۴ /۱۹۶۵ نشان دادند که این سری بینهایت به معادلات نسبیت عام انیشتین می‌انجامد. این محاسبه به‌حدی پیچیده بود که توجه چندانی به آن نشد، گرچه نتیجه آن پذیرفته شد. دزر در سال ۱۳۴۹ /۱۹۷۰ توانست روش ساده‌ای برای بیان تحقیقی این امر بیابد.

---
[۵] $Bianchi$

۳.۲ روش دزر

کنش زیر را در فضای تخت مینکوفسکی درنظر بگیرید:

$$S_0 = \int [\phi^{\mu\nu}(\partial_\alpha \Gamma^\alpha_{\mu\nu} - \partial_\nu \Gamma_\mu) + \eta^{\mu\nu}(\Gamma^\alpha_{\mu\nu}\Gamma_\alpha - \Gamma^\alpha_{\beta\mu}\Gamma^\beta_{\alpha\nu})] d^4x \qquad (۵۰)$$

که در آن $\phi^{\mu\nu}$ و $\Gamma^\alpha_{\mu\nu}$ به‌عنوان متغیرهای مستقل میدان تلقی می‌شوند و $\Gamma_\mu \equiv \Gamma^\alpha_{\alpha\mu}$.
معادلات میدان از وردش این کنش نسبت به متغیرهای مستقل به‌دست می‌آید:

$$\frac{\delta S_0}{\delta \phi^{\mu\nu}} = \Gamma^\alpha_{\mu\nu,\alpha} - \frac{1}{2}(\Gamma_{\mu,\nu} + \Gamma_{\nu,\mu}) = 0 \qquad (۵۱)$$

$$\frac{\delta S_0}{\delta \phi^{\mu\nu}} = 2\Gamma^\alpha_{\mu\nu} - \eta^\alpha_\nu \Gamma_\mu - \eta^\alpha_\mu \Gamma_\nu - \phi^\alpha_{\mu\nu,} + \phi^\alpha_\mu{}_{,\nu} + \phi^\alpha_\nu{}_{,\mu} + \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}\phi,^\alpha = 0 \qquad (۵۲)$$

از معادله‌ی (۵۲) می‌توان $\Gamma^\alpha_{\mu\nu}$ را برحسب $\phi_{\mu\nu}$ و مشتقات آن به‌دست آورد. اگر نتیجه را در کنش (۵۰) قرار دهیم، با تبدیل $\phi_{\mu\nu} = -h_{\mu\nu} + \frac{1}{2}\xi_{\mu\nu}h$ به لاگرانژی فیرتز-پائولی (۳۹) می‌رسیم. معادله‌ی میدان (۵۲) درواقع یک قید است. از این قید که نسبت به α مشتق بگیریم، به کمک معادله میدان (۵۱) به معادله‌ی زیر می‌رسیم:

$$\partial^\alpha \partial_\alpha \phi_{\mu\nu} - \partial^\alpha \partial_\mu \phi_{\alpha\nu} - \partial^\alpha \partial_\nu \phi_{\alpha\mu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}\partial^\alpha \partial_\alpha \phi = 0 \qquad (۵۳)$$

این معادله‌ی میدان نیز با تبدیل $\phi_{\mu\nu} = -h_{\mu\nu} + \frac{1}{2}\xi_{\mu\nu}h$به همان معادله‌ی میدان (۴۲) می‌رسد. پس می‌بینیم کنش (۵۰) با کمیت‌های مستقل $\phi^{\mu\nu}$ و $\Gamma^\alpha_{\mu\nu}$ با نظریه اسپین۲ فیرتز-پائولی هم‌ارز است.
حالا می‌پردازیم به رفع ناسازگاری. دیدیم که برای رفع ناسازگاری باید تانسور انرژی-تکانه‌ی میدان $h_{\mu\nu}$ را به سمت راست معادله‌ی میدان اضافه کنیم. برای محاسبه‌ی تانسور انرژی-تکانه‌ی میدان $h_{\mu\nu}$، طوری که متقارن باشد، می‌توان روش بلین فانته[۶] را در پیش گرفت. روش ساده‌تر در مورد ما این است که متریک مینکوفسکی $\eta^{\mu\nu}$ را به متریک کمکی $\psi^{\mu\nu}$ تبدیل کنیم و وردش کنش حاصل از این تبدیل را نسبت به $\psi^{\mu\nu}$ حساب کنیم. نتیجه می‌شود:

$$\tau_{\mu\nu} = \frac{\delta S(\eta \to \psi)}{\delta \psi^{\mu\nu}} = (\Gamma_\alpha \Gamma^\alpha_{\mu\nu} - \Gamma^\alpha_{\beta\mu}\Gamma^\beta_{\alpha\nu}) - \sigma_{\mu\nu} \qquad (۵۴)$$

که در آن

$$2\sigma_{\mu\nu} = \partial^\alpha[\eta_{\mu\nu}(h^\lambda_\rho \Gamma^\rho_{\lambda\alpha} - \frac{1}{2}h\Gamma_\alpha) + (h_{\mu\nu}\Gamma_\alpha - h_{\mu\alpha}\Gamma_\mu - h_{\alpha\nu}\Gamma_\mu)$$

$$+ h^\beta_\alpha(\Gamma_{\mu\beta\nu} + \Gamma_{\nu\beta\mu}) + h^\rho_\mu(\Gamma_{\alpha\rho\nu} - \Gamma_{\nu\alpha\rho}) + h^\rho_\nu(\Gamma_{\alpha\rho\mu} - \Gamma_{\mu\alpha\rho}) \qquad (۵۵)$$

گام بعدی به‌دست آوردن کنشی است که از مرتبه‌ی سوم باشد و به‌همین تانسور انرژی-تکانه منجر شود، تا به‌این‌ترتیب سازگاری معادلات برقرار شود. کنش زیر را درنظر بگیرید:

$$S = S_0 + \int h^{\mu\nu}(\Gamma_\alpha \Gamma^\alpha_{\mu\nu} - \Gamma^\alpha_{\beta\mu}\Gamma^\beta_{\alpha\nu}) d^4x \qquad (۵۶)$$

چون جمله‌ی دوم سمت راست، که تنها قسمت اول $h^{\mu\nu}\tau_{\mu\nu}$ است، به $\psi^{\mu\nu}$ بستگی ندارد، و نیز چون $h^{\mu\nu}$ را یک چگالی تانسوری فرض می‌کنیم، پس این جمله‌ی اضافی سهمی در تانسور انرژی-تکانه ندارد، یعنی $\frac{\partial S_0}{\partial \Gamma^{\mu\nu}_\alpha} = \frac{\partial S}{\partial \psi^{\mu\nu}_\alpha}$.

[۶] $Belinfante$

بنابراین کنش جدید S سازگار است و احتیاج به رفتن به مرتبه‌ی بالاتر نیست. حالا ببینیم این کنش و معادلات میدان ناشی از آن چگونه‌اند. ابتدا جمله‌ی $\int \eta^{\mu\nu}(\partial_\alpha\Gamma^\alpha_{\mu\nu} - \partial_\nu\Gamma_\mu)d^4x$ را که انتگرال‌ده آن مشتق کامل است به کنش (۵۶) اضافه می‌کنیم. این کنش با

$$\sqrt{-g}g^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} + h^{\mu\nu} \tag{۵۷}$$

می‌شود

$$S = \int \sqrt{-g}g^{\mu\nu}(\partial_\alpha\Gamma^\alpha_{\mu\nu} - \partial_\nu\Gamma_\mu + \Gamma_\alpha\Gamma^\alpha_{\mu\nu} - \Gamma^\alpha_{\beta\mu}\Gamma^\beta_{\alpha\nu})d^4x \tag{۵۸}$$

این همان کنش نسبیت عام انیشتین است. وردش این کنش نسبت به $g^{\mu\nu}$ و $\Gamma^\alpha_{\mu\nu}$، به‌طور مستقل، می‌دهد

$$\Gamma^\alpha_{\mu\nu} = \frac{1}{2}g^{\alpha\rho}(g_{\mu\rho,\nu} + g_{\nu\rho,\mu} - g_{\mu\nu,\rho}) \tag{۵۹}$$

$$R_{\mu\nu} = 0 \tag{۶۰}$$

که در آن تانسور ریچی به‌صورت زیر تعریف شده است:

$$R_{\mu\nu} = \partial_\alpha\Gamma^\alpha_{\mu\nu} - \partial_\nu\Gamma^\alpha_{\mu\alpha} + \Gamma^\alpha_{\mu\nu}\Gamma^\beta_{\alpha\beta} - \Gamma^\alpha_{\beta\mu}\Gamma^\beta_{\alpha\nu} \tag{۶۱}$$

کنش (۵۸) را صورت مرتبه‌ی اول کنش انیشتین می‌نامند. صورت متعارف، یا مرتبه‌ی دوم این کنش، با استفاده از تعریف (۶۱) به‌دست می‌آید:

$$S = \int \sqrt{-g}(g^{\mu\nu}R_{\mu\nu})d^4x = \int \sqrt{-g}Rd^4x \tag{۶۲}$$

به‌این ترتیب می‌بینیم که شرط سازگاری معادلات میدان تانسوری در فضای مینکوفسکی به یک نظریه در فضای ریمانی با متریک $g_{\mu\nu}$ می‌انجامد.
باید انتظار داشت که پیوند گرانش با ماده نیز به طریقی تغییر کند که همه جا متریک $\eta^{\mu\nu}$ به $\eta^{\mu\nu} + h^{\mu\nu}$ بدل شود. کنش ماده را با $S^M(\eta^{\mu\nu}, h^{\mu\nu})$ نشان می‌دهیم. کنش کامل گرانش و ماده می‌شود $S_T = S + S^M$. وردش S_T نسبت به $h^{\mu\nu}$، معادله‌ی میدان را به‌دست می‌دهد که در سمت راست آن تانسور انرژی ماده قرار می‌گیرد. اما این تانسور انرژی از وردش S^M نسبت به $\psi^{\mu\nu}$، که به جای $\eta^{\mu\nu}$ نشانده می‌شود به‌دست می‌آید. پس باید $\frac{\delta S^M(\psi)}{\delta\psi^{\mu\nu}}|_{\psi=\eta} = \frac{\delta S^M}{\delta h^{\mu\nu}}$. این شرط هنگامی برقرار است که $S^M = S^M(\eta_{\mu\nu} + h^{\mu\nu})$ باشد.
پس می‌بینیم که کنش ماده باگرانش از طریق نشاندن $\eta_{\mu\nu} + h^{\mu\nu}$ به جای $\eta_{\mu\nu}$ در کنش میدان ماده به‌دست می‌آید. این کنش، که آن‌را کمینال (می‌نیمال) می‌نامند، جهانی است. یعنی، تمام انواع ماده‌ی موجود در جهان از همین طریق با گرانش پیوند دارند. اینجاست که تعبیر هندسی نسبیت عام بروز می‌کند. برمبنای این نظریه، که از سازگاری میدان گرانش در یک فضای تخت مینکوفسکی به‌دست آمد، هر نوع ماده در یک فضای ریمانی با متریک $\sqrt{-g}g^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} + h^{\mu\nu}$ حرکت می‌کند. متریک $\eta_{\mu\nu}$ تنها یک نقش کمکی پیدا می‌کند و مشاهده‌پذیر نیست. هر تجربه‌ای منجر به اندازه‌گیری متریک $g_{\mu\nu}$ برای فضا می‌شود. این روش دزر به مواردی نیز تعمیم داده شده که در آن متریک خارجی مفروض $\eta_{\mu\nu}$ نیست بلکه یک متریک ریمانی دلخواه است [۷ و ۸]. از این روش دزر در مبحث گرانش کوانتومی هم استفاده شده است [۹].

مراجع

۱. $H.\ Poincare,$ ۱۹۰۵, ...;

۲. $R.\ Sexl,$ ۱۹۶۷, $Fortschritte\ der\ Physik,$ ۱۵, ۲۶۹;

۳. $W.\ Thirring, v$۱۹۵۹, $Fortschritte\ der\ physik,$ ۷, ۷۹;

۴. $W.\ Thirring, v$۱۹۵۹, $Fortschritte\ der\ physik,$ ۱۶, ۹۶;

۵. $V.I\ Ogievetsky,\ I.E.\ Polubarinov,$ ۱۹۶۵, $Ann.\ Phys,$ ۳۵, ۱۰۷;

۶. $S.\ Deser,$ ۱۹۷۹, $Gen\ Rel\ Grav,$ ۱, ۹;

۷. $S.\ Deser\ in\ quantum\ Gravity,\ Proceedings\ of\ the\ Fourth\ Seminar,$ ۱۹۸۸, $World\ Scientific\ Singapore,$ ۱۹۳;

۸. $S.\ Deser,\ Self\ interaction\ and\ Gauge\ Invariance,\ arxiv:\ gr-gc/$۰۴۱۱۰۲۳;

۹. $E.\ Alvarez,$ ۱۹۸۹, $RevvMod\ Phys,$ ۶۱, ۵۶۱.

پرسش‌ها

۱. آیا می‌توانید تجربه‌ای ذکر کنید که از آن بتوان حدی برای جرم گراویتون به‌دست آورد؟

۲. چه اشکالی دارد گرانش را یک میدان تانسوری در فضای تخت مینکوفسکی بدانیم. در این صورت اگر از تقریب‌های بالا صرف‌نظر کنیم می‌توانیم با دقت زیادی گرانش نسبیتی را توصیف کنیم و در همان فضای تخت هم بمانیم!

۳. چرا در معادله‌ی میدان ناشی از لاگرانژی فیرتز–پائولی واگرایی تانسور انرژی ماده به‌تنهایی لازم نیست صفر باشد؟

تمرین‌ها

۱. نشان دهید دو شرط مجذوری و ناوردا بودن تحت تبدیلات پیمانه‌ای(۴۰) لاگرانژی فیرتز-پائولی را به‌طور یکتا تعیین می کند.

۲. معادلات حرکت (۴۲) را از لاگرانژی (۳۹) به‌دست آورید.

۳. اتحاد بیانکی را اثبات کنید. برای اثبات می‌توانید مستقیماً واگرایی عملگرِ $D^{\alpha\beta}_{\mu\nu}$ را حساب کنید.

۴. معادلات میدان (۵۱) و (۵۲) را به‌دست آورید.

۵. به کمک معادله(۵۲) نمادهای $\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}$ را برحسب میدان‌های $h_{\mu\nu}$ بیان کنید. نشان دهید که با فرض $\sqrt{-g}g^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} + h^{\mu\nu}$ که در آن $g = detg_{\mu\nu}$، نمادهای $\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}$ همان نمادهای کریستوفل متریک $g_{\mu\nu}$ هستند.

۶. معادلات (۵۹) و (۶۰) را از کنش (۵۸)به‌دست آورید.

۷. رابطه (۵۴)را اثبات کنید.

۸. میدانی برداری با تقارن ذاتی $SU(۲)$ در نظر بگیرید. پتانسیل این میدان بی‌جرم را با A^{α}_{μ} و شدت میدان را با $F^{\alpha}_{\mu\nu}$ نشان می‌دهیم، که در آن $\alpha = ۱, ۲, ۳,$ شاخص ذاتی متناظر با $SU(۲)$ است. ابتدا کنش را مجذوری و به صورت مرتبه اول درنظر می گیریم:

$$S_{\cdot} = -\frac{۱}{۲}\int(F_{\mu\nu}(\partial_{\mu}A_{\nu} - \partial_{\nu}A_{\mu}) - \frac{۱}{۲}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu})d^{۴}x$$

A^{μ} و $F^{\mu\nu}$ مستقل تلقی می‌شوند. نشان دهید که برای سازگار کردن معادلات میدان لازم است جمله‌ی

$$\int J^{\mu}A_{\mu}d^{۴}x = \int(F^{\mu\nu}A_{\nu}).A_{\mu}d^{۴}x$$

به کنش $S_{\cdot}$ اضافه شود. کنش حاصل را به‌صورت مرتبه‌ی اول و مرتبه‌ی دوم بنویسید. میدان حاصل، میدان یانگ-میلز[۷] خواهد بود.

۹. تانسور انحنا در فضایی با متریک $g_{\mu\nu}$ به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$R_{\alpha\beta\mu\nu} = \Gamma_{\alpha\beta\nu,\mu} - \Gamma_{\alpha\beta\mu,\nu} + \Gamma^{\rho}_{\beta\mu}\Gamma_{\rho\alpha\nu} - \Gamma^{\rho}_{\beta\nu}\Gamma_{\rho\alpha\mu}$$

نشان دهید این تانسور در نظریه‌ی خطی با تعریف $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + \psi_{\mu\nu}$ به‌صورت زیر درمی‌آید:

$$R_{\alpha\beta\mu\nu} = \frac{۱}{۲}(\psi_{\alpha\nu,\beta\mu} + \psi_{\mu,\beta\alpha\nu} - \psi_{\mu\nu,\alpha\beta} - \psi_{\alpha\beta,\mu\nu})$$

تحت تبدیل پیمانه‌ای $\psi_{\mu\nu} \to \psi_{\mu\nu} + \xi_{\mu,\nu} + \xi_{\nu,\mu}$ این عبارت چه تغییری می کند؟

۱۰. میدان گرانش خارج از یک توزیع جرم کروی ایستا را در نظر بگیرید. جسم در مبدأ مختصات دکارتی است: $x = y = z = ۰$. میدان را ضعیف در نظر بگیرید.
الف) نشان دهید از معادلات میدان ضعیف و نیز پیمانه لورنتس به‌دست می‌آید:

$$h_{oo} = \frac{۴M}{r}, h_{oj} = h_{jk} = ۰$$

---

[۷] $Yang - Mills$

مؤلفه‌های میدان $\phi_{\mu\nu}$ را نیز حساب کنید.
ب) مختصات کروی به‌کار ببرید. با استفاده از تبدیل تانسورها در فضای تخت نشان بدهید:

$$h_{oo} = \frac{4M}{r}, h_{oj} = h_{jk} = 0$$

مؤلفه‌های $\phi_{\mu\nu}$ چگونه بیان می‌شوند؟
به‌این‌ترتیب نشان دهید متریک متناظر با این میدان می‌شود:

$$ds^2 = (1 - \frac{2M}{r})dt^2 - (1 + \frac{2M}{r})(dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta d\varphi^2)$$

دانشگاه صنعتی شریف
گرانش و نسبیت عام-۱

شماره درس ۲۴۱۴۸-۱

فصل ۳: هندسه‌ی دیفرانسیل

رضا منصوری

ویراست ۰.۹

مرداد ۱۳۹۲

۱.۳ چرا هندسه دیفرانسیل؟

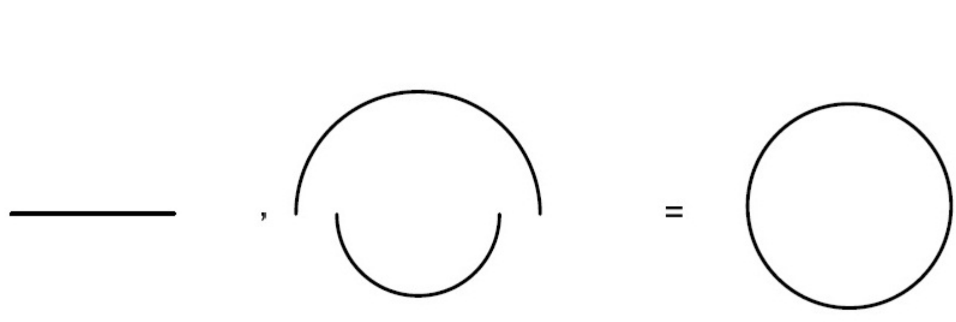
نیروی جاذبه
شاعران را سر به‌زیر کرده است
برخلاف منجم‌ها که هنوز سر به‌هوایند
تمام سیب‌ها افتاده‌اند
و نیوتون پشت وانت سیب‌زمینی می‌فروشد
آهای آقای تلسکوپ!
گشتم نبود، نگرد نیست!

اکبر اکسیر
پسته‌ی لال سکوت دندان‌شکن است

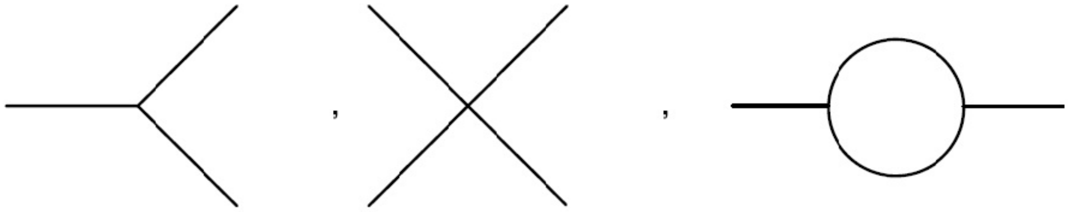
دیدیم که فرمول‌بندی یک میدان تانسوری در فضای مینکوفسکی (شبه-اقلیدسی) منجر به تعریف فضای فیزیکی نااقلیدسی با متریک ناتخت $g_{\mu\nu}$ می‌شود. همچنین کنش از طریق نرده‌ای ریچی، $R = g_{\mu\nu}R^{\mu\nu}$، تعریف می‌شود که کمیتی هندسی است. از این جهت آشنایی با مفاهیم هندسه دیفرانسیل برای مطالعه‌ی میدان گرانش اجتناب‌ناپذیر است. با پیشرفت‌های نظریه‌ی میدان در ابعاد مختلف و نیز نظریه‌ی ریسمان هندسه‌ی دیفرانسیل نقش مهم‌تری در نظریه‌ی نسبیت عام انیشتین پیدا کرده است.
اصل هموردایی که در فصل اول از آن صحبت شد یادآوری می‌کند که فرمول‌بندی نظریه‌های فیزیک بهتر است مستقل از ناظر باشد. بهترین راه بیان این استقلال روشی است که از مختصات استفاده نکند. پس بهتر است ابزار هندسه‌ی دیفرانسیل را نیز به‌گونه‌ای به‌کار بگیریم که مستقل از مختصات باشد. آیا مثلاً تعریف از بردار می‌شناسید که مستقل از مختصات باشد؟ هیچ‌گاه برخورده‌اید به اینکه تعریف ضرب برداری در فضازمان ۴بعدی چیست؟ هیچ متوجه شده‌اید مشکل تعریف سرعت و شتاب در مختصات نامتعامد چیست؟ از این دست سوال‌ها کم نیستند که پاسخ آن‌ها در بیان خمینه‌ای هندسه‌ی دیفرانسیل بدیهی می‌شود. این انگیزه من است در استفاده از این ابزار به نسبت انتزاعی. این قیمت پیچیدگی را هنوز باارزش می‌دانم!

۲.۳ خمینه

خمینه‌ی n-بعدی حقیقی (مختلط) M فضایی است که در هر نقطه به یک فضای اقلیدسی $(C^n)R^n$ می‌ماند. خمینه را با معرفی مجموعه‌ای از همسایگی‌ها، U_i، تعریف می‌کنیم که M را می‌پوشاند. هر U_i زیرفضایی از $(C^n)R^n$ است. درواقع با چسباندن تکه‌هایی از $(C^n)R^n$ یک خمینه می‌سازیم.
به‌منظور ایجاد تصور مطلوبی از خمینه به نمونه‌های زیر توجه کنید. ابتدا چند نمونه از فضاهای یک‌بعدی که خمینه هستند.



و این هم چند نمونه از فضاهایی یک‌بعدی که خمینه نیستند:



تعریف زیر از خمینه شاید گویاتر باشد: خمینه‌ی M مجموعه‌ای است همراه با دسته‌ای از مجموعه‌های باز $\{O_n\}$ که M را می‌پوشاند:

$$\begin{array}{llll} \blacktriangleright\ p \in M & \exists O_\alpha & ; & p \in O_\alpha \\ \blacktriangleright\ \forall\alpha \quad : & \exists\psi_\alpha & ; & \psi_\alpha : O_\alpha \to U_\alpha < R \\ \blacktriangleright\ O_\alpha \cap O_\beta \neq ۰ & & ; & \psi_\beta\psi_\alpha^{-۱} \end{array}$$

هر نگاشت ψ_α یک نقشه (مختصات) است.
برای اینکه از تعبیر فضا به معنی مالوف آن به درآیید چند مثال دیگر می‌زنم.

مثال‌هایی گوناگون از خمینه:
R^n و C^n نمونه‌های بدیهی خمینه هستند.
کره n-بعدی، S^n:

$$\sum_{i=۱}^{n+۱} x_i^۲ = C^۲ \quad , \quad C = const. \tag{۶۳}$$

خمینه $S^۱$ دایره است. دایره را نمی‌توان تنها با یک زیرفضای $R^۱$ پوشاند. حداقل دو زیرفضا لازم است. $S^۲$ کره است.
$U(۱)$: با عناصر $e^{-i\theta}$ و $۰ \leq \theta < ۲\pi$. می‌توانید نشان دهید که $U(۱) = S^۱$!
$SU(۲)$: هر ماتریس $SU(۲)$ را می‌توان نوشت:

$$u = \begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix} \tag{۶۴}$$

که در آن $a = x_۱ + ix_۲$, $b = x_۳ + ix_۴$ و

$$\det u = |a|^۲ + |b|^۲ = \sum x_i^۲ = ۱ \tag{۶۵}$$

پس فضای پارامتری $SU(۲)$ را می‌توان با $S^۳$ یکی دانست:

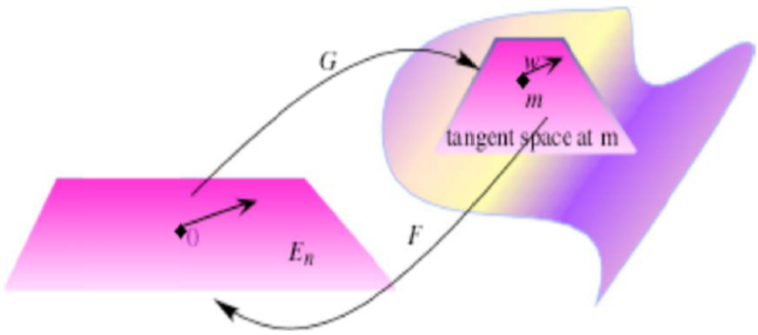
$$SU(۲) = S^۳ \tag{۶۶}$$

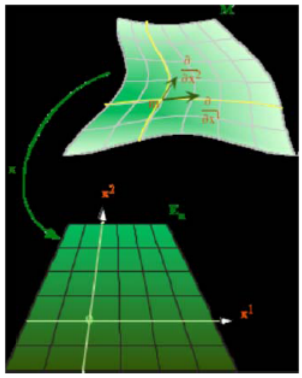
مرز خمینه مرز یک قطعه خط در دو نقطه انتهای آن است. مرز یک قرص، دایره است. عموماً مرز خمینه n-بعدی M، یک خمینه $n-۱$بعدی است که آن را با ∂M نشان می‌دهند. مرز هر مرز صفر است. یعنی:

$$\partial\partial M = ۰ \tag{۶۷}$$

دستگاه مختصات گیریم $\{U_i\}$ پوششی برای خمینه‌ی M باشد. در هر همسایگی U_i نگاشت یک‌به‌یک ϕ_i از نقاط x به فضای R^n را مختصات می‌نامند. میان دو نگاشت ϕ_i و ϕ_j متناظر دو همسایگی U_i و U_j در منطقه مشترک

$U_i \cap U_j$ چه ارتباطی هست؟ ϕ_i^{-1} نگاشتی است از R^n به U_i. پس تابع گذار $\phi_{ji} = \phi_j \phi_i^{-1}$ نگاشتی است از R^n به R^n که مختصات ϕ_i را به ϕ_j تبدیل می‌کند.





این نگاشت باید C^∞ باشد. هرگاه ϕ_{ji} تحلیلی حقیقی باشد، M را خمینه‌ی تحلیلی حقیقی نامند. هرگاه ϕ_{ji} هومولف باشد، M را خمینه‌ی مختلط می‌نامند.

مثال: کره‌ی دوبعدی S^2 را درنظر بگیرید. نیم‌کره شمالی و جنوبی را روی کره به‌عنوان دو همسایگی U_1 و U_2 اختیار می‌کنیم. این دو همسایگی، با دو دسته مختصات کره را می‌پوشانند. بیان کره با یک دستگاه مختصات ممکن نیست.

۳.۳ بردار و هم-بردار

گیریم F مجموعه‌ی (فضای) توابع مشتق‌پذیر F روی M در همسایگی P باشد. آن‌گاه بردار مماس در نقطه P را به‌این‌صورت تعریف می‌کنیم:

$$v : F \to v(F) = \text{عدد حقیقی} \tag{۶۸}$$

به‌گونه‌ای که شرط زنجیره‌ای برقرار باشد:

$$v(G) = \frac{\partial g}{\partial G_i}|_p v(G_i)$$

$$G = g(G_1, G_2 ...); G_i = F$$

این بردارهای مماس یک فضای برداری تشکیل می‌دهند، به‌سهولت می‌توان دید که $av + u$ باید یک بردار باشد:

$$(av + u)(F) = av(F) + u(F) \tag{۶۹}$$

گیریم مختصات داده شده باشد. پس می‌توانیم طبق شرط زنجیره‌ای بنویسیم:

$$x^i \in F \quad ; \quad F = f(x^i)$$

$$v(F) = \frac{\partial f}{\partial x^i}|_p v(x^i) \tag{۷۰}$$

که در آن $v(x^i)$ بردار (عملگر) v است که روی تابع x^i عمل می‌کند. مؤلفه‌های بردار v که نسبت به این مختصات می‌شود:

$$v^i := v(x^i)$$

پس می‌نویسیم:

$$v(F) = \frac{\partial f}{\partial x^i} v^i \tag{۷۱}$$

به‌این‌ترتیب n بردار مماس $\partial_i = \frac{\partial}{\partial x^i}$ را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\partial_i(F) := \frac{\partial f}{\partial x^i}|_p \tag{۷۲}$$

پس می‌توان هر بردار را به‌صورت ترکیب خطی این nبردار نوشت. استقلال خطی این بردارها از روی مؤلفه‌هایشان دیده می‌شود:

$$\partial_i(x^k) = \delta_i^k \tag{۷۳}$$

بنابراین بردارهای مماس در نقطه p یک فضای برداری می‌سازند. فضای مماس در نقطه p را با T_p نشان می‌دهیم. هر پایه‌ی فضای مماس T_p را یک n–پایه می‌نامند. گاهی در فیزیک نسبیتی از واژه‌ی n–تایه استفاده می‌شود؛ مثلاً در فضای چهاربعدی چارچوب را ۴–تایه هم می‌نامیم. میدان برداری لفظی است که در هر فیزیک برای بیان وجود برداری خوش تعریف در هر نقطه از فضازمان، خمینه، به‌کار می‌رود. به‌همین‌ترتیب، منظور از یک میدان n–پایه، n میدان برداری است که در هر نقطه از یکدیگر مستقل‌اند، مانند $\{\partial_i\}$
n–پایه‌ای را هولونوم می‌نامند که بتوان آن را در مختصات مناسبی به‌صورت $\left\{\frac{\partial}{\partial x^j}\right\}$ نوشت. بنابراین، n–پایه‌ای را که نتوان آن را در هیچ مختصاتی به‌صورت $\left\{\frac{\partial}{\partial x^j}\right\}$ درآورد ناهولونوم می‌نامند.
مفهوم میدان برداری نیز از فیزیک به کارمان می‌آید. هرگاه به‌ازای هر نقطه‌ی p روی خمینه یک بردار (مماس) X_p تعریف شده باشد گوییم X یک میدان برداری است.

هم–بردار

هم–بردار، یا بردار همزاد (دوگان)، یک فونکسیونال (تابعال) خطی است روی فضای بردارهای T_p. ω یک هم–بردار است هرگاه به‌ازای $u \in T_p$ داشته باشیم:

$$\omega(u) = \langle \omega, u \rangle = \text{عدد حقیقی} \tag{۷۴}$$

شرط خطی بودن را می‌نویسیم

$$\langle \omega, \alpha u + \beta v \rangle = \alpha \langle \omega, u \rangle + \beta \langle \omega, v \rangle \tag{۷۵}$$

ضرب هم–بردارها در یک عدد و نیز جمع آن‌ها، $\alpha\omega$ و $\omega + \theta$ به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$(\alpha\omega)(u) = \alpha \langle \omega, u \rangle$$

$$(\omega + \theta)(u) = \langle \omega, u \rangle + \langle \theta, u \rangle \tag{۷۶}$$

به‌این‌ترتیب، هم‌بردارها یک فضای برداری تشکیل می‌دهند: T_p^*، که به آن فضای همزاد مماس و نیز فضای هم‌مماس گفته می‌شود برای تعریف پایه در فضای T_p^* از پایه‌های e_i در فضای T_p استفاده می‌کنیم

$$u = u^i e_i \tag{۷۷}$$

حالا تابعال‌هایی را که بردار u را به u^i می‌نگارد با e^i نشان می‌دهیم:

$$e^i(u) = u^i \text{ و } \langle e^i, u \rangle = u^i \tag{۷۸}$$

بنابراین می‌توانیم بنویسیم

$$\left\langle e^i, e_j \right\rangle = \delta^i_j \tag{۷۹}$$

توجه کنیم که e^i هم‌بردار است. برای $\omega \in T_p^*$ داریم:

$$\omega(u) = \left\langle \omega, u^i e_i \right\rangle = u^i \left\langle \omega, e_i \right\rangle = \left\langle \omega, e_i \right\rangle . \left\langle e^i, u \right\rangle = \left\langle \omega_i e^i, u \right\rangle \tag{۸۰}$$

اگر تعریف کنیم $\omega_i = \langle \omega, e_i \rangle$، آن‌گاه به‌علت دلخواه بودن u:

$$\omega = \omega_i e^i \tag{۸۱}$$

از تعریف e^i برمی‌آید که این هم‌بردارها نیز مستقل از یکدیگرند. بنابراین، می‌توان e^i-ها را بردارهای پایه در فضای هم‌مماس تلقی کرد. اکنون به‌عنوان یک مثال، دیفرانسیل یک تابع را درنظر می‌گیریم. f را تابع دلخواهی بگیرید df را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$df(u) = u(f) = u^i \frac{\partial f}{\partial x^i} = f_{,i} u^i \tag{۸۲}$$

این دیفرانسیل را با دیفرانسیل متعارف مقایسه کنید. معمولاً می‌نویسیم

$$df = f_{,i} \frac{\partial x^i}{\partial s} = f_{,i} u^i ds \tag{۸۳}$$

یعنی دیفرانسیلی که اینجا تعریف کردیم یک هم‌بردار است که بیانگر بخش متناهی دیفرانسیل متعارف است بدون جمله‌ی بینهایت کوچک ds! اکنون اگر $f = x^i$ باشد می‌توان نوشت

$$dx^i(u) = u(x^i) = u^j \frac{\partial x^i}{\partial x^j} = u^i = e^i(u) \Rightarrow dx^i = e^i \tag{۸۴}$$

چون e^i پایه T_p^* است نتیجه بالا به‌دست می‌آید. به‌همین دلیل هم‌بردارها را تک‌فرم دیفرانسیلی نیز می‌نامند. و dx^i-ها را می‌توان یک پایه در فضای هم–مماس تلقی کرد. این پایه، $\{dx^i\}$، همزاد (دوگان) پایه‌ی $\left\{ \frac{\partial}{\partial x^j} \right\}$ در فضای مماس است.

رسم است که هم–بردارها را بردار هموردا بنامند و همین‌طور بردارها را بردار پادوردا!

۴.۳ جبر تانسوری

به‌هنگام تعریف بردار دیدیم که چگونه لزوم تعمیم به هر خمینه‌ی دلخواه و مستقل از مختصات ما را به‌سوی تعریف از طریق عملگرها سوق داد. پس اگر تانسورهای دکارتی را می‌شد از ضرب تانسوری بردارهای متعارف به‌دست آورد، برای تعریف تانسورهای عام نیز باید از تابعال‌هایی روی فضاهای ضربدری استفاده کرد. در اینجا ضرب دکارتی فضاهای مماس به کارمان می‌آید.

ضرب دکارتی فضای مماسی T_p را با خودش درنظر می‌گیریم:

$$T_p \times T_p \tag{۸۵}$$

تابعال‌های خطی روی این فضا (نگاشت‌های خطی) را T می‌نامیم. پس:

$$T : T_p \times T_p \to R$$

اگر u, v بردارهای پادوردا باشند، $u, v \in T_p$، از فرض خطی بودن داریم:

$$T(u, v) \to R$$

$$T(\alpha v + \beta v', u) = \alpha T(v, u) + \beta T(v', u) \quad (۸۶)$$

$$T(v, \alpha u + \beta u') = \alpha T(v, u) + \beta T(v, u') \quad (۸۷)$$

این نگاشت‌های خطی یک فضای برداری تشکیل می‌دهند. این فضای برداری را حاصل‌ضرب تانسوری فضای T_p^* در T_p^* می‌نامند و به‌صورت $T_p^* \otimes T_p^*$ نشان می‌دهند. پس می‌توان نوشت:

$$T \in T_p^* \otimes T_p^* \quad (۸۸)$$

T را یک تانسور از مرتبه (۲و۰) می‌نامند؛ منظور تانسوری است که از ضرب دو فضای هم-مماس به‌وجود می‌آید و هیچ فضای مماس در ایجاد آن نقش ندارد. با استفاده از پایه‌های فضای هم-مماس می‌توان پایه برای این فضای تانسوری تولید کرد. برای این منظور در عمل تابعال روی یک جفت بردار آن‌ها را به مؤلفه‌هایشان تجزیه می‌کنیم و از ویژگی خطی استفاده می‌کنیم. داریم:

$$T(v, u) = T(v^i e_i, u^j e_j) = v^i u^j T(e_i, e_j) = v^i u^j T_{ij} \quad (۸۹)$$

با تعریف $T_{ij} = T(e_i, e_j)$ می‌توان نوشت:

$$T(v, u) = v^i u^j T_{ij} \quad (۹۰)$$

حالا فرض می‌کنیم $\{e^{ij}\}$ پایه در فضای تانسوری نوع (۲و۰) باشد:

$$T(v, u) = e^{ij}(v, u) T_{ij} = T_{ij} e^{ij}(v, u) \quad (۹۱)$$

از مقایسه دو رابطه‌ی بالا نتیجه می‌گیریم:

$$e^{ij}(v, u) = v^i u^j$$

$$e^{ij}(v^k e_k, u^l e_l) = v^k u^l e^{ij}(e_k, e_l)$$

$$e^{ij}(e_k, e_l) = \delta^i_k \delta^j_l \quad (۹۲)$$

با این تعاریف می‌بینیم که هر تانسور را می‌توان به‌صورت زیر تجزیه کرد:

$$T = T_{ij} e^{ij} \quad (۹۳)$$

این تجزیه یکتاست. پس e^{ij} یک پایه درست می‌کند. معمولاً می‌نویسند:

$$e^{ij} = e^i \otimes e^j$$

$$e^i \otimes e^j \in T_p^* \otimes T_p^* \quad (۹۴)$$

از همین روش استفاده می‌کنیم و ضرب تانسوری فضاهای مماس را تعریف می‌کنیم. پس هر دو بردار (تک‌فرم) را هم می‌توان در هم ضرب تانسوری کرد:

$$\omega^1 \otimes \omega^2 \in T_p^* \otimes T_p^* \quad (۹۵)$$

این تعریف راه را باز می‌کند برای تعمیم ضرب تانسوری به هر تعداد فضای T_p یا T_p^*. مثلاً هرگاه

$$T : T_p^* \times T_p \times T_p \times T_p \to R^1 \qquad (۹۶)$$

آن‌گاه تانسورهای فضای ضرب تانسوری $T_p \otimes T_p^* \otimes T_p^* \otimes T_p^*$ را از نوع (۳و۱) می‌نامند. هر تانسور را می‌توان برحسب پایه‌ها تجزیه کرد، مثلاً اگر R تانسوری از این فضا باشد، داریم:

$$R = R^i_{jkl} e_i^{jkl} = R^i_{jkl} e_i \otimes e^j \otimes e^k \otimes e^l \qquad (۹۷)$$

تانسور انحنا در فضای ریمانی از این نوع است. معمول است که T_p و T_p^* را به‌این‌صورت بنویسند:

$$T^1_0 = T_p, T^0_1 = V^* \qquad , \qquad T^0_0 = R \qquad (۹۸)$$

به‌این‌ترتیب یک جبر تانسوری روی T_p تعریف می‌شود. موجودات ریاضی که این‌گونه تعریف می‌شوند کمیت‌های نرده‌ای، برداری، و تانسوری از مرتبه‌های بالاتر را دربر می‌گیرد.

۱.۴.۳ ادغام

در عمل ادغام روی دو شاخص معین هموردا و پادوردای تانسوری از نوع (r, s) تانسوری از نوع $(r-1, s-1)$ به‌دست می‌آید، از جمله می‌نویسیم:

$$C(\omega \otimes y) = \langle \omega, y \rangle \qquad (۹۹)$$

که نتیجه‌ی آن تانسوری از نوع (۰و۰) یعنی کمیتی نرده‌ای است. تانسور R را درنظر بگیرید با مؤلفه‌های R^i_{jkl}، دو شاخص k و i را ادغام می‌کنیم. نتیجه می‌شود:

$$R^i_{jil} e^i \otimes e^l =: R_{jl} e^j \otimes e^l \qquad (۱۰۰)$$

تانسور R_{jl} از نوع (۲و۰)=(۳-۱ و ۱-۱) است که آن را تانسور ریچی می‌نامند.
توجه کنید که این تعریف مستقل از انتخاب پایه است!

۵.۳ جبر خارجی

هیچ‌گاه فکر کرده‌اید چرا نمی‌توان ضرب خارجی دو بردار را به فضاهای با بعد غیر از ۳ تعمیم داد؟ اگر ما موجودات ۲ یا ۴بعدی بودیم و فقط آنالیز برداری ۳بعدی را می‌شناختیم، و نه خمینه‌ها و نه هندسه‌ی دیفرانسیل مستقل از مختصات را، آن‌گاه چگونه می‌توانستیم معادلات ماکسول برداری را بنویسیم؟ خواهیم دید بردار محوری که از ضرب خارجی دو بردار به‌دست می‌آید درواقع یک تانسور است، یعنی موجودی تانسوری است که از ضرب تانسوری دو بردار به‌دست می‌آید، و پادمتقارن می‌شود. این به این معنی است که بردارهای محوری درواقع همان تانسورهای پادمتقارن در ۳بعد هستند، با این تفاوت که تعریف تانسور پادمتقارن در هر بعد امکان دارد اما مفهوم بردار محوری وابسته به بعد ۳ است! ابتدا می‌پردازیم به تعریف تانسورهای پادمتقارن.
تانسوری را پادمتقارن می‌نامیم که در این رابطه صدق کند:

$$T(u, v) = -T(v, u) \qquad (۱۰۱)$$

مجموعه تانسورهای پادمتقارن از نوع (s و ۰) بسیار پراهمیت‌اند. تانسوری کاملاً پادمتقارن است که در تمام زوج‌های شاخص‌هایش پادمتقارن باشد.
جبر خارجی روی فضای T_p (یا T_p^*) از مجموع تانسورهای کاملاً پادمتقارن از نوع (s و ۰) یا (۰ و r) به‌دست می‌آید.

اگر فضای تانسورهای کاملاً پادمتقارن نوع (s و ۰) را با Λ_s نشان دهیم، مجموع (مستقیم) فضاهای Λ_p جبر خارجی را تشکیل می‌دهد. برای این منظور یک ضرب خارجی لازم است. دقت کنید:

$$\omega^1 \otimes \omega^2 \neq \omega^2 \otimes \omega^1 \qquad \omega^1, \omega^2 \in T_p \tag{۱۰۲}$$

یعنی ضرب تانسوری به ضرب پادمتقارن نمی‌انجامد. به‌این دلیل ضرب جدیدی را تعریف می‌کنیم:

$$\omega^1 \wedge \omega^2 = \omega^1 \otimes \omega^2 - \omega^2 \otimes \omega^1 \tag{۱۰۳}$$

این ضرب را ضرب خارجی یا گووه‌ای می‌نامند. این ضرب خواص زیر را دارد:

$$\omega \wedge \sigma = -\sigma \wedge \omega$$

$$\omega \wedge \omega = 0 \tag{۱۰۴}$$

این ضرب عنصری از فضای Λ_2 را به‌دست می‌دهد. پایه این فضای Λ_2 عبارت است از:

$$e^i \wedge e^j = e^i \otimes e^j - e^j \otimes e^i \tag{۱۰۵}$$

تجزیه‌ی حاصل‌ضرب گووه‌ای در این پایه به‌صورت زیر است:

$$\omega \wedge \sigma = \omega_i e^i \wedge \sigma_j e^j = \omega_i \sigma_j e^i \wedge e^j = \frac{1}{2}(\omega_i \sigma_j e^i \wedge e^j + \omega_j \sigma_i e^j \wedge e^i)$$

$$= \frac{1}{2}(\omega_i \sigma_j e^i \wedge e^j - \omega_j \sigma_i e^i \wedge e^j) = \frac{1}{2}(\omega_i \sigma_j - \omega_j \sigma_i) e^i \wedge e^j = \sum_{i<j} (\omega_i \sigma_j - \omega_j \sigma_i) e^i \wedge e^j \tag{۱۰۶}$$

در فضای nبعدی تانسورهای پادمتقارن مرتبه‌ی دو $\binom{n}{2} = \frac{n!}{2!(n-2)}$ بردار مستقل $e^i \wedge e^j$ وجود دارد. بنابراین، می‌توان بردارهای پایه را در ۴بعد؛ به‌عنوان مثال، به‌این‌صورت مرتب کرد:

$$\begin{array}{lll} e^1 \wedge e^2, & e^1 \wedge e^3, & e^1 \wedge e^4, \\ e^2 \wedge e^3, & e^2 \wedge e^4, & \\ e^3 \wedge e^4. & & \end{array}$$

یعنی به‌صورت $e^i \wedge e^j$ با فرض $i < j$.

با توجه به این ویژگی‌ها، هم‌بردارها را فرم دیفرانسیلی نیز می‌نامند. dx^i تک‌-فرم دیفرانسیلی است. به‌این‌ترتیب $e^i \wedge e^j = dx^i \wedge dx^j$ را ۲-فرم دیفرانسیلی می‌نامند. بعد فضای ۲-فرم‌ها برابر است با $\binom{n}{2}$. این ۲-فرم‌ها خواصی دارند که از عنصر دیفرانسیلی سطح انتظار می‌رود. به‌طور مثال، با تبدیل مختصات

$$x \to x'$$

$$y \to y'$$

۲-فرم به‌صورت زیر تبدیل می‌شود:

$$dx' \wedge dy' = \left(\frac{\partial x'}{\partial x}\frac{\partial y'}{\partial y} - \frac{\partial x'}{\partial y}\frac{\partial y'}{\partial x}\right) dx \wedge dy = \text{ژاکوبی}(x', y'; x, y) dx \wedge dy \tag{۱۰۷}$$

به‌همین ترتیب فضای تانسوری کاملاً پادمتقارن نوع (p و ۰)، Λ_p، یا (۰ و p)، Λ^p، ساخته می‌شود. بعد این فضا برابر است با $\binom{n}{p}$. پایه در این فضا نیز می‌شود:

$$e^{i_1} \wedge e^{i_2} \wedge \dots \dots e^{i_p}, \qquad i_1 < i_2 < \dots < i_p \tag{۱۰۸}$$

فضای p-فرم‌های مشتق‌پذیر را با $C^\infty(\Lambda_p)$ نشان می‌دهند. در ۴بعد این فضاها به‌این صورت‌اند:

بعد = ۱ $\quad C^\infty(\Lambda_p^0) = \{f(x)\}$

بعد = ۴ $\quad C^\infty(\Lambda_p^1) = \{f_i(x)dx^i\}$

بعد = $\binom{4}{2}$ = ۶ $\quad C^\infty(\Lambda_p^2) = \{f_{ij}(x)dx^i \wedge dx^j\}$

بعد = $\binom{4}{3}$ = ۴ $\quad C^\infty(\Lambda_p^3) = \{f_{ijk}(x)dx^i \wedge dx^j \wedge dx^k\}$

بعد = $\binom{4}{4}$ = ۱ $\quad C^\infty(\Lambda_p^4) = \{f_{1234}(x)dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 \wedge dx^4\}$

به چند ویژگی این فضاها توجه کنید:

۱- بعد فضاهای Λ_p و Λ_{n-p} مساوی است: $\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$.

۲-$C^\infty(\Lambda_p^4)$ با ضرب یک تابع در عنصر ۴-حجم بیان می‌شود.

۳- $\Lambda_p = 0$ به‌ازای $n < p$.

ضرب گووه‌ای را می‌توان به هر دو تانسور پادمتقارن دلخواه تعمیم داد. ضرب هر p-فرم در هر q-فرم یک $(p+q)$-فرم است با خاصیت زیر:

$$\alpha_p \wedge \beta_q = (-1)^{pq}\beta_q \wedge \alpha_p \tag{۱۰۹}$$

به‌این‌ترتیب فضای p-فرم‌ها یک جبر می‌سازد:

$$\Lambda^\alpha = \Lambda^0 \oplus \Lambda^1 \oplus ... \oplus \Lambda^n \tag{۱۱۰}$$

۶۳ مشتق خارجی

جبر خارجی هم روی بردارها و هم روی هم-بردارها تعریف می‌شود. جبر خارجی روی هم-بردارها این حسن را دارد که می‌توان در آنجا بدون مفهوم هموستار، یعنی بدون مفهوم انتقال موازی، مشتق تعریف کرد.

فضای فرم‌های دیفرانسیلی Λ^p را درنظر بگیرید. مشتق خارجی d را این‌گونه تعریف می‌کنیم:

$$d : \Lambda^p \to \Lambda^{p+1} \tag{۱۱۱}$$

پس مشتق خارجی p-فرم‌ها را به $(p+1)$-فرم تبدیل می‌کند. این مشتق ویژگی‌های زیر را دارد:

$$\begin{aligned}
&1)d \wedge (\omega + \eta) = d \wedge \omega + d \wedge \eta \\
&2)d \wedge (\omega \wedge \eta) = (d \wedge \omega) \wedge \eta + (-1)^p \omega \wedge (d \wedge \eta) \\
&3)d \wedge (d \wedge \eta) = 0 \\
&4)d \wedge f = df
\end{aligned}$$

با این تعریف، از هر فرمی می‌شود مشتق گرفت. در این روابط H مجموعه‌ای از شاخص‌ها است:

$$d\omega = \frac{d\omega_H}{dx^i} dx^i \wedge dx^H$$

$$df = f_{,i} dx^i$$

$$d(f_j dx^j) = f_{j,i} dx^i \wedge dx^j$$

$$d(f_{jk} dx^j \wedge dx^k) = \frac{\partial f_{jk}}{\partial x^i} dx^i \wedge dx^j \wedge dx^k$$

توجه می‌کنید که در جمع‌های بالا تنها جملات پادمتقارن از $f_{j,i}$ و $f_{jk,i}$ پیش می‌آید.
هرگاه بتوان فرم ω را به‌صورت $\omega = d\alpha$ نوشت، آن‌گاه آن را کامل می‌نامیم. دراین‌صورت داریم:

$$d\omega = dd\alpha = ۰ \tag{۱۱۲}$$

اما اگر داشته باشیم $d\omega = ۰$ آن‌گاه الزاماً $\omega = d\alpha$ نخواهد بود! چنین فرمی را بسته می‌نامند. مثال‌های زیر از مشتق خارجی فرم‌های مختلف و کاربرد آن در آنالیز برداری توان این نوع فرمول‌بندی را نشان می‌دهد:

$$\begin{cases} \phi = \phi(x,y,z) \\ \\ d\phi = \frac{\partial\phi}{\partial x}dx + \frac{\partial\phi}{\partial y}dy + \frac{\partial\phi}{\partial z}dz = grad\phi.d \end{cases}$$

$$\begin{cases} \omega = \omega_۱ dx_۱ + \omega_۲ dx_۲ + \omega_۳ dx_۳ = \vec{\omega}.dx \\ \\ d\omega = \left(\frac{\partial\omega_۳}{\partial y} - \frac{\partial\omega_۲}{\partial z}\right)dydz + \left(\frac{\partial\omega_۱}{\partial z} - \frac{\partial\omega_۳}{\partial x}\right)dzdx + \left(\frac{\partial\omega_۲}{\partial x} - \frac{\partial\omega_۱}{\partial y}\right)dxdy = (curl\vec{\omega}).d\vec{\theta} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \mu = fdy \wedge dz + gdz \wedge dx + hdx \wedge dy \quad ; \quad \mu = \vec{\nu}.do \\ \\ d\mu = \left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial h}{\partial}\right)dxdydz = div\vec{\nu}dx^۳ \end{cases}$$

به‌این‌ترتیب:

$$\begin{array}{ccc} dd\phi = ۰ & \Leftrightarrow & curl\; grad\phi = ۰ \\ dd\omega = ۰ & \Leftrightarrow & div\; curl\vec{\omega} = ۰ \end{array}$$

۱.۶.۳ عملگر ستاره

بعد فضاهای Λ^p و Λ^{n-p} برابر است. پس نوعی هم‌زادی میان این دو فضا وجود دارد. عملگر ستاره طوری تعریف می‌شود این هم‌زادی را برساند و p-فرم‌ها را به $(n-p)$-فرم تبدیل کند:

$$*\left(dx^{i_۱} \times dx^{i_۲} \times ...dx^{i_p}\right) = \frac{۱}{(n-p)!}\epsilon_{i_۱ i_۲ ... i_p ... i_n} dx^{i_{p+۱}} \wedge dx^{i_{p+۲}} \wedge ...dx^{i_n} \tag{۱۱۳}$$

به‌طور مثال در ۴بعد داریم:

$$*dx^۱ = ۱/۶ dx^۲ \wedge dx^۳ \wedge dx^۴$$

۷.۳ مشتق لی

هنوز مشتق دیگری می‌توان تعریف کرد که به مفهوم انتقال موازی، یا ساختاری جدید روی خمینه، نیاز نداشته باشد.
X و Y را دو بردار پادوردا می‌گیریم. قلاب لی از آن‌ها بردار دیگری می‌سازد:

$$[X,Y]f = X(Y(f)) - Y(X(f))$$

$$[X,Y] = XY - YX \tag{۱۱۴}$$

ویژگی‌های زیر نشان می‌دهد که قلاب لی از هر دو بردار مماس، بردار مماس دیگری می‌سازد:

$$[X,Y](\alpha f + \beta g) = \alpha[X,Y]f + \beta[X,Y]g \tag{۱۱۵}$$

و نیز

$$[X,Y](fg) = g[X,Y]f + f[Y,X]g \tag{۱۱۶}$$

به‌راحتی نشان داده می‌شود که قلاب لی در اتحاد ژاکوبی صدق می‌کند:

$$[[X,Y],Z]+[[Y,Z],X]+[[Z,X],Y]=0 \tag{۱۱۷}$$

مؤلفه‌های قلاب لی برحسب مختصات موضعی می‌شود:

$$[X,Y]^j=e^j(XY-YX)=XY^j-YX^j=X^kY^j_{,k}-Y^kX^j_{,k} \tag{۱۱۸}$$

حالا بردارهای پایه‌ی هولونوم را درنظر بگیرید. بدیهی است که قلاب لی آن‌ها صفر می‌شود:

$$\left[\frac{\partial}{\partial x^i},\frac{\partial}{\partial x^j}\right]=0 \tag{۱۱۹}$$

خاصیت بالا نشان می‌دهد قلاب لی نقش مشتق‌گیری دارد. به‌همین دلیل مشتق لی بردار Y را در جهت X این‌گونه تعریف می‌کنیم:

$$\mathcal{L}_XY=[X,Y]=-[Y,X]=\mathcal{L}_YX \tag{۱۲۰}$$

تعریف این مشتق را می‌توان به هر تانسور دلخواه T تعمیم داد:

(a $T=f$

$$\mathcal{L}_Xf=df(x)=xf$$

(b $T=Y$

$$\mathcal{L}_XY=[X,Y]$$

(c $S\otimes T$

$$\mathcal{L}_X(S\otimes T)=\mathcal{L}_XS\otimes T+S\otimes\mathcal{L}_XT$$

ویژگی آخر اجازه می‌دهد اثر $\mathcal{L}_X$ را روی هر تانسوری به‌دست بیاوریم. مثلاً، اثر $\mathcal{L}_X$ روی تک–فرم ω به روش زیر به‌دست می‌آید:

$$\mathcal{L}_X(\omega\otimes T)=\mathcal{L}_X\omega\otimes T+S\otimes\mathcal{L}_X\omega \tag{۱۲۱}$$

حالا در ضرب تانسوری معادله‌ی بالا عمل ادغام انجام دهیم. با توجه به این که ($C(\omega\otimes Y)\to\langle\omega,Y\rangle$)، به‌دست می‌آوریم:

$$\mathcal{L}_X\langle\omega,Y\rangle=\langle\mathcal{L}_X\omega,Y\rangle+\langle\omega,\mathcal{L}_XY\rangle \tag{۱۲۲}$$

تجزیه‌ی این معادله برحسب مؤلفه‌ها می‌دهد:

$$X^k(\omega_iY^i)_{,k}=(\mathcal{L}_X\omega)_jY^j+\omega_j(\mathcal{L}_XY)^j \tag{۱۲۳}$$

و از آنجا به‌دست می‌آوریم:

$$(\mathcal{L}_X\omega)_jY^j=X^k(\omega_{i,k}Y^i+\omega_iY^i_{,k})-\omega_j(X^kY^j_{,k}-Y^kX^j_{,k})=(X^k\omega_{j,k}+\omega_kX^k_{,j})Y^j \tag{۱۲۴}$$

در نتیجه مشتق هموردای تک–فرم می‌شود:

$$(\mathcal{L}_X\omega)_j=(X^k\omega_{j,k}+\omega_kX^k_{,j}) \tag{۱۲۵}$$

با استفاده از رابطه ادغام شده بالا به‌صورت

$$\mathcal{L}_X[\omega(Y)]=(\mathcal{L}_X\omega)Y+\omega\mathcal{L}_XY \tag{۱۲۶}$$

می‌توان مشتق لی را به هر تانسور دلخواه T از نوع (r, s) با استفاده از اعمال مشتق لی به‌صورت

$$\mathcal{L}_X[T(\omega^1\omega^2...\omega^r, Y_1Y_2...Y_s]$$

تعمیم داد.
با استفاده از روابط بالا می‌توان میان مشتق خارجی یک تک-فرم و مشتق لی رابطه برقرار کرد. ابتدا می‌نویسیم:

$$\langle \mathcal{L}_X\omega, Y\rangle - Y\langle \omega, X\rangle = (\omega_{j,k}X^k + \omega_k X^k_{,j}) - Y^j(\omega_{k,j}X^k + \omega_k X^k_{,j})$$

$$= (\omega_{j,k} - \omega_{k,j})X^kY^j = d\omega(X, Y) \tag{۱۲۷}$$

سپس از رابطه‌ی بالا برای تعریف مشتق لی تک-فرم‌ها به‌دست می‌آوریم:

$$d\omega(X, Y) = X\langle\omega, y\rangle - Y\langle\omega, X\rangle - \langle\omega, \mathcal{L}_X y\rangle \tag{۱۲۸}$$

۸.۳ انتقال موازی و مشتق هموردا

انتقال موازی یک بردار در فضای اقلیدسی روشن است. بر روی یک خمینه دلخواه نمی‌دانیم بردارها را چگونه منتقل کنیم. یعنی ارتباط میان فضای مماس در نقاط مختلف وجود ندارد. برقرار کردن این ارتباط که با ساختاری فراتر از آنچه روی تعریف خمینه لازم است انجام می‌شود، کمک می‌کند که دو بردار را از هم کم کنیم، یکی منتقل‌شده به نقطه‌ای دیگر و یکی در همان نقطه. این اختلاف منجر به تعریف مشتق می‌شود (مشتق هموردا): انتقال بردار در امتداد یک خم تعریفی برای مشتق بردار در امتداد آن خم به‌دست می‌دهد. بنابراین، انتظار این است اگر نوعی مشتق تعریف شود مبتنی بر مفهومی جدید، که طی آن به هر بردار برداری دیگر نسبت داده شود، باید بتوان آن را تعریفی از انتقال موازی تعبیر کرد.

شکل

به‌این منظور ابتدا از شهود کمک می‌گیریم. گیریم $\{e_j\}$ یک n-پایه در فضای بردارها و $\{e^j\}$ پایه‌ی متناظر از هم‌بردارها باشد. دو نقطه‌ی P و Q بینهایت نزدیک به هم درنظر می‌گیریم: بردار $\overrightarrow{PQ}$ را به‌تقریب با بردار بینهایت کوچک εu یکی می‌گیریم، که در آن $u \in T_p$ و ε عددی بینهایت کوچک است. اگر در این مفهوم دو نقطه‌ی نزدیک به هم روی خمینه‌یی که متریک در آن تعریف نشده است مشکل دارید، به فضای R^n بروید و در آن‌جا دو نقطه‌ی نزدیک به هم بگیرید! حالا n-پایه را از Q به P در امتداد u به‌روشی دلخواه منتقل می کنیم. پایه‌ی منتقل شده $\{e_j(Q \to p)\}$ را در نقطه‌ی P با بردار پایه در آن نقطه، $\{e_j(p)\}$، مقایسه می‌کنیم. اختلاف آن‌ها برداری است که آن را به‌صورت $D_{\varepsilon u}e_j$ نشان می‌دهیم و برحسب $\{e_j(p)\}$ بسط می‌دهیم و ضرایب بسط را با $\omega^i_j(\varepsilon u)$ نشان دهیم:

$$D_{\varepsilon u}e_j = \omega^i_j(\varepsilon u)e_j \tag{۱۲۹}$$

پس با تعیین ضرایب ω^i_j انتقال تعریف شده است. انتقال را خطی (آفین) می‌گیریم، یعنی می‌خواهیم وابستگی ω^i_j و $D_{\varepsilon u}e_j$ به εu خطی باشد. به‌این‌ترتیب ε از طرفین حذف می‌شود و نگاشت $u \to \omega^i_j(u)$ را می‌توان چنین نوشت:

$$\omega^i_j : u \to \omega^i_j(u) = L^i_{kj}e^k(u) \tag{۱۳۰}$$

پس ω^i_j باید تک-فرم دیفرانسیلی

$$\omega^i_j = L^i_{kj}e^k \tag{۱۳۱}$$

همین‌طور نگاشت $u \to D_u e_j$، تانسورهای De_j از نوع (۱و۱) را تعریف می‌کند:

$$De_j = \omega^i_j \otimes e_j \tag{۱۳۲}$$

به‌گونه‌ای که

$$De_j : u \to D_u e_j = \omega^i_j(u) \otimes e_j = \omega^i_j(u) e_j = L^i_{kj} e^k(u) e_j \tag{۱۳۳}$$

این مشتق هموردای بردار پایه به‌صورت زیر تعمیم داده می‌شود:

$$D(v) = D(v^i e_j) = (dv^i) \otimes e_j + v^i \omega^i_j \otimes e_i = (Dv^i) \otimes e_i \tag{۱۳۴}$$

که در آن

$$Dv^i := dv^i + \omega^i_j v^j = v^i_{;k} \omega^k \tag{۱۳۵}$$

ازاین‌رو، مشتق هموردای مؤلفه‌های یک بردار می‌شود:

$$v^i_{;k} = v^i_{,k} + L^i_{kj} v^j \tag{۱۳۶}$$

حالا از این توصیف مشتق هموردا با تکیه بر مفهوم انتقال بردار می‌رسیم به تعریف صوری مفاهیم بالا. ابتدا هم–وستار را تعریف می‌کنیم که متناظر است با تک–فرم‌های ω^i_j که شهودی تعریف شد. هم‌وستار (آفین)، ∇، نگاشتی است که به هر بردار X یک عملگر دیفرانسیلی ∇_X نسبت می‌دهد. این نگاشت به هر بردار Y بردار $\nabla_X Y$ را نسبت می‌دهد، ویژگی‌های سازگار زیر را برای این عملگر می‌خواهیم:
الف) خطی در شناسه X:

$$\nabla_{fX+gY} Z = f\nabla_X Z + g\nabla_Y Z \tag{۱۳۷}$$

که در آن f, g توابع دلخواهند و

$$(X, Y, Z \in T^1_\cdot)$$

این شرط به این معنی است که مشتق ∇_X در نقطه P تنها به جهت (به بردار) X در نقطه P وابسته است.
ب) خطی در شناسه Y:

$$\nabla_X(\alpha Y + \beta Z) = \alpha\nabla_X Y + \beta\nabla_X Z \tag{۱۳۸}$$

ج) عمل روی تابع:

$$\nabla_X(f) = Xf \tag{۱۳۹}$$

د) عمل روی حاصل‌ضرب fY:

$$\nabla_X(fY) = (\nabla_X f)Y + f\nabla_X Y = (Xf)Y + f\nabla_X Y \tag{۱۴۰}$$

حالا می‌توانیم مؤلفه‌های هم‌وستار را این‌گونه تعریف کنیم:

$$\nabla_X e_j = \omega^l_j(X) e_l \tag{۱۴۱}$$

و با فرض $X = e_k$ به‌دست می‌آوریم:

$$\nabla_{e_k} e_j = \omega^l_j(e_k) e_l \tag{۱۴۲}$$

به‌عنوان مثال، بردار $X = X^k \frac{\partial}{\partial x^k}$ را در مختصات موضعی درنظر می‌گیریم. داریم:

$$\nabla_X(f) = X^k \nabla_{\partial_k} f = Xf = X^k f_{,k} \tag{۱۴۳}$$

هم‌وستار به ما اجازه می‌دهد نوعی مشتق جدید تعریف کنیم که تعمیم مشتق متعارف آنالیز باشد به هر خمینه‌ی دلخواه: مشتق هموردای بردار $\nabla Y, Y$، تانسوری از نوع (۱و۱) است که بردار پادوردای X را به بردار $\nabla_X Y$ با تعریف زیر می‌نگارد:

$$\nabla Y(X) = \langle \nabla Y, X \rangle = \nabla_X Y \tag{۱۴۴}$$

که در آن، ∇_X، هم‌وستار روی خمینه است. به‌طور مثال داریم:

$$\nabla(fY)(X) = (\nabla_X f)Y + f\nabla_X Y = (Xf)Y + f\,\langle \nabla Y, X \rangle$$

$$= (df(X))Y + f\nabla Y(X) = (df(x) \otimes Y)(X) + f\nabla Y(X) \tag{۱۴۵}$$

بنابراین، ویژگی زیر را به مجموعه‌ی ویژگی‌های هم‌وستار یا مشتق هموردا اضافه می‌کنیم:
هـ)

$$\nabla(fY) = df \otimes Y + f\nabla Y \tag{۱۴۶}$$

حالا این مشتق را برحسب پایه‌های $(\{e_j\}, \{e^j\})$ محاسبه می‌کنیم:

$$\nabla_X Y = \nabla_X (Y^j e_j) = (XY^j)e_j + Y^j \nabla_X e_j \tag{۱۴۷}$$

با تعریف $\Gamma^l_{kj} = \omega^l_j(e_k)$، عناصر Γ^l_{kj} را به‌عنوان ضریب بسط ω^l_j نسبت به e^k مشخص کرده‌ایم! حالا می‌نویسیم:

$$\nabla_X Y = (XY^i)e_i + Y^i \nabla_{X^j e_j} e_i = XY^i e_i + Y^i X^j \omega^l_i(e_j) e_l$$

$$= (XY^l + Y^i \omega^l_i(X))e_l = (XY^l + Y^i X^j \Gamma^l_{ji})e_l \tag{۱۴۸}$$

پس می‌نویسیم:

$$(\nabla_X Y)^l = XY^l + Y^i \omega^l_i(X) \tag{۱۴۹}$$

این مؤلفه‌ها برای بردارهای پایه‌ی هولونوم، یعنی $\nabla_{\partial_k} Y$، می‌شود:

$$(\nabla_{\partial_k} Y)^l = \partial_k Y^l + Y^i \omega^l_i(\partial_k) \tag{۱۵۰}$$

حالا مشتق هموردای مؤلفه‌ها را این‌گونه تعریف می‌کنیم:

$$Y^l_{;k} = Y^l_{,k} + \Gamma^l_{ki} Y^i \tag{۱۵۱}$$

برای شناخت بهتر هم‌وستارها چگونگی تبدیل آن‌ها را به هنگام تبدیل پایه‌ها بررسی می‌کنیم. ابتدا مؤلفه‌های آن را به‌این‌صورت برحسب بردارهای پایه می‌نویسیم:
قانون تبدیل Γ^l_{ik} (تمرین):

$$\Gamma^l_{ki} = \omega^l_i(e_k) = \omega^j_i(e_k) e_j e^l = \langle e^l, \omega^j_i(e_k) e_j \rangle = \langle e^l, \nabla_{e_k} e_i \rangle \tag{۱۵۲}$$

که در آن Γ^l_{ik} مؤلفه‌ی l–ام $\nabla_{e_k} e_i$ است. از روی این تعریف می‌توان قانون تبدیل را به‌دست آورد:

$$\Gamma^\alpha_{\beta Y} = \left\langle e^\alpha, \nabla_{e_\gamma} e_\beta \right\rangle = \left\langle L^\alpha_i e^i, \nabla_{L^k_\gamma e_k} L^j_\beta e_j \right\rangle = L^\alpha_i (e_\gamma (L^i_\beta) + L^j_\beta L^k_\gamma \Gamma^i_{jk}) \tag{۱۵۳}$$

در پایه‌های طبیعی مختصات:

$$\Gamma^\alpha_{\beta\gamma} = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x^i} \left(\frac{\partial^۲ x^i}{\partial x^\beta \partial x^\gamma} + \Gamma^i_{jk} \frac{\partial x^j}{\partial x^\beta} \frac{\partial x^k}{\partial x^\gamma} \right) \tag{۱۵۴}$$

این قاعده نشان می‌دهد که Γها تشکیل یک تانسور نمی‌دهند، چون جمله‌ی اول تبدیل اضافی است! اما اگر ∇ و $\widehat{\nabla}$ دو هم‌وستار باشند، آن‌گاه تفاوت $\widehat{\nabla} Y - \nabla Y$ یا $\widehat{\Gamma} - \Gamma$ یک تانسور است، زیرا جمله‌ی اول داخل پرانتز در تبدیل Γ تنها به مختصات وابسته است و در این تفاضل حذف می‌شود.
حالا آماده‌ایم مشتق هموردا را به هر تانسور دلخواه تعمیم دهیم. گیریم T تانسوری دلخواه از نوع (r, s) باشد. مشتق همورداي آن، ∇T، تانسوری خطی از نوع (r, s) است که این‌گونه تعریف می‌شود:

$$۱) \nabla C = C \nabla$$

که در آن C عملگر ادغام است. قاعده‌ی لایبنیتس هم به‌این‌صورت برقرار است:

$$۲) \nabla (T \otimes S) = \nabla S \otimes T + S \otimes \nabla T$$
$$۳) \nabla f = df$$

در اینجا نیز تابع f دلخواه است. با استفاده از این قواعد می‌توان مشتق همورداي بردار پایه‌ی همزاد را حساب کرد. با استفاده از تعریف مؤلفه‌ی هم‌وستار، یعنی

$$\nabla_{e_k} e_j = \Gamma^l_{kj} e_l \tag{۱۵۵}$$

مشتق همورداي زیر را که صفر است حساب می‌کنیم:

$$\nabla_{e_k} (e^j (e_l)) = \nabla_{e_k} (C e^j \otimes e_l) = C \nabla_{e_k} (e^j \otimes e_l) = C (\nabla_{e_k} e^j) \otimes e_l$$

$$+ C e^j \otimes (\nabla_{e_k} e_l) = (\nabla_{e_k} e^j)(e_l) + e^j \Gamma^i_{kl} e_i = (\nabla_{e_k} e^j)(e_l) + \Gamma^j_{kl} \tag{۱۵۶}$$

به‌سهولت به‌دست می‌آید:

$$\nabla_{e_k} e^j = -\Gamma^j_{kl} e^l \tag{۱۵۷}$$

به‌همین‌ترتیب برای هر تک–فرم می‌نویسیم:

$$(\nabla_{e_k} \omega)_i = \omega_{i,k} - \Gamma^j_{ki} \omega_j$$

$$\omega_{i;k} = \omega_{i,k} - \Gamma^j_{ki} \omega_j$$

به‌همین‌ترتیب مشتق‌های هر تانسور مرتبه بالاتر به‌دست می‌آید.

۹.۳ خم و خم ژئودزیک

نگاشت $\lambda(t)$ از بازه‌ی $[\cdot, a]$ به خمینه‌ی M را یک خم می‌نامیم. پس به‌ازای هر پارامتر t یک نقطه روی خمینه تعریف می‌شود. مجموعه بردارهای مماس در نقطه‌های روی خم را می‌توان میدانی برداری در امتداد خم نامید. هرگاه هم که میدانی برداری وابسته به یک پارامتر روی خمینه تعریف شود می‌توان خمی به آن وابسته دانست که میدان برداری در هر نقطه همان بردار مماس بر خم به معنی متعارف آن باشد. دراین‌صورت از خم انتگرالی میدان برداری صحبت می‌کنیم. به‌این‌ترتیب هم می‌توان دید که مشتق هموردا در امتداد بردار X متناظر با انتقال موازی در امتداد خم انتگرالی بردار X است.

اکنون خم $\lambda(t)$ را درنظر بگیرید. با استفاده از مشتق هموردا مشتق جدیدی وابسته به خم، یا مشتق هموردا در امتداد میدان برداری، تعریف می‌کنیم که آن را با $\frac{DT}{\partial t}$ نشان می‌دهیم. مشتق همموردای تانسور دلخواه T در امتداد $\lambda(t)$ برابر است با $\nabla_{X=\frac{\partial}{\partial t}}T$، که در آن $\frac{\partial}{\partial t}$ بردار پادوردای وابسته به پارامتر t است. حالا مشتق هموردا در امتداد بردار $X = X^a\partial_a$ را این‌گونه می‌نویسیم:

$$\frac{DT}{\partial t} = T^{a\dots b}_{e\dots g;h}X^h \tag{۱۵۸}$$

که در آن X بردار مماس است. با انتخاب مختصات، خم با مختصات $X^a(t)$ بیان می‌شود:

$$X^a = \frac{dx^a}{dt} \tag{۱۵۹}$$

به‌این‌ترتیب برای یک میدان برداری Y مشتق هموردا می‌شود:

$$\frac{DY^a}{\partial t} = \frac{\partial Y^a}{\partial t} + \Gamma^a_{bc}Y^c\frac{dx^b}{dt} \tag{۱۶۰}$$

توجه داشته باشیم که $\frac{\partial Y^a}{\partial t} = \frac{\partial Y^a}{\partial X^b}\frac{dx^b}{dt}$.

با این تفسیر از انتقال موازی می‌گوییم Y در امتداد $\lambda(t)$ به‌طور موازی منتقل می‌شود هرگاه

$$\frac{DY}{\partial t} = \cdot \tag{۱۶۱}$$

به‌منظور درک بهتر این مفهوم انتقال دو نقطه p و q را روی خم λ درنظر می‌گیریم انتقال موازی با تعبیر بالا برای بردارها را حالا می‌توان به هر تانسور در فضای مماس تعمیم داد. این انتقال موازی نگاشتی است خطی که $T^r_s(q)$ را به $T^r_s(p)$ می‌برد. این نگاشت یک ایزومورفیسم است. مثلاً یک پایه در q به یک پایه در p منتقل می‌شود.

اکنون می‌پردازیم به تعریف خم ژئودزیک. خمی را ژئودزیک می‌نامیم که بردار مماس بر این خم λ، یعنی بردار $X = \frac{\partial}{\partial t}$، در امتداد λ به موازات با خودش منتقل شود، یعنی همواره بر خم مماس بماند. بردار منتقل‌شده، یعنی:

$$\nabla_X X = \frac{D}{\partial t}\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)$$

به شرطی با خودش موازی است که

$$X^a_{;b}X^b = f.X^a$$

باشد. پارامتر t را می‌توان طوری اختیار کرد که ضریب f صفر شود. دراین‌صورت پارامتر خم را آفین می‌نامیم و حالا با s نشان می‌دهیم:

$$\nabla_X X = \cdot \qquad \text{یا} \qquad \frac{D}{\partial s}\left(\frac{\partial}{\partial s}\right)_\lambda = \cdot$$

پس هرگاه بردار مماس را روی خم $\lambda(s)$ را $X = X^a\frac{\partial}{\partial X^a} = \frac{dX^a}{ds}\frac{\partial}{\partial X^a}$ بنویسیم، شرط انتقال موازی بردار مماس، یا شرط ژئودزیک بودن خم، می‌شود:

$$X^a_{;b}X^b = \cdot \Leftrightarrow \frac{d^۲x}{ds^۲} + \Gamma^a_{bc}\frac{dx^b}{ds}\frac{dx^c}{ds} = \cdot \tag{۱۶۲}$$

۱۰.۳ پیچش و انحنا: معادله های کارتان

تانسور پیچش، T، از نوع (۲و۱) را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$T(X,Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X,Y] \tag{۱۶۳}$$

از روی این تعریف به‌راحتی اثبات می‌شود که T یک موجود خطی است، و یک تانسور از نوع (۲و۱) می‌باشد.
محاسبه مؤلفه‌ها ($T^j(X,Y)$):

$$T(X,Y) = T^j(X,Y)e_j \tag{۱۶۴}$$

محاسبه جملاتی که در تعریف T پیش می‌آید:

$$(\nabla_X Y)^j = XY^j + Y^l\omega_l^j(X) \tag{۱۶۵}$$

در معادله بالا می‌نشانیم:

$$\begin{aligned} T^j(X,Y) &= \langle e^j, \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X,Y]\rangle \\ &= X\langle e^j, Y\rangle - Y\langle e^j, X\rangle - \langle e^j,[X,Y]\rangle + \omega_l^j(X)e^l(Y) - \omega_l^j(Y)e^l(X) \\ &= de^j(X,Y) + [\omega_l^j(X)\otimes e^l](X,Y) - [e^l\otimes\omega_l^j](X,Y) \\ &= ۲de^j(X,Y) + ۲[\omega_l^j\wedge e^l](X,Y) \end{aligned} \tag{۱۶۶}$$

بنابراین

$\frac{۱}{۲}T^j = de^j + \omega_l^j\wedge e^l$ اولین معادله ساختار کارتان

$de^j = ddx^j = ۰$ پایه طبیعی (پایه مختصاتی)

$$\frac{۱}{۲}T^j = \Gamma^j_{lk}dx^l\wedge dx^k = \frac{۱}{۲}(\Gamma^j_{lk} - \Gamma^j_{kl})dx^l\wedge dx^k$$

پس تانسور پیچش معیاری برای نامتقارن بودن هم‌وستار است. هرگاه تانسور پیچش صفر باشد:

$$T = o \qquad \Leftrightarrow \qquad \Gamma^j_{lk} = \Gamma^j_{kl} \tag{۱۶۷}$$

تانسور پیچش اگر صفر باشد، مشتق لی برحسب مشتق هموردا بیان می‌شود:

$$[X,Y] = \nabla_X Y - \nabla_Y X$$

$$(\mathcal{L}_X Y)^a = Y^a_{;b}X^b - X^a_{;b}Y^b$$

مشتق خارجی نیز برحسب مشتق هموردا بیان می‌شود:

$$dA = A_{ab\ldots c;d}dx^d\wedge dx^a\ldots\wedge dx^c \tag{۱۶۸}$$

۱۱.۳ تانسور انحنا

تانسور انحنا معیاری است برای جابه‌جاناپذیری مشتق هموردا یا انتگرال‌ناپذیری انتقال موازی. این تانسور از نوع (۳و۱) است که به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$R(X,Y)Z = \nabla_X(\nabla_Y Z) - \nabla_Y(\nabla_X Z) - \nabla_{[X,X]}Z \tag{۱۶۹}$$

به‌راحتی می‌توان نشان داد که تانسور انحنا در سه شناسه‌اش خطی است. جابه‌جاناپذیری مشتق هموردا را می‌توان به‌صورت زیر نشان داد:

$$R^a_{bcd}X^cY^dZ^b = (Z^a_{;d}Y^d)_{;c}X^c - (Z^a_{;c}X^c)_{;d}Y^d - Z^a_{;d}(Y^d_{;c}X^c - X^d_{;c}Y^c)$$

$$= (Z^a_{;dc} - Z^a_{;cd})X^cY^d \tag{۱۷۰}$$

به‌عبارت دیگر

$$R^a_{bcd}X^cY^dz^b = (Z^a_{;dc} - Z^a_{;cd})X^cY^d$$

$$R^a_{bcd}Z^b = Z^a_{;dc} - Z^a_{;cd}$$

از این رابطه می‌توان چگونگی جابه‌جاناپذیری مشتق هموردا و ارتباط آن با تانسور انحنا را به‌دست آورد. اکنون می‌پردازیم به محاسبه‌ی مؤلفه‌های R، ابتدا جمله‌ی $\nabla_X\nabla_Y Z$ را بسط می‌دهیم:

$$\nabla_X\nabla_Y Z = \nabla_X[Ye^j(Z) + \omega^j_k(Y)e^k(Z)]e_j$$

$$= [Ye^i(Z) + \omega^i_k(Y)e^k(Z)]\nabla_X e_i + [XYe^i(Z) + X\{\omega^i_k(Y)e^k(Z)\}]e_i$$

$$= [Ye^l(Z) + \omega^i_k(Y)e^k(Z)]\omega^i_l(X)e_i + [XYe^i(Z)]e_i + [e^l(Z)X\omega^i_l(Y) + \omega^i_l(Y)Xe^l(Z)]e_i$$

$$= \{[X\omega^i_l(Y) + \omega^i_k(X)\omega^k_l(Y)]e^l(Z) + XYe^i(Z)\}e_i + [\omega^i_l(Y)Xe^l(Z) + \omega^i_l(X)Ye^l(Z)]e_i$$

بنابراین:

$$\nabla_X(\nabla_Y Z) - \nabla_Y(\nabla_X Z)$$

$$= \{[X\omega^i_l(Y) - Y\omega^i_l(X) + \omega^i_k(X)\omega^k_l(Y) - \omega^i_k(Y)\omega^k_l(X)]e^l(Z)\}e_i \tag{۱۷۱}$$

به‌همین ترتیب

$$\nabla_{[X,Y]}Z = \{[X,Y]e^i(Z) + \omega^i_l([X,Y]e^l(Z))\}e_i \tag{۱۷۲}$$

و در نتیجه

$$R(X,Y)Z =$$
$$\{X\left\langle \omega^i_{l,}Y\right\rangle - Y\left\langle \omega^i_{l,}X\right\rangle - \left\langle \omega^i_{l,}[X,Y]\right\rangle + \omega^i_k(X)\omega^k_l(Y) - \omega^i_k(Y)\omega^k_l(X)\}e^l(Z)e_i$$

$$= ۲(d\omega^i_l + \omega^i_k \wedge \omega^k_l)(X,Y)e^l(Z)e_i \tag{۱۷۳}$$

حالا اگر ω تک-فرم دلخواهی باشد، می‌نویسیم

$$R(\omega,X,Y,Z) = R^i_{jkl}[e_i \otimes e^j \otimes (d^k \wedge e^l)](\omega,X,Y,Z)$$

$$= (R^i_{jkl}e^k \wedge e^l)(X,Y)e^j(Z)e_i(\omega)$$

مقایسه نشان می‌دهد که

$$\frac{1}{2} R^i_{jkl} e^k \wedge e^l = d\omega^i_j + \omega^i_k \wedge \omega^k_j \tag{174}$$

پس ۲-فرم انحنا را به‌این‌صورت تعریف می‌کنیم:

$$\Omega^i_j = d\omega^i_j + \omega^i_k \wedge \omega^k_j \tag{175}$$

که آن را دومین معادله‌ی ساختار کارتان می‌نامیم:

$$\Omega^i_j = \frac{1}{2} R^i_{jkl} e^k \wedge e^l \tag{176}$$

در مختصات موضعی، یا پایه‌ی طبیعی، مؤلفه‌های تانسور انحنا به‌صورت زیر محاسبه می‌شود. ابتدا می‌نویسیم

$$\omega^i_k = \Gamma^i_{kl} dx^l$$

$$d\omega^i_k = \Gamma^i_{kl,m} dx^m \wedge dx^l = \tfrac{1}{2}(\Gamma^i_{kl,m} - \Gamma^i_{km,l}) dx^m \wedge dx^l$$

و همین‌طور:

$$\omega^i_k \wedge \omega^k_l = \Gamma^i_{kl} dx^l \wedge \Gamma^k_{jm} dx^m = \Gamma^i_{kl}\Gamma^k_{jm} dx^l \wedge dx^m = \Gamma^i_{km}\Gamma^k_{jl} dx^m \wedge dx^l$$

$$= \tfrac{1}{2}(\Gamma^i_{km}\Gamma^k_{jl} - \Gamma^i_{kl}\Gamma^k_{jm}) dx^m \wedge dx^l$$

بنابراین

$$R^i_{jkl} = \Gamma^i_{jl,k} - \Gamma^i_{jk,l} + \Gamma^i_{mk}\Gamma^m_{jl} - \Gamma^i_{ml}\Gamma^m_{jk} \tag{177}$$

که مؤلفه‌های تانسور ریمان برحسب پایه‌های طبیعی مختصات و مؤلفه‌های هم‌وستار است که هنوز لازم نیست نماد کریستوفل باشد!
تانسور انحنا در چند اتحاد صدق می کند.
الف) اتحاد چرخه‌ای گیریم پیچش صفر باشد $T = 0$؛ آن‌گاه داریم

$$R^i_{jkl} + R^i_{klj} + R^i_{ljk} = 0$$

$$[X,[Y,Z]] + [Y,[Z,X]] = [Z,[X,Y]] = 0$$

رابطه‌ای که به‌سادگی اثبات می‌شود.
ب)اتحاد بیانکی ابتدا مشتق خارجی Ω^i_j را حساب می کنیم:

$$\Omega^i_j = d\omega^i_j + \omega^i_k \wedge \omega^k_j$$

$$d\Omega^i_j = d\omega^i_k \wedge \omega^k_j - \omega^i_k \wedge d\omega^k_j = (\Omega^i_k - \omega^i_l \wedge \omega^l_k) \wedge \omega^k_j - \omega^i_k \wedge (\Omega^k_j - \omega^k_m \wedge \omega^m_j)$$

در نتیجه می‌توان نوشت:

$$\Omega^i_j - \Omega^i_k \wedge \omega^k_j + \omega^i_k \wedge \Omega^k_j = 0 \tag{178}$$

که آن را اتحاد بیانکی می‌نامند. این اتحاد در مختصات موضعی به‌صورت زیر درمی‌آید. ابتدا می‌نویسیم

$$d\Omega^i_j = \frac{1}{2} R^i_{jmn} e^m \wedge e^n \qquad , \qquad \omega^i_k = \Gamma^i_{kl} dx^l \tag{179}$$

با نشاندن در رابطه‌ی بالا برای اتحاد بیانکی به‌دست می‌آوریم:

$$(R^i_{jmn;l} - R^i_{kmn}\Gamma^k_{jl} + \Gamma^i_{kl}R^k_{jmn})dx^m \wedge dx^n \wedge dx^l$$
$$+(R^i_{jnl;m} - R^i_{knl}\Gamma^k_{jm} + \Gamma^i_{km}R^k_{jnl})dx^m \wedge dx^n \wedge dx^l$$
$$+(R^i_{jlm;n} - R^i_{klm}\Gamma^k_{jn} + \Gamma^i_{kn}R^k_{jlm})dx^m \wedge dx^n \wedge dx^l = ۰$$

که در نتیجه اتحاد بیانکی برحسب مؤلفه‌های Ω^i_j به‌صورت زیر درمی‌آید:

$$R^i_{jmn;l} + R^i_{jnl;m} + R^i_{jlm;n} = ۰ \tag{۱۸۰}$$

۱۲.۳ متریک

تا اینجا برای هیچ‌یک از مفهوم‌هایی که مرتبط با خمینه تعریف کردیم احتیاج به متریک نبود؛ یعنی هنوز مفهومی برای تعیین فاصله روی خمینه نداریم. حتی برای تعریف پیچش و انحنا نیز به تعریف فاصله نیاز نبود. اکنون می‌پردازیم به این مفهوم. متریک، g، تانسوری است ناتکین از نوع (۲و۰) و متقارن:

$$۱)\ g : T^۰_۱ \times T^۰_۱ \to \mathbb{R}^۱$$
$$۲)\ g(X,Y) = g(Y,X) \qquad \forall \qquad X,Y \in T^۰_۱$$
$$۳)\ g(X,Y) = ۰ \quad \forall \quad Y \in T^۰_۱ \quad \Leftrightarrow \quad X = ۰$$

در پایه‌ی موضعی می‌نویسیم

$$g = g_{ij} e^i \otimes e^j \tag{۱۸۱}$$

پس مؤلفه‌های متریک می‌شود

$$g_{ij} = g_{ji} \tag{۱۸۲}$$

که بنابر تعریف متقارن است. در مختصات موضعی، یا پایه‌های هولونوم، می‌توان نوشت

$$g = g_{ij} dx^i \otimes dx^j \tag{۱۸۳}$$

چون متریک ناتکین و متقارن است وارون ماتریس مؤلفه‌های آن، $[g_{ij}]$، وجود دارد:

$$g_{ij} g^{jk} = \delta^k_i \tag{۱۸۴}$$

به کمک این ماتریس وارون می‌توان تانسوری از نوع (۰و۲) ساخت:

$$g^{-۱} = g^{ij} e_i \otimes e_j \tag{۱۸۵}$$

به کمک تانسورهای g و $g^{-۱}$ می‌توان هر تانسور T از نوع (r,s) را با حفظ مرتبه تغییر داد:

$C(g \otimes T) \Rightarrow (r-۱, s+۱)$ تانسور نوع

$C(g^{-۱} \otimes T) \Rightarrow (r+۱, s-۱)$ تانسور نوع

همین روابط برحسب مؤلفه‌ها می‌شود:

$$g_{ij}T^{kj}=T^k_i$$

$$g^{ij}T_{jk}=T^i_k$$

هرگاه g_{ij} را در یک نقطه قطری کنیم، آن‌گاه کمیت

$$n=\text{تعداد عناصر مثبت}-\text{تعداد عناصر منفی}$$

را نشانگان متریک می‌نامند. چند نمونه را مثال می‌زنم:
الف) فضای اقلیدسی d-بعدی $n=d$
ب) فضای مینکوفسکی d-بعدی $\pm n=(d-۱)-۱=d-۲$
اکنون می‌توان با استفاده از متریک هم‌وستاری وابسته به متریک و یکتا تعریف کرد. فرض می‌کنیم هم‌وستار به‌گونه‌ای باشد که مشتق هموردای متریک صفر بشود. یعنی

$$\nabla g=۰ \tag{۱۸۶}$$

دراین‌صورت عمل بالا و پایین بردن شاخص‌ها با عمل مشتق‌گیری هموردا جابه‌جاپذیر است:

$$\nabla(g\otimes T)=g\otimes\nabla T \tag{۱۸۷}$$

این ویژگی کمک مؤثری است در محاسبه‌های تانسوری. اکنون به طریق زیر می‌توانیم هم‌وستار را حساب کنیم:

$$\nabla_X g=\nabla_X g_{ij}e^i\otimes e^j=Xg_{ij}e^i\otimes e^j+g_{ij}[(\nabla_X e^i)\otimes e^j+e^i\otimes\nabla_X e^j]$$

$$=[Xg_{ij}-g_{lj}\omega^l_i(X)-g_{il}\omega^l_j(X)]e^i\otimes e^j=۰$$

$$\Rightarrow dg_{ij}-g_{lj}\omega^l_i-g_{il}\omega^l_j=۰$$

و یا

$$dg_{ij}=g_{lj}\omega^l_i+g_{il}\omega^l_j$$

این رابطه با انتخاب مختصات موضعی می‌شود:

$$g_{ij,k}=g_{lj}\Gamma^l_{ik}+g_{il}\Gamma^l_{jk} \tag{۱۸۸}$$

اکنون پیچش را صفر فرض می‌کنیم. پس Γ در شاخص‌های پایین متقارن است. در نتیجه به‌دست می‌آوریم

$$g_{lj}\Gamma^l_{ik}=\tfrac{۱}{۲}(g_{ij,k}+g_{ik,j}-g_{jk,i})$$

$$\Gamma^i_{kj}=\tfrac{۱}{۲}g^{il}(g_{lj,k}+g_{lk,j}-g_{jk,l})$$

به‌این‌ترتیب هم‌وستار به‌طور یکتا تعیین می‌شود. این هم‌وستار را که در فضایی با پیچش صفر به‌دست می‌آید هم‌وستار کریستوفل و نماد Γ را نماد کریستوفل می‌نامند.
متریک به ما اجازه می‌دهد فاصله‌ی میان دو نقطه را روی خمینه تعریف می‌کنیم. فاصله‌ی دو نقطه (رویداد) dx^i و x^i+dx^i را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم که نظیر همان فاصله‌ی فضازمانی در نسبیت خاص است:

$$ds^۲=g_{ij}dx^idx^j \tag{۱۸۹}$$

برای فاصله‌ی متناهی میان دو نقطه ۱ و ۲ به‌دست می‌آوریم

$$S=\int_۱^۲ ds \tag{۱۹۰}$$

اکنون با استفاده از متریک می‌توان برای مفاهیمی که تا کنون تعریف کرده‌ایم تفسیر جدیدی بیابیم. چند نمونه را در زیر می‌آوریم.

آ- به کمک متریک حاصل‌ضرب داخلی دو بردار X و Y را به‌صورت $g(X,Y)$ که در هر نقطه یک عدد است تعریف می‌کنیم. پس می‌نویسیم

$$X.Y = g(X,Y) = g_{ij}X^iY^j \tag{۱۹۱}$$

که در آن

$$g_{ij} = g(e_i, g_j) = g_{ji}$$

بنابراین، می‌توان چنین تعبیر کرد که متریک g به هر بردار u یک هم‌بردار نسبت می‌دهد:

$$g : u \Rightarrow g(u, \cdot) \tag{۱۹۲}$$

چون $g(u, \cdot)$ یک نگاشت خطی روی T_p است، پس $g(u, \cdot)$ یک هم‌بردار است. تأثیر این نگاشت در مؤلفه‌ها به‌صورت پایین آوردن شاخص است. عمل معکوس، یعنی نسبت دادن یک بردار به هر هم-بردار با معکوس متریک انجام می‌شود. این‌گونه است که بردارها و هم-بردارها به هم وابسته می‌شوند و ما در فیزیک معمولاً تفاوت آن‌ها را فراموش می‌کنیم!

ب- در اثر انتقال موازی در امتداد خمی در M حاصل‌ضرب داخلی دو بردار X و Y تغییر نمی کند.

$$D(g_{ij}X^iY^j) = (Dg_{ij})X^iY^j + g_{ij}(Y^jDX^i + X^iDY^j) = ۰ \tag{۱۹۳}$$

توجه داریم که انتقال موازی یعنی $DX = ۰$!

ج- پایه‌ی متعامد معمولاً g_{ij} به مختصات بستگی دارند. اما همواره می‌توان پایه‌های ناهولونوم را طوری تعریف کرد که

$$g(e_i, e_j) = \eta_{ij} \tag{۱۹۴}$$

د- متریک اجازه می‌دهد خم ژئودزیک نوع دیگری تعریف کنیم. خمی را ژئودزیک بگوییم که فاصله‌ی میان هر دو نقطه‌ی آن کمینه (فرینه) باشد. اگر این فاصله را S بنامیم، داریم

$$S = \int_۱^۲ ds = \int_{۱_c}^۲ (g_{ij}dx^idx^j)^{\frac{۱}{۲}} = \int_۱^۲ \left(g_{ij}\frac{dx^i}{\lambda}\frac{dx^j}{\lambda}\right)^{\frac{۱}{۲}} d\lambda \tag{۱۹۵}$$

و سپس مسئله‌ی فرینال را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$S = \int_۱^۲ \left(g_{ij}\frac{dx^i}{\lambda}\frac{dx^j}{\lambda}\right)^{\frac{۱}{۲}} d\lambda \qquad , \qquad \delta S = ۰ \tag{۱۹۶}$$

آن خمی که δS را صفر می‌کند، ژئودزیک نامیده می‌شود. پس، همان‌گونه که در فصل اول دیدیم، بیاییم انتگرال‌ده را از زیر رادیکال درآوریم و بنویسیم

$$L = g_{ij}\frac{dx^i}{\lambda}\frac{dx^j}{\lambda} \tag{۱۹۷}$$

باشد معادله اویلر-لاگرانژ براساس L نوشته می‌شود:

$$\frac{d}{d\lambda}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i}\right) - \frac{\partial L}{\partial x} = ۰ \qquad ; \qquad \dot{x}^i = \frac{dx^i(\lambda)}{d\lambda} \tag{۱۹۸}$$

اما

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i} = ۲g_{ij}\dot{x}^j \qquad ; \qquad \frac{\partial L}{\partial x} = g_{jk,i}\dot{x}^k\dot{x}^j \tag{۱۹۹}$$

بنابراین:

$$g_{ij}\ddot{x}^j + ۲\left(g_{ki,j} - \frac{۱}{۲}g_{kj,i}\right)\dot{x}^j\dot{x}^k = ۰ \tag{۲۰۰}$$

یا

$$g_{ij}\ddot{x}^j + \left(g_{ki,j} + g_{ji,k} - \frac{۱}{۲}g_{kj,i}\right)\dot{x}^j\dot{x}^k = ۰ \tag{۲۰۱}$$

ادغام با g^{il} می‌دهد:

$$\ddot{x}^l + \Gamma^l_{jk}\dot{x}^j\dot{x}^k = ۰ \tag{۲۰۲}$$

این معادله‌ی خم ژئودزیک است که قبلاً به‌دست آمد، بدون اینکه متریک تعریف شده باشد. بنابراین، خم ژئودزیک، به معنی خمی که بردار مماس آن همواره به موازات خودش منتقل می‌شود، اگر هم‌وستار را متناظر با متریک بگیریم می‌شود همان خم فرینه!

این معادل ژئودزیک را حالا را برحسب سرعت می‌نویسیم:

$$u^j = \dot{x}^j = \frac{dx^j}{d\lambda} \tag{۲۰۳}$$

داریم:

$$\ddot{x}^j = u^j_{,k}u^k \tag{۲۰۴}$$

پس

$$(u^l_{,k} + \Gamma^l_{jk}u^j)u^k = ۰$$

$$u^l_{;k}u^k = ۰$$

می‌دانیم این رابطه برای پارامتر آفین به‌دست آمده است. اگر پارامتر آفین نباشد باید بنویسیم

$$u^l_{;k}u^k = \phi u^l \tag{۲۰۵}$$

که در آن ϕ تابعی دلخواه است.

۱۳.۳ تقارن‌های تانسور ریمان، تانسور ریچی و انیشتین

با وجود متریک روی خمینه می‌توان نوع تانسور انحنا را عوض کرد و تقارن‌های بیشتری در آن تشخیص داد. این تقارن‌ها را مرور می‌کنیم.

آ- از تعریف این تانسور می‌دانیم که مؤلفه‌های آن در دو شاخص پایین سمت راست (شاخص هموردا) پادمتقارن است:

$$R^i_{jkl} = -R^i_{jlk} \tag{۲۰۶}$$

ب- شاخص پادوردا را با g پایین می‌آوریم:

$$g_{il}R^{l}_{jkl}=R_{ijkl} \tag{۲۰۷}$$

می‌توان نشان داد که R_{ijkl} نسبت به دو شاخص هموردای سمت چپ نیز پادمتقارن است:

$$R_{ijkl}=-R_{jikl} \tag{۲۰۸}$$

یک راه اثبات این است که R_{ijkl} را برحسب g و مشتقات آن بنویسیم:

$$R_{ijkl}=\frac{۱}{۲}(g_{il,jk}+g_{jk,il}-g_{jl,ik}-g_{ik,jl})+g^{mn}(\Gamma_{mjk}\Gamma_{nil}-\Gamma_{mjl}\Gamma_{nik}) \tag{۲۰۹}$$

از این رابطه می‌توان به‌سهولت خاصیت پادتقارنی موردنظر را دید.
راه دیگر مطالعه مشتق هموردای دوم یک تانسور مرتبه دوم است. نشان داده می‌شود که:

$$S_{ij;kl}-S_{ij;lk}=R^{m}_{jkl}S_{im}+R^{m}_{ikl}S_{mj}+(T^{m}_{kl}S_{ij;m}) \tag{۲۱۰}$$

که در آن جمله‌ی آخر متناسب با پیچش است. با فرض صفر بودن پیچش، و نیز نشاندن $S_{ij}=g_{ij}$ به‌دست می‌آوریم

$$g_{im}R^{m}_{jkl}+g_{nj}R^{n}_{ikl}=۰$$

$$R_{ijkl}+R_{jikl}=۰$$

که همان خاصیت پادتقارنی مطلوب است.
ج- تقارن نسبت به دو زوج شاخص هموردا:

$$R_{ijkl}=-R_{iklj}-R_{iljk}=R_{kilj}+R_{lijk}=-R_{klji}-R_{kjil}-R_{ljki}-R_{lkij}$$

$$=۲R_{klij}-R_{jilk}=۲R_{klij}-R_{ijkl}\Rightarrow R_{ijkl}=R_{klij}$$

اکنون با درنظر گرفتن این تقارن‌ها می‌توان نشان داد که تعداد مؤلفه‌های مستقل تانسور ریمان در فضای n-بعدی برابر است با $\frac{n^{۲}(n^{۲}-۱)}{۱۲}$. پس در فضای سه‌بعدی ۶ مؤلفه داریم که به کمک تبدیل مختصات می‌شود ۳ مؤلفه‌ی مستقل. همین‌طور در فضای چهاربعدی ۲۰ مؤلفه داریم که به کمک تبدیل مختصات می‌شود ۱۶ مؤلفه‌ی مستقل.
اکنون از تانسور متریک و عمل ادغام استفاده می‌کنیم و چند تانسور جدید تعریف می‌کنیم. ابتدا تانسور ریچی که از ادغام در تانسور ریمان به‌دست می‌آید:

$$R_{ij}=R^{l}_{ilj} \tag{۲۱۱}$$

توجه داشته باشید که در متن‌های قدیمی‌تر گاهی قرارداد زیر انتخاب می‌شود:

$$\bar{R}_{ij}=R^{l}_{ijl} \tag{۲۱۲}$$

دراین‌صورت رابطه زیر را داریم:

$$\bar{R}_{ij}=R^{l}_{ijl}=-R^{l}_{ilj}=-R_{ij} \tag{۲۱۳}$$

پس در روابط نسبیت عامی دقت کنید قرارداد نامتعارف به‌کار نرفته باشد.
تانسور انیشتین، که از تانسور ریچی به‌دست می‌آید، در معادلات نسبیت عام کاربرد دارد:

$$G_{ij}=R_{ij}-\frac{۱}{۲}g_{ij}R \tag{۲۱۴}$$

که در آن

$$R = g^{ij} R_{ij} \tag{۲۱۵}$$

نرده‌ای ریچی نامیده می‌شود. به این ویژگی مهم تانسور انیشتین توجه کنید:

$$G^i_{j;i} = 0 \tag{۲۱۶}$$

اثبات این رابطه از روی اتحاد بیانکی ساده است. داریم:

$$R^i_{jkl;m} + R^i_{jlm;k} + R^i_{jmk;l} = 0 \tag{۲۱۷}$$

دو شاخص i و k را ادغام می‌کنیم:

$$R^i_{jil;m} + R^i_{jlm;i} + R^i_{jmi;l} = R_{jl;m} + R^i_{ijlm;} - R^i_{jim;l} = R_{jl;m} - R^i_{jilm;} - R_{jm;l} \tag{۲۱۸}$$

شاخص j را بالا می‌بریم:

$$R^l_{l;m} + R^j_{iml;}{}^i - R^j_{m;l} = R^j_{l;j} + R^i_{il;} - R_{;l} = 2R^i_{l;i} - R_{;l} = 2\left(R^i_l - \frac{1}{2}\delta^i_l\right)_{;i} \Rightarrow G^i_{l;i} = 0 \tag{۲۱۹}$$

رد تانسور انیشتین مرتبط است با نرده‌ای ریچی.

$$G = g^{ij} G_{ij} = G^i_l = R - \frac{1}{2} \times 4R = -R \tag{۲۲۰}$$

۱۴.۳ تانسور وایل

تانسور وایل تانسوری است از نوع(۳و۰) با همان تقارن‌های تانسور ریمان با این تفاوت که ادغام روی آن صفر به‌دست می‌دهد! تانسور وایل این‌گونه تعریف می‌شود:

$$G^h_{ijk} = R^h_{ijk} - \tfrac{1}{n-2}(\delta^h_j R_{ik} - \delta^h_k R_{ij} + g_{ik} R^h_j - g_{ij} R^h_k)$$
$$+ \tfrac{R}{(n-1)(n-2)}(\delta^h_j R_{ik} - \delta^h_k g_{ij})$$

این تانسور همان تقارن‌های تانسور انحنا را دارد.
اکنون می‌پردازیم به چند ویژگی تانسور وایل، دو فضا با دو متریک g_{ij} و $\bar{g}_{ij}$ بگیرید که در شرط زیر صدق کنند:

$$\bar{g}_{ij} = e^{\phi} g_{ij} \tag{۲۲۱}$$

که در آن ϕ تابعی دلخواه است. این دو فضا را نسبت به یکدیگر همدیس می‌نامند. می‌توان نشان داد که در این صورت تانسور وایل این دو فضا با یکدیگر برابر است:

$$\bar{C}^i_{jkl} = C^i_{jkl} \tag{۲۲۲}$$

برای فضای تخت تانسور ریمان صفر است. پس تانسور وایل نیز صفر است. بنابراین، تانسور وایل هر فضای دیگری نیز که همدیس تخت باشد صفر خواهد بود!

۱۵.۳ فضاهای با بعد کمتر از ٤

در ابعاد کمتر از ۴ مقایسه‌ی تعداد مؤلفه‌های تانسورهای ریمان، ریچی، انیشتین، و وایل نتایج جالبی برای گرانش در این ابعاد به‌دست می‌دهد. جدول زیر تعداد مؤلفه‌های این تانسورها را در n بعد نشان می‌دهد.

تانسور / بعد	۲	۳	٤	n
تانسور ریمان	۱	٦	۲۰	$\frac{1}{12}n^2(n^2-1)$
تانسور ریچی	۱	٦	۱۰	$\frac{1}{2}n(n+1)$
تانسور انیشتین	۰	٦	۱۰	۱ , n> ۱
انحنای نرده‌ای	۱	۱	۱	۱ , n> ۱

در سه‌بعد، یا (۱+۲) بعد فضازمان، تعداد مؤلفه‌های تانسور ریمان و ریچی برابر است:

$$R_{ijkl} = g_{ik}R_{kl} - g_{il}R_{jk} + g_{jl}R_{ik} - g_{jk}R_{il} - \frac{1}{2}(g_{ik}g_{jl} - g_{il}g_{jk})R \qquad (۲۲۳)$$

بنابراین، در سه‌بعد از صفر شدن تانسور ریچی (یا تانسور انیشتین) صفر بودن تانسور ریمان نیز نتیجه می‌شود. یعنی اگر $R_{ij}=0$ باشد آن فضا تخت است! از طرف دیگر چون توزیع ماده مرتبط است با تانسور انیشتین و تانسور ریچی، پس با تعیین تانسور انرژی–تکانه تانسور انحنا نیز کاملاً مشخص می‌شود؛ در این شرایط امواج گرانشی هم وجود ندارد. به‌علاوه، به‌سهولت دیده می‌شود که به‌ازای $n=3$ تانسور وایل صفر است. رابطه‌ی زیر بین مؤلفه‌های تانسور انیشتین و تانسور انحنا برقرار است:

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta} = g_{\alpha\gamma}G_{\beta\delta} + g_{\beta\delta}G_{\alpha\gamma} - g_{\alpha\delta}G_{\beta\gamma} - g_{\beta\gamma}G_{\alpha\delta} + G(g_{\alpha\delta}g_{\beta\gamma} - g_{\alpha\gamma}g_{\beta\delta}) \qquad (۲۲۴)$$

در این رابطه به‌وضوح دیده می‌شود که در سه‌بعد هر جا ماده نباشد، یعنی تانسور انیشتین و انرژی–تکانه صفر باشد، فضا تخت است!

در ۲بعد تانسور ریچی و تانسور ریمان هر یک فقط یک مؤلفه مستقل دارند:

$$R_{ijkl} = \tfrac{1}{2}(g_{ik}g_{jl} - g_{il}g_{jk})R$$

$$R_{ij} = \tfrac{1}{2}g_{ij}R$$

بنابراین

$$G_{ij} = 0 \qquad (۲۲۵)$$

یعنی در ۲بعد تانسور انیشتین همواره صفر است.

۱٦.۳ بردار کیلینگ و تقارن

خمینه‌ای درنظر بگیرید که روی آن یک متریک تعریف شده باشد. معمولاً مشتق لی متریک در امتداد یک میدان برداری دلخواه صفر نمی‌شود. این یعنی که متریک در امتداد خم انتگرالی میدان برداری تغییر می‌کند. اما اگر میدانی برداری پیدا شود که این مشتق لی را صفر کند، یعنی

$$\mathcal{L}_X g = 0 \qquad (۲۲۶)$$

پس آن‌گاه باید با نوعی تقارن سروکار داشته باشیم.
به‌این‌منظور با استفاده از مفهوم خم انتگرالی تعبیر دیگری از مشتق لی می‌آوریم. می‌توان نشان داد که مشتق لی هر تانسور در امتداد هر میدان برداری برابر است با

$$\mathcal{L}_{\xi^\mu} T = \lim_{\varepsilon \to ۰} \frac{۱}{\varepsilon} \left\{ T(\bar{X}) - T(X) \right\} \qquad (۲۲۷)$$

که در آن ξ^μ بردار دلخواهی است که انتقال را تعریف می‌کند، یعنی $\bar{X}^\mu = X^\mu + \varepsilon \xi^\mu$. به‌این‌ترتیب مشتق لی متریک پس از کمی محاسبه می‌شود.

$$\mathcal{L} = \xi g_{\mu\nu} - \xi_{\mu;\nu} - \xi_{\nu;\mu} \qquad (۲۲۸)$$

بنابراین، شرط تقارن ترجمه می‌شود به‌جود برداری که در رابطه‌ی زیر صدق کند:

$$\xi_{\mu;\nu} - \xi_{\nu;\mu} = ۰ \qquad (۲۲۹)$$

هر بردار که در این رابطه صدق کند یک بردار کیلینگ نامیده می‌شود، که بیانگر یک ایزومتری خمینه است. به‌طور مثال روی کره‌ی ۲بعدی بردارهای $\frac{\partial}{\partial \phi}$ و $\frac{\partial}{\partial \vartheta}$ بردارهای کیلینگ هستند و خم‌های ϕ=ثابت و ϑ=ثابت خم‌های انتگرالی این میدان‌های برداری‌اند.
بردار کیلینگ تعمیمی هم دارد که به آن بردار کیلینگ همدیس می‌گویند. خمینه‌ای با متریک $g_{\mu\nu}$ درنظر بگیرید. بردار ξ_μ را بردار کیلینگ همدیس می‌نامند اگر داشته باشیم

$$L_\xi g_{\mu\nu} = g_{\mu\nu,\rho} \xi^\rho + g_{\mu\rho} \xi^\rho_{,\nu} + g_{\nu\rho} \xi^\rho_{,\mu} = ۲\phi g_{\mu\nu} \qquad (۲۳۰)$$

که در آن ϕ تابع دلخواهی است. هنگامی که ϕ ثابت باشد بردار را هوموتتیک می‌نامند.

مراجع

کتاب‌هایی که در کنار متن اصلی مراجعه به آن‌ها توصیه می‌شود:

۱. $S.\,Chnadrasekhar,\ The\,Mathematical\,Theory\,of\ Black\ Holes,$
فصل اول این کتاب رهیافت ریاضی مناسبی دارد. نکته‌های دقیقی در مورد متریک‌های مرتبط با سیاه‌چاله‌ها در این کتاب یافته می‌شود.

۲. $M.\,Goeckler,\,T.\,Schueker,\ Differential\,Geometry,\ Gauge\,Theories,\ and\,Gravity,$ $Cambridge\,University\,Press,\ NewYork,$ ۱۹۸۷.

۳. $Eguchi,\,Gilkey,\,Hanson,\ Gravity,\ Gauge\,Theories,\ and Differential\,Geometry,$ $Phys.Let.C,\ Phys.Rep.$۶۶, $No,$۶(۱۹۸۰), ۲۱۳ − ۳۹۳.
این مقاله بسیار مناسب و خواندنی است. در متن درس از این مقاله بسیار استفاده شده است.

پرسش‌ها

۱. چرا کره را نمی‌توان با تنها یک دسته مختصات پوشاند؟
۲. آیا می‌توان ضرب خارجی دو بردار را به فضاهای با بعد کمتر یا بیشتر از ۳ تعمیم داد؟ مشکل کجا است؟
۳. چرا از ضرب خارجی دو بردار برداری نوع دیگر به‌دست می‌آید؟ اصلاً چرا دو نوع بردار داریم؟
۴. دو بردار پایه‌ی پادوردا روی سطح کره مثال بزنید که ناهولونوم باشند؟ توجه کنید که بردارهای پایه‌ی $\frac{\partial}{\partial\theta}$ و $\frac{\partial}{\partial\phi}$ هولونوم هستند.
۵. بردارهای پایه‌ی پادوردا را می‌توانیم در فضای ۲بعدی مصور کنیم. بردارهای هموردا را چطور؟
۶. روی کره‌ی دوبعدی مثلثی با سه قطعه دایره‌ی عظیمه‌ی ۹۰ درجه‌یی می‌سازیم. از یک نقطه روی این مثلث شروع کنید و برداری را به موازات خودش منتقل کنید تا به نقطه‌ی اولیه برسد. چه ارتباطی میان بردار اولیه و این بردار منتقل‌شده می‌بینید؟
۷. دو بردار پایه‌ی هموردا روی کره‌ی دوبعدی مثال بزنید که ناهولونوم باشند؟
۸. چه تصوری از فضای مماس روی کره‌ی ۲بعدی دارید؟ از فضای غوطه‌وری استفاده نکنید!
۹.روی فضای برداری nبعدی نمی‌توان تانسوری از نوع $(0, s)$ و کاملاً پادمتقارن داشت اگر $s > n$ باشد، چرا؟
۱۰. چه‌وقت یک فرم بسته کامل نیست؟
۱۱. نشان دهید نصف‌النهارهای روی کره (خم‌های ثابت =ϕ) ژئودزیک‌اند.
۱۲. در فضای سه‌بعدی با $u^1 = r, u^2 = \theta, u^3 = \phi$ و مختصات $\vec{r} = r\vec{e}_r = r\vec{e}_1$ مشتق هموردای $r^i_{;i}$ را حساب کنید! (یعنی $\vec{\nabla}.\vec{r}$!)
۱۳. صحت رابطه‌ی زیر را نشان دهید

$$[X, Y](fg) = g[X, Y]f + f[Y, x]g$$

۱۴. می‌توانید
الف) فضایی مثال بزنید که تخت نباشد اما هموستار آن صفر باشد؟
ب) فضایی مثال بزنید که تخت باشد اما هموستار آن صفر نباشد؟
ج) چه نتیجه‌ای از این مثال‌ها می‌گیرید؟
۱۵. داریم $\mathcal{L}_X \langle \omega, Y \rangle = X \langle \omega, Y \rangle$، چرا؟
۱۶. نشان دهید تانسور انیشتین در دوبعد همواره صفر است!
۱۷. چرا تفاوت دو هم‌وستار یک تانسور است؟
۱۸. چرا در ۳بعد هنگامی که تانسور ریچی صفر است، یعنی فضا ریچی-تخت است، امواج گرانشی نداریم؟
۱۹. آیا در ۳بعد معادلات ماکسول به امواج الکترومغناطیسی منجر می‌شوند؟
۲۰. در فضایی ۲+۱ بعدی دو جسم فشرده در نظر بگیرید در مورد نیروی گرانش میان آن‌ها چه می‌توانید بگویید.

تمرین‌ها

۱. در فضای ۳بعدی اقلیدسی میان مختصات دکارتی dx^i و کروی dy^j را بنویسید
آ- رابطه‌ی میان جزء بینهایت کوچک dx^i, dy^j را به‌دست آورید.
ب- تبدیل میان عملگر شیب در دو مختصات، یعنی $\partial/\partial x^i$ و $\partial/\partial y^j$، را به‌دست آورید! کدام‌یک از این دو تبدیل به تبدیل یک بردار شبیه است؟ بحث کنید!
ج- در این‌جا با دو نوع بردار سروکار دارید. می‌توانید این بردارها را در هم ضرب خارجی بکنید؟ اگر فضا ۴بعدی یا بیشتر بود چطور؟
د- اگر بخواهیم سرعت را در این فضا برحسب مختصات کروی بیان کنیم چه رابطه‌یی میان آن و مؤلفه‌های متناظر دکارتی هست؟
۲. نشان دهید گروه $U(1)$ با عناصر $0 \pm \vartheta < 2\pi . e^{i\vartheta}$ یک خمینه است.
۳. نشان دهید گروه $SU(2)$ یک خمینه است.

۴. استوانه‌ی دوبعدی از یکسان گرفتن نقطه‌های (x, y) و $(x + 2\pi, y)$ روی R^2 به‌دست می‌آید. آیا می‌توان با یک دسته مختصات دکارتی (x, y) تمام استوانه را پوشاند؟
۵. در فضای سه‌بعدی اقلیدسی رابطه‌ی مختصات دکارتی و کروی به‌این‌صورت است:

$$x = r \sin\phi \sin\theta, y = r \cos\phi \sin\theta, z = r \cos\theta$$

بردارها و هم-بردارهای پایه‌ی متناظر با مختصات کروی را به‌دست آورید.
این بردارهای پایه متعامداند ولی بهنجار نیستند. بردارهای بهنجار را نیز حساب کنید.
۶. از روی تعریف بردار و هم-بردار استقلال خطی بردارهای پایه را نشان دهید.
۷. از تعریف ضرب تانسوری تک-فرم‌های دیفرانسیلی مؤلفه‌های $\omega^1 \otimes \omega^2$ را حساب کنید.
۸. نشان دهید عمل ادغام مستقل از پایه است.
۹. روی یک خمینه‌ی دوبعدی یک تبدیل مختصات $x^i \to x'^i$ درنظر بگیرید. حاصل‌ضرب خارجی بردارهای پایه‌ی هولونوم (هموردا) چگونه تغییر می‌کند؟
۱۰. بدون استفاده از پایه، نشان دهید d در قاعده‌ی زنجیره‌ای زیر صدق می‌کند:

$$d(fg) = \frac{\partial f}{\partial g} dg$$

۱۱. با استفاده از فرم‌های دیفرانسیلی و قواعد مشتق خارجی نشان دهید:

$$curl\ grad\phi = 0$$

$$div\ rot\vec{\omega} = 0$$

۱۲. با استفاده از تعریف مشتق لی دو بردار پادوردا نشان دهید:

$$[X, Y](fg) = g[X, Y]f + f[X, Y]g$$

۱۳.نشان دهید عمل ادغام مشتق لی $\mathcal{L}_X$ جابه‌جا شدنی است!
۱۴. نشان دهید

$$2d\omega(X, Y) = X \langle \omega, y\rangle - Y \langle \omega, X\rangle - \langle \omega, \mathcal{L}_X y\rangle$$

۱۵. عملگر $\nabla_{(fx)}$ را برحسب ∇_X حساب کنید.
۱۶.نشان دهید:

$$\nabla(fY) = df \otimes Y + f\nabla Y$$

۱۷. با استفاده از تعریف مشتق هموردا برای یک تانسور عام و نیز جابه‌جایی آن با عمل ادغام، نشان دهید:

$$\nabla_{e_k} e^i = -\Gamma^i_{lk} e^l$$

$$\omega_{i;k} = \omega_{i,k} - \Gamma^j_{ik}\omega_j$$

۱۸. نشان دهید حاصل‌ضرب داخلی دو بردار Y, X در اثر انتقال موازی تغییر نمی‌کند.
۱۹. متریک میان دو نقطه در فضای ۴بعدی از رابطه ی $ds^2 = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu$ به‌دست می‌آید. اگر از این رابطه برای محاسبه‌ی ژئودزیک به معنای خم یا فاصله‌ی فرینال استفاده کنیم به همان معادله‌ی مألوف ژئودزیک می‌رسیم. اگر خم ما نورگونه باشد چه می‌شود؟
۲۰. برای کره‌ای به شعاع a با مختصات متعارف ϕ, θ متریک را می‌توان به‌این‌صورت نوشت

$$g_{ij} = \begin{bmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & a^2 \sin^2\theta \end{bmatrix}$$

نشان دهید تنها مؤلفه‌های ناصفر نماد کریستوفل اینها هستند:

$$\Gamma^{1}_{22} = -\sin\theta\cos\theta \qquad \text{و} \qquad \Gamma^{2}_{12} = \Gamma^{2}_{21} = \cot\theta$$

۲۱. بردار دلخواه X را در امتداد یک خم روی کره‌ی دوبعدی انتقال موازی بدهید. اگر که خم دایره‌ی عظیمه باشد نتیجه چیست؟
۲۲. ارتباط تانسور انیشتین در پایه‌های هولونوم و ناهولونوم، نشان دهید رابطه‌ی زیر میان مؤلفه‌های هولونوم تانسور انیشتین G^{ν}_{μ} و مؤلفه‌های ناهولونوم $G^{\bar{\nu}\bar{\mu}}$ برقرار است

$$G^{\bar{\nu}}_{\bar{\mu}} = \sqrt{|g^{\nu\nu}.g_{\mu\mu}|}G^{\nu}_{\mu} \qquad \mu \neq \nu$$

$$G^{\bar{\mu}}_{\bar{\mu}} = G^{\mu}_{\mu} \qquad \mu = \nu\,!$$

(توجه: در رابطه‌ی بالا روی μ یا $\bar{\mu}$ جمع زده نمی‌شود!)
۲۳. نشان دهید روی خمینه‌ای فضازمانی که متریک آن همه‌جا ناتکین است. ژئودزیکی هموار که در یک نقطه فضاگونه، زمان‌گونه یا نورگونه باشد، همه‌جا به‌ترتیب فضاگونه، زمان‌گونه یا نورگونه خواهد بود.
۲۴. از تعریف تانسور انحنا به‌صورت

$$R(X,Y)Z = \nabla_X(\nabla_Y Z) - \nabla_Y(\nabla_X Z) - \nabla_{[X,Y]}Z$$

رابطه‌ی زیر را به‌دست آورید:

$$R^a_{bcd}Z^b = Z^a_{;dc} - Z^a_{;cd}$$

۲۵. هم‌وستار سازگار با متریک در این رابطه صدق می‌کند:

$$\nabla g = 0$$

نشان دهید دراین‌صورت

$$dg_{ab} = \omega_{ab} + \omega_{ba}$$

و از آنجا به‌دست آورید:

$$\Gamma^a_{bc} = \frac{1}{2}g^{ad}(g_{db,c} + g_{dc,b} - g_{bc,d})$$

می‌توانید از رابطه‌ی $df(u) = u(f)$ استفاده کنید!
۲۶. ثابت کنید مشتق خارجی هر p-فرم یک $(p+1)$-فرم است.
۲۷. تعریف

$$R(X,Y)Z - \nabla_X(\nabla_Y Z) - \nabla_Y(\nabla_X Z) - \nabla_{[X,Y]}Z$$

هنگامی به یک تانسور (تانسور ریمان) منجر می‌شود که رابطه‌های زیر معتبر باشند:

$$R(fX,Y)Z = R(X,fY)Z = fR(C,Y)Z$$

و

$$R(X,Y)(fZ) = fR(X,Y)Z$$

نشان دهید این دو رابطه درست‌اند!
۲۸. از اتحاد بیانکی به‌صورت

$$R^{\mu}_{\nu\rho\sigma;\alpha} + R^{\mu}_{\nu\sigma\alpha;\rho} + R^{\mu}_{\nu\alpha\rho;\sigma} = 0$$

استفاده کنید و نشان دهید:

$$G^{\mu}_{\nu;\mu} = 0$$

۲۹. تانسور متقارن و دلخواه S^{ij} را درنظر بگیرید، نشان دهید:

$$S_{ij;kl} - S_{ij;lk} = R^m_{jkl} S_{im} + R^m_{ikl} S_{mj} + T^m_{kl} S_{ij;m}$$

حالا پیچش را صفر بگیرید و به‌جای تانسور S متریک را بگذارید، نشان دهید نتیجه می‌شود

$$R_{ijkl} = -R_{jikl}$$

۳۰. نشان دهید برای دو متریک همدیس

$$\bar{g}_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} e^{\phi(X)}$$

که در آن ϕ تابعی دلخواه است، تانسورهای وایل برابرند.

۳۱. پایه‌های e^i را به به $e^{i'}$ تبدیل کنید و تبدیل مؤلفه‌های هم‌وستار را به‌دست آورید:

$$\Gamma^{l'}_{i'k'} = \frac{\partial x^{l'}}{\partial x^l} \left(\frac{\partial^2 x^l}{\partial x^{l'} \partial x^{k'}} + \Gamma^l_{ik} \frac{\partial x^i}{\partial x^{l'}} \frac{\partial x^k}{\partial x^{k'}} \right)$$

۳۲. نشان دهید مؤلفه‌های تانسور انحنا به‌این‌صورت است:

$$\frac{1}{2} R^\mu_{\nu\rho\sigma} e^\rho \wedge e^\sigma = d\omega^\mu_\nu + \omega^\mu_\rho \wedge \omega^\rho_\nu$$

همچنین رابطه زیر را اثبات کنید:

$$R^\mu_{\nu\rho\sigma} = \Gamma^\mu_{\nu\sigma,\rho} - \Gamma^\mu_{\nu\rho,\sigma} + \Gamma^\mu_{\alpha\rho} \Gamma^\alpha_{\nu\sigma} - \Gamma^\mu_{\alpha\sigma} \Gamma^\alpha_{\nu\rho}$$

۳۳. نشان دهید رابطه‌ی زیر بین مشتق لی و مشتق خارجی معتبر است:

$$2 d\omega(X, Y) = X \langle \omega, Y \rangle - Y \langle \omega, X \rangle - \langle \omega, [X, Y] \rangle$$

توجه: به‌یاد داشته باشد که $\mathcal{L}_X \langle \omega, Y \rangle = X \langle \omega, Y \rangle$!

۳۴. نشان دهید شرط لازم برای هولونوم بودن پایه‌های e_i، به‌عبارت دیگر شرط انتگرال‌پذیری آن‌ها به‌این‌صورت است

$$[e_i, e_j] = 0$$

به عکس پایه‌های ناهولونوم در شرط زیر صدق می‌کنند

$$[e_i, e_j] = C^k_{ij} e_k$$

که ضریب‌های C^k_{ij} را ضریب‌های ناهولونومی می‌نامند.

۳۵. نشان دهید شرط ناتکین بودن یک تانسور متقارن نوع (۲و۰) هم‌ارز است با ناصفر بودن دترمینان مؤلفه‌های آن.

۳۶.نشان دهید هر فضای ریمانی دوبعدی همدیس تخت است.

۳۷. نشان دهید هرگاه $\frac{\partial}{\partial t}$ بردار کیلینگ یک متریک باشد کمیت $E = k^\mu \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)_\mu$ ثابت است. در این رابطه k^μ بردار مماس بر یک ژئودزیک است. چه مفهومی می‌توانید به E نسبت دهید؟ با استفاده از این رابطه چگونه می‌توانید پارامتر آفین برای ژئودزیک تعیین کنید؟

۳۸. متریک فضا-زمان با تقارن کروی را به‌صورت زیر درنظر بگیرید

$$ds^2 = e^{2\mu(r,t)} dt^2 - e^{2\nu(r,t)} dr^2 - r^2 d\Omega^2$$

مؤلفه‌های تانسور انیشتین را برای این متریک با استفاده از معادله‌ی کارتان حساب کنید.

۳۹. فضازمانی ۲-بعدی درنظر بگیرید. نشان دهید متریک آن را می‌شود به‌صورت زیر نوشت:

$$ds^2 = -e^{2\mu} dt^2 + e^{2\nu} dx^2$$

۴۰. فضازمانی ۳-بعدی با تقارن کروی درنظر بگیرید. نشان دهید متریک آن را می شود به‌صورت زیر نوشت:

$$ds^2 = -e^{2\mu}dt^2 + e^{2\nu}dr^2 + r^2d\phi^2;$$

تانسور انیشتین این متریک را حساب کنید.

۴۱. متریک روبرتسون-واکر برای فضای فریدمان همگن و همسان‌گرد به‌این‌صورت نوشته می‌شود

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t)\left(\frac{dr^2}{1-kr^2} + r^2d\Omega^2\right)$$

مؤلفه‌های تانسور انیشتین را برای این متریک با استفاده از معادله‌ی کارتان حساب کنید.

۴۲. با استفاده از تعریف بردار کیلینگ نشان دهید که ξ_μ مؤلفه‌های یک بردار کیلینگ در مختصات هولونوم باشد، رابطه‌ی زیر معتبر است:

$$\xi_{\mu;\nu} + \xi_{\nu;\mu} = 0$$

۴۳. فضازمان تخت فریدمان ($k = 0$) در مختصات همدیس به‌این‌صورت است:

$$ds^2 = a^2(\tau)[-d\tau^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2]$$

که در آن

$$\tau = \int \frac{dt}{a(t)}$$

زمان همدیس است که برحسب تابع مقیاس و، τ، زمان مختصاتی روبرتسون-واکر، تعریف شده است. نشان دهید اگر ϕ ضریب همدیس متریک فریدمان با مینکوفسکی و ψ ضریب در تعریف بردار کیلینگ همدیس باشد رابطه‌ی زیر برقرار است:

$$\psi = X\log a + \phi$$

که در آن X یک بردار کیلینگ همدیس است. این را رابطه را دست‌کم برای یک بردار X نشان دهید.

۴۴. نشان دهید بردارهای زیر در فضای فریدمان، با مختصات همدیس دکارتی، بردار کیلینگ‌اند.

$$\begin{aligned}
&P_\mu = \partial\mu,\\
&H = x^\mu\partial_\mu,\\
&K_\mu = 2x_\mu H - (x^\mu x^\mu)P_\mu,\\
&M_{\mu\nu} = x_\mu x_\nu - x_\nu x_\mu,
\end{aligned}$$

دانشگاه صنعتی شریف
گرانش و نسبیت عام-۱

شماره درس ۲۴۱۴۸-۱

فصل ٤: معادله‌های میدان نسبیت عام

رضا منصوری

ویراست ۰.۱

مرداد ۱۳۹۲

۰.٤ درآمد

هم اکنون ابزار ریاضی و ابزار مفهومی کافی برای نوشتن معادله های میدان گرانش را در اختیار داریم. نوشتن شکل این معادله ها بسار ساده است ! تنها نکته تعیین کننده ضرایب ثابتی است که در چنین معادله ای پیش می آید. برای تعیین آن به ضرورت باید مدلی که بتوان آن را با تجزیه یا قوانین گرانش نیوتون تطبیق داد طراحی و محاسبه کرد. بخش انحراف ژئودزیک با این هدف نوشته شده است. به این ترتیب ثابت ها ی معادله ی میدان هم تعریف می شود. از نظریه ی میدان می دانیم که باید بتوان معادله ی میدان را از کنش به دست آورد. نوشتن کنش هم کار ساده ی سرراستی است. اما وردش و به دست آوردن معادله ی انیشتین ظرافتهایی دارد که در این فصل به آن پرداخته می شود. به علاوه این سوال نیز مطرح می شود که اگر اجازه دهیم مشتقهای بالاتر از مرتبه ی اول میدان در کنش وارد شود چه حاصل خواهد شد.

۱.٤ شکل معادله‌ی میدان نسبیت عام

معادله ی گرانش نیوتون، بر حسب پتانسیل، به این شکل است

$$\Delta U = \alpha\rho \tag{۲۳۱}$$

که در آن $\alpha = ۴\pi G$ و G ثابت گرانش نیوتون است. از نسبیت خاص می دانیم که اگر چادر سرعت ناظری u^r باشد، و $t_{\mu\nu}$ تانسور انرژی تکانه ی ماده باشد، آنگاه چگالی که این ناظر اندازه می گیرد برابر است با

$$\rho = T_{\alpha\beta}u^\alpha u^\beta \tag{۲۳۲}$$

که تانسور انرژی در شرط پایستگی

$$T^\beta_{\alpha\beta,} = ۰ \tag{۲۳۳}$$

صدق می کند. پس اگر قرار باشد تعمیمی از گرانش نیوتون به دست دهیم که نسبتی هم باشد باید با تانسور انرژی-تکانه ی نسبیت عامی کار کنیم، که در این صورت شرط پایستگی باید به صورت

$$T^\beta_{\alpha\beta;} = ۰ \tag{۲۳۴}$$

در آید. از طرف دیگر از اصل ماخ و اصل هم ارزی یاد گرفته ایم که باید نسبتی میان ماده با هندسه باشد. ترجمه ی این دو اصل در زبان هندسه می شود که به زبان معادله ای باشیم که یک سمت آن تانسور انرژی باشد. بنابراین سمت دیگر آن باید تانسوری مرتبه ی دو باشد که از ادغام تانسور انحنا به دست می آید. انیشتین پس از چند تجربه نهایتا این انتخاب را پیشنهاد کرد:

$$G_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu} \tag{۲۳۵}$$

که در آن κ ثابتی است که تطبیق با طبیعت آن را تعیین می کند. تانسور انیشتین ویژگی های مطلوب زیر را دارد:

۱. صفر می شود هرگاه انحنای فضا صفر باشد

۲. موجودی است هندسی که فقط به انحنا وابسته است

۳. خطی است در انحنا، متقارن است، و واگرایی آن صفر است:

$$G^\nu_{\mu\nu;} = ۰ \tag{۲۳۶}$$

این ویژگی ها همزمان تانسور $G_{\mu\nu}$ را به طور یکتا مشخص می کند.

۲.٤ انحراف ژئودزیکی

دو ذره ی نزدیک هم، به فاصله ی $\delta x^\mu(\tau) = \xi^\mu(\tau)$ در نظر می گیریم که هر دو آزادانه روی مسیر های $x^\mu(\tau)$ و $x^\mu(\tau) + xi^\mu(\tau)$ سقوط می کنند. معادله ی حرکت دو ذره می شود

$$\cdot = \frac{d^۲ x^\mu}{d\tau^۲} + \Gamma^\mu_{\nu\lambda}(x)\frac{dx^\nu}{d\tau}\frac{dx^\lambda}{d\tau} \tag{۲۳۷}$$

$$\cdot = \frac{d^۲(x^\mu + \xi^\mu)}{d\tau^۲} + \Gamma^\mu_{\nu\lambda}(x+\xi)\frac{d(x^\nu + \xi^\nu)}{d\tau}\frac{d(x^\lambda + \xi^\lambda)}{d\tau} \tag{۲۳۸}$$

$$\Rightarrow \quad \cdot = \frac{d^۲ \xi^\mu}{d\tau^۲} + \frac{\partial \Gamma^\mu_{\nu\lambda}}{\partial x^\rho}\xi^\rho \frac{dx^\nu}{d\tau}\frac{dx^\lambda}{d\tau} + \Gamma^\mu_{\nu\lambda}\frac{dx^\nu}{d\tau}\frac{d\xi^\lambda}{d\tau} \tag{۲۳۹}$$

بر حسب مشتق هموردا

$$\frac{D^۲ \xi^\lambda}{D\tau^۲} = R^\lambda_{\nu\mu\rho}\xi^\mu \frac{dx^\nu}{d\tau}\frac{dx^\rho}{d\tau} \tag{۲۴۰}$$

پس دو ذره که کنار هم سقوط می کنند حرکت نسبی دارند و حضور میدان گرانش را بر ملا می کنند. البته مثلا در اطراف زمین، و به ازای (ابعاد ماهواره) $\sim \delta x^\lambda$، سمت راست معادله بسیار کوچک است و می توان از آن صرف نظر کرد.
به منظور تعیین ثابت κ در معادله ی انیشتین، بهتر است رابطه ای میان این انحراف ژئودزیک و معادله ی حرکت نیوتون برقرار کنیم. پس ابتدا معادله را در مختصات لخت موضعی می نویسیم، که در آن $u^\mu = (۱, \cdot, \cdot, \cdot)$. بنابراین شتاب در فاصله ی فضایی بین دو ذره ی آزاد می شود

$$\frac{d^۲ \xi^k}{d\tau^۲} = R^k_{\cdot j \cdot}\xi^j \tag{۲۴۱}$$

اکنون حرکت این دو ذره را از وسط سوراخی در زمین نگاه کنید که از گرانش نیوتونی یک حرکت هماهنگ است:

$$\frac{d^۲ \xi^k}{d\tau^۲} = -\frac{۴\pi G}{۳}\rho \xi^k \tag{۲۴۲}$$

مقایسه ی این دو رابطه می دهد

$$[R^k_{\cdot j \cdot}] = -\frac{۴\pi G}{۳}\rho \begin{bmatrix} ۱ & \cdot & \cdot \\ \cdot & ۱ & \cdot \\ \cdot & \cdot & ۱ \end{bmatrix} \tag{۲۴۳}$$

با استفاده از معادله ی انیشتین یک مولفه ی این معادله را می نویسیم

$$R_{\cdot\cdot} = \frac{۱}{۲}\kappa(T_{\cdot\cdot} + T^k_k) \tag{۲۴۴}$$

با فرض سرعت های آهسته در چشمه، به دست می آوریم

$$R_{\cdot\cdot} = \frac{۱}{۲}\kappa\rho \tag{۲۴۵}$$

که مقایسه با نتیجه ی بالا می دهد

$$\kappa = ۸\pi G \tag{۲۴۶}$$

۳.۴ درجه‌های آزادی میدان گرانش

تانسور متقارن $g_{\mu\nu}$ در ۴ بعد تعداد ۱۰ مولفه ی مستقل دارد، که به عنوان درجه های آزادی میدان گرانش در حالت عام تلقی می شود. تعداد معادله های میدان انیشتین نیز همین ده است پس تعداد مجهول ها با تعداد معادله ها مطابقت دارد. از طرف دیگر از اصل هموردایی عام می دانیم که هر تبدیل مختصات مجاز است. این آزادی اجازه می دهد چهار مولفه از $g_{\mu\nu}$ را به دلخواه انتخاب کنیم. بنابراین، تعداد مولفه های مستقل میدان می شود ۶؛ پس میدان گرانش تنها ۶ درجه ی آزادی دارد. این اختیار انتخاب مختصات تعداد معادله های مستقل انیشتین را هم به ۶ کاهش می دهد، که سازگاری تعداد مستقل مجهول ها را با تعداد معادله ها می رساند.به این ترتیب انتظار داریم در حالت کلی با ۶ معادله و ۶ مجهول سروکار داشته باشیم. البته در حالت های خاص که تقارن ویژه ای برای فضازمان در نظر می گیریم این تعداد معمولا کاهش می یابد.

۴.۴ جمله‌ی کیهان شناختی

انیشتین در یکی از اولین کوششهایش برای یافتن جوابی کیهان شناختی از معدلاتش به این نتیجه رسید که هیچ جواب ایستا برای مدلی کیهانشناختی به دست نمی آید. چون تصور فیزیکدانان در آن زمان هنوز این بود که کیهان هندسه ای ایستا دارد، او هم به همین علت به دنبال تغییری در معادله های گرانش رفت که اجازه ی جوابی ایستا بدهد. راه ساده ای که او یافت این بود که جمله ای متناسب با متریک در سمت چپ معادله ی خودش اضافه کند، و ضریب این جمله را برابر با مقداری ثابت گرفت. به این ترتیب این معادلات شکل زیر را به خود گرفت

$$G_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu} \tag{۲۴۷}$$

که در آن Λ یا $\Lambda g_{\mu\nu}$، را جمله ی کیهانشناختی می نامند. سمت چپ این معادله ویژگی های زیر را دارد.

۱. تنها با متریک و مشتقات مرتبه ی اول و دوم ساخته می شود؛

۲. خطی در تانسور ریچی است؛

۳. واگرایی آن صفر است.

پس از کشف انبساط عالم در دهه ی اول قرن ۱۴/ دهه ی سوم قرن ۲۰ مشخص شد که باید به دنبال جوابی انبساطی، پس نا ایستا، گشت. این بود که انیشتین جمله ی Λ را غیر ضروری دانست و از آن صرف نظر کرد. اما این جمله ی کیهانشناختی حضور خود را در معادله ها حفظ کرد.
در سالهایی که نظریه ی میدان و نظریه ی میدان های کوانتومی پرداخته شد و مدل استاندارد ذرات بنیادی به وجود آمد، مشخص شد که به خلا نظریه ی میدان می توان یک تانسور انرژی تکانه نسبت داد که متناسب است با متریک فضازمان. پس می شود جمله ی $\Lambda g_{\mu\nu}$ را به سمت راست معادله ی انیشتین منتقل کرد و از آن تعبیر تانسور انرژی خلا کرد. این بود که دوران جدیدی از تعبیر جمله ی کیهانشناختی به عنوان چگالی انرژی خلا شروع شد. پس در این صورت چگالی خلا لازم بود از چگالی کمتر از چگالی ماده در ساختارهای بزرگ کیهانی باشد تا قانون نیوتون درست باشد. به طور مثال، چون چگالی خوشه های کهکشانی حدود $۱۰^{-۲۹} \frac{g}{cm^۳}$ است، پس باید داشته باشیم

$$\rho_{vaccum} = \frac{\Lambda}{\kappa} < \rho_{cluster} \sim ۱۰^{-۲۹} \frac{g}{cm^۳} \sim ۱۰^{-۵۷} cm^{-۲} \tag{۲۴۸}$$

این عدد حدی می گذارد بر اندازه ی Λ که ناسازگاری شدیدی دارد با نتایجی که او ذرات بنیادی به دست می آید.

۵.٤ مختصات ریمان

مختصات دکارتی در فضای اقلیدسی ساده اند. خطوط مختصاتی ژئودزیک اند. تعمیم این حالت به فضای ریمانی به معنی استفاده از خم های ژئودزیک برای خط های مختصاتی است. گیریم x^μ بیانگر یک خم مختصاتی ژئودزیک باشد. داریم

$$\frac{d^2x^\mu}{ds^2}+\Gamma^\mu_{\nu\rho}\frac{dx^\mu}{ds}\frac{dx^\nu}{ds} \tag{۲۴۹}$$

این معادله را حول نقطه ی x_0^μ بسط می دهیم:

$$x^\mu = x_0^\mu+\xi^\mu s+\frac{1}{2}(\frac{d^2x^\mu}{ds})_0 s^2+.. \tag{۲۵۰}$$

که در آن $\xi^\mu=(\frac{dx^\mu}{ds})_0$. از معادله ی ژئودزیک به دست می آوریم

$$(\frac{d^2x^\mu}{ds^2})_0=-\Gamma^\mu_{\nu\rho}\xi^\rho\xi^\nu \tag{۲۵۱}$$

پس می نویسیم

$$x^\mu(s)=x_0^\mu+\xi^\mu s-\frac{1}{2}\Gamma^\mu_{\nu\rho}\xi^\rho\xi^\nu s^2+... \tag{۲۵۲}$$

گیریم مختصات جدید در نزدیکی x_0^μ به صورت $y^\mu=\xi^\mu s$ باشد. یعنی

$$x^\mu(s)=x_0^\mu+y^\mu-\frac{1}{2}\Gamma^\mu_{\nu\rho}y^\rho y^\nu s^2+... \tag{۲۵۳}$$

این تبدیل مختصات را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$y^\mu=(x^\mu-x_0^\mu)+\frac{1}{2}\Gamma^\mu_{\nu\rho}(x^\rho-x_0^\rho)(x^\nu-x_0^\nu) \tag{۲۵۴}$$

این تبدیل تا مرتبه ی s^2 صادق است. به عبارت دیگر تعریف مختصات جدید یکتا نیست. اختلاف دو دسته مختصات از مرتبه ی s^2 است. معدلات ژئودزیک از نقطه ی x_0^μ در مختصات جدید همان $y^\mu=\xi^\mu s$ است.
پس y^μ همان مختصاتی هستند که به دنبالش هستیم. شکل متریک در این مختصات می شود

$$ds^2=\overline{g}_{\mu\nu}(y)dx^\mu dx^\nu \tag{۲۵۵}$$

حالا معادله ی ژئودزیک را در این مختصات با $y^\mu=\xi^\mu s$ مقایسه می کنیم. پس

$$\Gamma^\mu_{\nu\rho}(\xi^\mu s)\xi^\rho\xi^\nu=0\Rightarrow\overline{\Gamma}^\mu_{\nu\rho}(y)=0 \tag{۲۵۶}$$

زیرا ξ^ρ ها بردار دلخواه هستند. به همین دلیل دو نقطه ی $s=0$ داریم

$$\overline{g}_{\mu\nu,\rho}=0 \tag{۲۵۷}$$

یعنی مشتقات اول $g_{\mu\nu}$ در این نقطه صفر می شود:

$$\overline{g}_{\mu\nu}=\overline{g}_{\mu\nu}(0)+\frac{1}{3}R_{\mu\rho\sigma\nu}y^\rho y^\sigma \tag{۲۵۸}$$

می توان نشان داد در این نقطه $g_{\mu\nu}=\eta_{\mu\nu}$. تبدیل مختصات در این نقطه باعث تبدیل خطی مختصات ریمان می شود. مختصاتی که در مبدا آن داشته باشیم $g_{\mu\nu}(0)=\eta_{\mu\nu}$، مختصات بهنجار ریمان خوانده می شود!

۶.۴ فرمول‌بندی لاگرانژی نسبیت عام

ساده ترین راه برای ساختن کمیتی نرده ای از متریک و مشتقات آن است که با انجام ادغام روی تانسور انحنا به دست آید، یعنی استفاده از نرده ای ریچی. پس، با توجه به اینکه در فضای ریمانی با متریک دلخواه هستیم، لاگرانژی باید به صورت چگالی باشد. به این ترتیب، در حالت کلی می نویسیم

$$\mathcal{L} = R\sqrt{-g} + \kappa\mathcal{L}_M \qquad (۲۵۹)$$

که منظور از $\mathcal{L}_M$ لاگرانژی ماده است. بخش اول را که مربوط به گرانش است لاگرانژی هیلبرت می نامند. اشکال ظاهری لاگرانژی هیلبرت این است که ظاهرا مشتق مرتبه ی دوم متریک آن است، که در این صورت منجر به دینامیکی می شود که در آن مشتق مرتبه ی سوم میدان حضور دارد که مطلوب نیست. ابتدا نشان می دهیم که جمله های مشتق دوم به صورت مشتق یک تانسور وارد می شوند که در کنش برای به دست آوردن معادله ی دینامیکی بی اثر است.

۷.۴ شکل کنش هیلبرت

لاگرانژی به این صورت است

$$R\sqrt{-g} = \sqrt{-g}g^{\mu\nu}R_{\mu\nu} = \sqrt{-g}[g^{\mu\nu}\Gamma^{\rho}_{\mu\rho,\nu} - g^{\mu\nu}\Gamma^{\rho}_{\mu\nu,\rho} + g^{\mu\nu}\Gamma^{\rho}_{\mu\sigma}\Gamma^{\sigma}_{\nu\rho} - g^{\mu\nu}\Gamma^{\rho}_{\mu\nu}\Gamma^{\sigma}_{\rho\sigma} \qquad (۲۶۰)$$

جملات با مشتق دوم متریک در دو جمله ی اول پیش می آید. آنها را به طریق زیر تغییر می دهیم:

$$\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\Gamma^{\rho}_{\mu\nu,\rho} = (\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\Gamma^{\rho}_{\mu\nu})_{,\rho} - \Gamma^{\rho}_{\mu\nu}(\sqrt{-g}g^{\mu\nu})_{,\rho} \qquad (۲۶۱)$$

مشتق را با استفاده از روابط زیر حساب می کنیم:

$$g^{\mu\nu,\rho} = \Gamma_{\mu\rho\nu} + \Gamma_{\nu\rho\mu} \qquad (۲۶۲)$$

$$\frac{۱}{g}\frac{\partial g}{\partial x^{\rho}} = \frac{۱}{g}g^{\mu\nu}\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\rho}} = g^{\mu\nu}(\Gamma_{\mu\rho\nu} + \Gamma_{\nu\rho\mu}) = ۲\Gamma^{\mu}_{\mu\rho} \qquad (۲۶۳)$$

در نتیجه داریم

$$\frac{\partial\sqrt{-g}}{\partial x^{\mu}} = \Gamma^{\rho}_{\rho\mu} \qquad (۲۶۴)$$

به این ترتیب مشتق های g و $\sqrt{-g}$ به حاصلضرب Γ می شود. نهایتا به دست می آوریم

$$\sqrt{-g}R = \sqrt{-g}G - (\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\Gamma^{\rho}_{\mu\nu} - \sqrt{-g}g^{\mu\rho}\Gamma^{\nu}_{\mu\nu})_{,\rho} \qquad (۲۶۵)$$

که در آن

$$G = g^{\mu\nu}(\Gamma^{\rho}_{\mu\sigma}\Gamma^{\sigma}_{\nu\rho} - \Gamma^{\rho}_{\mu\nu}\Gamma^{\sigma}_{\rho\sigma}) \qquad (۲۶۶)$$

بنابراین لاگرانژی موثر، $\sqrt{-g}G$، کمیتی است که تنها مشتق مرتبه ی اول متریک را در بر دارد. نکته ی قابل تامل این است که G یک کمیت نرده ای نیست؛ مثلا در مبدا مختصات ریمان G برابر صفر می شود. اما داریم

$$\delta\int\sqrt{-g}Rd^{۴}x = \delta\int\sqrt{-g}Gd^{۴}x \qquad (۲۶۷)$$

چون سمت چپ ناوردا است پس سمت راست نیز باید ناوردا باشد. علت آن است که گرچه Γ ها تانسور نیستند، اما تفاضل Γ ها ، یا $\delta\Gamma$، تانسور است. گرچه جمله ی متناسب با G لاگرانژی موثر است، اما چون وردش G ساده نیست، بهتر است وردش مستقیما با $\sqrt{-g}R$ انجام شود. مشتق های مرتبه ی دوم مزاحم نخواهند بود!

۸.٤ وردش در کنش هیلبرت

ابتدا می پردازیم به کنش مربوط به میدان گرانش بدون حضور ماده؛ به این ترتیب کنش را می نویسیم.

$$S_g = \int \sqrt{-g} R d\Omega \tag{۲۶۸}$$

که در آن $d\Omega$ عنصر انتگرال گیری چهار بعدی است. این کنش را وردش می دهیم. متغیر همان مولفه های متریک، یعنی $g_{\mu\nu}$ ، است:

$$\delta \int \sqrt{-g} R d\Omega = \delta \int g_{\mu\nu} R^{\mu\nu} \sqrt{-g} d\Omega = \int (\delta R^{\mu\nu}) g_{\mu\nu} \sqrt{-g} d\Omega + \int R^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu} \sqrt{-g} d\Omega + \int g_{\mu\nu} R^{\mu\nu} \delta\sqrt{-g} d\Omega \tag{۲۶۹}$$

اما

$$\delta\sqrt{-g} = -\frac{۱}{۲}\frac{\delta g}{\sqrt{-g}} = -\frac{۱}{۲}\sqrt{-g} g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} \tag{۲۷۰}$$

زیرا

$$dg = g.g^{\mu\nu} dg_{\mu\nu} = -g g_{\mu\nu} dg^{\mu\nu} \tag{۲۷۱}$$

پس

$$\delta \int \sqrt{-g} R d^۴x = \int (R_{\mu\nu} - \frac{۱}{۲} g_{\mu\nu} R) \delta g^{\mu\nu} . \sqrt{-g} d^۴x + \int g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu} \sqrt{-g} d^۴x \tag{۲۷۲}$$

اگر جمله ی آخر حذف شود به نتیجه رسیده ایم. جمله ی آخر به یک انتگرال سطح تبدیل می شود. محاسبه را بعدا در مختصات ریمان انجام می دهیم:

$$g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu} = g^{\mu\nu}[(\delta\Gamma^{\rho}_{\mu\rho})_{,\nu} - (\delta\Gamma^{\rho}_{\mu\nu})_{,\rho}] = g^{\mu\rho}(\delta\Gamma^{\nu}_{\mu\nu})_{,\rho} - g^{\mu\nu}(\delta\Gamma^{\rho}_{\mu\nu})_{,\rho} = (g^{\mu\rho}\delta\Gamma^{\nu}_{\mu\nu} - g^{\mu\nu}\delta\Gamma^{\rho}_{\mu\nu})_{,\rho} = W^{\rho}_{,\rho} \tag{۲۷۳}$$

$$W^{\rho} = g^{\mu\rho}\delta\Gamma^{\nu}_{\mu\nu} - g^{\mu\nu}\delta\Gamma^{\rho}_{\mu\nu} \tag{۲۷۴}$$

چون $\delta\Gamma$ تانسور است پس W^{ρ} یک چهار بردار است. همین رابطه در مختصات دلخواه می شود

$$g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu} = W^{\rho}_{,\rho} = \frac{(\sqrt{-g}W^{\rho})_{,\rho}}{\sqrt{-g}} \tag{۲۷۵}$$

به این ترتیب جمله ی آخر به صورت زیر در می آید که

$$\int g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu}\sqrt{-g} d\Omega = \frac{\partial(\sqrt{-g}W^{\mu})}{\partial x^{\nu}} d\Omega \tag{۲۷۶}$$

یک انتگرال سطح است. اما وردش میدان در مرز انتگرال گیری صفر است. پس انتگرال صفر می شود. به این ترتیب

$$\delta S_g = ۰ \quad \Rightarrow \quad R_{\mu\nu} - \frac{۱}{۲} g_{\mu\nu} R = ۰ \tag{۲۷۷}$$

و معادله ی میدان می شود

$$G_{\mu\nu} = ۰ \tag{۲۷۸}$$

۹.٤ وردش لاگرانژی ماده و محاسبه ی انرژی تکانه

هرگاه $\mathcal{L}_M$ (چگالی) لاگرانژی یک میدان باشد، تانسور انرژی آن از رابطه ی زیر به دست می آید

$$T_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu}\mathcal{L} - q^A_{,\mu}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q^A_{,\nu}} \tag{۲۷۹}$$

A مجوعه ای از شاخص های بیانگر متغیر میدان! این تانسور معمولا متقارن نیست. برای اینکه بتوان تکانه ی زاویه ای تعریف کرد (که پایسته باشد) باید آن را متقارن ساخت. روش های متقارن سازی گوناگونی وجود دارد. مثلا با اضافه کردن جمله ای به شکل $\partial_\rho\psi_{\mu\nu\sigma}$، که $\psi_{\mu\nu\sigma}$ در شاخص های μ,ν,σ پادمتقارن است.

$$L = F^2 = F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \tag{۲۸۰}$$

$$T^\nu_\mu = (F^\sigma_\mu F^\nu_\sigma - \frac{1}{4}\delta^\nu_\mu) \tag{۲۸۱}$$

در فضای ریمانی روش ساده ی دیگری وجود دارد که معمولا در نسبیت عام از آن استفاده می شود. برای این منظور وردش S را در ازای وردش متریک حساب می کنیم. این وردش کمیت پایسته ای به دست می دهد که همان تانسور انرژی ماده است. توجه داشته باشیم که وردش متناظر با میدان مادی از کنش ماده منجر به معادله ی میدان ماده در حضَور گرانش می شود. پس ابتدا کنش کل را این گونه می نویسیم

$$S = S_g + \kappa S_M = \delta\int\sqrt{-g}Rd^4x + \kappa\delta\int\mathcal{L}_M\sqrt{-g}d^4x \tag{۲۸۲}$$

دیدم که وردش قسمت گرانش می دهد

$$\delta\int\sqrt{-g}Rd^4x = \int(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R)\delta g^{\mu\nu}\sqrt{-g}d^4x \tag{۲۸۳}$$

برای وردش قسمت مادی، با توجه به اینکه وردش g را در مرز صفر می گیریم، به دست می آوریم

$$\delta S_M = \int[\frac{\partial}{\partial g^{\mu\nu}}(\sqrt{-g}\mathcal{L}_M)\delta g^{\mu\nu} + \frac{\partial}{\partial g^{\mu\nu}}(\sqrt{-g}\mathcal{L})\delta g^{\mu\nu}_{,\sigma}]d^4x = \int[\frac{\partial}{\partial g^{\mu\nu}}(\sqrt{-g}\mathcal{L}_M) - \frac{\partial}{\partial x^\mu}\frac{\partial}{\partial g^{\mu\nu}}(\sqrt{-g}\mathcal{L}_M)]\delta g^{\mu\nu}d^4x \tag{۲۸۴}$$

حالا تعریف می کنیم

$$\sqrt{-g}T_{\mu\nu} = \frac{\partial}{\partial x^\mu}\frac{\partial}{\partial g^{\mu\nu}}(\sqrt{-g}\mathcal{L}_M) - \frac{\partial}{\partial g^{\mu\nu}}(\sqrt{-g}\mathcal{L}_M) \tag{۲۸۵}$$

در این صورت به دست آوردیم

$$\delta S_M = -\kappa\int\sqrt{-g}T_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}d^4x \tag{۲۸۶}$$

به این ترتیب وردش کنش کل، $S = S_g + S_M$، می دهد

$$G_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu} \tag{۲۸۷}$$

که در آن $\kappa = \frac{۸\pi G}{c^۲} = ۱/۸۶۵ \times ۱۰^{-۲۷} g^{-۱} cm$ است.
از طرف دیگر، با توجه به اینکه کنش S_M یک کمیت نرده ای است، تغییرات آن را تحت تبدیل مختصات می توانیم صفر بگیریم. پس اگر این تغییر را به ازای تغییر $\delta g_{\mu\nu}$ محاسبه کنیم به همان عبارت بالا می رسیم که باید $\delta S = ۰$ باشد. حالا تغییر مختصات را این گونه تعریف می کنیم

$$x'^{\mu} = x^{\mu} + \xi^{\mu} \tag{۲۸۸}$$

به ازای این تغییر می توان نشان داد

$$\delta g^{\mu\nu} = g'^{\mu\nu}(x') - g^{\mu\nu}(x') = \xi^{\mu;\nu} + \xi^{\nu;\mu} \tag{۲۸۹}$$

با نشاندن این تغییر بر حسب مشتقات ξ^{μ} به دست می آوریم

$$\delta S = -\int T_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}\sqrt{-g}d^۴x = -۲\int T_{\mu\nu}\xi^{\mu;\nu}\sqrt{-g}d^۴x = -۲\int (T_{\mu\nu}\xi^{\mu})_{;\nu}\sqrt{-g}d^۴x + ۲\int T^{\nu}_{\mu;\nu}\xi^{\mu}\sqrt{-g}d^۴x =$$
$$-۲\int \frac{\partial}{\partial x^{\nu}}(T^{\nu}_{\mu}\xi^{\mu}\sqrt{-g})d^۴x + ۲\int T^{\nu}_{\mu;\nu}\xi^{\mu}\sqrt{-g}d^۴x = ۲\int T^{\nu}_{\mu;\nu}\xi^{\mu}\sqrt{-g}d^۴x = ۰ \tag{۲۹۰}$$

اما چون ξ^{μ} تابع های دلخواهی اند، پس باید نتیجه گرفت

$$T^{\nu}_{\mu;\nu} = ۰ \tag{۲۹۱}$$

به این ترتیب نتیجه می گیریم این تانسور انرژی نسبیت عامی پایسته است، و سازگار است با صفر شدن تانسور انیشتین در معادله ی انیشتین. به عنوان نمونه تانسور انرژی تکانه ی میدان الکترومغناطیس را حساب می کنیم. لاگرانژیِ میدان الکترومغناطیسی ماکسول از تعمیم متناظر نسبیتیِ آن به دست می آید. داریم

$$\mathcal{L} = -\frac{۱}{۱۶\pi}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} = -\frac{۱}{۱۶\pi}F_{\mu\nu}F_{\rho\sigma}g^{\mu\rho}g^{\nu\sigma} \tag{۲۹۲}$$

در این صورت برای تانسور انرژی تکانه به دست می آوریم

$$T_{\mu\nu} = \frac{۱}{۴\pi}(F_{\mu\rho}F^{\rho}_{\nu} - \frac{۱}{۴}F_{\rho\sigma}F^{\rho\sigma}g_{\mu\nu}) \tag{۲۹۳}$$

یا به صورت

$$T^{\nu}_{\mu} = \frac{۱}{۴\pi}(F_{\mu\rho}F^{\nu\rho} - \frac{۱}{۴}\delta^{\nu}_{\mu}F^۲) \tag{۲۹۴}$$

که همان صورت نسبیت خاص تانسور انرژی تکانه ی ماکسول است.
در مورد شاره ی کامل تنها شکل تانسور انرژی را به این صورت می پذیریم

$$T^{\nu}_{\mu} = (p+\rho)v_{\mu}v_{\nu} - pg_{\mu\nu} \tag{۲۹۵}$$

که در آن v_{μ} چاربردار سرعت ناظر است. در حالتی که معادله ی حالت به صورت $p = p(\rho)$ باشد می توان یک لاگرانژی نوشت که از وردش آن این تانسور انرژیِ تکانه به دست آید.

۱۰.٤ کنش هیلبرت و کراندار نبودن آن

کنش هیلبرت را به صورت زیر در نظر بگیرید

$$S = -\frac{1}{16\pi G}\int d^4x\sqrt{g}R \tag{296}$$

دیدیم که وردش این انتگرال معادلات انیشتین را می دهد. در مبحث کوانتش میدان، انتگرال مسیر از نوع

$$Z = \int e^{-S} \tag{297}$$

خوش تعریف نیست؛ علت آن است که انحنای نرده ای می تواند به دلخواه مثبت یا منفی شود. توجه داشته باشیم که گرچه انرژی گرانشی مثبت است، انرژی پتانسیل گرانش منفی است چون گرانش جاذب است. این منفی شدن را به طریق دیگر هم می توان دریافت. تبدیل همدیس دلخواهی در نظر بگیرید:

$$\tilde{g}_{\mu\nu} = \Omega^2 g_{\mu\nu} \tag{298}$$

که در آن Ω تابع دلخواهی است. در این صورت کنش برای متریک جدید می شود.

$$S\tilde{g} = -\frac{1}{16\pi G}\int d^4x\sqrt{g}(\Omega^2 R + 6g^{\mu\nu}\partial_\mu\Omega\partial_\nu\Omega) \tag{299}$$

حالا اگر Ω طوری انتخاب شود که بشدت تغییر کند، آنگاه کنش به دلخواه منفی می شود.

۱۱.٤ لاگرانژی با مشتقات بالاتر

گیریم لاگرانژی در نرده ای ریچی از مرتبه های بالا باشد، ساده ترین حالت این است که به کنش هیلبرت که در R خطی است، جمله ای از مرتبه ی R^2 اضافه کنیم. این جمله را با $K = R^2$ نمایش می دهیم. وردش آن منجر به جمله ی اضافه در معادله ی انیشتین می شود که آن را با $G_1^{\mu\nu}$ نشان می دهیم. می توان نشان داد

$$G_1^{\mu\nu} = 2g^{\mu\nu}R^{\sigma}_{;\sigma} - 2R;^{\mu\nu} - 2RR^{\mu\nu} + \frac{1}{2}g^{\mu\nu}R^2 \tag{300}$$

واضح است که جوابهای معادله ی $G_{\mu\nu} = 0$ جواب های معادله ی $G_1^{\mu\nu} = 0$ نیز هستند:

$$R = 0 \quad \Longrightarrow G_1^{\mu\nu} = 0 \tag{301}$$

این لاگرانژی را حالا در بعد های کمتر از ۴ بررسی می کنیم.
الف) $n = 1 + 2$ ، جواب با تقارن کروی
جواب را ایستا فرض می کنیم. داریم

$$ds^2 = -(1 - \frac{2k}{r})dt^2 + (1 - \frac{2k}{r})^{-1}dr^2 + r^2d\phi^2 \tag{302}$$

این جواب شوارتس شیلد-گونه مطلوب نیست، چون پتانسیل گرانشی در بینهایت مثل $\frac{1}{r}$ رفتار می کند. پس معادلات میدان بدیهی نیستند!
ب) $n = 1 + 1$
در این صورت جواب را می نویسیم

$$ds^2 = a(t,x)dt^2 + b(x,t)dx^2c(x,t)dtdx \tag{303}$$

با انتخاب مختصات مناسب می توان این جواب را به این صورت نوشت

$$ds^2 = -e^{2\nu(x,t)}dt^2 - e^{2\lambda(x,t)}dx^2 \tag{۳۰۴}$$

با فرض $\nu = \lambda = 0$ و نیز $\nu' = -\lambda'$ این جواب به دست می آید

$$ds^2 = -(x+k)dt^2 + (x+k)^{-1}dx^2 \tag{۳۰۵}$$

می دانیم که در $1+1$ بعد $G_{\alpha\beta}$ است، پس این جواب، جواب معادله ی میدان

$$G_{\mu\nu} + \alpha G_{1\mu\nu} = 0 \tag{۳۰۶}$$

نیز هست!

دانشگاه صنعتی شریف
گرانش و نسبیت عام-۱

شماره درس ۲۴۱۴۸-۱

فصل ۵: توزیع کروی ماده و متریک شوارتس‌شیلد

رضا منصوری

ویراست ۰.۲

مرداد ۱۳۹۲

۰.۵ درآمد

در الکترودینامیک ارتباط میان چشمه و میدان را معادلات ماکسول تعیین می‌کنند که خطی‌اند. با شناخت چشمه می‌توان این معادلات را حل کرد و میدان متناظر با چشمه مفروض را به دست آورد. مشابه این روش در نسبیت عام مقدور نیست؛ چون معادلات حاکم بر گرانش در نسبیت عام ناخطی‌اند و شناخت تانسور انرژی-تکانه کمک چندانی به حل معادلات نمی‌کند. یکی از راه‌های مرسوم حل این معادلات استفاده از تقارن برای کاهش تعداد مؤلفه‌های مجهول متریک و در نتیجه ساده کردن معادلات است. یکی از اولین جواب‌هایی که برای نسبیت عام به دست آمد، جواب با تقارن کروی برای هنگامی است که تانسور انرژی حضور ندارد؛ یعنی حل معادلات خلأ با تقارن کروی. انگیزه این فرض شناخت میدان گرانش در خارج از یک ستاره کروی است. اگر خارج ستاره ماده وجود نداشته باشد و بتوانیم فرض کنیم خارج از ستاره خلأ داریم، در این صورت باید معادلات خلأ را حل کرد. می‌توان از تقارن کروی ستاره استنباط کرد که میدان خارج آن هم باید تقارن کروی داشته باشد. به‌علاوه اگر به حدّ کافی از ستاره دور بشویم شدّت میدان به سمت صفر باید برود. یعنی انتظار داریم متریک جواب در بینهایت برابر متریک فضای مینکوفسکی بشود. این دو شرط، تقارن کروی و تخت بودن در بینهایت، دو شرط اساسی برای به دست آوردن میدان گرانش اطراف یک توزیع جرم با تقارن کروی است.

۱.۵ تقارن کروی

تعریف شهودی این است که همان تقارن‌های کره(ی دوبعدی) را داشته باشیم. به زبان ایزومتری‌ها یعنی بردارهای کیلینگ با همان جبر سه بردار کیلینگ کره، به شرح زیر:

$$[\xi_1, \xi_2] = \xi_3 \qquad [\xi_2, \xi_3] = \xi_1 \qquad [\xi_3, \xi_1] = \xi_2$$

$$[\xi_i, \xi_j] = \epsilon_{ijk}\xi_k$$

این رابطه‌های جابه‌جایی همان رابطه‌های گروه دوران در سه بعد هستند، یعنی $SO(3)$. قضیه فروبینیوس می‌گوید: در صورتی که میدان‌های برداری جابه‌جاپذیر باشند، یا جابه‌جاگر آنها بسته باشد، آنگاه خم انتگرالی این میدان‌های برداری، زیرخمینه‌ای تعریف می‌کند که این بردارها روی آن تعریف شده‌اند.
توجه کنید هنگامی که از ایزومتری صحبت کردم، صحبت از حرکت کردم، این حرکت به معنی یک لایه‌بندی برای خمینه است متناظر با گروه تقارن بردارهای کیلینگ. به هنگام تقارن کروی، این لایه‌بندی همان کره‌های هم‌مرکزی است از مرکز دلخواه که مرکز مختصات تلقی می‌شود. این کره‌ها، یا زیرخمینه‌های متناظر با تقارن کروی، که لایه‌های فضا زمان ما تلقی می‌شوند، اجازه می‌دهند مختصات متناظر با تقارن برای متریک انتخاب شود.
با این تعریف، با استفاده از زیرخمینه‌هایی که لایه‌بندی متناظر با این تقارن است، مختصات کروی تعریف می‌شود. خواهیم دید جواب معادلات نسبیت عام متناظر با این تقارن، به شرط اینکه ماده در آن وجود نداشته باشد، یعنی تانسور انرژی-تکانه صفر باشد، ایستا است؛ یعنی تقارن دیگری هم باید داشته باشد. جالب است که تا کنون نتوانسته‌ایم بدون استفاده از مختصات اثبات کنیم که اگر سه بردار کیلینگ به شرح بالا برای فضا زمان فرض شود، آنگاه بردار $\frac{\partial}{\partial t}$ نیز یک بردار کیلینگ باید باشد! این ویژگی معلوم نیست در هر نظریه گرانشی دیگری وجود داشته باشد.
فرض نبود ماده در فضا زمان در این مورد فرضی معقول است. علت این است که می‌خواهیم هندسه فضا، یا میدان گرانشی را در بیرون از یک ساختار مادی، ستاره یا کهکشان، با تقارن کروی به دست آوریم. بنابراین جوابی که به دست می‌آوریم برای بیرون ساختار است که فرض کرده‌ایم در آنجا ماده‌ای نیست! جالب است که این نتیجه مستقل از این است که چشمه میدان گرانشی، یعنی ستاره یا جسم کیهانی، ایستا است یا اینکه منبسط یا منقبض می‌شود. به نکته دیگری هم خوب است توجه کنید؛ وقتی ساختار کیهانی را متقارن کروی فرض می‌کنیم نتیجه می‌گیریم که تانسور انرژی باید متقارن کروی باشد، پس همین‌طور تانسور انیشتین. ولی ما هنگامی که از بردارهای کیلینگ متناظر و نیز از تقارن کروی فضا زمان صحبت می‌کنیم، متریک $g_{\mu\nu}$ را متقارن کروی گرفته‌ایم. اینکه از تقارن کروی $G_{\mu\nu}$ تقارن کروی $g_{\mu\nu}$ به دست آید اصلاً بدیهی نیست، اما ما این فرض را به دلیل سادگی و نیز به این دلیل که بدیل محاسباتی دیگری نداریم می‌پذیریم.

۲.۵ متریک با تقارن کروی

میدان گرانش را با تقارن کروی در نظر می‌گیریم. منظور میدان گرانش فضایی است که ماده وجود ندارد، یعنی $T_{\mu\upsilon}=\cdot$. پس معادله میدان می‌شود:

$$G_{\mu\upsilon}=\cdot \qquad \text{یا} \qquad R_{\mu\upsilon}=\cdot \tag{۳۰۷}$$

اولین قدم تعیین مختصات مناسب است. متریک را در حالت کلی به صورت زیر می‌نویسیم:

$$ds^{\text{۲}}=g_{\mu\upsilon}(x^{\rho})dx^{\mu}dx^{\upsilon}=g_{..}dt^{\text{۲}}+g_{.i}dx^{i}dt+g_{ij}dx^{i}dx^{j} \qquad i,j=\text{۱},\text{۲},\text{۳} \tag{۳۰۸}$$

می‌خواهیم متریک تحت دوران فضایی ناوردا باشد. با فرض اینکه مختصات فضایی بر لایه‌های تقارنی منطبق است، به سهولت می‌توان دید که متریک را باید بتوان به صورت زیر نوشت:

$$g_{..}=-f(r,t)$$

$$g_{.i}=+g(r,t)\frac{x^{i}}{r}$$

$$g_{ij}=+h(r,t)\delta_{ij}+J(r,t)\frac{x^{i}x^{j}}{r} \tag{۳۰۹}$$

که در آن

$$r^{\text{۲}}=\delta_{ij}x^{i}x^{j}=x^{i}x^{j}$$

پس متریک (۲) می‌شود.

$$ds^{\text{۲}}=-fdt^{\text{۲}}+\text{۲}gdrdt+[h+J]dr^{\text{۲}}+r^{\text{۲}}hd\Omega^{\text{۲}} \tag{۳۱۰}$$

که اکنون مختصات کروی در بخش فضایی به کار رفته‌است:

$$d\Omega^{\text{۲}}:=d\vartheta^{\text{۲}}+sin^{\text{۲}}\vartheta d\phi$$

به این ترتیب ده مؤلفه میدان $g_{\mu\upsilon}$ به چهار تابع f، g، h و J کاهش یافته‌است. حالا توجه می‌کنیم که تبدیل

$$r=u(\acute{r},\acute{t})$$

$$t=v(\acute{r},\acute{t}) \tag{۳۱۱}$$

شکل متریک را عوض نمی‌کند، زیرا این تبدیل تقارن کروی را حفظ می‌کند. با استفاده از این تبدیل مختصه فضایی جدید را طوری تعریف می‌کنیم که

$$\acute{r}^{\text{۲}}=r^{\text{۲}}h \tag{۳۱۲}$$

پس قسمت زاویه‌ای متریک می‌شود

$$d\sigma^{\text{۲}}=\acute{r}^{\text{۲}}d\Omega^{\text{۲}}$$

که همانند فضای تخت است. یعنی سطح کره برابر است با $\text{۴}\pi\acute{r}^{\text{۲}}$؛ این مختصه را «شعاع هندسی» می‌نامند. چون ابهامی ایجاد نمی‌شود، مختصه $\acute{r}$ را مجدداً r می‌نامیم ومتریک (۴) را به این صورت می‌نویسیم

$$ds^{\text{۲}}=-f(r,t)dt^{\text{۲}}+\text{۲}g(r,t)dtdr+[h+J]dr^{\text{۲}}+r^{\text{۲}}d\Omega^{\text{۲}} \tag{۳۱۳}$$

حال با تبدیل زمان جمله ضربدری را از میان می‌بریم:

$$t = v(r, \acute{t})$$

$$dt = \frac{\partial v}{\partial r} dr + \frac{\partial v}{\partial \acute{t}} d\acute{t} \tag{۳۱۴}$$

پس بخش زمانی متریک می‌شود

$$ds^۲|_{v=\phi=\text{ثابت}} = -f(\frac{\partial v}{\partial \acute{t}})^۲ d\acute{t}^۲ - ۲\frac{\partial v}{\partial \acute{t}}\left(f\frac{\partial v}{\partial r} - g\right) dr d\acute{t} \tag{۳۱۵}$$

با انتخاب

$$f\frac{\partial v}{\partial r} = g \tag{۳۱۶}$$

یا

$$v(r, \acute{t}) = \int \frac{g}{f} dr + v(\acute{t}) \tag{۳۱۷}$$

جمله ضربدری صفر می‌شود. اینجا نیز مختصه جدید زمان، $\acute{t}$، را مجدداً برای سهولت با t نمایش می‌دهیم. پس می‌توان متریک را به صورت نمایی زیر نوشت

$$ds^۲ = -e^{۲\mu(r,t)} dt^۲ + e^{۲v(r,t)} dr^۲ + r^۲ d\Omega^۲ \tag{۳۱۸}$$

که اکنون تنها دو تابع $\mu(r, t)$ و $v(r, t)$ به صورت مجهول می‌مانند که برای تعیین آنها باید از معادلات دینامیکی نسبیت عام استفاده کرد. به سهولت دیده می‌شود که این هر دو تابع باید مستقل از زمان باشند و یکی منفی دیگری است، به طوری که نتیجه نهایی می‌شود:

$$ds^۲ = -\left(۱ - \frac{۲M}{r}\right) dt^۲ + \left(۱ - \frac{۲M}{r}\right)^{-۱} dr^۲ + r^۲ d\Omega^۲ \tag{۳۱۹}$$

که در آن M یک ثابت است با بعد فیزیکی طول که آن را شعاع شوارتس‌شیلد می‌نامند:

$$\mathcal{Q} = \frac{۲MG}{c^۲} \tag{۳۲۰}$$

چند ویژگی مهم این متریک را ذکر می‌کنیم:

الف) متریک ایستا است. مستقل از اینکه جرم مرکزی ایستاده باشد یا نه!

ب) متریک فقط به ثابت M و جرم مرکزی وابسته است. مثلاً جرم ساختار کروی (ستاره یا کهکشان)، مستقل از ساختار درونی آن و مستقل از ساختار تانسور انرژی-تکانه‌ی جرم مرکزی است؛ حتی اگر جرم نوسان داشته باشد، در متریک خارج جسم تأثیری ندارد!

ج) ثابت M برابر جرم شئ مرکزی است. اثبات این گزاره بدیهی نیست، اما در فاصله زیاد از مرکز که میدان ضعیف است، استلال فصل اول نشان داد که این گزاره درست است.

د) متریک در بینهایت به متریک مینکوفسکی تبدیل می‌شود، یعنی در بینهایت مینکوفسکی است.

هـ)این متریک دو تکینگی دارد که باید درکش کرد. اول تکینگی در نقطه $r = ۲M$ یا $r = Q$. خواهیم دید این تکینگی مختصاتی است، یعنی اینکه به علت انتخاب نامناسب مختصات است و با انتخاب مختصات مناسب رفع

می‌شود. دوم تکینگی در نقطه $r = 0$، که تکینگی فیزیکی است، یعنی مستقل از مختصات وجود دارد و باید آن را درک کرد.
و) در حد میدان ضعیف، در فواصل دور از مرکز داریم

$$g_{00} = 1 + 2\phi$$

$$g_{11} = 1 - 2\phi$$

که در آن $\phi = \frac{GM}{rc^2}$ متناسب با پتانسیل گرانش نیوتونی است که نسبت به ۱ بسیار کوچک است.

۳.۵ متریک شوارتس‌شیلد در مختصات دیگر

به کار بردن مختصات دیگر به درک نتایج فیزیکی هر متریک کمک می‌کند.علاوه بر این برای شناخت تکینگی در مختصات شوارتس‌شیلد هم راه مناسبی است. در اینجا به چند نمونه اکتفا می‌کنیم.

۱.۳.۵ مختصات همسانگرد

می‌خواهیم مختصاتی انتخاب کنیم که ضریب متریک برای بخش فضایی یکدست باشد؛ به عبارتی دیگر سه جهت مختصاتی فضا همسانگرد باشد.

$$r = \left(1 + \frac{M}{2\bar{r}}\right)^2 \bar{r} \tag{۳۲۱}$$

$$ds^2 = \left(\frac{1 - \frac{M}{2\bar{r}}}{1 + \frac{M}{2\bar{r}}}\right)^2 dt^2 - \left(1 + \frac{M}{2\bar{r}}\right)^4 (d\bar{r}^2 + \bar{r}^2 d\Omega^2) \tag{۳۲۲}$$

شعاع شوارتس‌شیلد، یعنی $r = 2M$ در مختصات قبلی یا $\bar{r} = \frac{M}{2}$ در مختصات همسانگرد. در اینجا ضریب متریک (dr^2) دیگر تکین نیست!
متریک همسانگرد شوارتس‌شیلد این خاصیت را دارد که بخش فضایی آن (مقطع‌های t= ثابت) همدیس تخت است!

۲.۳.۵ مختصات ادینگتون-فینکلشتاین

این مختصات را ادینگتون در سال ۱۹۲۴/۱۳۰۳ و فینکلشتاین در سال ۱۹۵۸/۱۳۳۷ فرمول‌بندی کردند. ایده اصلی این مختصات، استفاده از ژئودزیک‌های نورگونه است؛ به عبارتی دیگر گویی به دستگاه مختصات همراه فوتون‌هایی می‌رویم که به سوی مرکزاند یا به دور از مرکز. همین ایده را می‌توان به ذرات جرم‌دار، یا ناظرهای در حال سقوط آزاد گسترش داد.
برای رسیدن به نتیجه، ابتدا می‌پردازیم به مطالعه ژئودزیک‌های نورگونه‌ی شعاعی در فضا زمان شوارتس‌شیلد. پس بنا به تعریف باید داشته باشیم

$$ds^2 = 0 \qquad \text{و} \qquad \vartheta = \phi = \text{ثابت} \tag{۳۲۳}$$

بنابراین از متریک شوارتس‌شیلد به دست می‌آید

$$dt = \pm\frac{dr}{1 - \frac{2m}{r}} \tag{۳۲۴}$$

انتگرال‌گیری از این معادله می‌دهد

$$t = \pm\left[r + 2m\log\left|\frac{r}{2m} - 1\right|\right] + \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \tag{۳۲۵}$$

که در آن v و u دو ثابت انتگرال‌گیری متناظر با علامت‌های $+$ و $-$ است. علامت مثبت منجر می‌شود به سیگنال‌های برون-رو و علامت منفی منجر به سیگنال‌های درون-رو می‌شود.
با تعریف مختصه جدید

$$r^* = r + ۲m \log \left| \frac{r}{۲m} - ۱ \right| \tag{۳۲۶}$$

به دست می‌آوریم

$$t = \pm r^* + \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \tag{۳۲۷}$$

به این ترتیب با این مختصه r^* جدید ژئودزیک‌های نوری خط‌های مستقیم می‌شوند! به‌طور مثال برای ژئودزیک‌های درون-رو داریم

$$t = -r^* + v \tag{۳۲۸}$$

ثابت انتگرال‌گیری v ژئودزیک‌های نورگونه‌ی درون-رو را از هم متمایز می‌کند. توجه کنیم این معادله در نقطه $r = ۲m$ تکینگی ندارد؛ بنابراین مسیر نور درون-رو در بیرون و داخل افق با همین معادله بیان می‌شود. این نتیجه، راه نشان می‌دهد که v را مختصه جدید تعریف کنیم:

$$dt = dv - \alpha^{-۱} dr \qquad \text{و} \qquad \alpha = \frac{r - ۲m}{r} \tag{۳۲۹}$$

با این تبدیل مختصات برای متریک به دست می‌آوریم

$$ds^۲ = \alpha dv^۲ - ۲dvdr - r^۲ d\Omega^۲ \tag{۳۳۰}$$

توجه کنیم که α به ازای $r = ۲m$ صفر می‌شود؛ یعنی خم زمان‌گونه به فضاگونه تبدیل می‌شود. اما، به علت وجود جمله ضربدری $dvdr$، صفر شدن α در نقطه $r = ۲m$ به معنی تکینگی در متریک نیست. به‌وضوح دیده می‌شود که معادله ژئودزیک نورگونه شعاعی می‌شود $v =$ ثابت!
متریک بالا در معادلات انیشتین صدق می‌کند، جز در نقطه $r = ۰$، که تکینگی دارد. به‌علاوه، چون با تبدیل مختصات از متریک شوارتس‌شیلد به دست آمده است، پس در تمام نقاط به جز $r = ۰$ و $r = ۲m$ در معادلات انیشتین صدق می‌کند. اما در نقطه $r = ۲m$ ضرایب متریک و مشتقات آن هیچ ناپیوستگی ندارند، از این جهت معادلات انیشتین در نقطه $r = ۲m$ نیز صادق است. پس اگرچه تبدیل مختصات در نقطه $r = ۲m$ صادق نیست، اما متریکِ نتیجه در تمام نقاط در معادلات انیشتین صدق می‌کند.
حال می‌پردازیم به شناخت بهتر این ژئودزیک‌ها. می‌بینیم که سیگنال‌های نوری به ازای ثابت $= v$ در نقطه $r = ۲m$ غیرعادی نیستند و بی‌هیچ مسئله‌ای از این نقطه می‌گذرند و پیوستگی خطوط با ثابت $= v$ در دو طرف افق حفظ می‌شود.
برای این سیگنال‌های درون-رو در خارج افق، یعنی $r > ۲m$، r کاهنده است و t افزاینده؛ زیرا

$$\frac{dt}{dr} = -\left(۱ + \frac{۲m}{r - ۲m}\right) < ۰ \qquad \text{به ازای} \qquad r > ۲m \tag{۳۳۱}$$

اما به ازای $r < ۲m$ داریم

$$\frac{dt}{dr} > ۰ \tag{۳۳۲}$$

یعنی داخل افق، هم r کاهنده است و هم t کاهنده! اما توجه داشته باشیم که داخل افق r مختصه‌ای زمان‌گونه است. به همین قیاس می‌توانیم ژئودزیک‌های نورگونه‌ی شعاعی برون-رو را برای انتخاب مختصه‌ای جدید انتخاب کنیم. برای این ژئودزیک‌های برون-رو داریم

$$\frac{dt}{dr} = +\left(۱ + \frac{۲m}{r - ۲m}\right) \tag{۳۳۳}$$

و از آنجا

$$t = r + ۲m \log\left|\frac{r}{۲m} - ۱\right| + u = r^* + u \tag{۳۳۴}$$

این ژئودزیک‌ها با پارامتر u مشخص می‌شوند. متریک متناظر می‌شود

$$ds^۲ = \alpha du^۲ + ۲dudr - r^۲(d\vartheta^۲ + \sin^۲\vartheta d\phi^۲) \tag{۳۳۵}$$

خطوط ثابت $u =$ نماینده سیگنال‌های نوری هستند از $r = ۰$ به $r = \infty$؛ پس حالا «زمان داخلی» r افزاینده است. می‌توان هم زمان هم مختصات ادینگتون-فینکلشتاین درون-رو و برون-رو را به کار برد. یعنی در مختصه جدید به جای t و r تعریف می‌کنیم

$$u = t - r^* \tag{۳۳۶}$$

$$v = t + r^* \tag{۳۳۷}$$

با این تبدیل مختصات، متریک شوارتس‌شیلد به این صورت نوشته می‌شود

$$ds^۲ = \left(۱ - \frac{۲m}{r}\right) dvdu + r^۲ d\Omega^۲$$

$$= \frac{۲me^{\frac{-r}{۲m}}}{r} e^{\frac{v-u}{۴m}} dvdu + r^۲ d\Omega^۲ \tag{۳۳۸}$$

این نتیجه به ما می‌گوید بهتر است مختصات دیگری انتخاب کنیم

$$U = -e^{\frac{-u}{۴m}} \tag{۳۳۹}$$

$$V = e^{\frac{v}{۴m}} \tag{۳۴۰}$$

تا متریک شوارتس‌شیلد سرانجام بشود

$$ds^۲ = -\frac{۳۲me^{\frac{-r}{۲m}}}{r} dUdV + r^۲ d\Omega^۲ \tag{۳۴۱}$$

می‌بینیم که این متریک در $r = ۲m$ هیچ تکینگی ندارد، در صورتی که تکینگی $r = ۰$ همچنان حفظ شده است.

۳.۳.۵ مختصات پینلِو- گولستراند

۴.۵ متریک شوارتس‌شیلد با جمله کیهان‌شناختی

در به دست آوردن متریک شوارتس‌شیلد (۱۳)، جمله کیهان‌شناختی Λ را در معادلات انیشتین برابر صفر گرفتیم. اکنون فرض می‌کنیم $\Lambda \neq 0$. در این صورت، با همان فرض تقارن کروی و صفر بودن تانسور انرژی، معادلات انیشتین می‌شود

$$G_{\mu\upsilon} = \Lambda g_{\mu\upsilon} \qquad (۳۴۲)$$

و یا

$$R_{\mu\upsilon} = \Lambda g_{\mu\upsilon} \qquad (۳۴۳)$$

اکنون اگر همان متریک شوارتس‌شیلد (۱۳) را در این معادلات بنشانیم، نتیجه می‌شود(تمرین):

$$e^{\mu} = 1 - \frac{2M}{r} - \frac{1}{3}\Lambda r^2 \qquad (۳۴۴)$$

و برای متریک به دست می‌آوریم

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2M}{r} - \frac{1}{3}\Lambda r^2\right) dt^2 - \left(1 - \frac{2M}{r} - \frac{1}{3}\Lambda r^2\right)^{-1} dr^2 - r^2 d\Omega^2 \qquad (۳۴۵)$$

در تقریب نیوتونی برای پتانسیل به دست می‌آید

$$\phi = -\frac{M}{r} - \frac{1}{6}\Lambda r^2 \qquad (۳۴۶)$$

جمله متناسب با Λ متناظر است با یک نیروی دافعه به اندازه $\frac{1}{3}\Lambda r$. بدیهی است که به ازای $\Lambda = 0$ متریک شوارتس‌شیلد به دست می‌آید. حد $M \to 0$ منجر می‌شود به

$$ds^2 = \left(1 - \frac{1}{3}\Lambda r^2\right) dt^2 - \left(\frac{1}{1 - \frac{1}{3}\Lambda r^2}\right) dr^2 - r^2 d\Omega^2 \qquad (۳۴۷)$$

که دوسیته آن را در سال ۱۹۱۷/۱۸۹۶ کشف کرد. برای $\Lambda > 0$ یک تکینگی شبیه به تکینگی شوارتس‌شیلد وجود دارد:

$$r = \sqrt{\frac{3}{\Lambda}} \qquad (۳۴۸)$$

این تکینگی هم مختصاتی است. این متریک ایستا است، حول یک نقطه تقارن کروی دارد و حول همین نقطه منظم است. به سهولت می‌توان نشان داد که این متریکِ یک شبه‌کره است با انحنای $\frac{-1}{3}\Lambda$. گیریم

$$\frac{3}{\Lambda} = a^2 > 0 \qquad (a > 0) \qquad (۳۴۹)$$

فضای مینکوفسکی ۵-بعدی زیر را در نظر می‌گیریم

$$ds^2 = dT^2 - (dX^2 + dY^2 + dW^2 + dZ^2) \qquad (۳۵۰)$$

فوق سطح

$$X^۲ + Y^۲ + Z^۲ + W^۲ - T^۲ = a^۲ \tag{۳۵۱}$$

که فضایی است با انحنای ثابت $K = \frac{-۱}{a^۲}$. متریک القا شده روی این فوق سطح همان متریک دوسیته (۴۱) است. کافی است تبدیل زیر را در معادلات بنشانیم:

$$X = r\sin\vartheta\cos\phi$$

$$Y = r\sin\vartheta\sin\phi$$

$$Z = r\cos\vartheta \tag{۳۵۲}$$

$$\begin{cases} W = a\left(۱ - \frac{r^۲}{a^۲}\right)^{\frac{۱}{۲}}\cosh\frac{t}{a} \\ T = a\left(۱ - \frac{r^۲}{a^۲}\right)^{\frac{۱}{۲}}\sinh\frac{t}{a} \end{cases} \qquad r < a \tag{۳۵۳}$$

و یا

$$\begin{cases} W = a\left(\frac{r^۲}{a^۲} - ۱\right)^{\frac{۱}{۲}}\sinh\frac{t}{a} \\ T = a\left(\frac{r^۲}{a^۲} - ۱\right)^{\frac{۱}{۲}}\cosh\frac{t}{a} \end{cases} \qquad r > a \tag{۳۵۴}$$

در این نگاشت همواره $W + T \geq ۰$. یعنی متریک دوسیته روی نیمی از شبه‌کره $S_۴^-$ نگاشته شده است. برای نگاشت کامل باید یک کپی دیگر از متریک برداشت؛ که از طریق انتخاب علامت $-$ در جذرهای بالا انجام می‌شود.
متریک دوسیته به شکل‌های گوناگون در نوشتارها آمده و بحث شده است.
اگر روی شبه‌کره (۴۵) مختصات $(t, \chi, \vartheta, \phi)$ را به صورت زیر تعریف کنیم:

$$T = \sqrt{\frac{۳}{\Lambda}}\sinh\left[\sqrt{\frac{\Lambda}{۳}}\cdot t\right] + \frac{۱}{۲}\sqrt{\frac{\Lambda}{۳}}e^{\sqrt{\frac{\Lambda}{۳}}\cdot t}a_.^۲x^۲ \tag{۳۵۵}$$

$$W = \sqrt{\frac{۳}{\Lambda}}\cosh\left[\sqrt{\frac{\Lambda}{۳}}\cdot t\right] - \frac{۱}{۲}\sqrt{\frac{\Lambda}{۳}}e^{\sqrt{\frac{\Lambda}{۳}}\cdot t}a_.^۲x^۲ \tag{۳۵۶}$$

$$x = a_.e^{\sqrt{\frac{\Lambda}{۳}}\cdot t}\chi\sin\vartheta\cos\phi \tag{۳۵۷}$$

$$\mathcal{Y} = a_.e^{\sqrt{\frac{\Lambda}{۳}}\cdot t}\chi\sin\vartheta\sin\phi \tag{۳۵۸}$$

$$\mathcal{Z} = a_.e^{\sqrt{\frac{\Lambda}{۳}}\cdot t}\chi\cos\vartheta \tag{۳۵۹}$$

می‌توان نشان داد (تمرین) که متریک دوسیته به صورت زیر نوشته می‌شود

$$ds^۲ = dt^۲ - a_.^۲e^{۲\sqrt{\frac{\Lambda}{۳}}\cdot t}\left[d\chi^۲ + \chi^۲(d\vartheta^۲ + \sin\vartheta^۲d\phi^۲)\right] \tag{۳۶۰}$$

که بیانگر مدلی از عالم همگن (بدون ماده) است که به طور نمایی منبسط می‌شود.
همین متریک، در مختصات دکارتی، معمولاً به صورت زیر نوشته می‌شود

$$ds^۲ = dt^۲ - e^{۲H\cdot t}\left[dx^۲ + dy^۲ + dz^۲\right] \tag{۳۶۱}$$

که در آن $H = \sqrt{\frac{۳}{\Lambda}}$ ثابت هابل فضای دوسیته است.
مسئله: بردارهای کیلینگ متریک دوسیته را پیدا کنید. این متریک ده تقارن دارد متناظر با سه تبدیل فضایی، سه دوران فضایی، سه خیز لورنتس و یک انتقال در زمان.

۵.۵ پتانسیل مؤثر برای حرکت ذره در میدان شوارتس‌شیلد

برای محاسبه ژئودزیک‌ها مناسب‌تر این است که از اصل وردش استفاده نماییم

$$\delta \int L^{۲} d\lambda = ۰$$

$$L^{۲} = e^{\upsilon}\dot{t}^{۲} - e^{\lambda}\dot{t}^{۲} - e^{\mu}r^{۲}\dot{\vartheta}^{۲} - e^{\mu}r^{۲}\sin^{۲}\vartheta\dot{\phi}^{۲} \tag{۳۶۲}$$

$\frac{d}{d\lambda} = ''.''$ و λ پارامتر روی ژئودزیک است!
t و ϕ متغیرهای چرخه‌ای‌اند، یعنی در $L^{۲}$ پیش نمی‌آیند، پس

$$-\frac{\partial L^{۲}}{\partial\dot{\phi}} = ۲e^{\mu}r^{۲}sin^{۲}\vartheta\dot{\phi} = \text{ثابت} =: ۲l \tag{۳۶۳}$$

$$\frac{\partial L^{۲}}{\partial\dot{t}} = ۲e^{\upsilon}\dot{t} = \text{ثابت} =: ۲F \tag{۳۶۴}$$

معادله حرکت ϑ:

$$۲e^{\mu}r^{۲}\sin\vartheta\cos\vartheta\dot{\phi}^{۲} = ۲\frac{d}{d\lambda}(e^{\mu}r^{۲}\dot{\vartheta}) \tag{۳۶۵}$$

حالا مختصات را طوری فرض می کنیم که ژئودزیک مورد نظر این شرایط اولیه را داشته باشد:

$$\vartheta = \frac{\pi}{۲} \qquad\qquad \dot{\vartheta} = ۰ \tag{۳۶۶}$$

از معادله حرکت نتیجه می‌شود که مسیر در صفحه $\vartheta = \frac{\pi}{۲}$ می‌ماند. پس معادله حرکت ϕ می دهد

$$e^{\mu}r^{۲}\dot{\phi} = l$$

<u>معادله حرکت مختصه شعاعی:</u> از این خاصیت استفاده می‌کنیم که $L^{۲} =$ ثابت، یک ثابت حرکت است (=صفر برای مسیرهای نورگونه، =۱ برای مسیرهای زمان‌گونه. در این صورت $\lambda = s =$ ویژه زمان.). پس معادلات زیر را برای به دست آوردن کامل ژئودزیک‌ها باید حل کنیم:

$$e^{\mu}r^{۲}\dot{\phi} = l \tag{۳۶۷}$$

$$e^{\upsilon}\dot{t} = F \tag{۳۶۸}$$

$$e^{\upsilon}\dot{t}^{۲} - e^{\lambda}\dot{r}^{۲} - e^{\mu}r^{۲}\dot{\phi}^{۲} = k \qquad (k = L^{۲} = \text{۱یا۰}) \tag{۳۶۹}$$

مورد شوارتس‌شیلد

$$\begin{cases} e^{\upsilon} = ۱ - \frac{۲M}{r}^{-\lambda} \\ e^{\mu} = ۱ \end{cases} \tag{۳۷۰}$$

پس معادلات بالا می‌شوند

$$\begin{cases} r^{۲}\dot{\phi} = l \\ \dot{t}\left(۱ - \frac{۲M}{r}\right) = F \\ \frac{\dot{r}^{۲}}{۲} - \frac{Mk}{r} + \frac{l^{۲}}{۲r^{۲}} - \frac{Ml^{۲}}{r^{۳}} = \frac{F^{۲}-k}{۲} \end{cases} \tag{۳۷۱}$$

در مورد $k = ۱$ معادله آخر به شکل قانون پایستگی انرژی برای پتانسیل زیر است

$$v_{\text{مؤثر}} = -\frac{M}{r} + \frac{l^۲}{۲r^۲} - \frac{Ml^۲}{r^۳} \quad (۳۷۲)$$

جرم ذره، برابر یک فرض‌شده است. انرژی برابر است با

$$E = \frac{F^۲ - ۱}{۲} \quad (۳۷۳)$$

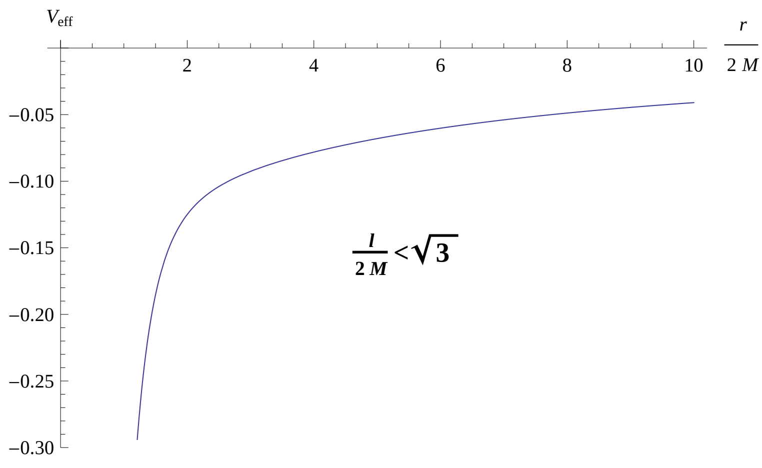
دوجمله اول، همان جمله‌های کلاسیک هستند. جمله سوم از نسبیت عام می‌آید: $\frac{-Ml^۲}{r^۳}$.
قانون پایستگی تکانه زاویه‌ای ($r^۲\dot{\phi} = l$) همان قانون کلاسیک نیوتونی است. تنها تفاوت در مشتق‌گیری نسبت به زمان ظاهر می‌شود که باید برای آن ویژه زمان منظور کرد.
مسیر نور: $k = ۰$؛ پتانسیل مؤثر می‌شود

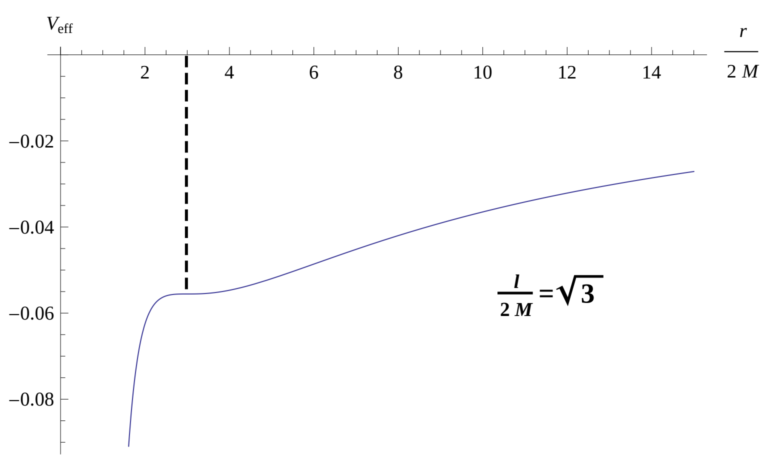
$$v_{\text{مؤثر}} = \frac{l^۲}{۲r^۲} - \frac{Ml^۲}{r^۳} \quad (۳۷۴)$$

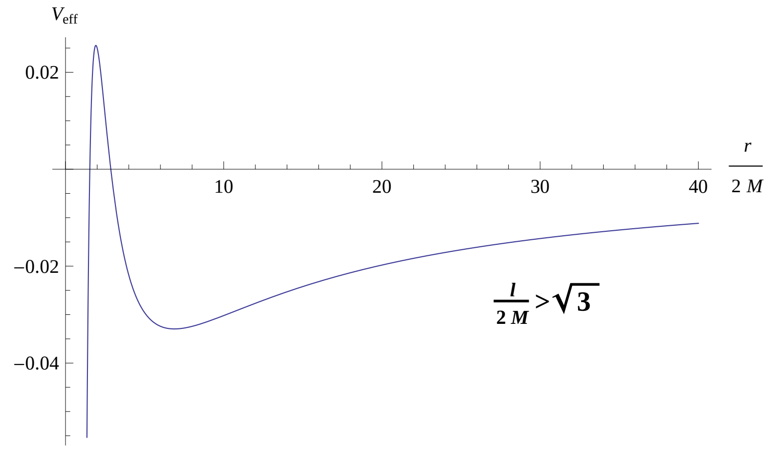
توجه: فوتون‌هایی که مسیرشان شعاعی است ($l = ۰$)، پتانسیل مؤثرشان صفر است!

بحث نموداری: نمودار پتانسیل مؤثر بر حسب شعاع (بر حسب $\frac{r}{۲M}$):

مورد $k = ۱$

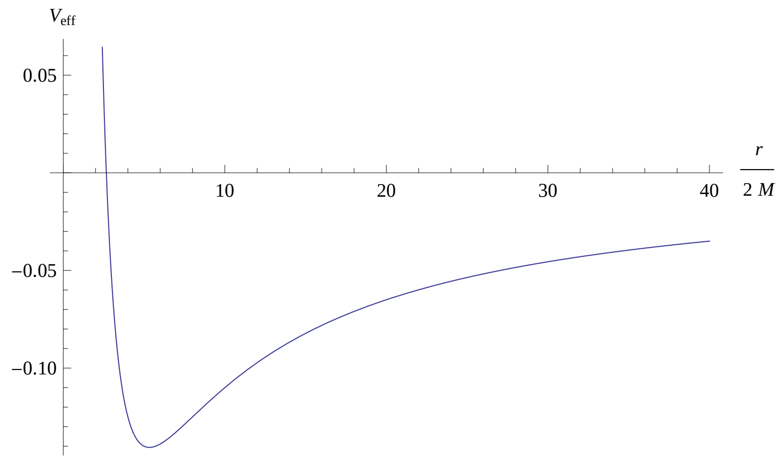




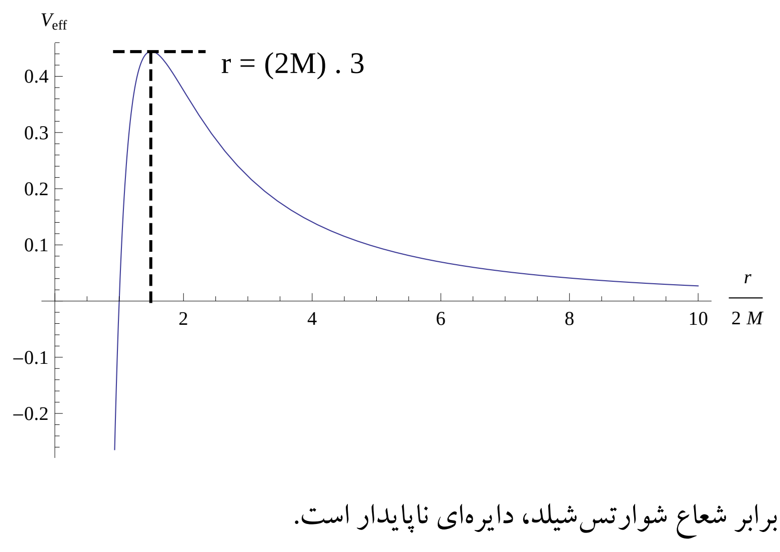


از مانع گشتاور زاویه‌ای می‌توان همواره با افزایش انرژی عبور کرد.

پتانسیل مؤثر نیوتونی: $l \neq ۰$



پتانسیل مؤثر برای مسیرهای نورگونه ($k = ۰$)



مسیر به ازای r = ۳ برابر شعاع شوارتس‌شیلد، دایره‌ای ناپایدار است.

توجه: شعاع $r = 2M$ در هیچ یک از این موارد مانعی را نشان نمی‌دهد. تنها رابطه‌ی زمان و ویژه زمان است که در آن بینهایت وارد می‌شود.

پرسش‌ها

۱. متریک ساده‌ای با جمله ضربدری $dtdx$ درنظر بگیرید. سرعت نور را در یک مسیر و نیز در مسیر مخالف آن حساب کنید. اختلاف سرعت نور در دو مسیر را توجیه کنید!

۲. متریک شوارتس‌شیلد با این فرض به‌دست می‌آید که تانسور انرژی تکانه صفر است. چطور این متریک را می‌توان برای یک ستاره به‌کار برد که داخل کهکشان است، یا برای یک کهکشان که داخل کیهان است؟

۳. گیریم جسمی با تقارن کروی نوسان کند. چگونه توجیه می‌کنید که متریک خارج جسم ایستا است؟ اگر جسم تابش کند چطور؟

۴. مثالی دارید برای این‌که تانسور انرژی-تکانه، با تانسور انیشتین، داشته باشد که متریک نداشته باشد؟ برعکس آن چطور؟ اصلاً این را بجا می‌دانید؟

۵. به محاسبات مربوط به فضازمان شوارتس‌شیلد نگاه کنید! آیا بدیهی است که متریک در بینهایت تخت است؟ نکند ثابتی انتگرالی باشد که صحت این گزاره را نقض کند؟

۶. به هنگام محاسبه ژئودزیک‌ها در متریک شوارتس‌شیلد به پتانسیل مؤثر برمی‌خوریم. این پتانسیل به‌ازای $l = ۰$ (تکانه زاویه‌ای صفر) و $k = ۰$ (نورگونه) صفر می‌شود، یعنی مسیر آزاد مستقیم است. توجیه کنید!

۷.رابطه میان مؤلفه‌های یک تانسور (مثلاً G^{μ}_{ν}) برای متریک قطری در پایه‌های هولوئوم و ناهولوئوم چگونه است؟

۸. جمله متناسب با Λ در متریک کوئلر (شوارتس‌شیلد با جمله ثابت کیهان‌شناختی) متناظر است با یک نیروی دافعه به اندازه $-\Lambda r$ توجیه کنید!

۹. متریک دوسیته را می‌توان در یک فضای تخت پنج‌بعدی غوطه‌ور کرد. آیا این امکان برای فضای شوارتس‌شیلد هم موجود است؟ آیا می‌توان هر فضا-زمان چهاربعدی را در یک فضای تخت شبه-اقلیدسی با بعد دلخواه غوطه‌ور کرد؟ بعد فضای غوطه‌وری را در حالت کلی می‌دانید؟ همین سؤوال را برای گرانش و متریک‌های دوبعدی جواب دهید!

۱۰. بردارهای کیلینگ متریک شوارتس‌شیلد کدام‌اند؟ نام ببرید!

۱۱. متریک دوسیته را می‌توان متریکی القاء شده روی یک شبه کره در یک فضا-زمان پنج بعدی دانست. چه نقش فیزیکی، مرتبط با واقعیت می‌توانید به این کره بدهید؟ همین متریک در مختصات دیگر به‌صورت مدلی انبساطی، با انبساط نمایی برای عالم، نوشته می‌شود. چطور چنین چیزی ممکن است؟

۱۲. متریک دوسیته چندبردار کیلینگ دارد؟ اگر این متریک ایستا است، مانند شوارتس‌شیلد، پس یک بردار کیلینگ آن را می‌توان به‌صورت $\frac{\partial}{\partial t}$ نوشت. چه بر سر این بردار می‌آید وقتی فضا-زمان دوسیته در مختصات رابرتسون-واکر، یعنی انبساطی، نوشته می‌شود؟

تمرین‌ها

۱. با استفاده از تمرین ۲۴ فصل ۳، معادله انیشتین را برای تقارن کروی با فرض $T_{\mu\nu}=0$ حل کنید.
۲. نرده‌ای کرچمن $(Kretschmann)$ تعریف می‌شود:

$$\mathcal{K}:=R^{\mu\nu\rho\sigma}R_{\mu\nu\rho\sigma}$$

این نرده‌ای را برای متریک شوارتس‌شیلد حساب کنید. آیا این نرده‌ای تکینگی دارد؟ (پاسخ: $\frac{12G^2M^2}{r^6}$)
۳. معادلات انیشتین را با تقارن کروی در ۱+۱بعد حل کنید. نتیجه را بحث کنید!
۴. متریک شوارتس‌شیلد در مختصات همسانگرد به این صورت است:

$$ds^2=\left(\frac{1-\frac{M}{2\bar{r}}}{1+\frac{M}{2\bar{r}}}\right)^2dt^2-\left(1+\frac{M}{2\bar{r}}\right)^4d\bar{x}^2$$

در صفحه $\theta=\frac{\pi}{2}$ دو دایره به شعاع‌های $\bar{r}=\frac{M}{2}$ و $\bar{r}=\bar{R}$ در نظر بگیرید. مساحت این این دو دایره را حساب کنید و نشان دهید برابر است با

$$S=\pi(\bar{R}+M)^2-\frac{9}{4}\pi M^2+\frac{M^2}{4}\ln\frac{2\bar{R}}{M}$$

با استفاده از رابه میان این مختصات و مختصات کروی، یعنی

$$r=\left(1+\frac{M}{2\bar{r}}\right)^2\bar{r}$$

مساحت بالا را در مختصات شوارتس‌شیلد (کروی) بنویسید و بگیرید:

$$r=R\gg M$$

$$R=2m+\epsilon \qquad , \qquad \epsilon\ll m$$

پاسخ‌ها:

$$S=\pi R^2+2\pi M^2 \qquad \text{برای} \qquad R\gg M$$

$$S=8\pi M^2\sqrt{2\epsilon} \qquad \text{برای} \qquad R=2m+\epsilon$$

۵. متریک شوارتس‌شیلد ۴ بردار کیلینگ دارد. برای هر ذره آزاد می‌توان نشان داد به‌ازای هر بردار کیلینگ k^μ یک ثابت حرکت وجود دارد:

$$k_\mu\frac{dx^\mu}{d\lambda}=\text{ثابت}$$

بردارهای کیلینگ متریک شوارتس‌شیلد را می‌شناسیم. مؤلفه‌های آن‌ها را در مختصات شوارتس‌شیلد بنویسید و ثابت حرکت متناظر با هر کدام را به‌دست آورید و پیرامون آن بحث کنید.
۶. داخل یک جسم با تقارن کروی استوانه باریکی در نظر بگیرید که از مرکز به سطح به طور شعاعی ادامه دارد و پر از تابش است. این استوانه در تعادل ترمودینامیکی بابقیه جسم است و نقش یک دماسنج را بازی می‌کند: دماسانج فوتونی!
معادله تعادل هیدروستاتیکی داخل ستاره را بنویسید و معادله حالت تابش را به‌کار بگیرید تا نشان دهید شرط تعادل ثابت بودن دما نیست، بلکه باید

$$T\sqrt{g_{..}}=\text{ثابت}$$

باشد. بحث کنید!
۷. نشان دهید در مختصات شوارتس‌شیلد این متریک یک بردار کیلینگ به صورت $\frac{\partial}{\partial t}$ دارد، که زمان‌گونه است در

ناحیه‌ای که $r > 2m$. برای ناحیه $r < 2m$ تعبیری دارید؟
۸. متریک به شکل کلی زیر را در نظر بگیرید

$$ds^2 = \phi dt^2 - \phi^{-1} dr^2 - r^2 d\Omega^2$$

Φ تابع r است. الف) نشان دهید مؤلفه‌های تانسور انیشتین می‌شوند:

$$G^0_0 = -G^1_1 = \frac{(\phi' - 1)}{r^2} \qquad , \qquad G^2_2 = G^3_3 = \frac{\psi''}{2r}$$

بقیه مؤلفه‌ها صفرند. در اینجا $\psi(r) = r.\phi(r)$.
ب) اگر این متریک جواب معادله انیشتن باشد، نشان دهید شرط زیر باید برای تانسور انرژی $T_{\mu\nu} =$ قطر(ρ, p_1, p_2, p_3) برقرار باشد:

$$\rho + p = 0 \qquad , \qquad p_2 = p_3 \qquad , \qquad p_1' = \frac{2}{r}(p_2 - p_1)$$

ج) گیریم $p_2 = \gamma p_1$ باشد، با γی ثابت! نشان دهید:

$$\rho = -p = -\frac{p_2}{\gamma} = -\frac{p_3}{\gamma} = q.r^{2(\gamma-1)}$$

$$\phi = 1 - \frac{kr}{2\gamma + 1} r^{2\gamma} - \frac{2M}{r}$$

که در آن q دو ثابت انتگرال‌گیری‌اند. حالت‌های مختلف این جواب را به صورت زیر بررسی کنید:
۱) $M = 0, \gamma = 1$، نشان دهید جواب دوسیته به‌دست می‌آید، q در اینجا چه نقشی دارد؟
۲) $q \neq 0, M \neq 0, \gamma = 1$، در این جواب شوارتس‌شیلد –دوسیته به‌دست می‌آید.
۳) $q = \frac{e^2}{r}, M \neq 0, \gamma = -1$، در این حالت تانسور انرژی را بنویسید و نشان دهید متریک رایستر–نورداسترم به‌دست می‌آید، که به‌صورت زیر است:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{ke^2}{r^2}\right) dt^2 - \left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{ke^2}{r^2}\right)^{-1} dr^2 - r^2 d\Omega^2$$

۴) نشان دهید تانسور انرژی تکانه متریک رایستر –نورداستروم از نوع تانسور انرژی میدان الکترومغنایس است.

$$T_{\mu\nu} = F_{\mu\rho} F^{\rho}_{\nu} - \frac{1}{4} g_{\mu\nu} F_{\rho\sigma} F^{\rho\sigma}$$

مؤلفه‌های تانسور میدان الکترومغناطیس را حساب کنید. رفتار شدت میداان الکتریکی را تعیین کنید.
۵) متریک رایستر–نورداستروم را می‌توان از متریک شوارتس‌شیلد با تبدیل

$$M \to M - \frac{ke^2}{2r}$$

به‌دست آورد. این تبدیل جرم، با «بازبهنجارش جرم» را بحث کنید.
۶) مؤلفه‌های تانسور انحنا را به‌دست آورید و در مورد تکینگی‌های متریک بحث کنید.
۷) به ازای $e^2 > M^2$ مؤلفه $g_{..}$ همواره مثبت است و مختصه r همواره فضاگونه، مگر در تکینگی $r = 0$. پیرامون این موضوع بحث کنید که تکینی $r = 0$ «عریان» است و هیچ افقی دور آن را نگرفته است.
۹. نشان دهید برای ذره‌ای که به‌طور شعاعی در متریک شوارتس‌شیلد سقوط آزاد می‌کند میان r و ویژه زمان s رابطه زیر برقرار است:

$$s = \sqrt{\frac{rR(R-r)}{2m}} + \sqrt{\frac{R^3}{2m}} \arccos\left(\frac{2r}{R} - 1\right)$$

که در آن R ماکزیموم r است به ازای $s = ۰$!

۱۰. ثابت کیهانی را مخالف صفر بگیرید: $\Lambda \neq ۰$. با استفاده از تانسور انیشتین برای متریک شوارتس‌شیلد نشان دهید متریک زیر جواب معادله‌های انیشتین است:

$$ds^۲ = \left(۱ - \frac{۲m}{r} - \frac{\Lambda}{۳}r^۲\right) dt^۲ - \left(۱ - \frac{۲m}{r} - \frac{\Lambda}{۳}r^۲\right)^{-۱} dr^۲ - r^۲ d\Omega^۲$$

به ازای $m = ۰$ جواب دوسیته به‌دست می‌آید. از طریق تانسور انرژی این جواب را توجیه کنید!

دانشگاه صنعتی شریف
گرانش و نسبیت عام-۱
شماره درس ۲۴۱۴۸-۱

فصل ٦: آزمون‌های نسبیت عام

رضا منصوری

ویراست ۰.۱

مرداد ۱۳۹۲

۱.٦ مدار سیارات . انتقال حضیض

$$ds^۲ = e^{\upsilon}dt^۲ - e^{\lambda}dr^۲ - e^{\mu}r^۲d\vartheta^۲ - e^{\mu}r^۲\sin^۲\vartheta d\phi^۲ \tag{۳۷۵}$$

معادله‌های ژئودزیک:

$$\begin{cases} e^{\mu}r^۲\dot{\phi} = l & ;\dot{\phi} = e^{-\mu}r^{-۲}l \\ e^{\upsilon}\dot{t} = F & ;\dot{t} = e^{-\upsilon}F \\ e^{\upsilon}\dot{t}^۲ - e^{\lambda}\dot{r}^۲ - e^{\mu}r^۲\dot{\phi}^۲ = k & ;\dot{r} = \frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\phi}\dot{\phi} \end{cases} \tag{۳۷۶}$$

با نشاندن مقادیر بالا، معادله زیر برای مسیر به دست می‌آید:

$$\left(\frac{dr}{d\phi}\right)^۲ = e^{۲\mu-\lambda-\upsilon}\frac{F^۲r^۴}{l^۲} - ke^{۲\mu-\lambda}\frac{r^۴}{l^۲} - e^{\mu-\lambda}r^۲ \tag{۳۷۷}$$

متغیر شعاعی جدیدی تعریف می‌کنیم:

$$u = \frac{۱}{r} \qquad : \qquad \left(\frac{du}{d\phi}\right)^۲ = e^{۲\mu-\lambda-\upsilon}F^۲l^{-۲} - ke^{۲\mu-\lambda}l^{-۲} - e^{\mu-\lambda}u^۲ =: W^۲(u) \tag{۳۷۸}$$

$$\Rightarrow \phi = \int \frac{du}{W(u)} \tag{۳۷۹}$$

اگر مختصات شوارتس شیلد را به کار ببریم، این انتگرال یک انتگرال بیضوی خواهد شد. مناسب‌تر این است که مختصات همسانگرد را به کار ببریم:

$$\begin{aligned} &\mu = \lambda \\ &e^{\upsilon} = \left(\frac{۱-\frac{M}{۲}u}{۱+\frac{M}{۲}u}\right)^۲ \qquad ، \qquad e^{\mu} = \left(۱ + \frac{M}{۲}u\right)^۴ \end{aligned} \tag{۳۸۰}$$

در این صورت برای تابع W به ازای $k = ۱$ داریم:

$$W^۲(u) = e^{\mu}\left(e^{-\upsilon}F^۲ - ۱\right)l^{-۲} - u^۲ \tag{۳۸۱}$$

مسیر کپلری:

$$\frac{d^۲u}{d\phi^۲} + u = \frac{M}{l^۲} \tag{۳۸۲}$$

$$\begin{aligned} u &= \left(۱ + \sqrt{۱ + \frac{۲El^۲}{M^۲}}cos\vartheta\right) \\ &= (۱ + \epsilon\cos\vartheta) \end{aligned} \tag{۳۸۳}$$

$$E = -\frac{M}{۲a} \qquad ، \qquad l = \sqrt{Ma\left(۱ - \epsilon^۲\right)} \qquad ، \qquad \epsilon = \sqrt{۱ + \frac{۲El^۲}{M^۲}}$$

$$\frac{l^۲}{M} = a\left(۱ - \epsilon^۲\right) \qquad ، \qquad a = -\frac{M}{۲E}$$

مسیر انیشتینی:

$$\frac{d^{2}u}{d\phi^{2}}+u=\frac{M}{l^{2}}+\underline{\underline{3Mu^{2}}} \quad (384)$$

جمله $3Mu^{2}$، جمله نسبیتی است.

توابع e^{v} و e^{μ} را بسط می‌دهیم:

$$\begin{aligned} e^{-v}&=1+\alpha_{1}Mu+\alpha_{2}M^{2}u^{2}+\dots\\ e^{\mu}&=1+\beta_{1}Mu+\beta_{2}M^{2}u^{2}+\dots \end{aligned} \quad (385)$$

که در آن

$$\begin{cases} \alpha_{1}=2 \quad , \quad \alpha_{2}=2\\ \beta_{1}=2 \quad , \quad \beta_{2}=6 \end{cases} \quad (386)$$

برای F^{2} نیز می‌نشانیم:

$$F^{2}=1+2E=1-\frac{M}{a} \quad (387)$$

نیم‌محور بزرگ بیضی $\dots a$

برای تابع W به دست می‌آید:

الف) تقریب نیوتونی:

$$W^{2}(u)=-\frac{M}{al^{2}}+\alpha_{1}\frac{M}{l^{2}}u-u^{2} \quad (388)$$

ب) تقریب پس‌نیوتونی:

$$W^{2}(u)=A+Bu-Cu^{2} \quad (389)$$

$$\begin{aligned} A&=-\frac{M}{al^{2}}\\ B&=M\left[\alpha_{1}-(\alpha_{1}+\beta_{1})\frac{M}{a}\right]l^{-2}\\ C&=1-M^{2}(\alpha_{2}+\beta_{1}\alpha_{1})\,l^{-2} \end{aligned}$$

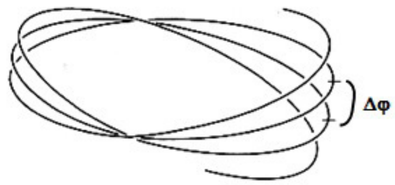
و از آنجا معادله مسیر:

$$\phi=\int\frac{du}{\sqrt{A+Bu-Cu^{2}}}=\frac{1}{\sqrt{C}}\arcsin\frac{B-2Cu}{\sqrt{B^{2}+4AC}} \quad (390)$$

به ازای $C=1$ مسیر بسته است (مثلاً بیضی؛ در هر حال مسیر، مقطع مخروطی خواهد بود.)

تغییر ϕ میان دو گذر از حضیض(ماکسیمم $u=\frac{1}{r}$):

$$\Delta\phi = \frac{2\pi}{\sqrt{C}} - 2\pi \tag{۳۹۱}$$



$$\Delta\phi = \frac{\pi M^2}{l^2}\left(\alpha_2 + \beta_1\alpha_1\right) \tag{۳۹۲}$$

$$\frac{l^2}{M} = a\left(1-\epsilon^2\right) \qquad \epsilon \ldots \text{خروج از مدار کپلری} \tag{۳۹۳}$$

$$\Delta\phi = \frac{\pi M\left(\alpha_2 + \beta_1\alpha_1\right)}{a\left(1-\epsilon^2\right)} \tag{۳۹۴}$$

مورد شوارتس‌شیلد:

$$\Delta\phi = \frac{4\pi M}{a\left(1-\epsilon^2\right)} \qquad \sim \frac{\mathcal{R}}{R} \tag{۳۹۵}$$

توجه: α_2 در $\Delta\phi$ پیش می‌آید. یعنی انتقال حضیض، آزمونی برای جملات غیرخطی است (تقریب پس‌نیوتونی).

	نظریه	**رصد**
عطارد	۴۳/۰۳	۴۳/۱۱ ± ۰/۴۵
زهره	۸/۶	۸/۴ ± ۴/۸
زمین	۳/۸	۵/۰ ± ۱/۲
ایکاروس	۱۰/۳	۹/۸ ± ۰/۸

۲.٦ انحراف نور

برای متریک داریم:

$$ds^2 = e^{\mu}dt^2 - e^{\upsilon}dr^2 - e^{\lambda}\left(r^2 d\vartheta^2 + r^2\sin^2\vartheta d\phi^2\right) \tag{۳۹۶}$$

برای معادله مسیر به دست می‌آید:

$$\left(\frac{du}{d\phi}\right)^2 = e^{2\lambda-\mu-\upsilon}F^2 l^{-2} - k e^{2\lambda-\upsilon} l^{-2} - e^{\lambda-\upsilon}u^2 =: W^2(u) \tag{۳۹۷}$$

برای مسیر نور می‌نشانیم $k=0$:

$$W^2(u) = e^{2\lambda-\mu-\upsilon}F^2 l^{-2} - e^{\lambda-\upsilon}u^2 \tag{۳۹۸}$$

در مختصات همسانگرد $\upsilon = \lambda$:

$$W^{2}(u) = e^{\upsilon-\mu}F^{2}l^{-2} - u^{2} \tag{399}$$

بسط ضرایب متریک:

$$\begin{aligned} e^{-\mu} &= 1 + \alpha_1 Mu + \alpha_2 M^2u^2 + \dots \\ e^{\upsilon} &= 1 + \beta_1 Mu + \beta_2 M^2u^2 + \dots \end{aligned} \tag{400}$$

تا تقریب M^2 داریم:

$$\begin{aligned} W^{2}(u) &= (1+\beta_1 Mu)(1+\alpha_1 Mu)\tfrac{F^2}{l^2} - u^2 \\ &= \tfrac{F^2}{C^2} + (\alpha_1+\beta_1)Mu\tfrac{F^2}{l^2} - u^2 =: A + Bu - Cu^2 \end{aligned} \tag{401}$$

پس

$$A = \frac{F^2}{l^2}$$

$$B = (\alpha_1+\beta_1)M\frac{F^2}{l^2}$$

$$C = 1$$

اما انتگرال‌گیری از معادله مسیر می‌دهد:

$$\pi + \phi = \int \frac{du}{\sqrt{A+Bu-Cu^2}} = \frac{1}{\sqrt{C}}\arcsin\frac{B-2Cu}{\sqrt{B^2+4AC}} \tag{402}$$

اما

$$B^2 \sim M^2 = 0 \qquad ، \qquad C = 1$$

پس

$$sin(\phi+\pi) = \frac{B-2u}{2\sqrt{A}} \tag{403}$$

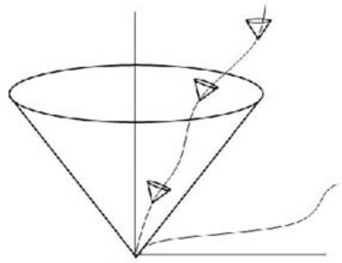
$$\rightarrow u = \frac{1}{r} = \frac{1}{2}(\alpha_1+\beta_1)M\frac{F^2}{l^2} - \frac{F}{l}\sin(\phi+\pi) \tag{404}$$

در تقریب صفرم داریم:

$$\alpha_1 = 0 \qquad ، \qquad \beta_1 = 0$$

$$\frac{1}{r} = \frac{F}{l}\sin(\phi+\pi) \qquad \Rightarrow \qquad \frac{F}{l} = r\sin(\phi+\pi) \tag{405}$$

با تعیین مختصات مطابق شکل زیر، $r\sin\phi$ برابر مختصه y است. پس $\frac{l}{F}$، حداقل فاصله از خورشید است!



شکل ۱: جهان‌خط ذره‌ی شتاب‌دار و مخروط نور

در واقع در جواب بالا (در تقریب اول) هم می‌توان نشان داد که حداقل فاصله شعاع نور از خورشید (مرکز مختصات) برابر $\frac{l}{F}$ است. پس می‌توان $\frac{l}{F}$ را برابر شعاع خورشید گرفت! (تعیین ثابت‌های l و F در مورد مسیر نور!)

در تقریب اول معادله بالا، انحراف نور از اختلاف مقادیر ϕ به ازای $r \to \infty$ یا $u = ۰$ به دست می‌آید:

$$u = ۰ = \frac{۱}{۲}(\alpha_۱ + \beta_۱) M \frac{F^۲}{l^۲} + \frac{F}{l} \sin\phi \tag{۴۰۶}$$

$$-\sin(\phi + \pi) = -\frac{۱}{۲}(\alpha_۱ + \beta_۱) M \frac{F}{l} = -\frac{۱}{۲}(\alpha_۱ + \beta_۱) \frac{M}{R} \qquad R = \frac{l}{F} \tag{۴۰۷}$$

$$\sin\phi = -\frac{۱}{۲}(\alpha_۱ + \beta_۱) \frac{M}{R} \tag{۴۰۸}$$

$$\left.\begin{array}{l} \delta_۱ = -\phi_۱ \propto +\frac{۱}{۲}(\alpha_۱ + \beta_۱) \frac{M}{R} \\ \delta_۲ = \phi_۲ - \pi \propto +\frac{۱}{۲}(\alpha_۱ + \beta_۱) \frac{M}{R} \end{array}\right\} \qquad \delta = \delta_۱ + \delta_۲ = ۲\delta_۱ = (\alpha_۱ + \beta_۱) \frac{M}{R} \tag{۴۰۹}$$

$$\delta = \frac{(\alpha_۱ + \beta_۱) M}{R} = (\alpha_۱ + \beta_۱) \frac{M}{R} \tag{۴۱۰}$$

برای متریک شوارتس‌شیلد (مختصات همسانگرد):

$$\alpha_۱ = \beta_۱ = ۲$$

$$\delta = ۴\frac{M}{R} \tag{۴۱۱}$$

برای خورشید

$$\delta = ۱/۷۵'' \tag{۴۱۲}$$

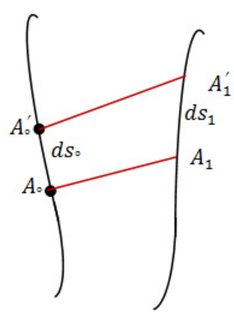
$k = ۰, l = ۰ \Leftarrow$ پتانسیل مؤثر صفر می‌شود!

۳.٦ انتقال به سرخ خطوط طیفی

منبع (چشمه) نوری را در نظر می‌گیریم که در یک میدان گرانش حرکت می‌کند و با بسامد $\upsilon_۰$ تابش دارد. $\upsilon_۰$ بسامد در دستگاه سکون چشمه است. یک ناظر قاعدتاً بسامد تغییریافته $\upsilon_۱$ را دریافت می‌کند. هرگاه $ds_۰$ و $ds_۱$ به ترتیب بازه‌های زمانی دوره‌های متناظر باشند، آنگاه داریم:

$$\frac{\upsilon_۱}{\upsilon_۰} = \frac{\Delta s_۰}{\Delta s_۱} \tag{۴۱۳}$$

در حالت کلی تغییر بسامد ناشی از تأثیر میدان گرانش و نیز تغییر وضعیت چشمه و ناظر (اثر دوپلر) است.



مورد ایستا) میدان شوارتس‌شیلد را در نظر می‌گیریم که ایستا است. چشمه و ناظر را روی یک خط شعاعی و ساکن در نظر می‌گیریم. بنابراین تنها اثر گرانشی می‌ماند. داریم:

$$\Delta s_{0} = \sqrt{g_{00}(A_{0})}\Delta t_{0} \tag{۴۱۴}$$

$$\Delta s_{1} = \sqrt{g_{00}(A_{1})}\Delta t_{1} \tag{۴۱۵}$$

رابطه میان dt_{0} و dt_{1} را نیز باید بدانیم. روی ژئودزیک های نورگونه شعاعی داریم:

$$g_{00}dt^{2} - g_{rr}dr^{2} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \begin{aligned} t_{1} - t_{0} &= \int_{r_{0}}^{r_{1}} \sqrt{\frac{g_{rr}}{g_{00}}}dr \\ t'_{1} - t'_{0} &= \int_{r_{0}}^{r_{1}} \sqrt{\frac{g_{rr}}{g_{00}}}dr \end{aligned} \tag{۴۱۶}$$

بنابراین:

$$t'_{0} - t_{0} = t'_{1} - t_{1} \tag{۴۱۷}$$

یا:

$$\Delta t_{0} = \Delta t_{1} \tag{۴۱۸}$$

به این ترتیب:

$$\frac{\upsilon_{1}}{\upsilon_{0}} = \frac{\sqrt{g_{00}(A_{0})}}{\sqrt{g_{00}(A_{1})}} = \sqrt{\frac{1 + \frac{2U_{0}}{C^{2}}}{1 + \frac{2U_{1}}{C^{2}}}} \simeq 1 + \frac{U_{0} - U_{1}}{C^{2}} \tag{۴۱۹}$$

برای این محاسبه تقریب نیوتونی کافی است (تنها g_{00} وارد می‌شود). U پتانسیل گرانش نیوتونی است.
تغییر نسبی بسامد می‌شود:

$$\frac{\Delta \upsilon_{0}}{\upsilon} = \frac{\upsilon_{1} - \upsilon_{0}}{\upsilon_{0}} \approx \frac{U_{0} - U_{1}}{C^{2}} = \frac{\Delta U}{C^{2}} \tag{۴۲۰}$$

مقدار آن در میدان گرانش زمین در اختلاف ارتفاع ۲۰ متری برابر می‌شود با:

$$\frac{\Delta \upsilon}{\upsilon} = ۲/۵ \times ۱۰^{-۱۵} \tag{۴۲۱}$$

$Pound$ و $Saider$ در سال ۱۹۶۵/۱۳۴۴ این کمیت را با دقت ۱٪ اندازه‌گیری کردند.

پرسش‌ها

۱. چرا برای بررسی آزمون‌های نسبیت عام در منظومه شمسی از متریک شوارتس‌شیلد استفاده می‌کنیم؟ راهی دیگر مانند مورد گرانش نیوتونی برای بررسی حرکت در منظومه شمسی سراغ دارید؟

۲. معادله‌های ژئودزیک برای بررسی مدار سیارات باید ۴ تا باشند، اما معمولاً تنها سه معادله، که مشتقهای $\dot{\phi}$، $\dot{t}$ و $\dot{r}$ را تعیین می‌کنند نوشته می‌شود. معادله چهارم چه شده است؟

۳. معادله مسیر به صورت انتگرال $\phi = \int W^{-1}(u).du$ درمی‌آید که در آن

$$W^2(u) = e^u(e^{-v}F^2 - 1)l^{-2} - u^2$$

است. در این معادله نمی‌تواند $l = 0$ باشد. پس چگونه می‌توان مسیر شعاعی را به‌دست آورد؟

۴. در محاسبه انتقال حضیض و انحراف نور و نیز انتقال به سرخ دیدیم که این سه اثر نسبیت عامی متناسب‌اند با نسبت شعاع شوارتس‌شیلد به یک فاصله. چرا؟ توجیه کنید!

۵. در محاسبه انتقال حضیض و انحراف نور از مختصات همسانگرد استفاده کردیم. آیا تطبیق نتیجه با رصد در این مختصات مجاز است؟ اگر مختصات شوارتس‌شیلد به کار می‌بردیم شاید نتایج متفاوت می‌بود! چه می‌گویید؟

۶. انحراف نور را می‌توان به طریق کلاسیک هم محاسبه کرد، یعنی گرانش نیوتونی همراه با این فرض که جرمی هم‌ارز انرژی (نسبیت خاص) برای فوتون در نظر بگیریم. نتیجه نصف مقدار انحراف نسبیت عامی به‌دست می‌آید. توضیحی دارید؟

۷. در محاسبه انتقال به سرخ نسبیتی بسامد فوتون را متناسب با عکس ds می‌گیریم. چرا؟ چه ارتباطی میان زمان، ویژه زمان، و بسامد وجود دارد؟

۸. انتقال به سرخ در روی زمین را تخمین بزنید!

۹. رسم است که در میدان‌های ضعیف، انتقال به سرخ گرانشی را برحسب پتانسیل نیوتونی، ϕ، بیان می‌کنند،

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{1}{c^2}\int \partial_z \Phi dz = \Delta\Phi$$

که در آن z مختصه‌ای است که در امتداد آن پتانسیل تغییر می‌کند، و منظور از $\Delta\Phi$ تغییر کل پتانسیل در طول مسیر است. این رابطه را توجیه کنید.

تمرین‌ها

۱. ماهواره‌ای در مداری دایره‌ای به شعاع r حول مرکز جرم زمین می‌گردد. زمین را متقارن کروی فرض می‌کنیم. اتساع زمان را برای ساعت داخل ماهواره نسبت به ساعتی در بینهایت حساب کنید.

۲. برای محاسبه انحراف نور در متریک شوارتس‌شیلد می‌توان از اصل فرما به صورت زیر استفاده کرد. ابتدا از سرعت نور در مختصات شوارتس‌شیلد تعبیر سرعت نور در یک محیط دلخواه در هندسه اقلیدسی می‌کنیم. در این تعبیر ساعت‌ها زمان t و خط‌کش‌ها فاصله دکارتی $dr^۲$ را اندازه می‌گیرند. در این صورت می‌توان از ضریب شکست در محیط صحبت کرد.

$$n(r) = \frac{c}{v(r)}$$

که در آن $v(r)$ همان سرعت مختصاتی نور است، در این صورت اصل فرما

$$\delta \int n(r) d\lambda = ۰$$

مسیر نور را تعیین می‌کند که در آن λ پارامتر (آفین) روی مسیر نور است.

الف) نشان دهید نتیجه این وردش می‌شود

$$\frac{d}{dx}\left(n(r)\frac{dx^i}{d\lambda}\right) = \partial^i n(r)$$

ب) آیا این معادله همان معادله ژئودزیک نورگونه در فضای شوارتس‌شیلد است؟

ج) با استفاده از این نتیجه، و بسط متریک شوارتش‌شیلد، مقدار انحراف نور را حساب کنید.

دانشگاه صنعتی شریف
گرانش و نسبیت عام-۱
شماره درس ۲۴۱۴۸-۱

فصل ۷: رمبش گرانشی

رضا منصوری

ویراست ۰.۲

مرداد ۱۳۹۲

درآمد

در دو فصل گذشته دیدیم میدان گرانش، در خارج از یک توزیع کروی ماده چگونه است، و از آن استفاده کردیم تا هم مسیر سیارات را بررسی کنیم، هم انحراف نور را به هنگام عبور از کنار خورشید، و هم انتقال به سرخ طول موج تابش‌های گسیل شده از یک اتم را روی سطح زمین. اما متریک و میدان گرانش نسبیتی داخل یک توزیع جرم کروی چگونه به‌دست می‌آید، و چه مشخصه‌هایی دارد؟ تفاوت آن با مورد نیوتونی چگونه است؟
برای بررسی میدان داخل یک جسم کروی، مثلاً داخل خورشید یا یک ستاره، باید معادله‌های انیشتین را با تقارن کروی در حضور ماده، یعنی با $T_{\mu\nu} \neq ۰$ حل بکنیم. در این صورت باید ماده داخل ستاره را نیز بشناسیم و معادله حالت آن را بدانیم. این معادله‌ها در موارد بسیار خاص جواب تحلیلی دارند و در بقیه موارد تنها می‌توان به صورت عددی آن‌ها را حل کرد. همین است که عمده اطلاعات ما در این مورد بعد از دهه ۶۰/۴۰ است که رایانه‌ها به خدمت علم و فناوری درآمدند. ما در این فصل به بررسی ساده‌ترین حالت‌ها می‌پردازیم.

۱.۷ رمبش با تقارن کروی و فشار صفر

ستاره کروی با فشار صفر مدل ساده مناسبی است برای تحقق رمبش گرانشی و ایجاد سیاه‌چاله. متریک خارج این ستاره هم، بنا به قضیه بیرکهوف، همان شوارتس‌شیلد است:

$$ds^۲ = -\left(۱-\frac{۲M}{r}\right)dt^۲ + \left(۱-\frac{۲M}{r}\right)^{-۱}dr^۲ + r^۲d\Omega^۲ \qquad (۴۲۲)$$

این متریک از خارج ستاره معتبر است. اما به دلیل پیوستگی با متریک داخل ستاره **۴۲۲**می‌توان آن را روی ستاره نیز به‌کار برد. پس اگر $r = R\left(t\right)$ سطح ستاره باشد داریم:

$$ds^۲ = -\left[\left(۱-\frac{۲M}{r}\right) - \left(۱-\frac{۲M}{R}\right)^{-۱}\dot{R}^۲\right]dt^۲ + R^۲d\Omega^۲ \qquad (۴۲۳)$$

فشار صفر و تقارن کروی متضمن این است که نقطه نماینده سطح ستاره روی یک ژئودزیک شعاعی زمان‌گونه حرکت می‌کند . پس با $d\Omega^۲ = ۰$ و $ds^۲ = -d\tau^۲$ داریم:

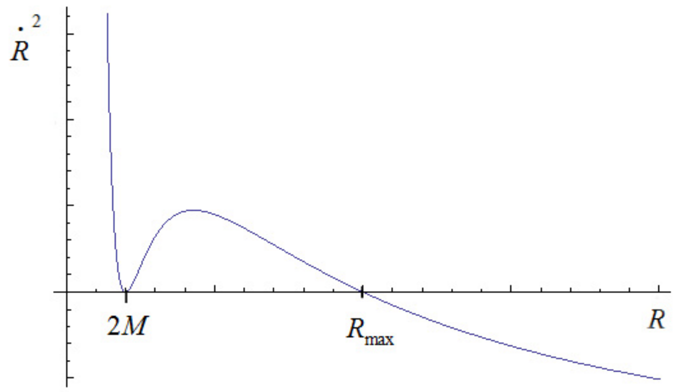
$$۱ = \left[\left(۱-\frac{۲M}{R}\right) - \left(۱-\frac{۲M}{R}\right)^{-۱}\dot{R}^۲\right]\left(\frac{dt}{d\tau}\right)^۲ \qquad (۴۲۴)$$

از طرف دیگر بردار $\frac{\partial}{\partial t}$ کیلینگ است. بنابراین پایستگی انرژی را می‌توان نوشت:

$$\epsilon = -g_{..}\frac{dt}{d\tau} = \left(۱-\frac{۲M}{R}\right)\frac{dt}{d\tau} \qquad \frac{\text{انرژی}}{\text{واحد جرم}} \qquad (۴۲۵)$$

که در آن ϵ روی ژئودزیک‌ها ثابت است. نشاندن در رابطه بالا می‌دهد.

$$\dot{R}^۲ = \frac{۱}{\epsilon^۲}\left(۱-\frac{۲M}{R}\right)^۲\left(\frac{۲M}{R} - ۱ + \epsilon^۲\right) \qquad (۴۲۶)$$

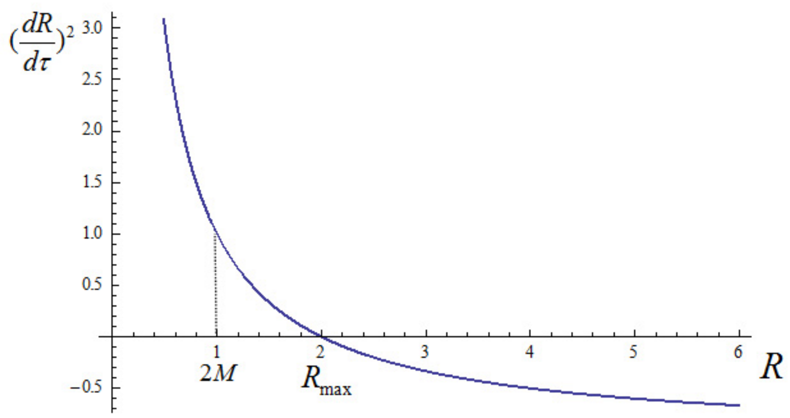


بیشینه شعاع در نقطه $R_{max} = \frac{۲M}{۱-\epsilon^۲}$ به‌دست می‌آید که در آن $\dot{R}^۲ = ۰$ است. ستاره از این شعاع شروع به انقباض می‌کند، که سرعت اولیه این رمبش صفر است. شعاع سپس تا $R = ۲M$ به‌طور مجانبی یا $t \to \infty$ کاهش می‌یابد.
پس ناظر ساکن در بینهایت ستاره را تا $R = ۲M$ می‌بیند اما نه بعد از آن.
ناظر همراه سطح ستاره چه می‌بیند؟ ویژه زمان مختصه مناسب برای بیان این دیدگاه است. اما داریم:

$$\frac{d}{dt} = \left(\frac{dt}{d\tau}\right)^{-۱}\frac{d}{d\tau} = \frac{۱}{\epsilon}\left(۱ - \frac{۲M}{R}\right)\frac{d}{d\tau} \qquad (۴۲۷)$$

دینامیک R را اکنون می‌توان برحسب مشتقات نسبت τ نوشت:

$$\left(\frac{dR}{d\tau}\right)^۲ = \left(\frac{۲M}{R} - ۱ + \epsilon^۲\right) = (۱-\epsilon^۲)\left(\frac{R_{max}}{R} - ۱\right) \qquad (۴۲۸)$$



سطح ستاره در مدت زمان محدود

$$\tau = \frac{\pi M}{(۱-\epsilon)^{\frac{۳}{۲}}} \qquad (۴۲۹)$$

از $R = ۲M$ می‌گذرد، و در این شعاع هیچ اتفاق ویژه‌ای نمی‌افتد.

۲.۷ جواب داخلی شوارتس‌شیلد

یک توزیع جرم با تقارن کروی در نظر می‌گیریم. می‌خواهیم متریک فضا زمان را در داخل آن به‌دست آوریم. همان‌گونه که در فصل ۵ استدلال شد، متریک را می‌توان به‌صورت عام چنین نوشت:

$$ds^۲ = e^{۲\mu} dt^۲ - e^{۲\nu} dr^۲ - r^۲ d\Omega^۲ \tag{۴۳۰}$$

که در آن ν, μ تابعی از r و tاند. ماده داخل

اتصال هندسه داخل و خارج شوارتس‌شیلد

بحث کامل اتصال دو خمینه خارج از حوصله این درس است. اما شرط اتصال متریک روی سطح ستاره، محل اتصال دو خمینه، که قبلاً به‌کار بردیم در همین بحث کفایت می‌کند. ماده داخل را تراکم‌ناپذیر فرض می‌کنیم. بخش فضایی این متریک داخلی می‌شود

$$d\sigma^۲ = \left(۱ - \frac{۸\pi G\rho r^۲}{۳}\right)^{-۱} dr^۲ + r^۲ d\Omega^۲ \tag{۴۳۱}$$

که در آن ρ چگالی ثابت ماده است. این متریک بیانگر فضایی است با انحنای ثابت. می‌توان آن را فوق کره‌ای با شعاع

$$A = \left(\frac{۳}{۸\pi G\rho}\right)^{\frac{۱}{۲}} \tag{۴۳۲}$$

تصور کرد. از طرف دیگر از متریک بالا برمی‌آید که توزیع ماده تنها تا شعاع بیشینه

$$r = \tag{۴۳۳}$$

۳.۷ جواب داخلی شوارتس‌شیلد. معادله تولمان - اوپنهایمر - ولکف

ستاره‌ای کروی ایستا در نظر می‌گیریم. می‌خواهیم متریک فضا زمان را در داخل آن به‌دست آوریم.
متریک ایستا با تقارن کروی را به صورت زیر درآوردیم.

$$ds^۲ = e^{\mu} dt^۲ - e^{\nu} dr^۲ - r^۲ d\Omega^۲ =: \eta_{\mu\nu} e^{\mu}.e^{\nu} \tag{۴۳۴}$$

ماده داخل ستاره را به تقریب یک شاره کامل می‌گیریم:

$$T_{\mu}^{\nu} = (\rho + p)\, u_{\mu} u^{\nu} - \delta_{\mu}^{\nu} p \qquad : \qquad T_{\mu\nu} = (\rho + p)\, u_{\mu} u_{\nu} - g_{\mu\nu} p \tag{۴۳۵}$$

تعمیم تانسور انرژی در نسبیت خاص:

$$T_{\mu}^{\nu} = \text{قطر}\,(\rho. - p. - p. - p) \tag{۴۳۶}$$

تانسور انرژی در دستگاه سکون سیستم باید به شکل زیر باشد:

$$T_{\mu\nu} = \text{قطر}\,(\rho،p،p،p) \tag{۴۳۷}$$

به این ترتیب از معادلات انیشتین به‌دست می‌آوریم:

$$G^{0}_{0} = \frac{1}{r^2} + e^{-2\nu}\left(\frac{2\acute{\lambda}}{r} - \frac{1}{r^2}\right) = \mathcal{K}\rho \tag{438}$$

$$G^{1}_{1} = \frac{1}{r^2} - e^{-2\nu}\left(\frac{2\acute{\nu}}{r} + \frac{1}{r^2}\right) = \mathcal{K}p \tag{439}$$

گیریم $e^{-\nu} = \frac{u(r)}{r}$ از معادله اول به‌دست می‌آید.

$$\acute{u} = -\mathcal{K}\rho r^2 + 1 \qquad \Rightarrow \qquad u = r - 2M(r) \tag{440}$$

که در آن $2M(r) := \mathcal{K}\int_0^r \rho(\acute{r})\acute{r}^2 d\acute{r}$. در شرایط عادی $M(0) = 0$، که همین را فرض کرده‌ایم!
به این ترتیب بخش فضایی متریک محاسبه شده است:

$$d\sigma^2 = e^{\nu}dr^2 + r^2 d\Omega^2 = \left(1 - \frac{2M(r)}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2 \tag{441}$$

هنگامی که $r > R$، این متریک به متریک شوارتس‌شیلد خارجی تبدیل می‌شود!
حالا دو معادله بالا از یکدیگر کم می کنیم. به‌دست می‌آوریم:

$$e^{-\nu}(\acute{\nu} + \acute{\mu}) = \mathcal{K}(\rho + p)r \tag{442}$$

یا

$$\mu(r) = -\nu(r) + \mathcal{K}\int_{\infty}^{r} d\acute{r} e^{\lambda}\acute{r}(\rho + p) \tag{443}$$

واضح است که به ازای $r > R$ از این معادله $-\mu = \nu$ به‌دست می‌آید، که نظیر همان جواب شوارتس‌شیلد خارج ستاره است!
برای تعیین کامل متریک در داخل ستاره باید $\rho(r)$ و $p(r)$ را بشناسیم! ابتدا معادله حالت را به صورت $p = p(\rho)$ فرض می کنیم. به‌علاوه باید از معادله مربوط به تعادل هیدروستاتیکی کمک به‌گیریم. در گرانش نیوتونی این معادله به صورت زیر است.

$$\frac{dp}{dr} = -\frac{GM(r)}{r^2}\rho \qquad ، \qquad M(r) = 4\pi\int_0^r \rho(\acute{r})\acute{r}^2 d\acute{r} \tag{444}$$

تعمیم نسبیت عامی این معادلات چیست؟ این معادله در معادلات میدان انیشتین باید نهفته باشد. پس یا باید بقیه معادلات میدان را بررسی کرد. یا به اتحاد بیانکی متوسل شد که قانون پایستگی زیر را به‌دست می‌دهد:

$$T^{\nu}_{\mu;\nu} = 0 \tag{445}$$

به ازای $\mu = 0, 2, 3$ معادله یک همانی می‌شود. به ازای $\mu = 1$ داریم:

$$\frac{dp}{dr} = -(p + \rho)\frac{\acute{\mu}}{2} \tag{446}$$

برای $\acute{\mu}$ از معادلات بالا می‌نشانیم (از G^{1}_{1}):

$$\frac{dp}{dr} = -\frac{r(r + \rho)}{2}\left[\left(\mathcal{K}p + \frac{1}{r^2}\right)e^{\nu} - \frac{1}{r^2}\right] \tag{447}$$

به جای e^{ν} مقدارش را می‌نشانیم:

$$\frac{dp}{dr} = -\frac{(\rho+p)\left[M(r)+\frac{\mathcal{K}pr^{۳}}{۲}\right]}{r(r-۲M(r))} \qquad TOV \text{ معادله} \tag{۴۴۸}$$

این معادله در حد نیوتونی به همان نظیر معادله گرانش نیوتونی می‌انجامد!

$$\frac{dp}{dr} \simeq -\frac{\rho m(r)}{r^{۲}} \tag{۴۴۹}$$

مثال: ماده تراکم‌ناپذیر ثابت = ρ:

$$M(r) = \frac{۴\pi}{۳}G\rho r^{۳} \qquad r \leq R \tag{۴۵۰}$$

پس معادله TOV می‌شود:

$$\frac{dp}{dr} = -\frac{۴\pi G(\rho+p)\left(\frac{\rho}{۳}+p\right)r^{۳}}{r\left(r-\frac{۸\pi G\rho r^{۳}}{۳}\right)} \tag{۴۵۱}$$

حالا یک مختصه شعاعی بی‌بعد تعریف می‌کنیم:

$$x = \sqrt{۸\pi G\frac{\rho}{۳}}.r \qquad X^{۲} = \frac{۸\pi G\rho}{۳}R^{۲} = \frac{۲M}{R} \tag{۴۵۲}$$

معادله بالا می‌شود:

$$\frac{۴\rho dr}{(\rho+p)(\rho+۳p)} = -\frac{dx^{۲}}{۱-x^{۲}} \tag{۴۵۳}$$

یا

$$\frac{p(x)}{\rho} = \frac{\sqrt{۱-x^{۲}}-\sqrt{۱-X^{۲}}}{۳\sqrt{۱-X^{۲}}-\sqrt{۱-x^{۲}}} \tag{۴۵۴}$$

X شعاع ستاره است:

$$X^{۲} = \frac{۸\pi G\rho}{۳}R^{۲} = \frac{۲M}{R} \tag{۴۵۵}$$

به این ترتیب X نسبت شعاع شوارتس به شعاع ستاره را به‌دست می‌دهد!
فشار در مرکز ستاره: نیوتونی

$$p_c = \frac{۲}{۳}\pi\rho^{۲}_{.}R^{۲} = \left(\frac{\pi}{۴}\right)^{\frac{۱}{۳}}M^{\frac{۲}{۳}}\rho^{\frac{۴}{۳}} \tag{۴۵۶}$$

$$\frac{p_c}{\rho} = \frac{۱-\sqrt{۱-\frac{۲M}{R}}}{۳\sqrt{۱-\frac{۲M}{R}}-۱} \tag{۴۵۷}$$

این رابطه نیز به ازای $۲M \ll R$ به نظیر نیوتونی‌اش می‌انجامد.

به ازای $\begin{cases} M_{max} = \frac{۴}{۹\sqrt{۳\pi}}\rho_۰^{-\frac{۱}{۲}} \\ R = \frac{۹}{۸}(۲M) \end{cases}$ یعنی هنگامی که شعاع ستاره $\frac{۹}{۸}$ شعاع شوارتس می‌شود، با فرض ماده تراکم‌ناپذیر، $p_۰ = \infty$ می‌شود. و ستاره در هم فرو می‌ریزد. پس اگر ستاره قرار باشد از ماده تراکم‌ناپذیر تشکیل شود، باید شعاع آن بیش از $\frac{۹}{۸}(۲M)$ باشد!

مسئله: از معادله نیوتونی تعادل هیدروستاتیکی $\frac{dp}{dr} = -\frac{\rho m(r)}{r^۲}$ می‌توان انتگرال گرفت:

$$p(r) = \frac{۲}{۳}\pi\rho_۰^۲(R^۲ - r^۲) \qquad p(R) = ۰ \tag{۴۵۸}$$

فشار در مرکز

$$p_c = \frac{۲}{۳}\pi\rho_۰^۲ R^۲ = \left(\frac{\pi}{۶}\right)^{\frac{۱}{۳}} M^{\frac{۲}{۳}}\rho_۰^{\frac{۴}{۳}} \tag{۴۵۹}$$

$$\frac{p_c}{\rho} = \frac{۲\pi}{۳}GpR^۲ = \frac{۱}{۲}.\frac{۴\pi}{۳}G\rho R^{\frac{۳}{۲}} = \frac{۱}{۲}\frac{M}{R} \tag{۴۶۰}$$

که برای تمام مقادیر $\rho_۰$ و R متناهی است. پس تعادل برای تمام مقادیر M و ρ و R ممکن است!
ر.ک.: $arXiv : ۱۱۰۴.۲۴۴۶$

۴.۷ انرژی بستگی

داخل یک ستاره چگالی انرژی شامل چگالی ماده (ماده تشکیل‌دهنده ستاره) و چگالی انرژی میدان (منفی) است. چگالی باریونی ماده را n می‌گیریم. آنگاه ρ، چگالی داخل ستاره، انرژی تراکم را نیز در برخواهد گرفت. از طرف دیگر جزء حجم فضای سه‌بعدی داخل ستاره (t= ثابت) برابر است با:

$$dV = r^۲\left(۱ - \frac{۲M(r)}{r}\right)^{-\frac{۱}{۲}} \sin\vartheta dr d\vartheta d\phi \tag{۴۶۱}$$

پس جرم باریونی ستاره می‌شود:

$$M_۰ = ۴\pi\int r^۲ n(r)\left(۱ - \frac{۲M(r)}{r}\right)^{-\frac{۱}{۲}} dr \tag{۴۶۲}$$

مورد ماده تراکم‌ناپذیر: $n = \rho = \cot$

$$M_۰ = ۴\pi n\int_۰^R r^۲\left(۱ - \frac{۸\pi G r^۲\rho}{۳}\right)^{-\frac{۱}{۲}} dr = \frac{۴\pi n}{۳m}R^۳ f(X) \tag{۴۶۳}$$

m جرم هر باریونی

$$f(X^۲) = \frac{۳}{۲}\left[\arcsin X - X\sqrt{۱ - X^۲}\right]/X^۳$$

$$\begin{cases} ۱ + \frac{۳}{۱۰}X^۲ = ۱ + \frac{۳}{۵}\frac{M}{R} & X \ll ۱ \\ \frac{۳\pi}{۴} & X = ۱ \end{cases} \tag{۴۶۴}$$

$$\frac{\Delta M}{M} = \frac{M_۰ - M}{M} = f\left(\frac{۲M}{R}\right) - ۱ \qquad \left[\frac{\Delta M}{M} = \frac{E_B}{M} = \frac{۳M}{۵R} \qquad \text{نیوتونی}\right]$$

در حد $\frac{۸\pi}{۹} = ۲\pi$: ۶۴٪ نقصان جسم

ستاره‌های نوترونی: ۳۰٪

۵.۷ تحول ستاره‌ها: ستاره‌های عادی

جواب شوارتس‌شیلد برای یک توزیع ماده با تقارن کروی امکان وجود سیاهچاله‌ها را نشان می‌دهد. برای شناخت چگونگی ایجاد یک سیاهچاله باید تحول ستاره‌ها را در شرایط گوناگون بررسی کرد.

۱.۵.۷ تعادل هیدروستاتیکی در ستاره‌های عادی

یک توده گاز در تعادل هیدروستاتیکی را در نظر می‌گیریم:

$$\frac{dp}{dr}=-\frac{GM(r)}{r^{۲}}\rho \qquad , \qquad M(r)=۴\pi\int_{.}^{r}\rho(r')r'^{۲}dr \tag{۴۶۵}$$

چگالی ρ را به تقریب ثابت درنظر می‌گیریم:

$$\rho \simeq \text{ثابت} \Rightarrow \tag{۴۶۶}$$

$$\frac{dp}{dr}=-\frac{۴\pi}{۳}G\rho^{۲}r \tag{۴۶۷}$$

از این معادله می‌توان انتگرال گرفت. هرگاه فشار در مرکز $p.$ باشد داریم:

$$p=p.-\frac{۲\pi}{۳}G\rho^{۲}r^{۲} \tag{۴۶۸}$$

فشار روی سطح ستاره، $r=R$، را برابر صفر می‌گیریم. پس:

$$p.=\frac{۲\pi}{۳}G\rho^{۲}R^{۲} \tag{۴۶۹}$$

بنابراین برای نسبت فشار به چگالی (در مرکز) می‌توانیم بنویسیم:

$$\frac{p.}{\rho.c^{۲}}=\frac{۲\pi}{۳}\frac{G\rho R^{۳}}{Rc^{۲}}=\frac{۱}{۲}\frac{Q}{R} \tag{۴۷۰}$$

که $Q=\frac{۴\phi}{۳}G\rho R^{۳}$ همان شعاع شوارتس‌شیلد است. به‌این‌ترتیب نسبت فشار به چگالی در مرکز ستاره برابر است با نسبت شعاع شوارتس‌شیلد به شعاع ستاره. فشار در مرکز ستاره را می‌توانیم به تقریب برابر فشار میانگین بگیریم. به‌این‌ترتیب برای شرط تعادل در ستاره می‌توان نوشت:

$$Q_R=\frac{p}{\rho c^{۲}} \tag{۴۷۱}$$

از طرف دیگر با فرض معادلهٔ حالت، برای این نسبت می‌توان نوشت:

$$\frac{p}{\rho c^{۲}}=f(\rho,T)=\frac{Q}{R} \tag{۴۷۲}$$

که f به‌عنوان تابعی از چگالی $mp=$ جرم پروتون یا مولکول هیدروژن. این فرض برای ستاره‌های عادی درست است، چگالی دما تابع حالت گاز را تعیین می‌کند. برای گاز ایده‌آل داریم:

$$PV=RT=NkT \qquad \Rightarrow \frac{PV}{Nm_pc^{۲}}=\frac{kT}{m_pc^{۲}} \tag{۴۷۳}$$

بنابراین:

$$\frac{p}{\rho c^2} = \frac{kT}{mc^2}$$

یا

$$\frac{Q}{R} = f(\rho, T) = \frac{kT}{m_p c^2} = \frac{\nu^2}{3 - c^2} \tag{474}$$

پس تابع حالت به تقریب با نسبت مجذور سرعت مولکول‌های گاز به سرعت نور داده می‌شود. دمای گاز ستاره‌ها از مرتبهٔ $kT \simeq 1keV$ (متناظر با واکنش‌های هسته‌ای داخل ستاره عادی)، و جرم سکون مولکول‌های هیدروژن از مرتبهٔ $1GeV$ است. پس:

$$f \simeq \frac{Q}{Q} \simeq \frac{1keV}{1GeV} \simeq 10^{-6} \tag{475}$$

توجه کنید که این اثر مستقل از G است!
واکنش‌های هسته‌ای انرژی و در نتیجهٔ دمای ستاره‌ها را تأمین می کنند. تا زمانی که دما حفظ شود ستاره به صورت مانا روی نمودار هرتس شپرونگ-راسل قرار دارد. این زمان حدود چند میلیارد سال است. که برای ستاره‌های عادی بیشتر و برای ستاره‌های پرجرم کمتر است. علت آن را از وابستگی درخشندگی و انرژی ستاره‌ها به جرم می‌توان دریافت:

$$L \propto M^{3/5} \tag{476}$$

$$E \propto M \tag{477}$$

بنابراین ستاره‌های پرجرم انرژی بیشتری از دست می‌دهند. با از دست دادن انرژی و پایان دورهٔ انرژی هسته‌ای در ستاره، فشار دیگری نمی‌تواند در مقابل گرانش پابرجا بماند. ستاره فرومی‌ریزد.

۶.۷ تحول ستاره‌ها: ستاره‌های واگن

پس از سرد شدن و فروریختن یا انقباض ستاره، چگالی ستاره افزایش می‌یابد و شرایط جدیدی به‌وجود می‌آید که بررسی آن مجدداً ساده است.

$$10^4 \frac{g}{cm^3} < \rho < 10^8 \qquad \text{معادلهٔ حالت ماده برای گسترهٔ چگالی} \tag{478}$$

برای این چگالی‌ها فشار دیگر به دما بستگی ندارد. ستاره هم سرد شده است و همجوشی اتفاق نمی‌افتد. در محل می‌توان دما را هم صفر فرض کرد. اما در این حد $T \to 0$ فشار، برخلاف حالت گاز ایده‌آل، به صفر نمی رود بلکه به علت روابط عدم تعیین فشار به چگالی وابسته خواهد شد:

$$\frac{P}{\rho c^2} = f(\rho) \tag{479}$$

در چگالی‌های حدود $10^4 \frac{g}{cm^3}$ به بالا رفتار ماده، از هر نوع که باشد، شبیه فلزات است. الکترون‌ها شبیه یک گاز الکترونی رفتار می‌کنند. اصل پائولی در این حالت می‌گوید که هر الکترون در مکعبی به ابعاد d جا می‌گیرد:

$$d \sim n_e^{-\frac{1}{3}} \sim \frac{\hbar}{< p_e >} \qquad < p_e >= \text{تکانه فرمی الکترون} \tag{480}$$

اگر الکترون‌ها نسبیتی نباشند، انرژی آن‌ها می‌شود:

$$< E >= \frac{p_e^2}{2m_e} \qquad \text{انرژی فرمی}$$ (۴۸۱)

همین انرژی را می‌توان به تقریب برابر انرژی جنبشی گرفت:

$$f = \frac{p}{\rho c^2} \approx \frac{< E >}{m_p c^2} \approx \frac{Pe^2}{m_e m_p c^2}$$ (۴۸۲)

اگر برای p_e^2 از رابطهٔ بالا بنشانیم به‌دست می‌آوریم:

$$\frac{p}{\rho c^2} \approx \frac{\hbar^2}{d^2}.\frac{1}{m_e m_p c^2} = \frac{m_e}{m_p}.\left(\frac{\rho}{\rho.}\right)^{\frac{2}{3}}$$ (۴۸۳)

در اینجا

$$\rho = \frac{m_p}{d^3}$$ (۴۸۴)

و $\rho.$ چگالی آستانه‌ای است متناظر با زمانی که فاصلهٔ میانگین ذرات (پروتون‌ها) به طول موج کامپتون الکترون‌ها، $\lambda_e = \frac{\hbar}{m_e c}$، می‌رسد و الکترون‌ها نسبیتی می‌شوند، یعنی:

$$\rho. = \frac{m_p}{\lambda_e^3} = m_p m.^3 \frac{c^3}{\hbar^3} \approx 3 \times 10^7 g/cm^3$$ (۴۸۵)

$$d \sim \frac{\hbar}{m_p c} = \lambda_e = 4 \times 10^{-11} cm$$ (۴۸۶)

هنگامی که سرعت الکترون‌ها نسبیتی بشود، یعنی:

$$p_F \sim m_e c$$ (۴۸۷)

آنگاه معادلهٔ حالت می‌شود:

$$f = \frac{1}{m_p c^2} p_F c$$ (۴۸۸)

این حالت هنگامی رخ می‌دهد که:

$$d \sim \lambda_e \sim \frac{\hbar}{m.c} \sim 4 \times 10^{-11} \quad cm$$ (۴۸۹)

چگالی متناظر با این شرایط همان $\rho. = 3 \times 10^7 \quad g/cm^3$ است. در این حالت می‌توان نوشت:

$$\frac{p}{\rho c^2} = \frac{m_e}{m_p}\left(\frac{\rho}{\rho.}\right)^{\frac{1}{3}}$$ (۴۹۰)

۱.۶.۷ کوتوله‌های سفید

معادله حالت نانسبیتی و نسبیتی فوق تا حدود $\rho \sim ۱۰^۸ g/cm^۳$ معتبر است. ستاره را در این حالت کوتولهٔ سفید می‌نامند. پس از آن الکترون‌های نسبیتی در برخورد با پروتون‌ها تولید نوترون می‌کنند. به راحتی می‌توان حد بالای جرم را برای کوتوله‌های سفید به دست آورد. از شرط تعادل استفاده می‌کنیم:

$$\frac{Q}{R} = f \qquad , \qquad R \sim \left(\frac{M}{\rho}\right)^{\frac{۱}{۳}} \qquad , Q = \frac{۴\pi}{۳} G\rho R^۲ \tag{۴۹۱}$$

پس

$$M = \frac{c^۳ f^{\frac{۳}{۲}}}{\rho^{\frac{۱}{۲}} G^{\frac{۳}{۲}}} \tag{۴۹۲}$$

بنابراین به‌ازای هر چگالی یک جرم برای حالت تعادل وجود دارد. معادله حالت را می‌نشانیم:

$$M = \begin{cases} \left(\frac{\rho}{\rho_۱}\right)^{\frac{۱}{۲}} M_c & \rho < \rho_۰ \quad \text{نانسبیتی} \\ M_c & \rho > \rho_۰ \quad \text{نسبیتی} \end{cases} \tag{۴۹۳}$$

که در آن

$$M_c = \frac{c^۳}{\rho_۰^{\frac{۱}{۲}} G^{\frac{۳}{۲}}} \left(\frac{m_e}{m_p}\right)^{\frac{۳}{۲}} \qquad \text{جرم حدی چاندراسکار} \tag{۴۹۴}$$

به جای $\rho_۰$ می‌نشانیم:

$$M_c \sim \frac{۱}{m_p^۲}\left(\frac{\hbar c}{G}\right)^{\frac{۳}{۲}} \sim m_p \alpha_G^{-\frac{۳}{۲}} \tag{۴۹۵}$$

$$\alpha_G = \frac{m_p^۲ G}{c\hbar} = ۵/۹ \times ۱۰^{-۳۹} \qquad \text{ثابت ساختار ریزگرانش} \tag{۴۹۶}$$

برای حد شعاع تعادل نیز به‌دست می‌آوریم:

$$R_c \sim \frac{۱}{m_e m_p}\left(\frac{\hbar^۳}{G_c}\right)^{\frac{۱}{۲}} = \lambda_e \alpha_G^{-\frac{۱}{۲}} \tag{۴۹۷}$$

تعداد پروتون‌ها (هسته‌های هیدروژن) را در یک کوتولهٔ سفید نیز می‌توان به‌دست آورد:

$$N = \frac{M_c}{m_p} = \alpha_G^{-\frac{۳}{۲}} \approx ۱۰^{+۵۷} \tag{۴۹۸}$$

مقدار عددی حد چاندراسکار برابر است با:

$$M_c = m_p \alpha_G^{-\frac{۳}{۲}} = ۳/۷ \times ۱۰^{۳۳} g \approx ۱/۸ \quad M_\odot \tag{۴۹۹}$$

محاسبهٔ دقیق عدد $۱/۴ M_\odot$ به‌دست می‌دهد.
برای کوتوله‌های سفید نسبت شعاع شوارتس‌شیلد به شعاع ستاره، که مرتبهٔ بزرگی پدیده‌های نسبیتی را می‌دهد برابر است با:

$$\delta = \frac{\Delta\nu}{\nu} \approx \frac{\Delta M}{M} \approx \frac{Q}{R} \approx \frac{p}{\rho c^۲} \approx \frac{m_e}{m_p}\left(\frac{\rho}{\rho_۰}\right)^{\frac{۲}{۳}} \approx \frac{m_e}{m_p} \sim ۱۰^{-۴} \tag{۵۰۰}$$

مرتبهٔ بزرگی شعاع کوتوله‌های سفید برابر است با:

$$R \approx \lambda_e \alpha_G^{-\frac{۱}{۲}} \left(\frac{\rho}{\rho_۰}\right)^{\frac{۱}{۶}} \approx ۵۰۰۰ \left(\frac{\rho_۰}{\rho}\right)^{\frac{۱}{۶}} km \tag{۵۰۱}$$

۷.۷ ستاره‌های نوترونی

برای چگالی‌های بیش از $\rho > 10^{8} g/cm^{3}$، که الکترون‌ها نسبیتی می‌شوند و انرژی آن‌ها از مرتبهٔ بزرگی MeV است، از برخورد الکترون‌ها و پروتون‌ها به مرور نوترون تولید می‌شود:

$$p \leftarrow e^{-} \Longrightarrow n + \nu_e \qquad (۵۰۲)$$

ابتدا در چگالی‌های $10^{8} < \rho < 10^{13} g/cm^{3}$ هسته‌های اتمی با تعداد زیاد نوترون، مانند Ni^{62}_{28} و Y^{122}_{39} تشکیل می‌شود. از حدود چگالی $10^{13} g/cm^{3}$ به بعد به‌تدریج تعداد نوترون‌های آزاد زیاد می‌شود تا این‌که در چگالی 10^{13} گذار به ستارهٔ نوترونی خاتمه می‌یابد. از این چگالی به بعد دوباره شرایط ساده‌ای در ستاره حکم‌فرما است، شبیه به گاز الکترونی در کوتوله‌های سفید. با این تفاوت که این بار نوترون‌ها هستند که فشار داخل ستاره را تأمین می‌کنند. بنابراین معادله حالت می‌شود:

$$f(\rho) = \frac{p}{\rho c^{2}} = \begin{cases} \left(\frac{\rho}{\rho_1}\right)^{\frac{2}{3}} & \rho < \rho_1 \quad \text{نانسبیتی} \\ \left(\frac{\rho}{\rho_1}\right)^{\frac{1}{3}} & \rho > \rho_1 \quad \text{نسبیتی} \end{cases} \qquad (۵۰۳)$$

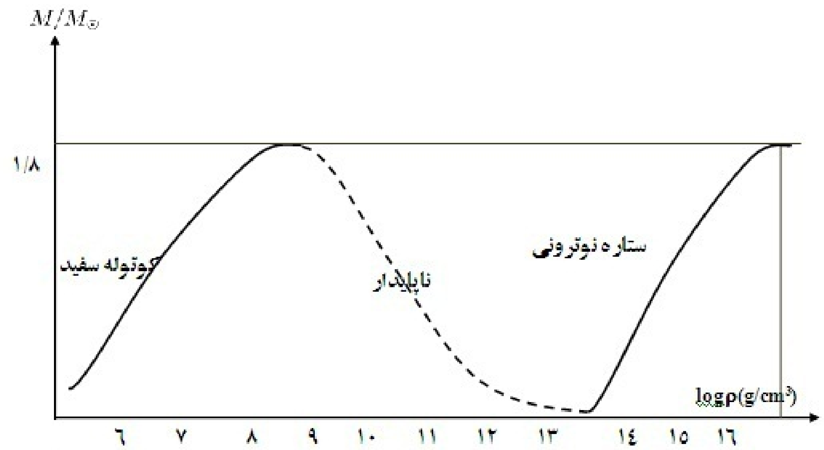
که در آن:

$$\rho_1 = \frac{m_n}{\lambda_n^{3}} = \frac{m_p}{\lambda_n^{3}} \approx 10^{16} g/cm^{3} \qquad (۵۰۴)$$

به‌همین ترتیب طیف جرم ستاره‌های نوترونی می‌شود:

$$M(\rho) = \begin{cases} \left(\frac{\rho}{\rho_1}\right)^{\frac{1}{2}} M_c & \rho < \rho_1 \\ M_c & \rho > \rho_1 \end{cases} \qquad (۵۰۵)$$

که در آن حد M_c همان حد چاندراسکار است، زیرا این حد تنها به جرم پروتون بستگی دارد. نتایج طیف جرم کوتوله‌های سفید و ستاره‌های نوترونی را می‌توان در نمودار دید.



اثرهای نسبیتی برای ستاره‌های نوترونی از این مرتبه‌ی بزرگی‌اند:

$$\delta \approx \frac{\Delta\nu}{\nu} \approx \frac{\Delta M}{M} \approx \frac{Q}{R} \approx \frac{p}{\rho c^{2}} \approx \left(\frac{\rho}{\rho_1}\right)^{\frac{2}{3}} \approx 1 \qquad (۵۰۶)$$

نشان دهید سرعت صوت در مادهٔ واگن برابر است با:

$$c_s = c\left(\frac{5}{3}f\right)^{\frac{1}{2}} \tag{۵۰۷}$$

تپ اختر خرچنگ سیگنال‌هایی با دورهٔ ۰٫۰۳۳ ثانیه گسیل می‌کند. آیا می‌توان این سیگنال‌ها را از طریق چرخش یا نوسان‌های کوتوله‌های سفید توجیه کرد؟
شعاع ستاره‌های نوترونی از مرتبهٔ بزرگی شعاع شوارتس‌شیلد است و اثرهای نسبیت عام از مرتبهٔ بزرگی یک. بنابراین نمی‌توان در برآورد جرم و شعاع این ستاره‌ها از اثرهای نسبیتی صرف‌نظر کرد، آن‌گونه که ما تخمین زدیم. علاوه‌براین در چگالی‌های هسته‌ای، که در ستاره‌های نوترونی حاکم است نمی‌توان از تقریب گاز ایده‌آل استفاده کرد. در این موارد تقریب شارهٔ کامل مناسب‌تر است. دراین‌صورت می‌توان نشان داد که برای $M > 3M_{\odot}$ ستاره‌ها ناپایدارند و خواهند رمبید. مثال ساده شارهٔ کامل با فشار صفر است. شارهٔ تراکم‌ناپذیر نیز که در بخش ۴.۴ توصیف شد مثال دیگری است.

۸.۷رمبش گرانشی و سیاهچاله‌ها

متریک شوارتس‌شیلد برای توزیع ماده با تقارن کروی بیانگر حالتی در تحول ستاره‌ها است که ستاره به سیاهچاله تبدیل می‌شود. برای شناخت بهتر سیاهچاله‌ها ابتدا به بحث کیفی تحول ستاره‌ها می‌پردازیم.

۹.۷فیزیک سیاهچاله‌ها

۱۷۰۰: لاپلاس و قبل از او
۱۹۳۹: اپنهایمر - سنایدر
ستاره پس از اتمام فرایندهای گرم هسته‌ای چه بلایی سرش می‌آید.
اگر جرم زیاد باشد ← رمبش $Q = \frac{2G\pi}{c^2}$
۱۹۱۸: کارل شوارتس‌شیلد (سیاهچاله، ستاره)
۱۹۶۳: جواب کِر
۱۹۶۷: یکتایی جوابِ شوارتس‌شیلد
۱۹۶۹ قضیهٔ هاوکینگ -پزوز
: بعد از افق تکینگی
قضیهٔ کچلی!

شکل نمودار
قضیهٔ سانسور کیهانی

شکل نمودار
شکل نمودار
ترمودینامیک سیاهچاله‌ها
هاوکینگ ۱۹۷۲: سطح افق کم نمی‌شود!

گرانی سطحی روی سطح ثابت است.
J. باردین
R. کارتر
هاوکینگ
چهار قانون ترمودینامیک (مکانیک) سیاهچاله‌ها

قانون صفرم: در حالت مانا، یا تعادل، $\mathcal{K}$ پیرامون افق ثابت است.
قانون اول: در هر فرایند
کار انجام شده $\sim \Delta E = \frac{c^2}{G}\frac{\mathcal{K}\Delta A}{8\pi} + W$
قانون دوم: در هر فرایند سطح محل افق‌ها کم نمی‌شود.
قانون سوم: نمی‌توان با تعداد فرایندهای متناهی گرانی سطحی سیاهچاله را به صفر رساند.

$$S = \frac{kc^3}{4G\hbar}A \qquad (508)$$

$$T - \frac{\hbar\mathcal{K}}{2\pi bc} \qquad (509)$$

۱۰.۷ ترمودینامیک سیاهچاله‌ها

قضیهٔ مساحت: مساحت سیاهچاله‌ها، درهر رویدادی، فقط می‌تواند افزایش یابد.
مثلاً در برخورد در سیاهچاله، سیاهچاله‌ای که بوجود می‌آید مساحتی دارد بیش از مجموع مساحت در سیاهچاله دیگر.

ترمودینامیک	سیاهچاله
U, V, S	$M, J, A, \quad : \Omega, \ldots$
P, T	
$TdS = dU + PdV - \Omega dJ$	$dM = \frac{1}{8\pi}\mathcal{K}dA + \Omega_H dJ$
$dU = TdS - PdV + \Omega dJ$	
$S = S(U, V)$	
$d\rho \geq 0 \quad , \quad d_{r-v}\rho = 0$	$dA \geq 0 \quad , \quad d_{r-v}A = 0$

$$\mathcal{K} = \frac{(M^2 - a^2 - e^2)^{\frac{1}{2}}}{2M[M + (M^2 - a^2 - e^2)^{\frac{1}{2}}] - e^2} \qquad (510)$$

$$\mathcal{K}_{ss} = \frac{M}{2M\sqrt{M + M}} \qquad (511)$$

قانون	ترمودینامیک	سیاهچاله
صفرم	T ثابت	$\mathcal{K}$ ثابت روی افق
اول	کار $dE = TdS +$	$dM = \frac{\mathcal{K}}{8\pi}dA + \Omega_H dJ$
دوم	$\sigma S \geq 0$	$\sigma A \geq 0$
سوم	به $T = 0$ نمی‌توان رسید	به $\mathcal{K} = 0$ نمی‌توان رسید

$$T = \frac{\hbar}{2\pi}\mathcal{K} \qquad (512)$$

$$T = 10^{-6}\frac{M_{\odot}}{M} \qquad (513)$$

عمر سیاهچاله (در اثر تابش)

$$\tau \sim 10^{66}\left(\frac{M_{(0)}}{M_{\odot}}\right)^3 \quad \text{سال} \qquad (514)$$

به ازای $M10^{15}g \leftarrow$ سال $\tau \sim H_0^{-1} \sim 10^{10}$
$M > 10^{27}g \leftarrow T > 2/7\mathring{k}$ بنابراین سیاهچاله جذب می‌کند.

پرسش‌ها

۱. در بررسی جواب داخل شوارتس‌شیلد متریک را ایستا در نظر گرفتیم. آیا این فرض درست است؟ توجیه کنید!
۲. اگر در معادله حالت ماده داخل توزیع جرم کروی دما پیش بیاید چگونه باید معادله‌های انیشتین را برای تقارن کروی حل کرد؟ چه پیچیدگی وارد می‌شود؟
۳. انتگرال حجم روی چگالی داخل توزیع کروی ماده مقدار M، یعنی جرم شوراتس‌شیلد را نمی‌دهد. چرا؟ علت را با تکیه بر مفاهیم نیوتنی توضیح دهید.
۴. به هنگام بررسی متریک داخل شوارتس شیلد، معادله تعادل هیدروستاتیکی از کجا به‌دست می‌آید؟
۵. در بررسی رمبش با تقارن کروی چه می‌شود اگر فرض کنیم ذرات از بینهایت به‌صورت متقارن کروی می‌رمبند؟ به‌نظر می‌رسد جوابی وجود دارد که در آن سرعت رمبش پس از مدتی صفر می‌شود که علامت این است که پس از آن رمبش به انبساط تبدیل می‌شود. این‌که ممکن نیست! توضیح دهید.
۶. در تقریب نیوتنی دیده می‌شود که جمله $g_{..}$ کمابیش همان پتانسیل نیوتنی را می‌دهد. پس چه می‌شود که معادله تعادل هیدروستاتیکی در شعاع‌های کوچک تفاوت تعیین کننده‌ای با حد نیوتنی دارد؟
۷. از معادله TOV حد نیوتونی را به‌دست آورید. نشان دهید فشار در مرکز، برای ماده تراکم‌ناپذیر برابر است با $p_c = \frac{۱}{۲}\rho\frac{M}{R}$ که در آن ρ چگالی ثابت ماده متراکم است. این نتیجه را با نتیجه نسبیتی مقایسه کنید! چرا نتیجه نیوتونی متفاوت است؟ چه شهودی برای این تفاوت دارید؟
۸. برای ماده تراکم‌ناپذیر فشار در مرکز به ازای جرم‌هایی بزرگتر از یک جرم معین بینهایت می‌شود. این بینهایت شدن را معمولاً به حساب رمبش ماده می‌گذاریم. یعنی اینکه معادلات، جواب ایستا ندارند. چرا باید استنباط کنیم ساختارهای با جرم زیاد همواره می‌رمبند و به سیاهچاله تبدیل می‌شوند؟
۹. دانشجویی استدلال می‌کند متریک شوراتس‌شیلد را می‌توان این‌گونه تعبیر کرد: حل معادله انیشتین با تقارن کروی برای جرم نقطه‌ای در مرکز مختصات به‌طوری‌که بتوان برای مؤلفه صفرم تانسور انرژی نوشت $T^{\cdot}_{\cdot} \propto m\delta(r)$. آیا این استدلال را می‌پذیرید؟ توضیح دهید!
۱۰. تعادل هیدروستاتیکی نیوتونی برای همه مقادیر چگالی و شعاع ممکن است، بدون اینکه فشار در مرکز بینهایت شود. چرا؟

تمرین‌ها

۱. نشان دهید در رمبش کروی از بینهایت، سطح ستاره در مدت (ویژه) زمان محدود

$$\tau = \frac{\pi M}{(۱-\epsilon)^{\frac{۳}{۲}}}$$

از $R = ۲M$ می‌گذرد. در اینجا ϵ انرژی پایسته ذره روی ژئودزیک‌های شعاعی است.
۲. از اتحاد بیانکی معادله TOV را به‌دست آورید.
۳. انرژی یک ستاره را در حالت تعادل به‌صورت تابعی از شعاع ستاره بنویسید. کمینه این تابع حالت تعادل را تعریف می‌کند. نشان دهید با کاهش دما شعاع ستاره کاهش می‌یابد.
۴. با استفاده از معادله هیدروستاتیکی نشان دهید شرط تعادل دما داخل یک توزیع جرم کروی (ستاره) به‌صورت: ثابت= $T\sqrt{g_{..}}$، تعریف می‌شود. یک راه برای حل این مسئله این است که یک دماسنج تابشی در امتداد شعاع ستاره در نظر بگیرید. راه دیگری هم می‌شناسید؟
۵. انرژی ستاره را در حالت تعادل به صورت تابعی از شعاع ستاره بنویسید. کمینهٔ این تابع حالت تعادل را تعریف می‌کند. نشان دهید با کاهش دما شعاع ستاره کاهش می‌یابد.
۶. نشان دهید در این شرایط انرژی ستاره را می‌توان نوشت:

$$E \sim -\frac{\alpha}{R} - \frac{\beta}{R^۲}$$

با

$$\alpha \sim -GM^۲$$
$$\beta \sim \frac{\hbar^۲}{m_e}\left(\frac{M}{m_p}\right)^{\frac{۵}{۳}}$$

که در آن M جرم کل ستاره است.
نمودار E را برحسب R رسم کنید و محل کمینهٔ متناظر با حالت تعادل را به‌دست آورید.

$$R_{min} \sim \frac{\hbar^۲ M^{-\frac{۱}{۳}}}{G m_e m_p^{\frac{۵}{۳}}}$$

۷. نشان دهید تابع انرژی حالت نسبیتی در کوتوله‌های سفید را می‌توان به‌صورت:

$$E \sim -\frac{\alpha}{R} + \frac{\gamma}{R}$$

نوشت، که در آن:

$$\alpha = -GM$$
$$\gamma = \hbar c\left(\frac{M}{m_p}\right)^{\frac{۴}{۳}}$$

نشان دهید از شرط تعادل، کمینهٔ انرژی حد جرم چاندراسکار به‌دست می‌آید.
۸. چرا شاخه‌ی میان $۱۰^{۱۳} > \rho > ۱۰^{۸}$ در نمودار طیف جرم ناپایدار است؟
۹. در حد چاندراسکار شعاع ستارهٔ نوترونی را به‌دست آورید.

دانشگاه صنعتی شریف
گرانش و نسبیت عام-۱

شماره درس ۲۴۱۴۸-۱

فصل ۸: گسترش خمینه شوارتس شیلد

رضا منصوری

ویراست ۰.۲

مرداد ۱۳۹۲

۰.۸ درآمد

می‌دانیم متریک یک کمیت موضعی است، که توپولوژی فضازمان را تعیین نمی‌کند. اما آیا با دانستن متریک در مختصاتی معین می‌توان چشمه‌ای را که متریک روی آن تعریف شده است شناخت؟ سؤال و پاسخ آن چندان بدیهی نیست. به متریک فضای مینکوفسکی در مختصات دکارتی فکر کنید! این مختصات یک فضای چهاربعدی تخت تعریف می‌کنند که گستره مختصات آن از $-\infty$ تا $+\infty$ تغییر می‌کند. ظاهراً این جمله از مختصات دکارتی خوش‌تعریف و بدون ابهام است؛ اما همین فضازمان ممکن است در مختصات دیگری نوشته شود که خمینه متناظر با آن ظاهراً فضای مینکوفسکی نیست.
آیا می‌توان راهی برای درک این نوع سؤال‌ها یافت؟ آیا فضازمان شوارتس‌شیلد در مختصات شوارتس‌شیلد همان است که این مختصات تعریف می‌کند؟ در این فصل به سؤال‌هایی از این دست می‌پردازیم. ابتدا در دو مثال دوبعدی مفهوم گسترش خمینه را در چهارچوب مینکوفسکی روشن می‌کنیم.

۱.۸ فضازمان با زمان وارون

$$ds^۲ = -\frac{۱}{t^۴}dt^۲ + dx^۲ \qquad (۵۱۵)$$

این متریک در گستره مختصاتی $-\infty < x < \infty$ و $۰ < t < \infty$ تعریف شده است. متریک در نقطه $t = ۰$ تکینگی دارد و تعریف شده نیست. تبدیل مختصات زیر

$$t \to \frac{۱}{t'} \qquad (۵۱۶)$$

متریک به صورت زیر در می‌آورد:

$$ds^۲ = -dt'^۲ + dx^۲ \qquad (۵۱۷)$$

که همان متریک فضای مینکوفسکی دوبعدی است. این متریک در هیچ‌جا تکینگی ندارد. پس باید نتیجه بگیریم که تکینگی در متریک اولیه یک تکینگی مختصاتی است، به این معنی که به خاطر انتخاب بد مختصات تکینگی ظاهر شده است. مختصات نامناسب «بی‌نهایت» را به نقطه $t = ۰$ آورده است، و همین علاوه بر حضور تکینگی باعث شده است تمام خمینه مینکوفسکی پوشش داده نشود. در مختصات جدید، زمان گستره‌ای از $-\infty$ تا $+\infty$ دارد، در صورتی که در مختصات اولیه به خاطر تکینگی در $t = ۰$ گسترش خمینه: مختصات $t < ۰$ امکان‌پذیر نیست.
این واقعیت را می‌توان این‌گونه نیز دید: به راحتی دیده می‌شود که ژئودزیک‌ها در $t = ۰$ کامل‌اند، به این معنی که پارامتر آفین آنها به دلخواه زیاد می‌شود؛ این در حالی است که به ازای $t \to \infty$ ژئودزیک‌ها ناکامل‌اند، به این معنی که پارامتر آفین در این حالت متناهی می‌ماند، که علامت این است که ژئودزیک و خمینه گسترش‌پذیر است. اکنون اگر به فضازمان اولیه خمینه دیگری متناظر با $t' < ۰$ را اضافه کنیم، ژئودزیک‌ها و خمینه کامل می‌شوند.

۲.۸ فضای ریندلر

متریک دوبعدی زیر را در نظر بگیرید

$$ds^۲ = -x^۲dt^۲ + dx^۲ \qquad (۵۱۸)$$

گستره مختصات این است $۰ < x < \infty$ و $-\infty < t < \infty$. متریک در نقطه $x = ۰$ تکینگی دارد، پس خمینه‌ای که این مختصات را می‌پوشاند $۰ \leq x$ را در بر نمی‌گیرد! ژئودزیک‌ها در نقطه $x = ۰$ با طول متناهی قطع می‌شوند، یعنی با پارامتر آفین متناهی می‌شود و ژئودزیک ادامه ندارد. اصطلاحاً می‌گوییم این خمینه به لحاظ ژئودزیکی ناکامل

است. تانسور خمش و نرده‌ای‌های وابسته به آن در نقطه $x = 0$ رفتاری عادی دارند. پس این تکینگی باید مختصاتی باشد. مبدأ کردن مختصات مناسب و بدون تکینگی ساده نیست. روش زیر را برای یافتن مختصات مناسب اختیار می‌کنیم.
ابتدا به بررسی ژئودزیک‌ها می‌پردازیم تا رفتار پارامتر آفین آنها را شناسایی کنیم. ژئودزیک‌های نورگونه از رابطه $ds^2 = 0$ این‌گونه به دست می‌آیند:

$$\left(\frac{dt}{dx}\right)^2 = \frac{1}{x^2} \tag{۵۱۹}$$

که به صورت زیر انتگرال گرفته می‌شود:

$$t = \ln x + const. \tag{۵۲۰}$$

این معادله دو ژئودزیک نورگونه درون-رو و برون-رو را بیان می‌کند. پس دو ثابت u و v را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$u = t - \ln x \tag{۵۲۱}$$

$$v = t + \ln x \tag{۵۲۲}$$

بر روی ژئودزیک‌های برون-رو u مقدار ثابتی است، پس می‌توان این خم‌ها را خطوط مختصاتی جدید v در نظر گرفت و همین‌طور خم مختصاتی u را باژئودزیک‌های درون-رو تعریف کرد. در این مختصات جدید متریک به صورت زیر در می‌آید:

$$ds^2 = e^{v-u} du dv \tag{۵۲۳}$$

مختصات جدید هنوز خمینه را گسترش نمی‌دهد و گستره $0 < x < \infty$ هنوز پابرجا است؛ نقطه $x = 0$ به $v = -\infty$ و $u = +\infty$ منتقل شده است. اما حالا پارامتر u و v از ژئودزیک‌ها را به طریقی تبدیل می‌کنیم تا گسترش خمینه امکان‌پذیر شود. برای این کار به دنبال پارامتر آفین روی این ژئودزیک‌ها می‌رویم. برای این کار از بردار کیلینگ متریک، $\frac{\partial}{\partial t}$ استفاده می‌کنیم. اگر k^μ بردار مماس بر ژئودزیک نورگونه باشد، می‌دانیم که کمیت $k_\mu \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^\mu$ ثابت است. این ثابت را $-E$ می‌نامیم:

$$-E = k_\mu \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^\mu = -x^2 \frac{dt}{d\lambda} \tag{۵۲۴}$$

که در آن λ پارامتر آفین روی ژئودزیک است. از این رابطه پارامتر آفین به دست می‌آید:

$$\lambda = \frac{1}{2E} \int e^{v-u} dt = C + \frac{e^{-u}}{2E} e^{\nu} \tag{۵۲۵}$$

در انتخاب پارامتر آفین جمله ثابت C و هر ضریب ثابتی را می‌توان به دلخواه انتخاب کرد. با توجه به اینکه روی ژئودزیک‌های برون-رو مختصه u ثابت است، پس می‌توان پارامتر آفین روی این ژئودزیک‌ها را این‌گونه انتخاب کرد:

$$\lambda_{\text{برون}} = e^{v} \tag{۵۲۶}$$

به همین طریق روی ژئودزیک‌های درون‌رو پارامتر آفین را چنین اختیار می‌کنیم:

$$\lambda_{\text{درون}} = -e^{-u} \tag{۵۲۷}$$

توجه کنید که این پارامترهای آفین به‌ازای $v = -\infty$ و $u = +\infty$ صفر می‌شوند، یعنی ژئودزیک‌ها کامل نیستند. این ما را هدایت می‌کند به گسترش ژئودیک‌ها و گسترش خمینه. با این شناخت مختصات جدید را منطبق بر این پارامترهای آفین تعریف می‌کنیم:

$$V = e^{v} \tag{۵۲۸}$$

$$U = -e^{-u}$$

متریک برحسب این مختصات می‌شود:

$$ds^2 = -dU dV \tag{۵۲۹}$$

فضازمان اولیهٔ ریندلر متناظر است با بخش $U < 0$ و $V > 0$. اما حالا دیگر در نقطهٔ $s = 0$ تکینگی وجود ندارد، پس می‌توان فضازمان را گسترش داد و گسترهٔ $-\infty < U < \infty$ و $-\infty < V < \infty$ را برای مختصات در نظر گرفت.
اکنون اگر تبدیل جدید زیر را انتخاب کنیم:

$$T = \frac{1}{2}(U + V) \tag{۵۳۰}$$

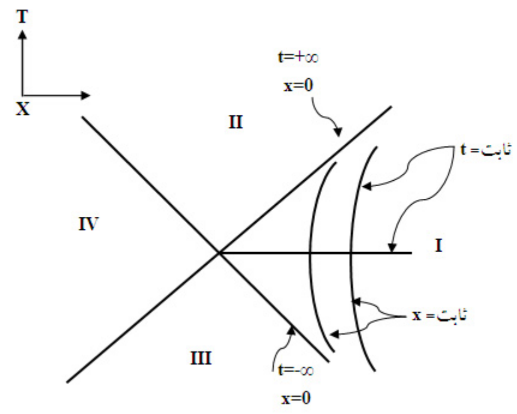
$$X = \frac{1}{2}(U - V)$$

که تمام فضازمان مینکوفسکی است. رابطهٔ این مختصات با مختصات اولیه این گونه است:

$$x = \sqrt{X^2 - T^2} \tag{۵۳۱}$$

$$t = arctanh\frac{T}{X}$$

$X > |T|$ از کل فضازمان مینکوفسکی است.



فضای ریندلر

۳.۸ هندسهٔ شوارتس‌شیلد

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 - \frac{1}{1 - \frac{2M}{r}} dr^2 - r^2 d\Omega^2 \tag{۵۳۲}$$

برای مصور کردن خواص هندسی مقاطع t=ثابت را در نظر می‌گیریم. به‌علاوه می گیریم $v = \frac{\pi}{2}$.

$$d\sigma^2 = \frac{1}{2 - \frac{2M}{r}} dr^2 + r^2 d\phi^2 \qquad \text{متریک فضایی} \tag{533}$$

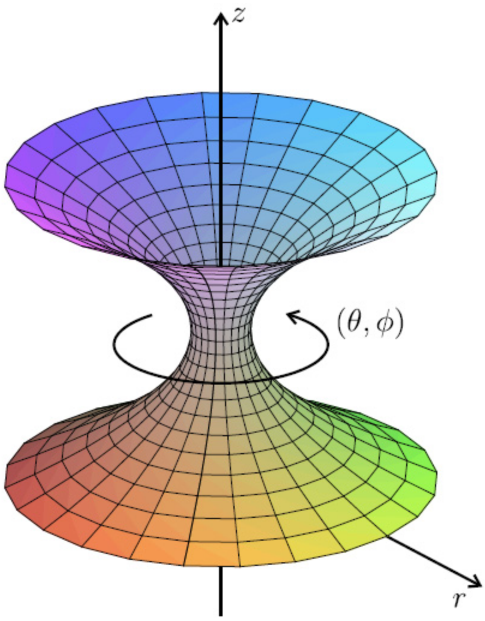
این متریک روی چه سطحی برقرار است. غوطه‌وری در فضای اقلیدسی سه‌بعدی: z, r, ϕ.

$$ds^2 = dz^2 + dr^2 + r^2 d\phi^2 = dr^2 \left[1 + \left(\frac{dz}{dr}\right)^2\right] + r^2 d\phi^2 \tag{534}$$

$$= \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\phi^2$$

$$\left(\frac{dz}{dr}\right)^2 = \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} - 1 \Rightarrow z = \pm\sqrt{8M}.\sqrt{r - 2M} \tag{535}$$

این سطح را سهمی وار فلام می‌نامند که از سال ۱۲۹۶/۱۹۱۷ اولین بار متوجه این هندسهٔ شوارتس‌شیلد شد. توجه کنید که متریک شوارتس‌شیلد متناظر است با نیمهٔ بالایی این سطح که در آن $r > 2M$ است. به این ترتیب مختصات شوارتس‌شیلد فضا را نمی‌پوشانید و نقاط $r < 2M$ نظیر فضایی ندارد!



شکل ۳ :کرمچاله شوارتس‌شیلد در زمان کراسکال v=0

سهمی وار فلام. مختصات شوراتس‌شیلد تنها بخش بالایی این سهمی وار را می‌پوشاند.

۴.۸ افق شوارتس‌شید و افق کیلینگ

در بررسی جواب شوارتس‌شیلد دیدیم که سطوح r = ثابت تا زمانی فضاگونه‌اند که $r > 2m$ باشد و به‌ازای $r < 2m$ به سطوح زمان‌گونه تبدیل می‌شوند. در نتیجه به‌راحتی دیده می‌شود که ابرسطح $r = 2m$ باید ابرسطحی نورگونه باشد. و دیدیم که هیچ سیگنالی نمی‌تواند از بخش $r < 2m$ و از سطح نورگونه‌ی $r = 2m$ عبور کند و به بخش $r > 2m$ برسد. این دلیل نامیدن ابرسطح $r = 2m$ به افق رویداد است: سطح $r = 2m$ شبیه به شامه (غشا)ای رفتار می‌کند که یک طرفه است؛ هر سیگنالی می‌تواند به داخل آن برود اما هیچ سیگنالی از آن خارج نمی‌شود. این اصطلاح را اول بار فینکل‌شتاین در سال ۱۹۵۸/۱۳۳۷ هنگامی که مختصات جدید خود را برای فضای شوارتس‌شیلد تعریف می‌کرد به‌کار برد. برای شناخت بهتر این افق رویداد ابتدا ویژگی‌های ابرسطح‌های نورگونه را بررسی می کنیم.

۱.۴.۸ ویژگی‌های ابرسطح‌های نورگونه

می‌پردازیم به‌عنوان نمونه به فضازمان شوارتس‌شیلد در مختصات ادینگتون–فینکل‌شتاین $(\gamma, \nu, \vartheta, \varphi)$. سطوح دوبعدی ثابت $= S(x^\mu)$ را در این فضا درنظر می‌گیریم. بردار عمود براین ابرسطح می‌شود

$$l = \alpha g^{\mu\nu} \frac{\partial S}{\partial x^\nu} \frac{\partial}{\partial x^\mu} \tag{۵۳۶}$$

یا

$$l^\mu = \alpha g^{\mu\nu} \frac{\partial S}{\partial x^\nu} \tag{۵۳۷}$$

که در آن α طوری تعیین می‌شود که طول بردار بهنجار شود. اگر سطوح $S =$ ثابت را برای فضازمان شوارتس‌شیلد با

$$S(x^\mu) = r - M = \text{ثابت} \tag{۵۳۸}$$

تعریف کنیم، طول این بردار می‌شود

$$l^۲ = \alpha^۲ g^{\mu\nu} \partial_\nu S \partial_\mu S = \left(۱ - \frac{۲M}{r}\right) \alpha^۲ \tag{۵۳۹}$$

بنابراین روی افق $r = ۲M$ داریم

$$l^۲ = ۰ \tag{۵۴۰}$$

و بردار l در نتیجه ابرسطح $r = ۲M$ نورگونه می‌شوند. به‌سهولت دیده می‌شود که در این حالت خم انتگرالی این بردار، یعنی خم $x^\mu(\lambda)$ با شرط

$$l^\mu = \frac{dx^\mu}{d\lambda} \tag{۵۴۱}$$

یک ژئودزیک است.
خم‌های ژئودزیک $x^\mu(\lambda)$، با پارامتر افین λ، که در آن بردارهای $\frac{dx^\mu}{d\lambda}$ عمود بر ابرسطح نورگونه‌ی $\mathcal{N}$ هستند **مولدهای** $\mathcal{N}$ نامیده می‌شوند.

۵.۸ گسترش خمینهٔ شوراتس‌شیلد: مختصات کروسکال

با توجه به دو مثال بخش‌های گذشته، برای شناخت خمینهٔ شوارتس‌شیلد و گسترش ان از مختصات ادینگتون–فینکلشتاین استفاده می‌کنیم. بنابراین از دو مختصهٔ v, u به صورت زیر استفاده می‌کنیم:

$$u = t - r^* \qquad , \qquad r^* = r + ۲m \log\left|\frac{r}{۲m} - ۱\right| \tag{۵۴۲}$$

بخش غیرزاویه‌ای متریک شوراتس‌شیلد می‌شود:

$$ds^۲ = \left(۱ - \frac{۲M}{r}\right) du dv \tag{۵۴۳}$$

با توجه به رابطهٔ:

$$r + ۲m \log\left|\frac{r}{۲m} - ۱\right| = \frac{v - u}{۲} \qquad \text{متریک بالا می‌شود} \tag{۵۴۴}$$

$$ds^2 = \mp \frac{2me^{-\frac{r}{2M}}}{r} e^{\frac{(v-u)}{4m}} dvdu \tag{545}$$

به‌منظور جذب جملهٔ شمایی از مختصات جدیدی استفاده می کنیم.
در این مختصات داریم:

$$U = -e^{-\frac{u}{4m}} \tag{546}$$

$$V = e^{\frac{v}{4m}} \tag{547}$$

$$ds^2 = -\frac{32me^{-\frac{r}{2m}}}{r} dUdV \tag{548}$$

می‌بینیم تکینگی در نقطهٔ $r = 2m$ حذف شده است و تنها تکینگی فیزیکی در نقطه $r = 0$ می‌ماند که نمی‌توان آن را حذف کرد! با تعریف زمان، فضای جدید

$$T = \frac{U+V}{2} \qquad , \qquad X = \frac{V-U}{2} \tag{549}$$

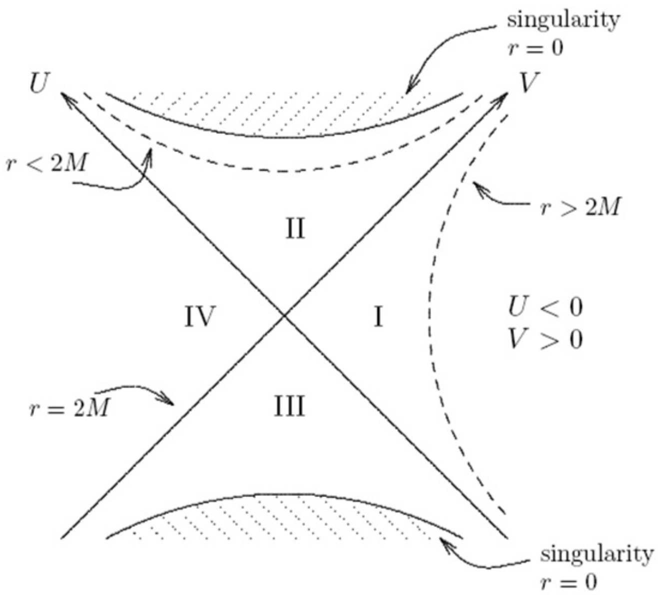
متریک می‌شود:

$$ds^2 = \frac{32M^3e^{-\frac{r}{2m}}}{r}\left(-dT^2 + dX^2\right) + r^2 d\Omega^2 \tag{550}$$

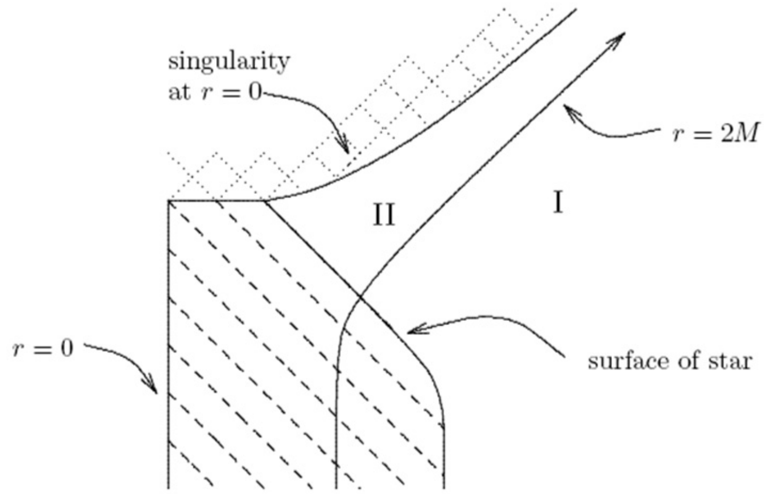
با قید $r > 0$ یا $X^2 - T^2 > -1$. توجه کنیم که تکینگی $r = 0$ اکنون با هذلولی $T^2 - X^2 = 1$ تعریف می‌شود.
روابط زیر هم مختصات جدید و قدیم را مرتبط می کند:

$$\left(\frac{r}{2m} - 1\right) e^{\frac{r}{2M}} = X^2 - T^2 \tag{551}$$

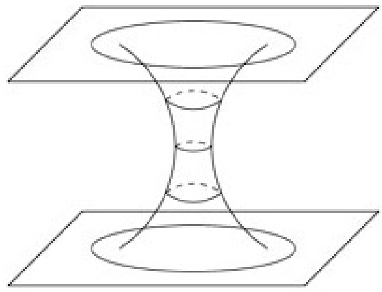
$$\frac{t}{2M} = \ln\left(\frac{T+X}{-T+X}\right) = 2\tanh^{-1}\left(\frac{T}{X}\right) \qquad \text{یا} \qquad \tanh\left(\frac{t}{2M}\right) = \frac{2uv}{u^2+v^2} \tag{552}$$



به ساختار فضایی نمودار کروسکال توجه کنید! چهار بخش این نمودار را در نظر می‌گیریم. متریک شوارتس‌شیلد که به‌ازای $r > ۲M$ تعریف شده‌بود تنها بخش I را می‌پوشاند. بخش II تا هذلولی متناظر با $r = ۰$ ناحیهٔ داخل افق رویداد است و بقیهٔ تکنیگی $r = ۰$! پس ناحیهٔ III و IV چیست؟ توجه کنیم که در ناحیهٔ II مختصهٔ r در امتداد ژئودزیک درون‌رو کاهنده است و چنین ژئودزیکی حتماً به تکینگی $r = ۰$ می‌رسد.
مفهوم سیاهچاله و نیز اینکه هر جسمی که از افق عبور کند به داخل سیاهچاله می‌افتد و از آن خارج نمی‌تواند بشود از این یژگی نتیجه می‌شود. پس اگرژئودزیکی برون‌رو در نظر بگیریم که r افزاینده داشته‌باشد باید از ناحیهٔ مشابه دیگری بیاید که همین ناحیهٔ III است که متناظر است با ناحیهٔ II اما نوترون از آن بیرون باید بیاید این وجه تسمیهٔ سفیدچاله برای این ناحیه است. فوتون یا ذرهٔ دیگری که از این ناحیه بیرون بیاید دیگر به ناحیهٔ I نمی‌آید بلکه وارد ناحیهٔ IV می‌شود.
توجه داشته باشیم که آنچه از واقعیت می‌شناسیم ساختاری کیهانی، مثلاً ستاره یا کهکشان، است که به علت گرانش ناشی از جرم زیاد یا ناحیه‌ای فراچگال می‌رمید، منقبض می‌شود و شعاع آن کاهش می‌یابد. این رمبش کاهش شعاع ساختار کیهانی را می‌توان در نمودار زیر مجسم کرد.



هنگامی‌که هر بخش از ستاره از افق عبور کند داخل آن به سیاهچاله‌ای تبدیل شده است تا اینکه سطح ستاره از افق عبور می‌کند و ساختار ما به سیاهچاله تبدیل می‌شود. همان‌طورکه در فصل ۷ دیدیم این رفتار محتوم هر ساختاری است که جرمی بیش از جرم حدی چاندراسکار دارد.
در مقابل ساختاری در کیهان نمی‌شناسیم که نظیر سفیدچاله باشد. پس سفیدچاله امکانی است که از معادلهٔ انیشتین ناشی می‌شود و متناظر با آن هنوز ساختاری کیهانی نمی‌شناسیم؛ گرچه از بخش‌های گرانش کوانتومی و کیهان اولیه از این مفهوم استفاده شده است.
در نمودار کروسکال مخروط لوز به همان شکل متعارف نسبیت خاصی است. ناحیهٔ I و III ناحیهٔ $r =$ ثابت $> ۲M$ است. ناظرهای ایستا در این ناحیه مجازند، اما نه در ناحیهٔ II و IV. علی‌الاصول ناظرهای ایستای ناحیهٔ I و II می‌توانند از ناحیهٔ IV آمده‌باشند و به ناحیهٔ II فرو بیفتند. این ویژگی است که مفهوم کرمچاله را تولید کرده است.



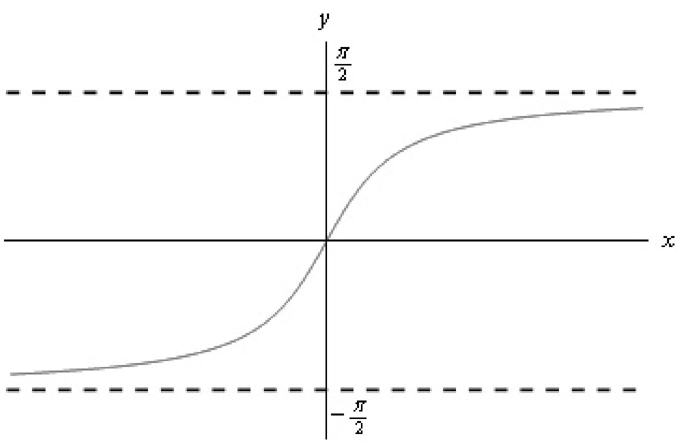
هر سینگنال یا ذره‌ای که به ناحیهٔ II برسد نمی‌تواند از آن فرار کند و الزاماً پس از زمانی متناهی به تکینگی می‌رسد! سیگنال یا ذره‌ای هم که در ناحیهٔ IV است الزاماً زمانی متناهی از تکینگی آمده است! میان ناحیهٔ I و III هیچ ارتباط علی وجود ندارد. این دو ناحیه متناظر با قسمت‌های بالا و پایین سهمی وار فلام هستند و مجاناً تخت‌اند.

۶.۸ نمودار پنروز: تعریف و نمونه برای فضای مینکوفکسی

در تعریف سیاهچاله گاهی گفته می‌شود (پنروز): سیاهچاله ناحیه‌ای است از فضازمان که هیچ سیگنالی از آن نمی‌تواند به بینهایت برسد. این تعریف از این جهت رضایت‌بخش نیست که بینهایت بخشی از فضازمان نیست. در موارد دیگر نیز این‌که بینهایت بخشی از فضازمان نیست در بحث‌ها مزاحمت ایجاد می‌کند. از این‌جهت روشی که بتوان آن‌را به بخش متناهی فضازمان آورد مفید است. در این نوع روش‌ها اگر ساختار علّی و فضازمان حفظ شود بحث شناخت فضازمان بسیار آسان‌تر می‌شود. فشرده‌سازی همدیس این کار را انجام می‌دهد.
برای روشن شدن فشرده‌سازی همدیس، ابتدا فضای مینکوفسکی را در نظر می‌گیریم. می‌خواهیم بینهایت را به مکانی متناهی «منتقل» کنیم و آن‌را بخشی از خمینه در نظر بگیریم، و ساختار آن‌را مطالعه کنیم. متریکی در نظر می‌گیریم که همدیس است با متریک (فیزیکی) $g_{\mu\nu}$:

$$\bar{g}_{\mu\nu} = \Omega^{2} g_{\mu\nu} \qquad (۵۵۳)$$

Ω^{2} ضریب همدیس است.
تمرین: نشان دهید که ژئودزیک‌های نورگونهٔ $g_{\mu\nu}$ و $\bar{g}_{\mu\nu}$ یکسان است.
ژئودزیک‌های نورگونه مخروط نور را تعیین می‌کند، و مخروط نور ساختار علی را. ایدهٔ اصلی در جلو آوردن نهایت استفاده از توابعی مانند $\tan^{-1} x$ است که بازهٔ $(-\infty, +\infty)$ را به $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ منتقل می‌کند.



متریک مینکوفسکی را در نظر می‌گیریم و مختصات v و ω را تعریف می‌کنیم:

$$v = t + r \tag{۵۵۴}$$

$$\omega = t - r \tag{۵۵۵}$$

متریک $\eta_{\mu\nu}$ می‌شود:

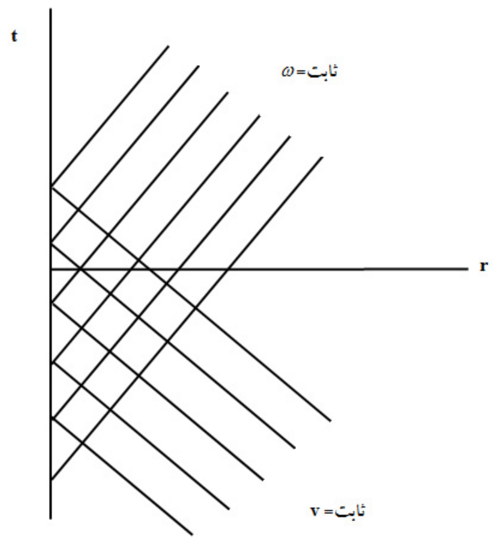
$$ds^۲ = -dvd\omega + \frac{۱}{۴}(v-\omega)^۲(d\vartheta^۲ + \sin^۲\vartheta d\phi^۲) \tag{۵۵۶}$$

توجه:

$$۰ < r < \infty \quad , \quad -\infty < t < +\infty \Rightarrow -\infty < v < \infty \quad , \quad -\infty < \omega < +\infty \tag{۵۵۷}$$

و شرط:

$$r \geq ۰ \Rightarrow v \geq \omega \tag{۵۵۸}$$



حالا تعریف مختصات p و q:

$$p = \tan^{-۱} v \quad , \quad -\frac{\pi}{۲} < p < \frac{\pi}{۲} \tag{۵۵۹}$$

$$q = \tan^{-۱}\omega \quad , \quad -\frac{\pi}{۲} < q < \frac{\pi}{۲} \quad , \quad \text{شرط:}\ p \geq q \tag{۵۶۰}$$

متریک می‌شود:

$$ds^۲ = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu = \frac{۱}{۴}\sec^۲ p \sec^۲ q[-۴dpdq + \sin^۲(p-q)(d\vartheta^۲ + \sin^۲\vartheta d\phi^۲)] \tag{۵۶۱}$$

$$= \left(\frac{۱}{۲\cos p\cos q}\right)^۲ [-۴dpdq + \sin^۲(p-q)(d\vartheta^۲ + \sin^۲\vartheta d\phi^۲)]$$

متریک غیرفیزیکی:

$$ds^2 = -4dpdq + \sin^2(p-q)(d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta d\phi^2) \tag{۵۶۲}$$

ضریب (عامل) همدیس:

$$\Omega^2 = \frac{1}{4}\sec^2 p \sec^2 q \tag{۵۶۳}$$

تغییر مختصات مجدد:

$$t' = p+q \qquad -\pi < t'+r' < \pi \tag{۵۶۴}$$

$$r' = p-q \qquad -\pi < t'-r' < \pi \tag{۵۶۵}$$

$$r' \geq 0$$

پس در نهایت متریک غیرفیزیکی می‌شود:

$$ds^{-2} = -dt'^2 + dr'^2 + \sin^2 r'(d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta d\phi^2) \tag{۵۶۶}$$

متریک عالم ایستای انیشتین!

توپولوژی این جواب استوانه‌ای است. زمان در امتداد مولدهای استوانه است. مقطع‌های ثابت=t' استوانه توپولوژی S^3 دارند. گسترهٔ مختصات این خمینه:

$$-\infty < t' < \infty \qquad 0 \leq r' \leq \pi \qquad ,0 \leq \vartheta \leq \pi \qquad ,-\pi < \phi < \pi \tag{۵۶۷}$$

تکینگی مختصاتی در $r' = 0, \pi$ و $\vartheta = 0, \pi$.

عالم انیشتین را می‌توان به‌صورت استوانهٔ

$$x^2 + y^2 + z^2 + \omega^2 = 1 \tag{۵۶۸}$$

در فضای ۵بعدی تخت با نشانگان ۳+ غوطه‌ور کرد:

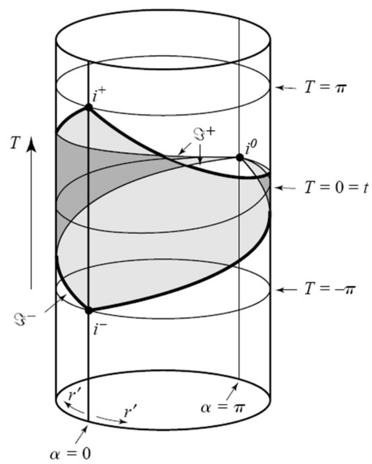
$$ds^2 = -dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2 + d\omega^2 \tag{۵۶۹}$$

هرگاه دوبعد z و ω را فراموش کنیم، آنگاه با استوانهٔ

$$x^2 + y^2 = 1 \tag{۵۷۰}$$

در فضای سه‌بعدی تخت، اما با نشانگان مینکوفسکی، سروکار خواهیم داشت:

$$ds^2 = -dt^2 + dx^2 + dy^2 \tag{۵۷۱}$$



i^-: بینهایت زمان‌گونهٔ گذشته

$t' = -\pi \quad , \quad r' = ۰$

$\Im^-$ (سه‌بعدی): سطح سه‌بعدی نورگونه

بینهایت نورگونهٔ گذشته

$۰ < r' < \pi \quad , \quad t' = -\pi + r'$

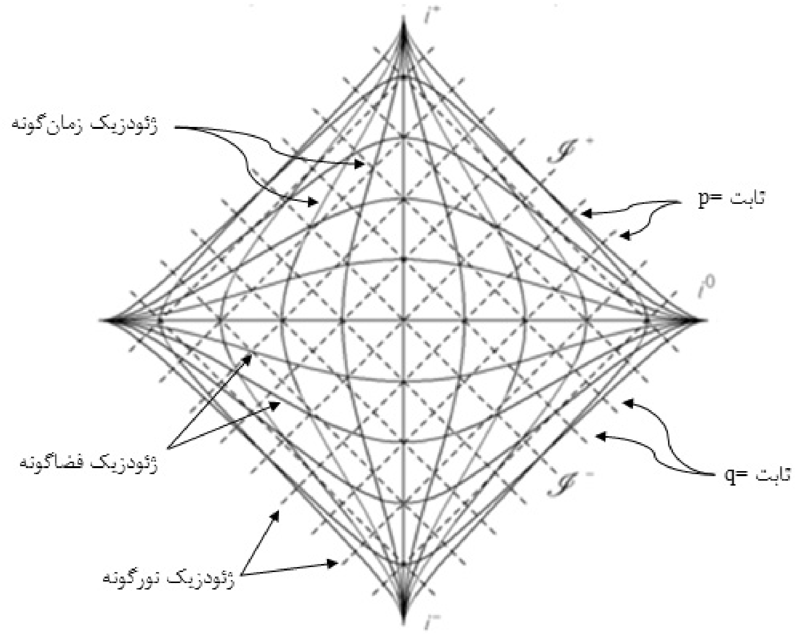
$i^۰$: بینهایت فضایی $r' = \pi$ $\quad t' = ۰$

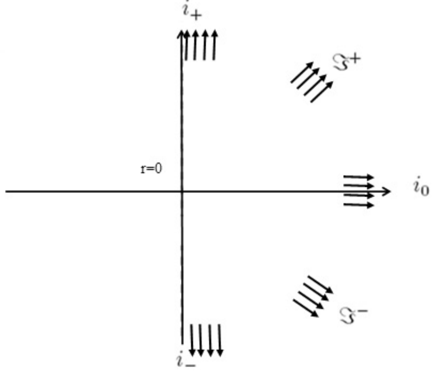
$\Im^+$: سطح سه‌بعدی نورگونه، بینهایت نورگونه آینده

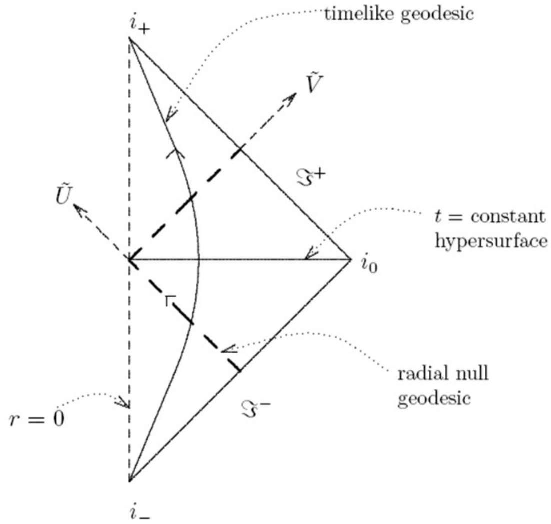
$t' = \pi - r' \quad , \quad ۰ < r < \pi$

i^+: بینهایت زمان‌گونه آینده $t' = \pi, r' = ۰$

توجه: همه ژئودزیک‌های زمان‌گونه از i^- شروع می‌شوند و به i^+ ختم می‌شوند!







نمودار پنروز، برای فضازمان مینکوفسکی
(دوبعد کنار گذاشته شده است)

۷.۸ نمودار پنروز فضای شوارتس‌شیلد

نمودار پنروز برای فضای کروسکال

مختصات U و V را به مختصات نورگونهٔ جدید در جواب کروسکال تبدیل می‌کنیم:

$$ds^۲ = \frac{۳۲M}{r} e^{\frac{-r}{۲M}} dV dU - r^۲ d\Omega^۲ \tag{۵۷۲}$$

که در آن r از این رابطه به‌دست می‌آید:

$$VU = \left(\frac{r}{۲M} - ۱\right) e^{\frac{r}{۲M}} \tag{۵۷۳}$$

اکنون این تبدیل را اعمال می‌کنیم:

$$V' = \arctan\left(\frac{V}{\sqrt{۲M}}\right) \tag{۵۷۴}$$

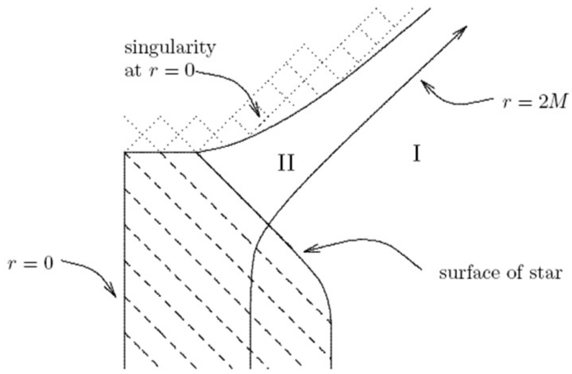
$$U' = \arctan\left(\frac{U}{\sqrt{۲M}}\right) \tag{۵۷۵}$$

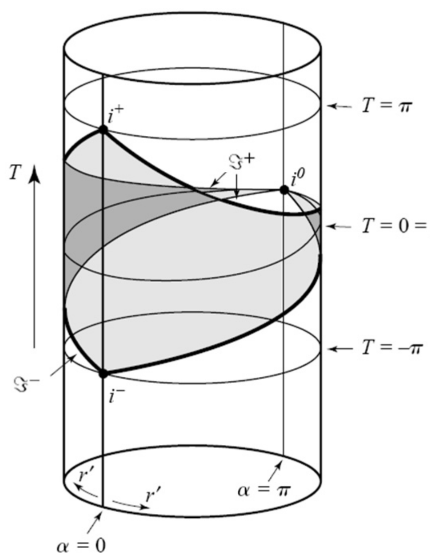
با گسترهٔ:

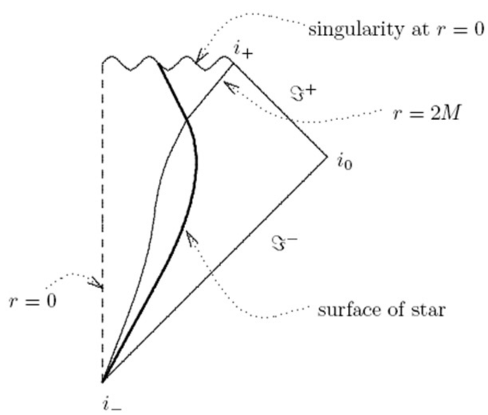
$$-\frac{\pi}{۲} < U' < +\frac{\pi}{۲} \tag{۵۷۶}$$

$$-\frac{\pi}{۲} < V' < \frac{\pi}{۲} \tag{۵۷۷}$$

$$-\pi < U' + V' < \pi \tag{۵۷۸}$$







پرسش‌ها

۱. ژئودزیک‌های متریک $ds^۲ = -\frac{dt^۲}{t^۴} + dx^۲$ در بینهایت و در نقطهٔ $t = ۰$، چه اشکالی دارند؟ آیا این ژئودیک‌ها کامل‌اند؟
۲. بخش پایینی سهمیوار فلام جزو خمینهٔ شوارتس‌شیلد نیست. چرا؟ چه تعبیری برای این بخش دارید؟
۳. در مبحث گسترش خمینه، پس از بررسی ژئودزیک‌ها، از تبدیل مختصاتی مبتنی بر رفتار ژئودزیک‌ها استفاده کردیم. چگونه است که تبدیل مختصات می‌تواند منجر به گسترش خمینه بشود؟
۴. مختصات شوارتس‌شیلد را در نظر بگیرید. به ازای $r < ۲M$ این مختصه زمان‌گونه می‌شود. این گزاره یعنی چه؟ و چرا؟
۵. ساختارهای کیهانی جرم‌های مختلف و شعاع‌های مختلف دارند. مثلاً جرم و شعاع زمین یا خورشید به‌گونه‌ای است که شعاع آن‌هاا چندین مرتبهٔ بزرگی از شعاع شوارتس‌شیلد آن‌ها بزرگتر است. آیا این ساختارهای بزرگتر، مانند کهکشان‌ها یا خوشه‌های کهکشانی ممکن است به نوعی باشند که شعاع آن‌ها با شعاع شوارتس‌شیلد آن‌ها قابل مقایسه باشد؟
۶. افق شوارتس‌شیلد ابرسطحی نورگونه است. فوتونی که روی ژئودزیکی شعاعی و نورگونه به سمت مرکز سیاهچاله می‌رود این افق را چگونه می‌بیند؟ نور که از نور نمی‌تواند پیشی بگیرد!
۷. در مرکز کهکشان ما یک سیاهچالهٔ پرجرم قرار دارد به جرم حدود $۱۰^۶$ جرم خورشید. منظومهٔ شمسی ما هم در لبهٔ کهکشان قرار دارد. با فرض این‌که می‌توانیم متریک شوارتس‌شیلد را در داخل کهکشان به‌کار ببریم، مختصات وصل به منظومهٔ شمسی آیا همان مختصات شوارتس‌شیلد است؟
۸. گیریم ناظر وصل به منظومهٔ شمسی شاهد سقوط ستاره‌ای به داخل سیاهچالهٔ مرکز کهکشان باشد. آیا این ناظر می‌گوید این سقوط بینهایت زمان برای عبور از افق طول می‌کشد؟
۹. راهی پیشنهاد کنید برای این‌که در اخترفیزیک با رصد بتوان سیاهچاله‌ای را کشف کرد.
۱۰. در مختصات کروسکال، تکینگی مرکز سیاهچاله دیگر نقطه نیست، بلکه یک ابرسطح است. این ابرسطح از چه نوع است؟ نورگونه، فضاگونه یا زمان‌گونه؟ تعجب نمی‌کنید؟

تمرین‌ها

۱. فضای ریندلر را در نظر بگیرید. خطوط ثابت= x، را می‌توان جهان‌خط ناظری شتابدار در فضای مینکوفسکی X و T به‌حساب آورد. مقدار این شتاب چقدر است؟
۲. ژئودزیک‌های نورگونهٔ درون‌رو در مختصات ادینگتون–فینکلشتاین با رابطهٔ ثابت= v، بیان می‌شوند. در داخل افق می‌توان دید که r کاهنده است و زمان‌گونه. سعی کنید با شباهتی که میان این ژئودزیک‌های برون‌رو (ثابت= u) وجود دارد، نشان دهید که فضای داخل افق متناظر است با فضای خارجی با tی کاهنده.
۳. نشان دهید ویژه زمان رسیدن یک ژئودزیک شعاعی به تکینگی $r = ۰$ متناهی است.
۴. نشان دهید افق رویداد شوارتس‌شیلد ابرسطحی است نورگونه.
۵. نشان دهید اگر $\mathcal{N}$ ابرسطحی نورگونه باشد بردار عمود بر آن خمی انتگرالی تعریف می‌کند که ژئودزیک است.
۶. در فضازمان شوارتس‌شیلد دسته ژئودزیکی نورگونه شعاعی درون‌رو با بردار مماس l^μ درنظر بگیرید. انبساط این دسته، ϑ_-، را حساب کنید. علاوه‌براین برای دسته ژئودزیکی نورگونه‌ی شعاعی برون‌رو با بردار n^μ نرده‌ای انبساط، ϑ_+، را حساب کنید. نتیجه را در r–های مختلف، از جمله در $r = ۲M$ بحث کنید. افزایشی یا کاهشی بودن هر دو نرده‌ای را برای هر یک از دسته ژئودزیک‌ها بحث کنید.

دانشگاه صنعتی شریف
گرانش و نسبیت عام-۱

شماره درس ۲۴۱۴۸-۱

فصل ۹: متریک کر

رضا منصوری

ویراست ۰.۱

ادریبهشت ۱۳۹۲

۱.۹ شکل کلی متریک مانا با تقارن محوری

متریک میدانی که بیانگر توده جرمی کروی چرخان باشد چیست؟ این متریک را کر $(Kerr)$ در سال ۱۹۶۳/۱۳۴۲ منتشر کرد. می‌خواهیم متریک مانا با تقارن استوانه‌ای باشد (چرا؟).
برای بیان تقارن استوانه‌ای مختصاتی انتخاب می‌کنیم که زمان $x^0 = t$ و زاویه سمتی $x^1 = \phi$ حول محور تقارن به‌صورتی که متریک تنها تابعی از دو مختصه دیگر بشود $g_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}(x^2, x^3)$. با توجه به شرایط مسئله و فرض توده جرم چرخان مرکزی می‌توان فرض کرد که متریک تقارن دیگری هم دارد (چرا؟)

$$t \to -t \qquad , \qquad \phi \to -\phi \tag{۵۷۹}$$

به سادگی دیده می‌شود که از این تقارن صفر شدن مؤلفه‌های زیر نتیجه می‌شود:

$$g_{02} = g_{03} = g_{12} = g_{13} = 0 \tag{۵۸۰}$$

پس می‌توان متریک را چنین نوشت:

$$ds^2 = g_{00}dt^2 + 2g_{01}dtd\phi + g_{11}d\phi^2 + [g_{22}(dx^2)^2 + 2g_{23}dx^2dx^3 + g_{33}(dx^2)^2] \tag{۵۸۱}$$

که در آن تمام مؤلفه‌های متریک فقط تابع x^3, x^2 است.
می‌توان نشان داد که متریک بخش دوبعدی (x^2, x^3) را می‌توان به این صورت نوشت:

$$d\sigma^2 = -e^{2\mu}[(dx^2)^2 + (dx^3)^2] \tag{۵۸۲}$$

علامت – به این دلیل انتخاب شده است تا نشانگان متریک ۴بعدی $(- - - +)$ باشد! به‌این‌ترتیب متریک ۴بعدی را می‌توان نوشت:

$$ds^2 = e^{2\nu}dt^2 - e^{2\psi}(d\phi - \omega dt)^2 - e^{2\mu}(dx^2)^2 - e^{2\mu}(dx^2)^2 \tag{۵۸۳}$$

۲.۹ کشش چارچوب لخت

برای متریک (۵) مختصات ناهولونوم با پایه‌های زیر تعریف می‌کنیم:

$$e_0 = (e^{\nu}, 0, 0, 0,)$$
$$e_1 = (\omega e^{\psi}, -e^{\psi}, 0, 0)$$
$$e_2 = (0, 0, 0, -e^{\mu}, 0)$$
$$e_3 = (0, 0, 0, -e^{\mu}) \tag{۵۸۴}$$

این بایدها متعامداند:

$$e^{\mu}_a e_{b\mu} = \eta_{ab} \tag{۵۸۵}$$

a, b شاخص‌های شمارندهٔ چارتایه هستند! در این پایه‌ها می‌شود:

$$ds^2 = \eta_{ab}e^a a^b = \eta^{ab}e_a e_b \tag{۵۸۶}$$

این پایه‌ها نشانگر یک چارچوب لخت موضعی‌اند! جهان‌خط نقطه‌ای را در نظر بگیرید با چهار سرعت u^2:

$$u^0 = \frac{dt}{ds} = \frac{e^{-\nu}}{\sqrt{1 - V^2}} \quad , \quad u^1 = \frac{d\phi}{ds} = \Omega u^0 \quad u^i = \frac{dx^i}{ds} = u^0 v^i \quad i = 1, 2 \tag{۵۸۷}$$

که در آن:

$$\Omega = \frac{d\phi}{dt} \quad , \quad v^i = \frac{dx^i}{dt} \tag{۵۸۸}$$

و

$$V^2 = e^{2\psi - 2\nu}(\Omega - \omega)^2 + e^{2\mu - 2\nu}[(v^2)^2 + (v^3)^2] \tag{۵۸۹}$$

مؤلفه‌های این چارسرعت در پایه‌های ناهولونوم (لخت موضعی) می‌شود:

$$u^a = e^a_\mu u^\mu = \eta^{ab} e_{b\mu} u^\mu \tag{۵۹۰}$$

برای این مؤلفه‌های ناهولونوم سرعت در چارچوب لخت موضعی داریم:

$$u^0 = \frac{1}{\sqrt{1 - V^2}} \quad , \quad u^1 = \frac{e^{\psi - \nu}(\Omega - \omega)}{\sqrt{1 - V^2}} \quad , \quad u^i = \frac{e^{\mu - \nu} v^i}{\sqrt{1 - V^2}} \tag{۵۹۱}$$

ذره را در مسیر دایره‌ای با سرعت زاویه‌ای Ω در نظر بگیرید. سرعت زاویه‌ای این ذره در مختصات لخت موضعی می‌شود $e^{\psi-\nu}(\Omega - \omega)$. پس نقطه‌ای که در دستگاه لخت موضعی ساکن است با سرعت زاویه‌ای ω «کشیده» می‌شود.این اثر را «کشش چهارچوب لخت» می‌نامند. می‌توان نشان داد که اگر متریک (۵) مجانبا تخت باشد، آنگاه:

$$\omega \to 2\Im r^{-3} \tag{۵۹۲}$$

که در آن $\Im$ ثابت است و از آن تعبیر تکانهٔ زاویه‌ای چشمه می‌شود!

۳.۹ قضیهٔ روبینسون-کارتر

جواب‌های مانا با تقارن محوری معادله‌های خلا انیشتین، که یک افق رویداد کوژ دارند، مجانباً تخت‌اند، و خارج افق ناتکین‌اند، به‌طور یکتا با تنها دو پارامتر مشخص می‌شوند، جرم و تکانهٔ زوایه‌ای.
جواب کر اثبات وجود جواب معادله‌های انیشتین با این خصوصیات است.

۴.۹ شکل متریک کر از روش محاسبهٔ مبتنی بر فرض‌های اولیه

هرگاه روش استدلال بخش ۲.۹ را برای یافتن جواب کر ادامه دهیم کمابیش به شکل زیر برای متریک می‌رسیم (چاندراسکار ۱۹۸۳: نظریه ریاضی سیاهچاله‌ها):

$$ds^2 = \frac{\Delta}{\rho^2}(dt - a\sin^2\vartheta d\phi)^2 - \frac{\sin^2\vartheta}{\rho^2}[(r^2 + a^2)d\phi - adt]^2 - \frac{\rho^2}{\Delta}dr^2 - \rho^2 d\vartheta^2 \tag{۵۹۳}$$

که در آن:

$$\Delta = r^2 - 2mr + a^2 \quad , \quad \rho^2 = r^2 + a^2\sin^2\vartheta^2 \tag{۵۹۴}$$

روش ساده‌ای برای دست‌یابی به همین شکل متریک، که متریک کر از مختصات بویر-لینکوئیست نامیده می‌شود وجود دارد که در آن از یک چارتایه نورگونه استفاده می‌شود که مبنای فرمول‌بندی نیومن-پنروز است.

چارتایه‌های نورگونه

ابتدا چارتایهٔ بردارهای ناهولونوم e^μ_a را در نظر بگیرید:

$$g_{ab} = g_{\mu\nu} e^\mu_a e^\nu_a \tag{۵۹۵}$$

که در آن g_{ab} متریک در مختصات ناهولونوم است.
e_0 را زمان‌گونه و بقیهٔ بردارها را فضاگونه می‌گیریم. حالا دو بردار نورگونه به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$l^\mu = \frac{1}{\sqrt{2}}(e^\mu_0 + e^\mu_1) \quad , \quad n^\mu = \frac{1}{\sqrt{2}}(e^\mu_0 - e^\mu_1) \tag{۵۹۶}$$

به‌طوری‌که:

$$l_\mu l^\mu = n_\mu n^\mu = 0 \quad , \quad l_\mu n^\mu = 1 \tag{۵۹۷}$$

برای دو بردار دیگر از تعریف یک بردار مختلط استفاده می‌کنیم:

$$m^\mu = \frac{1}{\sqrt{2}}(e^\mu_3 + i e^\mu_4) \quad , \quad \bar{m}^\mu = \frac{1}{\sqrt{2}}(e^\mu_3 - i e^\mu_4) \tag{۵۹۸}$$

به‌سادگی دیده می‌شود که:

$$m_\mu m^\mu = \bar{m}_\mu \bar{m}^\mu = 0 \quad , \quad m_\mu \bar{m}^\mu = -1 \tag{۵۹۹}$$

با فرض این‌که بردارهای e^μ_a متعامد بهنجار لورنتس است، برای متریک متناظر با این جارتایهٔ نورگونه از رابطهٔ (۱۷) به‌دست می‌آید:

$$g_{ab} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \tag{۶۰۰}$$

سپس متریک در مختصات هولونوم برحسب این بردارهای نورگونه می‌شود:

$$g_{\mu\nu} = l_\mu n_\nu + l_\nu n_\mu - m_\mu \bar{m}_\nu - \bar{m}_\mu m_\nu \tag{۶۰۱}$$

و

$$g^{\mu\nu} = l^\mu n^\nu + l^\nu n^\mu - m^\mu \bar{m}^\nu - \bar{m}^\mu m^\nu \tag{۶۰۲}$$

اکنون متریک شوارتس‌شیلد را در مختصات پیشرو ادینگتن–فینکلشتاین (مختصات v, r, ϑ, ϕ) به‌عنوان یک جواب معادله‌های انیشتین درنظر بگیرید. مؤلفه‌های هموردای این متریک متناظر است با جارتایهٔ نورگونهٔ زیر (تمرین):

$$l^\mu = (0, 1, 0, 0) = \delta^\mu_1$$

$$n^\mu = \left(-1, -\frac{1}{2}\left(1 - \frac{2m}{r}\right), 0, 0\right) = -\delta^\mu_0 - \frac{1}{2}\left(1 - \frac{2m}{r}\right)\delta^\mu_1$$

$$m^\mu = \frac{1}{\sqrt{2}r}\left(0, 0, 1, \frac{i}{\sin\vartheta}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}r}\left(\delta^\mu_2 + \frac{i}{\sin\vartheta}\delta^\mu_3\right) \tag{۶۰۳}$$

شگرد زیر را به‌کار می‌گیریم. ابتدا مختصهٔ r را مختلط می‌گیریم تا چارتایه بشود:

$$l^\mu = \delta^\mu_1$$

$$n^\mu = -\delta^\mu_0 - \frac{1}{2}[1 - m(r^{-1} + \bar{r}^{-1})]\delta^\mu_1 \tag{۶۰۴}$$

$$m^\mu = \frac{1}{\sqrt{2}\bar{r}}\left(\delta^\mu_2 + \frac{i}{\sin\vartheta}\delta^\mu_3\right)$$

پس l^μ و n^μ حقیقی‌اند و m^μ و $\bar{m}^\mu$ مختلط همیوغ. اکنون در مختصات (v, r, ϑ, ϕ) تبدیل مختلط زیر را اعمال می‌کنیم:

$$v \to v' = v + ia\cos\vartheta$$

$$r \to r' = r + ia\cos\vartheta \tag{۶۰۵}$$

$$\vartheta' = \vartheta \qquad \phi' = \phi$$

حالا، اگر فرض کنیم v' و r' حقیقی‌اند. چارپایهٔ زیر را به‌دست می‌آوریم:

$$l'^\mu = \delta^\mu_1$$

$$n'^\mu = -\delta^\mu_0 - \frac{1}{2}\left(1 - \frac{2mr'}{r'^2 + a^2\cos^2\vartheta}\right)\delta^\mu_1 \tag{۶۰۶}$$

$$m'^\mu = \frac{1}{\sqrt{2(r' + ia\cos\vartheta)}}\left(-ia\sin\vartheta(\delta^\mu_0 + \delta^\mu_1) + \delta^\mu_2 + \frac{i}{\sin\vartheta}\delta^\mu_3\right)$$

این همان جواب کر است که منجر به جواب زیر می‌شود:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2mr}{\rho^2}\right)dv^2 - 2dvdr + \frac{2mr}{\rho^2}(2a\sin^2\vartheta)dvd\bar{\phi} + 2a\sin^2\vartheta drd\bar{\phi} - \rho^2 d\vartheta^2$$

$$-\left[(r^2 + a^2)\sin^2 + \frac{2mr}{\rho^2}(a^2\sin^4\vartheta)\right]d\bar{\phi}^2 \tag{۶۰۷}$$

این شکل متریک کر گاهی شکل ادینگتن–فینکلشتاین پیشرو نامیده می‌شود. با تعریف مختصات $(t, r, \vartheta, \varphi)$ به‌صورت:

$$d\vartheta = d + \frac{2mr + \Delta}{\Delta}dr$$

$$d\bar{\phi} = d\phi + \frac{a}{\Delta} \quad , \quad \Delta = r^2 - 2mr + a^2 \tag{۶۰۸}$$

متریک بالا به شکل (۱۵)، یعنی در مختصات بویر–لینکوئیست درمی‌آید.

شکل اصلی متریک کر

متریک کر را می‌توان به مختصات دکارتی به‌صورت زیر نوشت:

$$ds^2 = d\bar{t} - dx^2 - dy^2 - dz^2$$

$$- \frac{2mr^3}{r^4 + a^2 z^2}\left[d\bar{t} - \frac{r}{r^2+a^2}(xdx+ydy) + \frac{a}{r^2+a^2}(ydx - xdy) - \frac{z}{r}dz\right]^2 \qquad (۶۰۹)$$

که در آن:

$$t^- = v - r$$

$$x = r\sin\vartheta\cos\phi + a\sin\vartheta\sin\phi$$

$$y = r\sin\vartheta\sin\phi - a\sin\vartheta\cos\phi$$

$$z = r\cos\vartheta \qquad (۶۱۰)$$

در نتیجه داریم:

$$r^4 - r^2(x^2+y^2+z^2-a^2) - a^2z^2 = 0 \qquad (۶۱۱)$$

واضح است که متریک کر همه‌جا تحلیلی است مگر در:

$$x^2+y^2+z^2 = a^2 \quad , \quad z = 0 \qquad (۶۱۲)$$

پس این متریک یک تکینگی حلقه‌ای در صفحه $(x-y)$ دارد. متریک (۳۱) به شکل کلی

$$ds^2 = (\eta_{\mu\nu} - \lambda l_\mu l_\nu)dx^\mu dx^\nu \qquad (۶۱۳)$$

است. این شکل متریک را شکل کر–شیلد می‌نامند. جواب‌هایی از معادلهٔ انیشتین که به این سبک نوشته می‌شوند دستهٔ معروفی از جواب‌ها هستند که متریک کر یکی از آنها است.
توجه کنید که چاربردار l^μ در اینجا نورگونه است. متریک (۳۱) از نوع (۳۵) است که در آن:

$$l = \left(1, \frac{rx+ay}{a^2+y^2}, \frac{ry-ax}{a^2+y^2}, \frac{z}{r}\right) \qquad (۶۱۴)$$

و

$$\lambda = \frac{2mr^3}{r^4+a^2z^2} \qquad (۶۱۵)$$

کر جواب اصلی خودش را با استفاده از این شکل به‌دست آورد.
پرسش: متریک شوارتس‌شیلد را به شکل کر–شیلد درآورید!

۵.۹ ویژگی‌های اصلی متریک کر

الف) در $a=\text{۰}$ متریک کر به متریک شوارتس‌شیلد تبدیل می‌شود، و m نقش جرم را به‌عهده می‌گیرد.
ب) متریک مانا است با تقارن محوری: $\frac{\partial}{\partial t}$ و $\frac{\partial}{\partial \phi}$ بردارهای کیلینگ‌اند. برای ناظرهایی که جهان‌خط‌شان بر این بردارها مماس است هندسهٔ موضعی در طول زمان ناوردا است. از جمله جهان‌خط‌های $t=\tau$، $\phi=\Omega\tau$، $r=$ ثابت و $\vartheta=$ ثابت از این نوع‌اند و نمایندهٔ ناظرهای مانا هستند با سرعت زاویه‌ای Ω حول محور دوران z. ناظرهای ساکن ($\Omega=\text{۰}$) نسبت به چارچوب لخت در بینهایت (مجانبی) نمی‌چرخند (توجه: کشش چارچوب موضعی!) بردار $\frac{\partial}{\partial t}$ به‌طور مجانبی عمود برابر رویه است.
ج) تقارن گسسته: $\quad t\to -t \quad , \quad \phi\to-\phi$
به‌علاوه متریک تحت تبدیلی $a\to -a \quad , \quad t\to -t$ ناوردا است. این ویژگی هم تاکید دارد بر این‌که a با چرخش حول محور (z) مرتبط است.
د) مجانباً تخت: $\quad g_{\mu\nu}\to\eta_{\mu\nu} \quad : r\to\infty$
هـ) مختصات r,ϑ,ϕ در متریک کر (بویر-لینکوئیست) مختصات کروی متعارف نیستند! برای تشخیص ابتدا ببینیم متریک مینکوفسکی (کر در بینهایت) در مختصات چرخان به چه شکلی است؛ مختصات پریم‌دار را برای دستگاه چرخان می‌گیریم:

$$r'=r \qquad , \qquad \phi'=\phi-at \qquad , \qquad z'=z$$

$$ds^{\text{۲}}=(\text{۱}-a^{\text{۲}}r^{\text{۲}})dt^{\text{۲}}-\text{۲}ar^{\text{۲}}dtd\phi'-(dr^{\text{۲}}+r^{\text{۲}}d\phi'^{\text{۲}}+dz^{\text{۲}}) \tag{۶۱۶}$$

جملهٔ ضربدری $dtd\phi'$ بیانگر مانایی متریک است! باید بتوانید نشان دهید که متریک کر در حالت $m=\text{۰}$ در بینهایت به این شکل درمی‌آید. اما کشش چارچوب لخت موضعی این مقایسه را برای نقطه‌های متناهی مشکل می‌کند! درواقع r در بویر-لینکوئیست تنها در بینهایت با مختصهٔ کروی r مطابقت دارد! مختصهٔ استاندارد کروی R را بنویسیم:

$$R^{\text{۲}}=x^{\text{۲}}+y^{\text{۲}}+z^{\text{۲}} \tag{۶۱۷}$$

و از (۳۲) داریم:

$$=r^{\text{۲}}+a^{\text{۲}}\sin^{\text{۲}}\vartheta \tag{۶۱۸}$$

به‌ازای $r\gg a$ داریم:

$$R=r+\frac{a^{\text{۲}}\sin^{\text{۲}}\vartheta}{\text{۲}r}=\cdots \tag{۶۱۹}$$

که یکسان بودن این دو مختصه را در بینهایت می‌بینیم.
و) در تقریب میدان ضعیف جملهٔ $\frac{1}{R}$ در مؤلفهٔ $g_{..}$ تعیین‌کنندهٔ جرم است. همین‌طور در این تقریب جملهٔ $\frac{1}{R}$ در مؤلفهٔ $g_{.i}$ تعیین‌کنندهٔ تکانهٔ زاویه‌ای است. بسط $\frac{1}{R}$ متریک کر در مختصات دکارتی می‌دهد:

$$ds^{\text{۲}}=\left(\text{۱}-\frac{\text{۲}m}{R}+\cdots\right)dt^{\text{۲}}-\frac{\text{۴}ma}{R^{\text{۳}}}(xdy-ydz)dt+\cdots \tag{۶۲۰}$$

پس تکانهٔ زاویه‌های کل باید متناسب باشد با ma!

۶.۹ تکینگی‌ها و افق

الف) تکینگی ذاتی: ناورداهای ریمان نشان می‌دهد که $\rho=\text{۰}$ تکینگی ذاتی است:

$$\rho^{\text{۲}}=r^{\text{۲}}+a^{\text{۲}}\cos^{\text{۲}}\vartheta=\text{۰}\Rightarrow r=\text{۰}=\cos\vartheta \qquad \vartheta=\frac{\pi}{\text{۲}} \tag{۶۲۱}$$

این همان حلقهٔ تکین است که قبلاً از آن صحبت کردیم:

$$x^۲ + y^۲ = a^۲ \qquad , \qquad z = ۰ \tag{۶۲۲}$$

a تعیین‌کنندهٔ تکانهٔ زاویه‌ای است. به‌ازای $a = ۰$ این همان تکینگی $r^۲ = x^۲ + y^۲ = ۰$ شوارتس‌شیلد است. پس چرخش این تکینگی را به حلقه‌ای در صفحهٔ $z = ۰$ تبدیل می‌کند.
ب) رویه با انتقال به سرخ بینهایت: می‌توان نشان داد (تمرین) که رویهٔ انتقال به سرخ بینهایت در متریک کر هم، شبیه به متریک شوارتس‌شیلد از صفر شدن $g_{..}$ به‌دست می‌آید:

$$g_{..} = \frac{۱}{\rho^۲}(r^۲ - ۲mr + a^۲\cos^۲\vartheta) = ۰ \tag{۶۲۳}$$

در نتیجه این رویه می‌شود:

$$r_{S_\pm} = m \pm (m^۲ - a^۲\cos^۲\vartheta)^{\frac{۱}{۲}} \tag{۶۲۴}$$

$a = ۰$ حالت: شوارتس‌شیلد؛ داریم $r = ۲m$ و $r = ۰$، که همان سطوح انتقال به سرخ بینهایت است.
$a < m$: که حالت متعارف فیزیکی است.

$$S_+ : \begin{cases} r_+ = ۲m & \vartheta = \frac{\pi}{۲} \quad \text{استوا} \\ r_+ = m + \sqrt{m^۲ - a^۲} & \vartheta = ۰ \quad \text{قطب} \end{cases} \tag{۶۲۵}$$

$$S_- : \begin{cases} r_- = ۰ \quad [x^۲ + y^۲ - a^۲] & \vartheta = \frac{\pi}{۲} \\ r_- = m - \sqrt{m^۲ - a^۲} & \vartheta = ۰ \end{cases} \tag{۶۲۶}$$

S_- کاملاً داخل S_+ است. در $\vartheta = \frac{\pi}{۲}$ $\quad r_-$ مماس است بر تکینگی S_-!
پس در این حالت $a < m$، دو افق رویداد وجود دارد.
ج) افق رویداد: ابتدا خوب است ببینیم سطوح انتقال به سرخ بینهایت چه سطوحی هستند! در مورد شوارتس‌شیلد سطح انتقال به سرخ بینهایت، $r = ۲M$، نورگونه است. همین‌طور بردار کیلینگ $X = \frac{\partial}{\partial t}$ در متریک شوارتس‌شیلد، که در بیرون افق زمان‌گونه است، در داخل آن تغییر علامت می‌دهد و فضاگونه می‌شود. روی افق هم نورگونه است. همین بردار را در تعریف کر نگاه می‌کنیم:

$$X^۲ = X^\mu X^\nu = g_{\mu\nu}X^\mu X^\nu = g_{..} \tag{۶۲۷}$$

از عبارت $g_{..}$ می‌توان دید که X
خارج از S_+ و داخل S_- زمان‌گونه است.
روی S_+ و S_- نورگونه است.
میان S_+ و S_- فضاگونه است.
حالا افق رویداد را رویه‌ای $r =$ ثابت تعریف می‌کنیم که نورگونه باشد. این رویه با $g^{۱۱} = ۰$ تعریف می‌شود (تمرین). در مختصات بویر–لینکوئیست داریم:

$$g'' = -\frac{\Delta}{\rho^۲} = -\frac{r^۲ - ۲mr + a^۲}{r^۲ + a^۲\cos^۲\vartheta} \tag{۶۲۸}$$

بنابراین با فرض $a < m$، دو افق رویداد به‌دست می‌آید:

$$r = r_\pm = m \pm (m^۲ - a^۲)^{\frac{۱}{۲}} \tag{۶۲۹}$$

پس در این مختصات می‌توان سه ناحیه ناتکین تمیز داد:

$$\begin{array}{ll} I & r_+ < r \\ II & r_- < r < r_+ \\ III & 0 < r < r_- \end{array} \qquad (630)$$

در حد شوارتس شیلد، $a \to 0$، دو افق r_+ و r_- برهم منطبق می‌شوند، که بر رویه‌های S_+ و S_- نیز منطبق است. یعنی افق رویداد، افق کوشی (r_-)، و نیز رویه‌های انتقال به سرخ بینهایت همگی برهم منطبق است.
ناحیهٔ میان رویهٔ S_+ و r_+ را $ergoshere$ می‌نامند (کار کره). رویهٔ S_+ ناحیهٔ I میان r_+ و $r = \infty$ را به دو قسمت تقسیم می‌کند با ویژگی متفاوت: خم نورگونهٔ

$$dr = 0 = d\vartheta \qquad , \qquad ds^2 = 0 \qquad (631)$$

را در نظر بگیرید. این شرط در مختصات بویر-لینکوئیست می‌شود:

$$\frac{\Delta}{\rho^2}(dt - a\sin^2\vartheta d\phi)^2 - \frac{\sin^2\vartheta}{\rho^2}[(r^2+a^2)d\phi - adt]^2 = 0 \qquad (632)$$

و از آنجا

$$\frac{d\phi}{dt} = \frac{a\sin\vartheta \pm \Delta^{\frac{1}{2}}}{(r^2+a^2)\sin\vartheta \pm a\Delta^{\frac{1}{2}}\sin^2\vartheta} \qquad (633)$$

این خم‌ها زئودزیک نیستند، اما مماس‌اند بر جهان‌خط فوتون‌هایی که در ابتدا مقید به r و ϑی ثابت‌اند. پس اگر $\frac{d\phi}{dt} > 0$ باشد به این معنی است که فوتون‌های متناظر در همان جهت چرخش چشمه حرکت می‌کنند. شرط $\frac{d\phi}{dt} \leq 0$ منجر می‌شود به (علامت «−» در (۵۵)):

$$r > r_+ \Leftrightarrow (r^2+a^2)\sin\vartheta - a\Delta^{\frac{1}{2}}\sin^2\vartheta > 0 \qquad (634)$$

پس در این ناحیه مخرج (۵۵) مثبت است. در نتیجه

$$\frac{d\phi}{dt} \leq 0 \Leftrightarrow a\sin\vartheta - \Delta^{\frac{1}{2}} \leq 0 \Leftrightarrow r \geq r_S \qquad (635)$$

پس روی S_+ می‌شود $\frac{d\phi}{dt} = 0$، یعنی هر ذره روی این رویه که بخواهد به دور چشمه بچرخد (در خلاف جهت چرخش) باید سرعتش برابر سرعت نور باشد تازه برای این‌که مانا بماند! در داخل این رویه، در $ergospbore$، مخروط نور برمی‌گردد در جهت افزایش ϕ به‌طوری‌که فوتون‌ها و ذره‌ها مجبورند در جهت چرخش چشمه حرکت کنند. به‌این دلیل است که رویهٔ S_+ انتقال به سرخ بینهایت را رویهٔ حد مانائی هم می‌نامند! این رویه زمان‌گونه است، مگر در دو نقطهٔ محور که نورگونه می‌شود و مماس بر افق $r = r_+$. جایی‌که رویه زمان‌گونه است ساختار مخروط نور طوری است که اجازه می‌دهد ذرات درون‌رو و برون‌رو ان را قطع کنند.

۷.۹ ژئودزیک‌های برون-رو و درون-رو و مختصات ادینگتون-فینکشتاین

متریک ایستای شوارتس‌شیلد اجازه می‌داد با بررسی ژئودزیک‌های شعاعی ناکامل بودن خمینه را بررسی کنیم و خمینه را گسترش دهیم. اما خمینهٔ کر چنین اجازه‌ای را نمی‌دهد: کشش چارچوب‌های لخت در اینجا پدیده‌ای است که نمی‌گذارد شبیه مورد نیوتونی به دستگاه چرخان سراسری برویم که چشمه در آن ساکن باشد! بنابراین برای گسترش خمینه باید راه‌های دیگری انتخاب کنیم.

چون متریک تقارن محوری دارد، شاید ژئودزیک‌های نورگونه‌ای در ابر رویه‌های $\vartheta =$ ثابت موجود باشند. پس می‌گردیم دنبال ژئودزیک‌های نورگونه با شرط:

$$\dot{\vartheta} = \text{۰} \quad , \quad ds^{\text{۲}} = \text{۰} \tag{۶۳۶}$$

مشتق برحسب پارامتر افین روی ژئودزیک است. مختصات بویر–لینکوئیست را به کار می‌بریم. به‌خاطر وابسته نبودن متریک به t و ϕ، معادلهٔ اویلر–لاگرانژ بلاواسطه یک انتگرال اول می‌دهد:

$$\frac{\Delta}{\rho^{\text{۲}}}(\dot{t} - a\sin^{\text{۲}}\vartheta\dot{\phi}) + \frac{a\sin^{\text{۲}}\vartheta}{\rho^{\text{۲}}}[(r^{\text{۲}} + a^{\text{۲}})\dot{\phi} - a\dot{t}] = l,$$

$$\frac{a\Delta\sin^{\text{۲}}\vartheta}{\rho^{\text{۲}}}(\dot{t} - a\sin^{\text{۲}}\vartheta\dot{\phi}) + \frac{(a^{\text{۲}} + r^{\text{۲}})\sin^{\text{۲}}\vartheta}{\rho^{\text{۲}}}[(r^{\text{۲}} + a^{\text{۲}})\dot{\phi} - a\dot{t}] = n \tag{۶۳۷}$$

l و n ثابت‌های انتگرال‌گیری‌اند. شرط $ds^{\text{۲}} = \text{۰}$ انتگرال حرکت دیگری می‌دهد:

$$\frac{\Delta}{\rho^{\text{۲}}}(\dot{t} - a\sin^{\text{۲}}\vartheta\dot{\phi})^{\text{۲}} - \frac{\sin^{\text{۲}}\vartheta}{\rho^{\text{۲}}}[(r^{\text{۲}} + a^{\text{۲}})\dot{\phi} - a\dot{t}]^{\text{۲}} - \frac{\rho^{\text{۲}}\dot{r}^{\text{۲}}}{\Delta} = \text{۰} \tag{۶۳۸}$$

با توجه به شرط $\ddot{\vartheta} = \text{۰}$، معادلهٔ اویلر لاگرانژ متناظر با ϑ می‌شود:

$$\frac{a^{\text{۲}}\Delta}{\rho^{\text{۴}}}(\dot{t} - a\sin^{\text{۲}}\vartheta\phi)^{\text{۲}} - \frac{\text{۲}a\Delta\dot{\phi}}{\rho^{\text{۲}}}(\dot{t} - a\sin^{\text{۲}}\vartheta\phi)$$

$$-\frac{r^{\text{۲}} + a^{\text{۲}}}{\rho^{\text{۴}}}[(r^{\text{۲}} + a^{\text{۲}})\dot{\phi} - a\dot{t}] + \frac{a^{\text{۲}}\dot{r}^{\text{۲}}}{\Delta} = \text{۰} \tag{۶۳۹}$$

به‌این‌ترتیب چهار معادله داریم برای متغیرهای t، r و ϕ. پس باید یک قید میان این سه رابطه وجود داشته باشد. می‌توان نشان داد که قید به‌صورت زیر است (تمرین):

$$(n + al\sin^{\text{۲}}\vartheta)(n - al\sin^{\text{۲}}\vartheta) = \text{۰} \tag{۶۴۰}$$

شرط

$$n - al\sin^{\text{۲}}\vartheta = \text{۰} \tag{۶۴۱}$$

منجر به حل زیر می‌شود:

$$\dot{t} = \frac{(r^{\text{۲}} + a^{\text{۲}})l}{\Delta}$$

$$\dot{r} = \pm l \quad , \quad \dot{\phi} = \frac{al}{\Delta} \tag{۶۴۲}$$

از معادلهٔ $\dot{r}$ متوجه می‌شویم که r خودش هم یک پارامتر افین است. اگر علامت + را در معادله $\dot{r}$ انتخاب کنیم، می‌توانیم بنویسیم:

$$\frac{dt}{dr} = \frac{\dot{t}}{\dot{r}} = \frac{r^{\text{۲}} + a^{\text{۲}}}{\Delta} \tag{۶۴۳}$$

$$\frac{d\phi}{dr} = \frac{\dot{\phi}}{\dot{r}} = \frac{a}{\Delta} \tag{۶۴۴}$$

با فرض $a < m$ می‌توان از این معادله‌ها انتگرال گرفت (تمرین).

$$t = r + \left[m + \frac{m^۲}{\sqrt{m^۲ - a^۲}}\right] ln\,|r - r_+| + \left[m - \frac{m^۲}{\sqrt{m^۲ - a^۲}}\right] ln\,|r - r_-| + \text{ثابت} \tag{۶۴۵}$$

$$\phi = \frac{a}{۲\sqrt{m^۲ - a^۲}} ln \left|\frac{r - r_+}{r - r_-}\right| + \text{ثابت} \tag{۶۴۶}$$

برای این دسته ژئودزیک نورگونه در ناحیهٔ I که $\Delta > ۰$ است داریم $\frac{dr}{dt} > ۰$، یعنی ژئودزیک‌ها برون‌رو هستند. این ژئودزیک‌ها را دستهٔ اصلی ژئودزیک‌های نورگونهٔ برون‌رو می‌نامند.
واضح است که انتخاب $\dot{r} = -l < ۰$ منجر به دستهٔ دیگر می‌شود: دستهٔ اصلی ژئودزیک‌های نورگونهٔ درون‌رو.
این دسته ژئودزیک‌های نورگونه کمک می‌کنند همانند مورد شوارتس‌شیلد مختصات ادینگتن–فینکلشتاین تعریف کنیم که در $r = r_+$ تکینگی ندارند و خمینه را گسترش می‌دهند. در این مختصات، شبیه به مورد شوارتس‌شیلد، فرض می‌کنیم دسته ژئودزیک‌های نورگونهٔ درون–رو در معادلهٔ زیر صدق می‌کنند (توجه به مختصات جدید z تعریف مختصات جدید):

$$d\bar{t} = -dr \qquad , \qquad d\vartheta = d\bar{\phi} = ۰ \tag{۶۴۷}$$

با توجه به معادلهٔ این ژئودزیک‌ها (نورگونهٔ درون–رو) در مختصات بویر–لینکوئیست، یعنی

$$dt = -\frac{r^۲ + a^۲}{\Delta} dr, \tag{۶۴۸}$$

$$d\phi = -\frac{a}{\Delta} dr \tag{۶۴۹}$$

می‌توان نشان داد (تمرین)

$$d\bar{t} = dt + \frac{۲mr}{\Delta} dr \tag{۶۵۰}$$

$$d\bar{\phi} = d\phi + \frac{a}{\Delta} dr \tag{۶۵۱}$$

حالا اگر مختصهٔ زمان پیشرو، v، را به این صورت تعریف کنیم:

$$v = \bar{t} + r \tag{۶۵۲}$$

آنگاه متریک کر به شکل (۲۹) درمی‌آید. این مختصات را ادینگتون–فینکلشتاین پیشرو می‌نامند (توجه به مخروط نور در مختصات $\bar{t}, r$!).

۸.۹ گسترش بیشینال خمینهٔ کر $a^۲ < m^۲$

مختصات v و u ادینگتون–فینکلشتاین، متناظر با ژئودزیک‌های نورگونهٔ درون–رو و برون–رو را انتخاب می‌کنیم

$$dv = dt + \frac{r^۲ + a^۲}{\Delta} dr \qquad\qquad d\bar{\phi} = d\phi + \frac{a}{\Delta} dr$$

$$du = dt - \frac{r^۲ + a^۲}{\Delta}dr \qquad d\bar{\phi} = d\phi - \frac{a}{\Delta}dr \tag{۶۵۳}$$

در امتداد محور تقارن $\vartheta = ۰$ متریک کر می‌شود:

$$ds^۲ = \frac{\Delta}{r^۲ + a^۲}\left(dt - \frac{r^۲ + a^۲}{\Delta}dr\right)\left(dt + \frac{r^۲ + a^۲}{\Delta}dr\right) = \frac{\Delta}{r^۲ + a^۲}dudv \tag{۶۵۴}$$

دقت کنید که این مختصات جدید با تعریف (۷۵) برای ناحیهٔ I و III اعتبار دارد. در ناحیهٔ II مختصات مناسب به این صورت است (تمرین):

$$du = dt + \frac{r^۲ + a^۲}{\Delta}dr \tag{۶۵۵}$$

$$dv = -dt + \frac{r^۲ + a^۲}{\Delta}dr$$

مختصات t و r در r_+ و r_- تکین بودند اما مختصات u و v اجازهٔ عبور از r_- را می‌دهند بدون تکینگی مختصاتی. ناحیهٔ I مانا است و مجانباً تخت. ناحیهٔ II نامانا است. ناحیهٔ III شامل تکینگی حلقه‌ای است. این تکینگی زمان‌گونه است و بنابراین «اجتناب‌پذیر» است. به‌علاوه در این ناحیه خم‌های زمان‌گونهٔ بسته وجود دارد که علیت را نقض می‌کند.

۹.۹ گسترش بیشینال $a^۲ > m^۲$

در این حالت داریم $\Delta > ۰$. متریک همواره منتظم است، مگر در $r = ۰$ که تکینگی حلقوی داریم. از تبدیل (۳۲) داریم:

$$r^۴ - (x^۲ + y^۲ + z^۲ - a^۲)r^۲ - a^۲z^۲ = ۰ \tag{۶۵۶}$$

این رابطه از شکل کر-شیلد متریک کر به راحتی به‌دست می‌آید:

$$ds^۲ = d\tilde{t}^۲ - dx^۲ - dy^۲ - dz^۲ - \frac{۲Mr^۳}{r^۴ + a^۲z^۲}\left[\frac{r(xdx + ydy) - a(xdy - ydx)}{r^۲ + a^۲} + \frac{zdz}{r} + d\tilde{t}\right]^۲ \tag{۶۵۷}$$

سطوح $\tilde{t} =$ ثابت و $r =$ ثابت بیضی‌وارهای هم‌کانون‌اند که در $r = ۰$ واگن می‌شوند و به دیسک $z = ۰$ و $x^۲ + y^۲ \leq a^۲$ تبدیل می‌شوند.

توجه کنید که $\vartheta = \frac{\pi}{۲}$ متناظر است با مرز دیسک در $x^۲ + y^۲ = a^۲$. پس تکینگی در

$$z = ۰ \qquad , \qquad x^۲ + y^۲ = a^۲ \tag{۶۵۸}$$

اتفاق می‌افتد. جالب این‌که هیچ شرطی برای $r > ۰$ وجود ندارد! این فضازمان را می‌توان گسترش تحلیلی داد از طریق همین دیسک به ناحیه‌ای دیگر که مجانباً تخت است با $r < ۰$ این تکینگی عریان است. به‌علاوه‌این فضا خم‌های زمان‌گونه‌ی بسته دارد (CTC)، که نقض علیت سراسری است (تمرین)!

۱۰.۹ اثر لنزه-تیرینگ $(Thirring - Lenseeffect)$

ارتباط اصل ماخ و انگیزهٔ تیرینگ برای محاسبهٔ این اثر

محاسبهٔ اثر تیرینگ-لنزه

زمین چرخان را در نظر می‌گیریم. میدان اطراف آن‌را تقریب می‌زنیم با متریک شوارتس‌شیلد به‌علاوه یک جملهٔ اصلاحی. ابتدا تقریب را نسبت به متریک تخت درنظر بگیرید:

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + 2\psi_{\mu\nu} \tag{۶۵۹}$$

معادلهٔ میدان انیشتین در این تقریب می‌شود

$$\Box\psi_{\mu\nu} = -\mathcal{K}(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}T) \tag{۶۶۰}$$

در پیمانهٔ

$$\psi^{\nu}_{\mu\nu,} = \frac{1}{2}\psi^{\nu}_{\nu,\mu} \tag{۶۶۱}$$

دیدیم که اگر تانسور انرژی را با

$$T_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} \rho & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{۶۶۲}$$

تقریب بزنیم، که در آن $\rho(r)$ چگالی است به متریک

$$ds^2 = (1 + 2U)dt^2 - (1 - 2U)d\overrightarrow{x}^2 \tag{۶۶۳}$$

تبدیل می‌شود که در آن

$$\psi_{..} = U = -\frac{M}{r} \tag{۶۶۴}$$

است. این جواب کمابیش همان جواب شوارتس‌شیلد است که در آن $\frac{M}{r}$ کوچک فرض شده است و $(1+2U)^{-1} =$ $(1 - 2U) \simeq (1 - \frac{2M}{r})^{-1}$ گرفته شده است. تفاوت با متریک متعارف شوارتس‌شیلد در این است که $(1 - 2U)$ ضریب تمام مؤلفه‌های $d\overrightarrow{x}^2$ است و نه تنها dr^2؛ اما تبدیل مختصات $r \to r' = \frac{r}{1+U}$ متریک بالا را به شکل متعارف شوارتس‌شیلد درمی‌آورد (تمرین).
اکنون همین روش محاسبه را ادامه می‌دهیم، با این تفاوت که حالا زمین را چرخان درنظر می‌گیریم. در این صورت تانسور انرژی دیگر به شکل (۸۴) نخواهد بود: بردار جریان جرم ناشی از چرخش هم باید درنظر گرفته شود:

$$T_{\mu\nu} = \rho\begin{bmatrix} 1 & \overrightarrow{v} \\ \overrightarrow{v} & 0 \end{bmatrix} \tag{۶۶۵}$$

که در آن $\overrightarrow{v}$ بردار سه‌بعدی حرکت شاره است. واگرایی این تانسور انرژی صفر نیست، که این علامت این است که این انتخاب دقیق نیست و با جمله‌های مرتبط با فشار هم درنظر گرفته شود. اما این جمله‌ها متناسب با $\frac{1}{C^2}$ است در مقابل جمله‌های جریان، v، که متناسب با $\frac{1}{C}$ است. پس، در تقریب $\frac{1}{C}$ این تانسور انرژی درست است.
با فرض مانا بودن توزیع جرم، یعنی $\frac{d\overrightarrow{v}}{dt} = 0$، و در نتیجه $\Box \to -\Delta$ از معادلهٔ (۸۲) نتیجه می‌شود:

$$\Delta\psi_{\cdot i} = \mathcal{K}T_{\cdot i} \tag{۶۶۶}$$

مؤلفه‌های فضایی و زمانی همان شکل شوارتس‌شیلد را حفظ می‌کنند. پس تنها جملهٔ جالب همین جملهٔ ضربدری $\psi_{\cdot i}$ است. جمله این معادله را می‌توان به این صورت نوشت:

$$\psi_{\cdot i} = -\frac{\mathcal{K}}{4\pi}\int \frac{d^3x'}{\left|\overrightarrow{x} - \overrightarrow{x'}\right|}T_{\cdot i}(x')$$

$$= \frac{2G}{r}\int d^3x' T_{\cdot i}(x') + \frac{2G}{r^3}\int d^3x' x_j x'^j T_{\cdot i}(x') + \cdots \tag{۶۶۷}$$

جمله اول متناسب است با تکانه خطی توزیع جرم، $P_i = \int d^3x' T_{\cdot i}(x')$، که در مورد مسئله ما صفر گرفته می‌شود. پس

$$\psi_{\cdot i} = +\frac{2x^j}{r^3}\int d^3x' x'_j \rho v_i(x') \qquad [x_\cdot = -x^i] \tag{۶۶۸}$$

بردار سرعت برای جرم چرخان ما می‌شود (جسم‌های چرخان مانند زمین):

$$v_i(x') = \epsilon_{ikl}\omega^k x'^l \tag{۶۶۹}$$

پس(۹۰) می‌شود

$$\psi_{\cdot i} = \frac{-2}{r^3}\epsilon_{ikl}\omega^k x^j \int d^3x' \rho x'_j x'^l \tag{۶۷۰}$$

محاسبه ساده‌تر می‌شود اگر برای توزیع ماده تقارن مرکزی فرض کنیم. $\rho(\overrightarrow{x'}) = \rho(r)$. در این صورت

$$+\int d^3x \rho x'_j x'^l = \frac{1}{2} I \delta^l_j \qquad , \qquad I = \frac{2}{3}\int d^3x' \rho(r') r'^2 \tag{۶۷۱}$$

به این ترتیب (۹۲) به‌دست می‌آوریم

$$\psi_{\cdot i} = \frac{-2}{r^3}\epsilon_{ijk}\omega^j x^k \tag{۶۷۲}$$

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 - \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2 - 4GIr^{-3}\epsilon_{ijk}\omega^i x^j dx^k dt - r^2 d\Omega^2 \tag{۶۷۳}$$

دانشگاه صنعتی شریف
گرانش و نسبیت عام-۱

شماره درس ۲۴۱۴۸-۱

فصل ۱۰: مدل‌های کیهان‌شناسی

رضا منصوری

ویراست ۰.۳

ادریبهشت ۱۳۹۲

۱.۱۰ اصل کیهان شناختی

مدل‌های عالم اولین بار از حل معادلات انیشتین به‌دست آمد. معادلات میدان انیشتین، بنابر تعریف، باید بتوانند دینامیک عالم و ساختار آن را توصیف کنند. در عمل اما حل ده معادله‌ی دیفرانسیل مرتبه‌ی دوم ناخطی، با ۱۰ مؤلفه‌ی مجهول متریک، و نیز ۴ آزادی انتخاب پیمانه کاری غیرممکن است، مگر در مورهای خاص. یکی از این موردها هنگامی است که عالم، یعنی توزیع ماده در آن را، همگن و همسانگرد فرض کنیم، که این مضمون اصل کیهان‌شناختی است. در این صورت تنها متغیر دینامیکی مدل یک تابع وابسته به زمان است که تغییر فاصله‌ی میان هر دو نقطه را تعیین می‌کند. پس باید بتوان بازه‌ی فضا زمان هر دو رویداد را در عالم چنین نوشت:

$$ds^2 = -dt^2 + a(t)d\sigma^2 \tag{674}$$

که در آن $d\sigma^2$ متریک روی ابرسطح‌های سه‌بعدی فضاگونه در هر زمان است. از آنجا که در این متریک هیچ تابع نامشخصی نباید پیش بیاید، پس این متریک باید نماینده‌ی فضاهایی با حداکثر تقارن باشد. این فضاها بر سه نوع‌اند: تخت (۰)، با انحنای ثابت مثبت یا کروی (۱+) و با انحنای منفی یا هذلولوی (۱−). پس این متریک تنها به یک پارامتر، k، بستگی دارد، که هندسه‌ی فضای سه‌بعدی را تعیین می‌کند. مختصات فضایی را می‌توان چنان اختیار کرد که متریک بالا به‌صورت زیر نوشته شود:

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t)\left(\frac{dr^2}{1-kr^2} + r^2 d\vartheta^2 + r^2\sin^2\vartheta d\varphi^2\right) \tag{675}$$

این متریک روبرتسون–واکر است. برای فضاهای همگن و همسانگرد فریدمان–روبرتسون–واکر (FRW) است. صحیح‌تر این است که بگوییم فضای FRW یا متریک FRW در مختصات روبرتسون–واکر

به این ترتیب می‌بینیم که مدل عالم را یک تابع مقیاس، $a(t)$، و نیز یک پارامتر هندسی، k، تعیین می‌کند. بدیهی است این مدل نمی‌تواند بیانگر بسیاری پیچیدگی‌های موجود در عالم باشد؛ از جمله ساختارهای عالم، که بیانگر ناهمگنی‌های موضعی هستند، با این متریک سازگار نیستند. اما اگر عالم در مقیاس بزرگ همگن و همسانگرد باشد، این مدل می‌تواند دینامیک کلی عالم را توصیف کند. باید توجه کرد که متریک‌های ناهمگن یا ناهمسانگرد، گرچه برخی از آنها را می‌شناسیم و بخصوص ناهمسانگردها را حتی رده‌بندی کرده‌ایم، بسیار پیچیده‌تر از آن هستند که مبنای بحث کیهان‌شناسی قرار بگیرند.

۲.۱۰ شواهد رصدی همگنی

نفی یا تأیید همگنی در کیهان‌شناسی با شمارش ستاره‌ها در دهه‌های اولیه این قرن شروع شده است. اگر توزیع ستاره‌ها همگن می‌بود، لازم بود تعداد ستاره‌های روشن‌تر از f چنین تغییر کند:

$$N(f < m) \propto f^{-\frac{3}{2}} \propto 10^{0.6m} \tag{676}$$

که در آن m قدر ظاهری است. اما توزیع ستاره‌ها از این رفتار تبعیت نمی‌کند، بلکه گویای وجود لبه و مرز است. این واقعیت رصدی دلیل بر وجود کهکشان ما و نیز تعیین شکل آن شد.

هابل اولین کسی بود که این سؤال را مطرح کرد که آیا توزیع سحابی‌ها، کهکشان‌ها، از رابطه‌ی بالا تبعیت می‌کند. وی این شمارش را برای دو مجموعه‌ی سحابی‌ها با قدر $m < 12$ و نیز $m < 16.7$ انجام داد، و دریافت که نتیجه‌ی هر دو نمایش یکسان است و با رفتار (۳) می‌خواند. وی از همین جا به این نتیجه رسید که توزیع کهکشان‌ها، برخلاف ستاره‌ها، حکایت از وجود مرز یا لبه نمی‌کند. این نتیجه‌گیری شروع بحث همگنی توزیع ماده در عالم بود.

۳.۱۰ متریک فریدمان-روبرتسون-واکر

هنگامی که صحبت از همگنی و همسانگردی می‌شود باید توجه داشت که این مفاهیم مستقل از انتخاب ناظر نیستند. تنها ناظری که همراه ماده‌ی عالم حرکت می‌کند عالم را همسانگرد می‌بیند. همگنی به معنای هم‌ارز بودن تمام نقاط فضا است. تعریف دقیق آن به این صورت است: فضا زمانی را همگن (فضایی) می‌نامیم که خانواده‌ای یک پارامتری از ابرسطح‌های فضاگونه‌ی Σ_t داشته باشد. این ابرسطح‌ها باید لایه‌هایی از فضا زمان را مشخص کنند که روی آنها به ازای هر t و هر دو نقطه‌ی $Q, P \in \Sigma_t$ یک ایزومتری برای متریک فضا زمان وجود داشته باشد که P را به Q ببرد. فضا و زمان را هنگامی همسانگرد می‌نامیم که خانواده‌ای از خم‌های زمان‌گونه (ناظرها) با بردارهای مماس u^μ با این خاصیت وجود داشته باشد: به ازای هر نقطه‌ی P و هر دو بردار مماس یعنی عمود بر u^μ در نقطه‌ی Q، یک ایزومتری متریک وجود داشته باشد که P را ثابت نگهدارد و یکی از دو بردار مماس را به دیگری بچرخاند، یعنی هیچ برداری عمود بر u^μ ممتاز نباشد.

متریک فضا و زمان، $g_{\mu\nu}$، متریک دیگری، $h_{\mu\nu}$، روی سطوح همگنی Σ_t القا می‌کند. هندسه‌ای که به این ترتیب روی Σ_t القا می‌شود باید چنان باشد که هر نقطه P از Σ_t به هر نقطه‌ی دیگری Q به توسط یک ایزومتری $h_{\mu\nu}$ تبدیل شود و نیز هیچ جهت ممتازی روی Σ_t وجود نداشته باشد. تانسور انحنا روی یک لایه‌ی Σ_t را با R_{ijkl} نشان می‌دهیم که شاخص‌های لاتین آن ۱ و ۲ و ۳ را می‌پذیرند. در نقطه‌ی P مختصات بهنجار ریمان به کار می‌بریم که متریک را δ_{ij} و نماد کریستوفل را صفر می‌کند. چون این سطوح همسانگردند پس تانسور انحنا باید به شکل زیر باشد

$$R_{ijkl} = \beta(\delta_{ik}\delta_{jl} - \delta_{il}\delta_{jk}) \tag{۶۷۷}$$

پس اگر مختصات را دلخواه بگیریم تانسور انحنا برحسب متریک h_{ij} می‌شود

$$R_{ijkl} = \beta(x)(h_{ik}h_{jl} - h_{il}h_{jk}) \tag{۶۷۸}$$

که حالا $\beta(x)$ تابعی است از مختصات نقطه‌ی P. به‌راحتی می‌توان از رابطه‌ی بیانکی نتیجه گرفت که β باید ثابت باشد. ثابت بودن β به معنای همگنی فضا است. در این مورد انحنای نرده‌ای برابر β و ثابت است. فضایی که تانسور انحنای آنها با رابطه‌ی (۵) با βی ثابت داده شود، فضای با انحنای ثابت نامیده می‌شود.استدلال بالا نشان می‌دهد که همسانگردی از همگنی ناشی می‌شود.
به‌راحتی می‌توان متریک فضاهای با انحنای ثابت را به دست آورد. این متریک را می‌توان با انتخاب مناسب مختصات به صورت

$$d\sigma^۲ = a(t)\left[\frac{dr^۲}{۱ - kr^۲} + r^۲(d\vartheta^۲ + \sin ۲\vartheta d\varphi^۲)\right] \tag{۶۷۹}$$

نوشت، چون ناظر را همراه اختیار کردیم، متریک فضا زمان می‌شود

$$\begin{aligned} ds^۲ &= dt^۲ - d\sigma^۲ \\ &= dt^۲ - a(t)\left[\frac{dr^۲}{۱ - kr^۲} + r^۲(d\vartheta^۲ + \sin^۲\vartheta d\varphi^۲)\right] \end{aligned} \tag{۶۸۰}$$

که در آن $a(t)$ تابعی از زمان است. یک بودن ضریب $dt^۲$ نشان می‌دهد که زمان مختصاتی t همان ویژه زمان است. ثابت k طوری انتخاب شده است که تنها بتواند مقادیر ۱$\pm$ یا صفر را اختیار کند. $k = +۱$ متناظر است با فضایی با انحنای مثبت، $k = -۱$ متناظر است با انحنای منفی، و $k = ۰$ با انحنای صفر متناظر است. متریک (۷) را متریک فریدمان-روبرستون-واکر می‌نامند. این متریک نماینده‌ی ساده‌ترین مدل کیهان‌شناختی بر مبنای نسبیت عام است که همگن است و همسانگرد.

۴.۱۰ تعبیر هندسی متریک فریدمان-روبرتسون-واکر

متریک FRW یکی از موارد ساده‌ی جواب‌های نسبیت عام است که تعبیر هندسی ساده‌ای دارد این تعبیر را برای موارد سه‌گانه‌ی انحنای k بررسی می‌کنیم.
الف) $k = 0$: در این مورد انحنای فضا صفر است. توپولوژی این فضای تخت می‌تواند مینکوفسکی یا مثلاً چنبره باشد.

ب) : $k = +1$ در این مورد انحنای فضا مثبت است و با یک فوق کره سر و کار داریم؛ یعنی با یک کره‌ی سه بعدی غوطه‌ور در یک فضای اقلیدسی چهار بعدی. متریک فضای اقلیدسی چهار بعدی را می‌توان نوشت

$$d\sigma^2 = \sum_{i=1,\dots,4} (dx^i)^2 \tag{۶۸۱}$$

در این فضا کره به صورت زیر تعریف می‌شود

$$\Sigma(x^i)^2 = a^2 \tag{۶۸۲}$$

حالا مختصات جدیدی به این صورت تعریف کنیم

$$\begin{aligned} x^1 &= a \cdot \sin\chi \sin\varphi \sin\vartheta \\ x^2 &= a \cdot \sin\chi \sin\varphi \cos\vartheta \\ x^3 &= a \cdot \sin\chi \cos\varphi \\ x^4 &= a \cdot \cos\chi \end{aligned} \tag{۶۸۳}$$

که در آن $\pi \leq \chi < 0$ و $2\pi \leq \varphi < 0$ و $\pi \leq \nu < 0$ است. آنگاه متریک روی کره می‌شود

$$d\sigma^2 = a^2[d\chi^2 + \sin^2\chi(d\vartheta^2 + \sin^2 v d\varphi^2)] \tag{۶۸۴}$$

حالا مختصه‌ی r را وارد می‌کنیم

$$r = \sin\chi \tag{۶۸۵}$$

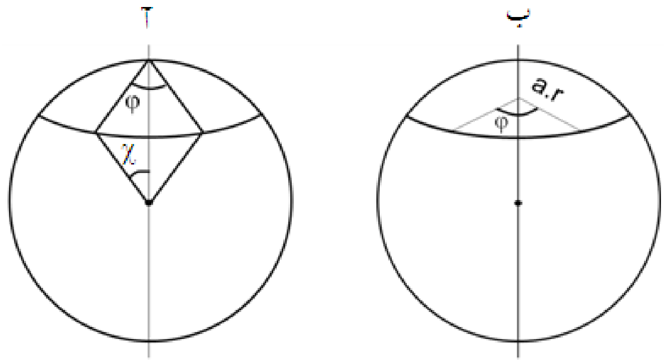
با این تعریف متریک (۱۱) می‌شود

$$d\sigma^2 = a^2\left[\frac{dr^2}{1-r^2} + r^2(d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta d\varphi^2)\right] \tag{۶۸۶}$$

که همان بخش فضایی متریک روبرتسون-واکر است. برای شناختن بهتر این متریک و مختصاتی که وارد شده است، مقطع $\vartheta = \frac{\pi}{2}$ را در مختصات (χ, φ) و (r, φ) نگاه می‌کنیم:

$$d\sigma^2 = a^2\left[\frac{dr^2}{1-r^2} + r^2 d\varphi^2\right] \qquad : d\sigma^2 = a^2\left[d^2 + \sin^2 d\varphi^2\right] \qquad :[\square]$$

متریک (ب) به ازای $r = 1$ تکنیکی دارد. اما مقایسه با متریک (آ) نشان می‌دهد که این تکنیکی مختصاتی است. این مختصات در شکل (۱) مقایسه شده‌اند.



شکل ۱: نمایش مختصات روی کره.

بنابراین مقطع‌های $\vartheta = \frac{\pi}{2}$ برای $k = 1$ کره‌هایی به شعاع a هستند. همین مقطع‌ها برای $k = 0$ صفحه‌های تخت بودند (که با تعبیر توپولوژی می‌توان آنها را به چنبره تبدیل کرد).
حالا حجم این فضا را حساب می‌کنیم:

$$V = \int_0^1 dr \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} d\vartheta \frac{a^3}{\sqrt{1 - r^2}} \sin\vartheta = 2\pi^2 a^3 \tag{۶۸۷}$$

پس در مدل $k = 1$ با عالمی سر و کار داریم که حدّ ندارد (مرز ندارد) ولی متناهی است! شناخت این واقعیت از چالش‌های بزرگ نسبیت عام بود که بحث‌های شدیدی در دهه‌ی ۲۰ و ۳۰ قرن بیستم برانگیخت.

پ) $k = -1$: در این مورد متریک می‌شود

$$ds^2 = dt^2 - a^2 \left[\frac{dr^2}{1 + r^2} + r^2 \left(d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta d\varphi^2\right)\right] \tag{۶۸۸}$$

این متریک تکینگی ندارد و برای $0 \le r < \infty$ تعریف شده است. مختص جدید

$$r = \sinh\chi$$

بخش فضایی متریک را به صورت

$$d\sigma^2 = a^2 \left[d\chi^2 + \sinh^2\chi \left(d\vartheta^2 + \sin^{2\vartheta} d\varphi^2\right)\right] \tag{۶۸۹}$$

در می‌اورد. این هندسه‌ی۳-بعدی را نمی‌توان در یک فضای چهار بعدی اقلیدسی غوطه‌ور ساخت؛ اما می‌توان آن را در فضای مینکوفسکی

$$d\sigma^2 = dw^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 \tag{۶۹۰}$$

غوطه‌ور دانست. با تعریف مختصات

$$\begin{aligned} x &= a\sinh\chi\sin\vartheta\cos\varphi \\ y &= a\sinh\chi\sin\vartheta\sin\varphi \qquad & ۰\leq\chi<\infty \\ z &= a\sinh\chi\cos\vartheta \qquad & ۰\leq\vartheta<\pi \\ w &= a\cosh\chi \qquad & ۰\leq\varphi<۲\pi \end{aligned} \tag{۶۹۱}$$

متریک(۱۸) به (۱۷) تبدیل می‌شود. پس معادله ابر رویه‌ی غوطه‌ور می‌شود

$$w^۲-x^۲-y^۲-z^۲=a^۲ \tag{۶۹۲}$$

یعنی یک هذلولیوار۳-بعدی در فضای ۴-بعدی مینکوفسکی. این سطح نظیر لاک جرم در فضای تکانه است.

مقطع‌های χ =ثابت کره‌ای دوبعدی به مساحت $۴\pi a^۲\sinh ۲\chi$اند. ϑ و φ همان زاویه‌های استاندارد روی کره‌اند. با افزایش χ مساحت این کره‌ها افزایش می‌یابد و تا به بینهایت می‌رود. افزایش این مساحت با افزایش χ بسیار سریع‌تر از مورد تخت است:

$$\frac{\text{مساحت کره‌ها}}{(\text{ویژه فاصله})^۲}=\frac{A}{۴\pi l^۲}=\frac{۴\pi R^۲\sinh^۲\chi}{۴\pi R^۲\chi^۲}\approx\left(\frac{e^{l/a}}{۲^{l/a}}\right)^۲\Rightarrow\infty \tag{۶۹۳}$$

۵.۱۰ معادلات فریدمان

معادلات میدان نسبیت عام مجموعاً ده معادله‌ی دیفرانسیل مرتبه‌ی دوم ناخطی است. سمت راست این معادله تانسور انرژی ماده است. هنگامی که ماده را به صورت شاره‌ی کامل در نظر بگیریم، تنها دو تابع نامشخصρ (چگالی) وp (فشار) در تانسور انرژی پیش می‌آیند. به همین ترتیب تنها دو معادله از معادله‌های انیشتین مستقل از هم‌اند. این دو معادله را بافرض متریک فریدمان (۷) می‌توان به این صورت درآورد

$$\kappa\rho+\Lambda=۳\frac{k+\dot{a}^۲}{a^۲} \tag{۶۹۴}$$

$$\kappa p-\Lambda=-\frac{۲a\dot{a}+\dot{a}^۲+k}{a^۲} \tag{۶۹۵}$$

که در آن $\kappa=۴\pi G$ و G ثابت گرانش است. در اینجا با دو معادله برای سه مجهول $a(t)$، $p(t)$و $\rho(t)$ سرو کار داریم، که باید معادله‌ی حالت $p=p(\rho)$را نیز به آن اضافه کرد. از دو معادله‌ی فریدمان معادله‌ی پیوستگی به دست می‌آید:

$$d\left(\rho a^۳\right)+\rho d\left(a^۳\right)=۰ \tag{۶۹۶}$$

از دو معادله‌ی میدان همچنین به دست می‌آوریم

$$\kappa\,(۳p+\rho) = ۲\Lambda - \frac{۶\ddot{a}}{a} \qquad (۶۹۷)$$

این رابطه نشان می‌دهد که به ازای $\Lambda = ۰$ و $۳p+\rho > ۰$ همواره شتاب انبساط منفی است. اما هرگاه $۳p+\rho < ۰$، آنگاه شتاب انبساط می‌تواند مثبت باشد.

معادله‌ی (۲۲) را که سرعت انبساط را به دست می‌دهد، می‌توان به صورت

$$\dot{a}^۲ - \frac{\kappa\rho}{۳}a^۲ + k - \frac{۱}{۳}\Lambda a^۲ = ۰ \qquad (۶۹۸)$$

نوشت. این رابطه نظیر همان رابطه‌ی انرژی در کیهانشناخت نیوتونی است. این را معادله‌ی فریدمان می‌نامند.

حالا دو مورد حدی از این معادله را نگاه می کنیم:

الف) غبار: $p = ۰$ (وضعیت کنونی عالم). در این مورد چگالی ذرات متناسب با چگالی جرم است. یعنی انرژی بستگی نقشی ندارد، و جرم کل عالم که از جرم مجموع ذرات آن به دست می‌آید متناسب با $\rho a^۳$ است:

$$n \propto \rho \approx \frac{M}{a^۳} \qquad (۶۹۹)$$

چگالی باریونی را می‌توان به صورت

$$n(x) = lim_{\Delta V\to ۰}\frac{m}{\Delta V}N\,(\Delta V) \qquad (۷۰۰)$$

تعریف کرد، که در آن m جرم یک نوکلئون است. البته تعداد باریون ها را ثابت گرفته‌ایم. پس در مورد غبار معادله‌ی فریدمان می‌شود

$$\dot{a}^۲ = \frac{\kappa m}{۳a} + \frac{۱}{۳}\Lambda a^۲ \qquad (۷۰۱)$$

ب) تابش: $p = \frac{۱}{۳}\rho$. این تقریب برای عالم اولیه صادق است. در این صورت از معادله‌ی پیوستگی (۲۴) داریم

$$\dot{\rho} + ۴\rho\frac{\dot{a}}{a} = ۰ \qquad \Rightarrow \qquad \rho = \frac{K}{a^۴} \qquad (۷۰۲)$$

که در آن K یک ثابت است. پس معادله‌ی فریدمان برای این مورد می‌شود

$$\dot{a}^۲ = \frac{\kappa K}{۳a^۲} + \frac{۱}{۳}\Lambda a^۲ - k \qquad (۷۰۳)$$

در مواردی که ماده و تابش در کنار هم بدون برهم کنش وجود داشته باشد، می‌توان دو معادله‌ی (۲۹) و (۳۱) را به این صورت در هم ادغام کرد

$$\dot{a}^2 = \frac{\kappa K}{3a^2} + \frac{\kappa m}{3a} - k + \frac{1}{3}\Lambda a^2 =: F(a) \tag{۷۰۴}$$

بر مبنای این معادله‌ی فریدمان می‌توان دوره‌های گوناگونی را در تاریخچه‌ی عالم متمایز کرد:

الف) **دوره‌ی غلبه‌ی ماده.** دراین دوره جمله‌ی $\frac{\kappa m}{3a}$ در تابع F غالب است. قائدتاً به ازای مقادیر بزرگ a یا شعاع‌های بزرگ عالم این مورد دست می‌دهد. در این صورت از معادله‌ی فریدمان داریم

$$\dot{a}^2 = \frac{\kappa m}{3a} \tag{۷۰۵}$$

جواب با رفتار

$$a(t) \propto t^{\frac{2}{3}} \tag{۷۰۶}$$

به دست می‌آید. پس ار رابطه ی (۲۷) رفتار چگالی به دست می‌آید

$$\rho \propto \frac{1}{a^3} \propto \frac{1}{t^2} \tag{۷۰۷}$$

یعنی چگالی با عکس مجحذور زمان کاهش می‌یابد.

ب) **دوره ی غلبه ی تابش** . در این دوره شعاع عالم بسیار کوچک است و جمله‌ی $\frac{\kappa K}{a^2}$ در تابع $F(a)$ غالب است:

$$\dot{a}^2 = \frac{\kappa K}{3a^2} \tag{۷۰۸}$$

از جواب

$$a = \left(\frac{4\kappa K}{3}\right)^{\frac{1}{4}} \cdot t^{\frac{1}{2}} \tag{۷۰۹}$$

رفتار

$$\rho \propto \frac{1}{a^4} \propto \frac{1}{t^2} \tag{۷۱۰}$$

را برای چگالی به دست می آوریم. این دوره را تابش غالب هم گفته‌اند!

پ) **دوره ی غلبه ی خمیدگی** . هرگاه k در $F(R)$ غالب باشد از دوران غلبه ی خمیدگی صحبت می کنیم.

ت) **دوره ی غلبه ی انرژی خلاء** . دوره‌ای را می گویند که در آن جمله‌ی $\frac{1}{3}\Lambda a^2$ غالب باشد. مانند دوره‌ی تورم و دوره‌ی اخیر با حضور انرژی تاریک! این دوره را خلأ غالب هم گفته‌اند!

۶.۱۰ بحث جواب‌های معادله‌ی فریدمان

الف) **جواب ایستا** . آیا معادله‌ی فریدمان (۲۵) که برای شرایط کنونی، یعنی غبار، جواب ایستا دارد؟ می گیریم

$$\dot{a} = \ddot{a} = 0 \tag{۷۱۱}$$

از معادله‌های (۲۴) و (۲۸) به دست می‌آوریم

$$\kappa\rho = 2\Lambda \tag{۷۱۲}$$

$$\frac{\kappa m}{3a} + \frac{1}{3}\Lambda a^2 = \mathcal{K} \tag{۷۱۳}$$

از معادله‌ی (۳۹) می بینیم که باید $\Lambda > 0$ باشد. معادله‌ی (۴۰) آن گاه جواب را به $k = 1$ مشروط می کند. یعنی جواب ایستا فقط برای $\Lambda > 0$ وجود دارد و متناظر است با عالمی بسته. شرط تعادل این عالم بسته از رابطه ی (۲۲) به صورت زیر به دست می آید

$$a^2 = \frac{3}{\kappa\rho + \Lambda} = \frac{2}{\kappa\rho} \tag{۷۱۴}$$

این مدل ایستا به نام مدل اینشتین معروف است. در این مدل جاذبه ی ناشی از گرانش و دافعه ی ناشی از $\Lambda > 0$ یکدیگر را خنثی می کنند. مدل اینشتین پایدار نیست و کوچکترین اختلال موجب انبساط و انقباض آن می شود. اینشتین در سال ۱۹۱۸/۱۲۹۷ که به دنبال مدل هایی برای عالم می‌گشت، به تصور این که عالم ایستاست، مجبور شد جمله‌ی کیهانشناختی را وارد کند تا معادلات میدان جواب ایستا داشته باشند. پس از کشف انبساط عالم در سال های دهه‌ی اول ۱۳۰۰/دهه بیست قرن گذشته‌ی میلادی اینشتین جمله ی کیهانشناختی را در معادلات نسبیت عام زائد دانست. امروزه این جمله کماکان اهمیت خود را حفظ کرده است و نقش چگالی خلاء را در معادلات دارد.

ب) **انبساط نمایی و تانسور انرژی خلاء** . در مراحلی از تحول عالم ممکن است چگالی خلاء (Λ) بر چگالی ماده‌ی متعارف (ρ) غلبه کند. در این صورت برای تانسور انرژی ماده $(T_{\mu\nu})$ باید تانسور انرژی خلاء را نوشت که چگالی آن مخالف صفر است. تانسور انرژی خلاء طبق تعریف متناسب با متریک است، یعنی $T_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}\rho_\circ$، که در آن $\rho_\circ$ را چگالی خلاء گرفته ایم.این تانسور انرژی متناظر است با $\rho_\circ > 0$، $p_\circ = -\rho_\circ < 0$ یعنی فشار منفی. اگر این مقادیر را در معادله‌ی (۲۵) بنشانیم به دست می آوریم

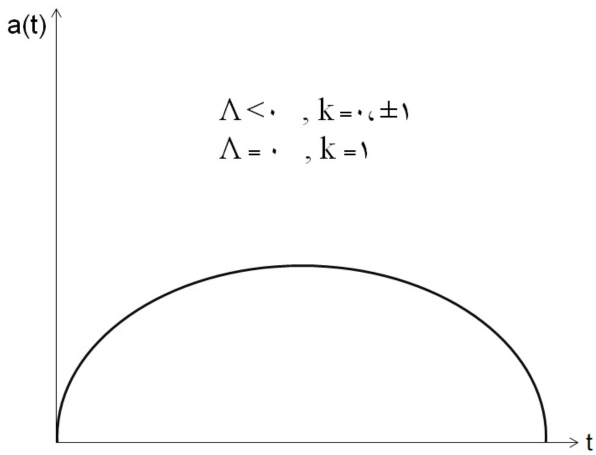
$$\frac{\ddot{a}}{a} = \frac{\kappa\rho_\circ}{3} = \frac{\lambda}{3} \tag{۷۱۵}$$

انتگرال گیری می دهد

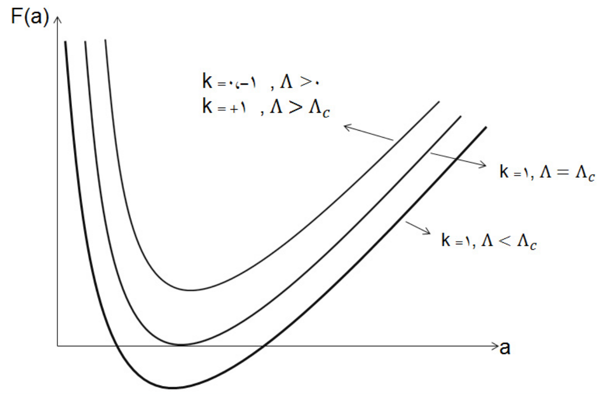
$$a = e^{\sqrt{\frac{\lambda}{3}}\cdot t} \tag{۷۱۶}$$

ثابت انتگرال گیری چنان انتخاب شده که برای $t = 0$، $a(0) = 1$ باشد. بنابراین مقیاس شعاع عالم به طور نمایی افزایش می یابد. پس اگر در مرحله‌ای از عالم چگالی خلاء غلبه داشته باشد عالم متورم خواهد شد. این حالت ممکن است در عالم اولیه پیش بیاید. در این صورت باید سازوکاری برای قطع تورم پیدا کرد، چون رفتار فعلی عالم این طور نیست. به ازای (۴۳) متریک می شود

$$ds^2 = dt^2 - e^{\sqrt{\frac{\lambda}{3}}\cdot t}\left[dr^2 + r^2\left(d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta d\varphi^2\right)\right] \tag{۷۱۷}$$



شکل ۲: رفتار شعاع عالم بر مبنای معادله‌ی فریدمان به ازای $\Lambda < ۰$ ونیز $\Lambda = ۰$و $k = ۱$.



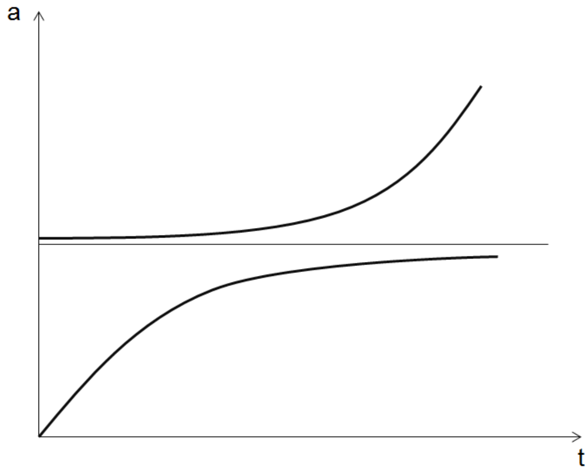
شکل ۳: رفتار تابع $F(a)$به ازای $\Lambda > ۰$.

که متریک دوسیته است. کشف انرژی تاریک و انبساط شتابدار عالم نقش این نوع ماده (خلاء) را در عالم کنونی پر اهمیت کرده است.

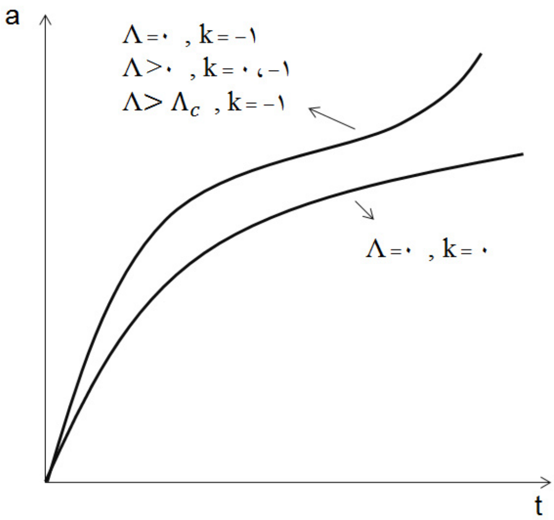
پ) **مدل های ناایستا** . در این مورد رفتار جواب های معادله ی (۳۱) را از روی رفتار تابع $F(a)$ به ازای مقادیر مختلف Λ به دست می آوریم.

$\Lambda < ۰$: این مورد به معنی جاذبه ی اضافی ناشی از انرژی خلاء است. معادله ی (۳۱) نشان می دهد که به ازای a های بزرگ همواره $\dot{a}^۲$ منفی می شود. یعنی برای a بیشینه‌ای وجود دارد که به ازای آن سرعت انبساط صفر می شود. پس از قطع انبساط عالم دوباره منقبض خواهد شد (شکل ۲) . مقدار k نقش تعیین کننده در این مورد ندارد.

$\Lambda > ۰$: در این مورد رفتارهای گوناگونی برای a مشاهده می شود. برای شناخت این رفتارها تابع $F(a)$ را رسم می کنیم (شکل ۳). مشاهده می کنیم که به ازای $k = ۰, -۱$ این تابع به ازای تمام مقادیر $F(a)$ همواره مثبت است. پس با مدل هایی سروکار داریم که در آن ها a از صفر تا بی نهایت منبسط می‌شود، یعنی انبساط حد ندارد. اما اگر $k = ۱$ باشد، مقداری بحرانی برای Λوجود دارد، Λ_c ، که به ازای آن تابع $F(a)$ کمینه دارد. این مقدار کمینه متناظر است با عالم ایستای اینشتین، با شعاع a_c که به ازای آن $F(a_c) = \dfrac{dF(a_c)}{da} = ۰$. به ازای $a > a_c$ عالمی خواهیم داشت در حال انبساط که شعاع آن از شعاع عالم اینشتین تا بی نهایت منبسط می‌شود (شکل ۴).



شکل ۴: جواب‌های متناظر با $\Lambda = \Lambda_c = \frac{۴}{(\kappa m)^{۲}}$و $k = ۱$.



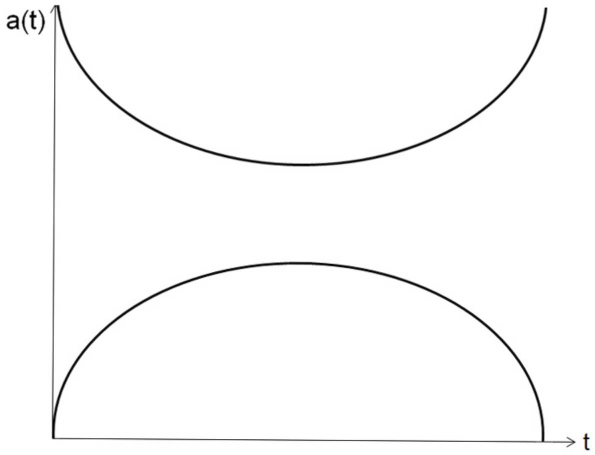
شکل ۵: چند مدل با انبساط بدون حد.

به ازای $\Lambda > \Lambda_c$ $(k = ۱)$ باز هم با عالمی سروکار داریم که بی حد منبسط می شود (شکل۵). اما اگر $\Lambda_c > \Lambda > ۰$ باشد، آنگاه با دو نوع جواب سروکار داریم: جوابی که با بیشینه‌ی شعاع برای انبساط و جوابی با کمینه‌ی شعاع (شکل۶).

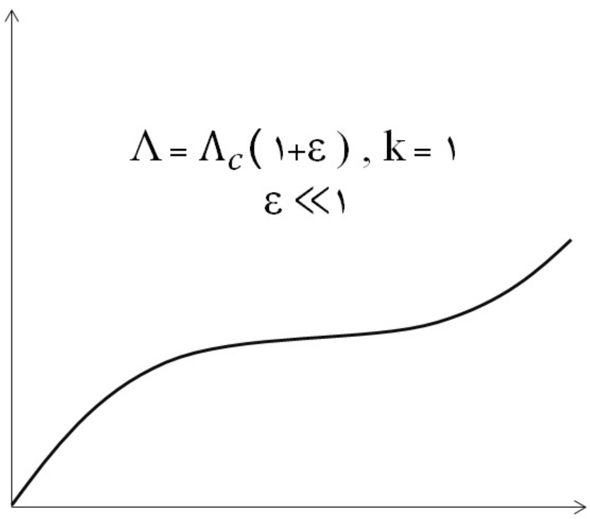
در مورد $k = ۱$ می‌توان جوابی ساخت که از حیث نظری جالب و مهم است. گیریم $\Lambda = \Lambda_c(۱+e)$ باشد، که در آن $e \ll ۱$. جواب متناظر با این مورد به مدل لومتر $(Lemaitre)$ معروف است. رفتار جواب معادله‌ی فریدمان در این مورد در شکل ۷ نشان داده شده است. در این مدل در مرحله‌ای از تحول به نظر می رسد انبساط متوقف شده باشد.

$\Lambda = ۰$: در این مورد می‌توان معادله‌ی فریدمان را به راحتی حل کرد. ساده ترین مورد، حالت $k = ۰$ است که آن را مدل اینشتین – دوسیته می نامند. از (۲۹) به دست می آید

$$\dot{a}^{۲} = \frac{\kappa m}{۳a} \qquad \Rightarrow \qquad a = \left(\frac{۳\kappa m}{۴}\right)^{\frac{۱}{۳}} t^{\frac{۲}{۳}} \tag{۷۱۸}$$



شکل ۶: جواب‌های مربوط به مورد $k = ۱$، $۰ < \Lambda < \Lambda_c$.



شکل ۷: مدل لومتر.انبساط مرحله‌ای عملاً متوقف می‌شود.

پس شعاع عالم مانند $t^{\frac{2}{3}}$ تا بینهایت منبسط می شود.

در مورد $k = 1$ و $\Lambda = 0$ جواب (۲۹) را به صورت زیر به دست می آوریم

$$t = \frac{f}{2}\arccos\left(1 - \frac{2a}{f}\right) - \sqrt{f \cdot a - a^2} \tag{719}$$

که در آن $f = \frac{\kappa m}{3}$ حداکثر انبساط است در لحظه ی $t_{max} = \frac{\pi f}{2}$. نهایت عالم در حالت کاملاً رمبیده در زمان $t = 2t_{max}$ فرا می رسد. به راحتی می توان دید که خم (۴۶) یک چرخزاد است. برای این کار زمان جدید τ را وارد می کنیم:

$$dt = a(t)d\tau =: b(\tau)d\tau \tag{720}$$

پس متریک می شود

$$ds^2 = b^2(\tau)\left(d\tau^2 - d\sigma^2\right) \tag{721}$$

یعنی با معرفی زمان τ متریک همدیس تخت می شود. این متریک برای تمام مقادیر k صادق است. اما برای $k = 1$ به دست می آوریم

$$\begin{aligned} b(\tau) &= \frac{f}{2}\left(1 - \cos\tau\right) \\ t &= \frac{f}{2}\left(\tau - \sin\tau\right) \end{aligned} \tag{722}$$

که صورت پارامتری معروف خم چرخزاد است.

به ازای $k = 1$ می توان جواب معادله‌ی فریدمان را به صورت‌های زیر نوشت

$$t = \sqrt{a(f+a)} - \frac{f}{2}arccosh(1 + \frac{2f}{a}) \tag{723}$$

یا

$$b(\tau) = \frac{f}{2}\left(\cosh\tau - 1\right) \tag{724}$$

$$t = \frac{f}{2}\left(\sinh\tau - \tau\right) \tag{725}$$

در این مدل عالم همواره منبسط می شود.

۷.۱۰ خواص سینماتیکی مدل‌های فریدمان

از شکل متریک روشن است که ویژه طول میان دو نقطه در عالم متناسب با $a(t)$ تغییر می کند:

$$l(t) \propto a(t) \qquad \text{یا} \qquad \frac{l(t)}{l(t_\circ)} = \frac{a(t)}{a(t_\circ)} \tag{۷۲۶}$$

به همین ترتیب رابطه‌ی میان بسامد گسیل شده، ω_e، به بسامد رصد شده، $\omega_\circ$، چنین است:

$$\frac{\omega_e}{\omega_\circ} = \frac{a(t)}{a(t_e)} = ۱ + z \tag{۷۲۷}$$

که در آن z انتقال به سرخ تابش مربوط است.

تابع $a(t)$ معمولاً به صورت زیر حول زمان کنونی $t_\circ$ بسط داده می‌شود:

$$a(t) = a(t_\circ)\left[۱ + H_\circ(t - t_\circ) - \frac{۱}{۲}q_\circ H_\circ^۲(t - t_\circ)^۲ + \ldots\right] \tag{۷۲۸}$$

که در آن

$$H_\circ \equiv \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)_{t=t_\circ} \qquad , \qquad q_\circ \equiv -\left(\frac{\ddot{a}a}{\dot{a}^۲}\right)_{t=t_\circ} \tag{۷۲۹}$$

مقدار $H_\circ$، ثابت هابل، یعنی پارامتر هابل در زمان کنونی است. چون مقدار آن $۵۰ < H < ۱۰۰$ کیلومتر بر ثانیه در مگاپارسک تعیین شده است، مرسوم شده که آن را به صورت

$$H_\circ = ۱۰۰h \qquad kms^{-۱}Mpc^{-۱} \qquad ۰/۵ < h < ۱$$

می‌نویسند.

۸.۱۰ دینامیک مدل‌های فریدمان

برای بررسی دینامیک عالم فریدمان با فرض شاره‌ی کامل به‌صورت

$$T_\mu^\nu = \text{قطر}(-\rho, p, p, p) \tag{۷۳۰}$$

و نیز متریک رابرتسون - واکر معادله‌ی مستقل فریدمان به‌دست آمد:

$$\frac{\dot{a}^۲ + k}{a^۲} = \frac{\Lambda\pi G}{۳}\rho \tag{۷۳۱}$$

$$\frac{۲\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^۲ + k}{a^۲} = -۸\pi G p \tag{۷۳۲}$$

با سه مجهول $a(t)$، $\rho(t)$ و $p(t)$. و نیز با معادله حالت $p = p(\rho)$ معادله ی (۵۹) ارتباط میان مقدار ماده‌ی موجود در عالم، چگالی ρ، و نیز هندسه، k، به دست می‌آید. در حالت $k = ۰$ یک چگالی آستانه تعریف می‌شود:

$$\rho_c = \frac{۳}{۸\pi G} \cdot H^۲ \tag{۷۳۳}$$

هرگاه چگالی عالم از این آستانه بیش‌تر باشد، داریم $k = ۱$، و آنگاه هندسه‌ی عالم بسته است؛ هرگاه کمتر باشد، $k = -۱$، و آنگاه هندسه باز است.برای زمان کنونی با مقدار رصد شده‌ی هابل داریم

$$\rho_{\cdot c} = \frac{۳}{۸\pi G} H_{\cdot}^{۲} \simeq \begin{cases} ۱/۸۸ \times ۱۰^{-۲۹} h^{۲} & gcm^{-۳} \\ ۱/۰۶ \times ۱۰^{۴} h^{۲} & evcm^{-۳} \end{cases} \tag{۷۳۴}$$

بنابراین نسبت چگالی موجود عالم به چگالی آستانه، که عدد بی‌بعدی است، گویای هندسه‌ی عالم است:

$$\Omega = \frac{\rho}{\rho_c} \tag{۷۳۵}$$

$$\Omega_{\cdot} = \frac{\rho_{\cdot}}{\rho_c} \tag{۷۳۶}$$

توجه کنید که شاخص ۰ نمایانگر مقدار کمیت‌ها در زمان حال، $t_{\cdot}$، است. به این ترتیب از معادله‌ی (۵۸) می‌توان نوشت

$$\frac{k}{a^{۲}} = H^{۲} \left(\Omega - ۱\right) \tag{۷۳۷}$$

که در آن رابطه ی k و Ω به وضوح دیده می‌شود. k را می توان از معادله ی (۵۹) حذف کرد:

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{۴\pi G}{۳} \left(\rho + ۳p\right) \tag{۷۳۸}$$

در این جا نیز مانند مورد نیوتونی باید یک معادله‌ی پیوستگی برای حرکت شاره‌ی کیهانی وجود داشته باشد. چون بخش متغیر فاصله، یا شعاع، با $a(t)$ داده می‌شود، پس $\rho a^{۳}$ نقش مقدار ماده را دارد، که تغییرات آن معادله ی پیوستگی را می‌دهد. این تغییرات را از روی معادله های (۵۸) و (۶۵) به دست می‌آوریم:

$$\frac{d}{dt} \left(\rho a^{۳}\right) = -p \frac{d}{dt} a^{۳} \tag{۷۳۹}$$

و یا

$$\frac{d}{dt} \left(\rho a^{۳}\right) + p \frac{d}{dt} a^{۳} = ۰ \tag{۷۴۰}$$

که همان معادله‌ی پیوستگی است. پس معادله‌ی پیوستگی از دو معادله‌ی دیگر مستقل نیست.

۹.۱۰ جواب‌های خاص و مراحل خاص تحول عالم

معادله‌ی حالت شاره‌ی کیهانی در مراحل مختلف تحول عالم صورت های مختلفی داشته است. معمولاً شکل ساده‌ی معادله‌ی حالت که در برگیرنده‌ی حالت‌های متفاوت به‌صورت $p = \omega \cdot \rho$ نوشته می‌شود که در آن ω معمولاً ثابت درنظر گرفته می‌شود و به آن تابع حالت هم گفته می‌شود. در حالت کلی‌تر می‌توان این تابع حالت را تابع زمان یا

مقیاس طول $a(t)$ دانست. $\omega=0$ برای حالت ماده‌ی نانسبیتی (غبار) و $\omega=\frac{1}{3}$ برای تابش است. برای این موردها می‌توان معادله‌ی پیوستگی را حل کرد و چگالی ρ را بر حسب a به‌دست‌آورد:

$$\rho_{nr}=\rho_{nr}(t_0)\cdot\left(\frac{a_0}{a}\right)^3=\rho_c\Omega_{nr}\left(1+z\right)^3 \tag{741}$$

و

$$\rho_{r}=\rho_{n}(t_0)\cdot\left(\frac{a_0}{a}\right)^4=\rho_c\Omega_{r}\left(1+z\right)^4 \tag{742}$$

برای زمان حال داریم

$$\Omega_{nr}\simeq 0/2 \qquad , \qquad \Omega_r\simeq 2/56\times 10^{-5} \tag{743}$$

پس

$$\Omega_{\text{کل}}\simeq\Omega_{nr}$$

یعنی در دورانی هستیم که ماده (ی نانسبیتی) بر تابش (نسبیتی) غالب است. از رابطه های (۶۸) و (۶۹) می‌بینیم که اگر در زمان به عقب بازگردیم چگالی تابش سریع‌تر افزایش می‌یابد، پس به زمانی می‌رسیم که چگالی ماده و تابش برابر است. این زمان را زمان تساوی، t_{eq}، می‌نامیم. در این هنگام داریم

$$(1+z_{eq})=\frac{a_0}{a_q}=\frac{\Omega_{nr}}{\Omega_r}\simeq 3/9\times 10^4(\Omega h^2) \tag{744}$$

دمای تابش متناسب است با a^{-1}، پس

$$T_{eq}=T_0\left(1+z_{eq}\right)=9/24(\Omega h^2)\quad ev \tag{745}$$

در معادله‌ی (۵۸) می توان جمله ی $\frac{k}{a^2}$، جمله‌ی انحنا، را با جمله‌ی چگالی در سمت راست مقایسه کرد.چگالی تابش متناسب است با a^{-4} و چگالی ماده متناسب با a^{-3} است. پس به ازای a های کوچک چگالی تابش غلبه دارد و می‌توان از جمله‌ی انحناء صرف نظر کرد. تساوی این دو جمله به ازای $z=z_c$ برقرار می شود:

$$(1+z_c)=\left[\Omega_{0r}^{-1}\left(1-\Omega_0\right)\right]^{\frac{1}{2}}\simeq 200\left(1-\Omega_0\right)^{\frac{1}{2}}\cdot h \tag{746}$$

پس

$$z\leq 200$$

به ازای $z\gg z_c$ از جمله‌ی انحنا در مقابل چگالی تابش می توان کلاً صرف نظر کرد.

حالا جمله‌ی انحنا را با جمله ی چگالی ماده مقایسه می‌کنیم. به ازای

$$z_f=\Omega_0^{-1}-2 \tag{747}$$

این دو جمله برابرند. پس به ازای $z\ll z_f$ جمله‌ی انحنا در معادله‌ی فریدمان غلبه دارد و به ازای $z\gg z_f$ می‌توان k را برابر صفر در نظر گرفت. باتوجه به مقدار $\Omega_0=0/2$ و $z_f\simeq 3$ نقش جمله‌ی انحنا برای همه‌ی مقادیر z، مگر $z<10$، قابل اغماض است. به این ترتیب معادله‌ی فریدمان به ازای z های بزرگ به صورت

$$\frac{\dot a^2}{a^2}=\frac{8\pi G}{3}\rho_{eq}\left[\left(\frac{a_{eq}}{a}\right)^4+\left(\frac{a_{eq}}{a}\right)^3\right] \tag{748}$$

نوشته می شود که به سهولت قابل حل است:

$$H_{eq}\cdot t=\frac{۲\sqrt{۲}}{۳}\left[\left(\frac{a}{a_{eq}}-۲\right)\left(\frac{a}{a_{eq}}+۱\right)^{\frac{۱}{۲}}+۲\right] \qquad (۷۴۹)$$

که در آن

$$H_{eq}=۲H_۰^۲\Omega\left(۱+z_{eq}\right)^۳=۲H_۰^۲\Omega_r\left(۱+z_{eq}\right)^۴ \qquad (۷۵۰)$$

و

$$a_{eq}=a_۰\left(۱+z_{eq}\right)^{-۱}=H_۰^{-۱}\mid\Omega-۱\mid^{-\frac{۱}{۲}}\frac{\Omega_r}{\Omega} \qquad (۷۵۱)$$

و همچنین برای t_{eq} به دست می‌آوریم

$$t_{eq}=\frac{۲\sqrt{۲}}{۳}H_{eq}^{-۱}\left(۲-\sqrt{۲}\right)\simeq ۰/۳۹H_۰^{-۱}\Omega^{-\frac{۱}{۲}}\left(۱+z_{eq}\right)^{-\frac{۳}{۲}}\simeq ۱/۵۷\times۱۰^{۱۰}((\Omega h^۲)^{-۲}s)\simeq ۴۹(\Omega h^۲)^{-۲}\text{سال} \qquad (۷۵۲)$$

جواب بالا را می‌توان برای a چنین نوشت

$$\frac{a}{a_{eq}}=\begin{cases}\left(\frac{۳}{۲}\sqrt{۲}\right)^{\frac{۲}{۳}}\left(H_{eq}\cdot t\right)^{\frac{۲}{۳}} & \text{غلبه‌ی ماده}\\ \left(\frac{۳}{\sqrt{۲}}\right)^{\frac{۱}{۲}}\left(H_{eq}\cdot t\right)^{\frac{۱}{۲}} & \text{غلبه‌ی تابش}\end{cases} \qquad (۷۵۳)$$

۱۰.۱۰ شعاع هابل

معکوس پارامتر هابل زمان مشخصه‌ای را برای هر مدل به دست می‌دهد. متناظر با آن طول مشخصه‌ی d_H تعریف می‌شود که به شعاع هابل معروف است:

$$d_H=H^{-۱}(t)=\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^{-۱} \qquad (۷۵۴)$$

این شعاع نوعاً فاصله‌ای را به‌دست می‌دهد که در آن پدیده‌های فیزیکی به طور همدوس روی یکدیگر اثر می گذارند. به‌علاوه، شعاع مشخصه‌ای است که در آن اثرهای نسبیت عامی مهم می‌شوند. به این ترتیب به ازای فاصله‌های $L \ll d_H$ می‌توان به خوبی گرانش نیوتونی را به‌کاربرد.
هرگاه بتوانیم فرض کنیم $a(t)\propto t^n$، آنگاه

$$d_H=\frac{۱}{n}\cdot t \qquad (۷۵۵)$$

اما چون $n<۱$، پس شعاع هابل سریع‌تر از ویژه طول بزرگ می‌شود. مثلا شعاع هابل را در زمان t_{eq} بگیرید:

$$d_H(t_{eq})=H_{eq}^{-۱}\simeq ۰/۸۵\times ۱۰^{۲۱}(\Omega h^۲)^{-۲}cm \qquad (۷۵۶)$$

ویژه شعاع کنونی منطقه‌ای که در زمان t_{eq} برابر $d_H(t_{eq})$ بوده است می‌شود

$$L_{eq}(\text{اکنون}) = d_H(t_{eq})\,(۱ + z_{eq}) \simeq ۱۱(\Omega h^۲)^{-۱} \qquad Mpc \tag{۷۵۷}$$

از طرف دیگر

$$d_H(\text{اکنون}) \simeq ۳۰۰۰h^{-۱} \qquad Mpc \tag{۷۵۸}$$

به این ترتیب می‌بینیم که شعاع هابل کنونی بسیار بزرگتر از ویژه شعاع منطقه‌ای به بزرگی شعاع هابل در زمان t_{eq} است. منطقه‌ای را در نظر بگیرید با ویژه‌ی اندازه‌ی کنونی λ ((اکنون) $\lambda < d_H$). هنگامی که در زمان به عقب برمی‌گردیم این ناحیه به نسبت $a(t) \propto t^n$ کوچک می‌شود ($n < ۱$) ؛ اما شعاع هابل به نسبت t، یعنی سریع‌تر. پس، زمانی خواهد رسید که در آن شعاع این منطقه برابر شعاع هابل می‌شود: $t = t_{entrance}(\lambda)$، قبل از آن، یعنی برای $t < t_{entrance}$، شعاع منطقه از شعاع هابل بزرگ‌تر خواهد بود. معمول است که می‌گوئیم مقیاس طول λ در زمان $t = t_{entrance}(\lambda)$ به شعاع هابل می‌رسد. مثلا از محاسبه‌ی (۸۴) می‌دانیم که برای ناحیه‌ای به ابعاد

$$\lambda_{eq} = ۱۱ \qquad Mpc(\Omega h^۲)^{-۱} \tag{۷۵۹}$$

زمان ورود همان زمان برابری است، یعنی $t_{entrance} = t_{eq}$. منطقه‌هایی با ابعاد کوچک‌تر از این ($\lambda < \lambda_{eq}$) زودتر ،یعنی در دوران غلبه‌ی تابش به شعاع هابل رسیده‌اند. منطقه‌هایی با ابعاد بزرگ‌تر ($\lambda < \lambda_{eq}$)قبل از آن، یعنی در دوره‌ی غلبه‌ی ماده، به شعاع هابل می‌رسند.

تخمین‌هایی عددی تاکنون بر این مبنا بوده است که تنها ماده‌ی نسبیتی فوتون‌های تابش زمینه‌ی کیهانی بوده‌اند. درصورتی که ذرات نسبیتی دیگر، مانند نوترینوها، درنظر گرفته شوند این ارقام باید تصحیح شود.

مقیاس طول مهم دیگری در عالم فریدمان اندازه‌ی افق است. مقیاس طول را $a = a.t^n$ و $n < ۱$ بگیرید. در بازه‌ی $(۰, t)$ فوتون‌ها مسافت مختصاتی

$$r(t) = \int_{۰}^{t} \frac{dt}{a} = \frac{۱}{a_۰}\frac{t^{۱-n}}{(۱-n)} \tag{۷۶۰}$$

را طی می‌کنند. ویژه‌ی طول متناظر با این مسافت مختصاتی می‌شود

$$h(t) = a(t)r(t) = \frac{۱}{۱-n} \cdot t \tag{۷۶۱}$$

در مقایسه با شعاع هابل، $n^{-۱}t$، این اندازه‌ی افق تفاوتی از مرتبه‌ی بزرگی یک دارد. بنابراین شعاع هابل معمولاً با طول افق یکی است. تفاوت هنگامی ظاهر می‌شود که در مقیاس طول عالم $n > ۱$ باشد.

۱۱.۱۰ افق

در بخش های قبل به هنگام بحث نمودارهای پنروز برای مدل‌های فریدمان با مفهوم افق رویداد و افق ذره در این مدل‌ها آشنا شدیم. دیدیم که افق ذره، به علت تکینگی اولیه، در همه‌ی مدل‌های فریدمان با $k = ۰, \pm ۱$ وجود دارد، در حالی که افق رویداد در مدل‌های با $k = ۰, -۱$ وجود ندارد. در این بخش می‌پردازیم به بررسی اندازه‌ی افق ذره. اندازه ی افق به ما می‌گوید که چه بخشی از عالم با ما ارتباط علّی دارد. این سوال اساسی برای مدل‌های فریدمان به راحتی پاسخ داده می‌شود. همین سوال را می‌توان این‌گونه فرمولبندی کرد: چه ویژه فاصله‌ای هنوز برای ما رویت‌پذیر است؟ برای محاسبه از مختصات ϑ و φ چشم می‌پوشیم. ناظری درنقطه‌ی $r. = ۰$ در نظر می‌گیریم. اگر علامتی در

لحظه‌ی $t_\circ = \circ$ گسیل شده باشد و در لحظه‌ی t، یا قبل از آن به ما برسد، مختص r_H آن علامت چه مقدار است؟ داریم

$$\int_\circ^t \frac{d\acute{t}}{a(\acute{t})} = \int_\circ^{r(t)} \frac{dr}{\sqrt{1 + kr^2}} \tag{۷۶۲}$$

بنابراین ویژه فاصله تا افق می‌شود:

$$d_H(t) = a(t) \int_\circ^{r_H} \frac{dr}{\sqrt{1 + kr^2}} = a(t) \int_\circ^t \frac{d\acute{t}}{a(\acute{t})} \tag{۷۶۳}$$

هرگاه این فاصله متناهی باشد مخروط نور گذشته‌ی ما یک افق ذره تعیین می‌کند. این افق ذره حدّ میان عالم مرئی و آن بخش از عالم است که از آن نوری به ما نرسیده است. رفتار $a(t)$ نزدیک به تکینگی تعیین می‌کند که آیا d_H متناهی است یا نه. هرگاه $a(t) \propto t^n$، آنگاه به ازای $n < 1$، d_H متناهی است، و ما با افق ذره سروکار داریم. یعنی، گرچه به ازای $t \to \circ$، $a \to \circ$ می رود و فاصله‌ی فیزیکی به سمت صفر میل می‌کند، اما تنها بخشی از عالم با ما ارتباط علّی دارد. این یکی از شکلات مدل مهبانگ است که در فصل مدل‌های تورمی به آن خواهیم پرداخت.
فاصله‌ی افق را می‌توان برای مدل‌های فریدمان در شرایط متفاوت به‌دست‌آورد. ابتدا از اثر انحنا (k)درعالم اولیه چشم‌پوشی می‌کنیم، یعنی $k = \circ$. پس داریم:

$$\frac{\dot{a}}{a} = \sqrt{\frac{8\pi G\rho}{3}} \tag{۷۶۴}$$

اگر معادله حالت ماده را $p = \gamma \cdot \rho$ بگیریم، برای a به‌دست می‌آوریم:

$$a \propto t^{\frac{2}{3(1+\gamma)}} = \begin{cases} t^{\frac{1}{2}} & \text{غلبه‌ی تابش} \\ t^{\frac{2}{3}} & \text{غلبه‌ی ماده} \end{cases} \tag{۷۶۵}$$

به این ترتیب برای فاصله‌ی افق به دست می‌آید:

$$d_H = \begin{cases} 2t & \text{غلبه‌ی ماده} \\ 3t & \text{غلبه‌ی تابش} \end{cases} \tag{۷۶۶}$$

منظور کردن جمله‌ی انحنا این نتایج را تنها کمی تغییر می‌دهد، که می‌توان آن را نیز حساب کرد. داریم:

$$d_H = a \int_\circ^t \frac{dt}{a(t)} = a(t) \int_\circ^{a(t)} \frac{da(\acute{t})}{\dot{a}(\acute{t})a(\acute{t})} \tag{۷۶۷}$$

با استفاده از رابطه‌ی

$$\frac{k}{a_\circ^2} = H_\circ^2 (\Omega_\circ - 1) \tag{۷۶۸}$$

معادله‌ی فریدمان را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$\dot{a}^2 = a_\circ^2 H_\circ^2 \left[1 - \Omega_\circ + \Omega_\circ \left(\frac{a_\circ}{a}\right)^{1+3\gamma}\right] \tag{۷۶۹}$$

که در آن γ در رابطه‌ی $p = \gamma \cdot \rho$ تعریف شده‌است. نشاندن در معادله‌ی بالا برای d_H می‌دهد:

$$d_H = \frac{1}{H_\circ (1 + z)} \int_\circ^{(1+z)^{-1}} \frac{dx}{\left[x^2 (1 - \Omega_\circ) + \Omega_\circ x^{1-3\gamma}\right]^{\frac{1}{2}}} \tag{۷۷۰}$$

این انتگرال به ازای $\gamma < -\frac{۱}{۳}$ نامتناهی است؛ پس به ازای $\gamma < -\frac{۱}{۳}$ افق ذره وجود ندارد. به هنگام غلبه‌ی ماده، $p = ۰$ و $\gamma = ۰$، داریم:

$$d_H \begin{cases} = \dfrac{۱}{H_. (۱+z)\sqrt{\Omega_. - ۱}} \cos^{-۱}\left[۱ - \dfrac{۲(\Omega_. - ۱)}{\Omega_. (۱+z)}\right] & \Omega_. > ۱ \\ = ۲H_.^{-۱}(۱+z)^{-\frac{۳}{۲}} & \Omega_. = ۱ \\ = \dfrac{۱}{H_. (۱+z)\sqrt{۱ - \Omega_.}} \cosh^{-۱}\left[۱ + \dfrac{۲(۱ - \Omega_.)}{\Omega_. (۱+z)}\right] & \Omega_. < ۱ \end{cases} \tag{۷۷۱}$$

می‌توان دید که به ازای $۱ + z \gg Omega_.^{-۱}$ داریم:

$$d_H \to \frac{۲}{H_. \sqrt{\Omega_.}(۱+z)^{\frac{۳}{۲}}} = ۳t \tag{۷۷۲}$$

پرسش‌ها

۱.دردوران غلبه‌ی تابش چگالی متناسب است با عکس توان چهار $a(t)$. این در حالی است که انتظار داریم چگالی متناسب با عکس توان سوم تابع مقیاس $a(t)$ تغییر کند. برای این اختلاف چه توجیهی دارید؟

۲.انتظار دارید چه زمانی جمله‌ی انحنا در معادله‌ی فریدمان بر چگالی ماده و بر جمله‌ی کیهانشناختی غلبه کند؟

۳.مدل ایستای اینشتین با چگالی $\kappa\rho = ۲\Lambda$ ناپایدار است. چرا؟

۴.به ازای یک مقدار بحرانی (آستانه) برایΛ، $\dot{a}$ در معادله‌ی فریدمان صفر می‌شود. جواب‌های متناظر با این مقدار آستانه را بحث کنید.

۵.فاصله‌ها در مدل‌های فریدمان متناسب با $a(t)$ تغییر می‌کند. توجیه کنیدچرا بسامدها با نسبت $a^{-۱}$ تغییر می‌کند.

۶.از ترمودینامیک استنباط می‌کنیم که فشار باعث انبساط یک گاز می‌شود، مگر نیرویی جلوی انبساط محفظه را بگیرد. به این ترتیب انتظار داریم اگر فشار منفی باشد عکس این اتفاق بیفتد، یعنی فشار منفی باعث انقباض می‌شود. اما هنگامی که شتاب در انبساط عالم کشف شد و این پدیده به انرژی تاریک نسبت داده شد فشار آن را منفی فرض کردند که مغایر با استنباط بالاست. چرا؟

۷.معروف است که به هنگام انحناء کم می‌توان از گرانش نیوتونی با تقریب خوبی استفاده کرد. این شرط در معادله‌های فریدمان به صورت $l \ll d_H$ نوشته می‌شود، یعنی برای فاصله‌های خیلی کوچک‌تر از شعاع هابل. چرا؟

۸.نشان دهید که اگر در مدل اینشتین شعاع عالم به مقدار کوچک δa منبسط (منقبض) شود، آنگاه وجود جمله ی Λ موجب انبساط (انقباض) بیشتر عالم، در نتیجه‌ی ناپایداری آن، خواهد شد.

۹.جواب هایی را که در شکل ۴ رسم شده اند توضیح دهید. به خصوص جواب هایی را بحث کنید که به ازای $a > a_c$ و $a < a_c$ منقبض می‌شوند.

۱۰.با استفاده از رابطه ی (۵۳) رابطه ی (۵۴) را توجیه کنید.

۱۱.گفته می‌شود که گرانش نیوتونی را هنگامی می‌توان به‌کاربرد که انحنای فضا کم باشد. این گفته چه‌طور با شرط $L \ll d_H$ برای تقریب نیوتونی سازگار است؟

۱۲. چرا معادله‌ی حالت تابش غالب برای عالم اولیه تقریب خوبی است؟ توجیه کنید!

۱۳. معادله‌ی پیوستگی شاره‌ی کامل در مدل‌های کیهان‌شناسی همگن و همسانگرد را از معادله‌های فریدمان به‌دست آورید!

۱۴. چرا چگالی بار یونی (ذره) با چگالی جرم را در دوران ماده غالب یکی می گیریم؟

تمرین‌ها

۱.چرا متریک برای عالم همگن و همسانگرد تنها به یک تابع $a(t)$ بستگی دارد؟ نشان دهید حضور هرتابع دیگر در متریک یا با انتخاب مختصات جدید قابل حذف است، یعنی دینامیکی نیست، یا همگنی و همسانگردی را به هم می‌زند.

۲.لازمه‌ی همگنی در عالم این است که توزیع ستاره‌ها یا کهکشان‌های روشن‌تر از f به صورت زیر باشد

$$N(< m) \propto f^{-\frac{3}{2}} \propto 10^{0.6m} \tag{773}$$

که در آن m قدر ستاره یا کهکشان است. این رابطه را توجیه کنید.

۳.نشان دهید در یک فضازمان همگن و همسانگرد سطوح همگنی Σ_t بر بردارهای u^μ،که ناظر همراه را تعریف می‌کند، عمود است.

۴.تانسور انحنای سطوح همگنی Σ_t ،برحسب متریک سه‌بعدی h_{ij} به این صورت است

$$R_{ijkl} = \beta(x)\left(h_{ik}h_{jl} - h_{il}h_{jk}\right) \tag{774}$$

با استفاده از اتحاد بیانکی نشان دهید $\beta(x)$ ثابت است.

۵. متریک کره سه بعدی را به صورت (۱۱) در نظر بگیرید. حول نقطه‌ی $\alpha = 0$ کلاهکی در نظر بگیرید. نشان دهید شعاع آن برابر است با $R = a \cdot \alpha$ آنگاه مساحت آن را به دست آورید. نشان دهید این مساحت برابر است با

$$A = 4\pi a^2 \sin^2\chi = 4\pi a^2 \sin^2\left(\frac{R}{a}\right)$$

با افزایش R ابتدا مساحت زیاد می‌شود و حداکثر به $A = 4\pi a^2$ می‌رسد که از مساحت یک کره با همان شعاع در فضای اقلیدسی ($A = \pi^2 a^3$) کمتر است. به ازای $R > \frac{\pi a}{2}$ این مساحت دوباره کاهش می‌یابد تا برای $R = \pi a$ برابر صفر بشود. از این طریق نیز متناهی بودن فضا را توجیه کنید.

۶. همگنی و همسانگردی سطح هذلولیوار در فضای مینکوفسکی را به کمک تبدیل لورنتس توضیح دهید.