مکانیک کلاسیک

اثر :

ل. د. لاندو ـ ا. م. لیفشیتز

ترجمه :

کامیار نیکپور ـ مهیار نیکپور

چاپ دوم

با تجدید نظر کامل

مؤسسهٔ انتشارات امیرکبیر
تهران، ۱۳۶۱

فهرست

فصل چهارم : برخورد ذرات

فصل پنجم : نوسانهای کوچك

فصل ششم : حرکت جسم صلب

فصل هفتم : معادلات کانونیك

پیش گفتار

یکی از اساسیترین مباحث فیزیك که از دیر بازشناخته شده و تحقیقات وسیع و جامعی دربارهٔ آن صورت گرفته مکانیك است. رشته‌ای ازاین مبحث مکانیك کلاسیك نیوتنی است که در این کتاب به صورت بسیار نوینی تدوین گردیده‌است. نویسندگان، اصول ومبانی مکانیك را بدون‌توجه به سیرتاریخی و تکامل آن و بر پایه‌ای اصولی که می‌توانند همهٔ مسائل را به روشی منطقی و پیوسته و در عین حال روشن و ساده تعبیر و تفسیر کنند، به رشتهٔ تحریر درآورده‌اند وکوشیده‌اند تا از حشو و زوائد در تعریف اصول و تحلیل مباحث مکانیك پرهیز کنند.

نویسندگان این کتاب «ل.د.لاندو» (L. D. Landau) و«ل.م.لیفشیتز» (L. M. Lifshitz) عضو آکادمی علوم شوروی و از دانشمندان بنام جهان هستند که در زمینه‌های مختلف دانش فیزیك تحقیقات و بررسی‌های جامعی کرده‌اند.

لو داویدویچ لاندو (۱۹۰۸–۱۹۶۸) درباکو به دنیا آمد. از دانشگاه لنین فارغ التحصیل شد و در دانشگاه مسکو به تدریس فیزیك پرداخت. او در توسعهٔ تئوری مکانیك کوانتیك، فیزیك اجسام صلب، تئوری مغناطیسی و دینامیك مایعات و غیره کوشش بسیار کرده و به نتایج پرارزش و مهمی نائل شده‌است. به خاطر تحقیقاتش دربارهٔ نظریهٔ کوانتوم برندهٔ جایزهٔ لنین شد و نیز در سال ۱۹۶۲ به خاطر کشفیات علمی خود دربارهٔ مادهٔ متراکم و تئوری کوانتیك مایعات موفق به دریافت جایزهٔ نوبل گردید. او عضو بسیاری از آکادمیهای اروپا (انگلستان ـ هلند ـ دانمارك) و آمریکا بود. از نوشته‌های اونظریهٔ فوق سیالی هلیوم و نظریهٔ حالت واسطه‌ای در فوق هادیها و یك دورهٔ نه جلدی دربارهٔ فیزیك نظری را می‌توان نام برد.

استادلیفشیتز به‌مناسبت مطالعاتی که دربارهٔ فیزیك اجسام صلب ومغناطیسی و نسبیت انجام داده، نام و آوازه‌ای بلند یافته است. او به خاطر تحقیقات خود در زمینهٔ تئوری نیروهای ملکولی ازطرف آکادمی علوم شوروی به دریافت جایزهٔ «لومونوسف» (Lomonossov) نائل آمد و نیزدرسال ۱۹۶۲ به مناسبت نوشتن مجموعهٔ فیزیك نظری به همکاری لاندو به دریافت جایزهٔ لنین مفتخر شد.

ترجمهٔ حاضر جلداول دورهٔ نه‌جلدی‌ازفیزیك نظری‌است که از روی‌متن انگلیسی که‌توسط دکتر«سایکس» ودکتر«بل» (J. S. Bell و J. B. Sykes) از روسی به انگلیسی برگردانیده شده به‌فارسی ترجمه شده است. در ترجمهٔ این کتاب سعی شده است که از هرگونه اشتباه وخطا اجتناب شود و از این‌رو متن فرانسهٔ آن نیز مورد نظر قرارگرفته تا از بعضی لغزشها که در ترجمهٔ انگلیسی کتاب وجود داشت، پرهیز شود. در برگرداندن لغات و اصطلاحات علمی وفنی کوشش بسیارشده است‌تا از واژه‌هایی که دربیشتر کتابهای دانشگاهی و علمی به کار رفته است و برای دانش‌پژوهان آشناتر و ساده‌تر می‌نماید، استفاده شود. معهذا فرهنگ لغات علمی کتاب برای راهنمایی وآشنایی بیشتر در پایان آن آمده است.

مترجمان در پایان کتاب درمورد بعضی مباحث عالی ریاضی که در این کتاب مورد استفاده قرارگرفته است ضمیمه‌ای قرار داده‌اند تا همهٔ قسمتهای آن بدون مراجعه به کتابهای ریاضی برای همه قابل استفاده باشد. در ضمن در برخی موارد که ضروری دانسته شد زیرنویسهایی جهت توضیح و آگاهی بیشتر افزوده شده است که با علامت (م) مشخص گردیده‌اند.

در چاپ این کتاب سعی بر آن بوده است که علائم و حروف متن دقیقاً به‌کار برده شود، گرچه در بعضی موارد به علت‌فقدان حروف لاتین و یونانی ناچار به تغییراتی جزئی شده‌ایم: حروف‌کج لاتین (ایتالیك) نمایندهٔ کمیات اسکالر و حروف راست معرف کمیات برداری است. در مورد حروف یونانی این کار درهمهٔ موارد میسر نبوده، از این‌رو دربعضی حالات از علامت بردار در روی حروف استفاده شده است. برای مثال در رفع ابهام چند مورد را در زیر ذکر می‌کنیم:

ϵ بردار	ε اسکالر
ϕ »	φ »
$\vec{\Omega}$ »	Ω »

در پایان امید می‌رود که با این اقدام گامی در پیش برد انتشار کتب علمی به زبان فارسی برداشته باشیم.

مهیار و کامیار نیکپور

فصل اول

معادلات حرکت

۱ : مختصات عمومی

یکی از مفاهیم اساسی مکانیك مفهوم ذرهٔ مادی (نقطهٔ مادی) است و آن بدین معنی است که در شرح حرکت جسم می‌توان از ابعاد آن صرف‌نظر کرد . البته امکان چنین‌فرضی منوط به شرایط مسأله است . مثلا هنگامی که حرکت سیاره‌ای را به دور خورشید مطالعه می‌کنیم ابعاد سیاره را می‌توان نادیده انگاشت . اما این فرض در بررسی گردش همان سیاره به دور محور خود امکان پذیر نیست .

حرکت نقطهٔ مادی را در فضا با بردار حامل $\mathbf{r}$ مشخص می‌کنند . مؤلفه‌های آن در مختصات کارتزین z و y و x است . مشتق $\mathbf{v}=\frac{d\mathbf{r}}{dt}$ که مشتق $\mathbf{r}$ است نسبت به زمان t ، سرعت و مشتق دوم $\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}$ را شتاب آن گویند . در این کتاب مشتق را با قراردادن نقطه‌ای در بالای حرف نشان می‌دهیم : $\mathbf{v}=\dot{\mathbf{r}}$

برای تعیین وضع N ذرهٔ مادی در فضا ، باید N بردار حامل را معلوم کنیم . یعنی $3N$ مختصات باید تعیین شود. تعداد کمیاتی‌راکه برای تعیین وضع جسم واحدی‌لازم است، درجات آزادی آن می‌گویند . در اینجا درجهٔ آزادی $3N$ است . ما ناچار نیستیم که کمیات مزبور را حتماً در مختصات کارتزین نشان دهیم ، بلکه شرایط مسأله ممکن است مختصات دیگری را که مناسبتر است پیش بیاورد . هر s کمیت $q_1 ، q_2 . . . ، q_s$ که

کاملا موقعیت سیستم را با s درجهٔ آزادی مشخص کند، مختصات عمومی سیستم و مشتق q_i را سرعت عمومی سیستم گویند.

هنگامی که همهٔ مقادیر مختصات عمومی تعیین شده باشند باز حالت مکانیکی سیستم در یك لحظهٔ غیرمشخص معلوم نیست و نمی‌توان موضع بعدی سیستم را درلحظهٔ دیگر به‌دست آورد. در مختصات معلومی سیستم می‌تواند هرسرعت دلخواهی را داشته باشد و موقعیت بعدی سیستم پس از زمان بی‌نهایت‌کوچك dt به این سرعت بستگی دارد.

اگر مختصات وسرعت سیستم هردومعلوم باشند، تجربه نشان می‌دهدکه حالت سیستم کاملا مشخص‌است ومی‌توان موضع بعدی سیستم را تعیین کرد. به زبان ریاضی اگرمختصات q و سرعت $\dot{q}$ در زمان معین داده شده‌باشد شتاب $\ddot{q}$ نیز در آن لحظه معلوم است.[۱]

روابط بین مختصات و سرعت و شتاب را معادلات حرکت گویند. آنها معادلات دیفرانسیل رستهٔ دوم از تابع $q(t)$ هستند. با انتگرال گیری از این معادلات می‌توان‌توابع مربوط و درنتیجه مسیر سیستم را معین کرد.

۲ : اصل کوچکترین عمل

کلی‌ترین قانون سیستم‌های مکانیکی که به صورت فرمول درآمده، اصل کوچکترین عمل است که به اصل هامیلتون معروف است. برطبق این اصل هرسیستم مکانیکی با تابع معین $L(q_۱ ، q_۲ ، \ldots ، q_s ، \dot{q}_۱ ، \dot{q}_۲ ، \ldots ، \dot{q}_s ، t)$ ویامختصراً $L(q ، \dot{q} ، t)$ مشخص می‌شود و حرکت آن طوری انجام می‌پذیردکه شرط زیر همواره صادق باشد.

فرض کنید در زمان $t_۱$ و $t_۲$، سیستم با دو دسته مختصات $q^{(۱)}$ و$q^{(۲)}$ مشخص شده‌ باشد؛ شرط مزبوربیان می‌کندکه حرکت سیستم مکانیکی درفاصلهٔ این دو موضع آن چنان است که انتگرال:

$$S = \int_{t_۱}^{t_۲} L(q ، \dot{q} ، t)\mathrm{d}t \qquad (۲-۱)$$

کوچکترین مقدار خود را داشته‌باشد. تابع L راتابع لاگرانژسیستم وانتگرال‌آن راعمل گویند.

این حقیقت‌که تابع لاگرانژ تنها شامل q و $\dot{q}$ است و به مشتقات بالاتر $\ddot{q}$ و $\dddot{q}$

۱ـ دراینجا به طورقراردادی به‌جای $q_۱$ ، $q_۲$ ، .... ، q_s وسرعتهای مربوط به اختصار علامات q و $\dot{q}$ را به‌کارمی‌بریم.

بستگی ندارد بیان نتیجه‌ای است که قبلا متذکر شدیم : حالت مکانیکی‌سیستم باتعیین مختصات و سرعت آن کاملا مشخص می‌شود .

با نوشتن شرطی که انتگرال (۱ـ۲) مینیمم شود به معادلات دیفرانسیل رستهٔ دوم خواهیم رسید . ابتدا برای سهولت مسئله فرض می‌کنیم که سیستم تنها یك درجه آزادی دارد و از اینرو کافی است تنها یك تابع $q(t)$ مشخص شود .

فرض کنید $q=q(t)$ تابعی است که به ازاء آن S مینیمم می‌شود . یعنی اگر به جای مقدار $q(t)$

$$q(t)+\delta q(t) \qquad (۲ـ۲)$$

راقراردهیم مقدار S افزایش یابد . $\delta q(t)$ تابعی‌است که درفاصلهٔ زمانی $t_۲$ و $t_۱$ ازهرجهت کوچك است وآنراتغییر تابع $q(t)$ می‌نامند . چون وقتی‌$t=t_۱$ و‌$t=t_۲$ باشد هرتابعی به شکل (۲ـ۲) به ترتیب مقادیر $q^{(۲)}$ و $q^{(۱)}$ را پیدا می‌کند نتیجه می‌شود که[1]

$$\delta q(t_۱)=\delta q(t_۲)=\circ \qquad (۲ـ۳)$$

وقتی به جای q ، $q+\delta q$ را قرار دهیم تغییر تابع S چنین می‌شود :

$$\delta S=\int_{t_۱}^{t_۲} L(q+\delta q \text{ ، } \dot q+\delta\dot q \text{ ، } t)\mathrm{d}t-\int_{t_۱}^{t_۲} L(q \text{ ، } \dot q \text{ ، } t)\mathrm{d}t$$

چنانچه عبارت زیر انتگرال را نسبت به قوای δq و $\delta\dot q$ بسط دهیم ، جملهٔ مؤثر از رستهٔ اول خواهد بود . شرط لازم برای آنکه S مینیمم[2] شود آنست که این جملات (تغییر اول انتگرال) صفر شوند . از این‌رو اصل کوچکترین عمل به صورت زیر نوشته می‌شود :

$$\delta S = \delta\int_{t_۱}^{t_۲} L(q \text{ ، } \dot q \text{ ، } t)\mathrm{d}t=\circ \qquad (۲ـ۴)$$

یا

$$\int_{t_۱}^{t_۲}\left(\frac{\partial L}{\partial q}\delta q+\frac{\partial L}{\partial \dot q}\delta\dot q\right)\mathrm{d}t=\circ$$

۱ـ باید متذکر شد که فرمول مربوط به اصل کوچکترین عمل همیشه در سراسر مسیر صادق نیست بلکه تنها دربارهٔ کوتاهی‌ازآن صدق می‌کند ، اما انتگرال (۱ و ۲) باید درتمام طول مسیر اکسترمومی داشته باشدکه لازم نیست همیشه مینیمم باشد و در اصل با توجه به روش بـه دست آوردن معادلات حرکت این موضوع اهمیت نـدارد و تنها شرط اکسترموم بودن به کار می‌آید .

۲ـ یا اکستروموم

چون $\frac{d\delta q}{dt}=\delta\dot{q}$ است با انتگرال گرفتن از جملهٔ دوم به صورت جزء به جزء داریم :

$$\delta S=\left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\delta q\right]_{t_1}^{t_2}+\int_{t_1}^{t_2}\left[\frac{\partial L}{\partial q}-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right)\right]\delta q\,dt \quad (۲-۵)$$

شرایط (۳-۲) ایجاب می‌کند که قسمت انتگرال گرفته شده صفر باشد . باقی می‌ماند بخش انتگرال گرفته نشده که باید درازاء هرمقدار δq صفر شود و این موقعی صادق است که عبارت زیر انتگرال صفر باشد . یا :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right)-\frac{\partial L}{\partial q}=0$$

اگر سیستم بیش از یك درجه آزادی داشته باشد ، S تابع متفاوت $q_i(t)$ وجود دارد که باید مطابق اصل کوچکترین عمل مستقلا تغییر کند . واضح است که خواهیم داشت :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)-\frac{\partial L}{\partial q_i}=0 \quad i=1,2,\dots,s \quad (۲-۶)$$

این معادلات رستهٔ دوم را معادلات لاگرانژ گویند .[1] اگر معادلات لاگرانژ سیستم مشخص باشد روابط (۶-۲) روابط بین شتاب وسرعت ومختصات را بدست می‌دهند که همان معادلات حرکت مورد نظر بود .

در ریاضیات معادلات (۶-۲) یك دسته معادلات رستهٔ دوم از s مجهول $q_i(t)$ را معرفی می‌کند که حل آنها شامل $2s$ ثابت اختیاری است . برای تعیین این ثابتها ودر نتیجه مشخص کردن یگانه حرکت ممکن سیستم احتیاج بدانستن شرایط اولیه است که حالت سیستم را در موضع و زمان معلومی مشخص می‌کند . مثلا این شرایط می‌تواند مقادیر اولیهٔ مختصات و سرعتهای سیستم باشد .

اگر سیستم مکانیکی از دو پارهٔ $\mathrm{A}-\mathrm{B}$ تشکیل شده باشد و تابع لاگرانژ هر پاره به ترتیب L_A و L_B باشد ، درحد هنگامی که فاصلهٔ آن دوپاره آن قدر زیاد باشد که بتوان از واکنشهای بین آندو صرف نظر کرد ، تابع لاگرانژ کل سیستم به سمت مجموع آنها میل می‌کند

$$\lim L=L_A+L_B \quad (۲-۸)$$

۱ــ درمحاسبهٔ تغییرات، معادلات اولرمسئلهٔ اساسی برای تعیین اکسترموم‌های انتگرالی به شکل (۱-۲) هستند .

خاصیت جمع پذیری توابع لاگرانژ بیان این حقیقت است که دو پاره سیستم که برهم عمل متقابلی انجام نمی‌دهند وابسته به یکدیگر نیستند .

واضح است که ضرب یك مقدار ثابت دلخواه در تابع لاگرانژ یك سیستم مکانیکی نمی‌تواند اثری درمعادلات حرکت داشته باشد و ازآنجا این خاصیت مهم نتیجه می‌شود که: همیشه می‌توان توابع لاگرانژ سیستمهای متفاوت و مجزا را در هرعدد دلخواه ثابتی ضرب کرد . خاصیت جمع پذیری ابهام موجود در این بیان را از بین می‌برد زیرا باید توابع لاگرانژ سیستمهای مختلف راهمزمان در ثابت دلخواه ضرب کرد . دربخش چهارم خواهیم دیدکه این بیان به ما کمك می‌کندکه واحد مناسبی برای توابع لاگرانژ درنظربگیریم.

نکتهٔ مهم دیگری راباید متذکرشد: اگردوتابع $L'(q , \dot{q} , t)$ و $L(q , \dot{q} , t)$ را درنظر بگیریم به طوری‌که تفاوت‌آنها دیفرانسیل کامل تابع $f(q , t)$ نسبت به زمان باشد:

$$L'(q , \dot{q} , t) = L(q , \dot{q} , t) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[f(q , t)] \tag{۲-۹}$$

انتگرال (۱-۲) برای این دو تابع به این طریق محاسبه می‌شود :

$$S' = \int_{t_۱}^{t_۲} L'\mathrm{d}t = \int_{t_۱}^{t_۲} L\mathrm{d}t + \int_{t_۱}^{t_۲} \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t = S + f(q^{(۲)} , t_۲) - f(q^{(۱)} , t_۱)$$

یعنی‌تفاوت‌آنها تابعی است که تغییرات‌آن صفراست . بنابراین دوشرط $\delta S' = ۰$ و $\delta S = ۰$ یکی خواهند شد و شکل معادلات حرکت تغییر نمی‌کند . پس به تابع لاگرانژ هر سیستم می‌توان یك تابع که دیفرانسیل کامل نسبت به زمان باشد افزود .

۳ : اصل نسبیت گالیله

برای بررسی پدیده‌های مکانیکی‌باید چارچوب مرجعی اختیارکرد . قوانین حرکت نسبت به چارچوبهای مرجع متفاوت ، اشکال مختلفی دارند . اگر چارچوب مرجع را اختیاری برگزینیم ممکن است قوانینی که حتی برای ساده‌ترین پدیده‌ها نوشته می‌شوند بغرنج شوند . مسئله طبعاً به این برمی‌گرددکه چارچوب مرجعی انتخاب کنیم‌که قوانین مکانیك ساده‌ترین حالت خود را دارا باشند .

اگر به ناچار چارچوب مرجع را دلخواه انتخاب‌کردیم دیگر فضا همگن و همسان نخواهد بود وحتی اگرجسمی‌تحت‌تأثیرهیچ عامل خارجی‌قرارنگیرد مواضع وجهات‌مختلف آن درفضا متعادل نخواهد بود . این مطلب درمورد زمان نیز صادق است ، یعنی اگرزمان

غیرهمگن باشد لحظات متناوب متعادل نخواهند بود. آشکار است که با چنین خواصی از فضا و زمان قوانین مکانیك پیچیده و بغرنج می‌شوند. مثلا جسمی آزادکه تحت تأثیر هیچ عامل خارجی قرار نگرفته است در حال سکون باقی نمی‌ماند و اگر سرعتش در لحظه‌ای صفر باشد درلحظهٔ دیگر احتمالا درجهتی حرکت خواهدکرد.

به تجربه دانسته شده است که دستگاه چارچوب مرجع باید همیشه آن‌گونه باشد که فضا همگن و یکسان و زمان نیز همگن باشد. این مختصات را چارچوب ماند می‌نامند؛ به ویژه درچنین دستگاهی جسم آزاد و درحال سکون همواره درآن حالت باقی می‌ماند.

اکنون می‌توانیم به سادگی تابع لاگرانژ ذره‌ای که آزادانه در یك چارچوب ماند مرجع حرکت می‌کند به‌دست آوریم. از همگن بودن فضا و زمان مشخص می‌شود که تابع لاگرانژ نمی‌تواند تابعی از بردار مکان ذرهٔ $\mathbf{r}$ باشد. یعنی L تنها تابعی ازبردار $\mathbf{v}$ است. علاوه براین چون فضا همسان است تابع لاگرانژ به جهت بردار $\mathbf{v}$ هم نباید بستگی داشته باشد و تنها تابع اندازهٔ سرعت یعنی: $\mathbf{v}^2=v^2$ است.

$$L=L(\mathbf{v}^2)=L(v^2) \qquad (۱-۳)$$

چون تابع لاگرانژ به $\mathbf{r}$ بستگی ندارد پس:

$$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}}=0$$

و ازآنجا:[۱]

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}}\right)=0$$

یعنی:

$$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}}=\mathrm{C}^{\mathrm{te}}$$

و چون $\frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}}$ تنها تابعی از سرعت است نتیجه می‌شود:

$$\mathbf{v}=\mathrm{C}^{\mathrm{te}} \qquad (۲-۳)$$

از آنجا می‌توان نتیجه‌گرفت در چارچوب ماند مرجع حرکت آزاد با سرعتی ثابت (چه ازلحاظ جهت و چه از لحاظ اندازه) انجام می‌پذیرد. و این همان اصل ماند است.

اگر ما چارچوب دیگری را که حرکت یکنواخت مستقیم‌الخطی نسبت به چارچوب ماند دارد درنظر بگیریم واضح است‌که قوانین حرکت آزاد در چارچوب ماند جدید همان

۱ـ مشتق یك‌کمیت اسکالر (داخلی) نسبت به بردار (کمیت خارجی) برداری است‌که مؤلفه‌های آن مشتقهای کمیتهای داخلی نسبت به مؤلفه‌های بردار مزبور است.

قوانین حرکت در چارچوب ماند نخستین است زیرا در این چارچوب نیز حرکت آزاد با سرعت ثابت انجام می‌پذیرد .

آزمایش نشان می‌دهد که تنها قوانین حرکت آزاد نیست که در هردو چارچوب یکی است بلکه برای هرحرکت مکانیکی این چارچوبها کاملا معادل هستند . از این‌رو تنها یك چارچوب ماند وجود ندارد بلکه بی‌نهایت چارچوب ماند هست که نسبت به هم حرکت مستقیم‌الخط یکنواخت دارند . درهمهٔ این چارچوبها خواص فضا و زمان یکی است وقوانین مکانیك در آنها یك شکلند . این بحث منجر به یکی از مهمترین اصول مکانیك یعنی اصل نسبیت گالیله می‌شود .

آنچه در بالا گفته شد آشکار می‌سازد که چارچوب ماند مرجع خواص مطلوب و ویژه‌ای دارد که می‌توان آنرا چون قانونی در بیان نمودهای مکانیکی به‌کار برد . درآنچه از این پس می‌آید ما قوانین را در چارچوب ماند بررسی می‌کنیم مگر در حالت خاص که متذکر خواهیم شد .

یکسان بودن خواص مکانیکی دربی‌نهایت چارچوب ماند نشان می‌دهد که ناچار نیستیم که یك چارچوب مرجع معینی را انتخاب کنیم و هیچ چارچوب مرجع ماندی برچارچوب مرجع ماند دیگر برتری ندارد .

مختصات بردارهای $\mathbf{r}$ و $\mathbf{r}'$ از نقطهٔ معلومی در چارچوب ماند مرجع K و K' که دومی نسبت به اولی باسرعت $\mathbf{V}$ حرکت می‌کند ، در رابطهٔ زیرصادق است .

$$\mathbf{r}=\mathbf{r}'+\mathbf{V}t \tag{۳-۳}$$

این را باید بدانیم که زمان در هردوچارچوب مرجع یکسان است :

$$t=t' \tag{۳-۴}$$

فرضیهٔ مطلق بودن زمان یکی از اصول اساسی مکانیك کلاسیك است[1] :

روابط (۳-۳) و (۴-۳) را تبدیل گالیله گویند . اصل نسبیت گالیله را می‌توان با این بیان که معادلات حرکت درچنین تبدیلهایی غیرقابل‌تغییر هستند به‌صورت معادله‌ای نوشت.

۴ : تابع لاگرانژ ذرهٔ مادی آزاد

حالا بهتر است که شکل تابع لاگرانژ را معین کنیم . در ابتدا ساده‌ترین حالت‌آن، یعنی حرکت آزاد نقطهٔ مادی را ، در چارچوب ماند بررسی می‌کنیم . درگذشته دیدیم که دراین حال تابع لاگرانژ تنها شامل متغیر مجذور سرعت ذره است . برای تحقیق درشکل

۱ـ این فرض در مکانیك‌نسبی اعتبار ندارد .

این تابع ازاصل نسبیت گالیله استفاده می‌کنیم . اگرچارچوب ماند K نسبت به چارچوب ماند دیگری با سرعت ثابت و بی‌نهایت کوچك ϵ حرکت کند ، داریم : $\mathbf{v}'=\mathbf{v}+\epsilon$ می‌دانیم که باید معادلات حرکت در هردو چارچوب ماند یك شکل داشته باشند . بامراجعه به قسمت آخر بخش دوم درمی‌یابیم که باید اختلاف تابع لاگرانژ $L(v)^۲$ با تابع لاگرانژ L' در چارچوب دوم برابر تابعی شود که دیفرانسیل کامل نسبت به‌زمان است .

می‌دانیم $L'=L(v'^۲)=L(v^۲+۲\mathbf{v}.\epsilon+\epsilon^۲)$ ؛ با بسط این عبارت نسبت به قوای ϵ و حذف جملات بالاتر از رستهٔ اول نتیجه می‌شود :

$$L(v'^۲)=L(v^۲)+\frac{\partial L}{\partial v^۲}\times ۲\mathbf{v}.\epsilon \qquad (?)$$

جملهٔ دوم طرف راست این معادله تنها درصورتی دیفرانسیل کامل نسبت به زمان خواهدبود که تابعی خطی از $\mathbf{v}$ باشد . یعنی $\frac{\partial L}{\partial v^۲}$ نباید تابعی ازسرعت شود . در این‌صورت تابع لاگرانژ متناسب با مجذور سرعت است وآنرا به صورت زیر نشان می‌دهیم :

$$L=\frac{۱}{۲}mv^۲ \qquad (۴-۱)$$

با توجه به‌این‌که تابع لاگرانژ فوق دراصل‌نسبیت گالیله برای سرعت نسبی بی‌نهایت کوچك ϵ صادق است ، نتیجه می‌شودکه تابع‌لاگرانژ درچارچوب‌های K و K' که باسرعت $\mathbf{V}$ نسبت به هم حرکت می‌کنند تغییر نمی‌کند :

$$L'=\frac{۱}{۲}mv'^۲=\frac{۱}{۲}m(\mathbf{v}+\mathbf{V})^۲=\frac{۱}{۲}mV^۲+m\mathbf{v}.\mathbf{V}+\frac{۱}{۲}mv^۲$$

یا

$$L'=L+\mathrm{d}(m\mathbf{r}.\mathbf{V}+\frac{۱}{۲}mV^۲t)/\mathrm{d}t$$

که درآن جملهٔ دوم دیفرانسیل‌کامل زمان است و می‌توان ازآن صرف‌نظر کرد .

کمیت m را که در تابع لاگرانژ (۱-۴) پیدا شد جرم ذرهٔ آزاد گویند . جمع‌پذیری توابع لاگرانژ نشان می‌دهد که در سیستمی مرکب از نقاط مادی بدون واکنشهای داخلی می‌توان نوشت :[1]

$$L=\frac{۱}{۲}\sum m_a v_a^۲ \qquad (۴-۲)$$

---

۱ ـ ما حروف a و b و c را برای نشان دادن ذرات مختلف و i و k و l را برای مشخص‌کردن مختصات به‌کار می‌بریم .

تأکید می‌کنیم که تعریف جرم تنها در صورتی مصداق دارد که خاصیت جمع پذیری توابع لاگرانژ در نظر گرفته شود. در بخش دوم متذکر شدیم که همیشه می‌توان توابع لاگرانژ را در عدد ثابتی ضرب کرد، بدون آنکه در معادلات حرکت تأثیری بگذارد. با توجه به معادلهٔ (۲-۴) از این خاصیت برای تغییر پذیری واحد جرم استفاده می‌کنیم. در این حال نسبت اجرام ذرات مختلف ثابت می‌ماند و در فیزیك تنها همین نسبتها هستند که دارای مفهوم هستند.

به سادگی می‌توان دریافت که جرم نمی‌تواند منفی باشد زیرا مطابق اصل کوچکترین عمل انتگرال

$$S=\int_{1}^{2}\frac{1}{2}mv^{2}\mathrm{d}t$$

باید در مسیر حرکت طبیعی ذره در فضا، از نقطهٔ ۱ به ۲، دارای یك مینیمم باشد. اگر جرم را منفی فرض کنیم انتگرال فوق در مسیر ذره‌ای که به تندی از نقطهٔ ۱ حرکت می‌کند و به نقطهٔ ۲ می‌رود، مقادیر بزرگ منفیی را اختیار می‌کند و در آن صورت مینیمم مفهومی ندارد.[1]

خاطر نشان می‌کنیم که:

$$v^{2}=\left(\frac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}t}\right)^{2}=\frac{(\mathrm{d}l)^{2}}{(\mathrm{d}t)^{2}} \qquad (۴-۳)$$

پس برای بدست آوردن تابع لاگرانژ کافی است که مربع عنصر $\mathrm{d}l$ را در سیستم مختصات کارتزین محاسبه کنیم:

$$\mathrm{d}l^{2}=\mathrm{d}x^{2}+\mathrm{d}y^{2}+\mathrm{d}z^{2}$$

و از آنجا:

$$L=\frac{1}{2}m(\dot{x}^{2}+\dot{y}^{2}+\dot{z}^{2}) \qquad (۴-۴)$$

و در مختصات استوانه‌ای داریم:

$$\mathrm{d}l^{2}=\mathrm{d}r^{2}+r^{2}\mathrm{d}\varphi^{2}+\mathrm{d}z^{2}$$

و:

$$L=\frac{1}{2}m(\dot{r}^{2}+r^{2}\dot{\varphi}^{2}+\dot{z}^{2}) \qquad (۴-۵)$$

۱- با توجه به بحثی که در زیرنویس بخش دوم شد. اگر $m<0$ باشد انتگرال حتی برای پارهٔ کوچك مسیر هم مینیمم نخواهد داشت.

در مختصات کروی :

$$dl^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta d\varphi^2$$

و :

$$L = \frac{1}{2} m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\dot{\varphi}^2 \sin^2\theta) \qquad (۴-۶)$$

۵ : تابع لاگرانژ دستگاه نقاط مادی

دستگاه نقاط مادیی را که ذرات آن برهم اثر می‌گذارند درنظر می‌گیریم . براین دستگاه نقاط مادی هیچ عامل خارجی اثر نمی‌گذارد . چنین سیستمی را بسته می‌گویند . به تجربه دیده شده است که واکنشهای اجزا را می‌توان با افزودن تابع معینی از مختصات به تابع لاگرانژ (۲ـ۴) که برای سیستم نقاط مادی بدون واکنشهای داخلی نوشته شده ـ است ، بیان‌کرد . واضح است‌که این تابع تنها به طبیعت این واکنشها بستگی دارد وآن را با U ـ نمایش می‌دهیم .[1]

$$L = \Sigma \frac{1}{2} m_a v_a^2 - U(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots) \qquad (۵-۱)$$

که $\mathbf{r}_a$ بردارحامل aامین ذره‌است . رابطهٔ (۱ـ۵) تابع لاگرانژ سیستم بسته‌است . مجموع

$$T = \Sigma \frac{1}{2} m_a v_a^2$$

را انرژی جنبشی و U را انرژی پتانسیل می‌نامند . اهمیت این نامگذاری را در بخش ششم بررسی می‌کنیم .

این حقیقت‌که انرژی پتانسیل در هرلحظهٔ معین تنها به موضع ذره بستگی دارد نشان می‌دهدکه تغییر مکان هرذره آناً به ذرات دیگر اثرمی‌گذارد و یا به‌بیان بهتر : واکنشهای داخلی آناً انتشار می‌یابند . لزوم اینکه در مکانیك کلاسیك واکنشهای داخلی حتماً باید از این نوع باشند تقریباً برمبنای اصولی‌است‌که تا به حال ذکرکرده‌ایم ؛ یعنی خاصیت مطلق بودن زمان و اصل‌گالیله ، اگر انتشارآنی‌نبود وبا سرعت معینی انجام می‌گرفت‌آن سرعت در چارچوبهای مرجع متفاوت‌که نسبت به هم حرکت یکنواخت دارند فرق می‌کرد . چون با فرض مطلق بودن زمان می‌توان درهمهٔ پدیده‌های فیزیکی قانون ترکیب سرعتها را بکار برد ، ازآنجا قوانین حرکت برای اجسام با واکنشهای داخلی ، در چارچوبهای متفاوت

---

۱ ـ این فرض در مکانیك کلاسیك عمومیت دارد . در این کتاب از مکانیك نسبی صحبتی نمی‌کنیم .

یکسان نخواهد بود و این نتیجه با اصل نسبیت گالیله مغایرت دارد .

در بخش سوم از همگن بودن زمان صحبت کردیم ، اما شکل تابع لاگرانژ (۱ـ۵) نشان می‌دهد که زمان هم همگن است و هم همسان ؛ یعنی خواص آن در جهات مختلف یکی است . مثلا اگر t به $-t$ تبدیل شود تابع لاگرانژ و در نتیجه معادلات حرکت تغییر نمی‌کند . به عبارت دیگر اگر جسمی بتواند حرکت معینی داشته باشد حرکت معکوس آن نیز ممکن است . (یعنی حرکتی که در جهت معکوس در همان مسیر انجام شود) . از این‌رو همهٔ حرکاتی که ازقوانین مکانیك کلاسیك تبعیت می‌کنند برگشت‌پذیرند .

با داشتن تابع لاگرانژ می‌توان معادلات حرکت را به دست‌آورد :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\ \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}_a}=\frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}_a} \qquad (۵-۲)$$

با قراردادن آن در (۱ـ۵) نتیجه می‌شود :

$$m_a \mathrm{d}\mathbf{v}_a/\mathrm{d}t = -\partial U/\partial \mathbf{r}_a \qquad (۵-۳)$$

اگر معادلات حرکت سیستمی که ذرات آن‌برهم اثر می‌گذارند به صورت بالا نوشته شود ، آنها را معادلات نیوتن می‌نامند و بردار

$$\mathbf{F}= \frac{-\partial U}{\partial \mathbf{r}_a} \qquad (۵-۴)$$

که در سمت راست این معادله قراردارد نیروی وارد بر a این ذره گویند . $\mathbf{F}$ مانند U تنها تابع مختصات ذره است و به سرعت آن بستگی ندارد . در معادلهٔ (۳ـ۵) همچنین شتاب نشان داده شده است که آن نیز فقط تابع مختصات است .

انرژی پتانسیل را می‌توان تنها با اختلاف یك ثابت تعیین کرد و این ثابت روی معادلات اثری ندارد . این ازآنچه درمورد یگانه نبودن توابع لاگرانژ درآخر بخش دوم گفته شد ، ناشی می‌شود . طبیعی‌ترین و بهترین روش انتخاب این ثابت آنست که انرژی پتانسیل را هنگامی که ذرات از هم بسیار دور می‌شوند صفر پنداریم .

اگر برای تشریح حرکت جسم به جای مختصات‌کارتزین ازمختصات عمومی دلخواه q_i استفاده شود ، برای بدست‌آوردن تابع جدید لاگرانژ باید تبدیل زیررا انجام دهیم :

$$x_a=f_a(q_1,\ q_2,\ \ldots,\ q_s) \quad \text{و} \quad \dot{x}_a=\sum_k \frac{\partial f_a}{\partial q_k}\dot{q}_k, \text{etc}\ldots$$

با جایگزینی این عبارات درتابع $L = \frac{1}{2}\Sigma m_a (\dot{x}_a^2+\dot{y}_a^2+\dot{z}_a^2)-U$ تابع مطلوب لاگرانژ به دست می‌آید :

$$L=\frac{۱}{۲}\sum_{i,k}a_{ik}(q)\,\dot{q}_i\dot{q}_k-U(q) \qquad (۵-۵)$$

که a_{ik} تنها تابعی از مختصات است . انرژی جنبشی در مختصات عمومی نیز یك معادلهٔ درجهٔ دوم است ولی ممکن است به مختصات نیز بستگی داشته باشد .

تا اینجا تنها از سیستم بسته سخن گفتیم . حال سیستم A را که بسته نیست و تحت تأثیر سیستم دیگر B حرکت می‌کند مورد مطالعه قرار می‌دهیم . در این حال گوئیم سیستم A در داخل میدان خارجی معلومی حرکت می‌کند (این میدان بستگی به سیستم B دارد) . معادلات حرکت را می‌توان با بکار بردن اصل کوچکترین عمل و تغییر مستقل هریك از دو مختصات (یعنی فرض شود کمیت دیگر معلوم است) به دست آورد . می‌توانیم تابع لاگرانژ L_A از سیستم A را با داشتن تابع لاگرانژ کل L از مجموع دو سیستم B و A و قراردادن مختصات q_B برحسب زمان محاسبه کنیم .

فرض کنیم سیستم $A+B$ بسته باشد . از آنجا :

$$L=T_A(q_A\,،\,\dot{q}_A)+T_B(q_B،\dot{q}_B)-U(q_A\,،\,q_B)$$

دو جملهٔ اول انرژیهای جنبشی دو سیستم A و B وعبارت سوم انرژی پتانسیل ترکیب آن دو است . با قراردادن q_B برحسب زمان و حذف جملهٔ $T[q_B(t)،\dot{q}_B(t)]$ (زیراتنهابستگی به زمان دارد و دیفرانسیل کاملی است نسبت به زمان) نتیجه می‌شود :

$$L_A=T_A(q_A\,،\,\dot{q}_A)-U[q_A\,،\,q_B(t)]$$

ازآنجا تابع لاگرانژ در میدان خارجی وتابع لاگرانژ بدون میدان خارجی به یك صورتند و تنها تفاوت آن دو اینست که ممکن است انرژی پتانسیل نیز تابعی از زمان شود .

مثلاً هنگامی که ذره‌ای در میدان خارجی قرار گیرد تابع لاگرانژ آن چنین خواهد شد :

$$L=\frac{۱}{۲}mv^{۲}-U(\mathbf{r}\,،\,t) \qquad (۵-۶)$$

و ازآنجا معادلهٔ حرکت می‌شود :

$$m\dot{\mathbf{v}}=-\frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}} \qquad (۵-۷)$$

میدانی که نیروی $\mathbf{F}$ را در هرنقطه ازمیدان برذره‌ای وارد می‌کند یکنواخت گویند. درچنین حالی :

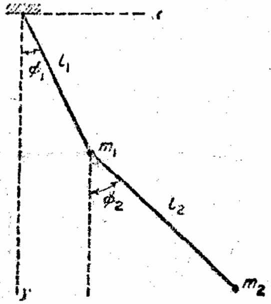
$$U=-\mathbf{F}.\mathbf{r} \qquad (۵-۸)$$

درخاتمهٔ این‌مبحث می‌توانیم به‌کاربرد معادلات لاگرانژ درحل مسائل مختلف‌اشاره‌ای کنیم . اغلب به سیستمهای مکانیکی که عکس‌العملهای میان اجسام مختلف (یا ذرات) درآنها به شکل بازدارنده‌است‌برخورد می‌کنیم . می‌توان عاملی‌که حرکت را محدود می‌کندچیزی نظیرطناب یا نخ یا قلاب‌فرض‌کرد . واین عامل اصطکاك را درنقطهٔ تماس به وجود می‌آورد که حرکت جسم را تابعی از خود می‌کند . در حالت کلی (به بخش ۲۵ مراجعه شود) در مکانیك ساده اصطکاك آن‌قدر کم است که می‌توان ازاثرآن برروی حرکت جسم درگذشت . اگرجرمهای عناصر بازدارنده سیستم نیز قابل صرف‌نظر باشد ، مقدار درجات‌آزادی سیستم از ۳N کمتر می‌شود . می‌توان با نوشتن یك دسته مختصات مستقل از هم‌که برابر با تعداد درجات آزادی است معادله حرکت سیستم را به‌کمك رابطهٔ (۵ـ۵) به دست آورد .

مسائل

تابع لاگرانژ سیستمهای زیر را بدست‌آورید . همهٔ آنها درمیدان جاذبهٔ زمین قرار دارند و شتاب ثقل g است .

مسئلهٔ ۱ـ آونگ دوتایی هم صفحه‌ای موجود است (شکل ۱) .



(شکل ۱)

حل : زوایای φ_1 و φ_2 که نخهای به طول l_1 و l_2 با خط قائم‌می‌سازند، درنظر می‌گیریم . برای ذرهٔ m_1 می‌توانیم بنویسیم :

$$U = -m_1 g l_1 \cos\varphi_1 \quad \text{و} \quad T_1 = \frac{1}{2} m_1 l_1^2 \dot{\varphi}_1^2$$

برای بدست آوردن انرژی جنبشی جرم دوم مختصات کارتزین y_2 و x_2 (مبدأ درنقطهٔ اتکاء ومحور yها به‌طرف پائین است .) رابرحسب زوایای φ_1 و φ_2 بدست می‌آوریم :

$$y_2 = l_1 \cos\varphi_1 + l_2 \cos\varphi_2 \quad \text{و} \quad x_2 = l_1 \sin\varphi_1 + l_2 \sin\varphi_2$$

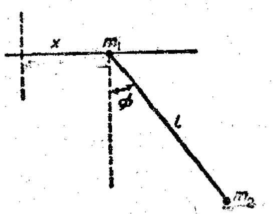
و ازآنجا :

$$T_2=\frac{1}{2}m_2(\dot{x}_2^2+\dot{y}_2^2)$$
$$=\frac{1}{2}m_2[l_1^2\dot{\varphi}_1^2+l_2^2\dot{\varphi}_2^2+2l_1l_2\cos(\varphi_1-\varphi_2)\dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2]$$

و سرانجام :

$$L=\frac{1}{2}(m_1+m_2)l_1^2\dot{\varphi}_1^2+\frac{1}{2}m_2l_2^2\dot{\varphi}_2^2+$$
$$+m_2l_1l_2\dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2\cos(\varphi_1-\varphi_2)+(m_1+m_2)gl_1\cos\varphi_1+$$
$$+m_2gl_2\cos\varphi_2$$

مسئلهٔ ۲ـ آونگ ساده‌ای است به‌جرم m_2 . نقطهٔ آویز به جرم m_1 روی خط افقی در صفحهٔ حرکت m_2 حرکت می‌کند .



(شکل ۲)

حل : مختصات x نقطهٔ m_1 و زاویهٔ بین نخ و خط قائم φ ، را به کار می‌بریم ؛ بدست می‌آید :

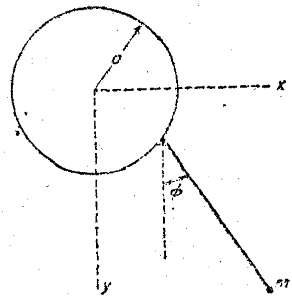
$$L=\frac{1}{2}(m_1+m_2)\dot{x}^2+\frac{1}{2}m_2(l^2\dot{\varphi}^2+2l\dot{x}\dot{\varphi}\cos\varphi)+m_2gl\cos\varphi$$

مسئلهٔ ۳ـ آونگ ساده‌ای‌است‌به جرم m که نقطهٔ آویز آن‌اولا ، درصفحهٔ قائم روی دایره‌ای با بسامد ثابت γ (شکل ۳) حرکت می‌کند ؛ ثانیاً در صفحهٔ حرکت آونگ روی خط افقی حرکت می‌کند ؛ ثالثاً در امتداد خط قائم مطابق قانون $y=a\cos\gamma t$ حرکت دارد .

حل : (a) مختصات m برابر است با :

$$x=a\cos\gamma t+l\sin\varphi \quad \text{و} \quad y=-a\sin\gamma t+l\cos\varphi$$

و ازآنجا :



(شکل ۳)

$$L = \frac{1}{2} ml^2 \dot{\varphi}^2 + mla\gamma^2 \sin(\varphi - \gamma t) + mgl\cos\varphi$$

از عبارت فوق دیفرانسیل جملهٔ $mla\gamma \cos(\varphi - \gamma t)$ حذف شد.

b) مختصات m عبارت است از :

$$x = a\cos\gamma t + l\sin\varphi \quad و \quad y = l\cos\varphi$$

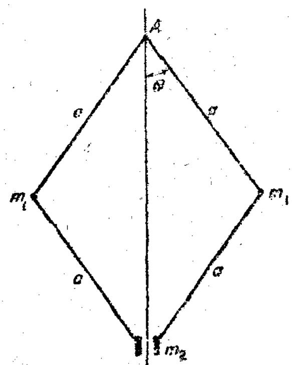
تابع لاگرانژ (با حذف دیفرانسیل کامل) می‌شود :

$$L = \frac{1}{2} ml^2 \dot{\varphi}^2 + mla\gamma^2 \cos\gamma t \sin\varphi + mgl\cos\varphi$$

c) با همان روش :

$$L = \frac{1}{2} ml^2 \dot{\varphi}^2 + mla\gamma^2 \cos\gamma t \cos\varphi + mgl\cos\varphi$$

مسئلهٔ ۴ـ درسیستم نشان داده شده در (شکل ۴) نقطهٔ مادی m_2 درامتداد



(شکل ۴)

محور قائم حرکت می‌کند و همهٔ سیستم به دور محور مزبور با سرعت زاویه‌ای ثابت Ω می‌چرخد.

حل: زاویهٔ بین قطعهٔ a و خط قائم را θ و زاویهٔ چرخش دستگاه به دور محور را φ در نظر می‌گیریم؛ می‌دانیم $\dot{\varphi}=\Omega$. هر ذرهٔ m_1 تغییر مکان کوچك زیر را دارد:

$$dl_1^2=a^2d\theta^2+a^2\sin^2\theta d\varphi^2$$

فاصلهٔ m_2 از نقطهٔ آویز A برابر است با $2a\cos\theta$ و ازآنجا نتیجه می‌شود:

$$dl_2=-2a\sin\theta d\theta$$

و تابع لاگرانژ به دست می‌آید:

$$L=m_1a^2(\dot{\theta}^2+\Omega^2\sin^2\theta)+2m_2a^2\dot{\theta}^2\sin^2\theta+2(m_1+m_2)ga\cos\theta$$

فصل دوم

قوانین بقا

۶: انرژی

$2s$ کمیت q_i و $\dot{q}_i$ $(i=1, 2, \dots, s)$ که حالت سیستم را درهر لحظه مشخص می‌سازند، با حرکت آن نسبت به زمان تغییر می‌کنند. اما توابعی از ترکیب این کمیات وجود دارند که در هنگام حرکت ثابت باقی می‌مانند و تنها بستگی به شرایط اولیهٔ سیستم دارند. این توابع را انتگرالهای حرکت می‌گویند.

تعداد انتگرالهای مستقل حرکت سیستم بسته‌ای که s درجه آزادی دارد، $(2s-1)$ است. این قضیه را از بحث سادهٔ زیر نتیجه می گیریم: حل کامل معادلات عمومی حرکت شامل $2s$ ثابت اختیاری است (نظر به بحثی که در دنبالهٔ معادلهٔ (۶-۲) شد). معادلات حرکت سیستم بسته، تابع صریحی اززمان نیستند، دراین‌صورت انتخاب مبدأ زمان کاملاً اختیاری است و یکی‌ازثابت‌های اختیاری معادلات حرکت همان زمان‌ثابت t_0 است. باحذف $t+t_0$ از$2s$ تابع
$q_i=q_i(t+t_0, C_1, C_2, \dots, C_{2s-1})$ و $\dot{q}_i=\dot{q}_i(t+t_0, C_1, C_2, \dots, C_{2s-1})$
می‌توان $2s-1$ ثابت $C_1, C_2, \dots, C_{2s-1}$ را برحسب توابعی از q و $\dot{q}$ نشان‌داد واین توابع انتگرالهای حرکت خواهند بود.

در مکانیك همهٔ انتگرالهای حرکت اهمیت یکسانی ندارند و تنها ثابتهایی که از خاصیت‌همگن وهمسان‌بودن مکان وزمان‌نتیجه می‌شوند، مفید فایده‌ای‌هستند. این‌انتگرال‌های حرکت راانتگرالهای بقامی‌نامند. خاصیت مهم این‌انتگرالها درجمع‌پذیری آنهاست؛ یعنی

در سیستم مرکبی که واکنش‌های داخلی میان ذراتش قابل صرف نظر کردن باشد، انتگرال حرکت کل سیستم برابر مجموع انتگرالهای حرکت هریك از ذرات است.

این خاصیت جمع پذیری اهمیت این کمیات را دو چندان کرده است. مثلاً فرض کنید دوجسم در مدت زمانی معین برهم اثرمی‌گذارند، چون چه پیش وچه پس ازواکنش مجموع انتگرال‌های بقای هریك از دو سیستم برابر مجموع انتگرال‌های بقای هـر جسم به طور جداگانه است، چنانچه حالت پیش از واکنش معلوم باشد، به کمك قوانین بقا می‌توان نتایج مهمی را از حالت سیستم پس از انجام واکنش به دست‌آورد.

اکنون اولین قانون بقا را که نتیجه‌ای از همگن بودن زمانست به دست می‌آوریم. به علت همگن بودن زمان تابع لاگرانژسیستم بسته تابع صریحی از زمان نیست. از این‌رو دیفرانسیل کامل تابع لاگرانژ را نسبت به زمان، چنین می‌توان نوشت:

$$\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t}=\sum_i\frac{\partial L}{\partial q_i}\dot{q}_i+\sum_i\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\ddot{q}_i$$

اگر L به طور صریح به زمان مربوط می‌بود، می‌بایست به عبارت فوق جملهٔ $\frac{\partial L}{\partial t}$ را نیز می‌افزودیم. مطابق معادلهٔ حرکت به جای $\frac{\partial L}{\partial q_i}$ مقدار $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\cdot\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$ را قرار می‌دهیم، به دست می‌آید:

$$\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t}=\sum_i\dot{q}_i\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\Big)+\sum_i\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\ddot{q}_i=\sum_i\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big(\dot{q}_i\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\Big)$$

یا:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big(\sum_i\dot{q}_i\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}-L\Big)=0$$

ازآنجا کمیت

$$E\equiv\sum_i\dot{q}_i\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}-L \qquad (۱-۶)$$

در هنگام حرکت یك سیستم بسته ثابت باقی می‌ماند. یعنی رابطهٔ (۱-۶) یك انتگرال حرکت است که آنرا **انرژی** می‌نامند. خاصیت جمع‌پذیری انرژی رامی‌توان به سرعت از خاصیت جمع‌پذیری تابع لاگرانژ نتیجه گرفت؛ زیرا رابطه (۱-۶) نشان می‌دهد که انرژی تابعی است خطی از تابع لاگرانژ.

قانون بقای انرژی نه تنها در سیستم بسته بلکه در سیستم بازی که در میدان خارجی ثابتی قرار دارد نیزصادق است (منظور میدانی‌است که تابع زمان نباشد) ، زیراتنهاخاصیتی که در به دست‌آوردن روابط فوق مورداستفاده قرارگرفت، این بودکه تابع لاگرانژ به‌طور صریح به زمان بستگی نداشته باشد و دراین حالت نیزاین موضوع صادق‌است . گاهی‌سیستم مکانیکی‌با انرژی‌ثابت راسیستم **محفوظ** می‌نامند.

همان‌گونه‌که دربخش پنجم دیدیم تابع لاگرانژ سیستم بسته (یا سیستمی‌که در میدان ثابت خارجی قرار دارد) به صورت $L=T(q \text{ ، } \dot{q})-U(q)$ نوشته می‌شود که در این رابطه T تابع درجه دومی ازسرعت است. با استفاده ازقضیه‌اولر درمعادلات همگن، داریم:[1]

$$\sum_i \dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}=\sum_i \dot{q}_i \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}=۲T$$

اگر این رابطه را در (۱ــ۶) قرار دهیم ، نتیجه می‌شود :

$$E=T(q \text{،} \dot{q})+U(q) \qquad (۶\text{ــ}۲)$$

و در مختصات کارتزین

$$E=\frac{۱}{۲}\sum_a m_a v_a^{۲}+U(\mathbf{r}_۱ \text{،} \mathbf{r}_۲ \text{،} \dots) \qquad (۶\text{ــ}۳)$$

از این دو انرژی سیستم بسته به صورت مجموع دوجملهٔ مجزا نوشته می‌شود : اولی انرژی جنبشی است‌که تنها بستگی به سرعت دارد ، و دومی انرژی پتانسیل است‌که تنها بستگی به مختصات جسم دارد .

۷ : مقدار حرکت

دومین قانون بقا را از همگن‌بودن فضا نتیجه می‌گیریم . اگر فضا همگن باشد ، خواص مکانیکی سیستم بسته با هر انتقال موازی در فضا ، تغییر نخواهد کرد . در این‌جا فرض می‌کنیم‌که سیستم ، تغییرمکانی‌کوچك به اندازهٔ ϵ پیدا کرده است و شرایطی‌که تابع لاگرانژ بدون تغییر باقی بماند را مورد مطالعه قرار می‌دهیم .

تغییر مکان موازی ، انتقالی است که در آن همه ذرات سیستم به یك اندازه حرکت کنند ، یعنی بردار حامل $\mathbf{r}$ به $\mathbf{r}+\epsilon$ تبدیل شود . با افزایش بی‌نهایت کوچك ϵ در مختصات سیستم ، چون سرعت ذرات ثابت باقی می‌ماند تابع لاگرانژ به اندازهٔ

۱ــ رابطهٔ اولر برای تابع همگن درجه m ، $f=f(x)$ به این صورت نوشته می‌شود:
$xf'_x(x)=mf(x)$ (۰.م)

$$\delta L=\sum_a\frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}_a}\cdot\delta\mathbf{r}_a=\epsilon.\sum_a\frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}_a}$$

تغییر می‌کند . علامت جمع به روی همهٔ ذرات سیستم است . چون مقدار ϵ اختیاری است ، پس شرط $\delta L=0$ معادل است با

$$\sum_a\frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}_a}=0 \qquad (۷-۱)$$

از معادلات لاگرانژ (۲-۵) نتیجه می‌شود :

$$\sum_a\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}_a}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sum_a\frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}_a}=0$$

پس در یك سیستم بسته بردار

$$\mathbf{P}\equiv\sum_a\frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}_a} \qquad (۷-۲)$$

درهنگام حرکت ثابت باقی می‌ماند . این مقدارثابت را **مقدار حرکت** سیستم می‌نامند . اگر از تابع لاگرانژ (۱-۵) دیفرانسیل کامل بگیریم ، مقدار حرکت برحسب سرعت ذرات سیستم به دست می‌آید :

$$\mathbf{P}\equiv\sum_a m_a\mathbf{v}_a \qquad (۷-۳)$$

قابلیت جمع پذیری مقدار حرکت آشکار است . در این مورد ، به عکس انرژی ، چه واکنش‌های داخلی قابل اغماض باشند و چه نباشند ، در هر صورت مقدار حرکت کل سیستم برابر مجموع مقادیر حرکت $\mathbf{p}_a=m_a\mathbf{v}_a$ هرذره است .

همیشه درغیاب میدان خارجی‌هرسه مؤلفه مقدارحرکت ثابت باقی می‌ماند . با اینهمه اگر انرژی پتانسیل در میدان خارجی به همهٔ مختصات کارتزین وابسته نباشد ، ممکن‌است بعضی از مؤلفه‌های آن ثابت باقی بماند . زیرا اگر تغییر مکان در امتداد یکی ازمحورهای مختصات که‌انرژی پتانسیل بستگی به آن ندارد انجام پذیرد ، خاصیت مکانیکی سیستم تغییر نمی‌کند . مثلاً اگرمیدانی یکنواخت درامتداد محور z وجود داشته باشد مؤلفه‌های y و x ثابت باقی می‌مانند .

معادله (۱ ـ ۷) معنایی ساده در فیزیك دارد : مشتق $\frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}_a}=-\frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}_a}$ برابر است با نیروی $\mathbf{F}_a$ که به ذره aام اثرمی‌گذارد . رابطهٔ (۱-۷) نشان می‌دهد که مجموع نیروهایی که به ذرات سیستم بسته‌ای وارد می‌آید ، برابرصفر است .

$$\sum_a \mathbf{F}_a = 0 \qquad (۷-۴)$$

در حالت خاص ، در سیستمی که تنها از دو ذرهٔ مادی تشکیل شده است ، داریم : $\mathbf{F}_1+\mathbf{F}_2=0$. یعنی نیرویی که ذرهٔ دوم به ذرهٔ اول وارد می‌کند برابر و درجهت عکس نیرویی است که توسط ذرهٔ اول اعمال می‌شود . و این اصل برابری کنش و واکنش است (قانون سوم نیوتن) .

اگر حرکت با مختصات عمومی q_i مشخص شده باشد ، مشتق تابع لاگرانژ نسبت‌به سرعتهای عمومی برابر است با :

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \qquad (۷-۵)$$

که مقدار حرکت عمومی سیستم نام دارد ومشتق‌های آن را نسبت به مختصات عمومی نیروی عمومی نامند :

$$F_i = \frac{\partial L}{\partial q_i} \qquad (۷-۶)$$

و در اینجا معادلات لاگرانژ به صورت

$$\dot{p}_i = F_i \qquad (۷-۷)$$

نوشته می‌شود . در مختصات کارتزین مقدار حرکت عمومی برابر است با مؤلفه‌های بردار $\mathbf{p}_a$. در حالت کلی اگرچه مؤلفه‌های p_i تابع سرعتهای عمومی $\dot{q}_i$ است اما به‌صورت ساده حاصلضرب جرم درسرعت نوشته نمی‌شوند .

مسئله

ذره‌ای به جرم m با سرعت v_1 نیمه‌ای از فضا را که انرژی پتانسیل آن ثابت و برابر U_1 است ترك می‌گوید و به ناحیه دیگر که انرژی پتانسیل آن مقدار ثابت $U_2 \neq U_1$ است می‌رود . تغییر امتداد حرکت آنرا محاسبه کنید .

حل : انرژی پتانسیل بستگی به‌مختصاتی که محورهایشان موازی صفحه

جداکننده در فضا است ، ندارد ؛ پس مؤلفه‌های مقدار حرکت در آن صفحه ثابت است . زوایای میان دوسرعت $\mathbf{v}_1$ و $\mathbf{v}_2$ که ذره پیش وبعدازترك صفحه ، با امتداد قائم می‌سازد به ترتیب با θ_1 و θ_2 نشان می‌دهیم . داریم :

$$v_1 \sin\theta_1 = v_2 \sin\theta_2$$

رابطهٔ بین v_1 و v_2 را با استفاده از قانون بقای انرژی به دست می‌آوریم در نتیجه :

$$\frac{\sin\theta_1}{\sin\theta_2} = \sqrt{1 + \frac{2}{m v_1^2}(U_1 - U_2)}$$

۸ : مرکز جرم

مقدارحرکت سیستمهای مکانیکی بسته درچارچوب‌های ماند مرجع متفاوت ، مقادیر متفاوتی دارند . اگر چارچوب K نسبت به K' با سرعت $\mathbf{V}$ حرکت‌کند ، سرعتهای $\mathbf{v}_a$ و $\mathbf{v}'_a$ نسبت به دوچارچوب مرجع به‌گونه‌ایست‌که : $\mathbf{v}_a = \mathbf{v}'_a + \mathbf{V}$ و ازآنجامیان مقادیر حرکت $\mathbf{P}$ و $\mathbf{P}'$ رابطهٔ زیر صادق است :

$$\mathbf{P} = \sum_a m_a \mathbf{v}_a = \sum_a m_a \mathbf{v}'_a + \mathbf{V}\sum_a m_a$$

یا

$$\mathbf{P} = \mathbf{P}' + \mathbf{V}\sum_a m_a \qquad (\text{۸–۱})$$

حالت خاصی از چارچوب مرجع ماند ، مانند K ، وجود داردکه مقدار حرکت‌کل آن صفراست . باقرار دادن $\mathbf{P}' = 0$ در رابطهٔ (۱–۸) می‌توان سرعت این چارچوب مرجع را به دست آورد .

$$\mathbf{V} = \frac{\mathbf{P}}{\sum m_a} = \frac{\sum m_a \mathbf{v}_a}{\sum m_a} \qquad (\text{۸–۲})$$

اگر مقدار حرکت ذرات سیستم مکانیکی در چارچوب مرجعی صفر باشد ، می‌گویند سیستم نسبت به آن چارچوب ساکن است . عبارت (۲ ــ ۸) را که در حالت‌کلی نوشته شده

است ، می‌توان در مورد خاص برای یك نقطهٔ مادی نیز به‌کار برد . اگر مقدار حرکت کل صفر نباشد سرعت $\mathbf{V}$ را که از رابطه (۲ـ۸) به‌دست آمده‌است ، سرعت کل سیستم مکانیکی می‌گویند. ملاحظه می‌شود که درحالت کلی‌قانون بقاء مقدارحرکت ممکن می‌سازدکه تعریف درستی برای حرکت یا سکون یك سیستم مکانیکی ، بیان‌کنیم .

معادلهٔ (۲ـ۸) نشان می‌دهد که رابطهٔ میان $\mathbf{P}$ مقدار حرکت کل و $\mathbf{V}$ سرعت چه در سیستم مجردی به جرم $\mu=\sum m_a$ و چه درسیستم مرکبی‌که مجموع جرم ذرات‌آن برابر همان جرم باشد ، یکی است . این نتیجه خاصیت جمع‌پذیری جرم را تأکید می‌کند .

طرف راست رابطه (۲ـ۸) دیفرانسیل کامل بردار زیر است :

$$\mathbf{R}=\frac{\sum m_a\mathbf{r}_a}{\sum m_a} \qquad (۸ـ۳)$$

پس می‌توان گفت که سرعت‌کل سیستم برابر است با سرعت نقطه‌ای که بردار حامل آن با رابطهٔ (۳ـ۸) نشان داده شده‌است . این نقطه را مرکزجرم گویند.

قانون بقاء مقدار حرکت را در سیستم بسته می‌توان چنین خلاصه‌کردکه مرکز جرم سیستم بسته، حرکت مستقیم‌الخط یکنواخت دارد . این قضیه همان بیان‌اصل ماند است‌که در بخش ۳ حالت خاصی ازآن را متذکر شدیم .

چنانچه بخواهیم خواص مکانیکی سیستم بسته‌ای را مورد مطالعه قرار دهیم ، طبیعی است‌که چارچوب مرجع را باید طوری انتخاب‌کنیم‌که مرکزجرم درسکون باشد . درحالت کلی در این چارچوب ، سیستم بسته حرکت یکنواخت مستقیم‌الخطی دارد که چندان مورد توجه نیست .

انرژی یك سیستم مکانیکی راکه به طورکلی ساکن است، انرژی داخلی آن‌گویند و ما آنرا به E_i نمایش می‌دهیم . این انرژی شامل انرژی جنبشی نسبی ذرات و انرژی پتانسیل میان آنها است . انرژی‌کل هرسیستم مکانیکی‌که با سرعت‌کلی V حرکت می‌کند، برابر است با :

$$E=\frac{۱}{۲}\mu V^{۲}+E_i \qquad (۸ـ۴)$$

باآنکه رابطهٔ فوق واضح‌است ، می‌توان مستقیماً آنرا ثابت‌کرد : E و E' انرژی یك سیستم مکانیکی در دو چارچوب مرجع K و K' با روابط زیر داده می‌شوند :

$$E = \frac{۱}{۲}\sum_a m_a v_a{}^{۲} + U$$

$$= \frac{۱}{۲}\sum_a m_a(\mathbf{v}'_a + \mathbf{V})^{۲} + U$$

$$= \frac{۱}{۲}\mu V^{۲} + \mathbf{V}\cdot\sum_a m_a \mathbf{v}'_a + \frac{۱}{۲}\sum_a m_a v_a'^{۲} + U$$

$$= E' + \mathbf{V}\cdot\mathbf{P}' + \frac{۱}{۲}\mu V^{۲} \qquad (۸–۵)$$

این معادلات قانون تبدیل انرژی‌ها را از یك چارچوب مرجع به چارچوب مرجع دیگر به دست می‌دهند و مطابق آنچه در مورد مقدار حرکت در معادلهٔ (۱ ـ ۸) شرح داده شد، می‌باشد . اگرمرکزجرم نسبت به چارچوب K' درسکون باشد $\mathbf{P}' = ۰$ و $E' = E_i$ وهمان رابطه (۴ـ۸) نتیجه می‌شود .

مسئله

قانون تبدیل عمل S را از یك چارچوب به چارچوب دیگر بیان کنید.

حل : تابع لاگرانژ برابراست با اختلاف انرژیهای جنبشی وپتانسیل .

مطابق رابطه (۵ـ۸) ، تبدیل تابع لاگرانژ چنین است :

$$L = L' + \mathbf{V}\cdot\mathbf{P}' + \frac{۱}{۲}\mu V^{۲}$$

باانتگرال گرفتن‌ازرابطهٔ فوق‌نسبت به زمان قانون‌تبدیل عملها در دوچارچوب مرجع متفاوت به دست می‌آید :

$$S = S' + \mu\mathbf{V}\cdot\mathbf{R}' + \frac{۱}{۲}\mu V^{۲} t$$

که $\mathbf{R}'$ بردار حامل مرکز جرم سیستم در چارچوب K' است .

۹ : مقدار حرکت زاویه‌ای

اکنون با استفاده ازخاصیت همسان بودن فضا قانون بقاء دیگری را نتیجه می گیریم. همسان بودن فضا بدین معنی است که خواص مکانیکی سیستم بسته با هر چرخش دلخواهی به دور خود ، تغییر نکند . از این‌رو چرخش بی‌نهایت کوچکی به سیستم مورد نظر می‌دهیم و شرایطی را که تابع لاگرانژ غیرقابل تغییر می‌ماند ، به دست می‌آوریم .

بردار چرخش بی‌نهایت کوچك $\delta\phi$ را که مقدارش برابر $\delta\varphi$ وامتدادش همان محور چرخش است ، در نظر می گیریم . (جهت چرخش ، درجهت گردش پیچ راستی است که در امتداد $\delta\phi$ قرار دارد) .

پیش از هرچیز نتیجه افزایش بردار حامل هرذره‌ای از سیستم را که می‌چرخد ، از مبدائی که به روی محور چرخش جسم قرار دارد ، مورد مطالعه قرار می‌دهیم . تغییر مکان خطی انتهای این بردار نسبت به زوایای شکل ۵ برابر است با $|\delta\mathbf{r}| = r\sin\theta d\varphi$. امتداد $\delta\mathbf{r}$ عمود برصفحه $\mathbf{r}$ و $\delta\phi$ است . از این قرار :

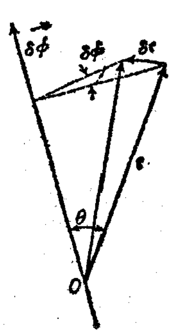
$$\delta\mathbf{r}=\delta\phi\times\mathbf{r} \qquad (۹-۱)$$

هنگامی که سیستمی می‌چرخد نه‌تنها بردار حامل بلکه سرعت ذرات نیز تغییرجهت می‌دهند. این بردارها نیز به‌همین روش‌تبدیل می گردند . افزایش‌سرعت نسبت به‌مختصات‌ثابت می‌شود:

$$\delta\mathbf{v}=\delta\phi\times\mathbf{v} \qquad (۹-۲)$$

اگر این عبارات را در شرایطی که تابع لاگرانژ ثابت می‌ماند قرار دهیم ، نتیجه می گیریم که :

$$\delta L=\sum_a\left(\frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}_a}\delta\mathbf{r}_a+\frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}_a}\delta\mathbf{v}_a\right)=0$$



(شکل ۵)

مشتق نسبی $\frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}_a}$ رامطابق تعریف، مقدارحرکت‌خطی $\mathbf{p}_a$ وازآنجامقدار $\frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}_a}$ رامطابق معادلات لاگرانژ، به صورت $\dot{\mathbf{p}}_a$ نمایش می‌دهیم . درنتیجه:

$$\sum_a(\dot{\mathbf{p}}_a\cdot \delta\phi\times \mathbf{r}_a+\mathbf{p}_a\cdot \delta\phi\times \mathbf{v}_a)=0$$

از $\delta\phi$ فاکتور می‌گیریم و آنرا از مجموع خارج می‌سازیم

$$\delta\phi\sum_a(\mathbf{r}_a\times \dot{\mathbf{p}}_a+\mathbf{v}_a\times \mathbf{p}_a)=\delta\phi\cdot\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sum_a\mathbf{r}_a\times \mathbf{p}_a=0$$

چون بردار $\delta\phi$ اختیاری است در نتیجه $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sum_a\mathbf{r}_a\times \mathbf{p}_a=0$ است و ازآنجا بردار

$$\mathbf{M}\equiv\sum_a\mathbf{r}_a\times \mathbf{p}_a \qquad (۹-۳)$$

که مقدار **حرکت زاویه‌ای** یا گشتاور مقدار حرکت خوانده می‌شود ، درهنگام حرکت، در سیستم بسته ثابت باقی می‌ماند . مقدار حرکت زاویه‌ای نیز مانند مقدار حرکت خطی جمع پذیر است . (چه در وجود و چه درعدم وجود واکنش‌های داخلی) .

دیگر هیچ انتگرال حرکتی که خاصیت جمع پذیری داشته باشد وجود ندارد . پس هرسیستم بسته هفت انتگرال جمع پذیر دارد : اول انرژی ، دوم و سوم و چهارم مؤلفه‌های مقدار حرکت و پنجم و ششم و هفتم سه مؤلفه مقدار حرکت زاویه‌ای .

چون تعریف مقدار حرکت زاویه‌ای همراه باتعیین بردارهای حامل ذرات است ، در حالت‌کلی مقدارآن بستگی به انتخاب مبدأ دارد . رابطهٔ دوبردار حامل $\mathbf{r}_a$ و $\mathbf{r}'_a$ از نقطهٔ معلومی نسبت به دو مبدأ به فاصلهٔ a به صورت $\mathbf{r}_a=\mathbf{r}'_a+\mathbf{a}$ است ، پس :

$$\mathbf{M}=\sum_a\mathbf{r}_a\times \mathbf{p}_a=\sum_a\mathbf{r}'_a\times \mathbf{p}_a+\mathbf{a}\times\sum_a\mathbf{p}_a=\mathbf{M}'+\mathbf{a}\times\mathbf{P} \qquad (۹-۴)$$

این رابطه نشان می‌دهد که مقدار حرکت زاویه‌ای بستگی به انتخاب مبدأ دارد مگر آنکه سیستم در سکون باشد (یعنی $\mathbf{P}=0$) البته این نامعینی در قانون بقا مقدار حرکت زاویه‌ای اهمیتی ندارد ، زیرا مقدار حرکت خطی نیز تنها درسیستم بسته ثابت باقی می‌ماند .

می‌توان رابطه میان مقدار حرکت زاویه‌ای را در دو چارچوب ماند مرجع متفاوت مطابق روش زیر به دست آورد . چارچوب K با سرعت $\mathbf{V}$ نسبت به چارچوب K' حرکت می‌کند . فرض می‌کنیم که مبدأ K و K' در لحظه‌ای مشخص برهم منطبق باشند ، در این

لحظه بردارهای حامل ذرات نسبت به K و K' یکی خواهند بود و داریم $\mathbf{v}_a=\mathbf{v}_a'+\mathbf{V}$ در نتیجه :

$$\mathbf{M}=\sum_a m_a \mathbf{r}_a\times\mathbf{v}_a=\sum_a m_a\mathbf{r}_a\times\mathbf{v}'_a+\sum_a m_a\mathbf{r}_a\times\mathbf{V}$$

اولین جملهٔ طرف راست مقدارحرکت زاویه‌ای $\mathbf{M}'$ است نسبت به K'. با به‌کاربردن بردار مرکز جرم درجملهٔ دوم ، نتیجه می گیریم :

$$\mathbf{M}=\mathbf{M}'+\mu\mathbf{R}\times\mathbf{V} \qquad (۹-۵)$$

این رابطه مانند رابطهٔ (۱-۸) که در مورد مقدار حرکت خطی و رابطهٔ (۵-۸) که برای انرژی نوشته شده‌اند ، تبدیل مقدار حرکت زاویه‌ای را از چارچوبی به چارچوب دیگر نشان می‌دهد .

اگر کلاً سیستم ذرات نسبت به چارچوب K' ساکن باشند ، در آن صورت $\mathbf{V}$ ، سرعت مرکز جرم و $\mu\mathbf{V}$ مقدار حرکت $\mathbf{P}$ (نسبت به چارچوب K) است . درنتیجه :

$$\mathbf{M}=\mathbf{M}'+\mathbf{R}\times\mathbf{P} \qquad (۹-۶)$$

به زبان دیگر مقدار حرکت زاویه‌ای هرسیستم مکانیکی $\mathbf{M}$ ، شامل مقدار حرکت زاویه‌ای طبیعی آن نسبت به چارچوب ساکن است به علاوه مقدار حرکت زاویه‌ای $\mathbf{R}\times\mathbf{P}$ نسبت به حرکت کلی آن .

اگرچه قانون بقاء هرسه مؤلفه مقدار حرکت زاویه‌ای (نسبت به هر مبدأ اختیاری) تنها دربارهٔ سیستم بسته صادق است ، معهذا می‌توان این قانون را در بعضی از حالات خاص که سیستم درمیدان خارجی قرار گرفته باشد نیز به‌کار بست . یکی از این حالات که واضح می‌نماید ، ثابت‌بودن مؤلفه مقدارحرکت زاویه‌ای‌است‌نسبت به محوری که میدان درطول آن متقارن است ، زیرا خواص مکانیکی سیستم با چرخش به دورآن محور ، تغییری نمی کند . در این‌جا البته باید مقدار حرکت زاویه‌ای را نسبت به نقطه‌ای که برمحور میدان‌قراردارد ، اندازه گرفت .

مهمترین حالت ، میدان متقارن مرکزی ، یا میدان مرکزی است ؛ یعنی میدانی که درآن انرژی پتانسیل تابعی است از فاصله ذرات سیستم از نقطه‌ای به‌نام مرکز . واضح است مؤلفه مقدار حرکت زاویه‌ای در هنگام حرکت نسبت به‌هر محوری که از این مرکز بگذرد مقداریست ثابت ، و یا می‌توان گفت که مقدار حرکت زاویه‌ای $\mathbf{M}$ نسبت به مرکز میدان مقداریست ثابت .

مثال دیگر میدان همگن در امتداد محور z است . در چنین میدانی مؤلفه M_z ثابت

باقی می‌ماند (مبدأ هر نقطه‌ای باشد ، مهم نیست .)

می‌توان مؤلفه مقدارحرکت زاویه‌ای رادرامتدادهرمحوری (مثلاً محورz) بادیفرانسیل گرفتن ازتابع لاگرانژ به دست آورد .

$$M_z=\sum_a \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}_a} \qquad (۹-۷)$$

که مختصات φ زاویه چرخش سیستم به دور محور z را نمایش می‌دهد . این رابطه با آنچه در مورد قانون بقاء مقدار حرکت زاویه‌ای گفتیم ، واضح می‌نماید ؛ اما آنرا مستقیماً ثابت می‌کنیم . در مختصات استوانه‌ای $(r ، \varphi ، z)$ داریم (قرار دهید : $x_a=r_a cos\varphi_a$ و $y_a=r_a sin\varphi_a$) :

$$M_z=\sum_a m_a(x_a\dot{y}_a-y_a\dot{x}_a)=\sum_a m_a r_a^2\dot{\varphi}_a \qquad (۹-۸)$$

تابع لاگرانژ در این مختصات چنین است :

$$L=\frac{1}{2}\sum_a m_a(\dot{r}_a^2+r_a^2\dot{\varphi}_a^2+\dot{z}_a^2)-U$$

که با قراردادن این مقدار در رابطه (۷-۹) ، رابطهٔ (۸-۹) نتیجه خواهد شد .

مسائل

مسئلهٔ ۱ــ مؤلفه‌های مقدار حرکت زاویه‌ای را در مختصات کارتزین برحسب مختصات استوانه‌ای z ، φ ، r حساب کنید . اندازهٔ مقدار حرکت زاویه‌ای چقدر است ؟

حل :

$$M_x=m sin\varphi(r\dot{z}-z\dot{r})-mrz\dot{\varphi}cos\varphi$$
$$M_y=m cos\varphi(z\dot{r}-r\dot{z})-mrz\dot{\varphi}sin\varphi$$
$$M_z=mr^2\dot{\varphi}$$
$$M^2=m^2r^2\dot{\varphi}^2(r^2+z^2)+m^2(r\dot{z}-z\dot{r})^2$$

مسئلهٔ ۲ـ همان مسئلهٔ ۱ برحسب مختصات کروی r ، θ ، φ

حل :

$$M_x = -\, mr^2(\dot{\theta}\sin\varphi + \dot{\varphi}\sin\theta\cos\theta\cos\varphi)$$

$$M_y = mr^2(\dot{\theta}\cos\varphi - \dot{\varphi}\sin\theta\cos\theta\sin\varphi)$$

$$M_z = mr^2\dot{\varphi}\sin^2\theta$$

$$M^2 = m^2r^4(\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2\sin^2\theta)$$

مسئلهٔ ۳ـ در میدانهای ذیل کدام یك ازمؤلفه‌های مقدارحرکت خطی، $\mathbf{P}$ و مقدار حرکت زاویه‌ای ، $\mathbf{M}$ درحرکت ثابت باقی می‌مانند :

الف ـ میدان همگن درصفحه نامحدود ، (ب) میدان استوانه‌ای همگن نامحدود ، (ج) میدان منشوری همگن نامحدود ، (د) میدان در دو نقطه ، (ه) میدان همگن درنیم‌صفحه، (ی) میدان مخروطی‌همگن، (م) میدان‌حلقوی همگن ، (ن) میدان مارپیچی همگن .

حل : (الف) M_z ، P_y، P_x، (اگرصفحهٔ مزبور، صفحهٔ xy باشد) . (ب) P_z ، M_z (اگر محور z ، محور استوانه باشد) . (ج) ، P_z (اگر صفحه‌های منشور موازی محور z باشد) . (د) اگر خطی‌که دونقطه را بهم متصل می‌سازد محور z باشد مقدار M_z ثابت باقی می‌ماند . (ه) P_y (اگر حاشیه نیم صفحه محور y باشد) . (ی) M_z (اگر محور مخروط، محور z باشد) . (م) M_z (اگر محور حلقه z باشد) . (ن) اگر به اندازهٔ $\delta\varphi$ در حول محور مارپیچ (محورz) بچرخیم و به اندازهٔ $\frac{h\delta\varphi}{2\pi}$ در امتداد محور مارپیچ (h پای مارپیچ است) بالا برویم ، تابع لاگرانژ ثابت باقی می‌ماند. در این صورت :

$$\delta L = \delta z\frac{\partial L}{\partial z} + \delta\varphi\frac{\partial L}{\partial\varphi} = \delta\varphi\left(\frac{h\dot{P}_z}{2\pi} + \dot{M}_z\right) = 0$$

و یا :

$$M_z + \frac{hP_z}{2\pi} = \text{مقدار ثابت}$$

۱۰ : تشابه مکانیکی

روشن است که ضرب کردن هر ثابت دلخواهی در تابع لاگرانژ ، درمعادلات حرکت اثری نمی‌گذارد . این قضیه (که در بخش دوم تذکر دادیم) ممکن می‌سازد که در بسیاری از مسائل مهم ، بدون حل معادلات حرکت ، روابط مفیدی ازخواص حرکت سیستم به دست بیاوریم .

این‌حالات شامل سیستمهایی‌است‌که انرژی پتانسیل‌آنها تابع همگن ازمختصات‌باشد، یعنی در شرط زیر صدق‌کنند :

$$U(\alpha\mathbf{r}_1, \alpha\mathbf{r}_2, \dots \alpha\mathbf{r}_n) = \alpha^k U(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots \mathbf{r}_n) \qquad (۱۰-۱)$$

که α مقداری ثابت و k درجه همگنی تابع است .

حال تبدیلی به صورت ذیل درنظر می گیریم : مختصات را درضریب ثابت α وزمان رادر ضریب ثابت βضرب می‌کنیم . یعنی؛ $t \to \beta t$ و $\mathbf{r}_a \to \alpha \mathbf{r}_a$. دراین صورت سرعتهای نظیر $\mathbf{v}_a = \frac{d\mathbf{r}_a}{dt}$ در ضریب $\frac{\alpha}{\beta}$ و انرژی جنبشی در ضریب $\frac{\alpha^2}{\beta^2}$ وانرژی پتانسیل درضریب α^k ، ضرب می‌شوند . چنانچه α و β را طوری در نظر بگیریم که در رابطهٔ $\frac{\alpha^2}{\beta^2} = \alpha^k$ ، یعنی $\beta = \alpha^{1-\frac{1}{2}k}$ صدق کند ، در تبدیل فوق ، تابع لاگرانژ تنها در ضریب ثابت α^k ضرب می‌شود و در این صورت معادلات حرکت بدون تغییر باقی می‌مانند .

ضرب مختصات همهٔ ذرات سیستم در عددی ثابت به این معنی است که مسیر ذرات را به مسیر دیگری تبدیل کنیم که متشابه به آن باشد . در این صورت چنانچه انرژی پتانسیل سیستم تابعی همگن از درجهٔ k باشد (درمختصات کارتزین)، ذرات امکان‌حرکت درهرمسیر متشابهی را خواهند داشت . زمان حرکت میان دونقطه متناظر از مسیرهای متشابه بارابطه زیر داده می‌شود :

$$\frac{t'}{t} = \left(\frac{l'}{l}\right)^{1-\frac{1}{2}k} \qquad (۱۰-۲)$$

که $\frac{l'}{l}$ نسبت بعدهای خطی در مسیر است . نه تنها زمان بلکه همهٔ کمیت‌های مکانیکی در نقاط و زمانهای متناظر متناسب با نسبت $\frac{l'}{l}$ به توان عددی معین می‌باشند. مثلاً سرعتها و انرژیها و مقادیر حرکت زاویه‌ای بدین گونه‌اند :

$$\frac{v'}{v} = \left(\frac{l'}{l}\right)^{\frac{1}{2}k} \quad , \quad \frac{E'}{E} = \left(\frac{l'}{l}\right)^{k} \quad , \quad \frac{M'}{M} = \left(\frac{l'}{l}\right)^{1+\frac{1}{2}k} \qquad (۱۰-۳)$$

آنچه در بخش ده متذکر خواهیم شد ، مثالهائی از مطالب فوق می‌باشند .

همانطورکه بعداً خواهیم دید ، انرژی پتانسیل در نوسانات کوچك تابعی درجه دوم ازمختصات‌است ($k=۲$) . ازرابطه(۲ــ۱۰) نتیجه می گیریم که دوره تناوب چنین نوساناتی به دامنهٔ آن بستگی ندارد .

درمیدان نیروی‌یکنواخت ، انرژی پتانسیل تابعی‌خطی ازمختصات است (به بخش ۵ معادلهٔ ۸ رجوع شود)، یعنی$k=۱$. ازرابطه (۲ــ۱۰) نتیجه می‌شود که $\frac{t}{t'}=\sqrt{\frac{l}{l'}}$ در این‌صورت ، مثلا متوجه می‌شویم که زمان متوسط سقوط درمیدان جاذبه ثقل تابع درجهٔ دوم از ارتفاع از سطح زمین است .

در جاذبهٔ نیوتنی میان دوجرم و یا اثرکولمب میان دو بار ، انرژی پتانسیل بافاصله نسبت عکس دارد ، یعنی تابع همگنی ازدرجه ۱ — $=k$ است . درنتیجه: $\frac{t'}{t}=\left(\frac{l'}{l}\right)^{\frac{۳}{۲}}$. ومثلا می‌توان گفت که مربع زمان گردش در مسیر متناسب است بامکعب طول مسیر (قانون سوم کپلر).

اگر انرژی پتانسیل تابع همگنی از مختصات کارتزین باشد ، و حرکت در ناحیه معینی ازفضا انجام پذیرد ، رابطهٔ بسیار ساده‌ای میان مقادیر متوسطانرژی جنبشی وپتانسیل نسبت به زمان برقرار است که‌آنراقضیهٔ **ویریال** گویند .

چون انرژی جنبشی T تابع درجه دومی از سرعت است ، مطابق قضیه اولر درمورد معادلات همگن داریم :

$$\sum \mathbf{v_a}\cdot\frac{\partial T}{\partial \mathbf{v_a}}=۲T \quad \text{و یا با قراردادن} \quad \frac{\partial T}{\partial \mathbf{v_a}}=\mathbf{p_a} \ ،$$

$$۲T=\sum_{a}\mathbf{p_a}\cdot\mathbf{v_a}=\frac{d}{dt}\left(\sum_{a}\mathbf{p_a}\cdot\mathbf{r_a}\right)-\sum_{a}\mathbf{r_a}\cdot\dot{\mathbf{p}}_{\mathbf{a}} \qquad (۱۰\text{ـ}۴)$$

حالا مقدار متوسط این تابع را نسبت به زمان حساب می‌کنیم . مقدار متوسط هرتابعی از زمان ، مانند $f(t)$ ، به صورت زیر تعریف می‌شود :

$$\bar{f}=\lim_{\tau\to\infty}\frac{۱}{\tau}\int_{\circ}^{\tau}f(t)dt$$

واضح است که چنانچه $f(t)$ مشتق تابع محدودی از زمان مانند $F(t)$ باشد ، مقدار متوسط آن نسبت به زمان برابر صفر است ، زیرا :

$$\bar{f}=\lim_{\tau\to\infty}\frac{1}{\tau}\int_0^\tau \frac{dF}{dt}dt=\lim_{\tau\to\infty}\frac{F(\tau)-F(0)}{\tau}=0$$

حال فرض می‌کنیم سیستم در ناحیه‌ای محدود و با سرعتی معین حرکت می‌کند، در نتیجه مقدار $\sum_a \mathbf{p}_a\cdot\mathbf{r}_a$ محدود و مقدار متوسط اولین جملهٔ طرف راست معادلهٔ (۴ـ۱۰) صفرمی‌شود. درقسمت دوم به‌جای مقدار حرکت $\dot{\mathbf{p}}_a$ عبارت $-\frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}_a}$ (مطابق معادلات‌نیوتن ۳ـ۵) را جایگزین می‌سازیم. ازآنجا[1]:

$$2\bar{T}=\overline{\sum_a \mathbf{r}_a\cdot\frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}_a}} \qquad (۱۰ـ۵)$$

و اگر انرژی پتانسیل تابع همگن از درجه k باشد، مطابق قضیهٔ اولر داریم:

$$2\bar{T}=k\bar{U} \qquad (۱۰ـ۶)$$

چون $\bar{T}+\bar{U}=\bar{E}=E$ رابطهٔ (۶ـ۱۰) رامی‌توان به صورت زیر نیز نمایش داد:

$$\bar{U}=2\frac{E}{k+2} \quad \text{و} \quad \bar{T}=\frac{kE}{k+2} \qquad (۱۰ـ۷)$$

که مقدار $\bar{U}$ و $\bar{T}$ رابرحسب انرژی کل سیستم می‌دهد.

در حالت خاص، در نوسانهای کوچك ($k=2$)، $\bar{T}=\bar{U}$ است، یعنی مقدارمتوسط انرژی‌پتانسیل وجنبشی برابرند. درجاذبهٔ نیوتنی ($k=-1$) $2\bar{T}=-\bar{U}$ و $E=-\bar{T}$، یعنی دراین نوع واکنش‌های داخلی، تنها وقتی حرکت درناحیه‌ای محدود انجام می‌پذیرد که انرژی‌کل منفی باشد (مراجعه شود به بخش ۱۵).

مسائل

مسئلهٔ ۱ـ نسبت زمانها را برای ذراتی که در یك مسیر با جرمهای متفاوت ولی با انرژی پتانسیل برابرحرکت می‌کنند، به‌دست بیاورید.

حل:

$$\frac{t'}{t}=\sqrt{\frac{m'}{m}}$$

۱ـ عبارت طرف راست رابطهٔ (۵ـ۱۰) را گاهی ویریال سیستم‌گویند.

مسئلهٔ ۲ـ نسبت زمانها را برای ذراتی که در یك مسیر با جرمهای مساوی ، اما با انرژی پتانسیل متفاوت (ضرب در یك عدد ثابت) حرکت می‌کنند ، به دست آورید .

حل :

$$\frac{t'}{t}=\sqrt{\frac{U}{U'}}$$

فصل سوم

انتگرال معادلات حرکت

۱۱ : حرکت یک بعدی

سیستمی را که تنها یک درجه آزادی دارد ، یک بعدی خوانند . عمومی‌ترین شکل تابع لاگرانژ این سیستم در میدان خارجی ثابت به قرار زیر است :

$$L = \frac{۱}{۲} a(q)\dot{q}^{۲} - U(q) \qquad (۱۱\text{–}۱)$$

که $a(q)$ تابعی از مختصات عمومی است . در حالت خاص چنانچه q در مختصات کارتزین نوشته شود (مثلاً به نام x) ، تابع لاگرانژ به صورت زیر درمی‌آید :

$$L = \frac{۱}{۲} m\dot{x}^{۲} - U(x) \qquad (۱۱\text{–}۲)$$

در حالت کلی می‌توان انتگرال معادلات حرکت، مربوط به تابع لاگرانژ فوق را به دست‌آورد ؛ به طوری‌که حتی لازم نیست معادلهٔ حرکت نوشته شود وتنهاکافی است‌که از انتگرال اول این معادله که قانون بقای انرژی را به دست می‌دهد ، آغاز کنیم . مثلاً برای تابع لاگرانژ (۲–۱۱) داریم :

$$\frac{۱}{۲} m\dot{x}^{۲} + U(x) = E$$

که معادله‌ایست دیفرانسیلی از مرتبهٔ اول و به سادگی می‌توان انتگرال آن را به دست آورد ، چون:

$$\frac{dx}{dt}=\sqrt{\frac{۲[E-U(x)]}{m}}$$

ودر این صورت :

$$t=\sqrt{\frac{۱}{۲}m}\int\frac{dx}{\sqrt{E-U(x)}}+\text{مقدار ثابت} \qquad (۱۱-۳)$$

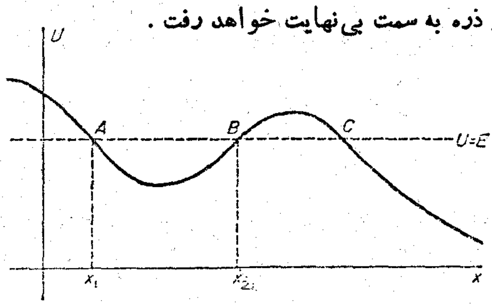
دراین‌جا دوثابت اختیاری درجواب معادلات حرکت عبارتند ازانرژی کل E وثابت‌انتگرال.

چون انرژی جنبشی الزاماً مثبت است ، انرژی کل همیشه از انرژی پتانسیل بیشتر است ، یعنی حرکت درناحیه‌ای ازفضا امکان‌پذیر است که $U(x)<E$ باشد. برای مثال‌فرض می‌کنیم‌نمودارتغییرات تابع $U(x)$ مانندشکل ۶ باشد. اگردراین‌شکل خطی‌افقی که نمودار انرژی‌کل است رسم‌کنیم ، به سرعت می‌توان‌ناحیه‌ای ازفضا راکه حرکت درآن ممکن‌است، یافت . درمثال شکل ۶ حرکت تنها درحدودتغییرات AB و یا درسمت راست نقطهٔ C اتفاق می‌افتد .

نقاطی‌که انرژی پتانسیلشان برابر انرژی‌کل سیستم باشد ، یعنی

$$U(x)=E \qquad (۱۱-۴)$$

حدود حرکت را تعیین می‌کنند . این نقاط را نقاط بازگشت می‌نامیم زیرا سرعت در آنجا صفر است . چنانچه حدود تغییرات حرکت به دو نقطه مانند فوق محدود شده باشد ، در آن صورت ذره در ناحیه‌ای محدود ازفضا حرکت خواهدکرد . این نوع حرکت را محدود گویند . اگر ناحیه حرکت تنها به یك نقطه و یا هیچ نقطه محدود شده باشد ، حرکت نامحدود نام دارد و ذره به سمت بی‌نهایت خواهد رفت .



(شکل ۶)

حرکت محدود یك بعدی نوسانی است . در این حالت ذره متوالیاً میان دونقطه عقب وجلومی‌رود (درشکل۶ ، درچال پتانسیل AB میان نقطه‌های $x_۱$ و$x_۲$) . دورهٔ تناوب نوسانها

T ، یعنی زمانی که ذره از نقطهٔ x_1 به x_2 می‌رود و بازمی گردد ، دوبرابر زمان حرکت‌از x_1 به x_2 است . در این صورت به‌کمك رابطهٔ (۳-۱۱)

$$T(E)=\sqrt{2m}\int_{x_1(E)}^{x_2(E)}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{E-U(x)}} \qquad (۱۱\text{-}۵)$$

که x_1 و x_2 ریشه‌های معادلهٔ (۴-۱۱) در ازاء مقدار مشخصی از E است. این رابطه دورهٔ تناوب را برحسب تابعی از انرژی‌کل ذره به دست می‌دهد .

مسائل

مسئلهٔ ۱ـ دورهٔ تناوب نوسانهای آونگ ساده (ذره‌ای به جرم m که از نخی به طول l آویزان است و در میدان جاذبهٔ‌گرانشی زمین قراردارد) را برحسب تابعی از دامنهٔ نوسانها به دست بیاورید .

حل : انرژی آونگ برابر است با :

$$E=\frac{1}{2}ml^2\dot{\varphi}^2-mgl\cos\varphi=-mgl\cos\varphi_0$$

که φ زاویهٔ میان نخ و خط قائم و φ_0 ماکزیمم مقدار φ است . دورهٔ تناوب چهار برابر زمان لازم برای حرکت ذره از $\varphi=0$ تا $\varphi=\varphi_0$ است . در این صورت :

$$T=4\sqrt{\frac{l}{2g}}\int_0^{\varphi_0}\frac{\mathrm{d}\varphi}{\sqrt{\cos\varphi-\cos\varphi_0}}=2\sqrt{\frac{l}{g}}\int_0^{\varphi_0}\frac{\mathrm{d}\varphi}{\sqrt{\sin^2\frac{1}{2}\varphi_0-\sin^2\frac{1}{2}\varphi}}$$

با تغییر دادن متغیر به صورت $\sin\xi=\sin\frac{\varphi}{2}/\sin\frac{\varphi_0}{2}$. معادلهٔ فوق‌به صورت زیر خلاصه می‌شود :

$$T=4\sqrt{\frac{l}{g}}K[\sin\tfrac{1}{2}\varphi_0]$$

که درآن

$$K(k)=\int_{\circ}^{\frac{۱}{۲}\pi}\frac{d\xi}{\sqrt{۱-k^{۲}\sin^{۲}\xi}}$$

انتگرال بیضوی کامل از نوع اول است . وقتی $۱ \gg \sin\frac{۱}{۲}\varphi_{\circ}\approx\frac{۱}{۲}\varphi_{\circ}$ (نوسانات کوچك) ، با بسط تابع K به دست می‌آید :

$$T=۲\pi\sqrt{\frac{l}{g}}(۱+\frac{۱}{۱۶}\varphi_{\circ}^{۲}+\ .\ .\ .)$$

که جملهٔ اول آن همان رابطهٔ مشهور آونگ‌هاست .

مسئلهٔ ۴ـ دورهٔ تناوب نوسان ذره‌ای را که در میدانهائی با انرژی پتانسیلهای زیر حرکت می‌کنند برحسب تابعی از انرژی به دست بیاورید . جرم ذره برابر m است .

(الف) $U=A|x|^{n}$

(ب) $U=-\frac{U_{\circ}}{\mathrm{ch}^{۲}\alpha x}$ ، $-U_{\circ}<E<\circ$

(پ) $U=U_{\circ}tg^{۲}\alpha x$

حل : (الف)

$$T=۲\sqrt{۲m}\int_{\circ}^{(E/A)^{\frac{۱}{n}}}\frac{dx}{\sqrt{E-Ax^{n}}}=$$

$$=۲\sqrt{\frac{۲m}{E}}\cdot\left(\frac{E}{A}\right)^{\frac{۱}{n}}\int_{\circ}^{۱}\frac{dy}{\sqrt{۱-y^{n}}}$$

با تغییر متغیر $y^{n}=U$ انتگرال فوق به تابع بتا تبدیل می‌شود که می‌توان آنرا برحسب تابع گاما نوشت :

$$T=\frac{۲}{n}\sqrt{\frac{۲\pi m}{E}}\left(\frac{E}{A}\right)^{\frac{۱}{n}}\cdot\frac{\Gamma(\frac{۱}{n})}{\Gamma(\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{n})}$$

بستگی T و E مطابق قوانین تشابه مکانیکی (۲ـ۱۰) و (۳ـ۱۰) است .

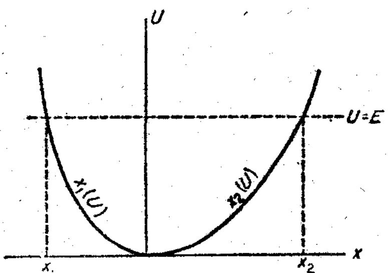
$$T = \frac{\pi}{\alpha}\sqrt{\frac{۲m}{|E|}} \quad (ب)$$

$$T = \frac{\pi}{\alpha}\sqrt{\frac{۲m}{E+U_\circ}} \quad (پ)$$

۱۲ : تعیین انرژی پتانسیل با داشتن دورهٔ تناوب نوسان

اکنون ببینیم که آیا می‌توان انرژی پتانسیل $U(x)$ یك میدان را که ذره‌ای در آن نوسان می‌کند ، با داشتن دورهٔ نوسان T برحسب E معین ساخت یا نه ؟ این مسئله در ریاضی با انتگرال گرفتن از رابطهٔ (۵ـ۱۱) که درآن $U(x)$ مجهول و $T(E)$ معلوم فرض می‌شوند ، قابل حل است .

فرض می‌کنیم که تابع $U(x)$ در ناحیه‌ای از فضا که مورد بررسی ماست ، تنها یك مینیمم داشته باشد و این سؤال که آیا جوابهای معادلهٔ انتگرال با این شرط وفق می‌دهد یا نه را فعلاً کنار می‌گذاریم و البته تأثیری در جواب مسئله ندارد . برای ساده شدن مسئله مبدأ مختصات را درهمان نقطه که انرژی پتانسیل مینیمم است ، درنظر می‌گیریم ومقداراین مینیمم را نیز صفر می‌پنداریم (شکل ۷) .



(شکل ۷)

در انتگرال (۵ـ۱۱) مختصات x را تابعی از U می‌پنداریم . تابع $x(U)$ دوارزشی است ، یعنی هرمقدار انرژی پتانسیل مربوط به دومقدار متفاوت x است . بدین جهت پیش از آن که در انتگرال (۵ـ۱۱) مقدار $\left(\frac{dx}{dU}\right)dU$ را به جای dx قرار دهیم ، باید

انتگرال را به دو قسمت تجزیه کنیم ، یکی از $x=x_1$ تا $x=0$ و دیگری از $x=0$ تا $x=x_2$. در این صورت تابع $x(U)$ را نیز باید به دوقسمت $x=x_1(U)$ و $x=x_2(U)$ تقسیم کنیم .

واضح است که حدود انتگرال برحسب U از صفر تا E می‌باشد . از آنجا:

$$T(E)=\sqrt{2m}\int_0^E \frac{dx_2(U)}{dU}\cdot\frac{dU}{\sqrt{E-U}}+\sqrt{2m}\int_E^0 \frac{dx_1(U)}{dU}\cdot\frac{dU}{\sqrt{E-U}}=$$

$$=\sqrt{2m}\int_0^E\left[\frac{dx_2}{dU}-\frac{dx_1}{dU}\right]\cdot\frac{dU}{\sqrt{E-U}}$$

اگر هر دو طرف معادله را بر $\sqrt{\alpha-E}$ تقسیم کنیم (α پارامتر است) و برحسب E ازصفر تا α انتگرال بگیریم ، نتیجه می‌شود :

$$\int_0^\alpha\frac{T(E)dE}{\sqrt{\alpha-E}}=\sqrt{2m}\int_0^\alpha\int_0^E\left[\frac{dx_2}{dU}-\frac{dx_1}{dU}\right]\frac{dUdE}{\sqrt{(\alpha-E)(E-U)}}$$

و یا با تغییر رستهٔ انتگرال

$$\int_0^\alpha\frac{T(E)dE}{\sqrt{\alpha-E}}=\sqrt{2m}\int_0^\alpha\left[\frac{dx_2}{dU}-\frac{dx_1}{dU}\right]dU\int_U^\alpha\frac{dE}{\sqrt{(\alpha-E)(E-U)}}$$

انتگرال روی E به آسانی محاسبه می‌شود و مقدار آن برابر است با π . انتگرال روی U نیز خلاصه می‌شود و در این صورت :

$$\int_0^\alpha\frac{T(E)dE}{\sqrt{\alpha-E}}=\pi\sqrt{2m}[x_2(\alpha)-x_1(\alpha)]$$

چه $x_2(0)=x_1(0)=0$. اگر به جای انرژی α انرژی پتانسیل U را قراردهیم نتیجهٔ نهایی چنین است :

$$x_2(U)-x_1(U)=\frac{1}{\pi\sqrt{2m}}\int_0^U\frac{T(E)dE}{\sqrt{U-E}} \qquad (۱۲-۱)$$

بنابراین می‌توان با دانستن تابع $T(E)$ تفاوت $x_{۲}(U)-x_{۱}(U)$ را به دست‌آورد. البته توابع $x_{۱}(U)$ و $x_{۲}(U)$ خود نامعلوم باقی خواهند ماند. این بدان معنی است که نه تنها یك ، بلکه بی‌نهایت منحنی $U=U(x)$ وجود دارد که همان رابطهٔ مورد نظر رامیان دورهٔ تناوب و انرژی کل برقرار می‌سازد و نیز تغییرات آن به‌گونه‌ایست که تفاوت در مقدار x، وابسته به هرمقدار U در همهٔ منحنی‌ها ثابت باقی می‌ماند.

نامشخص‌بودن جواب انتگرال با این فرض‌که $U=U(x)$ نسبت به محور U متقارن باشد ، برطرف خواهد شد . یعنی:

$$x(U)\equiv x_{۲}(U)=-x_{۱}(U)$$

در این حالت معادلهٔ (۱ـ۱۲) برای تابع $x(U)$ عبارت مشخصی را بیان خواهد داشت :

$$x(U)=\frac{۱}{۲\pi\sqrt{۲m}}\int_{۰}^{U}\frac{T(E)\mathrm{d}E}{\sqrt{U-E}} \qquad (۱۲\text{–}۲)$$

۱۳ : تعدیل جرم

حرکت سیستمی‌که از دوذره با واکنشهای داخلی تشکیل شده ، مسئله‌ایست بسیار مهم که جواب کامل آن به سادگی به دست خواهد آمد (مسئلهٔ دوجسم) .

برای حل‌این مسئله‌ابتدانشان خواهیم داد‌که چگونه می‌توان مسئله را به دوحرکت، یکی حرکت مرکز جرم و دیگری حرکت نسبی ذرات نسبت به مرکز جرم تجزیه‌کرد .

انرژی پتانسیل دو ذره با واکنشهای داخلی تنها تابعی است از فاصلهٔ میان آنها ، یعنی تابعی از اندازهٔ تفاضل دوبردار حامل ذره . تابع لاگرانژ این سیستم برابر است با:

$$L=\frac{۱}{۲}m_{۱}\dot{\mathbf{r}}_{۱}^{۲}+\frac{۱}{۲}m_{۲}\dot{\mathbf{r}}_{۲}^{۲}-U(|\mathbf{r}_{۱}-\mathbf{r}_{۲}|) \qquad (۱۳\text{–}۱)$$

اگر $\mathbf{r}\equiv\mathbf{r}_{۱}-\mathbf{r}_{۲}$ بردار موضع نسبی دو ذره فرض شود و مبدأ مختصات را در مرکز جرم بینگاریم ، یعنی

$$m_{۱}\mathbf{r}_{۱}+m_{۲}\mathbf{r}_{۲}=۰$$

نتیجه می‌گیریم :

$$\mathbf{r}_{۱}=m_{۲}\mathbf{r}/(m_{۱}+m_{۲}) \text{ ، } \mathbf{r}_{۲}=-m_{۱}\mathbf{r}/(m_{۱}+m_{۲}) \qquad (۱۳\text{–}۲)$$

با قرار دادن رابطهٔ (۲ـ۱۳) در معادلهٔ (۱ـ۱۳) ، داریم :

$$L=\frac{۱}{۲}m\dot{\mathbf{r}}^{۲}-U(r) \qquad (۱۳\text{–}۳)$$

که

$$m = \frac{m_۱ m_۲}{m_۱ + m_۲} \qquad (۱۳\text{-}۴)$$

را جرم تعدیل یافته می‌نامند. شکل ظاهری تابع لاگرانژ (۱۳-۳) مانند تابع لاگرانژ یك ذره است که جرم آن برابر m باشد و در میدان خارجی $U(r)$ که نسبت به مبدأ ثابتی متقارن است، حرکت کند.

درنتیجه مسئلهٔ حرکت دو ذره با واکنشهای داخلی معادلست با مسئلهٔ حرکت ذره‌ای که در میدان خارجی $U(r)$ قرار دارد. بادانستن $\mathbf{r}=\mathbf{r}(t)$ جواب مسئله، می‌توان با استفاده از معادلهٔ (۱۳-۲) مسیرهای $\mathbf{r}_۱=\mathbf{r}_۱(t)$ و $\mathbf{r}_۲=\mathbf{r}_۲(t)$ را نسبت به مرکز جرم مشترکشان به دست آورد.

مسئله

سیستمی از یك ذره به جرم M و n ذره با جرمهای مساوی m تشکیل شده است. حرکت مرکز جرم را از معادلات حرکت سیستم حذف کنید و مسئله را به سیستمی که از n ذره تشکیل شده است تبدیل کنید.

حل: فرض کنید $\mathbf{R}$ بردارحامل جرم M و $\mathbf{R}_a(a=۱،۲،۳،\dots،n)$ بردارهای حامل ذرات دیگر به جرم m باشد. اگر $\mathbf{r}_a\equiv\mathbf{R}_a-\mathbf{R}$ ومبدأ مختصات را درمرکزجرم فرض کنیم، داریم: $m\Sigma\mathbf{R}_a+M\mathbf{R}=۰$. ازاین قرار $\mathbf{R}=\dfrac{-m\Sigma\mathbf{r}_a}{M+nm}$ و $\mathbf{R}_a=\mathbf{R}+\mathbf{r}_a$ که باقراردادن درتابع لاگرانژ

$L=\frac{۱}{۲}M\dot{\mathbf{R}}^۲+\frac{۱}{۲}m\Sigma\dot{\mathbf{R}}_a{}^۲-U$ به دست می‌آید:

$$L=\frac{۱}{۲}m\sum_a\dot{\mathbf{r}}_a{}^۲-\frac{m^۲}{۲(M+nm)}\left(\sum_a\dot{\mathbf{r}}_a{}^۲\right)-U$$

که انرژی پتانسیل U تابعی ازفاصلهٔ میان ذرات است ومی‌توان آنرا برحسب $\mathbf{r}_a$ نوشت.

۱۴ : حرکت در میدان مرکزی

مسئلهٔ دوجسم به حرکت جسم مجردی تعدیل یافت که در میدان خارجی مشخصی قرار داشت به طوری که انرژی پتانسیل آن تنها تابعی از فاصلهٔ r از نقطهٔ معلوم و ثابتی بود. این میدان را میدان مرکزی گویند. نیروئی که به ذره اثر می کند برابر است با:

$$\mathbf{F}=-\frac{\partial U(r)}{\partial \mathbf{r}}=-\left(\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}r}\right)\frac{\mathbf{r}}{r}$$

به طوری که ملاحظه می‌شود اندازهٔ بردار نیرو تابعی است از r وامتداد این بردار درامتداد بردار حامل قرار دارد.

همانگونه که در بخش ۹ ملاحظه کردیم، مقدار حرکت زاویه‌ای هرسیستمی نسبت به مرکزچنین میدانی ثابت باقی می‌ماند. مقدارحرکت زاویه‌ای یك ذرهٔمجرد برابراست با:

$$\mathbf{M}=\mathbf{r}\times\mathbf{p}$$

چون $\mathbf{M}$ بر $\mathbf{r}$ عمود است، ثابت‌بودن $\mathbf{M}$ نشان می‌دهدکه در هنگام حرکت بردار حامل ذره همیشه درصفحه‌ای ثابت، عمود بر بردار $\mathbf{M}$ قرار دارد.

از این قرار مسیر یك ذرهٔ مجرد در میدان مرکزی در صفحه‌ای مشخص قرار دارد. با به کار بردن مختصات قطبی φ و r در همان صفحه، تابع لاگرانژ بدین صورت نوشته‌ـ می‌شود:

$$L=\frac{1}{2}m(\dot{r}^2+r^2\dot{\varphi}^2)-U(r) \qquad (۱۴-۱)$$

(رجوع شود به ۵-۴). این‌تابع صریحاً شامل مختصهٔ φ نیست. هرمختصهٔ q_i که درتابع لاگرانژصریحاً وجود نداشته باشد، حلقوی‌نام دارد. درچنین حالتی با استفاده ازمعادلات لاگرانژ داریم:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)=\frac{\partial L}{\partial q_i}=0$$

از این‌رو مقدار حرکت عمومی

$$p_i=\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$$

یك انتگرال حرکت است. این خاصیت مختصات راه حل ساده‌ای را برای انتگرال گیری از معادلات حرکت، پیش می‌آورد.

در حال حاضر ، مقدار حرکت عمومی

$$p_\varphi = mr^2\dot{\varphi}$$

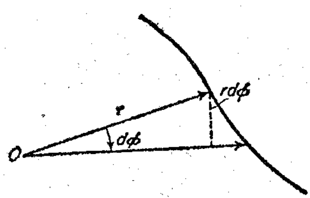
برابر است با مقدار حرکت زاویه‌ای $M = M_z$ (رجوع شود به ۶ـ۹) . حال قانون بقای حرکت زاویه‌ای را می‌نویسیم :

$$M = mr^2\dot{\varphi} = \text{ثابت} \qquad (۱۴ـ۲)$$

این قانون در صفحهٔ حرکت ذرهٔ مجردی که در میدان مرکزی قرارگرفته است ، مفهوم هندسی ساده‌ای دارد . جملهٔ $\frac{1}{2}r \cdot rd\varphi$ مساحت قطاعی از دایره است که به دوبردارحامل مجاور، درعنصر کوچکی ازمسیر، محدودمی‌شود (شکل ۸) . چنانچه این‌سطح را df بنامیم می‌توان مقدار حرکت زاویه‌ای را به صورت زیر نمایش داد :

$$M = 2m\dot{f} \qquad (۱۴ـ۳)$$

مشتق $\dot{f}$ را سرعت سطحی گویند . دراین‌صورت بقای مقدارحرکت زاویه‌ای به بقای سرعت سطحی خلاصه می‌شود : بردار حامل ذره در زمانهای مساوی ، مساحات مساوی را جارو می‌کند (قانون دوم کپلر) .[1]



(شکل ۸)

می‌توان مسئلهٔ حرکت ذرهٔ مادی، درمیدان مرکزی رابدون نوشتن‌معادلات حرکت و تنها با استفاده ازقوانین بقای انرژی ومقدارحرکت زاویه‌ای به طورکامل حل‌کرد. به‌کمك رابطهٔ (۲ ـ ۱۴) $\dot{\varphi}$ را برحسب M به دست می‌آوریم و در رابطهٔ اصل بقای انرژی قرار می‌دهیم نتیجه می‌شود :

$$E = \frac{1}{2} m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) + U(r) = \frac{1}{2} m\dot{r}^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{M^2}{mr^2} + U(r) \quad (۱۴ـ۴)$$

ازآنجا

---

۱ ـ گاهی قانون بقاء مقدار حرکت زاویه‌ای را در مورد ذره‌ای‌که در میدان مرکزی حرکت می‌کند ، **انتگرال مساحت** گویند .

$$\dot{r} \equiv \frac{dr}{dt} = \sqrt{\frac{۲}{m}[E-U(r)] - \frac{M^۲}{m^۲r^۲}} \qquad (۱۴-۵)$$

پس از انتگرال گرفتن :

$$t = \int dr \Big/ \sqrt{\frac{۲}{m}[E-U(r)] - \frac{M^۲}{m^۲r^۲}} + \text{ثابت} \qquad (۱۴-۶)$$

با نوشتن $d\varphi$ به صورت

$$d\varphi = \frac{M dt}{mr^۲}$$

و قراردادن آن در (۵-۱۴) و انتگرال گیری ، نتیجه می‌شود :

$$\varphi = \int \frac{M \frac{dr}{r^۲}}{\sqrt{۲m[E-U(r)] - \frac{M^۲}{r^۲}}} + \text{ثابت} \qquad (۱۴-۷)$$

معادلات (۶-۱۴) و (۷-۱۴) جواب مسئله در حالت کلی است . معادلهٔ اخیر رابطهٔ مختصات r و φ یعنی معادلهٔ مسیر را مشخص می‌کند . معادلهٔ (۶-۱۴) فاصله را از مبدأ به صورت تابعی ضمنی از زمان نشان می‌دهد . باید توجه داشت که زاویهٔ φ همیشه با زمان به طور یکنواخت تغییر می‌کند ، زیرا رابطهٔ (۲-۱۴) نشان می‌دهد که هیچگاه $\dot{\varphi}$ تغییر علامت نمی‌دهد .

عبارت (۴-۱۴) نشان می‌دهد که حرکت شعاعی‌را می‌توان مشابه تغییر مکان یك‌بعدی در میدانی که انرژی پتانسیل آن برابر مقدار زیر است ، دانست :

$$U_{\text{eff}} = U(r) + \frac{M^۲}{۲mr^۲} \qquad (۱۴-۸)$$

کمیت $\frac{M^۲}{۲mr^۲}$ را انرژی گریز از مرکز گویند . مقادیری از r که در رابطهٔ زیر صدق می‌کند ، حدود حرکت را از مرکز میدان مشخص می‌سازد .

$$U(r) + \frac{M^۲}{۲mr^۲} = E \qquad (۱۴-۹)$$

هنگامی که رابطهٔ (۹-۱۴) سازگار است ، سرعت شعاعی $\dot{r}$ صفرمی‌شود . اما این بدان‌معنی نیست که مانند حرکتِ یك بعدی ، ذره در سکون باشد زیرا سرعت زاویه‌ای $\dot{\varphi}$ هنوز صفر نیست . مقدار $\dot{r} = ۰$ نشان می‌دهد که ذره به نقطهٔ بازگشت رسیده‌است . یعنی درجائی که

$r(t)$ به جای افزایش ، کاهش می‌یابد و یا بالعکس .

اگر حدود تغییرات r تنها با شرط $r \geqslant r_{min}$ محدود شده باشد ، حرکت نامحدود است ؛ یعنی ذره از جائی به حرکت درمی‌آید و به بی‌نهایت می‌رود .

اگر حدود تغییرات r در فاصلهٔ r_{min} و r_{max} قرار داشته باشد ، حرکت محدود است و مسیر حرکت در تاجی از دایره به شعاعهای r_{min} و r_{max} قرار می‌گیرد . البته لازم نیست‌که مسیر حتماً منحنی بسته‌ای باشد . هنگامی‌که r از r_{max} تا r_{min} و بالعکس تغییر می‌کند بردار حامل ذره در زاویهٔ $\Delta\varphi$ می‌چرخد . مطابق رابطهٔ (۷–۱۴) داریم :

$$\Delta\varphi = ۲\int_{r_{min}}^{r_{max}} \frac{M\frac{dr}{r^۲}}{\sqrt{۲m(E-U)-\frac{M^۲}{r^۲}}} \qquad (۱۴–۱۰)$$

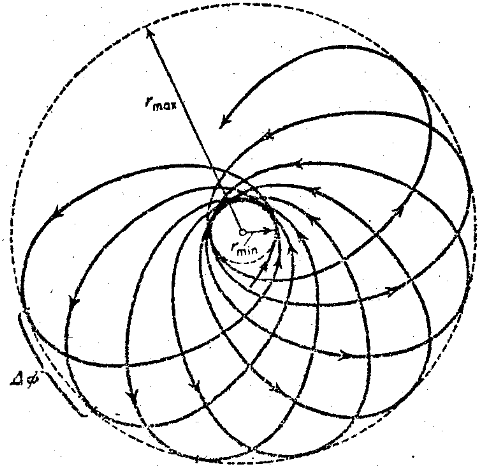
شرط بسته بودن مسیر آن است که این زاویه تابعی کسری از ۲π باشد ؛ یعنی $\Delta\varphi = ۲\pi\frac{m}{n}$ (m و n اعداد صحیح‌اند) . دراین حالت‌بردار حامل ذره ، پس از n تناوب mبار چرخیده و به موضع‌اولیهٔ خودبرمی‌گردد وازاین‌رو مسیر،منحنی بسته‌ای خواهدبود.

چنین حالاتی استثنائی هستند و چنانچه تابع $U(r)$ اختیاری باشد دیگر $\Delta\varphi$ تابعی کسری از۲π نخواهد بود و حرکت محدود ذره، درمسیر بسته انجام نمی‌پذیرد ؛ یعنی ذره بی‌نهایت‌بار درفاصلهٔ مینیمم وماکزیمم می‌رود و بازمی‌گردد و پس از زمان بی‌نهایت درازی سرتاسر تاج دایره را جارو می‌کند . مسیری که در شکل ۹ دیده می‌شود مثالی از این مطلب است .

تنها دونوع میدان مرکزی وجود داردکه هرحرکت محدودی درآن برمسیر بسته‌ای انجام می‌پذیرد . اول‌آنکه انرژی پتانسیل تابعی از $\frac{۱}{r}$ است و دوم آنکه انرژی پتانسیل تابعی از $r^۲$ می‌باشد . نوع اول را در بخش ۱۵ مورد بررسی قرار خواهیم داد و نوع دوم فضای نوسانگر است (بخش ۲۳ ، مسئلهٔ ۳) .

در نقطهٔ بازگشت ، رادیکال در معادلهٔ (۵–۱۴) و در نتیجه انتگرالهای (۶–۱۴) و (۷–۱۴) تغییر علامت می‌دهند . اگر زاویهٔ φ را از امتداد بردار حاملی که به نقطهٔ بازگشت وصل شده است اندازه بگیریم ، تفاوت دوقسمت مسیر در دوطرف این‌نقطه به ازاء هرمقدار r تنها از لحاظ تغییر علامت φ است ؛ یعنی مسیر نسبت به خط $\varphi = ۰$ متقارن است . اگر حرکت ذره را از نقطهٔ $r = r_{max}$ در نظر بگیریم ، ذره از این نقطه

روی نیمه‌ای از مسیر تا نقطهٔ $r=r_{\min}$ حرکت می‌کند و سپس در نیمهٔ دیگر مسیر تا نقطهٔ $r=r_{\max}$ پیش می‌رود و قس‌علی‌هذا . از این‌رو مسیر از قسمتهای رفت و بازگشت تشکیل شده‌است . می‌توان‌این‌گونه تقسیمات را درمورد مسیرهای نامحدود که شامل دوشاخهٔ متقارن از نقطهٔ $r=r_{\min}$ تا بی‌نهایت هستند ، نیز به‌کار برد .



(شکل ۹)

هنگامی‌که $M\neq 0$ ، اگر $r\to 0$ یا ∞ $\frac{1}{r^2}\to$ انرژی گریز از مرکز بی‌نهایت می‌شود . در حالت کلی این بررسی نشان می‌دهد که اگر حتی میدان جاذبه هم داشته باشیم ، حرکت در مرکز میدان امکان پذیر نیست . سقوط ذره در مرکز میدان تنها وقتی امکان پذیر است که چنانچه $r\to 0$ ، انرژی پتانسیل باسرعت‌کافی به سمت $\infty-$ میل کند . از نامساوی

$$\frac{1}{2}m\dot{r}^2=E-U(r)-\frac{M^2}{2mr^2}>0$$

یا

$$r^2U(r)+\frac{M^2}{2m}<Er^2$$

نتیجه می‌شود که r تنها در صورتی می‌توانند مقادیر نزدیك به صفررا پیدا کنند که

$$\lim_{r\to 0}\,[r^2U(r)]<-\frac{M^2}{2m} \qquad (۱۱-۱۴)$$

یعنی $U(r)$ باید مانند $-\frac{\alpha}{r^{2}}\ (\alpha>\frac{M^{2}}{2m})$ و یا متناسب با هر تابعی نظیر $-\frac{1}{r^{n}}$ $(n>2)$ به سمت $\infty-$ میل کند .

مسائل

مسئلهٔ ۱ـ معادلات حرکت آونگ کروی را به دست بیاورید (ذره‌ای به جرم m که روی سطح کره‌ای به شعاع l در میدان گرانشی زمین حرکت می‌کند) .

حل : در مختصات کروی اگر مبدأ را مرکز کره فرض کنیم و محور قطبی عمود و به سوی پائین قرار گیرد ، تابع لاگرانژ آونگ چنین نوشته می‌شود :

$$\frac{1}{2}ml^{2}(\dot{\theta}^{2}+\dot{\varphi}^{2}\sin^{2}\theta)+mgl\cos\theta$$

مختصات φ حلقوی است ؛ از این رو مقدار حرکت عمومی p_{φ} که مساوی مؤلفهٔ z مقدار حرکت زاویه‌ای است ، در هنگام حرکت ثابت باقی می‌ماند

$$ml^{2}\dot{\varphi}\sin^{2}\theta=M_{z}=\text{ثابت} \qquad (1)$$

انرژی ذره برابر است با :

$$E=\frac{1}{2}ml^{2}(\dot{\theta}^{2}+\dot{\varphi}^{2}\sin^{2}\theta)-mgl\cos\theta=$$

$$=\frac{1}{2}ml^{2}\dot{\theta}^{2}+\frac{M_{z}^{2}}{2ml^{2}\sin^{2}\theta}-mgl\cos\theta \qquad (2)$$

از این قرار

$$t=\int\frac{d\theta}{\sqrt{2[E-U_{\text{eff}}(\theta)]/ml^{2}}} \qquad (3)$$

که در رابطهٔ فوق انرژی پتانسیل مؤثر برابر است با :

$$U_{\text{eff}}(\theta)=\frac{1}{2}M_{z}^{2}/ml^{2}\sin^{2}\theta-mgl\cos\theta$$

با استفاده از رابطهٔ (۱) زاویهٔ φ به دست می‌آید :

$$\varphi=\frac{M_z}{l\sqrt{2m}}\int\frac{d\theta}{\sin^2\theta\sqrt{E-U_{\text{eff}}(\theta)}} \qquad (4)$$

انتگرالهای (۳) و (۴) تبدیل به انتگرالهای بیضوی از نوع اول و سوم می‌شوند .

ناحیه‌ای از θ که حرکت درآن امکان‌پذیر است ازنامساوی $E>U_{\text{eff}}$ و حدود آن از تساوی $E=U_{\text{eff}}$ نتیجه می‌شود . این رابطه معادلهٔ درجهٔ سومی است برحسب $\cos\theta$ که دو ریشه بین ۱ و ۱— دارد . این دو مقدار عرض جغرافیایی دو دایره را درکره مشخص می‌کنند که مسیر حرکت درمیان آنها قرار دارد .

مسئلهٔ ۲ـ معادلات حرکت ذره‌ای راکه برسطحی مخروطی با زاویهٔ رأس 2α حرکت می‌کند ، به دست بیاورید . مخروط سرته ، در امتداد قائم و درجهت میدان جاذبهٔ ثقل قراردارد .

حل : در مختصات کروی مبدأ را در رأس مخروط و محور قطبی را در امتداد قائم و به طرف بالا در نظر می‌گیریم . تابع لاگرانژ ذره بدین‌ـ صورت است :

$$L=\frac{1}{2}m(\dot{r}^2+r^2\dot{\varphi}^2\sin^2\alpha)-mgr\cos\alpha$$

مختصات φ حلقوی است و درنتیجه مقدار

$$M_z=mr^2\dot{\varphi}\sin^2\alpha$$

در هنگام حرکت ثابت باقی می‌ماند . انرژی سیستم برابر است با:

$$E=\frac{1}{2}m\dot{r}^2+\frac{M_z^2}{2mr^2\sin^2\alpha}+mgr\cos\alpha$$

به روش مسئلهٔ (۱) به دست می‌آید :

$$t=\int\frac{dr}{\sqrt{2[E-U_{\text{eff}}(r)]/m}}$$

$$\varphi=\frac{M_z}{\sqrt{2m}\sin^2\alpha}\int\frac{dr}{r^2\sqrt{E-U_{\text{eff}}(r)}}$$

$$U_{\text{eff}}(r)=\frac{M_z^2}{2mr^2\sin^2\alpha}+mgr\cos\alpha$$

شرط $E=U_{\rm eff}(r)$ (اگر $M_z\neq 0$) معادلهٔ درجهٔ سومی است از r که دو ریشهٔ مثبت دارد . این دومقدار دو دایره را برسطح مخروط معین می‌کند و مسیر حرکت در میان آنها قرار دارد .

مسئلهٔ ۳ ـ انتگرال معادلات حرکت آونگی را به جرم m_2 که در نقطهٔ آویز آن ذره‌ای به جرم m_1 قرار دارد ، به دست بیاورید . جرم m_1 می‌تواند در امتداد افق در صفحهٔ حرکت آونگ حرکت کند (شکل ۲ بخش ۵) .

حل : در تابع لاگرانژی که دربخش ۵ مسئلهٔ ۲ به دست‌آمد ، مختصهٔ x حلقوی است . در این صورت مقدار حرکت عمومی P_x که مؤلفهٔ افقی مقدار حرکت کل سیستم است ، درهنگام حرکت ثابت باقی می‌ماند :

$$P_x=(m_1+m_2)\dot{x}+m_2 l\dot{\varphi}\cos\varphi=\text{ثابت} \qquad (1)$$

همیشه می‌توان سیستم را به طورکلی‌ساکن پنداشت ، درنتیجه ثابت (۱) صفر است و با انتگرال گیری به دست می‌آید :

$$(m_1+m_2)x+m_2 l\sin\varphi=\text{ثابت} \qquad (2)$$

رابطهٔ فوق نشان می‌دهد که مرکز جرم سیستم برخط افقی حرکت نمی‌کند . با استفاده از رابطهٔ (۱) انرژی سیستم به دست می‌آید :

$$E=\frac{1}{2}m_2 l^2\dot{\varphi}^2\left(1-\frac{m_2}{m_1+m_2}\cos^2\varphi\right)-m_2 g l\cos\varphi \qquad (3)$$

از آنجا :

$$t=l\sqrt{\frac{m_2}{2(m_1+m_2)}}\int\sqrt{\frac{m_1+m_2\sin^2\varphi}{E+m_2 g l\cos\varphi}}\,d\varphi$$

درمختصات ذرهٔ m_2 $(x_2=x+l\sin\varphi$ و $y_2=l\cos\varphi)$ مقدار φ را از رابطهٔ (۲) قرار می‌دهیم و نتیجه می‌گیریم که مسیر m_2 قوسی است از بیضی با نیم محور افقی برابر $\frac{lm_1}{m_1+m_2}$ ونیم محور قائم برابر l . اگر $m_1\to\infty$ به مسئلهٔ آونگ ساده باز می‌گردیم که در آنجا ذرهٔ m_2 بر قوسی از دایره حرکت می‌کند .

۱۵ : مسئلهٔ کپلر

یکی از مهمترین میدانهای مرکزی ، میدانی است که انرژی پتانسیل آن معکوساً با r و نیروی آن معکوساً با $r^{۲}$ متناسب باشد . این میدانها شامل میدان جاذبهٔ گرانشی نیوتن ومیدان الکتریکی کولمب می‌شوند که نوع اخیر ممکن است جاذبه ویا دافعه باشد .

ابتدا میدان جاذبه را مورد مطالعه قرار می‌دهیم :

$$U = -\frac{\alpha}{r} \qquad (۱۵-۱)$$

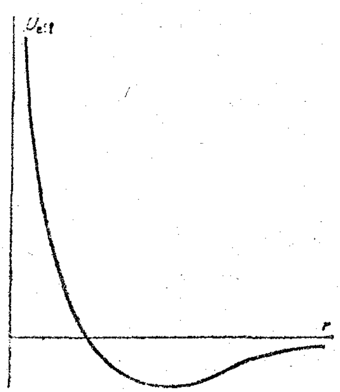
که α ثابت و مثبت است . انرژی پتانسیل مؤثر برابر است با:

$$U_{\text{eff}} = -\frac{\alpha}{r} + \frac{M^{۲}}{۲mr^{۲}} \qquad (۱۵-۲)$$

که نمایش تغییرات آن در شکل ۱۰ نشان داده شده است . وقتی $r \to ۰$ ، U_{eff} به سمت $+\infty$ میل می‌کند و اگر $r \to \infty$ ، U_{eff} ازطرف مقادیرمنفی به سمت صفرمیل می‌کند .

در ازاء $r = \frac{M^{۲}}{m\alpha}$ انرژی پتانسیل مینیمم است :

$$U_{\text{eff}\cdot\text{min}} = -\frac{m\alpha^{۲}}{۲M^{۲}} \qquad (۱۵-۳)$$



شکل ۱۰

به‌کمک شکل ۱۰ متوجه می‌شویم که به‌ازاء $E < ۰$ حرکت محدود و اگر $E > ۰$ باشد ، حرکت نامحدود است .

معادلهٔ مسیر را از رابطهٔ کلی (۷-۱۴) با قراردادن $U = -\frac{\alpha}{r}$ در آن بـه دست می‌آوریم :

$$\varphi = arc\cos\frac{\frac{M}{r}-\frac{m\alpha}{M}}{\sqrt{۲mE+\frac{m^{۲}\alpha^{۲}}{M^{۲}}}} + \text{ثابت}$$

مبدأ φ را طوری انتخاب می‌کنیم که مقدار ثابت صفر شود . با جایگزین کردن

$$p=\frac{M^{۲}}{m\alpha} \quad \text{و} \quad e=\sqrt{۱+\frac{۲EM^{۲}}{m\alpha^{۲}}} \qquad (۱۵-۴)$$

در معادلهٔ مسیر ، به دست می‌آید :

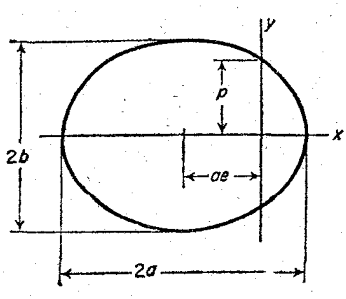
$$\frac{p}{r}=۱+e\cos\varphi \qquad (۱۵-۵)$$

معادلهٔ فوق مقطعی از مخروط است که یکی از کانونهای آن در مبدأ مختصات قرار دارد . $۲p$ را پارامتر مسیر (latus rectum) و e را خروج از مرکز گویند . در معادلهٔ (۱۵-۵) مبدأ φ را طوری انتخاب کردیم که ذره در نقطهٔ $\varphi=۰$ نزدیکترین فاصله را از مبدأ مختصات داشته باشد ، این نقطه را حضیض می‌نامند .

در مسئلهٔ معادل که دو ذره مطابق قانون (۱-۱۵) همدیگر را جذب می‌کنند ، مسیر هر ذره خود مقطعی است ازمخروط که یکی از کانونهایشان درمرکز جرم دو ذره قراردارد.

معادلهٔ (۱۵-۴) نشان می‌دهد که اگر $E<۰$ ، خروج ازمرکز $e<۱$ ؛ یعنی مسیر بیضی و حرکت محدود است (شکل ۱۱) . مطابق روابط هندسی بزرگترین و کوچکترین نیم محور بیضی برابر است با :

$$a=\frac{p}{۱-e^{۲}}=\frac{\alpha}{۲|E|} \quad \text{و} \quad b=\frac{p}{\sqrt{۱-e^{۲}}}=\frac{M}{\sqrt{۲m|E|}} \qquad (۱۵-۶)$$



(شکل ۱۱)

کوچکترین مقدارانرژی ازرابطهٔ (۱۵-۳) به دست می‌آید و دراین حالت $e=۰$ است؛ یعنی

مسیر بیضی به‌دایره تبدیل می‌شود . با اندکی توجه ملاحظه می‌شود که محور بزرگ بیضی تنها تابعی است از انرژی ذره و به مقدار حرکت زاویه‌ای آن بستگی ندارد . بزرگترین وکوچکترین فاصله از مرکز میدان (کانون بیضی) برابر است با:

$$r_{\min}=p/(1+e)=a(1-e)$$
$$r_{\max}=p/(1-e)=a(1+e) \qquad (15-7)$$

می‌توان این عبارات را که در آن a و e با روابط (۱۵-۶) و (۱۵-۴) تعریف شده‌اند ، مستقیماً با حل معادلهٔ $U_{\mathrm{eff}}(r)=E$ به دست آورد .

می‌توان دورهٔ تناوب T ، زمان گردش ذره‌ای را در مسیر بیضوی با استفاده از بیان قانون بقای مقدارحرکت زاویه‌ای به صورت انتگرال مساحت (۱۴-۳) ، به دست‌آورد . با انتگرال گیری از این معادله نسبت به زمان از صفر تا T به دست می‌آید :

$$2mf=TM$$

که f مساحت مسیراست . دربیضی $f=\pi ab$ وبا استفاده از رابطهٔ (۱۵-۶) نتیجه می‌شود :

$$T=2\pi a^{\frac{3}{2}}\sqrt{\frac{m}{\alpha}}=\pi\alpha\sqrt{\frac{m}{2|E|^{3}}} \qquad (15-8)$$

متناسب بودن مربع دورهٔ تناوب با مکعب یك بعد خطی مسیر که قبلا نیز در بخش دهم به‌آن اشاره‌ای شد ، در اینجا نیز به ثبوت رسید . ملاحظه می‌شود که دورهٔ تناوب تنها تابعی از انرژی سیستم است .

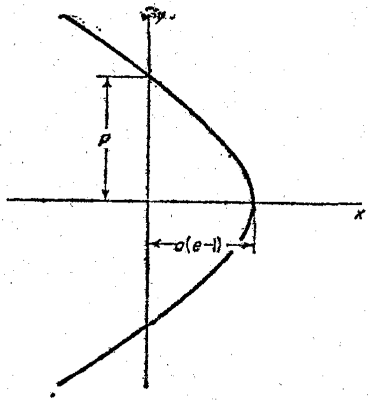
اگر $E\geqslant 0$ باشد حرکت نامحدود است . اگر $E>0$ باشدگریز ازمرکز $e>1$ است و مسیر یك هذلولی می‌باشد که مبدأ مختصات در کانون آن قرار دارد (شکل ۱۲) . فاصلهٔ نقطهٔ حضیض ازکانون هذلولی برابر است با:

$$r_{\min}=\frac{p}{e+1}=a(e-1). \qquad (15-9)$$

که $a=\dfrac{p}{e^{2}-1}=\dfrac{\alpha}{2E}$ نیم محور هذلولی است .

اگر $E=0$ باشد ، درنتیجه $e=1$ است ؛ یعنی ذره بریك سهمی حرکت می‌کند که فاصلهٔ نقطهٔ حضیض آن از کانون برابر است با :

$$r_{\min}=\frac{1}{2}p$$



(شکل۱۲)

این حالت درموقعی‌اتفاق می‌افتد که ذره دربی‌نهایت ازحالت سکون به حرکت درآمده‌باشد.

می‌توان مختصات ذره را برحسب تابعی‌اززمان باکمك رابطهٔ عمومی (۶–۱۴) نوشت. این مختصات را می‌توان به صورت پارامتری نمایش داد.

ابتدا مسیر بیضی را مورد مطالعه قرار می‌دهیم. با استفاده از مقادیر a و e که از روابط (۶–۱۵) و(۷–۱۵) به دست می‌آیند، انتگرال (۶–۱۴) را به‌صورت زیرمی‌نویسیم:

$$t=\sqrt{\frac{m}{۲|E|}}\int\frac{r\mathrm{d}r}{\sqrt{-r^۲+\frac{\alpha}{|E|}r-\frac{M^۲}{۲m|E|}}}=$$

$$=\sqrt{\frac{ma}{\alpha}}\int\frac{r\mathrm{d}r}{\sqrt{a^۲e^۲-(r-a)^۲}}$$

با تغییر متغیر ساده $r-a=-ae\cos\xi$ انتگرال به صورت ساده‌تری نوشته می‌شود:

$$t=\sqrt{\frac{ma^۳}{\alpha}}\int(۱-e\cos\xi)\mathrm{d}\xi=\sqrt{\frac{ma^۳}{\alpha}}(\xi-e\sin\xi)+\text{ثابت}$$

چنانچه مبدأ زمان راطوری‌انتخاب‌کنیم که ثابت انتگرال صفرشود، رابطهٔ پارامتری برحسب r و t بدین صورت است:

$$r=a(۱-e\cos\xi)\quad\text{و}\quad t=\sqrt{\frac{ma^۳}{\alpha}}(\xi-e\sin\xi)\qquad(۱۵–۱۰)$$

در زمان $t=۰$ ذرهٔ مادی در نقطهٔ حضیض قرار می‌گیرد. مختصات کارتزین

$$y=r\sin\varphi \quad\text{و}\quad x=r\cos\varphi$$

(محور x و محور y به ترتیب موازی محورهای بزرگ و کوچك بیضی‌اند) را نیز می‌توان برحسب پارامتر ξ نشان داد . از روابط (۵-۱۵) و (۱۰-۱۵) به دست می‌آید:

$$ex = p - r = a(1-e^2) - a(1 - e\cos\xi) = ae(\cos\xi - e)$$

y برابر است با $\sqrt{r^2 - x^2}$ و ازآنجا:

$$x = a(\cos\xi - e) \quad \text{و} \quad y = a\sqrt{1-e^2}\sin\xi \qquad (۱۵-۱۱)$$

با افزایش ξ از صفر تا 2π ذره یك بار برمسیر گردیده است .

نتایج متشابهی نیز برای مسیر هذلولی به دست می‌آید :

$$r = a(e\,ch\xi - 1) \quad \text{و} \quad t = \sqrt{\frac{ma^3}{\alpha}}(e\,sh\xi - \xi)$$

(۱۵-۱۲)

$$x = a(e - ch\xi) \quad \text{و} \quad y = a\sqrt{e^2 - 1}\,sh\xi$$

درعبارات فوق ξ از $-\infty$ تا $+\infty$ تغییر می‌کند .

حال حرکت را در میدان دافعه درنظرمی گیریم که درآنجا:

$$U = \frac{\alpha}{r} \qquad (\alpha > 0) \qquad (۱۵-۱۳)$$

در این حالت انرژی پتانسیل مؤثر برابر است با :

$$U_{\text{eff}} = \frac{\alpha}{r} + \frac{M^2}{2mr^2}$$

که با تغییر r از صفر تا بی‌نهایت به طور یکنواخت ازبی‌نهایت تاصفرکاهش می‌یابد. انرژی ذره باید مثبت باشد وحرکت همیشه نامحدود است . با محاسباتی کاملاً متشابه آنچه دربارهٔ میدان جاذبه انجام شد ، نشان داده می‌شود که مسیر هذلولی است (یا اگر $E = 0$ باشد سهمی است) .

$$\frac{p}{r} = -1 + e\cos\varphi \qquad (۱۵-۱۴)$$

که p و e با همان روابط (۴-۱۵) تعریف می‌شوند . مطابق شکل ۱۳ مسیر از نزدیکی مرکزمیدان می‌گذرد . فاصلهٔ حضیض برابر است با :

$$r_{\min} = \frac{p}{e-1} = a(e+1) \qquad (۱۵-۱۵)$$

رابطهٔ r (یا x و y) برحسب زمان t با معادلات پارامتری زیر داده می‌شوند :

$$r=a(ech\xi+1) \quad \text{و} \quad t=\sqrt{\frac{ma^3}{\alpha}}(esh\xi+\xi)$$

$$x=a(ch\xi+e) \quad \text{و} \quad y=a\sqrt{e^2-1}\,sh\xi \tag{۱۵-۱۶}$$

در پایان این بخش نشان می‌دهیم که در میدان $U=\frac{\alpha}{r}$ (با هرعلامت α) انتگرال حرکت دیگری خاص این میدان وجود دارد . می‌توان با محاسبات مستقیم بـه سادگی ثابت کرد که کمیت

$$\mathbf{v}\times\mathbf{M}+\frac{\alpha\mathbf{r}}{r} \tag{۱۵-۱۷}$$

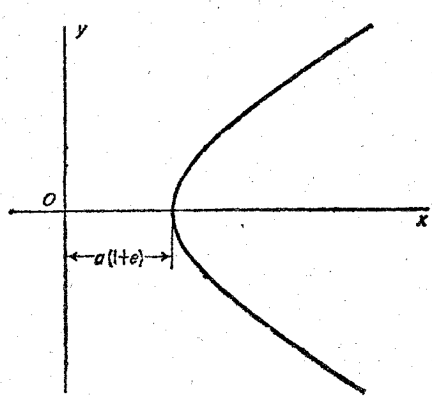
مقداریست ثابت زیرا دیفرانسیل کامل عبارت فوق برابر است با :

$$\dot{\mathbf{v}}\times\mathbf{M}+\alpha\frac{\mathbf{v}}{r}-\alpha\mathbf{r}(\mathbf{v}\cdot\mathbf{r})/r^3$$

و یا چون $\mathbf{M}=m\mathbf{r}\times\mathbf{v}$ ، داریم:

$$m\mathbf{r}(\mathbf{v}\cdot\dot{\mathbf{v}})-m\mathbf{v}(\mathbf{r}\cdot\dot{\mathbf{v}})+\alpha\frac{\mathbf{v}}{r}-\alpha\mathbf{r}(\mathbf{v}\cdot\mathbf{r})/r^3$$

با قراردادن $m\dot{\mathbf{v}}=\frac{\alpha\mathbf{r}}{r^3}$ که ازمعادلات حرکت نتیجه می‌شود ، ملاحظه می‌شود که عبارت فوق صفر است ؛ یعنی کمیت (۱۵-۱۷) مقداریست ثابت .



(شکل ۱۳)

جهت‌بردار(۱۵-۷) درامتداد محوراطول بیضی‌ازکانون به‌نقطهٔ حضیض‌قراردارد ومقدارش برابر αe است . با محاسبهٔ اندازهٔ این‌بردار درنقطهٔ حضیض به سادگی می‌توان همین‌مقدار

را به دست آورد .

بایدتأکیدکنیم که انتگرالهای (۱۷ـ۱۵) مانند انتگرالهای M و E تابعی یك‌ارزشی ازمکان وسرعت ذره‌اند . دربخش ۵۰ ملاحظه خواهیم کرد که وجود چنین انتگرال حرکتی دلیل بر نزول «degeneracy» حرکت است .

مسائل

مسئلهٔ ۱ـ رابطهٔ زمانی مختصات ذره‌ای که با انرژی $E=0$ بریك سهمی در میدان $U=-\frac{\alpha}{r}$ حرکت می‌کند ، به دست بیاورید .

حل : در انتگرال

$$t=\int\frac{rdr}{\sqrt{\frac{۲\alpha}{m}r-\frac{M^{۲}}{m^{۲}}}}$$

بجای r قرار می‌دهیم :

$$r=\frac{M^{۲}(۱+\eta^{۲})}{۲m\alpha}=\frac{۱}{۲}p(۱+\eta^{۲})$$

ازآنجا روابط پارامتری مورد نظر به دست می‌آیند :

$$r=\frac{۱}{۲}p(۱+\eta^{۲}) \quad و \quad t=\sqrt{\frac{mp^{۳}}{\alpha}}\cdot\frac{۱}{۲}\eta(۱+\frac{۱}{۲}\eta^{۲})$$

$$x=\frac{۱}{۲}p(۱-\eta^{۲}) \quad و \quad y=p\eta$$

پارامتر η از $-\infty$ تا $+\infty$ تغییر می‌کند .

مسئلهٔ ۲ـ انتگرال حرکت ذره‌ای را که در میدان خارجی

$$U=-\frac{\alpha}{r^{۲}} \quad (\alpha>۰)$$

حرکت می‌کند ، حساب کنید .

حل : با کمك معادلات (۶ـ۱۴) و (۷ـ۱۴) ، چنانچه مبدأ مناسبی برای φ و t درنظر بگیریم ، به دست می‌آید :

اگر $\frac{M^2}{2m}>\alpha$ و $E>0$ (الف)

$$\frac{1}{r}=\sqrt{\frac{2mE}{M^2-2m\alpha}}\ \cos\left[\varphi\sqrt{1-\frac{2m\alpha}{M^2}}\right]$$

اگر $\frac{M^2}{2m}<\alpha$ و $E>0$ (ب)

$$\frac{1}{r}=\sqrt{\frac{2mE}{2m\alpha-M^2}}\ sh\left[\varphi\sqrt{\frac{2m\alpha}{M^2}-1}\right]$$

اگر $\frac{M^2}{2m}<\alpha$ و $E<0$ (پ)

$$\frac{1}{r}=\sqrt{\frac{2m|E|}{2m\alpha-M^2}}\ ch\left[\varphi\sqrt{\frac{2m\alpha}{M^2}-1}\right]$$

و در همهٔ حالات

$$t=\frac{1}{E}\sqrt{\frac{1}{2}\,m(Er^2-\frac{M^2}{2m}+\alpha)}$$

درحالات (ب) و (پ)، وقتی φ به سمت بی‌نهایت میل می‌کند ، ذره درامتداد مسیری که به مبدأ نزدیك می‌شود ، به مرکز میدان سقوط می‌کند . زمان سقوط‌از هرمقدار دلخواه r تا وقتی $r\to 0$ مدتی است محدود ؛ یعنی :

$$\Delta t=\frac{1}{E}\sqrt{\frac{1}{2}\,m}\left[\sqrt{\alpha-\frac{M^2}{2m}+Er^2}-\sqrt{\alpha-\frac{M^2}{2m}}\right]$$

مسئلهٔ ۳ـ اگر انرژی پتانسیل $U=-\frac{\alpha}{r}$ میدان جاذبه ، با مقدار بسیار کوچك $\delta U(\alpha)$ تصحیح شود ، مسیر محدود حرکت هیچگاه بسته نخواهد شد و در هرچرخشی نقطهٔ حضیض به اندازهٔ $\delta\varphi$ تغییر مکان می‌دهد . $\delta\varphi$ را حساب کنید ، درصورتی که داشته باشیم :

$$\text{(الف)}\quad \delta U=\frac{\beta}{r^2}\qquad\qquad \text{(ب)}\quad \delta U=\frac{\gamma}{r^3}$$

حل : وقتی r از $r_{\min}$ تا $r_{\max}$ و بالعکس تغییر می‌کند ، زاویهٔ φ

مطابق رابطهٔ (۱۰-۱۴) تغییرمقدار می‌دهد که می‌توان آن را به این صورت نیز نوشت:

$$\Delta\varphi = -۲\frac{\partial}{\partial M}\int_{r_{\min}}^{r_{\max}}\sqrt{۲m(E-U)-\frac{M^۲}{r^۲}}\,dr$$

در رابطهٔ فوق U را برابر $-\frac{\alpha}{r}+\delta U$ قرار می‌دهیم و انتگرال را برحسب قوای δU بسط می‌دهیم. جملهٔ صفر بسط برابر است با ۲π و جملهٔ درجهٔ اول آن تغییرات $\delta\varphi$ را می‌دهد:

$$\delta\varphi = \frac{\partial}{\partial M}\int_{r_{\min}}^{r_{\max}}\frac{\delta U(۲m\,dr)}{\sqrt{۲m(E+\frac{\alpha}{r})-\frac{M^۲}{r^۲}}} =$$

$$=\frac{\partial}{\partial M}\left(\frac{۲m}{M}\int_{0}^{\pi} r^۲\delta U\,d\varphi\right) \qquad (۱)$$

انتگرال روی r به انتگرال روی φ تبدیل شده است و این عمل روی مسیر حرکت «منحرف نشده» (unperturbed) انجام گرفته است.

درحالت (الف) انتگرال (۱) به سادگی محاسبه می‌شود:

$$\delta\varphi = -۲\frac{\pi\beta m}{M^۲}$$

ویا:

$$\delta\varphi = -۲\frac{\pi\beta}{\alpha p}$$

که p ۲ از رابطهٔ (۴-۱۵) به دست می‌آید. درحالت (ب):

$$r^۲\delta U = \frac{\gamma}{r}$$

و $\frac{۱}{r}$ از رابطهٔ (۵-۱۵) محاسبه می‌شود. ازآنجا داریم:

$$\delta\varphi = -۶\pi\alpha\gamma m^۲/M^۴ = -\frac{۶\pi\gamma}{\alpha p^۲}$$

فصل چهارم

برخورد ذرات

۱۶ : متلاشی شدن ذرات

اغلب می‌توان به تنهایی با به‌کار بستن قوانین بقای مقدار حرکت وانرژی ، نتایج سودمندی از خواص واکنش‌های مختلف مکانیکی به دست آورد . باید توجه داشت که این خواص مستقل از واکنشهای داخلی میان ذرات است .

ابتدا متلاشی شدن خود به خود (یعنی بدون دخالت نیروهای خارجی) ذرات را به دو ذرهٔ مجزا (یعنی دوذره که آزادانه پس از شکست به حرکت خود ادامه می‌دهند) مورد مطالعه قرار می‌دهیم .

برای آن که مسئله ساده‌تر شود ، ذرهٔ اولیه را پیش از شکست ساکن می‌پنداریم . قانون بقای مقدار حرکت می‌گوید که مجموع مقادیر حرکت دو ذره پس از شکست برابر صفراست . یعنی دوذره بامقادیرحرکت مساوی ولی درجهت عکس هم به حرکت درمی‌آیند. مقدار حرکت هرذره ، p_0 با کمك قانون بقای انرژی محاسبه می‌شود :

$$E_i=E_{1i}+\frac{p_0^2}{2m_1}+E_{2i}+\frac{p_0^2}{2m_2}$$

در رابطهٔ بالا m_1 و m_2 جرم ذرات ، E_{1i} و E_{2i} انرژی داخلی ذرات و E_i انرژی ذرهٔ اولیه است . اگر ε مقدار انرژیی باشدکه پس از شکست آزاد می‌شود ، یعنی:

$$\varepsilon=E_i-E_{1i}-E_{2i} \qquad (16-1)$$

که مقدار مثبتی است ، نتیجه می‌شود :

$$\varepsilon=\frac{1}{2}p_0^2\left(\frac{1}{m_1}+\frac{1}{m_2}\right)=\frac{p_0^2}{2m} \qquad (16\text{-}2)$$

که مقدارحرکت p_0 را به دست می‌دهد . m جرم تعدیل یافتهٔ دو ذره است . سرعت ذرات برابرند با :

$$v_{10}=\frac{p_0}{m_1} \quad \text{و} \quad v_{20}=\frac{p_0}{m_2}$$

حال چارچوب مرجع را طوری انتخاب می‌کنیم که سرعت ذرهٔ اولیه برابر V باشد . این نوع چارچوب رامعمولاً سیستم آزمایشگاهی (یا سیستم L) گویند . به عکس درسیستم مرکز جرم (یا سیستم C) مجموع مقادیر حرکت برابر صفر است . یکی از ذرات که پس از شکست ذرهٔ اولیه به وجود آمده است را در نظر می‌گیریم . اگر $\mathbf{v}$ و $\mathbf{v}_0$ سرعتهای آن ذره در سیستم L و C باشد ، واضح است که $\mathbf{v}=\mathbf{V}+\mathbf{v}_0$ یا $\mathbf{v}-\mathbf{V}=\mathbf{v}_0$ و ازآنجا؛

$$v^2+V^2-2vV\cos\theta=v_0^2 \qquad (16\text{-}3)$$

θ زاویه‌ای است که مسیر این ذره با امتداد سرعت $\mathbf{V}$ می‌سازد ؛ معادلهٔ (۳ـ۱۶) سرعت ذره را در سیستم L برحسب تابعی از امتداد حرکت آن می‌دهد . در شکل ۱۴ می‌توان سرعت $\mathbf{v}$ را با هربردار دلخواهی که ازنقطهٔ A به نقطه‌ای از دایرهٔ به شعاع v_0 وصل شود، نمایش داد [1] (فاصلهٔ A تامرکز دایره برابر V است) . حالات $V<v_0$ و $V>v_0$ در اشکال ۱۴ a و ۱۴ b نمایش داده شده‌اند . در حالت اول θ می‌تواند هرمقدار دلخواهی را بگیرد اما درحالت دوم ذره باید در امتدادی حرکت کند که θ از θ_{max} کوچکتر باشد ؛ θ_{max} با رابطهٔ زیر مشخص می‌شود :

$$\sin\theta_{max}=\frac{v_0}{V} \qquad (16\text{-}4)$$

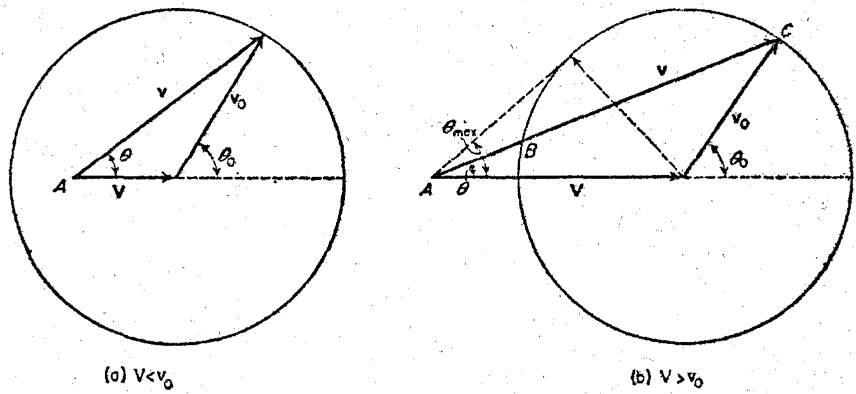
این زاویه امتداد مماس از نقطهٔ A به دایره را مشخص می‌کند .

رابطهٔ میان θ و θ_0 در دوسیستم L و C چنین است (شکل ۱۴) :

$$tg\,\theta=\frac{v_0\sin\theta_0}{v_0\cos\theta_0+V} \qquad (16\text{-}5)$$

از این رابطه $\cos\theta_0$ را به دست می‌آوریم:

۱ـ دقیق‌تر بگوییم ، هرنقطه ازکره‌ای به شعاع v_0 که درشکل ۱۴ مقطع دایرهٔ عظیمهٔ آن نمایش داده شده است .



(شکل ۱۴)

$$\cos\theta_{\circ}=-\frac{V}{v_{\circ}}\sin^{2}\theta \pm \cos\theta\sqrt{1-\frac{V^{2}}{v_{\circ}^{2}}\sin^{2}\theta} \qquad (۶-۱۶)$$

در ازاء $V<v_{\circ}$ رابطهٔ میان $\theta_{\circ}$ و θ یك ارزشی است و باید علامت مثبت رادیکال را در نظر گرفت . پس اگر $\theta=0$ باشد، $\theta_{\circ}=0$ است . اگر $V>v_{\circ}$ باشد ، به ازاء هر θ دومقدار برای $\theta_{\circ}$ وجود دارد و باید در رابطهٔ (۶-۱۶) هردو علامت رادیکال را به‌کار برد (شکل ۱۴ b ، زوایای بردارهای $v_{\circ}$ که از مرکز به نقاط C و B وصل شده‌اند) .

معمولاً درفیزیك با متلاشی شدن نه یك، بلکه ذرات بی‌شماری‌سروکار داریم که مسئلهٔ چگونگی پخش ذرات حاصل و انرژی‌های آنها را پیش می‌کشاند . در این مبحث فرض خواهیم کرد که ذرات اولیه در فضا ، دلخواه و بی‌قاعده پخش شده باشند ؛ یعنی تقریباً به‌طور همسان .

حل‌این مسئله درسیستم C بسیارساده‌است . ذرات منتجه (ازیك‌نوع به‌خصوص) انرژی مساوی دارند و امتداد حرکتشان در فضا به طور همسان قرارگرفته است . این واقعیت از فرض درهم‌پخش شدن ذرات اولیه درفضا نتیجه می‌شود و می‌توان چنین بیان داشت که تعداد ذرات شکسته‌ای که از هر زاویهٔ فضائی $d\omega_{\circ}$ عبور می‌کند متناسب با $d\omega_{\circ}$ یا برابر با $\frac{d\omega_{\circ}}{4\pi}$ است . پخش ذرات برحسب زاویه $\theta_{\circ}$ با قرار دادن

$$d\omega_{\circ}=2\pi\sin\theta_{\circ}d\theta_{\circ}$$

به دست می‌آید :[1]

$$\frac{1}{2} \sin\theta_0 d\theta_0 \qquad (16-7)$$

پخش ذرات در زاویهٔ مجسمه در سیستم L باتبدیل مناسبی به سادگی به دست می‌آید.
دراین قسمت تنها به‌مثالی ازذکرچگونگی پخش انرژی جنبشی درسیستم L اکتفا می‌کنیم .
با مربع کردن معادلهٔ $\mathbf{v}=\mathbf{v}_0+\mathbf{V}$ به دست می‌آید:

$$v^2 = v_0^2 + V^2 + 2v_0 V \cos\theta_0$$

در نتیجه :

$$d(\cos\theta_0) = \frac{dv^2}{2v_0 V}$$

با به‌کاربردن جملهٔ انرژی جنبشی $T=\frac{1}{2}mv^2$ که m می‌تواند m_1 یا m_2 باشد (بستگی دارد به اینکه کدام ذره مورد نظر باشد) و قرار دادن آن در رابطهٔ (۷ـ۱۶) ، پخش ذرات برحسب انرژی به دست می‌آید :

$$(1/2mv_0 V)dT \qquad (16-8)$$

انرژی جنبشی‌می‌تواند مقادیری‌بین $T_{\min} = \frac{1}{2}m(v_0-V)^2$ و $T_{\max}=\frac{1}{2}m(v_0+V)^2$ را داشته باشد . مطابق رابطهٔ (۸ـ۱۶) ذرات به طور یکنواخت در این حدود پخش شده‌اند .

چنانچه ذره‌ای به بیش از دوقسمت تقسیم شود ، قوانین بقای انرژی و مقدار حرکت به طور قابل ملاحظه‌ای درجات‌آزادی بیشتری به‌ذرات منتجه می‌دهند . سرعتها وامتدادهای حرکت به ویژه انرژی این ذرات در سیستم C مقدار معینی نخواهد بود . با این همه حد بالایی برای انرژی‌جنبشی هریك ازذرات منتجه موجود است. برای تعیین‌این حد ، سیستمی را درنظر می‌گیریم که متشکل از همهٔ ذرات به استثنای ذرهٔ مورد نظر (به جرم m_1) باشد وانرژی داخلی‌آن‌سیستم را برابر E'_i می‌انگاریم . انرژی‌جنبشی ذرهٔ m_1 باکمك معادلات (۱ـ۱۶) و (۲ـ۱۶) محاسبه می‌شود :

۱ـ زاویهٔ مجسمه یا زاویهٔ فضائی برابر سطح عرقچینی ازکره‌ای به شعاع واحد است‌که محدود به وجوه آن باشد (مانند هندسهٔ مسطحه که زاویه را برابر کمان دایره‌ای به شعاع واحد می‌پنداشتیم) . واحد اندازه‌گیری زاویهٔ مجسمهٔ استرادیان است‌که برابر $\frac{1}{4\pi}$ سطح کرهٔ واحد است . اندازهٔ این زاویهٔ برحسب θ_0 برابر $\omega_0 = 2\pi(1-\cos\theta_0)$ است . (م.)

$$T_{10}=\frac{p_0^{2}}{2m_1}=\frac{1}{M}(M-m_1)(E_i-E_{1i}-E'_i)$$

M جرم ذرهٔ اولیه است . واضح است که T_{10} بیشترین مقدار خود را وقتی داراست که E'_i کوچکترین مقدار را داشته باشد . برای این منظور باید همهٔ ذرات منتجه به استثنای m_1 با سرعت مساوی حرکت کنند و از این‌رو E'_i برابر است با مجموع انرژی داخلی هریك‌از ذرات و تفاوت $E_i-E_{1i}-E'_i=\varepsilon$ انرژی متلاشی شدن است . ازآنجا :

$$T_{\max}=\frac{(M-m_1)\varepsilon}{M} \tag{۱۶-۹}$$

مسائل

مسئلهٔ ۱ـ رابطهٔ میان زوایای θ_1 و θ_2 (درسیستم L) را پس ازشکست ذرهٔ اولیه به دوقسمت مجزا ، به دست آورید .

حل : در سیستم C رابطهٔ زوایای مذکور چنین‌است : $\theta_{10}=\pi-\theta_{20}$ ، θ_{10} را به‌طورخلاصه θ_0 می‌نامیم. با به‌کاربردن معادلهٔ (۵ـ۱۶) برای هریك از ذرات به‌دست می‌آید:

$$V+v_{10}\cos\theta_0=v_{10}\sin\theta_0\cot g\,\theta_1$$

$$V-v_{20}\cos\theta_0=v_{20}\sin\theta_0\cot g\,\theta_2$$

از میان دو معادلهٔ فوق θ_0 را حذف می‌کنیم . برای این کار $\sin\theta_0$ و $\cos\theta_0$ را به دست می‌آوریم و مربع آنها را برابر واحد قرار می‌دهیم . چون

$$\frac{v_{10}}{v_{20}}=\frac{m_2}{m_1}$$

با درنظر گرفتن رابطهٔ (۲ـ۱۶) نتیجه می گیریم که :

$$\left(\frac{m_2}{m_1}\right)\sin^2\theta_2+\left(\frac{m_1}{m_2}\right)\sin^2\theta_1-2\sin\theta_1\sin\theta_2\cos(\theta_1+\theta_2)=$$

$$=\frac{2\varepsilon}{(m_1+m_2)V^2}\sin^2(\theta_1+\theta_2)$$

مسئلهٔ ۲ـ بخش امتداد ذرات منتجه را در سیستم L به دست بیاورید.

حل : اگر $V > v_{\circ}$ باشد معادلهٔ (۶ـ۱۶) را با علامت مثبت رادیکال در معادلهٔ (۷ـ۱۶) قرار دهیم ، به دست می‌آید :

$$\frac{1}{2}\sin\theta d\theta\left[2\frac{V}{v_{\circ}}\cos\theta+\frac{1+\frac{V^2}{v_{\circ}^2}\cos 2\theta}{\sqrt{1-\frac{V^2}{v_{\circ}^2}\sin^2\theta}}\right] \quad 0\leqslant\theta\leqslant\pi$$

اگر $V < v_{\circ}$ باشد باید هر دومقدار $\theta_{\circ}$ را برحسب θ درنظر بگیریم . چون باافزایش θ یکی ازمقادیر $\theta_{\circ}$ اضافه ودیگری کم می‌شود ، دررابطهٔ (۶ـ۱۶) بایدتفاضل (نه‌جمع)عبارات $d\cos\theta_{\circ}$ رابرای‌هردوعلامت رادیکال درنظر گرفت، ازآنجا :

$$\sin\theta d\theta\frac{1+\frac{V^2}{v_{\circ}^2}\cos 2\theta}{\sqrt{1-\frac{V^2}{v_{\circ}^2}\sin^2\theta}} \qquad 0\leqslant\theta\leqslant\theta_{max}$$

مسئلهٔ ۳ـ حدود ممکن زاویهٔ بین امتدادهای دو ذرهٔ منتجه، θ را در سیستم L معین کنید .

حل : زاویهٔ $\theta=\theta_1+\theta_2$ و θ_1 و θ_2 با رابطهٔ (۵ ـ ۱۶) مشخص شده‌اند (مراجعه به مسئلهٔ ۱) . ساده‌ترآنست‌که $tg\,\theta$ محاسبه شود. با بررسی اکسترممهای عبارات منتجه ، حدود θ برحسب سرعت نسبی V و v_{10} و v_{20} (در این مسئله فرض شده است‌که $v_{20}>v_{10}$) به دست می‌آید : $0<\theta<\pi$ اگر $v_{10}<V<v_{20}$ باشد و $\pi-\theta_{\circ}<\theta<\pi$ اگر $V<v_{10}$ و $0<\theta<\theta_{\circ}$ اگر $V>v_{20}$ باشد . مقدار $\theta_{\circ}$ از رابطهٔ زیر محاسبه می‌شود :

$$\sin\theta_{\circ}=V(v_{10}+v_{20})/(V^2+v_{10}v_{20})$$

۱۷ : برخورد ارتجاعی

برخورد دو ذرهٔ مادی را ارتجاعی‌گویند اگر درکیفیت داخلی آن تغییری حاصل نشود . مطابق این تعریف چنانچه قانون بقای انرژی به‌کار برده شود ، می‌توان از انرژی داخلی ذرات صرف‌نظر کرد .

اگر برخورد را درچارچوبی بررسی کنیم که مرکز جرم دو ذره ساکن باشد (سیستم C) مسئله به‌سادگی حل می‌شود. مانند بخش ۱۶ دراین سیستم مقادیررا با اندیس‌صفر نشان می‌دهیم. سرعت ذرات پیش از برخورد برحسب سرعتهای آزمایشگاهی $\mathbf{v}_1$ و $\mathbf{v}_2$ چنین‌است:

$$\mathbf{v}_{10}=\frac{m_2\mathbf{v}}{m_1+m_2} \quad و \quad \mathbf{v}_{20}=\frac{-m_1\mathbf{v}}{m_1+m_2}$$

و $\mathbf{v}=\mathbf{v}_1-\mathbf{v}_2$ (به بخش ۲-۱۳ مراجعه شود) .

مطابق قانون بقای مقدار حرکت ، مقدار حرکت دو ذرهٔ مادی پس‌ازبرخورد برابر و در جهت عکس مقدارحرکت آنها پیش‌ازتصادم است ومطابق قانون بقای انرژی در اندازهٔ سرعتها نیز تغییری حاصل نمی‌شود . پس‌برخورد درسیستم C تنها بردارهای سرعت دو ذره را چرخانده و در جهت مخالف هم قرار می‌دهد . اگر $\mathbf{n}_0$ بردار واحدی در امتداد سرعت ذرهٔ m_1 ، پس از برخورد باشد ، سرعت دو ذره (که با پریم نشان داده شده‌اند) برابر می‌شود با :

$$\mathbf{v}'_{10}=m_2v\mathbf{n}_0/(m_1+m_2) \quad و \quad \mathbf{v}'_{20}=-m_1v\mathbf{n}_0/(m_1+m_2) \tag{۱۷-۱}$$

برای برگشت به سیستم L باید سرعت مرکز جرم دو ذره ، یعنی $\mathbf{V}$ را نیز به این عبارات بیافزاییم . بنابراین در سیستم L سرعتها پس از تصادم برابر می‌شوند با :

$$\left\{\begin{aligned}\mathbf{v}'_1&=\frac{m_2\mathbf{n}_0v}{m_1+m_2}+\frac{m_1\mathbf{v}_1+m_2\mathbf{v}_2}{m_1+m_2}\\ \mathbf{v}'_2&=\frac{-m_1v\mathbf{n}_0}{m_1+m_2}+\frac{m_1\mathbf{v}_1+m_2\mathbf{v}_2}{m_1+m_2}\end{aligned}\right. \tag{۱۷-۲}$$

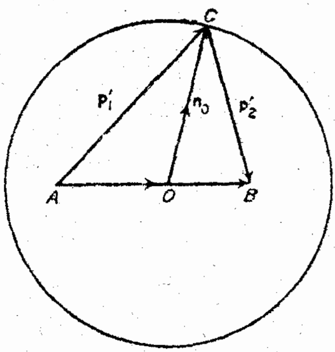
از قوانین بقای مقادیرحرکت وانرژی رابطهٔ دیگری به دست نمی‌آید و امتداد بردار $\mathbf{n}_0$ بستگی به قانون عکس‌العملهای ذرات و موضع نسبی آنها در هنگام برخورد ، دارد .

نتایج فوق را می‌توان به صورت هندسی نیز نمایش داد . ساده‌تر آن است که به‌عوض سرعتها ، مقادیر حرکت به‌کار برده شوند . با ضرب‌کردن معادلات (۱۷-۲) در m_1 و m_2 نتیجه می‌شود :

$$\begin{aligned}\mathbf{p}'_1&=mv\mathbf{n}_0+m_1(\mathbf{p}_1+\mathbf{p}_2)/(m_1+m_2)\\ \mathbf{p}'_2&=-mv\mathbf{n}_0+m_2(\mathbf{p}_1+\mathbf{p}_2)/(m_1+m_2)\end{aligned} \tag{۱۷-۳}$$

که $m=\dfrac{m_1m_2}{m_1+m_2}$ جرم تعدیل‌یافته است . دایره‌ای به شعاع mv می‌کشیم وساختمان شکل ۱۵ را به‌کار می‌بریم. اگر بردار واحد $\mathbf{n}_0$ در امتداد $\overrightarrow{OC}$ باشد ، بردارهای $\overrightarrow{AC}$ و $\overrightarrow{CB}$

مقدار حرکت $\mathbf{p}'_۱$ و $\mathbf{p}'_۲$ را نمایش می‌دهد . وقتی $\mathbf{p}_۱$ و $\mathbf{p}_۲$ معلوم باشند ، شعاع دایره و نقطهٔ A و B ثابتند اما نقطهٔ C می‌تواند در هرنقطهٔ دلخواه بردایره قرار داشته باشد .



$$\vec{OC} = m\mathbf{v}$$

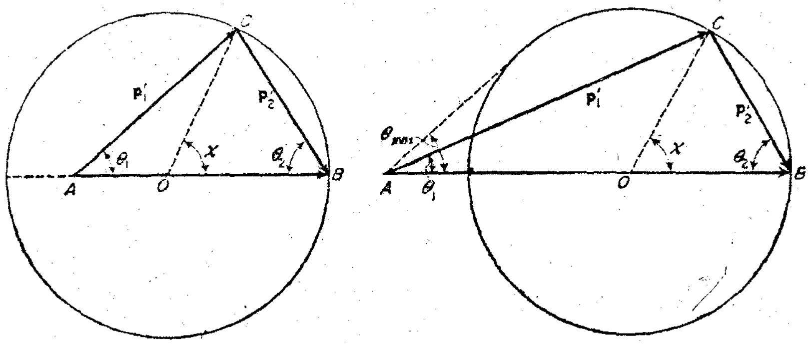
$$\vec{AO} = \frac{m_۱}{m_۱ + m_۲}(\mathbf{p}_۱ + \mathbf{p}_۲)$$

$$\vec{OB} = \frac{m_۲}{m_۱ + m_۲}(\mathbf{p}_۱ + \mathbf{p}_۲)$$

(شکل۱۵)

اکنون حالت خاصی راکه یکی از ذرات (مثلاً ۲) پیش ازبرخورد ساکن است مورد مطالعهٔ دقیقتری قرار می‌دهیم . در این حالت $OB = m_۲ p_۱/(m_۱ + m_۲) = mv$ برابر شعاع دایره است ؛ یعنی B بردایره قرار دارد . بردار $\vec{AB}$ مساوی مقدار حرکت $\mathbf{p}_۱$ ذرهٔ $m_۱$ پیش از برخورد است . اگر $m_۱ < m_۲$ یا $m_۱ > m_۲$ باشد ، نقطهٔ A داخل و یا خارج دایره قرار می‌گیرد . (در شکل b و a ۱۶) این دو حالت نمایش داده شده‌اند . $\theta_۱$ و $\theta_۲$ زاویهٔ بین‌امتدادهای حرکت دو ذره پس ازتصادم با امتداد برخورد است (یعنی‌امتداد $\mathbf{p}_۱$). زاویهٔ مرکزی χ که امتداد بردار $\mathbf{n}_۰$ را مشخص می‌کند درسیستم C برابر زاویهٔ چرخش ذرهٔ $m_۱$ ، پس از برخورد است . به‌کمك شکلهای (a و b ۱۶) روابط $\theta_۱$ و $\theta_۲$ برحسب χ به دست می‌آیند :

$$tg\,\theta_۱ = \frac{m_۲ \sin\chi}{m_۱ + m_۲ \cos\chi} \quad و \quad \theta_۲ = \frac{۱}{۲}(\pi - \chi) \qquad (۱۷-۴)$$



$(a)\ \ m_۱<m_۲$ $(b)\ \ m_۱>m_۲$

$AB=\mathbf{p}_۱$ و $AO/OB=m_۱/m_۲$

(شکل ۱۶)

و نیز می‌توان اندازهٔ سرعتهای دو ذره را پس از برخورد برحسب χ نوشت :

$$\left\{\begin{aligned} v'_۱&=\frac{\sqrt{m_۱{}^۲+m_۲{}^۲+۲m_۱m_۲\cos\chi}}{m_۱+m_۲}\,v \\ v'_۲&=\frac{۲m_۱v}{m_۱+m_۲}\sin\frac{۱}{۲}\chi \end{aligned}\right. \qquad (۱۷-۵)$$

مجموع $\theta_۱+\theta_۲$ ، زاویهٔ میان امتدادهای حرکت دو ذره پس از برخورد است . واضح است که اگر $m_۱<m_۲$ باشد $\theta_۱+\theta_۲>\frac{\pi}{۲}$ و اگر $m_۱>m_۲$ باشد ، $\theta_۱+\theta_۲<\frac{\pi}{۲}$.

اگر دو ذره هم جهت و یا در جهت مخالف هم حرکت کنند (برخورد شاخ به شاخ) داریم $\chi=\pi$ و از آنجا نقطهٔ C برقطری که از نقطهٔ A می‌گذرد قرار دارد ؛ یعنی روی پاره خط OA (شکل ۱۶ b ، وقتی $\mathbf{p}'_۲$ و $\mathbf{p}'_۱$ هم جهت باشند) و یا برامتداد OA (شکل ۱۶ a ، وقتی $\mathbf{p}'_۱$ و $\mathbf{p}'_۲$ در جهت عکس هم قرار گیرند .)

در این حالت سرعتها پس از برخورد برابر می‌شوند با :

$$\mathbf{v}'_۱=\frac{m_۱-m_۲}{m_۱+m_۲}\mathbf{v} \quad و \quad \mathbf{v}'_۲=\frac{۲m_۱}{m_۱+m_۲}\mathbf{v} \qquad (۱۷-۶)$$

در این حالت $\mathbf{v}'_۲$ بزرگترین مقدار خود را دارد و از آنجا ماکزیمم انرژیی که به ذره‌ای درحال سکون ، در اثر برخورد ذرهٔ دیگری داده می‌شود برابر است با :

$$E'_{2\max} = \frac{1}{2}m_2 v'^2_{2\max} = \frac{4m_1 m_2}{(m_1+m_2)^2}E_1 \qquad (۱۷-۷)$$

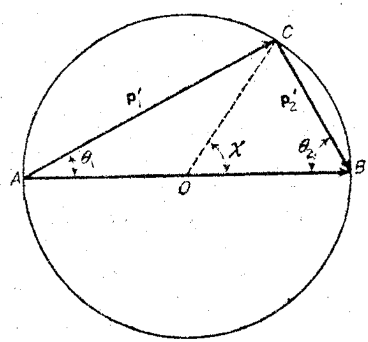
که در آن $E_1 = \frac{1}{2}m_1 v_1^2$ انرژی ذرهٔ متحرك پیش از برخورد است .

اگر $m_1 < m_2$ باشد ذرهٔ m_1 پس از برخورد می‌تواند درامتداد دلخواهی به حرکت درآید . اگر $m_1 > m_2$ باشد ذره تنها می‌تواند در زاویه‌ای که کوچکتر از θ_{max} است ، منحرف شود . این ماکزیمم مقدار θ_1 بستگی به موضع C دارد و مربوط به مماس AC بردایره است (شکل ۱۶ b). واضح است که :

$$\sin\theta_{1\max} = \frac{OC}{OA} = \frac{m_2}{m_1} \qquad (۱۷-۸)$$

برخورد دوذره با جرمهای مساوی که یکی ازآنها پیش از تصادم ساکن بوده ، حالت ساده‌ایست که هم A و B برروی دایره قرار می‌گیرند (شکل ۱۷) .

از آنجا :



(شکل ۱۷)

$$\theta_1 = \frac{1}{2}\chi \qquad \theta_2 = \frac{1}{2}(\pi-\chi) \qquad (۱۷-۹)$$

$$v'_1 = v\cos\frac{1}{2}\chi \quad و \quad v'_2 = v\sin\frac{1}{2}\chi \qquad (۱۷-۱۰)$$

دو ذره پس از برخورد عمود برهم به حرکت درمی‌آیند .

مسئله

سرعت ذرهٔ متحرك m_1 و ذرهٔ ساکن m_2 را پس از برخورد در سیستم L برحسب امتدادهای حرکت آنها ، محاسبه کنید .

حل : به کمك شکل ۱۶ داریم :

$$p'_2 = 2OB\cos\theta_2$$

یا :
$$v'_2 = \frac{2m}{m_2} v\cos\theta_2$$

ومقدارحرکت $p'_1 = AC$ ازرابطهٔ $OC^2 = AO^2 + p_1'^2 - 2AO \cdot p'_1\cos\theta_1$ به دست می‌آید . یا :

$$\left(\frac{v'_1}{v}\right)^2 - \frac{2mv'_1}{m_2 v}\cos\theta_1 + \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} = 0$$

ازآنجا :

$$\frac{v'_1}{v} = \frac{m_1}{m_1 + m_2}\cos\theta_1 \pm \frac{1}{m_1 + m_2}\sqrt{m_2^2 - m_1^2\sin^2\theta_1}$$

اگر $m_1 > m_2$ باشد رادیکال هر دو علامت را می‌تواند داشته باشد و اگر $m_2 > m_1$ باشد تنها علامت مثبت رادیکال قابل قبول است .

۱۸ : پراکندگی (تفرق)

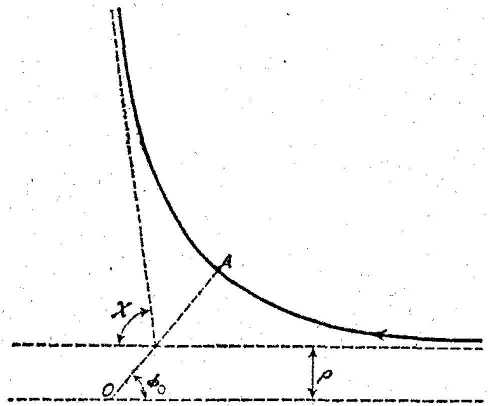
همان طور که دربخش ۱۷ متذکر شدیم ، محاسبهٔ دقیق برخورد دو ذره (تعیین زاویهٔ χ) مستلزم حل کامل معادلات حرکت با استفاده از قانون عکس‌العملهای ذرات است .

ابتدا معادل این مسئله ، یعنی تعیین انحراف یك ذرهٔ مجرد به جرم m در میدان $U(r)$ که مرکز آن (یعنی مرکز جرم دو ذرهٔ اصلی) در سکون است را مورد مطالعه قرار می‌دهیم .

همان طورکه در بخش ۱۴ نشان دادیم ، در میدان مرکزی مسیر ذره نسبت به خطی که مرکز را به نزدیك‌ترین نقطهٔ مسیر متصل می‌سازد ، متقارن است (OA در شکل ۱۸).

به این ترتیب دو مجانب مسیر زوایای مساوی (بنام φ_0) با خط مزبور می‌سازند . زاویهٔ انحراف χ در میدان مذکور برحسب φ_0 می‌شود (مراجعه کنید به شکل ۱۸) :

$$\chi = |\pi - 2\varphi_0| \qquad (۱۸-۱)$$



(شکل۱۸)

مطابق رابطهٔ (۷-۱۴) زاویهٔ φ_0 برابر است با :

$$\varphi_0 = \int_{r_{\min}}^{\infty} \frac{\frac{M}{r^2}\,dr}{\sqrt{2m[E-U(r)]-M^2/r^2}} \qquad (۱۸-۲)$$

که حدود انتگرال را از نزدیکترین نقطهٔ مسیر از مرکز میدان تا بی‌نهایت قرارداده‌ایم . باید به خاطر آورد که $r_{\min}$ یکی ازجوابهای عبارت زیر رادیکال در رابطهٔ (۲-۱۸) است، وقتی که مقدار رادیکال را برابر صفر قرار دهیم .

درحرکت نامحدود یعنی همان حرکتی که مورد مطالعهٔ ماست ، بهتر است که به‌جای ثابت‌های E و M سرعت ذره دربی‌نهایت v_∞ و پارامتر برخورد ρ را به‌کار بندیم . ρ فاصلهٔ عمودی نقطهٔ O از امتداد سرعت v_∞ است ؛ یعنی فاصله‌ای که ذره می‌بایست از مرکز میدان، چنانچه میدان نیرویی موجود نبود، می‌داشت (شکل ۱۸) . انرژی ومقدار حرکت زاویه‌ای برحسب این دوپارامتر به دست می‌آیند :

$$E = \frac{1}{2} m v_\infty^2 \quad \text{و} \quad M = m\rho v_\infty \qquad (۱۸-۳)$$

و از آنجا معادلهٔ (۲-۱۸) به صورت زیر نوشته می‌شود :

$$\varphi_0 = \int_{r_{\min}}^{\infty} \frac{\frac{\rho}{r^2}dr}{\sqrt{1-\frac{\rho^2}{r^2}-2\frac{U}{mv_\infty^2}}} \qquad (۱۸-۴)$$

با کمك (۱ـ۱۸) و (۴ـ۱۸) می‌توان χ را برحسب ρ به دست‌آورد .

در فیزیك ، معمولاً از انحراف یك ذره بحث نمی‌کنند ، بلکه تفرق اشعه‌ای از ذرات همسان‌که باسرعت یکنواخت $\mathbf{v}_\infty$ به مرکز پراکندگی تابانده شده‌اند ، مورد توجه است . ذرات مختلف در اشعه تابانیده شده ، پارامترهای برخورد متفاوتی دارند و به همین سبب با زوایای متفاوت χ پراکنده می‌شوند . فرض کنید dN تعداد ذراتی باشد که در هر ثانیه در زاویه‌ای میان χ و $\chi+d\chi$ پراکنده می‌شوند . این عدد به خودی خود واکنش پراکندگی را به خوبی توجیه نمی‌کند زیرا تفرق بستگی به چگالی اشعهٔ برخوردکننده دارد . از این‌رو نسبت

$$d\sigma = \frac{dN}{n} \qquad (۱۸-۵)$$

را به‌کار می‌بریم . n تعداد ذراتی است که در واحد زمان از واحد سطح مقطع اشعه (فرض می‌شود اشعه در مقاطع عرضی یکنواخت باشد) می‌گذرد . بعد این نسبت ، مساحت است و آنرا مقطع مؤثر پراکندگی می‌نامند . این عامل که با معلوم بودن میدان پراکندگی کاملاً مشخص می‌شود در مسئلهٔ تفرق اهمیت بسزایی دارد .

فرض می‌کنیم‌که رابطهٔ میان χ و ρ یك ارزشی باشد ؛ یعنی به این ترتیب که هرچه پارامتر برخورد بزرگتر شود ، زاویهٔ پراکندگی به طور یکنواخت کوچکتر گردد . در این حالت تنها ذراتی‌که پارامترهای‌برخوردشان میان $\rho(\chi)$ و $\rho(\chi)+d\rho(\chi)$ قرارگرفته باشد در زاویه χ و $\chi+d\chi$ پراکنده می‌شوند . تعداداین ذرات برابراست باحاصلضرب n در سطح محصور میان دو دایره به شعاعهای ρ و $\rho+d\rho$ ؛ یعنی $dN = 2\pi\rho n d\rho$. ازآنجا سطح مقطع مؤثر برابر است با :

$$d\sigma = 2\pi\rho d\rho \qquad (۱۸-۶)$$

برای به دست‌آوردن رابطه‌ای میان $d\sigma$ و زاویهٔ تفرق، کافی است معادلهٔ (۶ـ۱۸) را به صورت زیر نمایش دهیم :

$$d\sigma = 2\pi\rho(\chi)\left|\frac{d\rho(\chi)}{d\chi}\right|d\chi \qquad (۱۸-۷)$$

در رابطهٔ فوق قدر مطلق $\frac{d\rho}{d\chi}$ در نظر گرفته شده است زیرا ممکن است (و معمولاً چنین است) که مشتق مذکور منفی شود.[1] اغلب بهتر است که $d\sigma$ را برحسب عنصر زاویهٔ مجسمهٔ $d\omega$ (به جای زاویهٔ مسطحهٔ $d\chi$) محاسبه کنیم. زاویهٔ مجسمه میان دو مخروط به زوایای رأس χ و $\chi+d\chi$ برابراست با $d\omega=2\pi \sin\chi d\chi$. ازمعادلهٔ (۷ـ۱۸) به دست می‌آوریم:

$$d\sigma=\frac{\rho(\chi)}{\sin\chi}\left|\frac{d\rho}{d\chi}\right|d\omega \qquad (۸ـ۱۸)$$

اکنون مسئلهٔ تفرق اشعهٔ ذرات را نه درمیدان نیروی مرکزی، بلکه در اثر برخورد با ذرات ساکن مورد بررسی قرار می‌دهیم؛ رابطهٔ (۸ـ۱۸) مقطع مؤثر پراکندگی را برحسب تابعی از زاویهٔ پراکندگی به دست می‌دهد (در سیستم مرکز جرم C). برای به دست‌آوردن رابطه‌ای نظیر رابطهٔ مذکور در سیستم آزمایشگاهی برحسب تابعی از زاویهٔ θ باید χ را در رابطهٔ (۷ـ۱۸) از معادلهٔ (۴ـ۱۷) برحسب θ قرار دهیم. به این طریق معادلاتی برای مقطع مؤثر پراکندگی اشعه تابانده شده (χ برحسب θ_1) و ذراتی که در ابتدا ساکن بوده‌اند (χ برحسب θ_2) به دست می‌آید.

مسائل

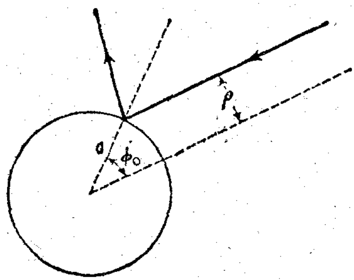
مسئلهٔ ۱ـ مقطع مؤثر پراکندگی را برای ذراتی که به کرهٔ صلبی به شعاع a برخوردمی‌کنند حساب کنید. (یعنی وقتی $r<a$ است عکس‌العمل‌های داخلی آنقدر زیاد است که $U=\infty$ و در ازاء $r>a$، $U=0$ است).

حل: چون ذره‌ای که آزادانه در خارج کره حرکت می‌کند نمی‌تواند درآن نفوذکند، مسیر شامل دوخط مستقیم می‌شود که نسبت به شعاعی ازکره که به نقطهٔ برخورد متصل شده، متقارن است. مطابق شکل ۱۹ به دست می‌آید:

$$\rho=a\sin\varphi_0=a\sin\frac{1}{2}(\pi-\chi)=a\cos\frac{1}{2}\chi$$

---

[1] اگر تابع $\rho(\chi)$ چندارزشی باشد، واضح است که باید مجموع معادلاتی نظیر (۷ـ۱۸) را برای هرشاخهٔ تابع درنظرگرفت.



(شکل ۱۹)

با قرار دادن در (۷ـ۱۸) به دست می‌آید :

$$d\sigma = \frac{1}{2}\pi a^2 \sin\chi d\chi = \frac{1}{4}a^2 d\omega \qquad (1)$$

یعنی پراکندگی درسیستم C همسان است. با انتگرال گیری از $d\sigma$ در زاویهٔ مجسمهٔ ω نتیجه می‌شود که سطح مقطع مؤثر کل برابر است با $\sigma = \pi a^2$ و این نتیجه از ابتدا معلوم بود زیراسطح برخورد یعنی سطحی که ذرات به کره می‌خورند و پراکنده می‌شوند ، برابر سطح دایرهٔ عظیمهٔ کره است .

برای انتقال به سیستم L ، χ را برحسب θ_1 (به کمك معادلهٔ ۴ـ۱۷) می‌نویسیم. به علت تشابه روابط (۴ـ۱۷) و(۵ـ۱۶) محاسبات نظیرمسئلهٔ ۲ دربخش ۱۶ است. درازاء $m_1 < m_2$ (m_1 جرم ذره و m_2 جرم کره است)داریم:

$$d\sigma_1 = \frac{1}{4}a^2\left[2\frac{m_1}{m_2}\cos\theta_1 + \frac{1+\left(\frac{m_1}{m_2}\right)^2\cos 2\theta_1}{\sqrt{1-\left(\frac{m_1}{m_2}\right)^2\sin^2\theta_1}}\right]d\omega_1$$

که $d\omega_1 = 2\pi\sin\theta_1 d\theta_1$ است . اگر $m_2 < m_1$ باشد :

$$d\sigma_1 = \frac{1}{2}a^2\frac{1+(m_1/m_2)^2\cos 2\theta_1}{\sqrt{1-(m_1/m_2)^2\sin^2\theta_1}}d\omega_1$$

در ازاء $m_1 = m_2$ به دست می‌آید :

$$d\sigma_1 = a^2 \mid \cos\theta_1 \mid d\omega_1$$

که همچنین می‌توان مستقیماً با قراردادن $\chi = 2\theta_1$ در معادلهٔ (۱) به همین نتیجه رسید .

برای کره‌ای که در سکون‌است $\chi = \pi - 2\theta_2$ و با قرار دادن در رابطهٔ (۱) به دست می‌آید :

$$d\sigma_2 = a^2 \mid \cos\theta_2 \mid d\omega_2$$

مسئلهٔ ۲ـ مقطع مؤثر را (مسئلهٔ ۱) برحسب تابعی از انرژی از دست رفته ذرات متصادم یعنی ε بنویسید .

حل : انرژی از دست رفته ذره ۱ برابراست با انرژیی‌که‌کره (به جرم ۲) به دست می‌آورد . از معادلات (۵ـ۱۷) و (۷ـ۱۷) داریم :

$$\varepsilon = E'_2 = [2m_1^2 m_2/(m_1+m_2)^2]v_\infty^2 \sin^2\frac{1}{2}\chi = \varepsilon_{\max}\sin^2\frac{1}{2}\chi$$

و از آنجا:
$$d\varepsilon = \frac{1}{2}\varepsilon_{\max}\sin\chi\, d\chi$$

با قراردادن در رابطهٔ (۱) مسئلهٔ ۱ به دست می‌آید :

$$d\sigma = \frac{a^2\pi d\varepsilon}{\varepsilon_{\max}}$$

یعنی ذرات متفرق به طور یکنواخت از صفر تا $\varepsilon_{\max}$ بخش شده‌اند .

مسئلهٔ ۳ـ در میدان $U \sim r^{-n}$ ، مقطع مؤثر را برحسب تابعی از سرعت اولیهٔ ذرات پراکنده شده v_∞ ، محاسبه‌کنید .

حل: مطابق رابطهٔ (۳ـ۱۰) اگر انرژی پتانسیل تابع همگنی از رستهٔ $k=-n$ باشد، درمسیرهای متشابه داریم: $\rho \sim v^{-2/n}$ یا $\rho = v_\infty^{-2/n} f(\chi)$ (زاویهٔ انعکاس χ برای مسیرهای متشابه مساوی است) . با جایگزین کردن در رابطهٔ (۶ـ۱۸) نتیجه می گیریم :

$$d\sigma \sim v_\infty^{-4/n}\, d\omega$$

مسئلهٔ ۴ـ مقطع مؤثر را برای ذره‌ای‌که به مرکز میدان $U = -\frac{\alpha}{r^2}$ سقوط‌کند ، حساب‌کنید .

حل : ذراتی به مرکز میدان می‌افتند که $2\alpha > m\rho^2 v_\infty^2$ (معادلهٔ ۱۱ـ۱۴) ؛ یعنی ذراتی‌که پارامتر برخوردشان به $\rho_{\max} = \sqrt{\frac{2\alpha}{mv_\infty^2}}$ نرسیده باشد . مقطع مؤثر برخورد برابر خواهد بود با :

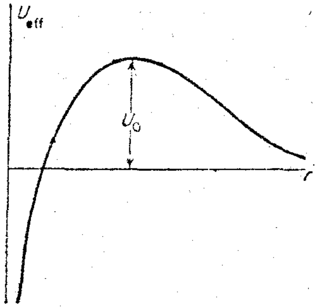
$$\sigma = \pi\rho^2_{\max} = \frac{2\pi\alpha}{mv_\infty^2}$$

مسئلهٔ ۵ ـ درمسئلهٔ ۴ اگر $U = \frac{-\alpha}{r^n}$ ($n>2$ و $\alpha>0$) باشد ، مقطع مؤثر را به دست بیاورید .

حل : انرژی پتانشیل مؤثر برابراست با $U_{eff}=\frac{m\rho^2 v_\infty^2}{2r^2}-\frac{\alpha}{r^n}$

که در شکل ۲۰ نمایش تغییرات آن برحسب r رسم شده است . ماکزیمم آن برابر است با :

$$U_{eff\,,\,max}\equiv U_0=\frac{1}{2}(n-2)\alpha\left(\frac{m\rho^2 v^2_\infty}{\alpha n}\right)^{n/(n-2)}$$



(شکل ۲۰)

ذراتی به مرکزمیدان می‌افتند که $U_0<E$ باشد وشرط $U_0=E$ مقدار ρ_{max} را می‌دهد . ازآنجا :

$$\sigma=\pi n(n-2)^{\frac{2-n}{n}}\left(\frac{\alpha}{mv^2_\infty}\right)^{2/n}$$

مسئلهٔ ۶ ـ مقطع مؤثر را برای ذراتی به جرم m_1 که به‌کره‌ای به شعاع R و جرم m_2 برخورد می کنند ، حساب‌کنید (فرض‌کنید ذرات مطابق قانون جاذبهٔ نیوتنی به‌کره جذب می‌شوند) .

حل : شرط رسیدن ذرات به‌کره آن است که $r_{min}<R$ (r_{min} نزدیکترین نقطهٔ مسیر به مرکز کره است) . بزرگترین مقدار ρ در ازاء $r_{min}=R$ به دست می‌آید که معادل است با $U_{eff}(R)=E$ یا

$$\frac{1}{2R^2}(m_1v^2_\infty\rho^2_{max})-\frac{\alpha}{R}=\frac{1}{2}m_1v^2_\infty$$

که درآن $\alpha=\gamma m_1m_2$ (γ ثابت گرانشی)است . بافرض $m_2\gg m_1$ داریم : $m\approx m_1$ و سرانجام با محاسبهٔ ρ^2_{max} نتیجه می‌شود که :

$$\sigma=\pi R^2\left(1+2\frac{\gamma m_2}{Rv^2_\infty}\right)$$

البته وقتی $v_\infty \to \infty$ مقطع مؤثر بـه مقطع هندسی کره تبدیل می‌شود .

مسئلهٔ ۷ـ میدان پراکندگی $U(r)$ را اگر مقطع مؤثر برحسب تابعی از زاویهٔ پراکندگی برای انرژی معلوم E داده شده باشد ، به دست آورید . فرض می‌شود که $U(r)$ با افزایش r کوچك می‌شود (میدان دافعه) و نیز $U(0)>E$ و $U(\infty)=0$ (O. B. Firsov ۱۹۵۳) .

حل : مطابق معادلهٔ

$$\int_\chi^\pi \frac{d\sigma}{d\chi} d\chi = \pi\rho^2 \qquad (۱)$$

می‌توان با انتگرال گرفتن از $d\sigma$ مربع پارامتر برخورد را محاسبه کرد و تابع $\rho(\chi)$ و ازآنجا $\chi(\rho)$ را به دست‌آورد . با قراردادن

$$s=\frac{1}{r} \qquad x=\frac{1}{\rho^2} \qquad w=\sqrt{1-\frac{U}{E}} \qquad (۲)$$

در دو معادلهٔ (۱ـ۱۸) و (۲ـ۱۸) نتیجه می‌شود :

$$\frac{1}{2}[\pi-\chi(x)] = \int_0^{s_0} \frac{ds}{\sqrt{xw^2-s^2}} \qquad (۳)$$

که $s_0(x)$ ریشهٔ معادلهٔ $xw^2(s_0)-s_0^2=0$ است .

رابطهٔ (۳) معادلهٔ انتگرالی است از تابع $w(s)$ و می‌توان آنرا مانند بخش۱۲ حل کرد . با تقسیم دوطرف رابطهٔ (۳) بر $\sqrt{\alpha-x}$ وانتگرال گیری برحسب x از صفر تا α به دست می‌آوریم :

$$\int_0^\alpha \frac{\pi-\chi(x)}{2} \cdot \frac{dx}{\sqrt{\alpha-x}} = \int_0^\alpha \int_0^{s_0(x)} \frac{ds\,dx}{\sqrt{(xw^2-s^2)(\alpha-x)}}$$

$$= \int_0^{s_0(\alpha)} \int_{x(s_0)}^\alpha \frac{dx\,ds}{\sqrt{(xw^2-s^2)(\alpha-x)}}$$

$$= \pi \int_0^{s_0(\alpha)} \frac{ds}{w}$$

با انتگرال گرفتن به طریقهٔ جزء به جزء از طرف چپ معادلهٔ فوق ، به دست می‌آید :

$$\pi\sqrt{\alpha}-\int_{0}^{\alpha}\sqrt{(\alpha-x)}\frac{d\chi}{dx}dx=\pi\int_{0}^{s_{0}(\alpha)}\frac{ds}{w}$$

از این رابطه برحسب α دیفرانسیل می‌گیریم و به جای $s_{0}(\alpha)$ فقط s راقرار می‌دهیم ، همینطور $\alpha=\frac{s^{2}}{w^{2}}$ وبه دست می‌آید :

$$\pi d\left(\frac{s}{w}\right)-\frac{1}{2}d\left(\frac{s^{2}}{w^{2}}\right)\int_{0}^{s^{2}/w^{2}}\frac{\chi'(x)dx}{\sqrt{\left(\frac{s^{2}}{w^{2}}\right)-x}}=\left(\frac{\pi}{w}\right)ds$$

یا :

$$\pi d\log w=d\left(\frac{s}{w}\right)\int_{0}^{s^{2}/w^{2}}\frac{\chi'(x)dx}{\sqrt{\left(\frac{s^{2}}{w^{2}}\right)-x}}$$

اگر به جای dx مقدار $d\left(\frac{s}{w}\right)$ را قرار دهیم به سادگی می‌توان انتگرال طرف راست رابطهٔ فوق را حساب کرد . چون در ازاء $s=0$ (یعنی $r\to\infty$) باید $w=1$ (یعنی $U=0$) باشد. با به‌کاربردن متغیرهای اولیهٔ r ، ρ نتیجه می‌گیریم :

$$w=e^{\left\{-\frac{1}{\pi}\int_{rw}^{\infty} argch\,\frac{\rho}{rw}\cdot\frac{d\chi}{d\rho}d\rho\right\}}=e^{\left\{\frac{1}{\pi}\int_{rw}^{\infty}\frac{\chi(\rho)d\rho}{\sqrt{\rho^{2}-r^{2}w^{2}}}\right\}} \qquad (4)$$

این رابطه تابع $w(r)$ و در نتیجه $U(r)$ را در ازاء $r>r_{\min}$ معین می‌کند (یعنی حدودی از r که ذرات پراکنده با انرژی مفروض E می‌توانندحرکت کنند) .

۱۹ : رابطهٔ روترفورد

یکی از مهمترین موارد استعمال روابطی که در فصل پیش به دست آمد ، پراکندگی ذرهٔ باردار در میدان کولمب است . اگر در معادلهٔ (۴ــ۱۸) ، U را برابر $\frac{\alpha}{r}$ قرار دهیم و انتگرال را محاسبه کنیم ، نتیجه می‌شود :

$$\varphi_{\circ}=arccos\frac{\frac{\alpha}{mv_{\infty}{}^{۲}\rho}}{\sqrt{۱+\left(\frac{\alpha}{mv_{\infty}{}^{۲}\rho}\right)^{۲}}}$$

ازاینرو $\rho^{۲}=\left(\frac{\alpha^{۲}}{m^{۲}v_{\infty}{}^{۴}}\right)tg^{۲}\varphi_{\circ}$ وچون $\varphi_{\circ}=\frac{۱}{۲}(\pi-\chi)$ است اگر آنرا در رابطهٔ (۱ــ۱۸) قرار دهیم به دست می‌آید :

$$\rho^{۲}=\frac{\alpha^{۲}}{m^{۲}v_{\infty}{}^{۴}}\ cotg^{۲}\frac{۱}{۲}\chi \qquad (۱۹\text{ـ}۱)$$

اگر از این عبارت نسبت به χ مشتق بگیریم و در (۷ــ۱۸) و (۸ــ۱۸) قراردهیم ، نتیجه می‌شود :

$$d\sigma=\pi\left(\frac{\alpha}{mv_{\infty}{}^{۲}}\right)^{۲}cos\frac{۱}{۲}\chi d\chi\ /\ sin^{۳}\frac{۱}{۲}\chi \qquad (۱۹\text{ـ}۲)$$

یا :

$$d\sigma=\left(\frac{\alpha}{۲mv_{\infty}{}^{۲}}\right)^{۲}d\omega/sin^{۴}\frac{۱}{۲}\chi \qquad (۱۹\text{ـ}۳)$$

این رابطه به روترفورد معروف است . بایدتوجه داشت که مقطع مؤثر مستقل ازعلامت α است ؛ از این رو این نتیجه را می‌توان هم درمورد میدان جاذبه و هم میدان دافعهٔ کولمب به کار برد .

در رابطهٔ (۳ ــ ۱۹) مقطع مؤثر در چارچوب مرجعی محاسبه شده است که در آن مرکز جرم ذرات متصادم را ساکن فرض کرده‌بودیم . انتقال به سیستم آزمایشگاهی با کمك رابطهٔ (۴ــ۱۷) امکان پذیر است . برای ذراتی که در ابتدا ساکن بوده‌اند ، داریم : $\chi=\pi-۲\theta_{۲}$. با قراردادن این تساوی در رابطهٔ (۲ــ۱۹) به دست می‌آید :

$$d\sigma_{۲}=۲\pi\left(\frac{\alpha}{mv_{\infty}{}^{۲}}\right)^{۲}sin\theta_{۲}d\theta_{۲}\ /cos^{۳}\theta_{۲}=\left(\frac{\alpha}{mv_{\infty}{}^{۲}}\right)^{۲}d\omega_{۲}/cos^{۳}\theta_{۲} \qquad (۱۹\text{ـ}۴)$$

در حالت کلی این انتقال منجر به روابطی دشوارمی‌شود وما دراینجاتنها ازدوحالت

خاص آن بحث خواهیم کرد .

اگر جرم ذره m_2 (ذره پراکنده‌کننده) در مقایسه با جرم m_1 (ذره پراکنده شده) بزرگ باشد ، داریم $m_1 \approx m$ و $\chi \approx \theta_1$ و ازآنجا :

$$d\sigma_1 = \left(\frac{\alpha}{4E_1}\right)^2 d\omega_1 / \sin^4 \frac{1}{2}\theta_1 \tag{۱۹-۵}$$

که $E_1 = \frac{1}{2} m_1 v_\infty^2$ انرژی ذرهٔ برخوردکننده است .

اگر جرم هر دو ذره مساوی باشد ($m_1 = m_2$ و $m = \frac{1}{2} m_1$) ، با کمك رابطهٔ (۹-۱۷) داریم $\chi = 2\theta_1$ و با قراردادن در رابطهٔ (۲-۱۹) نتیجه می‌شود :

$$d\sigma_1 = 2\pi\left(\frac{\alpha}{E_1}\right)^2 \cos\theta_1 d\theta_1 / \sin^3\theta_1 =$$

$$= (\alpha/E_1)^2 \cos\theta_1 d\omega_1 / \sin^4\theta_1 \tag{۱۹-۶}$$

اگرهمهٔ ذرات کاملاً یکسان باشند؛ یعنی اگر بتوان ذره‌ای‌راکه درابتدا ساکن بوده است، با ذرات متصادم اشتباه کرد ، مقطع مؤثر کل همهٔ ذرات برابر مجموع $d\sigma_1$ و $d\sigma_2$ خواهد بود و می‌توان به جای θ_1 و θ_2 زاویهٔ مشترك θ را قرار داد :

$$d\sigma = \left(\frac{\alpha}{E_1}\right)^2 \left(\frac{1}{\sin^4\theta} + \frac{1}{\cos^4\theta}\right) \cos\theta d\omega \tag{۱۹-۷}$$

به رابطهٔ عمومی (۲-۱۹) مراجعه می کنیم و ازآن برای تعیین چگونگی پخش ذرات پراکنده شده نسبت به انرژی از دست رفته در برخورد ، استفاده می کنیم . اگر جرم ذرات پراکنده شده m_1 و جرم ذرات پراکنده کننده m_2 باشد ، سرعتی که توسط جرم اخیر به دست می‌آید برحسب زاویهٔ پراکندگی درسیستم C برابراست با (مراجعه‌کنید به ۵-۱۷):

$$v'_2 = [2m_1 / (m_1 + m_2)] v_\infty \sin\frac{1}{2}\chi$$

انرژیی‌که جرم m_2 به دست آورده و جرم m_1 از دست داده است برابر می‌باشد با :

$$\varepsilon = \frac{1}{2} m_2 v_2'^2 = \left(\frac{2m^2}{m_2}\right) v_\infty^2 \sin^2\frac{1}{2}\chi$$

با قراردادن $\sin\frac{1}{2}\chi$ برحسب ε در رابطهٔ (۲-۱۹) نتیجه می‌شود :

$$d\sigma = 2\pi\left(\frac{\alpha^2}{m_2 v_\infty^2}\right) d\varepsilon / \varepsilon^2 \tag{۱۹-۸}$$

این معادله، مقطع مؤثر را برحسب تابعی از انرژی ε بیان می‌کند. ε می‌تواند از صفر تا $\varepsilon_{\max} = 2m^2 v_\infty^2 / m_2$ تغییر کند .

مسائل

مسئلهٔ ۱ـ مقطع مؤثر پراکندگی را در میدان $U=\frac{\alpha}{r^{2}}$ $(\alpha>0)$ حساب کنید.

حل: زاویهٔ انعکاس برابر است با:

$$\chi=\pi\left[1-\frac{1}{\sqrt{1+\frac{2\alpha}{m\rho^{2}v_{\infty}^{2}}}}\right]$$

مقطع مؤثر پراکندگی برابر است با:

$$d\sigma=\frac{2\pi^{2}\alpha}{mv_{\infty}^{2}}\cdot\frac{\pi-\chi}{\chi^{2}(2\pi-\chi)^{2}}\cdot\frac{d\omega}{\sin\chi}$$

مسئلهٔ ۲ـ مقطع مؤثر را در مورد تفرق در «چاه پتانسیل» کروی به شعاع a و عمق U_{0} حساب کنید (یعنی میدانی که در ازاء $r>a$ ، $U=0$ باشد و در ازاء $r<a$ ، $U=-U_{0}$).

حل: مسیر ذره که در ابتدا خط راستی بوده است، پس از ورود و خروج از چاه می‌شکنند. براساس محاسباتی که در مسئلهٔ بخش هفتم کردیم، زاویهٔ برخورد α و شکست β (شکل ۲۱) در رابطهٔ $n=\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}$ صدق‌میکنند که‌درآن $n=\sqrt{1+2U_{0}/mv_{\infty}^{2}}$ زاویهٔ‌انکساربرابراست با: $\chi=2(\alpha-\beta)$ و ازآنجا:

$$\frac{\sin\left(\alpha-\frac{1}{2}\chi\right)}{\sin\alpha}=\cos\frac{1}{2}\chi-\cot g\alpha\sin\frac{1}{2}\chi=\frac{1}{n}$$

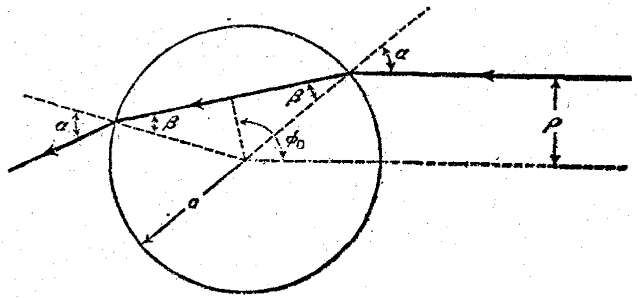
از رابطهٔ فوق و رابطهٔ $a\sin\alpha=\rho$ (مراجعه به شکل) α را حذف می‌کنیم؛ بستگی ρ و χ به دست می‌آید:

$$\rho^{2}=a^{2}\frac{n^{2}\sin^{2}\frac{1}{2}\chi}{n^{2}+1-2n\cos\frac{1}{2}\chi}$$

و سرانجام، با مشتق گرفتن، مقطع مؤثر به دست می‌آید:

$$d\sigma = \frac{a^2 n^2}{4\cos\frac{1}{2}\chi} \cdot \frac{(n\cos\frac{1}{2}\chi - 1)(n - \cos\frac{1}{2}\chi)}{(n^2 + 1 - 2n\cos\frac{1}{2}\chi)^2}\, d\omega$$

زاویه χ ازصفر ($\rho = 0$) تا χ_{max} ($\rho = a$) تغییرمی‌کندکه χ_{max} از رابطهٔ $\cos\frac{\chi_{max}}{2} = \frac{1}{n}$ تعیین می‌شود.



(شکل۲۱)

مقطع مؤثر کل با انتگرال گیری از $d\sigma$ روی‌تمام زوایای داخل مخروط $\chi < \chi_{max}$ بـه دست می‌آید که البته برابر مقطع هندسی کره یعنی πa^2 خواهد شد.

۲۰: پراکندگی در زاویهٔ کوچك

اگر برخورد را به‌گونه‌ای بینگاریم که پارامترهای برخورد بسیار بزرگ باشند، اثر میدان U ناچیز و زاویهٔ انعکاس کوچك خواهد گشت. در نتیجه، محاسبات تعیین مقطع مؤثر پراکندگی آسان و مختصر می‌شود و نیز به محاسبه‌هائی که برای انتقال از سیستم مرکز جرم به سیستم آزمایشگاهی لازم است، احتیاجی نداریم.

محور x را درامتداد مقدارحرکت‌اولیهٔ ذرهٔپراکنده‌شده m_1 و صفحهٔ xy را برصفحهٔ پراکندگی منطبق می‌گیریم. فرض‌کنید $\mathbf{p}'_1$ مقدار حرکت پس از تفرق باشد. واضح‌است

که $\sin\theta_1 = \frac{p'_{1y}}{p_1}$ (p'_{1y} تصویر p_1' بر محور yهاست) . برای انعکاس‌های کوچك می‌توان $\sin\theta_1$ را با θ_1 اشتباه کرد . و نیز می‌توان p_1' را تقریباً برابر مقدار حرکت اولیه انگاشت : $p_1' = m_1 v_\infty$.

$$\theta_1 \approx p'_{1y} / m_1 v_\infty \qquad (۲۰-۱)$$

چون $\dot{p}_y = F_y$ است مقدار حرکت کل که در امتداد محور y به ذره اضافه می‌شود برابر است با :

$$p'_{1y} = \int_{-\infty}^{\infty} F_y dt \qquad (۲۰-۲)$$

$$F_y = -\frac{\partial U}{\partial y} = -\frac{dU}{dr} \cdot \frac{\partial r}{\partial y} = -\frac{dU}{dr} \cdot \frac{y}{r}$$

چون اثر میدان U برانتگرال (۲-۲۰) ناچیز است ، می‌توان باهمان تقریب فرض کرد که در اصل ذره از مسیر اولیه‌اش منحرف نگشته ، بلکه در امتداد خط راست $y = \rho$ با سرعت یکنواخت v_∞ به حرکت خود ادامه می‌دهد . از این رو در انتگرال (۲-۲۰) قرار می‌دهیم :

$$F_y = -\frac{dU}{dr} \cdot \frac{\rho}{r} \quad \text{و} \quad dt = \frac{dx}{v_\infty}$$

در نتیجه :

$$p'_{1y} = -\frac{\rho}{v_\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dU}{dr} \cdot \frac{dx}{dr}$$

متغیر انتگرال را از x به r تغییرمی‌دهیم . درمورد خط راست $r^2 = x^2 + \rho^2$ وقتی x از $\infty +$ تا $\infty -$ تغییر کند ، r از ρ به بی‌نهایت می‌رود و باز می‌گردد . از این رو انتگرال روی dx از $\infty -$ تا $\infty +$ دوبرابر انتگرال روی dr از ρ تا بی‌نهایت است . داریم:

$$dx = \frac{r dr}{\sqrt{r^2 - \rho^2}}$$

ازآنجا زاویهٔ پراکندگی θ_1 با رابطهٔ زیر داده می‌شود :[1]

۱ــ اگر رابطهٔ فوق را در سیستم C محاسبه می کردیم عبارت حاصل برای χ مانند رابطهٔ (۳-۲۰) بود ، با این تفاوت که m_1 به m تبدیل می‌شد و این بدین دلیل است که برای زوایای کوچك رابطهٔ $\theta_1 = m_2\chi/m_1+m_2$ برقرار است . مراجعه کنید به (۴-۱۷) .

$$\theta_1 = -\frac{2\rho}{m_1 v_\infty^2}\int_\rho^\infty \frac{dU}{dr}\cdot\frac{dr}{\sqrt{r^2-\rho^2}} \qquad (۲۰-۳)$$

و این شکل تابع $\theta_1(\rho)$ در انعکاسهای کوچك است . اگر به جای χ مقدار θ_1 را در رابطهٔ (۱۸-۸) قرار دهیم ، مقطع مؤثر پراکندگی در سیستم L به دست می‌آید . در این رابطه $\sin\theta_1$ را با θ_1 برابر می‌گیریم :

$$d\sigma = \left|\frac{d\rho}{d\theta_1}\right| \frac{\rho(\theta_1)}{\theta_1}\, d\omega_1 \qquad (۲۰-۴)$$

مسائل

مسئلهٔ ۱ــ رابطهٔ (۲۰-۳) را از معادلهٔ (۱۸-۴) نتیجه بگیرید .

حل : برای پرهیز از خطاهای کاذب رابطهٔ (۱۸-۴) را به صورت زیر می‌نویسیم :

$$\varphi_0 = -\frac{\partial}{\partial\rho}\int_{r_{min}}^{R}\sqrt{1-\frac{\rho^2}{r^2}-\frac{2U}{mv_\infty^2}}\,dr$$

در اینجا حد بالای انتگرال را برابر R فرض کرده‌ایم که بعداً آنرا به سوی ∞ میل خواهیم داد . چون U کوچك است رادیکال را برحسب قوای U بسط می‌دهیم و به جای r_{min} مقدار تقریبی ρ را قرار می‌دهیم . در نتیجه :

$$\varphi_0 = \int_\rho^R \frac{\rho dr}{r^2\sqrt{1-\frac{\rho^2}{r^2}}} + \frac{\partial}{\partial\rho}\int_\rho^\infty \frac{U(r)dr}{mv_\infty^2\sqrt{1-\frac{\rho^2}{r^2}}}$$

انتگرال اولی وقتی $R\to\infty$ به سمت $\frac{\pi}{2}$ میل می‌کند . انتگرال دوم را به طریق جزء به جزء حل می‌کنیم :

$$\chi = \pi - 2\varphi_0 = 2\frac{\partial}{\partial\rho}\int_{\rho}^{\infty} \frac{\sqrt{r^2-\rho^2}}{mv_\infty^2} \cdot \frac{dU}{dr}\, dr =$$

$$= -\frac{2\rho}{mv_\infty^2}\int_{\rho}^{\infty} \frac{dU}{dr} \cdot \frac{dr}{\sqrt{r^2-\rho^2}}$$

که معادلست با رابطهٔ (۳ــ۲۰) .

مسئلهٔ ۴ــ مقطع مؤثر پراکندگی را در میدان $U = \frac{\alpha}{r^n}$ $(n>0)$ برای تفرقهای کوچك حساب کنید .

حل : از رابطهٔ (۳ــ۲۰) داریم :

$$\theta_1 = \frac{2\rho\alpha n}{m_1 v_\infty^2}\int_{\rho}^{\infty} \frac{dr}{r^{n+1}\sqrt{r^2-\rho^2}}$$

اگر قراردهیم: $u = \frac{\rho^2}{r^2}$ ، انتگرال فوق به تابع بتا تبدیل خواهد شد که می‌توان آنرا برحسب تابع گاما نمایش داد .

$$\theta_1 = \frac{2\alpha\sqrt{\pi}}{m_1 v_\infty^2 \rho^n} \cdot \frac{\Gamma(\frac{1}{2}n+\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{1}{2}n)}$$

ρ را برحسب θ_1 حساب می‌کنیم و در رابطهٔ (۴ــ۲۰) قرارمی‌دهیم ، به دست می‌آید :

$$d\sigma = \frac{1}{n}\left[\frac{2\sqrt{\pi}\,\Gamma(\frac{1}{2}n+\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{1}{2}n)} \cdot \frac{\alpha}{m_1 v_\infty^2}\right]^{\frac{2}{n}} \theta_1^{\left(-2-\frac{2}{n}\right)}\, d\omega_1$$

فصل پنجم

نوسانهای کوچک

۲۱ : نوسانهای کوچك یك بعدی آزاد

یکی از صور حرکت سیستمهای مکانیکی ، نوسانهای کوچکی است که سیستم حول یکی از مواضع تعادل پایدارش انجام می‌دهد . ابتدا باید ساده‌ترین حالت را مورد مطالعه قرار دهیم ، از این رو سیستمی را که تنها یك درجهٔ آزادی دارد مورد مطالعه قرار می‌دهیم .

تعادل پایدار موقعیتی است که انرژی پتانسیل $U(q)$ درآنجا مینیمم باشد. کوچکترین تغییر سیستم از این موضع نیرویی برابر $-\frac{\partial U}{\partial q}$ ایجاد می‌کند که آن را به موضع تعادل خود باز می‌گرداند . فرض کنید که q_0 مختصات عمومی نقطهٔ تعادل باشد . تفاضل $U(q)-U(q_0)$ را برحسب قوای $(q-q_0)$ بسط می‌دهیم و اولین‌جمله‌ای را که ضریب‌آن به‌ازاء $q=q_0$ صفر نشود ، درنظر می‌گیریم . درحالت‌کلی این‌جمله از رستهٔ دوم است .[1]

$$U(q)-U(q_0) \cong \frac{1}{2}k(q-q_0)^2$$

که k ضریب مثبتی است برابر $U''(q)$ به ازاء $q=q_0$. معمولاً انرژی پتانسیل مینیمم را صفر فرض می‌کنند ؛ یعنی $U(q_0)=0$. با در نظر گرفتن انحراف ذره از موضع تعادل

$$x=q-q_0 \qquad (۲۱-۱)$$

۱ــ زیرا دربسط تیلور جملهٔ دوم، یعنی‌جملهٔ رستهٔ اول ازمختصات، متناسب بامشتق‌تابع است و چون شرط تعادل آن‌است‌که $U'(q_0)=0$ باشد ، این جمله برابر صفر می‌شود . (م)

نتیجه می گیریم :

$$U(x)=\frac{1}{2}kx^2 \qquad (۲۱-۲)$$

انرژی جنبشی یك سیستم با یك درجه آزادی در حالت کلی به صورت :

$$\frac{1}{2}a(q)\dot{q}^2=\frac{1}{2}a(q)\dot{x}^2$$

نوشته می‌شود . با همان تقریبی که درمورد انرژی پتانسیل درنظر گرفتیم ، کافی است که به جای $a(q)$ مقدار آن را در $q=q_0$ درنظر بگیریم ویامختصراً $a(q_0)=m$[1]. ازآنجا تابع لاگرانژ سیستمی با نوسانهای کوچك به قرار زیر است[2] :

$$L=\frac{1}{2}m\dot{x}^2-\frac{1}{2}kx^2 \qquad (۲۱-۳)$$

معادلهٔ حرکت سیستم می‌شود :

$$m\ddot{x}+kx=0 \qquad (۲۱-۴)$$

یا :

$$\ddot{x}+\omega^2x=0 \qquad (۲۱-۵)$$

که درآن:

$$\omega=\sqrt{\frac{k}{m}} \qquad (۲۱-۶)$$

دوجواب مستقل معادلهٔ دیفرانسیل خطی (۲۱-۵)، $\cos\omega t$ و $\sin\omega t$ است . در این صورت جواب عمومی معادلهٔ فوق را به صورت زیر می‌توان نمایش داد :

$$x=c_1\cos\omega t+c_2\sin\omega t \qquad (۲۱-۷)$$

می‌توان عبارت فوق را به صورت دیگری نیز نوشت :

$$x=a\cos(\omega t+\alpha) \qquad (۲۱-۸)$$

که چون $\cos(\omega t+\alpha)=\cos\omega t\cos\alpha-\sin\omega t\sin\alpha$ ، از مقایسهٔ رابطهٔ (۲۱-۷) بستگی ثابتهای اختیاری c_1 و c_2، و a و α، نتیجه می‌شود :

$$a=\sqrt{c_1^2+c_2^2} \qquad tg\alpha=-\frac{c_2}{c_1} \qquad (۲۹-۹)$$

۱ـ باید توجه داشت که تنها در مختصات کارتزین m جرم است .

۲ـ چنین سیستمی را معمولاً نوسانگر یك‌بعدی می‌نامند .

پس سیستم در حول نقطهٔ تعادل خود ارتعاش یکنواختی دارد. ضریب a راکه درجملهٔ متناوب ضرب شده‌است (۸-۲۱) **دامنهٔ** نوسان و آرگومان کسینوس را فاز حرکت نامند. αفازاولیه است وآشکارا بستگی به مبدأ زمان دارد. ω بسامد زاویه‌ای نام داردکه درفیزیك اختصاراً بسامد گفته می‌شود و ما نیز آن را به همین نام می‌خوانیم.

بسامد یکی از اساسی‌ترین مشخصه‌های نوسان است‌که به شرایط اولیه وانتهائی سیستم بستگی ندارد و مطابق رابطهٔ (۶-۲۱) با معلوم بودن خواص مکانیکی سیستم کاملاً مشخص می‌شود. البته باید متذکر شدکه بستگی نداشتن بسامد به شرایط اولیه و انتهائی‌سیستم، بسته به این شرط است که نوسانها را کوچك بینگاریم و از تقریبات بالاتر صرف نظرکنیم و یا به زبان ریاضی، انرژی پتانسیل را فقط تابع درجه دومی ازمختصات درنظر بگیریم.[۱]

انرژی سیستمی‌که نوسانهای کوچکی می‌کنم برابر است با:

$$E=\frac{۱}{۲}m\dot{x}^{۲}+\frac{۱}{۲}kx^{۲}=\frac{۱}{۲}m(\dot{x}^{۲}+\omega^{۲}x^{۲})$$

از رابطهٔ (۸-۲۱) نتیجه می‌گیریم:

$$E=\frac{۱}{۲}m\omega^{۲}a^{۲} \qquad (۲۱-۱۰)$$

یعنی انرژی کل سیستم متناسب با مربع دامنهٔ نوسان است.

معمولاً در سیستمهایی‌که نوسانهای کوچکی دارند، رابطه زمانی مختصات به صورت زیر نشان داده می‌شود:

$$x=\mathbf{real}\left[Ae^{i\omega t}\right] \qquad (۲۱-۱۱)$$

که A عدد ثابت مختلطی است. با قراردادن:

$$A=ae^{i\alpha} \qquad (۲۱-۱۲)$$

رابطهٔ (۸-۲۱) نتیجه می‌شود. A را **دامنهٔ مختلط** سیستم نامندکه قدر مطلق آن همان دامنهٔ معمولی و آرگومان آن فاز اولیه است.

به‌کاربردن عامل‌نمائی در ریاضیات ساده‌تر ازتوابع مثلثاتی است زیرا با مشتق‌گیری شکل تابع تغییر نمی‌کند. چون اغلب عملیات جبری‌که معمولاً در این‌گونه مسائل به‌کار

۱- بنابراین اگر $U(x)$ در نقطهٔ $x=0$ مینیمی داشته باشدکه بالاتر ازدرجهٔ دواست، فرض نادرست است (یعنی اگر مثلا $U\sim x^{n}$ باشدکه $n>۲$؛ به‌بخش ۱۱ مسئلهٔ ۸-۲ مراجعه کنید).

می‌رود (جمع، ضرب درمقدار ثابت، مشتق گیری ، انتگرال گیری) خطی است ، می‌توانیم از نشانهٔ real صرف نظر کنیم و در پایان محاسبات علامت real را در نتیجهٔ مسئله منظور داریم .

مسائل

مسئلهٔ ۱ـ دامنه و فاز ابتدائی را برحسب مختصات اولیهٔ x_0 وسرعت اولیهٔ v_0 به دست آورید .

حل :

$$a=\sqrt{\dot{x}^2+\frac{v_0^2}{\omega^2}} \quad \text{و} \quad tg\alpha=-\frac{v_0}{\omega x_0}$$

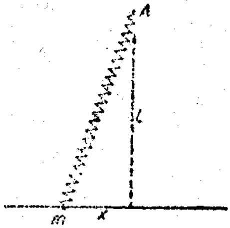
مسئلهٔ ۲ـ نسبت بسامدهای ω و ω' درنوسانهای دوملکول‌راکه هریك از دو اتم با ایزوتوپهای متفاوت تشکیل شده باشند حساب کنید . جرم اتمها در ملکول اول m_1 و m_2 و در ملکول دوم m'_1 و m'_2 است .

حل : چون در ملکولهای ایزوتوپ واکنشهای داخلی یکسان است ، پس $k=k'$. ضریب m درانرژی جنبشی ملکولها، جرم تعدیل‌یافته دوملکول است . به‌کمك رابطهٔ (۶ـ۲۱) نتیجه می‌شود :

$$\frac{\omega'}{\omega}=\sqrt{\frac{m_1m_2(m'_1+m'_2)}{m'_1m'_2(m_1+m_2)}}$$

مسئلهٔ ۳ـ ذره‌ای به جرم m به انتهای فنری‌که درنقطهٔ A ثابت است، متصل شده است و آزادانه در امتداد خطی ثابت نوسان می‌کند . بسامد آنرا به دست بیاورید . فاصلهٔ نقطهٔ A ازخط مزبور برابر l است و برای آنکه فنر به طول l انبساط بیابد باید نیرویی برابر F به‌آن اعمال شود .

حل : انرژی پتانسیل فنر برابر است با حاصلضرب F در انبساط δl (دربسط انرژی مزبور بزرگترین جمله درنظرگرفته می‌شود) . چون $x\ll l$ در نتیجه :



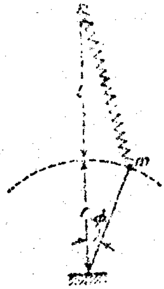
(شکل ۲۲)

$$\delta l=\sqrt{l^{2}+x^{2}}-l=\frac{x^{2}}{2l}$$

ازآنجا : $U=\frac{Fx^{2}}{2l}$ و انرژی جنبشی برابر است با $\frac{1}{2}m\dot{x}^{2}$. پس :

$$\omega=\sqrt{\frac{F}{ml}}$$

مسئلهٔ ۴ـ همان مسئلهٔ ۳ ، به شرطی که جرم m بردایره‌ای به شعاع r حرکت کند .



(شکل ۲۳)

حل : اگر $\varphi \ll 1$ باشد در اینصورت کشش فنر برابر است با :

$$\delta l=\sqrt{r^{2}+(l+r)^{2}-2r(l+r)\cos\varphi}-l\approx\frac{r(l+r)\varphi^{2}}{2l}$$

وانرژی جنبشی برابر است با : $T=\frac{1}{2}mr^{2}\dot{\varphi}^{2}$. ازآنجا بسامد مساوی‌است‌با:

$$\omega=\sqrt{\frac{F(r+l)}{mrl}}$$

مسئلهٔ ۵ـ بسامد نوسانهای آونگی که درشکل ۲ (بخش ۵) نشان داده

شده است را تعیین کنید . نقطهٔ اتکاء به جرم m_1 برخط افق حرکت می‌کند.

حل : اگر $\varphi \ll 1$ رابطه‌ای که درمسئلهٔ ۳ (بخش ۱۴) به دست‌آوردیم بدین صورت خلاصه می‌شود :

$$T=\frac{1}{2} m_1 m_2 l^2\dot{\varphi}^2/(m_1+m_2)$$

و

$$U=\frac{1}{2}m_2 gl\varphi^2$$

از آنجا :

$$\omega=\sqrt{\frac{g(m_1+m_2)}{m_1 l}}$$

مسئلهٔ ۶ـ ذره‌ای تحت اثر نیروی گرانشی نوسان می‌کند، به‌طوری‌که بسامد آن مستقل از دامنهٔ نوسان است . تعیین کنید ذره بر چه مسیری در حرکت است .

حل : در مسیری با شرایط فوق انرژی پتانسیل ذره برابر است با :

$U=\frac{1}{2}ks^2$ که s طول قوس‌منحنی مسیر از نقطهٔ تعادل‌است . انرژی جنبشی برابر است با: $T=\frac{1}{2}m\dot{s}^2$ ودرآن m جرم ذره‌است. شرایطاولیه هرچه باشد بسامد چنین است :

$$\omega=\sqrt{\frac{k}{m}}$$

درمیدان گرانشی $U=mgy$ که y مختصهٔ قائم است . داریم :

$\frac{1}{2}ks^2=mgy$ یا $y=\frac{\omega^2 s^2}{2g}$. اما $ds^2=dx^2+dy^2$ ، پس ازآنجا:

$$x=\int\sqrt{\left(\frac{ds}{dy}\right)^2-1}\,dy=\int\sqrt{\frac{g}{2\omega^2 y}-1}\,dy$$

با قرار دادن

$$y=g\frac{(1-\cos\xi)}{4\omega^2}$$

انتگرال به سادگی حل می‌شود :

$$x=g(\xi+\sin\xi)/4\omega^2$$

روابط y و x برحسب ξ معادلهٔ منحنی مسیر را که یك سیکلوئید است ، می‌دهد .

۲۲ : نوسانهای اجباری

اکنون نوسانهائی که تحت اثر نیروهای خارجی انجام می‌پذیرند ، مورد مطالعه قرار می‌دهیم . این نوسانها را اجباری خوانند وآنچه در بخش پیش ازآن سخن گفتیم، نوسانهای آزاد نام داشت . چون نوسانهای اجباری نیز کوچك فرض می‌شوند ، نیروی خارجی باید ضعیف باشد زیرا در غیر این صورت x مقادیر بزرگی را به خود خواهد گرفت .

سیستم مزبور علاوه‌بر انرژی پتانسیل $\frac{1}{2}kx^2$ انرژی پتانسیلی دیگرمانند $U_e(x, t)$ داردکه براثر اعمال‌نیروهای خارجی به وجود می‌آید . اگر این‌تابع را برحسب x بسط دهیم داریم :

$$U_e(x, t) \cong U_e(0, t) + x\left[\frac{\partial U_e}{\partial x}\right]_{x=0}$$

جملهٔ اول را که تنها تابعی از زمان است می‌توان به صورت دیفرانسیل کامل تابعی از زمان نوشت و از این روی می‌توان در محاسبهٔ تابع لاگرانژ ازآن چشم پوشید . در جملهٔ دوم، $-\left[\frac{\partial U_e}{\partial x}\right]_{x=0}$ برابر نیروی خارجی است‌که درنقطهٔ تعادل به سیستم واردآمده‌است . این نیرو تابعی است از زمان و ما آنرا با $F(t)$ نمایش می‌دهیم . پس انرژی پتانسیل شامل جملهٔ دیگری برابر $-xF(t)$ می‌شود . از آنجا تابع لاگرانژ به دست می‌آید :

$$L = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{1}{2}kx^2 + xF(t) \qquad (22\text{-}1)$$

معادلات حرکت می‌شوند : $m\ddot{x} + kx = F(t)$ یا :

$$\ddot{x} + \omega^2 x = \frac{F(t)}{m} \qquad (22\text{-}2)$$

که ω همان بسامدیست‌که در مورد نوسانهای آزاد به دست‌آوردیم . جواب‌کلی این معادلهٔ دیفرانسیلی خطی غیر همگن با ضرایب ثابت ، به صورت $x = x_0 + x_1$ است‌که x_0 جواب عمومی معادلهٔ همگن و x_1 جواب خصوصی معادلهٔ غیر همگن است . مقدار x_0 همان عبارتی است‌که در بخش ۲۱ در مورد نوسانهای آزاد به دست آوردیم .

اکنون حالت خاصی را که $F(t)$ خودتابع نوسانی‌ساده از زمان باشدمورد بررسی‌قرار می‌دهیم . γ بسامد نوسانهای $F(t)$ است:

$$F(t) = f\cos(\gamma t + \beta) \qquad (۲۲\text{–}۳)$$

فرض‌می‌کنیم که جواب خصوصی معادلهٔ دیفرانسیل (۲–۲۲) به صورت $x_1 = b\cos(\gamma t + \beta)$ باشد ، با قراردادن این مقدار در رابطهٔ (۲–۲۲) به دست می‌آید :

$$b = \frac{f}{m(\omega^2 - \gamma^2)}$$

با افزودن این جمله به جواب معادلهٔ همگن ، انتگرال عمومی معادلهٔ دیفرانسیل (۲–۲۲) به دست می‌آید :

$$x = a\cos(\omega t + \alpha) + \frac{f}{m(\omega^2 - \gamma^2)}\cos(\gamma t + \beta) \qquad (۲۲\text{–}۴)$$

a و α ثوابت دلخواهی هستندکه بادانستن شرایط اولیه مشخص می‌شوند .

پس سیستمی‌که تحت تأثیر نیروی متناوبی ارتعاش می‌کند ، ترکیبی از دو حرکت نوسانی خواهد داشت : یکی با بسامد طبیعی ω و دیگری با بسامد نیروی متناوب γ . وقتی تشدید روی می‌دهد ، یعنی وقتی بسامد نیروی خارجی γ برابر بسامد طبیعی ω سیستم است ، جواب عمومی (۴–۲۲) درست نیست . برای یافتن جواب عمومی معادلهٔ حرکت در این حالت ، معادلهٔ (۴–۲۲) را به صورت زیر می‌نویسیم :

$$x = a\cos(\omega t + \alpha) + \frac{f}{m(\omega^2 - \gamma^2)}[\cos(\gamma t + \beta) - \cos(\omega t + \beta)]$$

که در این‌جا a کمیت دیگری است . اگر $\gamma \to \omega$ جملهٔ دوم مبهم است (به صورت $\frac{0}{0}$). به‌کمك قانون هوپیتال رفع ابهام می‌کنیم :

$$x = a\cos(\omega t + \alpha) + \left(\frac{f}{2m\omega}\right) t\sin(\omega t + \beta) \qquad (۲۲\text{–}۵)$$

ملاحظه می‌کنیم‌که دامنهٔ نوسان به طورخطی افزایش می‌یابد (تاآنجاکه دامنهٔ نوسان آنقدر بزرگ شودکه فرضیهٔ کوچك بودن نوسانها نادرست شود) .

خوبست طبیعت نوسان را در نزدیکی تشدید مورد مطالعه قرار دهیم . در این حالت $\gamma = \omega + \varepsilon$ (ε مقدارکوچکی است) . جواب عمومی معادلهٔ دیفرانسیل رامی‌توان به‌صورت عبارت مختلطی نمایش داد :

$$x = Ae^{i\omega t} + Be^{i(\omega + \varepsilon)t} = (A + Be^{i\varepsilon t})\, e^{i\omega t} \qquad (۲۲\text{–}۶)$$

چون مقدار $A+Be^{i\varepsilon t}$ در هر دورهٔ تناوب $\frac{\pi}{\omega}$۲ عامل $e^{i\omega t}$ به‌آهستگی تغییر می‌کند ، می‌توان‌در نزدیکی‌تشدید دامنهٔ نوسان را (که‌آنرا C می‌نامیم)متغیرانگاشت[1]. ازآنجا داریم:

$$C = |A+Be^{i\varepsilon t}|$$

اگر A و B را به صورت $ae^{(i\alpha)}$ و $be^{(i\beta)}$ نمایش دهیم به دست می‌آید :

$$C^{2}=a^{2}+b^{2}+2ab\cos(\varepsilon t+\beta-\alpha) \qquad (۲۲-۷)$$

ملاحظه می‌شودکه دامنهٔ نوسان متناوباً با بسامد ε میان $|a-b| \leqslant C \leqslant a+b$ تغییر می‌کند . این پدیده را **ضربان** گویند .

اگر $F(t)$ دلخواه باشد ، می‌توان انتگرال معادلهٔ حرکت (۲-۲۲) را در حالت کلی به دست آورد . برای ساده‌تر شدن مسئله ، معادلهٔ حرکت را به صورت زیر نمایش می‌دهیم :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\dot{x}+i\omega x)-i\omega(\dot{x}+i\omega x)=\frac{1}{m}F(t)$$

یا :

$$\frac{\mathrm{d}\xi}{\mathrm{d}t}-i\omega\xi=\frac{F(t)}{m} \qquad (۲۲-۸)$$

که درآن

$$\xi=\dot{x}+i\omega x \qquad (۲۲-۹)$$

کمیت مختلطی است. رابطهٔ (۸-۲۲) معادلهٔ دیفرانسیلی رستهٔ اول است که جواب آن اگر طرف راست معادله صفر می‌بود ، برابر $\xi=Ae^{i\omega t}$ می‌شد؛ A مقداریست ثابت. مانند معمول جواب خصوصی معادلهٔ غیر همگن را برابر $\xi = A(t)e^{i\omega t}$ می‌انگاریم که $A(t)$ تابعی از زمان است . باقراردادن این مقدار در معادلهٔ دیفرانسیل به دست می‌آید :

$$\dot{A}(t)=\frac{F(t)}{m}e^{-i\omega t}$$

با انتگرال گیری جواب معادلهٔ (۹-۲۲) به دست می‌آید :

$$\xi=e^{i\omega t}\left\{\int_{0}^{t}\frac{1}{m}F(t)e^{-i\omega t}\mathrm{d}t+\xi_{0}\right\} \qquad (۲۲-۱۰)$$

۱ـ جملهٔ ثابت فاز نوسان نیز در این حالت متغیر است .

که ξ_0 مقدار ξ در زمان $t=0$ است . این رابطه جواب عمومی مسئله است و مقدار $x(t)$ برابر قسمت موهومی رابطهٔ (۱۰–۲۲) تقسیم بر ω[1] است .

طبیعتاً انرژی سیستمی که نوسانهای اجباری می کند ، ثابت باقی نمی‌ماند زیرا سیستم از یك منبع میدان خارجی انرژی کسب می کند . اکنون می‌خواهیم انرژی منتقل شده به سیستم را در مدت نوسان محاسبه کنیم . فرض می‌شود که انرژی اولیهٔ سیستم در موضع تعادل صفر باشد . دررابطهٔ (۱۰–۲۲) حد پائین انتگرال رابجای صفر، $-\infty$ قرارداده و t را به سمت بی‌نهایت میل می‌دهیم . می‌دانیم $\xi(-\infty)=0$ ، در نتیجه وقتی $t\to\infty$ داریم :

$$|\xi(\infty)|^2=\frac{1}{m^2}\left|\int_{-\infty}^{+\infty} F(t)e^{-i\omega t}\mathrm{d}t\right|^2$$

انرژی سیستم برابر است با :

$$E=\frac{1}{2}m(\dot{x}^2+\omega^2x^2)=\frac{1}{2}m|\xi|^2 \qquad (۲۲\text{–}۱۱)$$

با قراردادن مقدار $|\xi(\infty)|^2$ در رابطهٔ (۱۱–۲۲) ، انرژی منتقل شده به دست می‌آید :

$$E=\frac{1}{2m}\left|\int_{-\infty}^{+\infty}F(t)e^{-i\omega t}\mathrm{d}t\right|^2 \qquad (۲۲\text{–}۱۲)$$

که با مربع کردن قدر مطلق مؤلفهٔ فوریهٔ نیروی $F(t)$ با بسامدی مساوی بسامد طبیعی سیستم ، معین‌می‌شود .

در حالت خاص ، چنانچه نیروی خارجی در مقایسه با $\frac{1}{\omega}$ درزمان کوتاهی به سیستم اثر گذارد، می‌توان فرض کرد که $e^{-i\omega t}\cong 1$. از آنجا :

$$E=\frac{1}{2m}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} F(t)\mathrm{d}t\right)^2$$

این‌نتیجه واضح می‌نماید زیرا درحقیقت گویای این‌مطلب است که‌نیروی آنی به سیستم مقدار حرکتی برابر $\int F\mathrm{d}t$ می‌دهد بدون آنکه سیستم تغییرمکان محسوسی پیدا کرده باشد .

۱ـ واضح است که $F(t)$ باید به صورت حقیقی نوشته شود .

مسائل

مسئلهٔ ۱ــ نیروی $F(t)$ به‌اشکال زیر برسیستمی اعمال شده‌است . اگر سیستم در زمان $t=0$ درموضع تعادل و درحالت سکون‌باشد ($x=\dot{x}=0$) ، نوسانهای‌اجباری آنرا تعیین کنید:(الف) $F=F_0$ که F_0 مقداریست‌ثابت، (ب) $F=at$ ، (ج) $F=F_0e^{-\alpha t}$ ، (د) $F=F_0e^{-\alpha t}\cos\beta t$.

حل: (الف) واکنش سیستم دربرابر نیروییِ‌ثابت، تنها تغییر مکان موضع تعادل به مکان دیگریست که نوسانها در حول آن انجام خواهد گرفت .

(الف)
$$x=\left(\frac{F_0}{m\omega^2}\right)(1-\cos\omega t)$$

(ب)
$$x=\left(\frac{a}{m\omega^3}\right)(\omega t-\sin\omega t)$$

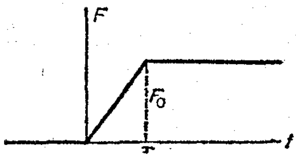
(ج)
$$x=\frac{F_0}{m(\omega^2+\alpha^2)}\left(e^{-\alpha t}-\cos\omega t+\frac{\alpha\sin\omega t}{\omega}\right)$$

(د)
$$x=\frac{F_0}{m[(\omega^2+\alpha^2-\beta^2)^2+4\alpha^2\beta^2]}\Big\{-(\omega^2+\alpha^2-\beta^2)\cos\omega t+$$
$$+\frac{\alpha}{\omega}(\omega^2+\alpha^2+\beta^2)\sin\omega t+e^{-\alpha t}[(\omega^2+\alpha^2-\beta^2)\cos\beta t-$$
$$-2\alpha\beta\sin\beta]\Big\}$$

در حالت اخیر بهتر است که نیرو را به صورت کمیتی مختلط نمایش دهیم :

$$F=F_0e^{(-\alpha+i\beta)t}$$

مسئلهٔ ۲ــ دامنهٔ نوسانهای سیستمی‌که تحت اثرنیرویی متغیر به شرح زیر قرارگرفته است را حساب کنید . در زمان $t<0$ نیرو برابر صفر و در زمان $0<t<T$ نیرو برابر $\frac{F_0t}{T}$ و در زمان $t>T$ نیرو برابر F_0 است . فرض می‌شود که سیستم در زمان $t=0$ در موضع تعادل خود ساکن است (شکل ۲۴) .



(شکل ۲۴)

حل : با درنظر گرفتن شرایط اولیه ، درفاصلهٔ $0<t<T$ نوسانهای سیستم بدین‌صورت است :

$$x=\left(\frac{F_0}{mT\omega^3}\right)(\omega t-\sin\omega t)$$

و در زمان $t>T$:

$$x=C_1\cos\omega(t-T)+C_2\sin\omega(t-T)+\frac{F_0}{m\omega^2}$$

از پیوستگی x و $\dot{x}$ در $t=T$ نتیجه می‌شود که:

$$\begin{cases} C_1=\dfrac{-F_0}{mT\omega^3}\sin\omega T \\ C_2=\left(\dfrac{F_0}{mT\omega^3}\right)\left(1-\cos\omega T\right) \end{cases}$$

دامنهٔ نوسان برابر است با :

$$a=\sqrt{C_1^2+C_2^2}=\frac{2F_0}{mT\omega^3}\sin\frac{\omega T}{2}$$

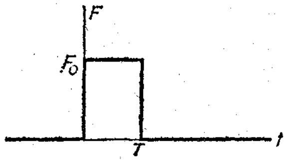
یعنی هرچه T بزرگتر باشد و نیرو آهسته‌تر اثر کند ، دامنهٔ نوسان کوچکتر است .

مسئلهٔ ۳ـ نظیر مسئلهٔ دوم ، اگر نیروی ثابت F_0 در زمان محدود T عمل کند (شکل ۲۵) .

حل : مانند مسئلهٔ ۲ ، یا ساده‌تر بااستفاده از رابطهٔ (۱۰ـ۲۲) مسئله را حل می‌کنیم . در زمان $t>T$ سیستم نوسانهای آزادی درحول نقطهٔ $x=0$ دارد . داریم :

$$\xi=\frac{F_0}{m}e^{i\omega t}\int_0^T e^{-i\omega t}dt=$$

$$=\left(\frac{F_{\circ}}{i\omega m}\right)\left[1-e^{-i\omega T}\right]e^{i\omega t}$$

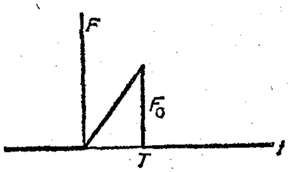


(شکل ۲۵)

بامربع کردن قدرمطلق ξ، دامنهٔ نوسان از رابطهٔ $|\xi|^2=a^2\omega^2$ به دست می‌آید.

ازآنجا :
$$a=\frac{2F_{\circ}}{m\omega^2}\sin\frac{\omega T}{2}$$

مسئلهٔ ۴ــ مسئلهٔ ۲ـ اگر نیروی $\frac{F_{\circ}t}{T}$ در فاصلهٔ $t=\circ$ و $t=T$ اثر کند (شکل ۲۶) .

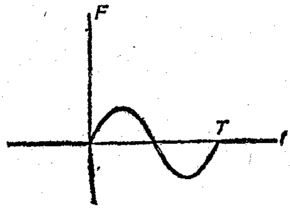


(شکل ۲۶)

حل : به همان روش مسائل گذشته به دست می‌آید :

$$a=\frac{F_{\circ}}{Tm\omega^3}\sqrt{\omega^2T^2-2\omega T\sin\omega T+2(1-\cos\omega T)}$$

مسئلهٔ ۵ــ نظیر مسئلهٔ دوم ، اگر $F_{\circ}\sin\omega t$ درفاصلهٔ زمانی $t=\circ$ تا $t=\frac{2\pi}{\omega}$ اثر کند (شکل ۲۷) .



(شکل ۲۷)

حل : با جایگزین کردن $F(t)=F_{\circ}\sin\omega t=\frac{F_{\circ}(e^{i\omega t}-e^{-i\omega t})}{2i}$

در رابطهٔ (۱۰-۲۲) و انتگرال گیری از صفر تا T به دست می‌آید :

$$a=\frac{F_{\circ}\pi}{m\omega^{2}}$$

۲۳ : نوسان سیستمهایی که بیش از یك درجهٔ آزادی دارند

تئوری نوسانهای آزاد با s درجهٔ آزادی کاملاً متشابه با حالتی است که دربخش ۲۱ وقتی $s=1$ بود ، ازآن بحث شد .

در این‌حالت انرژی پتانسیل U را تابعی از مختصات عمومی $q_i(i=1, 2, \ldots, s)$ فرض می کنیم به طوری که در ازاء $q_i=q_i(\circ)$ مینیممی داشته باشد . اگر

$$x_i=q_i-q_i(\circ) \qquad (۲۳-۱)$$

تغییرمکان کوچك سیستم ازموضع تعادل باشد و U را برحسب x_i تاجملهٔ رستهٔ دوم بسط دهیم، انرژی پتانسیل به شکل تابع درجهٔ دوم مثبتی نوشته خواهد شد :

$$U=\frac{1}{2}\sum_{i,k}k_{ik}x_ix_k \qquad (۲۳-۲)$$

در اینجا نیز انرژی پتانسیل مینیمم صفر فرض شده است . واضح است که چون ضرایب k_{ik} و k_{ki} درکمیت متشابهی‌نظیر x_ix_k ضرب می‌شوند (۲-۲۳)، می‌توان‌آنها را همیشه مساوی دانست :

$$k_{ik}=k_{ki}$$

در حالت کلی انرژی جنبشی به صورت $\frac{1}{2}\sum a_{ik}(q)\,\dot{q}_i\,\dot{q}_k$ نوشته‌می‌شود(۵-۵). اگر فرض کنیم $q_i=q_i(\circ)$ و آنرا در ضرایب a_{ik} قرار داده و به اختصار $a_{ik}(q_{\circ})$ را به صورت m_{ik} نشان دهیم، انرژی جنبشی نیز به صورت‌تابع درجهٔ دوم مثبتی به دست خواهد آمد :

$$\frac{1}{2}\sum_{i,k}m_{ik}\dot{x}_i\dot{x}_k \qquad (۲۳-۳)$$

ضریب m_{ik} را نیزمی‌توان همیشه متقارن‌دانست . از این‌رو تابع لاگرانژسیستمی که‌آزادانه نوسان می کند ، برابر است با :

$$L = \frac{1}{2}\sum_{i,k}(m_{ik}\dot{x}_i \dot{x}^k - k_{ik}x_i x_k) \qquad (۲۲\text{–}۴)$$

حال معادلات حرکت را به دست می‌آوریم . برای‌این‌کارمشتقهای نسبی‌تابع لاگرانژ را از روی دیفرانسیل‌کامل آن محاسبه می‌کنیم :

$$\mathrm{d}L = \frac{1}{2}\sum_{i,k}(m_{ik}\dot{x}_i\mathrm{d}\dot{x}_k + m_{ik}\dot{x}_k\mathrm{d}\dot{x}_i - k_{ik}x_i\mathrm{d}x_k - k_{ik}x_k\mathrm{d}x_i)$$

واضح است‌که چون مقدار مجموعه ، مستقل از نام اندیس است ، می‌توان درجملهٔ اول وسوم جای i و k را باهم عوض‌کرد . با استفاده از تقارن k_{ik} و m_{ik} نتیجه می‌شود :

$$\mathrm{d}L = \sum(m_{ik}\dot{x}_k\mathrm{d}\dot{x}_i - k_{ik}x_k\mathrm{d}x_i)$$

ازآنجا :

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = \sum_k m_{ik}\dot{x}_k \quad \text{و} \quad \frac{\partial L}{\partial x_i} = -\sum_k k_{ik}x_k$$

و معادلات لاگرانژ چنین می‌شوند :

$$\sum_k m_{ik}\ddot{x}_k + \sum_k k_{ik}x_k = ۰ \quad (i = ۱ \text{ و } ۲ \text{ و } \dots \text{ و } s) \qquad (۲۳\text{–}۵)$$

که s معادلهٔ دیفرانسیل‌خطی‌همگن باضرایب‌ثابت‌است .

مانند معمول برای حل این معادلات ، تابع مجهول $x_k(t)$ را به صورت

$$x_k = A_k e^{i\omega t} \qquad (۲۳\text{–}۶)$$

درنظر می‌گیریم ، A_k ضریب ثابتی است‌که باید به دست بیاید . با قراردادن (۶–۲۳) در معادلات (۵–۲۳) و حذف $e^{i\omega t}$ ، یك سری معادلات جبری خطی وهمگن به دست می‌آیند که ضرایب A_k را معین می‌کنند :

$$\sum_k(-\omega^۲ m_{ik} + k_{ik})A_k = ۰ \qquad (۲۳\text{–}۷)$$

اگر سیستم جواب صفر نداشته باشد ، باید دترمینان ضرایب صفر شود :

$$|\, k_{ik} - \omega^۲ m_{ik} \,| = ۰ \qquad (۲۳\text{–}۸)$$

رابطهٔ بالا که از درجهٔ s نسبت به $\omega^۲$ است ، معادلهٔ مشخصهٔ سیستم نام دارد و درحالت کلی دارای s ریشهٔ متفاوت مثبت و حقیقی $\omega_\alpha^۲(\alpha = ۱ \text{ و } ۲ \text{ و } \dots \text{ و } s)$ است (در حالت خاص بعضی از ریشه‌های آن بر هم منطبق می‌باشند) . کمیت ω_α بسامد مشخصهٔ یا بسامد طبیعی سیستم نامیده می‌شود .

در بحث مفیدی به سادگی می‌توان در فیزیك ثابت کرد که ریشه‌های معادلهٔ (۸ـ۲۳) مثبت و حقیقی‌اند . وجود قسمت موهومی در ω بدان معنی است که مختصات x_k و همچنین سرعت $\dot{x}_k$ در یك عامل نمائی که مرتباً کاهش یا افزایش می‌یابد ، ضرب شده‌است (۶ـ۲۳). البته این عامل غیر قابل قبول است زیرا در این صورت باعث می‌شود که انرژی کل نسبت به زمان تغییر یابد $(E=U+T)$ ؛ یعنی نقض اصل بقای انرژی .

همین نتیجه را به روش ریاضی نیز می‌توان ثابت کرد . با ضرب کردن معادلهٔ (۷ـ۲۳) در مزدوج A_i ، یعنی $A_i{}^*$ و جمع بستن روی i به دست می‌آید :

$$\sum_{i,k}(-\omega^2 m_{ik}+k_{ik})\, A_i{}^* A_k=0$$

و ازآنجا :

$$\omega^2=\frac{\sum k_{ik}A_i{}^*A_k}{\sum m_{ik}A_i{}^*A_k}$$

صورت و مخرج کسر که توابع درجهٔ دومی هستند حقیقیند چه k_{ik} و m_{ik} حقیقی و متقارن می‌باشند :[1]

$$\sum (k_{ik}\, A_i{}^* A_k)^* = \sum k_{ik}\, A_i A_k{}^* = \sum k_{ki}\, A_i A_k{}^* = \sum k_{ik}\, A_k A_i{}^*$$

علاوه براین کمیات مزبور مثبتند و ازآنجا ω^2 مقداریست مثبت[2].

بسامدهای ω_α رادرمعادلات (۷ـ۲۳) قرارمی‌دهیم وضرایب A_k را محاسبه می‌کنیم . اگر همهٔ ریشه‌های ω_α درمعادلهٔ مشخصه متفاوت باشند، درازاء هرمقدار $\omega=\omega_\alpha$ ضرایب A_k با مینورهای دترمینان (۸ـ۲۳) متناسب است . این مینورها را $\Delta_{k\alpha}$ می‌نامیم . یکی از جوابهای خصوصی معادلات دیفرانسیل (۵ـ۲۳) برابر است با : $x_k=\Delta_{k\alpha}\, C_\alpha e^{i\omega_\alpha t}$ که C_α ضریب ثابت مختلطی است . جواب عمومی برابر مجموع s جواب خصوصی است .

۱ـ دربحث فوق ثابت می‌شود که مزدوج ω^2 برابر خود ω^2 است و این بدان معنی است که ω^2 کمیتی حقیقی است . (م)

۲ـ این حقیقت که کمیات درجهٔ دوم باضرایب k_{ik} همیشه مقدار مثبتی می‌باشند ، از تعریف (۲ـ۲۳) نتیجه می‌شود . اگر کمیت مختلط A_k به صورت (a_i+ib_k) نوشته شود ، با استفاده‌ازتقارن k_{ik} نتیجه می‌گیریم :

$$\Sigma k_{ik}\, A_i{}^* A_k=\Sigma k_{ik}(a_i-ib_i)(a_k+ib_k)=\Sigma k_{ik}a_i a_k+\Sigma k_{ik}b_i b_k$$

که مجموع دوجملهٔ مثبت است .

با به دست آوردن قسمت حقیقی آن نتیجه می‌شود .

$$x_k = \mathbf{real} \sum_{\alpha=1}^{s} \Delta_{k\alpha} C_\alpha e^{i\omega_\alpha t} \equiv \sum_\alpha \Delta_{k\alpha}\Theta_\alpha \qquad (۲۳-۹)$$

که درآن :

$$\Theta_\alpha = \mathbf{real}\,[C_\alpha e^{i\omega_\alpha t}] \qquad (۲۳-۱۰)$$

ملاحظه می‌شود که هر یك از مختصات ، حرکت مرکبی از s نوسان سادهٔ Θ_s و ... و Θ_2 و Θ_1 دارند که دامنه و فاز آنها دلخواه ، اما بسامدشان مشخص است .

طبیعتاً این سؤال پیش می‌آید که آیا می‌توان مختصات عمومی را طوری برگزید که هر یك از مختصات تنها یك نوسان ساده داشته باشند . انتگرال معادلات دیفرانسیل در شکل کلی (۲۳-۹) راهنمای این سؤال است . اگر فرض کنیم s معادلهٔ (۲۳-۹) یك دستگاه معادلهٔ s مجهولی از Θ_α باشد و Θ_s و ... و Θ_2 و Θ_1 را برحسب مختصات x_s و ... و x_2 و x_1 محاسبه کنیم ، کمیات Θ_α مختصات عمومی جدیدی را تعریف می‌کنند که مختصات طبیعی سیستم نام دارند و نوسانهای سادهٔ این مختصات را نوسانهای طبیعی سیستم گویند .

از تعریف مختصات عمومی Θ_α نتیجه می‌شود :

$$\ddot{\Theta}_\alpha + \omega_\alpha^2 \Theta_\alpha = 0 \qquad (۲۳-۱۱)$$

یعنی درمختصات طبیعی، معادلات حرکت سیستم s معادلهٔ مستقل است. شتاب هریك ازمختصات تنها به همان مختصه بستگی دارد و رابطهٔ زمانی آن نیز با داشتن شرایط اولیهٔ مختصات و سرعت آن کاملاً مشخص می‌شود . به عبارت دیگر مختصات طبیعی سیستم کاملاً مستقل از یکدیگرند .

واضح است که تابع لاگرانژ سیستم در مختصات طبیعی برابر است با مجموع توابع لاگرانژ هریك ازمختصات که برای نوسانهای یك‌بعدی نوشته شده‌اند ؛ یعنی :

$$L = \sum_\alpha \frac{1}{2} m_\alpha (\dot{\Theta}_\alpha^2 - \omega_\alpha^2 \Theta_\alpha^2) \qquad (۲۳-۱۲)$$

که درآن m_α ضریب ثابت و مثبتی است . در زبان ریاضی تبدیل (۲۳-۹) بدین‌معنی‌است که هردو کمیت درجهٔ دوم انرژی جنبشی (۲۳-۳) و انرژی‌پتانسیل (۲۳-۲) را به صورت قطری نمایش دهیم .[1]

۱- منظور قطری کردن ماتریس کوادراتیك است . (م)

معمولاً مختصات طبیعی را طوری انتخاب می‌کنند که در تابع لاگرانژ ، ضرایب مربعات سرعتها برابر $\frac{۱}{۲}$ شود . این‌کار با مختصات جدیدی به صورت

$$Q_\alpha = \sqrt{m_\alpha}\Theta_\alpha \qquad (۲۳-۱۳)$$

امکان‌پذیر است و از آنجا :

$$L = \frac{۱}{۲}\sum_\alpha(\dot{Q}_\alpha{}^۲ - \omega_\alpha{}^۲ Q_\alpha{}^۲)$$

چنانچه بعضی از ریشه‌های معادلهٔ مشخصه با هم برابر شوند ، لازم است که در بحث فوق تغییر کوچکی داده شود. شکل عمومی معادلات انتگرال حرکت (۹-۲۳) و (۱۰-۲۳) تغییری نمی‌کنند و دارای همان s جمله خواهند بود ؛ با این تفاوت‌که ضرایب $\Delta_{k\alpha}$ که مربوط به ریشه‌های مکرر معادلهٔ مشخصه‌اند ، دیگر مینورهای دترمینان (۸-۲۳) (که در این حالت صفر می‌شوند) نیستند .[۱]

هر بسامد مکررمربوط به p مختصات طبیعی‌سیستم است (که p تعداد دفعات تکرارآن بسامد می‌باشد)، ولی انتخاب این مختصات منحصربفردنیست . مختصات طبیعی با بسامدهای مساوی ω_α در عبارت انرژی پتانسیل و جنبشی به صورت مجموع $\sum Q_\alpha{}^۲$ و $\sum \dot{Q}_\alpha{}^۲$ ظاهر می‌شوند . این مختصات به همان روشی‌که ذکر شد ، به دست می‌آیند و می‌توان‌آنها را به هرصورت خطی دلخواهی تبدیل‌کرد ؛ به شرطی‌که فرم مربعی این مجموعه‌هاتغییری نکنند .

می‌توان مختصات طبیعی رابه‌سادگی درموردنوسانهای ذره‌ای مجرد درمیدان خارجی ثابت‌به‌کار برد. مبدأ مختصات را درنقطه‌ای‌فرض می‌کنیم‌که انرژی پتانسیل $U(x$ و y و $z)$ مینیمم باشد . انرژی جنبشی $T = \frac{۱}{۲}m(\dot{x}^۲ + \dot{y}^۲ + \dot{z}^۲)$ (m جرم ذره است) ، بستگی به طرز انتخاب امتداد محورهای مختصات ندارد و تنها باید انرژی پتانسیل را که تابعی درجه دوم از x و y و z است ، به صورت قطری درآوریم . برای این‌کار باید محورهای مختصات مناسبی انتخاب کرد و از آنجا :

$$L = \frac{m}{۲}(\dot{x}^۲ + \dot{y}^۲ + \dot{z}^۲) - \frac{۱}{۲}(k_۱ x^۲ + k_۲ y^۲ + k_۳ z^۲) \qquad (۲۳-۱۴)$$

۱ـ وجود جمله‌هائی درانتگرال حرکت‌که ضرایبی از زمان به‌صورت تابعی‌نمائی داشته باشند ، مانند بحث پیش، دربارهٔ حقیقی بودن بسامدها که منجر به نقض بقای انرژی می‌شد ، امکان‌پذیر نیست .

مختصات طبیعی سیستم ، در امتداد محورهای x و y و z ، با بسامدهائی برابر $\omega_1=\sqrt{\frac{k_1}{m}}$ و $\omega_2=\sqrt{\frac{k_2}{m}}$ و $\omega_3=\sqrt{\frac{k_3}{m}}$ نوسان می‌کنند . درحالت خاص ، در میدان مرکزی ($U=\frac{1}{2}kr^2$ و $k_1=k_2=k_3\equiv k$) هرسه بسامد با هم برابرند (مسئلهٔ ۳ را نگاه کنید) .

با به‌کاربردن مختصات طبیعی می‌توان مسئلهٔ نوسانهای اجباری سیستمی راکه بیش‌از یك درجهٔ آزادی دارد به یك دسته نوسانهای اجباری یك‌بعدی تجزیه کرد . تابع لاگرانژ سیستمی‌که نیروی خارجی متغیری برآن اثر می‌کند ، چنین است :

$$L=L_0+\sum_k F_k(t)x_k \tag{۲۳-۱۵}$$

L_0 تابع لاگرانژ سیستمی است که نوسانهای آزادی دارد . اگر به جای x_k ازمختصات طبیعی استفاده شود ، داریم :

$$L=\frac{1}{2}\sum_\alpha(\dot{Q}_\alpha^2-\omega_\alpha^2Q_\alpha^2)+\sum_\alpha f_\alpha(t)Q_\alpha \tag{۲۳-۱۶}$$

که درآنجا :

$$f_\alpha(t)=\sum_k F_k(t)\Delta_{k\alpha}/\sqrt{m_\alpha}$$

ومعادلات حرکت چنین می‌شوند :

$$\ddot{Q}_\alpha+\omega^2_\alpha Q_\alpha=f_\alpha(t) \tag{۲۳-۱۷}$$

هریك از معادلات فوق تنها شامل یك مجهول $Q_\alpha(t)$ است .

مسائل

مسئلهٔ ۱ـ نوسانهای سیستمی‌راکه دودرجهٔ‌آزادی دارد وتابع لاگرانژ آن چنین است :

$$L=\frac{1}{2}(\dot{x}^2+\dot{y}^2)-\frac{1}{2}\omega_0^2(x^2+y^2)+\alpha xy$$

به دست‌آورید (دوسیستم‌یك‌بعدی متشابه با بسامدهای‌مساوی ω_0 که باعکس‌العمل

متقابل داخلی $-\alpha xy$ به هم متصل شده‌اند) .

حل : معادلات حرکت را می‌نویسیم :

$$\ddot{x}+\omega_0^2 x=\alpha y \quad \text{و} \quad \ddot{y}+\omega_0^2 y=\alpha x$$

با قراردادن معادلات فوق در رابطهٔ (۶ـ۲۳) نتیجه می‌شود :

$$A_x(\omega_0^2-\omega^2)=\alpha A_y \quad \text{و} \quad A_y=(\omega_0^2-\omega^2)=\alpha A_x \qquad (1)$$

معادلهٔ مشخصهٔ چنین $(\omega_0^2-\omega^2)^2=\alpha^2$ است و از آنجا :

$$\omega_1^2=\omega_0^2-\alpha \quad \text{و} \quad \omega_2^2=\omega_0^2+\alpha$$

در ازاء $\omega=\omega_1$ ازمعادلهٔ (۱) به‌دست می‌آید : $A_x=A_y$ و درازاء $\omega=\omega_2$. $A_x=-A_y$. پس :

$$x=(Q_1+Q_2)/\sqrt{2} \quad \text{و} \quad y=(Q_1-Q_2)/\sqrt{2}$$

ضریب $\frac{1}{\sqrt{2}}$ از طبیعی‌شدن مختصات به دست آمده است (۱۳ـ۲۳).

بازاء $\alpha\ll\omega_0^2$ (ارتباط ضعیف) داریم :

$$\omega_1\cong\omega_0-\frac{1}{2}\alpha \quad \text{و} \quad \omega_2\cong\omega_0+\frac{1}{2}\alpha$$

در این مورد تغییرات x و y به صورت جمع دونوسان با بسامدهای تقریباً مساوی است ؛ یعنی با فرکانس ضربان $\omega_2-\omega_1=\alpha$ (به بخش ۲۲ مراجعه شود) . دامنهٔ y وقتی مینیمم است که x ماکزیمم باشد و بالعکس .

مسئلهٔ ۲ـ نوسانهای کوچك آونگ دوتایی واقع در یك صفحه را محاسبه کنید .

حل : در بخش‌پنجم مسئلهٔ۱ ، برای‌نوسانهای کوچك ($\varphi_1\ll 1$ و $\varphi_2\ll 1$) تابع لاگرانژ سیستم را حساب‌کردیم :

$$L=\frac{1}{2}(m_1+m_2)l_1^2\dot{\varphi}_1^2+\frac{1}{2}m_2l_2^2\dot{\varphi}_2^2+m_2l_1l_2\dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2-$$
$$-\frac{1}{2}(m_1+m_2)gl_1\varphi_1^2-\frac{1}{2}m_2gl_2\varphi_2^2$$

ازآنجا معادلات حرکت به دست می‌آیند :

$$(m_1+m_2)l_1\ddot{\varphi}_1+m_2l_2\ddot{\varphi}_2+(m_1+m_2)g\varphi_1=0$$

و

$$l_1\ddot{\varphi}_1+l_2\ddot{\varphi}_2+g\varphi_2=0$$

با قراردادن در رابطهٔ (۶ـ۲۳) به دست می‌آید :

$$A_1(m_1+m_2)(g-l_1\omega^2)-A_2\omega^2 m_2 l_2=0$$

و

$$-A_1 l_1\omega^2+A_2(g-l_2\omega^2)=0$$

و ریشه‌های معادلهٔ مشخصه برابرند با :

$$\omega_{1,2}^2=\frac{g}{2m_1l_1l_2}\left\{(m_1+m_2)(l_1+l_2)\pm\sqrt{m_1+m_2}\times\right.$$
$$\left.\times\sqrt{[(m_1+m_2)(l_1+l_2)^2-4m_1l_1l_2]}\right\}$$

درحالت خاص وقتی $m_1\to\infty$ بسامدهای سیستم به‌سمت $\sqrt{\frac{g}{l_1}}$ و $\sqrt{\frac{g}{l_2}}$ میل خواهندکرد . این دو، بسامد دوآونگ مستقل ازهم و ساده است .

مسئلهٔ ۳ـ مسیر ذره‌ای را در میدان مرکزی $U=\frac{1}{2}kr^2$ (فضای نوسانگر) به دست آورید .

حل : همانطور که می‌دانیم، در هرمیدان مرکزی، مسیر حرکت دریك صفحه (مثلاً xy) قرار دارد . هریك از مختصات x و y نوسانهای کوچکی دارند (با بسامدهای $\omega=\sqrt{\frac{k}{m}}$) :

$$x=a\cos(\omega t+\alpha) \quad \text{و} \quad y=b\cos(\omega t+\beta)$$

یا :

$$x=a\cos\varphi \quad \text{و} \quad y=b\cos(\varphi+\delta)=b\cos\delta\cos\varphi-b\sin\delta\sin\varphi$$

که درآن : $\varphi=\omega t+\alpha$ و $\delta=\beta-\alpha$. با محاسبهٔ $\sin\varphi$ و $\cos\varphi$ و قراردادن مجموع مربعات آنها برابر واحد ، معادلهٔ مسیر به دست می‌آید :

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{2xy}{ab}\cos\delta=\sin^2\delta$$

و این معادلهٔ یك بیضی است که مرکزش در مبدأ مختصات قرار دارد[1]. وقتی $\delta=0$ و یا $\delta=\pi$ باشد مسیر به پاره‌خط مستقیمی تبدیل خواهد شد .

۱ـ این‌حقیقت‌راکه مسیر درمیدان مرکزی $U=\frac{1}{2}kr^2$ بسته است ، در بخش چهارم ثابت‌کرده‌ایم .

۲۴: نوسان ملکولها

اگر سیستمی داشته باشیم که ذرات آن برهمدیگر اثر گذارند ، ولی تحت اثر هیچ میدان خارجی قرار نگرفته باشد ، واضح است که همهٔ درجات آزادی سیستم مربوط به نوسانهای ذرات آن نیست . مثال واقعی چنین سیستمی ، ملکولها هستند، که علاوه بر حرکات نوسانی اتمها درحول نقاط تعادلشان در داخل ملکولها ، خود ملکولها نیز می‌توانند حرکات انتقالی و یا چرخشی داشته باشند .

درحالت کلی ، سه درجهٔ آزادی مربوط به حرکات انتقالی و به همان اندازه مربوط به حرکات گردشی ملکول است . بنابراین از $۳n$ درجهٔ آزادی ملکولی که n اتم دارد ، $(۳n-۶)$ درجهٔ آزادی آن مربوط به ارتعاشات اتمهاست . يك استثناء وجود دارد و آن وقتی است که اتمها در روی يك خط مستقیم قرار گرفته باشند . در این‌حالت تنها دو درجهٔ آزادی درمورد گردش ملکول وجود دارد (گردش‌ملکول به دورمحور اتمها ناچیز وغیرقابل احساس است) . از آنجا برای ارتعاشات اتمهای ملکول $(۳n-۵)$ درجهٔ آزادی باقی می‌ماند .

برای بررسی نوسانهای ملکولی بهتر آنست که درجات آزادی حرکت انتقالی وچرخشی خود ملکول را حذف کنیم. برای حذف درجات آزادی حرکت انتقالی می‌توانیم مقدارحرکت کلی ملکول را برابر صفر فرض کنیم ؛ یعنی می‌پنداریم که مرکز جرم ملکول ساکن است و دراین‌حالت باید مختصات مرکزجرم ثابت باقی‌بماند . بادرنظر گرفتن $\mathbf{r}_a=\mathbf{r}_{a\circ}+\mathbf{u}_a$ ($\mathbf{r}_{a\circ}$ برداری است که ازموضع تعادل به aامین اتم متصل شده است و $\mathbf{u}_a$ انحراف این اتم از آن نقطه می‌باشد) ، شرط $\sum m_a\mathbf{r}_a=$ ثابت $=\sum m_a\mathbf{r}_{a\circ}$ را می‌توان به صورت زیر نوشت :

$$\sum m_a\mathbf{u}_a=\circ \qquad (۲۴\text{-}۱)$$

برای حذف حرکت چرخشی، بایدمقدارحرکت زاویه‌ای کلی‌ملکول برابرصفر باشد . اما مقدارحرکت زاویه‌ای ، دیفرانسیل کامل‌تابعی ازمختصات نسبت به‌زمان نیست ؛ ازاین‌رو شرط صفربودن آن را نمی‌توان با صفرقراردادن تابعی از مختصات نشان داد . با اینهمه در مورد نوسانهای کوچك این‌کار امکان پذیر است . اگر $\mathbf{r}_a=\mathbf{r}_{a\circ}+\mathbf{u}_a$ باشد و ازکمیات رستهٔ دوم در تغییر مکان کوچك $\mathbf{u}_a$ صرف‌نظر کنیم ، می‌توان مقدارحرکت زاویه‌ای ملکول را به شکل زیر نمایش داد :

$$\mathbf{M}=\sum m_a\mathbf{r}_a\times\mathbf{v}_a\cong\sum m_a\mathbf{r}_{a\circ}\times\dot{\mathbf{u}}_a=\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right)\sum m_a\mathbf{r}_{a\circ}\times\mathbf{u}_a$$

شرط آن‌که تابع مزبور باهمان تقریب صفر شود ، آن است‌که :

$$\sum m_a \mathbf{r}_{a_0} \times \mathbf{u}_a = 0 \qquad (۲۴-۲)$$

و در آن مبدأ می‌تواند در هر نقطهٔ دلخواهی قرار داشته‌باشد .

ارتعاشات طبیعی ملکول را می‌توان بر مبنای تقارن مواضع تعادل اتمها در ملکول ، طبقه‌بندی کرد . روشی عمومی وجود دارد که بر مبنای تئوری گروه است که ما بحثی از آن نمی‌کنیم[1] و در اینجا تنها مثالهای ساده‌ای را مورد بررسی قرار می‌دهیم .

اگر n اتم ملکول همه در یك صفحه قرار داشته‌باشند ، می‌توان به سادگی ارتعاشات اتمها را به دو نوع مشخص طبقه‌بندی کرد : یکی در داخل و دیگری درخارج صفحه . اکنون درجات آزادی را برای هر نوع به دست می‌آوریم . چون برای حرکت در صفحه $2n$ درجهٔ آزادی وجود دارد که دو درجهٔ آن برای حرکت انتقالی و یك درجهٔ آن برای حرکت گردشی لازم است ، پس تعداد نوسانهای طبیعی در صفحه $(2n-3)$ و بقیهٔ درجات آزادی یعنی $(3n-6)-(2n-3)=n-3$ درجهٔ آزادی نوسانهای اتمها در خارج صفحه است .

در مورد ملکولهای خطی می‌توان نوسانهای طولی را که شکل خطی خود را حفظ می‌کنند از نوسانهایی که اتمها را از خط خارج می‌کنند ، تمیز داد . چون در حرکت n ذره در امتداد یك خط n درجهٔ آزادی وجود دارد که یکی از آنها مربوط به حرکت انتقالی خود ملکول است ، پس تعداد نوسانهای طبیعی اتمها در امتداد خط مزبور برابر $(n-1)$ است . تعداد درجات آزادی کل برای نوسانهای ملکول $(3n-5)$ تا است و در نتیجه $(2n-4)$ درجهٔ آزادی نیز برای نوسانهای خارج خط باقی می‌ماند که تنها با $(n-2)$ بسامد متفاوت نوسان می‌کنند زیرا می‌توان هر یك از نوسانها را بر دو صفحهٔ عمودبرهم که محور ملکول فصل مشترك آنها باشد ، نمایش داد . به علت تقارن ، هر دو جفت نوسان طبیعی بسامدی مساوی هم خواهند داشت .

مسائل

مسئلهٔ ۱ ـ بسامد نوسانهای ملکول سه اتمی متقارن و خطی ABA (شکل ۲۸) را حساب کنید . فرض کنید که انرژی پتانسیل ملکول تنها بستگی

۱ـ به کتاب مکانیك کوانتوم ، فصل ۹۸ ، چاپ پرگامن مراجعه کنید .

به فاصلهٔ AB و BA و زاویهٔ ABA دارد .

حل : تغییرمکان طولی اتمها را x_3 و x_2 و x_1 می‌نامیم . مطابق‌رابطهٔ (۱ــ۲۴) :

$$m_A(x_1+x_3)+m_Bx_2=0$$

با به‌کاربردن‌این رابطه ، x_2 را ازتابع لاگرانژحرکت طولی حذف می‌کنیم:

$$L=\frac{1}{2}m_A(\dot{x}_1^2+\dot{x}_3^2)+\frac{1}{2}m_B\dot{x}_2^2-$$

$$-\frac{1}{2}k_1[(x_1-x_2)^2+(x_3-x_2)^2]$$

با به‌کار بردن مختصات $Q_a=x_1+x_3$ و $Q_s=x_1-x_3$ نتیجه می‌شود :

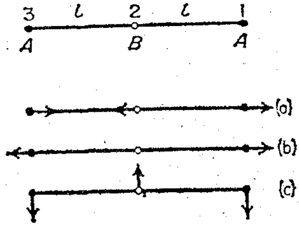
$$L=\frac{\mu m_A}{4m_B}\dot{Q}_a^2+\frac{m_A}{4}\dot{Q}_s^2-\frac{k_1\mu^2}{4m_B^2}Q_a^2-\frac{k_1}{4}Q_s^2$$

که $\mu=2m_A+m_B$ جرم ملکول است . ملاحظه می‌شود که Q_a و Q_s مختصات طبیعی سیستم می‌باشند . مختصهٔ Q_a ارتعاشاتی نامتقارن در حول مرکزملکول ($x_1=x_3$) انجام می‌دهد(شکل ۲۸ a) وبسامدآن مساویست‌با:

$$\omega_a=\sqrt{\frac{k_1\mu}{m_Am_B}}$$

و مختصهٔ Q_s مربوط به ارتعاش متقارن ($x_1=-x_3$) است با بسامد زیر (شکل ۲۸ b) :

$$\omega_{s1}=\sqrt{\frac{k_1}{m_A}}$$



(شکل ۲۸)

تغییر مکانهای عرضی y_3 و y_2 و y_1 اتمها مطابق روابط (۱ــ۲۴) و (۲ــ۲۴) در روابط زیر صدق می‌کنند :

$$y_1=y_3 \quad \text{و} \quad m_A(y_1+y_3)+m_By_2=0$$

(خمش متقارن ملکول؛ شکل ۲۸c) . انرژی پتانسیل‌این‌ارتعاشات رامی‌توان

به صورت $\frac{1}{2}k_2 l^2\delta^2$ نمایش داد که δ انحراف زاویهٔ ABA از π است .

$$\delta=\frac{1}{l}[(y_1-y_2)+(y_3-y_2)]$$

با محاسبهٔ y_1 و y_2 و y_3 برحسب δ ، تابع لاگرانژ حرکت عرضی اتمها به صورت زیر خلاصه می‌شود :

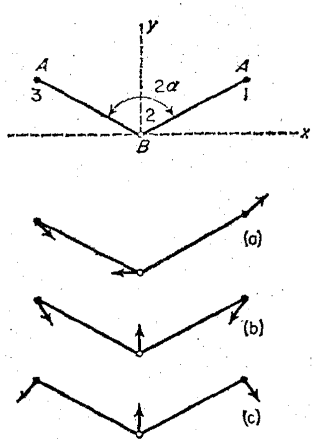
$$L=\frac{1}{2}m_A(\dot{y}_1^2+\dot{y}_3^2)+\frac{1}{2}m_B\dot{y}_2^2-\frac{1}{2}k_2l^2\delta^2=$$

$$=\frac{m_Am_B}{4\mu}l^2\dot{\delta}^2-\frac{1}{2}k_2l^2\delta^2$$

و بنابراین بسامد آن برابر است با :

$$\omega_{s2}=\sqrt{\frac{2k_2\mu}{m_Am_B}}$$

مسئلهٔ ۳ــ همان مسئلهٔ یك ، تنها در اینجا اتمها به شکل مثلث قرار گرفته‌اند (شکل ۲۹) .



(شکل ۲۹)

حل : باکمك روابط (۱ــ۲۴) و (۲ــ۲۴) مؤلفه‌های x و y از تغییر مکان u در روابط زیر صادق است .

$$m_A(x_1+x_3)+m_Bx_2=0$$

$$m_A(y_1+y_3)+m_By_2=0$$

$$(y_1 - y_3)\sin\alpha - (x_1 + x_3)\cos\alpha = 0$$

می‌توان تغییرات δl_1 و δl_2 از فواصل AB و BA را با محاسبهٔ مؤلفه‌های بردارهای $\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2$ و $\mathbf{u}_3 - \mathbf{u}_2$ در امتداد این خطوط به دست آورد :

$$\delta l_1 = (x_1 - x_2)\sin\alpha + (y_1 - y_2)\cos\alpha$$

$$\delta l_2 = -(x_3 - x_2)\sin\alpha + (y_3 - y_2)\cos\alpha$$

و نیز می‌توان تغییر زاویهٔ ABA را با محاسبهٔ مؤلفهٔ این بردارها در امتداد عمود برخطوط AB و BA به دست آورد :

$$\delta = \frac{1}{l}[(x_1 - x_2)\cos\alpha - (y_1 - y_2)\sin\alpha] +$$

$$+ \frac{1}{l}[-(x_3 - x_2)\cos\alpha - (y_3 - y_2)\sin\alpha]$$

تابع لاگرانژ ملکول چنین است :

$$L = \frac{1}{2} m_A(\dot{\mathbf{u}}_1^2 + \dot{\mathbf{u}}_3^2) + \frac{1}{2} m_B\dot{\mathbf{u}}_2^2 - \frac{1}{2}k_1(\delta l_1^2 + \delta l_2^2) -$$

$$-\frac{1}{2}k_2 l^2\delta^2$$

مختصات جدید $Q_a = x_1 + x_3$ و $q_{s1} = x_1 - x_3$ و $q_{s2} = y_1 + y_3$ را به‌کار می‌بندیم . مؤلفه‌های بردارهای $\mathbf{u}$ برحسب این مختصات می‌شوند :

$$x_2 = -\frac{m_A Q_a}{m_B} \text{ و } x_1 = \frac{1}{2}(Q_a + q_{s1}) \text{ و } x_3 = \frac{1}{2}(Q_a - q_{s1})$$

و نیز:

$$y_1 = \frac{1}{2}(q_{s2} + Q_a \cot g\alpha) \text{ و } y_2 = -\frac{m_A q_{s2}}{m_B} \text{ و } y_3 = \frac{1}{2}(q_{s2} - Q_a \cot g\alpha)$$

و تابع لاگرانژ چنین است :

$$L = \frac{m_A}{4}\left(\frac{2m_A}{m_B} + \frac{1}{\sin^2\alpha}\right)\dot{Q}_a^2 + \frac{1}{4}m_A\dot{q}_{s1}^2 + \frac{\mu m_A}{4m_B}\dot{q}_{s2}^2 -$$

$$-\frac{1}{4}k_1 Q_a^2\left(\frac{2m_A}{m_B} + \frac{1}{\sin^2\alpha}\right)\left(1 + \frac{2m_A}{m_B}\sin^2\alpha\right) -$$

$$-\frac{1}{4}q_{s1}^2(k_1\sin^2\alpha + 2k_2\cos^2\alpha) - \frac{1}{4}q_{s2}^2\frac{\mu^2}{m_B^2}(k_1\cos^2\alpha +$$

$$+2k_2\sin^2\alpha) + q_{s1}q_{s2}\frac{\mu}{2m_B}(2k_2-k_1)\sin\alpha\cos\alpha$$

از این‌رو ملاحظه می‌شود که مختصات Q_a مربوط به ارتعاشات طبیعی نامتقارنی‌است که‌درحول‌محور y ($y_1=-y_3$ و $x_1=x_3$)؛ شکل ۲۹ a) با بسامد زیر نوسان می‌کند :

$$\omega_a=\sqrt{\frac{k_1}{m_A}\left(1+\frac{2m_A}{m_B}\sin^2\alpha\right)}$$

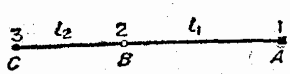
مختصات q_{s1} و q_{s2} مربوط است به دو ارتعاش متقارن درحول محور y ($y_1=y_3$ و $x_1=-x_3$؛ شکل c و b ۲۹) با بسامدی برابر ω_{s1} و ω_{s2} که ریشه‌های معادلهٔ درجهٔ دوم زیر (برحسب ω^2) می‌باشند .

$$\omega^4-\omega^2\left[\frac{k_1}{m_A}\left(1+\frac{2m_A}{m_B}\cos^2\alpha\right)+\frac{2k_2}{m_A}\left(1+\frac{2m_A}{m_B}\sin^2\alpha\right)\right]+$$

$$+\frac{2\mu k_1k_2}{m_A^2m_B}=0$$

وقتی $2\alpha=\pi$ شود، بسامدهای فوق برابرهمان مقادیریست که درمسئلهٔ ۱ به دست آوردیم .

مسئلهٔ ۳ـ مسئلهٔ ۱ را درمورد ملکول نامتقارن ABC درنظر بگیرید (شکل ۳۰) .



(شکل ۳۰)

حل : تغییر مکانهای طولی و عرضی x و y اتمها در روابط زیر صدق می‌کنند :

$$m_Ax_1+m_Bx_2+m_Cx_3=0 \quad \text{و} \quad m_Ay_1+m_By_2+m_Cy_3=0$$

و

$$m_Al_1y_1=m_Cl_2y_3$$

انرژی پتانسیل خمشی وکششی را می‌توان به صورت

$$\frac{1}{2}k_1(\delta l_1)^2+\frac{1}{2}k_1'(\delta l_2)^2+\frac{1}{2}k_2l^2\delta^2$$

نمایش داد که در آن $2l=l_1+l_2$ می‌باشد . با محاسباتی نظیر مسئلهٔ یك بسامدهای ارتعاشات عرضی به دست می‌آیند :

$$\omega_t^2=\frac{k_2 l^2}{l_1^2 l_2^2}\left(\frac{l_1^2}{m_C}+\frac{l_2^2}{m_A}+\frac{4l^2}{m_B}\right)$$

و معادلهٔ درجهٔ دوم (نسبت به ω^2)

$$\omega^4-\omega^2\left[k_1\left(\frac{1}{m_A}+\frac{1}{m_B}\right)+k_1'\left(\frac{1}{m_B}+\frac{1}{m_C}\right)\right]+\frac{\mu k_1 k_1'}{m_A m_B m_C}=0$$

بسامدهای ω_{l1} و ω_{l2} ارتعاشات طولی سیستم را به دست می‌دهد.

۲۵: نوسانهای مستهلك شده

پیش از این ازحرکاتی بحث می‌کردیم که یا در خلأ انجام می‌گرفت و یا اثر محیط را بر آن ناچیز می‌انگاشتیم. اکنون حرکتی را مورد مطالعه قرار می‌دهیم که در آن محیط ازخود مقاومت نشان می‌دهد. این مقاومت باعث می‌شود که حرکت جسم کند شود، تاسرانجام همهٔ انرژی جسم متحرك به گرما تبدیل شود و از بین برود.

حرکت تحت این شرایط دیگر حرکت مکانیکی خالص نیست زیرا باید حرکت خود محیط ونیز گرمای درونی محیط وجسم متحرك را مورد توجه قرار داد. به ویژه نمی‌توانیم در حالت کلی بگوئیم که شتاب جسم متحرك در هرلحظه تابع مختصات و سرعت است؛ یعنی معادلات حرکتی برای جسم وجود ندارد. از این‌رو حرکت جسم در محیط مقاوم یك مسئلهٔ مکانیکی نیست.

با این همه، درحالت خاصی، می‌توان با افزودن جملاتی به معادلات حرکت تقریباً اثر محیط را نشان داد. مثلاً نوسانهائی که بسامدشان در مقایسهٔ با بسامد واکنشهای اتلافی محیط کوچك باشند. چنانچه این‌فرض صادق باشد، می‌توان چنین پنداشت که برجسم نوعی نیروی اصطکاکی که تنها به سرعت آن بستگی دارد (وقتی محیط همگن است)، اثر می‌گذارد.

در حالت کلی چنانچه سرعت به اندازهٔ کافی کوچك باشد، نیروی اصطکاکی را می‌توان برحسب توانهای سرعت جسم بسط داد. جملهٔ رستهٔ صفرم، صفر است؛ یعنی بر جسم ساکن هیچ نیروی اصطکاکی وارد نمی‌آید. اولین جمله‌ای که صفر نیست متناسب با سرعت است. در این صورت نیروی کل اصطکاك f_{fr} برای سیستمی که نوسانهای کوچك یك بعدی (در امتداد محور x) انجام می‌دهد، برابر است با:

$$f_{fr}=-\alpha\dot{x}$$

که α مقداریست ثابت . علامت منفی نشان می‌دهد که نیرو در خلاف جهت سرعت جسم اثر می‌کند . با افزودن این جمله به طرف راست معادلهٔ حرکت نوسانی آزاد ، معادلهٔ نوسانهای آزاد توأم با اصطکاك به دست می‌آید :

$$m\ddot{x} = -kx - \alpha\dot{x} \qquad (۲۵-۱)$$

اگر معادلهٔ فوق را بر m بخش کنیم و فرض شود که

$$\frac{k}{m} = \omega_\circ^{۲} \quad و \quad \frac{\alpha}{m} = ۲\lambda \qquad (۲۵-۲)$$

($\omega_\circ$ بسامد طبیعی سیستم درغیاب اصطکاك است و λ ضریب استهلاك یامیرائی نام دارد)، معادلهٔ حرکت به دست می‌آید :

$$\ddot{x} + ۲\lambda\dot{x} + \omega_\circ^{۲} x = \circ \qquad (۲۵-۳)$$

مانند گذشته جواب $x = e^{rt}$ را درمعادلهٔ (۳-۲۵) آزمایش می‌کنیم . معادلهٔ مشخصهٔ درجهٔ دوم زیر بەدست می‌آید :

$$r^{۲} + ۲\lambda r + \omega_\circ^{۲} = \circ$$

و ازآنجا :

$$r_{۱,۲} = -\lambda \pm \sqrt{\lambda^{۲} - \omega_\circ^{۲}}$$

جواب عمومی معادلهٔ (۳-۲۵) می‌شود :

$$x = C_۱ e^{r_۱ t} + C_۲ e^{r_۲ t}$$

می‌توان دوحالت متمایز تشخیص داد : یا $\lambda < \omega_\circ$ که برای r دومقدارمختلط مزدوج به دست می‌دهد و درآن صورت می‌توان جواب عمومی معادله را به صورت

$$x = \mathbf{real}\,[Ae^{-\lambda t + i\sqrt{\omega_\circ^{۲} - \lambda^{۲}}\, t}]$$

نوشت که درآن A عدد مختلط دلخواهی است ، یا

$$x = ae^{-\lambda t}\cos(\omega t + \alpha) \qquad (۲۵-۴)$$

که $\omega = \sqrt{\omega_\circ^{۲} - \lambda^{۲}}$ و a و α مقادیرحقیقی‌می‌باشند . این گونه نوسان را میرا می‌نامند. می‌توان حرکت مزبور رانوسانات‌یکنواختی دانست که در هردورهٔ تناوب دامنهٔ آن کوچکتر می‌شود . شدت کاهش دامنه متناسب با $e^{-\lambda t}$ است . ملاحظه می‌شود که بسامد سیستم ، ω کوچکتر از بسامد نوسانهای آزاد درغیاب اصطکاك است . وقتی $\lambda \ll \omega_\circ$ ، تفاوت ω و $\omega_\circ$ کمیت بی‌نهایت کوچکی از رستهٔ دوم خواهد بود . کاهش بسامد نوسانها ، به سبب اصطکاك ، همان نتیجه‌ایست که انتظارش را داشتیم زیرا اصطکاك باید حرکت را کندترسازد.

اگر $\lambda \ll \omega_0$ باشد ، دامنهٔ نوسانهای مستهلك شدهٔ سیستم تقریباً در زمان تناوب $\frac{2\pi}{\omega}$ ثابت باقی می‌ماند . به همین دلیل در محاسبهٔ مربعات سرعتها و مختصات ، برای به دست آوردن مقدار متوسط آنها ، می‌توان از تغییرات عامل $e^{-\lambda t}$ (در هردورهٔ تناوب) صرف‌نظر کرد . این مقادیر متوسط متناسب با $e^{-2\lambda t}$ خواهند بود وازاین‌رو انرژی متوسط سیستم در هرتناوب به صورت زیر کاهش می‌یابد :

$$\bar{E}=E_0 e^{-2\lambda t} \qquad (۲۵-۵)$$

E_0 انرژی ابتدایی سیستم است.

حال اگر $\lambda > \omega_0$ باشد ، ریشه‌های r حقیقی و منفی خواهند بود و جواب عمومی معادله چنین است :

$$x=C_1 e^{-[\lambda-\sqrt{\lambda^2-\omega_0^2}]\,t}+C_2 e^{-[\lambda+\sqrt{\lambda^2-\omega_0^2}]\,t} \qquad (۲۵-۶)$$

ملاحظه می‌شود که این حالت ، هنگامی روی خواهد داد که اصطکاك بزرگ باشد . وقتی $t\to\infty$ ذره به‌کنارمجانبی که ازموضع تعادل سیستم می‌گذرد، نزدیك می‌شود وسرانجام در $t=\infty$ به موضع تعادل می‌رسد . این نوع حرکت را نوسانهای مستهلك شدهٔ غیرمتناوب می‌گویند .

درحالت خاصی که $\lambda=\omega_0$ باشد، معادلهٔ مشخصه دوریشهٔ $r=-\lambda$ دارد وجواب کلی معادلهٔ دیفرانسیل چنین است :

$$x=(C_1+C_2 t)e^{-\lambda t} \qquad (۲۵-۷)$$

که حالت خاصی از نوسانهای غیرمتناوب است .

در سیستمی که بیش از یك درجهٔ آزادی دارد ، مؤلفهٔ نیروی اصطکاك در امتداد x_i ، تابعی خطی از سرعتهای ذرات سیستم است :

$$f_{fr,i}=-\sum_k \alpha_{ik}\dot{x}_k \qquad (۲۵-۸)$$

درمباحث مکانیك نظری روشی موجود نیست که نشان دهد ضریب α_{ik} نسبت به i و k متقارن است ، اما درفیزیك آماری می‌توان ثابت‌کرد که در هرحالتی

$$\alpha_{ik}=\alpha_{ki} \qquad (۲۵-۹)$$

در این صورت روابط (۲۵-۸) را می‌توان به صورت مشتقهای نسبی زیر نوشت :

$$f_{fr,i}=-\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i} \qquad (۲۵-۱۰)$$

که درآن تابع درجهٔ دوم F راتابع اتلاف می‌نامیم:

$$F=\frac{1}{2}\sum_{i,k}\alpha_{ik}\dot{x}_i\dot{x}_k \qquad (۲۵-۱۱)$$

نیروهای (۱۰-۲۵) باید به طرف راست معادلات لاگرانژ افزوده شوند :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}\right)=\frac{\partial L}{\partial x_i}-\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i} \qquad (۲۵-۱۲)$$

در فیزیك تابع اتلاف اهمیت به خصوصی دارد زیرا این تابع شدت تغییرات اتلاف انرژی سیستم را به دست می‌دهد . این قضیه به راحتی با مشتق‌گیری از انرژی مکانیکی سیستم ، نسبت به زمان ، ثابت می‌شود :

$$\frac{dE}{dt}=\frac{d}{dt}\left(\sum_i\dot{x}_i\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}-L\right)=$$

$$=\sum_i\dot{x}_i\left(\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}\right]-\frac{\partial L}{\partial x_i}\right)=$$

$$=-\sum_i\dot{x}_i\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i}$$

چون F تابع درجهٔ دومی ازسرعتها است، به‌کمك قضیهٔ اولر درتوابع همگن ، نتیجه می‌شود که مجموعهٔ طرف راست مساوی $۲F$ است . ازآنجا :

$$\frac{dE}{dt}=-۲F \qquad (۲۵-۱۳)$$

یعنی شدت تغییرات اتلاف انرژی سیستم ، دو برابر تابع اتلاف است . چون واکنش اتلاف باعث کم شدن انرژی می‌شود ، پس باید $F>۰$ باشد ؛ یعنی معادلهٔ درجهٔ دوم (۱۱-۲۵) تابعی مثبت است .

معادلات نوسانهای کوچك با اصطکاك ، با افزودن رابطهٔ (۸-۲۵) به طرف راست معادلات (۵-۲۳) به دست می‌آیند :

$$\sum_k m_{ik}\ddot{x}_k+\sum_k k_{ik}x_k=-\sum_k\alpha_{ik}\dot{x}_k \qquad (۲۵-۱۴)$$

با قراردادن $x_k=A_ke^{rt}$ و حذف e^{rt} از طرفین رابطهٔ فوق ، معادلات جبری خطی زیر برای ثابتهای A_k به دست می‌آید :

$$\sum_k(m_{ik}r^۲+\alpha_{ik}r+k_{ik})A_k=۰ \qquad (۲۵-۱۵)$$

با صفر قراردادن دترمینان ضرایب ، معادلهٔ مشخصهٔ سیستم ، برای محاسبهٔ مقادیر r به دست می‌آید :

$$| m_{ik} r^{۲} + \alpha_{ik} r + k_{ik} | = ۰ \qquad (۲۵-۱۶)$$

رابطهٔ فوق یك معادله از درجهٔ $۲s$ برحسب r است . چون همهٔ ضرایب معادله حقیقی است ، ریشه‌های آن نیز یا باید حقیقی باشند و یا دوعدد موهومی مزدوج . ریشه‌های حقیقی یا قسمت حقیقی ریشه‌های موهومی باید منفی باشند زیرا در غیر این صورت مختصات و سرعتها و انرژی سیستم با زمان ترقی خواهندکرد ، در حالی‌که نیروهای اتلاف باید سبب کاهش انرژی سیستم شود .

۲۶ : نوسانهای اجباری با اصطکاك

تئوری نوسانهای اجباری بـا اصطکاك نیز متشابه است با آنچه در بخش ۲۲ دربارهٔ نوسانهای اجباری بدون‌اصطکاك ، ذکر کردیم . دراین‌حالت نیروهای متناوب اهمیت‌بیشتری دارند و از این‌رو در این بخش مورد مطالعه قرار خواهندگرفت .

با افزودن‌نیروی $f\cos\gamma t$ به طرف راست معادلهٔ (۱-۲۵) وبخش‌کردن طرفین رابطه بر m ، معادلهٔ حرکت به‌دست می‌آید :

$$\ddot{x} + ۲\lambda\dot{x} + \omega_{۰}^{۲} x = \frac{f}{m}\cos\gamma t \qquad (۲۶-۱)$$

جواب این معادله ، چنانچه به صورت مختلط نوشته شود ، به سادگی و به سرعت به دست خواهد آمد . از این‌رو به جای $\cos\gamma t$ ، درطرف راست معادله ، عبارت $e^{i\gamma t}$ را قرار می‌دهیم :

$$\ddot{x} + ۲\lambda\dot{x} + \omega_{۰}^{۲} x = \frac{f}{m} e^{i\gamma t}$$

جواب خصوصی مسئله را به‌صورت $x = Be^{i\gamma t}$ فرض می‌کنیم و سپس ثابت B را به دست می‌آوریم :

$$B = \frac{f}{m(\omega_{۰}^{۲} - \gamma^{۲} + ۲i\lambda\gamma)} \qquad (۲۶-۲)$$

با نمایش $B = be^{i\delta}$ نتیجه می‌شود :

$$tg\delta = \frac{۲\lambda\gamma}{\gamma^{۲} - \omega_{۰}^{۲}} \quad و \quad b = \frac{f}{m\sqrt{(\omega_{۰}^{۲} - \gamma^{۲})^{۲} + ۴\lambda^{۲}\gamma^{۲}}} \qquad (۲۶-۳)$$

سرانجام بامحاسبهٔ قسمت حقیقی عبارت $Be^{i\gamma t} = be^{i(\gamma t + \delta)}$ ، جواب خصوصی معادلهٔ

(۱ـ۲۶) به دست می‌آید و با افزودن آن به جواب عمومی (جواب بدون طرف ثانی)، معادلهٔ حرکت (حالت $\omega_0 > \lambda$ را درنظر گرفته‌ایم) به دست می‌آید:

$$x = ae^{-\lambda t}\cos(\omega t+\alpha)+b\cos(\gamma t+\delta) \qquad (۲۶\text{-}۴)$$

جملهٔ اول به طور نمائی با گذشت زمان کوچك می‌شود و ازاین‌رو پس ازمدتی تنها جملهٔ دوم باقی خواهد ماند.

$$x = b\cos(\gamma t+\delta) \qquad (۲۶\text{-}۵)$$

رابطهٔ (۳ـ۲۶) که دامنهٔ نوسان b را تعیین می‌کند، با نزدیك شدن γ به ω_0 بزرگ می‌شود ولی مانند نوسانهای بدون‌اصطکاك به‌بی‌نهایت میل نمی‌کند. درازاء دامنهٔ f مشخصی از نیروی خارجی، دامنهٔ ارتعاشات وقتی بزرگترین مقدار خود را پیدا خواهد کرد که داشته باشیم $\gamma = \sqrt{\omega_0^2 - 2\lambda^2}$. در ازای $\lambda \ll \omega_0$ تفاوت این عبارت با ω_0 بی‌نهایت کوچك رستهٔ دوم است.

حال در نزدیکی تشدید، نوسانهای سیستم را مورد مطالعه قرار می‌دهیم. اگر $\gamma = \omega_0 + \varepsilon$ (ε مقدار بسیارکوچکی است) و فرض کنیم که $\lambda \ll \omega_0$، می‌توان معادلهٔ (۲ـ۲۶) را به صورت زیر ساده کرد:

$$\gamma^2 - \omega_0^2 = (\gamma+\omega_0)(\gamma-\omega_0) \approx 2\omega_0\varepsilon \quad \text{و} \quad 2i\lambda\gamma \approx 2i\lambda\omega_0$$

بنابراین:

$$B = -f/2m(\varepsilon - i\lambda)\omega_0 \qquad (۲۶\text{-}۶)$$

یا:

$$b = \frac{f}{2m\omega_0\sqrt{\varepsilon^2+\lambda^2}} \quad \text{و} \quad tg\,\delta = \frac{\lambda}{\varepsilon} \qquad (۲۶\text{-}۷)$$

اختلاف فاز δ میان ارتعاشات و نیروی خارجی همیشه منفی است؛ یعنی ارتعاشات‌از نیرو عقب می‌ماند. دور از حول وحوش تشدید وقتی $\gamma < \omega_0$ است، $\delta \to 0$ و ازآن طرف وقتی $\gamma > \omega_0$ باشد $\delta \to -\pi$. تغییرات δ از صفر تا $-\pi$ درنوارکوچکی از بسامدهای نزدیك به ω_0 قرار دارد (عرض این نوار بی‌نهایت کوچکی‌ازرستهٔ λ است). وقتی $\gamma = \omega_0$ است، δ از $-\frac{\pi}{2}$ می‌گذرد. درغیاب اصطکاك اختلاف فاز در $\gamma = \omega_0$ ناگهان به‌اندازهٔ π تغییر می‌یافت (جملهٔ دوم در رابطهٔ (۴ـ۲۲) تغییرعلامت می‌دهد)؛ درهنگامی که اصطکاك وجود دارد این ناپیوستگی هموار می‌گردد.

وقتی سیستم، مطابق رابطهٔ (۵ـ۲۶) به حالت پایدار خود رسید، انرژی آن ثابت

باقی می‌ماند زیرا انرژی منبع خارجی که متوالیاً جذب سیستم می‌شود ، در اثر اصطکاك از میان می‌رود . فرض کنید $I(\gamma)$ مقدار متوسط انرژی جذب شده در واحد زمان باشد ؛ این انرژی تابعی است از بسامد نوسانهای نیروی خارجی . به‌کمك رابطهٔ (۱۳ ـ ۲۵) نتیجه می‌شود :

$$I(\gamma)=2\overline{F}$$

که $\overline{F}$ مقدارمتوسط تابع اتلاف درهردورهٔ تناوب است. درحرکت یك بعدی، عبارت (۱۱ـ۲۵) برای تابع اتلاف به صورت

$$F=\frac{1}{2}\alpha\dot{x}^2=\lambda m\dot{x}^2$$

نوشته می‌شود . با قرار دادن در رابطهٔ (۵ـ۲۶) به دست می‌آید :

$$F=\lambda m b^2\gamma^2 \sin^2(\gamma t+\delta)$$

مقدار متوسط مربع سینوس برابر با $\frac{1}{2}$ است و از آنجا :

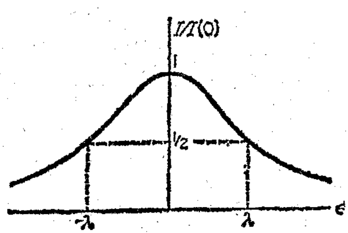
$$I(\gamma)=\lambda m b^2\gamma^2 \qquad (۲۶ـ۸)$$

در نزدیکی تشدید ، باقراردادن دامنهٔ نوسان از رابطهٔ (۷ـ۲۶) ، این اتلاف‌برابر است با :

$$I(\varepsilon)=\frac{f^2\lambda}{4m(\varepsilon^2+\lambda^2)} \qquad (۲۶ـ۹)$$

این رابطه که انرژی جذب شده را برحسب بسامد نیروی خارجی به دست می‌دهد ، معادلهٔ انتشارنام دارد . مقدار $|\varepsilon|$ وقتی $I(\varepsilon)$ نصف مقدار ماکزیمم خود را دارد (در ازاء $\varepsilon=0$)، «نیم پهنای» منحنی تشدید نامیده می‌شود . رابطهٔ (۹ـ۲۶) نشان می‌دهد که در این حالت نیم پهنای منحنی تشدید برابر ضریب λ است . ارتفاع ماکزیمم منحنی برابر است با :

$$I(0)=\frac{f^2}{4m\lambda}$$



(شکل ۳۱)

ملاحظه می‌شود که این مقدار معکوساً متناسب با λ است، از این رو هرچه ضریب استهلاك کوچکتر شود ، منحنی تشدید نیز تیزتر خواهد شد . معهذا مساحت زیر منحنی همیشه ثابت باقی خواهد ماند . این مساحت برابر است با :

$$\int_{0}^{\infty} I(\gamma)d\gamma = \int_{-\omega_0}^{\infty} I(\varepsilon)d\varepsilon$$

چون $I(\varepsilon)$ با بزرگترشدن قدرمطلق $|\varepsilon|$ به سرعت به سمت صفر میل می‌کند ، پس ناحیه‌ای از مساحت زیر منحنی ، وقتی $|\varepsilon|$ بزرگ شود ، ناچیز است و می‌توان حد پائین انتگرال را برابر $-\infty$ فرض کرد . اگر مقدار $I(\varepsilon)$ را از رابطهٔ (۹ـ۲۶) در معادلهٔ فوق قرار دهیم ، نتیجه می‌شود :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} I(\varepsilon)d\varepsilon = \frac{f^{2}\lambda}{4m}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\varepsilon}{\varepsilon^{2}+\lambda^{2}} = \frac{\pi f^{2}}{4m} \qquad (۲۶ـ۱۰)$$

مسئله

نوسانهای اجباری سیستمی را که تحت اثر نیروی خارجی $f=f_0 e^{\alpha t}\cos\gamma t$ قرار دارد ، حساب کنید .

حل : معادلهٔ حرکت را به صورت زیر می‌نویسیم :

$$\ddot{x} + 2\lambda\dot{x} + \omega_0^{2}x = \frac{f_0}{m} e^{\alpha t + i\gamma t}$$

و سپس مقدار حقیقی آن را در نظر می‌گیریم . نتیجه ، نوسانات اجباری به صورت زیر است :

$$x = be^{\alpha t}\cos(\gamma t+\delta)$$

که در آن :

$$b = \frac{f_0}{m}\cdot\frac{1}{\sqrt{(\omega_0^{2}+\alpha^{2}-\gamma^{2}+2\alpha\lambda)^{2}+4\gamma^{2}(\alpha+\lambda)^{2}}}$$

و

$$tg\delta = -2\gamma(\alpha+\lambda)/(\omega_0^{2}-\gamma^{2}+\alpha^{2}+2\alpha\lambda)$$

۲۷ : تشدید پارامتری

سیستمهای نوسانیی وجود دارند که بسته نیستند ، اما نیروهای خارجی تنها باعث تغییرات زمانی در پارامترهای نوسان می‌شوند .[۱]

پارامترهای نوسانات یك‌بعدی، ضرایب k وm درتابع لاگرانژ (۳-۲۱) است. اگر این دوپارامتر تابعی از زمان باشند ، معادلهٔ حرکت چنین است :

$$\frac{\mathrm{d}(m\dot{x})}{\mathrm{d}t}+kx=0 \qquad (۲۷\text{-}۱)$$

به جای t متغیر مستقل τ را جانشین می‌کنیم ، به طوری‌که $\mathrm{d}\tau=\mathrm{d}t/m(t)$ ؛ معادلهٔ (۱-۲۷) به صورت زیر خلاصه می‌شود :

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}\tau^2}+mkx=0$$

در این صورت چنانچه معادلهٔ حرکت را به صورت زیر بنویسیم

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}+\omega^2(t)x=0 \qquad (۲۷\text{-}۲)$$

مثل آنست که در رابطهٔ (۱-۲۷) m را ثابت نگهداریم و در نتیجه مسئله را در حالت‌کلی بررسی‌کرده‌ایم ، زیرا با تبدیل فوق می‌توان هرمسئله را به صورت (۲-۲۷) ساده کرد .

شکل تابع $\omega(t)$ با شرایط مسئله تعیین خواهد شد . در این قسمت ما فرض می‌کنیم که تابع مزبور متناوب و بسامدش برابر γ و دورهٔ تناوب آن مساوی $T=\frac{2\pi}{\gamma}$ باشد . این بدان معنی است که $\omega(t+T)=\omega(t)$ و معادلهٔ (۲-۲۷) پس از تبدیل $t \to t+T$ تغییری نخواهدکرد . از این‌رو اگر $x(t)$ یك جواب معادله باشد ، $x(t+T)$ نیز جواب معادله است ؛ یعنی چنانچه $x_1(t)$ و $x_2(t)$ دوجواب مستقل معادله باشند ، چنانچه به جای t ، $t+T$ گذارده شود ، ترکیب خطی خاصی از آن دو جواب معادله است . می‌توان x_1 و x_2 را طوری انتخاب[۲] کردکه وقتی $t\to t+T$ ، این مقادیر تنها درضریبی ثابت ضرب شوند :

$$x_1(t+T)=\mu_1x_1(t) \quad \text{و} \quad x_2(t+T)=\mu_2x_2(t)$$

۱ـ مثال سادهٔ این نوسانها ، آونگ ساده‌ایست که نقطهٔ اتکای آن حرکت متناوبی در امتداد قائم داشته باشد (رجوع شود به مسئلهٔ ۳) .

۲ـ این انتخاب معادل باقطری‌کردن ماتریس‌تبدیل‌خطی $x_1(t)$ و$x_2(t)$ است‌که منجربه حل معادلهٔ‌کوادراتیك‌مربوط خواهد شد. فرض‌می‌کنیم ریشه‌های‌این معادله برهم منطبق نیستند.

عمومیترین توابعی که این خاصیت را دارند ، می‌توان بدین‌صورت نمایش داد :

$$x_1(t)=\mu_1^{t/T}\Pi_1(t) \quad \text{و} \quad x_2(t)=\mu_2^{t/T}\Pi_2(t) \qquad (۲۷-۳)$$

$\Pi_1(t)$ و $\Pi_2(t)$ توابعی متناوب برحسب زمان، با پریودی برابر T می‌باشند .

در توابع (۳-۲۷) میان ثابتهای μ_1 و μ_2 رابطه‌ای برقرار است . با ضرب کردن معادله‌های

$$\ddot{x}_2+\omega^2(t)x_2=0 \quad \text{و} \quad \ddot{x}_1+\omega^2(t)x_1=0$$

در x_1 و x_2 و تفریق کردن آن دو از یکدیگر ، به دست می‌آید :

$$\ddot{x}_1x_2-\ddot{x}_2x_1=\mathrm{d}(\dot{x}_1x_2-x_1\dot{x}_2)/\mathrm{d}t=0$$

یا :

$$\dot{x}_1x_2-x_1\dot{x}_2=\text{ثابت} \qquad (۲۷-۴)$$

با فرض توابع $x_1(t)$ و $x_2(t)$ به شکل (۳-۲۷) ، وقتی $t\rightarrow t+T$ طرف چپ رابطهٔ (۴-۲۷) در $\mu_1\mu_2$ ضرب می‌شود و برای‌آنکه ثابت باقی بماند باید :

$$\mu_1\mu_2=1 \qquad (۲۷-۵)$$

اطلاعات بیشتری دربارهٔ ضرایب μ_1 و μ_2 ، با دانستن این حقیقت که ضرایب معادلهٔ (۲-۲۷) مقادیری حقیقیند ، به دست می‌آید . اگر $x(t)$ یکی از جوابهای معادله باشد ، مزدوج آن ، $x^*(t)$ نیز باید جواب معادله باشد . از این‌رو مقادیر μ_1^* و μ_2^* و μ_1 و μ_2 و μ_2^* باید دو به دو مساوی باشند[1] ؛ یعنی یا باید $\mu_1=\mu_2^*$ باشد و یا آنکه μ_2 و μ_1 هردو مقادیری حقیقی باشند . درحالت اول رابطهٔ (۵-۲۷) نشان می‌دهد که باید :

$$\mu_1=1/\mu_1^*$$

و یا :

$$|\mu_1|^2=|\mu_2|^2=1$$

یعنی قدرمطلق ضرایب دومعادله برابر واحد است .

درحالت دوم دوجواب مستقل معادلهٔ دیفرانسیل (۲-۲۷) به صورت زیر است :

$$x_1(t)=\mu^{t/T}\Pi_1(t) \quad \text{و} \quad x_2(t)=\mu^{-t/T}\,\Pi_2(t) \qquad (۲۷-۶)$$

که μ عددیست مثبت یا منفی ($|\mu|\neq 1$) . یکی از این توابع (x_1 اگر $|\mu|>1$ و x_2 اگر $|\mu|<1$) با گذشت زمان به طور نمائی بزرگ می‌شود . یعنی در موضع

۱ـ چون معادلهٔ دیفرانسیل رستهٔ دوم بیش ازدوجواب مستقل‌ازهم ندارد پس‌چهارجواب مفروض $x_2^*(t)$ و $x_2(t)$ و $x_1^*(t)$ و $x_1(t)$ باید دو به دو برابر باشند (م.)

تعادل ($x=0$) سیستم ناپایدار است وهرانحراف کوچکی از این موضع ، باعث تغییر مکان سریع می‌شود . این واکنش را تشدید پارامتری نامند .

باید توجه داشت که سیستم در این حالت ، چنانچه شرایط اولیهٔ x و $\dot{x}$ کاملاً صفر باشند ، درتعادل باقی‌خواهد ماند واین برخلاف تشدیدمعمولی‌است که دامنهٔ نوسان ؛ حتی با مقادیر اولیه صفر ، با افزایش زمان (متناسب با t) بزرگ می‌شد .

حال شرایط تشدید پارامتری را در یکی از حالات خاص و مهم مورد مطالعه قرار می‌دهیم : فرض می‌شود ، $\omega(t)$ تابع نوسانی ساده‌ای‌است که باگذشت زمان به‌آهستگی تغییر می‌کند ؛ یعنی :

$$\omega^2(t)=\omega_0^2(1+h\cos\gamma t) \qquad (۲۷-۷)$$

که ثابت $h \ll 1$ است . با انتخاب مبدائی مناسب برای زمان ، همیشه می‌توان مقدار h را را مثبت انگاشت . همانطورکه در ذیل خواهیم دید ، تشدید پارامتری موقعی‌که بسامد تابع $\omega(t)$ به $2\omega_0$ نزدیك شود ، قویتر خواهد شد . از این‌رو فرض می‌کنیم $\gamma=2\omega_0+\varepsilon$ ؛ $\varepsilon \ll \omega_0$ است .

جواب معادلهٔ حرکت[1]

$$\ddot{x}+\omega_0^2[1+h\cos(2\omega_0+\varepsilon)t]x=0 \qquad (۲۷-۸)$$

را می‌توان به صورت زیر درنظر گرفت :

$$x=a(t)\cos(\omega_0+\frac{\varepsilon}{2})t+b(t)\sin(\omega_0+\frac{\varepsilon}{2})t \qquad (۲۷-۹)$$

$a(t)$ و $b(t)$ توابعی از زمان می‌باشندکه نسبت به جملات مثلثاتی تغییرات کوچکی دارند. البته این جواب دقیقی برای معادلهٔ دیفرانسیل (۸-۲۷) نمی‌باشد زیرا هیچ لازم نیست که درجواب معادله تنها جملات متناوبی با بسامد $\omega_0+\frac{\varepsilon}{2}$ وجود داشته باشد بلکه ممکن است ، در انتگرال معادلهٔ دیفرانسیل ، جملاتی که بسامدشان مضرب صحیحی از $2\omega_0+\varepsilon$ است نیز وجود داشته باشند . البته این جملات نسبت به h ، بی‌نهایت کوچکی از رسته‌های بالاتر خواهد بود و می‌توان در تقریب اول از آنها صرف نظر کرد (به مسئلهٔ اول مراجعه کنید) .

مقدارx را ازرابطهٔ (۹-۲۷) درمعادلهٔ (۸-۲۷) قرارمی‌دهیم وازجملاتی که نسبت به ε بی‌نهایت‌کوچك بالاتر از رستهٔ اول است ، صرف‌نظر می‌کنیم . فرض می‌شود که $\dot{a}\sim\varepsilon a$

۱ـ معادله‌ای به‌صورت فوق (h و γ دلخواه) را معادلهٔ ماتیو (Mathieu) گویند .

و $\dot{b}\sim\varepsilon b$. صحت این فرضها در شرایط تشدید ، با نتیجه‌ای که به دست خواهد آمد ، تأیید می‌شود . حاصلضرب توابع مثلثاتی را به صورت زیر بسط می‌دهیم :

$$\cos(\omega_0+\frac{\varepsilon}{2})t\cos(2\omega_0+\varepsilon)t=\frac{1}{2}\cos 3(\omega_0+\frac{\varepsilon}{2})t+\frac{1}{2}\cos(\omega_0+\frac{\varepsilon}{2})t$$

مطابق فرضیاتی که شد از جملاتی که بسامدشان برابر $3(\omega_0+\frac{\varepsilon}{2})$ است صرف نظر می‌کنیم، به دست می‌آید :

$$-(2\dot{a}+b\varepsilon+\frac{1}{2}h\omega_0 b)\omega_0\sin(\omega_0+\frac{1}{2}\varepsilon)t+(2\dot{b}-a\varepsilon+$$
$$+\frac{1}{2}h\omega_0 a)\omega_0\cos(\omega_0+\frac{1}{2}\varepsilon)t=0$$

برای آنکه رابطهٔ فوق برقرار باشد ، باید ضرایب سینوس و کسینوس را برابر صفر قرار دهیم ؛ دراین‌صورت دومعادلهٔ دیفرانسیل‌خطی برحسب $a(t)$ و $b(t)$ به‌دست می‌آید . چنانچه فرض کنیم که جواب این معادلات به صورت e^{st} می‌باشند ، نتیجه می‌گیریم :

$$\frac{1}{2}(\varepsilon+\frac{1}{2}h\omega_0)b+as=0 \quad \text{و} \quad \frac{1}{2}(\varepsilon-\frac{1}{2}h\omega_0)a-sb=0$$

شرط سازگاری این دومعادلهٔ جبری آنست که دترمینان ضرایب مجهول برابر صفرشوند:

$$s^2=\frac{1}{4}\left[(\frac{1}{2}h\omega_0)^2-\varepsilon^2\right] \qquad (۲۷-۱۰)$$

شرط تشدید پارامتری آنست که s عددی حقیقی باشد ؛ یعنی $s^2>0$ [1] پس در این صورت تشدید پارامتری درنزدیکی $2\omega_0$ ، وقتی امکان‌پذیر است که

$$-\frac{1}{2}h\omega_0<\varepsilon<\frac{1}{2}h\omega_0 \qquad (۲۷-۱۱)$$

اندازهٔ حدود تشدید متناسب است با h و نیز ضریب بزرگنمائی s بی‌نهایت کوچکی است از رستهٔ h [2]ـ تشدید پارامتری ، چنانچه بسامد تغییرات پارامتر نوسان (γ) برابر $2\frac{\omega_0}{n}$ شود

۱ـ ضریب μ در (۲۷-۶) با s رابطه‌ای به صورت $\mu=-e^{s\pi/\omega_0}$ دارد ، وقتی t به $t+\frac{2\pi}{2\omega_0}$ تبدیل شود ، سینوس و کسینوس در رابطهٔ (۲۷-۹) تغییر علامت می‌دهد .

۲ـ اگرمنظورتنها تعیین حدود ناحیهٔ تشدید باشد واحتیاجی به محاسبهٔ s نداشته‌باشیم، می‌توان محاسبات را خلاصه‌کرد زیرا s در انتهای حدود تشدید صفر است ؛ یعنی ضرایب a و b در رابطهٔ (۲۷-۹) ثابتند . در این صورت به سرعت درمی‌یابیم که $\varepsilon=\pm\frac{1}{2}h\omega_0$ (مانند (۲۷-۱۱ .

نیز امکان‌پذیر است (n عدد صحیح است) . البته پهنای حدود تشدید (حدود ناپایداری) با افزایش n کوچك خواهد شد . حدود ناحیهٔ تشدید بی‌نهایت‌کوچك رستهٔ h^n است (مسئلهٔ ۲ دیده شود) . ضریب بزرگنمائی نوسان نیز کاهش می‌یابد .

پدیدهٔ تشدید پارامتری ، چنانچه اصطکاك کوچکی وجود داشته باشد نیز امکان‌پذیر است ؛ اما ناحیهٔ ناپایداری کوچکتر خواهد شد . همانطورکه دربخش ۲۵ ملاحظه شد، اثر اصطکاك درمیرایی دامنهٔ نوسان با عامل $e^{-\lambda t}$ بیان می‌شود؛ پس درتشدید پارامتری ضریب بزرگنمائی به صورت $e^{(s-\lambda)t}$ درخواهد آمد که s از رابطهٔ (۱۰–۲۷) به دست می‌آید. در این صورت حدود ناحیهٔ تشدید از رابطهٔ $s-\lambda=0$ تعیین می‌شود و بجای رابطهٔ (۱۱–۲۷) داریم :

$$-\sqrt{\left(\frac{1}{2}h\omega_0\right)^2-4\lambda^2}<\varepsilon<\sqrt{\left(\frac{1}{2}h\omega_0\right)^2-4\lambda^2} \qquad (۲۷\text{–}۱۲)$$

باید توجه داشت که در این‌جا تشدید دیگر تنها به صرف کوچك بودن اختیاری h امکان پذیر نیست بلکه باید h از «مقدارآستانه» h_k بیشتر شود . h_k از رابطهٔ (۱۲–۲۷)، به شرط حقیقی‌بودن مقدار زیررادیکال ، به دست می‌آید :

$$h_k=4\lambda/\omega_0$$

در تشدیدهایی که در مجاورت بسامدهای $\frac{2\omega_0}{n}$ به وقوع می‌پیوندند ، h_k متناسب با $\lambda^{1/n}$ است ؛ یعنی با افزایش n بزرگتر می‌شود .

مسائل

مسئلهٔ ۱ ـ حدودناحیهٔناپایداری را درتشدید ، درنزدیکی $\gamma=2\omega_0$ به دست‌بیاورید و در محاسبات خود تا جملاتی که از رستهٔ h^2 می‌باشند ، پیش بروید .

حل : فرض می‌کنیم که جواب معادله به صورت زیر باشد :

$$x=a_0\cos(\omega_0+\frac{1}{2}\varepsilon)t+b_0\sin(\omega_0+\frac{1}{2}\varepsilon)t+a_1\cos3(\omega_0+\frac{1}{2}\varepsilon)t+$$
$$+b_1\sin3(\omega_0+\frac{1}{2}\varepsilon)t$$

ملاحظه می‌شود که این معادله در مقایسه با جواب (۹-۲۷) ، شامل جملاتی از یك درجه بالاتر ، نسبت h می‌باشد . چون منظور تنها محاسبهٔ حدودناحیهٔ ناپایداریست تنهاکافی است که ضرایب $a_۱$ و $b_۱$ و $a_\circ$ و $b_\circ$ را (مطابق زیرنویس این بخش) ثابت فرض کنیم . با قرار دادن این جواب در معادلهٔ دیفرانسیل (۸-۲۷) و تبدیل حاصلضربهای مثلثاتی به‌صورت حاصل جمع وحذف جملاتی که بسامدشان برابر $۵(\omega_\circ+\frac{۱}{۲}\varepsilon)$ است ، به دست می‌آید :

$$[-a_\circ(\omega_\circ\varepsilon+\frac{۱}{۴}\varepsilon^۲)+\frac{۱}{۲}h\omega_\circ^۲a_\circ+\frac{۱}{۲}h\omega_\circ^۲a_۱]\cos(\omega_\circ+\frac{۱}{۲}\varepsilon)t+$$

$$+[-b_\circ(\omega_\circ\varepsilon+\frac{۱}{۴}\varepsilon^۲)-\frac{۱}{۲}h\omega_\circ^۲b_\circ+\frac{۱}{۲}h\omega_\circ^۲b_۱]\sin(\omega_\circ+\frac{۱}{۲}\varepsilon)t+$$

$$+[\frac{۱}{۲}h\omega_\circ^۲a_\circ-۸\omega_\circ^۲a_۱]\cos۳(\omega_\circ+\frac{۱}{۲}\varepsilon)t+$$

$$+[\frac{۱}{۲}h\omega_\circ^۲b_\circ-۸\omega_\circ^۲b_۱]\sin۳(\omega_\circ+\frac{۱}{۲}\varepsilon)t=\circ$$

جملات متناوبی که بسامدشان برابر $\omega_\circ+\frac{۱}{۲}\varepsilon$ بود، تاجملات بی‌نهایت کوچك رستهٔ دوم و آنهایی که بسامدشان برابر $۳(\omega_\circ+\frac{۱}{۲}\varepsilon)$ بود، تنهاتاجملات بی‌نهایت کوچك رستهٔ اول در نظر گرفته شده‌اند . عبارات داخل کروشه‌ها هر یك جداگانه باید صفر شوند . از دو جملهٔ آخری نتیجه می‌شود :

$$a_۱=\frac{a_\circ h}{۱۶} \quad و \quad b_۱=\frac{b_\circ h}{۱۶}$$

و از دو جملهٔ اول به دست می‌آید :

$$\omega_\circ\varepsilon\pm\frac{۱}{۲}h\omega_\circ^۲+\frac{۱}{۴}\varepsilon^۲-h^۲\frac{\omega_\circ^۲}{۳۲}=\circ$$

با محاسبهٔ ε از این رابطه، بادرنظر گرفتن جملاتی که نسبت به h تا بی‌نهایت کوچك رستهٔ دوم می‌باشند ، به دست می آید :

$$\varepsilon=\pm\frac{h}{۲}\omega_\circ-\frac{h^۲\omega_\circ}{۳۲}$$

مسئلهٔ ۲ـ حدود ناحیهٔ ناپایداری رابرای تشدید درنزدیکی $\gamma=\omega_\circ$ به دست آورید .

حل : با قرار دادن $\gamma=\omega_\circ+\varepsilon$ در معادلهٔ حرکت به دست می‌آید :

$$\ddot{x}+\omega_\circ^۲[۱+h\cos(\omega_\circ+\varepsilon)t]x=\circ$$

چون حدود ε بی‌نهایت کوچکی متشابه با $h^{۲}$ است ، انتگرال معادلهٔ فوق را به صورت ذیل درنظر می‌گیریم :

$$x=a_{\circ}\cos(\omega_{\circ}+\varepsilon)t+b_{\circ}\sin(\omega_{\circ}+\varepsilon)t+a_{۱}\cos ۲(\omega_{\circ}+\varepsilon)t+$$
$$+b_{۱}\sin ۲(\omega_{\circ}+\varepsilon)t+c_{۱}$$

که شامل جملاتی از رستهٔ h و $h^{۲}$ است . برای تعیین حدودناپایداری، ضرایب معادلهٔ فوق را ثابت می‌پنداریم، به دست می‌آید :

$$[-۲\omega_{\circ}\varepsilon a_{\circ}+\frac{۱}{۲}h\omega_{\circ}^{۲}a_{۱}+h\omega_{\circ}^{۲}c_{۱}]\cos(\omega_{\circ}+\varepsilon)t+$$

$$+[-۲\omega_{\circ}\varepsilon b_{\circ}+\frac{۱}{۲}h\omega_{\circ}^{۲}b_{۱}]\sin(\omega_{\circ}+\varepsilon)t+$$

$$+[-۳\omega_{\circ}^{۲}a_{۱}+\frac{۱}{۲}h\omega_{\circ}^{۲}a_{\circ}]\cos ۲(\omega_{\circ}+\varepsilon)t+$$

$$+[-۳\omega_{\circ}^{۲}b_{۱}+\frac{۱}{۲}h\omega_{\circ}^{۲}b_{\circ}]\sin ۲(\omega_{\circ}+\varepsilon)t+$$

$$+[c_{۱}\omega_{\circ}^{۲}+\frac{۱}{۲}h\omega_{\circ}^{۲}a_{\circ}]=\circ$$

از این‌رو $a_{۱}=\frac{ha_{\circ}}{۶}$ و $b_{۱}=\frac{hb_{\circ}}{۶}$ و $c_{۱}=-\frac{۱}{۲}ha_{\circ}$

و حدود ناحیهٔ تشدید می‌شوند :[1]

$$\varepsilon=\frac{h^{۲}\omega_{\circ}}{۲۴} \quad \text{و} \quad \varepsilon=-\frac{۵h^{۲}\omega_{\circ}}{۲۴}$$

مسئلهٔ ۳ ـ شرایط تشدید پارامتری نوسانهای کوچك آونگی را که نقطهٔ اتکاعش به طور قائم نوسان می‌کند ، تعیین کنید .

حل : تابع لاگرانژ این سیستم را در بخش ۵ مسئلهٔ (c-۳) به دست آوردیم. ازآنجا معادلهٔ حرکت‌نوسانهای کوچك($\varphi \ll ۱$) این‌آونگ می‌شود:

---

۱ ـ در حالت کلی $\Delta\varepsilon$ ، پهنای ناحیهٔ ناپایداری درتشدید ، درنزدیکی بسامدهای برابر $\frac{۲\omega_{\circ}}{n}$ از رابطهٔ زیر به دست می‌آید ،

$$\Delta\varepsilon=n^{۲n-۳}h^{n}\omega_{\circ}/۲^{۳(n-۱)}[(n-۱)!]^{۲}$$

این رابطه توسط (م.بل) «M. BELL» به دست‌آمده است (انجمن ریاضیات گلاسکو ، در سال ۱۹۵۷) .

$$\ddot{\varphi} + \omega_0^2[1 + (\frac{4a}{l})\cos(2\omega_0 + \varepsilon)t]\varphi = 0$$

که درآن $\omega_0^2 = \frac{g}{l}$. پارامتر h برابر است با $4\frac{a}{l}$ و از شرط (۱۱-۲۷) نتیجه می‌شود :

$$|\varepsilon| < 2a\sqrt{\frac{g}{l^3}}$$

۲۸ : نوسانهای غیریکنواخت[1]

همهٔ فرضیاتی که دربارهٔ نوسانهای کوچك ، دربخشهای گذشته از آن سخن گفتیم ، براین مبنا قرار داشت که در بسط انرژیهای پتانسیل وجنبشی برحسب مختصات وسرعتهای ذرات ، تنها تا جملات دوم تقریب پیش برویم . درآن صورت معادلات حرکت خطی بودند و از این رو نوسانها نیز خطی می‌شدند . اما صرف‌نظر کردن از دیگر جملات ، در بسط انرژیها ، هنگامی کاملاً درست است که دامنهٔ نوسان به قدرکافی کوچك باشد . در تقریبات بالاتر (که نوسانها غیر خطی و یا غیر یکنواخت می‌شوند) ، خواص ارتعاشات نه ازلحاظ کمیت ، بلکه از لحاظ کیفیت با حالات پیش اندکی تفاوت دارد .

اکنون به مثال ، در بسط تابع لاگرانژ تا جملهٔ سوم تقریب‌پیش می‌رویم . در انرژی پتانسیل‌جملات درجهٔ سومی از x_i و در انرژی جنبشی جملاتی مرکب ازحاصلضربهای سرعتها و مختصات ، به شکل $\dot{x}_i \dot{x}_k x_l$ ظاهر می‌شوند . این تغییر در انرژی جنبشی نسبت به حالت (۳-۲۳) ، بهسبب درنظر گرفتن‌جمله‌های خطی درجهٔ اول x ، دربسط تابع $a_{ik}(q)$ است. از این قرار تابع لاگرانژ بدین صورت نوشته می‌شود :

$$L = \frac{1}{2}\sum_{i,k}(m_{ik}\dot{x}_i\dot{x}_k - k_{ik}x_ix_k) + \frac{1}{2}\sum_{i,k,l}(n_{ikl}\dot{x}_i\dot{x}_k x_l) - $$
$$-\frac{1}{3}\sum_{i,k,l}(l_{ikl}x_ix_kx_l) \qquad (۲۸-۱)$$

n_{ikl} و l_{ikl} ضرایب ثابت جدیدی هستند .

---

[1] Anharmonic oscillations

می‌توان مختصات اختیاری x_i را به مختصات طبیعی Q_α تبدیل کرد . چون این تبدیلها خطی است ، مجموعه‌های سوم وچهارم‌نیزدر رابطهٔ (۱ـ۲۸) ، تبدیل به مجموعه‌های متشابهی از Q_α و $\dot{Q}_\alpha$ (به‌جای x_i و $\dot{x}_i$) می‌شوند . در این‌مجموعه‌ها ضرایب ثابت را به $\lambda_{\alpha\beta\gamma}$ و $\mu_{\alpha\beta\gamma}$ نمایش می‌دهیم . تابع لاگرانژ سرانجام به صورت زیر در می‌آید :

$$L=\frac{1}{2}\sum_{\alpha}(\dot{Q}_\alpha^2-\omega_\alpha^2 Q_\alpha^2)+\frac{1}{2}\sum_{\alpha,\beta,\gamma}\lambda_{\alpha\beta\gamma}\,\dot{Q}_\alpha\dot{Q}_\beta Q_\gamma-$$

$$-\frac{1}{3}\sum_{\alpha,\beta,\gamma}\mu_{\alpha\beta\gamma}\,Q_\alpha Q_\beta Q_\gamma \quad (۲۸ـ۲)$$

حال معادلات حرکت را به دست می‌آوریم . این معادلات را می‌توان به صورت زیر نمایش داد :

$$\ddot{Q}_\alpha+\omega_\alpha^2 Q_\alpha=f_\alpha(Q,\dot{Q},\ddot{Q}) \quad (۲۸ـ۳)$$

که f_α تابع همگن درجهٔ دومی از مختصات Q و مشتقات آن می‌باشد .

برای حل این‌معادلات ازروش تقریبات متوالی‌استفاده می‌کنیم؛ یعنی‌جواب معادلات دیفرانسیل را به صورت

$$Q_\alpha=Q_\alpha^{(1)}+Q_\alpha^{(2)} \quad (۲۸ـ۴)$$

فرض‌می‌کنیم که درآن $Q_\alpha^{(2)}\ll Q_\alpha^{(1)}$ و $Q_\alpha^{(1)}$ جواب معادلات «منحرف‌نشده»[1] زیراست:

$$\ddot{Q}_\alpha^{(1)}+\omega_\alpha^2 Q_\alpha^{(1)}=0$$

یعنی دارای نوسانهای یکنواخت[2]، به صورت زیرند :

$$Q_\alpha^{(1)}=a_\alpha\cos(\omega_\alpha t+\alpha_\alpha) \quad (۲۸ـ۵)$$

چنانچه درطرف راست معادلهٔ (۳ـ۲۸) تنها تا جملات رستهٔ دوم منظور شوند ، برای مختصات $Q_\alpha^{(2)}$ رابطهٔ زیر به دست می‌آید :

$$\ddot{Q}_\alpha^{(2)}+\omega_\alpha^2 Q_\alpha^{(2)}=f_\alpha(Q^{(1)},\dot{Q}^{(1)},\ddot{Q}^{(1)}) \quad (۲۸ـ۶)$$

این معادلات ، یك دستگاه معادلات دیفرانسیل خطی غیر همگن می‌باشند و می‌توان طرف راست آنها را به صورت مجموع توابع نوسانی ساده نشان داد ؛ مثلاً

$$Q_\alpha^{(1)}Q_\beta^{(1)}=a_\alpha a_\beta\cos(\omega_\alpha t+\alpha_\alpha)\cos(\omega_\beta t+\alpha_\beta)=$$

$$=\frac{1}{2}a_\alpha a_\beta\Big\{\cos[(\omega_\alpha+\omega_\beta)t+\alpha_\alpha+\alpha_\beta]+$$

$$+\cos[(\omega_\alpha-\omega_\beta)t+\alpha_\alpha-\alpha_\beta]\Big\}$$

۱ـ «Unperturbed»   ۲ـ harmonic

ملاحظه می‌شود که طرف راست معادلهٔ(۶ـ۲۸)شامل جملات نوسانیی است که بسامدشان برابر مجموع و یا تفاضل بسامدهای مشخصهٔ سیستم است . جواب این معادلات را می‌توان به صورت مجموع جملات نوسانی ساده‌ای پنداشت که در تقریب دوم بسامدهائی برابر مجموع و یا تفاضل بسامدهای مشخصهٔ سیستم :

$$\omega_\alpha \pm \omega_\beta \qquad (۲۸-۷)$$

دارند که شامل بسامدهای $2\omega_\alpha$ و صفر (مربوط به تغییر مکان ثابت) نیز می‌باشند . این بسامدها را بسامدهای مرکب سیستم می‌نامند . دامنهٔ این نوسانها متناسب با حاصلضرب دامنهٔ نوسانهای طبیعی سیستم ، $a_\alpha a_\beta$ (یا $a_\alpha{}^2$) است .

درتقریبات بالاتر ، چنانچه جملات بعدی نیز درتابع لاگرانژ درنظر گرفته شوند ، بسامدهای مرکب دیگری نیز پیدا می‌شوند که برابر مجموع و یا تفاضل بیش از دو بسامد ω_α است . در این حالت پدیدهٔ تازه‌ای ملاحظه می‌شود : در تقریب سوم بسامدهای مرکب شامل بسامدهایی نیز می‌شود که برابر بسامد اصلی است ($\omega_\alpha = \omega_\alpha + \omega_\beta - \omega_\beta$) ؛ یعنی اگرجواب معادلات حرکت سیستم را به طریقی که ذکر شد بپنداریم ، در طرف راست معادلات حرکت ، جمله‌های تشدید پیدا می‌شوند و در جواب مسئله جملاتی را می‌سازند که با گذشت زمان دامنه‌شان بزرگ می‌شود . البته روشن است که در سیستم بسته ، بدون آنکه منبعی خارجی به سیستم انرژی بدهد، دامنهٔ نوسانها به خودی خود نمی‌توانند بزرگ شوند.

در حقیقت ، در تقریبات بالاتر ، بسامد اصلی ω_α برابر بسامد «منحرف نشده» $\omega_\alpha{}^{(0)}$ که در بسط انرژی پتانسیل تا تقریب اول به دست آوردیم ، نیست . جملاتی که در جواب مسئله دامنه‌شان با گذشت زمان زیاد می‌شوند ، از بسطی نظیر

$$\cos(\omega_\alpha{}^{(0)} + \Delta\omega_\alpha)t \approx \cos\omega_\alpha{}^{(0)}t - t\Delta\omega_\alpha \sin\omega_\alpha{}^{(0)}t$$

نتیجه می‌شوند که واضح است وقتی t به قدر کافی بزرگ شود، مجاز نیست .

ملاحظه می‌شود که در تقریبات بالاتر ، روش تقریبات متوالی باید اصلاح شود . در این صورت در انتگرال معادلات حرکت باید بسامدهای دقیق ، نه بسامدهای تقریبی ، به کار برده شوند . لزوم تصحیح بسامدها از این بحث نتیجه می‌شود که در معادلات حرکت نباید جمله‌های تشدید وجود داشته باشند .

می‌توان این روش را با مثالی که برای نوسانهای غیرخطی یك بعدی در نظر گرفته‌ایم، نشان داد . تابع لاگرانژ این سیستم به صورت زیر نوشته می‌شود :

$$L = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 - \frac{1}{2} m\omega_0{}^2 x^2 - \frac{1}{3} m\alpha x^3 - \frac{1}{4} m\beta x^4 \qquad (۲۸-۸)$$

معادلهٔ حرکت می‌شود :

$$\ddot{x}+\omega_0^2 x=-\alpha x^2-\beta x^3 \qquad (۲۸-۹)$$

انتگرال معادلات حرکت را مجموع یك سری تقریبات متوالی مانند

$$x=x^{(1)}+x^{(2)}+x^{(3)}$$

فرض می‌کنیم که در آن :

$$x^{(1)}=a\cos\omega t \qquad (۲۸-۱۰)$$

در رابطهٔ فوق مقدار دقیق ω را در نظر گرفته‌ایم ؛ یعنی $\omega=\omega_0+\omega^{(1)}+\omega^{(2)}+\dots$ (اگر مبدأ زمان به‌طورمناسب اختیارشود، فاز اولیه $x^{(1)}$ رامی‌توان برابر صفرپنداشت) . می‌توان معادلهٔ (۹-۲۸) را به صورت مناسبتری نشان داد، به‌طوری که وقتی (۱۰-۲۸) را در (۹-۲۸) قرار دهیم طرف چپ معادله دقیقاً برابر صفر شود :

$$\frac{\omega_0^2}{\omega^2}\ddot{x}+\omega_0^2 x=-\alpha x^2-\beta x^3-\left(1-\frac{\omega_0^2}{\omega^2}\right)\ddot{x} \qquad (۲۸-۱۱)$$

اگر فرض شود $x=x^{(1)}+x^{(2)}$ و $\omega=\omega_0+\omega^{(1)}$ وجملات بالاتر از درجهٔ دوم را حذف کنیم ، برای $x^{(2)}$ معادلهٔ زیر به دست می‌آید :

$$\ddot{x}^{(2)}+\omega_0^2 x^{(2)}=-\alpha a^2\cos^2\omega t+2\omega_0\omega^{(1)}a\cos\omega t=$$

$$=-\frac{1}{2}\alpha a^2-\frac{1}{2}\alpha a^2\cos 2\omega t+2\omega_0\omega^{(1)}a\cos\omega t$$

برای‌آن که در طرف راست معادله جملات تشدید وجود نداشته‌باشند، باید $\omega^{(1)}=0$ باشد. و این با بحثی که درابتدای این بخش کردیم ، موافق است[1]. ازحل معادلهٔ دیفرانسیل خطی غیرهمگن فوق به دست می‌آید :

$$x^{(2)}=-\frac{\alpha a^2}{2\omega_0^2}+\frac{\alpha a^2}{6\omega_0^2}\cos 2\omega t \qquad (۲۸-۱۲)$$

با قراردادن $x=x^{(1)}+x^{(2)}+x^{(3)}$ و $\omega=\omega_0+\omega^{(2)}$ در معادلهٔ (۱۱-۲۸) ، تابع $x^{(3)}$ به صورت زیر به دست می‌آید :

$$\ddot{x}^{(3)}+\omega_0^2 x^{(3)}=-2\alpha x^{(1)}x^{(2)}-\beta x^{(1)3}+2\omega_0\omega^{(2)}x^{(1)}$$

با جایگزین کردن (۱۰-۲۸) و (۱۲-۲۸) در طرف راست معادلهٔ فوق ، پس از عملیات ساده‌ای به دست می‌آید :

۱ـ یعنی درتقریب دوم بسامد اصلی‌برابر همان بسامد ساده ω_0 است. (م)

$$\ddot{x}^{(3)} + \omega_0^2 x^{(3)} = a^3\left[\frac{1}{4}\beta - \frac{\alpha^2}{6\omega_0^2}\right]\cos 3\omega t +$$
$$+ a[2\omega_0\omega^{(2)} + \frac{5a^2\alpha^2}{6\omega_0^2} - \frac{3}{4}a^2\beta]\cos\omega t$$

باصفر قراردادن ضریب جملهٔ $\cos\omega t$ ، مقداری که باید به بسامد ω_0 برای به دست‌آوردن بسامد اصلی بیفزائیم به دست می‌آید :

$$\omega^{(2)} = \left(\frac{3\beta}{8\omega_0} - \frac{5\alpha^2}{12\omega_0^3}\right)a^2 \qquad (۲۸-۱۳)$$

که متناسب با مربع دامنهٔ نوسان است . ازآنجا نوسان مرکب رستهٔ سوم چنین است :

$$x^{(3)} = \frac{a^3}{16\omega_0^2}\left(\frac{\alpha^2}{3\omega_0^2} - \frac{1}{2}\beta\right)\cos 3\omega t \qquad (۲۸-۱۴)$$

۲۹ : تشدید در نوسانهای غیر خطی

چنانچه در نوسانهای اجباری سیستم ، جملات غیر یکنواخت را نیز محسوب کنیم ، پدیدهٔ تشدید خواص تازه‌ای پیدا می‌کند .

معادلهٔ حرکت نوسانهای اجباری سیستم با افزودن نیروی متناوب خارجی به بسامد γ، در طرف راست رابطهٔ (۹-۲۸) به دست می‌آید:

$$\ddot{x} + 2\lambda\dot{x} + \omega_0^2 x = (\frac{f}{m})\cos\gamma t - \alpha x^2 - \beta x^3 \qquad (۲۹-۱)$$

در رابطهٔ بالا نیروی اصطکاکی با ضریب مستهلك‌کنندهٔ λ (λ را کوچك می‌پنداریم) نیز محسوب شده است . چنانچه می‌خواستیم معادلهٔ دقیقتری به دست بیاوریم ، می‌بایست در دامنهٔ نیروی خارجی، جملات رستهٔ‌بالاتر را نیز محسوب می‌داشتیم(این جملات وقتی وجود دارند که دامنه به تغییر مکان x بستگی داشته باشد) ، اما چون این جملات از لحاظ کیفی در مسئله دخالتی‌ندارند ، صرفاً برای ساده‌تر شدن معادلات‌بعدی ازآنها صرف‌نظر کرده‌ایم .

فرض می‌کنیم $\gamma = \omega_0 + \varepsilon$ (ε مقداریست بسیار کوچك) ؛ یعنی‌بسامد γ در نزدیکی تشدید قرار دارد . برای تعیین شکل حرکت ، با روشی‌که ذکر خواهیم کرد ، لازم نیست که معادلهٔ (۱-۲۹) را مورد مطالعه قرار دهیم . درتقریب خطی ، دامنهٔ‌نوسان b درنزدیکی تشدید ، بر حسب تابعی از دامنهٔ f و بسامد γ نیروی خارجی از معادلهٔ (۷-۲۶) به دست می‌آید و ما این رابطهٔ را به صورت زیر می‌نویسیم :

$$b^2(\varepsilon^2 + \lambda^2) = \frac{f^2}{4m^2\omega_0^2} \qquad (۲۹-۲)$$

در نوسانات غیرخطی نتیجه گرفتیم که بسامد مشخصه، تابعی از دامنهٔ نوسان است . آنرا به صورت زیر نمایش می‌دهیم :

$$\omega_0 + \varkappa b^2 \qquad (۲۹-۳)$$

$\varkappa$ تابعی از ضرایب غیر خطی است (۱۳-۲۸) . بههمین دلیل درمعادلهٔ (۲-۲۹) به جای ω_0 عبارت $\omega_0 + \varkappa b^2$ را قرار می‌دهیم (یا درستتر درفاصلهٔ کوچك $\varepsilon = \omega_0 - \gamma$). باتوجه به اینکه $\varepsilon = \omega_0 - \gamma$ است ، داریم :

$$b^2[(\varepsilon - \varkappa b^2)^2 + \lambda^2] = \frac{f^2}{4m^2\omega_0^2} \qquad (۲۹-۴)$$

یا :

$$\varepsilon = \varkappa b^2 \pm \sqrt{\left(\frac{f}{2m\omega_0 b}\right)^2 - \lambda^2}$$

(۴-۲۹) معادلهٔ درجهٔ سومیست از b^2 که ریشه‌های حقیقی آن دامنهٔ‌نوسانهای اجباری سیستم است . حال ببنیم درازاء دامنهٔ f مشخصی از نیروی خارجی ، چه رابطه‌ای میان بسامد این نیرو و دامنهٔ ارتعاشات b موجود است .

اگر f به اندازهٔ کافی کوچك باشد ، دامنهٔ b نیز کوچك خواهد بود و از این رو می‌توان از توانهای بالاتر ازدوم دامنهٔ b صرف‌نظر کرد ؛ نتیجه همان رابطهٔ (۲-۲۹) است. نمایش منحنی تغییرات این‌تابع درشکل (a-۳۲) نشان داده شده است . این منحنی ، نسبت به محوری ماربر نقطهٔ ماکزیمم خود ($\varepsilon = 0$) متقارن است . وقتی f بزرگتر می‌شود ، ابتدا منحنی دارای همان یك ماکزیمم است که با افزایش f ، به طرف راست محور $\varepsilon = 0$ منحرف می‌شود (اگر $\varkappa > 0$) و تقارن خود را از دست می‌دهد (شکل b- ۳۲) . در این حالت معادلهٔ (۴-۲۹) تنها یك ریشهٔ حقیقی دارد .

وقتی f به حد معینی که با f_k نمایش می‌دهیم (آنرا در پایین پیدا خواهیم‌کرد) برسد ، منحنی کاملاً تغییر شکل می‌دهد . وقتی $f > f_k$ است ، بسامدهایی وجود دارند که به ازای آنها معادلهٔ (۴-۲۹) سه ریشهٔ حقیقی دارد . این‌ناحیه درشکل (c-۳۲) ، محدودهٔ $BCDE$ را تشکیل می‌دهد .

حدود این ناحیه باشرط $\frac{db}{d\varepsilon} = \infty$ تعیین می‌شود (نقاط C و D) . بامشتق گرفتن از رابطهٔ (۴-۲۹) نسبت به ε به دست می‌آید :

$$\frac{db}{d\varepsilon} = (-\varepsilon b + \varkappa b^3)/(\varepsilon^2 + \lambda^2 - 4\varkappa\varepsilon b^2 + 3\varkappa^2 b^4)$$

نقاط C و D با حل دو معادلهٔ (۴ــ۲۹) و (۵ــ۲۹) تعیین می‌شوند :

$$\varepsilon^{2}-4\varkappa b^{2}\varepsilon+3\varkappa^{2}b^{4}+\lambda^{2}=0 \qquad (۲۹\text{–}۵)$$

در معادلهٔ بالا هردو ریشهٔ ε مثبت است . وقتی $\frac{db}{d\varepsilon}=0$ باشد، دامنهٔارتعاشات بهماکزیمم مقدار خود می‌رسد . از این‌رابطه‌نتیجه می‌شود :

$$\varepsilon=\varkappa b^{2}$$

و از رابطهٔ (۴ــ۲۹) خواهیم داشت :

$$b_{max}=\frac{f}{2m\omega_{0}\lambda} \qquad (۲۹\text{–}۶)$$

که این مقدار دقیقاً برابر دامنهٔ ماکزیمم در معادلهٔ (۲ــ۲۹) است .

می‌توان‌نشان داد[1] که از سه ریشهٔ حقیقی معادلهٔ (۴ــ۲۹) ، ریشهٔ میانی (که درشکل به خط چین نمایش داده شده است) مربوط به نوسانهای ناپایدار است ؛ یعنی کوچکترین نیرویی، هرقدرهم‌کوچك باشد ، باعث می‌شودکه سیستم بابسامدی بیشتر یا کمتر به‌نوسان درآید (شاخه BC یا DE) . از این قرارتنها شاخه‌های ABC و DEF مربوط به‌نوسانهای واقعی سیستم می‌شوند . نکته قابل توجه در این است که درازاء ناحیهٔ معینی از بسامدها، دو دامنهٔ متفاوت وجود دارد . وقتی بسامدنیروی خارجی را به تدریج زیادکنیم ، دامنهٔ نوسان در امتداد شاخه ABC بزرگ می‌شود . درنقطهٔ C دامنهٔ نوسانات ناگهان به‌طور منفصل تا نقطهٔ E کاهش می‌یابد وسپس در امتدادشاخهٔ EF ، با افزایش بسامد، کوچك می‌شود . حال اگر بسامد نیروی خارجی راکوچك‌کنیم ، دامنهٔ نوسان درامتداد شاخهٔ FD بزرگ می‌شود و درنقطهٔ D ناگهان به طور منفصل تانقطهٔ B افزایش می‌یابد وسپس در روی شاخهٔ BA به تدریج کوچك می‌شود .

برای محاسبهٔ f_k باید توجه داشت که ریشه‌های معادلهٔ درجهٔ دوم (۵ــ۲۹) در ازاء $f=f_k$ با هم برابر می‌شوند ؛ در این‌حالت ، بخش CD منحنی به یك نقطهٔ عطف بدل می‌شود . اگر مبین معادلهٔ (۵ــ۲۹) را مساوی صفر قراردهیم ، به دست می‌آید :

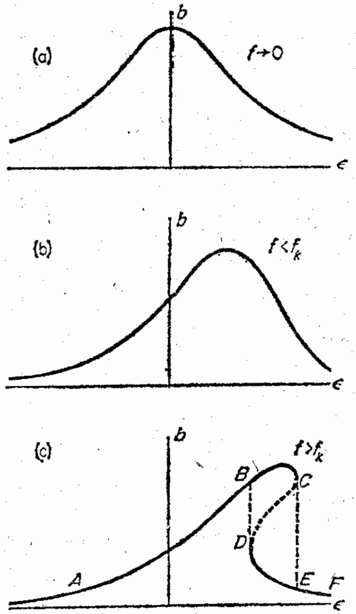
$$\varkappa^{2}b^{4}=\lambda^{2}$$

و ریشهٔ مضاعف معادلهٔ مزبور می‌شود :

$$\varepsilon=2\varkappa b^{2}$$

---

۱ ــ اثبات‌این قضیه درتئوری‌نوسانهای‌غیرخطی به روش‌مجانبها توسط «ن‌ـن بوگولیوبف» و «یوآـمیتروپلسکی» (N.N.Bogolyubov, Yu A. Mitropol'ski) داده شده‌است .



(شکل ۳۲)

با جایگزین کردن این مقدار در معادلهٔ (۴-۲۹) به دست می‌آید :

$$f_k^{۲}=۸m^{۲}\omega_{\circ}^{۲}\lambda^{۳}/\,|\,\varkappa\,| \qquad (۲۹\text{-}۷)$$

علاوه‌بر تغییرات کیفی پدیدهٔ تشدید در نزدیکی بسامد $\gamma\approx\omega_{\circ}$ ، غیرخطی بودن نوسانها باعث می‌شود که نیرویی خارجی با بسامدی کاملاً متفاوت با بسامد طبیعی سیستم ، آنرا درنزدیکی بسامد $\omega_{\circ}$ به تشدید وادارد .

فرض می‌کنیم‌که بسامد نیروی خارجی تقریباً برابر نصف بسامد طبیعی سیستم باشد؛ یعنی :

$$\gamma=\frac{۱}{۲}\omega_{\circ}+\varepsilon$$

در تقریب اول (معادلات خطی) ، ملاحظه شد که سیستم با بسامدی برابر γ و دامنه‌ای متناسب با دامنهٔ نیروی خارجی، نوسان می‌کند (به رابطهٔ (۴-۲۲) مراجعه شود) :

$$x^{(۱)}=\frac{۴f}{۳m\omega_{\circ}^{۲}}\cos(\frac{۱}{۲}\omega_{\circ}+\varepsilon)\,t$$

وقتی جملات غیرخطی نیز محسوب شوند (تقریب دوم) ، در طرف راست معادلهٔ (۱-۲۹) جملات متناوبی پیدا می‌شوندکه بسامدشان برابر با $۲\gamma\approx\omega_{\circ}$ است . باقراردادن $x^{(۱)}$ در معادلهٔ زیر

$$\ddot{x}^{(2)} + 2\lambda\dot{x}^{(2)} + \omega_0^2 x^{(2)} + \alpha x^{(2)2} + \beta x^{(2)3} = -\alpha x^{(1)2}$$

و به کار بردن کسینوس زاویهٔ دو برابر ، چنانچه در طرف راست معادله تنها جملهٔ تشدید در نظر گرفته شود ، به دست می‌آید :

$$\ddot{x}^{(2)} + 2\lambda\dot{x}^{(2)} + \omega_0^2 x^{(2)} + \alpha x^{(2)2} + \beta x^{(2)3} =$$
$$= -(8\alpha f^2/9m^2\omega_0^4)\cos(\omega_0 + 2\varepsilon)t \qquad (29-8)$$

تفاوت این معادله‌با معادلهٔ (۱-۲۹) تنها در دامنهٔ‌نیروی خارجی ، یعنی f است که به جای آن عبارتی دیگر متناسب با مربع f ، جایگزین شده است ؛ یعنی تشدید با همان کیفیت حالت پیش ، در ازاء $\gamma \approx \omega_0$ اما با شدتی کمتر اتفاق می‌افتد . اگر در رابطهٔ (۴-۲۹) به جای f مقدار $-\dfrac{8\alpha f^2}{9m\omega_0^4}$ و به جای ε ، 2ε قراردهیم ، تابع $b(\varepsilon)$ به دست می‌آید :

$$b^2[(2\varepsilon - \varkappa b^2)^2 + \lambda^2] = 16\alpha^2 f^4/81m^4\omega_0^{10} \qquad (29-9)$$

حال اگرفرض کنیم بسامد نیروی خارجی برابر $\gamma = 2\omega_0 + \varepsilon$ باشد، درتقریب اول داریم:

$$x^{(1)} = -(f/3m\omega_0^2)\cos(2\omega_0 + \varepsilon)t$$

باقراردادن $x = x^{(1)} + x^{(2)}$ در رابطهٔ (۱-۲۹) ، برعکس‌حالت قبل به‌جملاتی که معرف تشدید یك نیروی خارجی باشند ، برنمی‌خوریم . با اینهمه نوعی تشدید پارامتری وجود دارد که از جملهٔ رستهٔ سوم نتیجه می‌شود و متناسب با $x^{(1)}x^{(2)}$ است . اگر تنها این جمله را محسوب داریم و از دیگر جملات غیرخطی صرف نظر کنیم (زیرا درتشدید این جمله از دیگر جملات بزرگتر خواهد شد) ، معادلهٔ زیر برای $x^{(2)}$ به دست می‌آید :

$$\ddot{x}^{(2)} + 2\lambda\dot{x}^{(2)} + \omega_0^2 x^{(2)} = -2\alpha x^{(1)}x^{(2)}$$

یا :

$$\ddot{x}^{(2)} + 2\lambda\dot{x}^{(2)} + \omega_0^2\left[1 - \frac{2\alpha f}{3m\omega_0^4}\cos(2\omega_0 + \varepsilon)t\right]x^{(2)} = 0 \qquad (29-10)$$

که متشابه بارابطهٔ (۸-۲۷) (با درنظر گرفتن‌اصطکاك) است وهمانطور که‌دیدیم، درمحدودهٔ معینی از بسامدها ، به پایداری نوسانها منجر می‌شود .

برای محاسبهٔ دامنهٔ نوسانهای سیستم ، این معادله‌کافی نیست و برای به‌دست آوردن دامنه باید جملات غیرخطی$x^{(2)}$ را نیز محسوب‌کنیم چه جملات غیرخطی نیز براین دامنه اثر می‌گذارند .

$$\ddot{x}^{(2)} + 2\lambda\dot{x}^{(2)} + \omega_0^2 x^{(2)} + \alpha x^{(2)2} + \beta x^{(2)3} = \frac{2\alpha f}{3m\omega_0^2}x^{(2)}\cos(2\omega_0 + \varepsilon)t \qquad (29-11)$$

با روشی جالب که در ذیل ذکرخواهیم کرد، مسئله بسیارساده می‌شود : اگر درطرف راست معادلهٔ (۱۱-۲۹)

$$x^{(2)}=b\cos[(\omega_0+\frac{1}{2}\varepsilon)t+\delta]$$

را قرار دهیم (b دامنهٔ تشدید و δ اختلاف فاز ثابتی‌است که در بحث ماکوچکترین اهمیتی ندارد) ، باتبدیل حاصلضرب کسینوسها به حاصلجمع ، به عبارتی‌نظیرجملهٔ تشدید معمولی برمی‌خوریم (با بسامد طبیعی ω_0) :

$$\left(\frac{\alpha f b}{3m\omega_0^2}\right)\cos[(\omega_0+\frac{1}{2}\varepsilon)t-\delta]$$

از این‌رو مسئله برمی گردد به‌آنچه در ابتدای این بخش مورد بررسی قرار گرفت . یعنی تشدید مانند سیستمهای غیرخطی انجام می‌پذیرد ؛ با این تفاوت که دامنهٔ نوسان نیروی خارجی برابر است با $\frac{\alpha f b}{3\omega_0^2}$ و نیز ε به $\frac{1}{2}\varepsilon$ تبدیل می‌شود . با این تغییرات معادلهٔ (۴-۲۹) به صورت زیر نوشته می‌شود :

$$b^2[(\frac{1}{2}\varepsilon-\varkappa b^2)^2+\lambda^2]=\alpha^2f^2b^2/36m^2\omega_0^6$$

اگر این معادله را برحسب b حل کنیم ، مقادیر ممکن برای دامنهٔ تشدید به دست می‌آیند:

$$b=0 \tag{۲۹-۱۲}$$

$$b^2=\frac{1}{\varkappa}\left[\frac{1}{2}\varepsilon+\sqrt{\left(\frac{\alpha f}{6m\omega_0^3}\right)^2-\lambda^2}\right] \tag{۲۹-۱۳}$$

$$b^2=\frac{1}{\varkappa}\left[\frac{1}{2}\varepsilon-\sqrt{\left(\frac{\alpha f}{6m\omega_0^3}\right)^2-\lambda^2}\right] \tag{۲۹-۱۴}$$

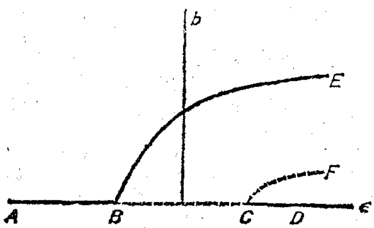
در حالت $\varkappa>0$ ، نمایش تغییرات b برحسب ε در شکل ۳۳ رسم شده است . وقتی $\varkappa<0$ نمایش تغییرات $b(\varepsilon)$ ، نسبت به محور b ، قرینهٔ منحنی رسم شده در شکل ۳۳ می‌باشد . در ازاء

$$\varepsilon=\pm\sqrt{\left(\frac{\alpha f}{3m\omega_0^3}\right)^2-4\lambda^2}$$

نقاط BوC به دست می‌آیند . درطرف چپ B ، تنها مقدار $b=0$ امکان پذیراست؛ یعنی تشدیدرخ نمی‌دهد ونوسانهایی که‌بسامدی نزدیك به ω_0 دارند ، تحریك نمی‌شوند . درمیان BوC معادله دوریشه دارد : ریشهٔ $b=0$ ، (BC) و ریشهٔ (۱۳-۲۹)، (BE) . در طرف

راست نقطهٔ C معادله سه ریشه دارد : (۱۲ــ۲۹) ، (۱۳ــ۲۹) ، (۱۴ــ۲۹) . اما این سه ریشه ، همه مربوط به نوسانهای پایدار سیستم نیستند . در فاصلهٔ BC[1] ، ریشهٔ $b=0$ ناپایدار است و نیز می‌توان نشان داد که ریشهٔ (۱۴ــ۲۹) همیشه مربوط به دامنهٔ ناپایدار سیستم است . در شکل ۳۳ مقادیر ناپایدار b با خطچین نمایش داده شده است .

حال سیستمی را که در ابتدا ساکن بوده مورد مطالعه قرار می‌دهیم[2] . اگر بسامد نیروی خارجی را به تدریج کم کنیم، تا نقطهٔ C دامنهٔ b برابر صفر است . درنقطهٔ C دامنهٔ نوسان ناگهان به طور انفصالی به شاخهٔ EB می‌جهد و سپس در امتداد آن کاهش می‌یابد و در B برابر صفر می‌شود . اگر دوباره بسامد را بزرگ کنیم دامنهٔ نوسان در امتداد شاخهٔ BE بزرگ می‌شود[3].



(شکل ۳۳)

دراین بخش تنها تشدیدهای مهم سیستم را موردبررسی قرار دادیم ، ولی درنوسانهای غیرخطی (در تقریبات بالاتر) تشدیدهای بسیاری رخ می‌دهند . دقیقتر بگوئیم در هر بسامد γ که در رابطهٔ

$$n\gamma+m\omega_0=\omega_0$$

۱ــ این پاره خط ، در تشدید پارامتری مربوط است به ناحیهٔ (۱۲ــ۲۷) و بامقایسهٔ دو رابطهٔ (۱۰ــ۲۹) و (۸ــ۲۷) نتیجه می‌شود :

$$|h|=\frac{2\alpha f}{3m\omega_0^4}$$

شرط تشدید آنست که $h>h_k$ و در اینجا :

$$\left|\frac{2\alpha f}{3m\omega_0^3}\right|>4\lambda$$

۲ــ باید توجه داشت که در اینجا پدیدهٔ تشدید مطمح نظر است وگرنه سیستم در غیاب این پدیده ساکن نیست و نوسانهای اجباری کوچکی با بسامد γ دارد .

۳ــ باید توجه داشت که روابط منتجه را با فرض کوچک‌بودن b و ε به‌دست‌آورده‌ایم. در واقع امر ، منحنیهای CF و BE در یك نقطهٔ معین با یکدیگر تلاقی می‌کنند ؛ درآن‌نقطه نوسان قطع می‌شود و ازآن پس $b=0$ خواهد بود .

صدق کند ، سیستم تشدید می‌یابد (n و m اعداد صحیح می‌باشند) ؛ یعنی در ازاء $\gamma = \frac{p}{q}\omega_{\circ}$ (p و q اعداد صحیح می‌باشند) . در تقریبات بالاتر از قدرت تشدید کاسته می‌شود و نیز پهنای ناحیهٔ بسامدهای تشدیدتقلیل می‌یابد؛ به طوری که درعمل پدیدهٔ تشدید، در نزدیکی بسامد $\gamma \approx \frac{p}{q}\omega_{\circ}$ ، تنها در ازاء مقادیر کوچك p و q قابل مشاهده است .

مسئله

تابع $b(\varepsilon)$ را برای‌تشدید درنزدیکی‌بسامد $\gamma \approx ۳\omega_{\circ}$ به‌دست بیاورید.

حل : در تقریب اول :

$$x^{(۱)} = \frac{-f}{۸m\omega_{\circ}^{۲}} cos(۳\omega_{\circ}+\varepsilon)t$$

و در تقریب دوم به‌کمك رابطهٔ (۱ـ۲۹) داریم :

$$\ddot{x}^{(۲)} + ۲\lambda\dot{x}^{(۲)} + \omega_{\circ}^{۲}x^{(۲)} + \alpha x^{(۲)۲} + \beta x^{(۲)۳} = -۳\beta x^{(۱)}x^{(۲)۲}$$

که در طرف راست معادله تنها جملهٔ تشدید منظور شده است . با قراردادن

$$x^{(۲)} = b cos[(\omega_{\circ} + \frac{۱}{۳}\varepsilon)t + \delta]$$

در رابطهٔ فوق و محاسبهٔ جملهٔ تشدید ، پس از تبدیل حاصل‌ضرب کسینوسها به حاصل‌جمع ، طرف راست معادله چنین می‌شود :

$$(۳\beta b^{۲}f/۳۲m\omega_{\circ}^{۲}) cos[(\omega_{\circ} + \frac{۱}{۳}\varepsilon)t - ۲\delta]$$

تابع $b(\varepsilon)$ با قراردادن $\frac{۳\beta b^{۲}f}{۳۲\omega_{\circ}^{۲}}$ به جای f و $\frac{۱}{۳}\varepsilon$ به‌جای ε ، درمعادلهٔ (۴ـ۲۹) محاسبه می‌شود :

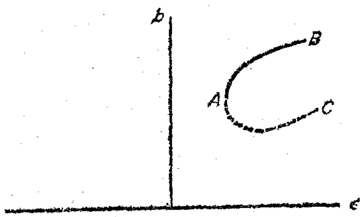
$$b^{۲}[(\frac{۱}{۳}\varepsilon - \varkappa b^{۲})^{۲} + \lambda^{۲}] = (۹\beta^{۲}f^{۲}/۲^{۱۲}m^{۲}\omega_{\circ}^{۶})b^{۴} \equiv Ab^{۴}$$

ریشه‌های معادلهٔ فوق برابرند با :

$$b=0 \quad \text{و} \quad b^2=\frac{\varepsilon}{3\varkappa}+\frac{A}{2\varkappa^2}\pm\frac{1}{\varkappa}\sqrt{\frac{\varepsilon A}{3\varkappa}+\frac{A^2}{4\varkappa^2}-\lambda^2}$$

شکل ۳۴ نمایش تغییرات $b(\varepsilon)$ را در ازاء $\varkappa>0$ نشان می‌دهد : تنها مقدار $b=0$ (محور ε) و شاخهٔ AB مربوط به حالت پایدار سیستم است . در نقطهٔ A داریم :

$$\varepsilon_k=\frac{3(4\varkappa^2\lambda^2-A^2)}{4\varkappa A} \quad \text{و} \quad b_k^2=\frac{4\varkappa^2\lambda^2+A^2}{4\varkappa^2 A}$$



(شکل ۳۴)

نوسانها تنها در ناحیهٔ $\varepsilon<\varepsilon_k$ و یا $b>b_k$ امکان پذیر است . چون درحالت $b=0$ ، سیستم همیشه پایداراست، درعمل برای پرش به شاخهٔ AB بایدسیستم را تحریك کرد .

روابط فوق تنها در ازاء مقادیر کوچك ε قابل قبول است و این شرط موقعی برقرار است که λ کوچك باشد و نیز دامنهٔ نیروی خارجی در رابطهٔ زیر صدق کند :

$$\frac{\varkappa\lambda^2}{\omega_0}\ll A\ll\varkappa\omega_0$$

۳۰ : حرکت در میدان نوسانی تند

در این بخش حرکت ذره‌ای را که تحت اثر میدان پتانسیل ثابت U و نیز نیروی

$$f=f_1\cos\omega t+f_2\sin\omega t \qquad (۳۰-۱)$$

قرار دارد ، مورد مطالعه قرار می‌دهیم . نیروی f با بسامد بلند ω برحسب زمان تغییر می‌کند (f_1 و f_2 توابعی ازمختصات ذره‌اند) ؛ منظوراز کلمهٔ بسامدبلندآنست که $\omega\gg\frac{1}{T}$ (T دورهٔ تناوب ذرهٔ است،اگرتنها درمیدان U قرارگرفته بود) . دراینجا اندازهٔ f نسبت

به نیروهای ناشی از میدان U کوچك فرض‌نمی‌شود بلکه تنها نوسانهای ذره را (که درزیر با ξ نشان می‌دهیم) در اثر این نیروکوچك می‌پنداریم .

برای آن‌که مسئله را ساده‌تر کرده باشیم، حرکت ذره را یك‌بعدی ومیدان U را تنها تابعی از مختصهٔ فضائی x می‌پنداریم . از این‌رو معادلات حرکت می‌شوند[1]:

$$m\ddot{x} = -\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}x} + f \qquad (۳۰\text{–}۲)$$

از طبیعت میدانی که ذرهٔ مادی در آن حرکت می‌کند ، نتیجه می‌شود که ذره برمسیری «منحرف‌نشده»[2] می‌گذرد ولی همزمان با آن ، در حول این مسیر حرکتی با بسامد ω دارد . به همین جهت تابع $x(t)$ را مجموع دوتابع زیر می‌پنداریم :

$$x(t) = X(t) + \xi(t) \qquad (۳۰\text{–}۳)$$

که $\xi(t)$ مربوط به نوسانهای کوچك ذرهٔ مادی است .

مقدار متوسط تابع $\xi(t)$ در هر دورهٔ تناوب $\frac{2\pi}{\omega}$ برابرصفر می‌شود و تابع $X(t)$ با گذشت زمان تنها به‌آهستگی تغییرمی‌کند . چنانچه مقدارمتوسط تابع $x(t)$ را به $\bar{x}$ نمایش دهیم ، داریم :

$$\bar{x} = X(t)$$

یعنی $X(t)$ مقدار متوسط تغییرمکان ذره‌ایست‌که برمسیر «منحرف‌نشده» ، با نوسانهای تند پیش می‌رود . در این بخش سعی می‌کنیم‌که تابع $X(t)$ را مشخص‌کنیم[3].

با قرار دادن (۳۰–۳) در (۳۰–۲) و بسط آن تا جمله‌های رستهٔ اول ξ ، به دست می‌آید :

$$m\ddot{X} + m\ddot{\xi} = -\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}X} - \xi\frac{\mathrm{d}^2U}{\mathrm{d}X^2} + f(X,t) + \xi\frac{\partial f}{\partial X} \qquad (۳۰\text{–}۴)$$

این معادله شامل حرکت ساده و نیز حرکت نوسانی سیستم است و به سادگی می‌توان این‌دو

۱– احتیاجی نیست‌که مختصات x در دستگاه کارتزین محاسبه شود و ازآنجا ضریب m نه جرم سیستم است و نه‌آنکه مقداریست ثابت . معهذا این‌فرضها درنتیجهٔ نهائی اثری‌نخواهند داشت .

۲– «Unperturbed»

۳– اولین‌کسی‌که این رابطه را به دست‌آورد، پ ـ ل ـ کاپیتزا (P .L. Kapitza) بود (۱۹۵۱) .

حرکت را از هم مجزا کرد . برای حرکت نوسانی می‌توان به طور ساده نوشت :

$$m\ddot{\xi}=f(X,t) \qquad (۳۰-۵)$$

و از جملات دیگری که عامل ξ در آنها ضرب شده است به علت کوچکی صرف‌نظر کرد . (مشتق $\ddot{\xi}$ متناسب است با مقدار بزرگ ω^2 و نمی‌توان از آن درگذشت) . با قراردادن f از رابطهٔ (۱ــ۳۰) دررابطهٔ (۵ــ۳۰) و انتگرال‌گیری ازآن ، به دست می‌آید (X راثابت پنداشته‌ایم) :

$$\xi=-\frac{f}{m\omega^2} \qquad (۳۰-۶)$$

حال مقدار متوسط تابع (۴ــ۳۰) را نسبت به زمان حساب می‌کنیم . چون مقدار متوسط توانهای اول ξ و f صفر است ، داریم :

$$m\ddot{X}=-\frac{dU}{dX}+\overline{\xi\frac{\partial f}{\partial X}}=-\frac{dU}{dX}-\frac{1}{m\omega^2}\overline{f\frac{\partial f}{\partial X}}$$

و این رابطه تنها شامل تابع $X(t)$ است . این رابطه را می‌توان به صورت زیر نوشت :

$$m\ddot{X}=-\frac{dU_{eff}}{dX} \qquad (۳۰-۷)$$

و درآن انرژی پتانسیل مؤثر برابر است با[1]:

$$U_{eff}=U+\overline{f^2}/2m\omega^2=U+(f_1^2+f_2^2)/4m\omega^2 \qquad (۳۰-۸)$$

از مقایسهٔ این رابطه با (۶ــ۳۰) به سادگی دیده می‌شود که مقدارافزوده‌شده بر U مساوی انرژی جنبشی متوسط حرکت نوسانی است :

$$U_{eff}=U+\frac{1}{2}m\overline{\dot{\xi}^2} \qquad (۳۰-۹)$$

از این قرار مقدارمتوسط حرکت ذره‌ای که بانوسانهای تند برمسیری «منحرف‌نشده» پیش می‌رود ، متشابه حرکت در میدان پتانسیل U است که مقداری ثابت متناسب با مربع دامنهٔ میدان متغیر برآن‌افزوده باشیم .

نتیجه را می‌توان در مورد سیستمی که چند درجهٔ آزادی دارد نیز تعمیم داد . اگر مختصات عمومی q_i را درنظر بگیریم ، انرژی پتانسیل مؤثر دیگر با رابطهٔ (۸ــ۳۰) داده نمی‌شود ، بلکه :

۱ــ با محاسباتی طولانیتر می‌توان‌نشان دادکه چنانچه m تابعی از x باشد،باز روابط (۷ــ۳۰) و (۸ــ۳۰) صادق خواهند بود.

$$U_{eff}=U+\frac{1}{2\omega^2}\sum_{i,k}a_{ik}^{-1}\overline{f_i f_k}=U+\sum_{i,k}\frac{1}{2}a_{ik}\overline{\dot{\xi}_i\dot{\xi}_k} \qquad (۳۰-۱۰)$$

ضرایب a_{ik}^{-1} که درحالت کلی توابعی ازمختصاتند، عناصر ماتریس‌معکوس ماتریس‌ضرایب a_{ik}، در انرژی جنبشی سیستم هستند (به ۵-۵ مراجعه شود).

مسائل

مسئلهٔ ۱ـ موضع تعادل آونگی را که نقطهٔ اتکایش در امتداد قائم با بسامد بلند γ ($\gamma \gg \sqrt{\frac{g}{l}}$) نوسان می‌کند ، به دست بیاورید .

حل : دربخش ۵ درمسئلهٔ (c)۳ تابع لاگرانژ این سیستم محاسبه شد. ملاحظه می‌شودکه نیروی متغیر

$$f=-mla\gamma^2\cos\gamma t\sin\varphi$$

به سیستم اثرمی‌کند (مختصات x دراینجا بامختصات φ نشان داده‌شده‌است). انرژی پتانسیل مؤثر برابر است با :

$$U_{eff}=mgl[-\cos\varphi+\frac{a^2\gamma^2}{4gl}\sin^2\varphi]$$

موضع تعادل پایدار مربوط به مینیمم این تابع است . درحالتی‌که آونگ در امتداد قائم و در جهت پائین قرار دارد($\varphi=0$)، تعادل همیشه پایدار است و اگرشرط $a^2\gamma^2>2gl$ برقرارباشد ، امتداد قائم رو به بالا نیز موضع تعادل پایدار است ($\varphi=\pi$) .

مسئلهٔ ۲ ـ مانند مسئلهٔ یك ولی نقطهٔ اتکاء در امتداد افق حرکت می‌کند .

حل : تابع لاگرانژ این سیستم دربخش ۵، مسئلهٔ (b)۳ محاسبه شده است . به دست می‌آوریم :

$$f=mla\gamma^2\cos\gamma t\cos\varphi$$

و انرژی پتانسیل مؤثر برابر است با :

$$U_{eff}=mgl[-\cos\varphi+(a^2\gamma^2/4gl)\cos^2\varphi]$$

اگر $a^2\gamma^2<2gl$ باشد موضع $\varphi=0$ در تعادل پایدار است و اگر $a^2\gamma^2>2gl$ باشد ، علاوه‌بر آن در موضع $\varphi=Arccos\,2gl/a^2\gamma^2$ نیز سیستم در تعادل پایدار است .

فصل ششم

حرکت جسم صلب

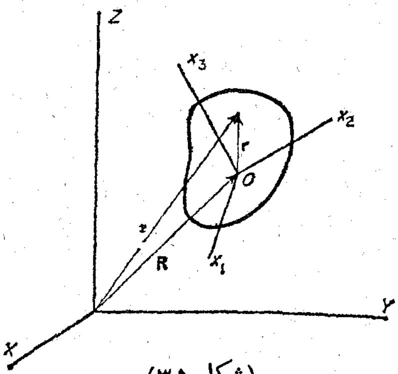
۳۱ : سرعت زاویه‌ای

در مکانیك بنا به تعریف ، سیستمی از ذرات که فواصل بین آنها ثابت بماند ، جسم صلب نام دارد . این شرط با تقریب درمورد سیستمهائی که درطبیعت وجود دارندنیز صادق است ؛ چه بیشتر اجسام جامد در شرایط عادی آن قدر به‌آهستگی تغییر شکل می‌دهند که می‌توان از این تغییرات در هنگام مطالعهٔ قوانین حرکت کلی جسم چشم‌پوشی کرد .

در این مبحث ، برای آنکه نتایج ساده‌تری به دست بیاید ، غالباً جسم صلب را مجموعه‌ای از ذرات مجزا فرض خواهیم کرد . معهذا این فرض بهیچوجه متباین با این حقیقت که می‌توان جسم صلب را درمکانیك پیوسته فرض کرد وساختمان داخلی آن را نادیده انگاشت ، نیست . برای به دست‌آوردن معادلات حرکت جسم پیوسته،از روابطی که شامل مجموعهٔ نقاطی مجزا می‌باشد ، کافیست که جرم هرذره با جرم ρdV از جزء حجم dV (ρ جرم مخصوص جسم است) و علامت مجموعه با انتگرال روی حجم جسم مزبورتعویض گردد.

برای توصیف حرکت جسم می‌توان دو سیستم مختصات به‌کار برد : یکی سیستم ثابت XYZ (ماند) و یکی سیستم متحرك $x_1=x$ و $x_2=y$ و $x_3=z$ که در جسم مستقر شده است وباآن حرکت می‌کند. بهتر است مبدأ سیستم‌متحرك را منطبق برمرکزثقل جسم‌اختیار کنیم. هرگاه وضع سیستم متحرك نسبت به‌سیستم‌ثابت‌معین‌باشد، موضع جسم‌درسیستم مختصات ثابت کاملاً مشخص می‌شود. فرض می‌کنیم که O مبدأ مختصات سیستم متحرك به‌وسیلهٔ شعاع

حامل $\mathbf{R}$ مشخص شود (شکل ۳۵) . امتداد محورهای این سیستم نسبت به مختصات ثابت با سه زاویهٔ مستقل معین می‌شود که با سه مؤلفهٔ $\mathbf{R}$ شش مختصات به دست می‌دهند. به‌این‌ترتیب جسم صلب سیستمی مکانیکی است که شش درجهٔ آزادی دارد .



(شکل ۳۵)

تغییر مکان اختیاری و بی‌نهایت‌کوچك جسم صلبی را درنظر می گیریم . می‌توان‌این تغییر مکان را مجموع دوحرکت دانست : یکی حرکت انتقالی بی‌نهایت کوچکی است که در نتیجهٔ آن مرکز ثقل به نقطهٔ نهایی تغییر مکان می‌رسد و در ضمن آن جهت محورهای مختصات متحرك بدون تغییر می‌ماند ؛ دیگری چرخش بی‌نهایت‌کوچکی است که جسم حول مرکز ثقل خود انجام می‌دهد و درموضع نهائی قرار می گیرد .

فرض می‌کنیم $\mathbf{r}$ شعاع حامل نقطهٔ اختیاری P از جسم جامد در سیستم متحرك و $\underset{\cdot}{\mathbf{r}}$ شعاع حامل همان نقطه در سیستم ثابت باشد ؛ در این صورت‌تغییرمکان بی‌نهایت‌کوچك $d\underset{\cdot}{\mathbf{r}}$ نقطهٔ P ، شامل تغییرمکان $d\mathbf{R}$ مرکزثقل وتغییرمکان $d\phi\times\mathbf{r}$ نسبت به مرکز ثقل‌خواهد بود (که دراثرچرخش به اندازهٔ $d\phi$ حاصل شده است (مراجعه شود به ۱ـ۹)). درنتیجه :

$$d\underset{\cdot}{\mathbf{r}}=d\mathbf{R}+d\phi\times\mathbf{r}$$

باتقسیم‌رابطهٔ فوق‌برجزءزمان dt (مدتی که‌تغییرمکان‌ظرف آن‌صورت گرفته‌است) وباقراردادن

$$\frac{d\underset{\cdot}{\mathbf{r}}}{dt}=\mathbf{v} \quad \text{و} \quad \frac{d\mathbf{R}}{dt}=\mathbf{V} \quad \text{و} \quad \frac{d\phi}{dt}=\overrightarrow{\Omega} \qquad (۳۱\text{-}۱)$$

درآن رابطهٔ زیر به دست می‌آید :

$$\mathbf{v}=\mathbf{V}+\overrightarrow{\Omega}\times\mathbf{r} \qquad (۳۱\text{-}۲)$$

بردار $\mathbf{V}$ سرعت مرکز ثقل جسم وهمچنین سرعت انتقالی جسم است . بردار $\overrightarrow{\Omega}$ **سرعت زاویه‌ای** چرخش جسم میباشد وجهت‌آن مانند $d\phi$ درامتداد محور چرخش‌است.

به این ترتیب سرعت $\mathbf{v}$ هر نقطهٔ جسم را نسبت به سیستم مختصات ثابت ، می‌توان برحسب سرعت انتقالی جسم و سرعت زاویه‌ای چرخش آن بیان کرد .

باید خاطر نشان کرد که برای به دست‌آوردن رابطهٔ (۲ـ۳۱) استفاده‌ای از منطبق بودن مبدأ سیستم مختصات متحرك با مرکز ثقل جسم نکرده‌ایم . مزیت این انتخاب در محاسبهٔ انرژی جسم متحرك مشهود خواهد گشت .

حال فرض می‌کنیم ، مختصات نصب شده در جسم طوری باشد که مبدأ آن بر مرکز ثقل منطبق نباشد بلکه در نقطهٔ دیگری ، مانند O' که به فاصلهٔ $\mathbf{a}$ از O قراد دارد ، واقع شده باشد . سرعت O' را با $\mathbf{V}'$ و سرعت زاویه‌ای سیستم مختصات جدید را با $\overrightarrow{\Omega'}$ نمایش می‌دهیم . بنابراین داریم :

$$\mathbf{r}=\mathbf{r}'+\mathbf{a}$$

و با جانشین‌کردن آن در (۲ـ۳۱) رابطهٔ زیر حاصل می‌شود :

$$\mathbf{v}=\mathbf{V}+\overrightarrow{\Omega}\times\mathbf{a}+\overrightarrow{\Omega}\times\mathbf{r}'$$

با استفاده از تعریف $\overrightarrow{\Omega'}$ و $\mathbf{V}'$ رابطهٔ زیر به دست می‌آید :

$$\mathbf{v}=\mathbf{V}'+\overrightarrow{\Omega'}\times\mathbf{r}'$$

از آنجا خواهیم داشت :

$$\mathbf{V}'=\mathbf{V}+\overrightarrow{\Omega}\times\mathbf{a} \quad , \quad \overrightarrow{\Omega'}=\overrightarrow{\Omega} \qquad (۳۱\text{-}۳)$$

دومین معادله ، از روابط فوق ، حائز اهمیت بسیار است . دیده می‌شود که در هر لحظه سرعت زاویه‌ای چرخش سیستم مختصات مستقر درجسم ، مستقل ازخصوصیات سیستم انتخاب شده است . تمام این سیستمها با سرعت زاویه‌ای $\overrightarrow{\Omega}$ که ازلحاظ مقدار برابر وازنظر امتداد باهم موازیند ، میچرخند . ازگفتار بالا نتیجه می‌شود که می‌توان $\overrightarrow{\Omega}$ را سرعت زاویه‌ای جسم نامید ، درحالی که سرعت حرکت انتقالی دارای این خاصیت «مطلق بودن» نیست .

ازمعادلهٔ اول (۳ـ۳۱) دیده می‌شود که اگر $\mathbf{V}$ و $\overrightarrow{\Omega}$ (که مبدأسیستم مختصات‌مربوط به‌آنها O است) متعامد باشند، $\mathbf{V}'$ و $\overrightarrow{\Omega'}$ نیز در انتخاب مبدأ دلخواه O' متعامد خواهندبود. فرمول (۲ـ۳۱)، نشان می‌دهد که در این‌حالت سرعتهای $\mathbf{v}$ تمام نقاط جسم بر $\overrightarrow{\Omega}$ عمودند . در این‌صورت همواره ممکن است[1]، مبدأ O' را آنچنان‌انتخاب کرد که سرعت V' آن صفر باشد . درآن صورت حرکت جسم در لحظهٔ موردمطالعه فقط چرخشی خالص حول محوری که از O' می‌گذرد ، خواهد بود ؛ این محور را محور آنی دوران می‌نامند[2].

۱ــ O' می‌تواند بیرون جسم واقع شود .

۲ــ درحالت کلی که $\mathbf{V}$ و $\overrightarrow{\Omega}$ متعامد نیستند ، مبدأ را می‌توان آن چنان انتخاب کرد که $\mathbf{V}$ و $\overrightarrow{\Omega}$ باهم موازی‌گردند ؛ به طوری‌که حرکت (درلحظهٔ مورد مطالعه) ازچرخش حول یك محور همراه با انتقال در امتداد همان محورتشکیل شود .

در آینده همواره مبدأ سیستم متحرك را منطبق بر مرکز ثقل سیستم فرض می‌کنیم و به این ترتیب محور دوران از مرکز ثقل خواهد گذشت . درحالت کلی هم مقدار و هم جهت $\vec{\Omega}$ درطول حرکت تغییر می‌کند .

۳۲ : تانسور ماند

برای محاسبهٔ انرژی جنبشی یك جسم صلب ، آنرا سیستمی از ذرات مجزا فرض کرده می‌نویسیم :

$$T=\Sigma\frac{1}{2}mv^2$$

که درآن عمل جمع روی تمام ذرات جسم انجام می‌شود . دراینجا و همچنین درآینده برای سادگی ، از نوشتن اندیسی که ذرات را معین می‌کند ، صرفنظر می‌کنیم . با استفاده از (۲-۳۱) خواهیم داشت :

$$T=\sum\frac{1}{2}m(\mathbf{V}+\vec{\Omega}\times\mathbf{r})^2=\sum\frac{1}{2}mV^2+\sum m\mathbf{V}\cdot\vec{\Omega}\times\mathbf{r}+\sum\frac{1}{2}m(\vec{\Omega}\times\mathbf{r})^2$$

سرعتهای $\mathbf{V}$ و $\vec{\Omega}$ برای تمام نقاط جسم یکی می‌باشند . بنابراین در اولین جمله ، $\frac{1}{2}V^2$ را می‌توان از زیر علامت جمع بیرون آورد و Σm نیز برابر با جرم جسم است که ما آنرا با μ نمایش می‌دهیم . دومین جمله را می‌توان به صورت زیر نوشت :

$$\Sigma m\mathbf{V}\cdot\vec{\Omega}\times\mathbf{r}=\Sigma m\mathbf{r}\cdot\mathbf{V}\times\vec{\Omega}=\mathbf{V}\times\vec{\Omega}\Sigma m\mathbf{r}$$

چون مبدأ سیستم مختصات متحرك را منطبق بر مرکز ثقل گرفته‌ایم ، جملهٔ فوق صفر است (زیرا $\Sigma m\mathbf{r}=0$) .

بالاخره درجملهٔ سوم، مجذور حاصلضرب دوبردار رابسط می‌دهیم ، درنتیجه خواهیم داشت :

$$T=\frac{1}{2}\mu V^2+\frac{1}{2}\sum m[\Omega^2r^2-(\vec{\Omega}\cdot\mathbf{r})^2] \qquad (۳۲-۱)$$

به این ترتیب انرژی جنبشی یك جسم جامد را می‌توان به صورت مجموع دو قسمت نوشت . اولین جملهٔ (۱-۳۲) انرژی جنبشی حرکت انتقالی است . این جمله را می‌توان انرژی جنبشی جسم درصورتیکه تمام جرم آن درمرکز ثقلش متمرکز شده باشد ، دانست . دومین جمله ، انرژی جنبشی چرخش با سرعت زاویه‌ای $\vec{\Omega}$ حول محوری است که از مرکز ثقل می‌گذرد . تأکید می‌کنیم که این تقسیم انرژی جنبشی فقط در اثر این امکان‌پذیر شده است که مبدأ مختصات سیستم مستقر شده درجسم را منطبق برمرکز ثقل آن‌انتخاب کرده‌ایم.

می‌توان انرژی جنبشی چرخش را به صورت تانسور ، یعنی برحسب مؤلفه‌های[1] x_i و Ω_i بردارهای $\mathbf{r}$ و $\vec{\Omega}$ نوشت . در این‌صورت خواهیم داشت :

$$T_{rot}=\frac{1}{2}\sum m(\Omega_i^2 x_l^2-\Omega_i x_i \Omega_k x_k)=$$

$$=\frac{1}{2}\sum m(\Omega_i\Omega_k\delta_{ik}x_l^2-\Omega_i\Omega_k x_i x_k)=$$

$$=\frac{1}{2}\ \Omega_i\Omega_k\sum m(x_l^2\delta_{ik}-x_i x_k)$$

در اینجا از اتحاد $\Omega_i=\delta_{ik}\Omega_k$ که در آن δ_{ik} تانسور واحد است (مؤلفه‌های آن به ازاء $i=k$ واحد و برای $i\neq k$ صفراست) ، استفاده کرده‌ایم . بافرض تانسور

$$I_{ik}=\Sigma m(x_l^2\delta_{ik}-x_i x_k) \qquad (۳۲-۲)$$

عبارت زیر سرانجام به دست می‌آید :

$$T=\frac{1}{2}\mu V^2+\frac{1}{2}I_{ik}\Omega_i\Omega_k \qquad (۳۲-۳)$$

که نمایندهٔ انرژی جنبشی جسم صلب است .

تابع لاگرانژ یك جسم صلب را می‌توان با کم‌کردن انرژی پتانسیل از (۳-۳۲) به دست آورد :

$$L=\frac{1}{2}\mu V^2+\frac{1}{2}I_{ik}\Omega_i\Omega_k-U \qquad (۳۲-۴)$$

انرژی پتانسیل عموماً تابعی از شش مختصات است که موضع جسم صلب را تعیین می‌کند (مثلاً سه مختصات Z و Y و X مرکز ثقل و سه زاویه‌ای که طرز قرارگرفتن محورهای متحرك را نسبت به محورهای ثابت تعیین می‌کند) .

تانسور I_{ik} را تانسور ماند می‌نامند . چنانکه از تعریف (۲-۳۲) برمی‌آید ، این تانسور متقارن است ؛ یعنی داریم :

$$I_{ik}=I_{ki} \qquad (۳۲-۵)$$

۱ـ دراین فصل حرفهای i و k و l اندیسهای تانسوری هستند ومقادیر ۱ و ۲ و ۳ را می‌گیرند. قانون جمع همواره به‌کاربرده می‌شود؛ یعنی علامات‌جمع حذف می‌شود وعمل جمع ، نسبت به مقادیر ۱ و ۲ و ۳ ، وقتی یك‌اندیس دومرتبه دریك عبارت به‌کار برده می‌شود، باید انجام‌گیرد. مثلاً $A_iB_i=\mathrm{A.B}$ و $A^2{}_l=A_lA_l=\mathrm{A}^2$ وغیره. چنین‌اندیسی، اندیس‌گنگ‌نام‌دارد. اندیس‌گنگ را می‌توان بااندیس‌مشابهی‌عوض‌کرد،مگرآنکه درعبارت موردنظردرجای دیگری به‌کار رفته‌باشد .

برای وضوح بیشتر مؤلفه‌ای آنرا به طور صریح ذکر می‌کنیم :

$$I_{ik}=\begin{bmatrix} \sum m(y^{2}+z^{2}) & -\sum mxy & -\sum mxz \\ -\sum myx & \sum m(x^{2}+z^{2}) & -\sum myz \\ -\sum mzx & -\sum mzy & \sum m(x^{2}+y^{2}) \end{bmatrix} \qquad (۳۲-۶)$$

مؤلفه‌های I_{xx} و I_{yy} و I_{zz} را گشتاورهای ماند حول محورهای مربوط می‌نامند .

تانسور ماند دارای خاصیت جمع پذیری است ؛ یعنی گشتاورهای ماند یك جسم برابر با مجموع گشتاورهای ماند قسمتهای مختلف آن می‌باشد .

اگر جسم را پیوسته درنظر بگیریم ، جمع به‌کاربرده شده درتعریف (۳۲-۲) تبدیل به انتگرال روی حجم جسم می‌گردد :

$$I_{ik}=\int \rho(x_l^{2}\delta_{ik}-x_ix_k)\mathrm{d}V \qquad (۳۲-۷)$$

مانند هر تانسور متقارن درجهٔ دوم ، تانسور اینرسی را می‌توان با انتخاب مناسب امتدادهای محورهای مختصات x_1، x_2، x_3 به‌صورت قطری درآورد. این‌امتدادها را محورهای اصلی‌ماند ومقادیرمربوط به‌مؤلفه‌های قطری‌این تانسور را گشتاورهای‌اصلی ماند نام‌گذاری کرده‌اند . ما این مقادیر رابا I_1وI_2وI_3 نمایش‌می‌دهیم. هرگاه محورهای x_1، x_2، x_3 را به طریق فوق انتخاب کنیم ، انرژی جنبشی چرخش به صورت سادهٔ

$$T_{rot}=\frac{1}{2}(I_1\Omega_1^{2}+I_2\Omega_2^{2}+I_3\Omega_3^{2}) \qquad (۳۲-۸)$$

درمی‌آید .

هیچ یك از گشتاورهای اصلی ماند نمی‌تواندازمجموع دوتای دیگر بیشتر شود : مثلاً

$$I_1+I_2=\Sigma m(x_1^{2}+x_2^{2}+2x_3^{2})\geqslant\Sigma m(x_1^{2}+x_2^{2})=I_3 \qquad (۳۲-۹)$$

جسمی را که سه‌گشتاور اصلی‌ماندش‌همگی متفاوت هستند ، فرفرهٔ نامتقارن می‌نامیم و اگر دوتای آنها باهم مساوی باشند $(I_1=I_2\neq I_3)$ ، آن را فرفرهٔ متقارن می‌گوییم. در این حالت امتداد یکی از محورهای اصلی در صفحهٔ x_1x_2 را می‌توان به طور دلخواه انتخاب کرد . اگر سه‌گشتاور اصلی ماند مساوی باشند ، جسم را فرفرهٔ کروی نامند و سه محور ماند را می‌توان هرسه محور متعامد دلخواه درنظر گرفت .

تعیین محورهای اصلی ماند درصورتیکه جسم متقارن باشد ، بسیارآسان است ؛ زیرا واضح است که موضع مرکزثقل وجهات محورهای‌اصلی‌باید دارای همان تقارن جسم باشند .

مثلاً اگر جسم یك صفحهٔ تقارن داشته باشد ، مرکز ثقل و همچنین دو تا از محور اصلی باید درآن صفحه قرار گیرند ومحور سوم برآن صفحه عمود باشد . یك حالت روشن ازاین مورد ، موقعی است که سیستمی از ذرات ، واقع در یك صفحه را درنظر بگیریم . اگر صفحهٔ سیستم راصفحهٔ x_1x_2 اختیار کنیم، دراین‌صورت برای‌هر ذره $x_3=0$ است و درنتیجه:

$$I_1=\Sigma m x_2^2 \quad و \quad I_2=\Sigma m x_1^2 \quad و \quad I_3=\Sigma m(x_1^2+x_2^2)$$

ازآنجا رابطهٔ زیر حاصل می‌شود :

$$I_3=I_1+I_2 \tag{۳۲-۱۰}$$

اگر جسمی دارای یك محور تقارن از مرتبهٔ دلخواهی باشد ، مرکز ثقل آن جسم باید روی آن قرار گیرد . علاوه براین ، این محور یکی ازمحورهای اصلی ماند خواهدبود و دو محور دیگر برآن عمودند . اگر محور تقارن از مرتبه‌ای بالاتر از دو باشد ، جسم فرفره متقارن است؛ چه هرمحوراصلی عمودبرمحور تقارن رامی‌توان تحت زاویه‌ای مخالف °۱۸۰دوران داد؛ به عبارت دیگرمحورهای متعامد منحصربفرد نیستند و این تنها ازخواص فرفره متقارن است .

حالت خاص از این مورد وقتی است که سیستم ذرات واقع برروی یك راستا را درنظر می‌گیریم . اگر راستای این سیستم را محور x_3 انتخاب کنیم ، برای هرذره داریم :

$$x_1=x_2=0$$

و بنابراین دوتا ازگشتاورهای اصلی ماند برابرند و سومی مساوی صفر است :

$$I_1=I_2=\Sigma m x_3^2 \quad و \quad I_3=0 \tag{۳۲-۱۱}$$

چنین سیستمی را «چرخنده» نامند . صفت مشخصه‌ای که چرخنده را از اجسام دیگرمتمایز می‌سازد، این‌است که این‌جسم تنها دارای دودرجهٔ آزادی دوران است وآن مربوط به دوران حول محورهای x_1 و x_2 است . واضح است که بحث دربارهٔ دوران یك خط مستقیم حول خودش بی‌معنی است .

موضوع دیگری رامربوط به محاسبهٔ تانسور ماند بررسی‌می‌کنیم: اگرچه این‌تانسور نسبت به سیستم مختصاتی‌که مبدأش درمرکز ثقل قراردارد، تعریف شده است (برای صحت معادلهٔ اساسی (۳-۳۲) شرط فوق لازم‌است) ، معهذا گاهی ساده‌تراست‌که ابتدا تانسورمشابه

$$I'_{ik}=\Sigma m(x'^2_l\delta_{ik}-x'_i x'_k)$$

را که نسبت به مبدأ دیگری مانند O' تعریف شده است ، محاسبه کرد . اگر فاصلهٔ OO' را با بردار $\mathbf{a}$ نمایش دهیم ، داریم :

$$x_i=x'_i+a_i \quad و \quad \mathbf{r}=\mathbf{r}'+\mathbf{a}$$

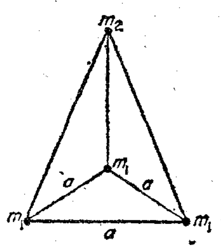
چون بنا به تعریف نقطهٔ O، $\sum m\mathbf{r}=0$ میباشد ، پس :

$$I'_{ik}=I_{ik}+\mu(a^{2}\delta_{ik}-a_{i}a_{k}) \qquad (۳۲-۱۲)$$

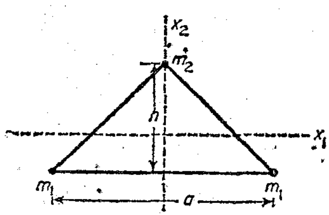
با استفاده از رابطهٔ فوق به‌آسانی می‌توان I_{ik} را با داشتن I'_{ik} تعیین کرد .

مسائل

مسئلهٔ ۱ـ گشتاورهای اصلی ماند را برای ملکولهای ذیل (که سیستم نقاط مادی بافاصلهٔ ثابت درنظر گرفته می‌شوند)، تعیین کنید: (a) یك ملکول دارای اتمهای واقع بریك راستا ، (b) یك ملکول سه اتمی به صورت مثلث متساوی‌الساقین (شکل۳۶) ، (c) یك ملکول چهار اتمی به شکل هرم که قاعده‌اش‌مثلث متساوی‌الاضلاع‌است(شکل ۳۷).



(شکل۳۷)



(شکل ۳۶)

حل :

$$I_{1}=I_{2}=\frac{1}{\mu}\sum_{a\neq b} m_{a}m_{b}l_{ab}^{2} \quad \text{و} \quad I_{3}=0 \qquad \textbf{(a)}$$

که درآن m_a جرم aامین‌اتم و l_{ab} فاصلهٔ بین اتم aام وbام است. جمع دارای یك جمله برای هرجفت اتم از ملکول است .

برای یك ملکول دواتمی جمع تنها شامل یك جمله است و این جمله برابر حاصلضرب جرم دواتم درمربع فاصلهٔ بین آنها است :

$$I_{1}=I_{2}=m_{1}m_{2}l^{2}/(m_{1}+m_{2})$$

(b) مرکز ثقل برمحور تقارن مثلث و درفاصلهٔ $X_2=\frac{m_2 h}{\mu}$ ازقاعده‌اش قرار دارد (h ارتفاع مثلث است) . گشتاورهای ماند برابرند با :

$$I_1=\frac{2m_1m_2h^2}{\mu} \text{ و } I_2=\frac{1}{2}m_1a^2 \text{ و } I_3=I_1+I_2$$

(c) مرکز ثقل برروی محور تقارن هرم و درفاصلهٔ $X_3=\frac{m_2 h}{\mu}$ از قاعده‌اش قرار دارد (h ارتفاع هرم است) . گشتاورهای ماند برابرند با:

$$I_1=I_2=\frac{3m_1m_2h^2}{\mu}+\frac{1}{2}m_1a^2 \text{ و } I_3=m_1a^2$$

اگر $m_1=m_2$ و $h=\sqrt{\frac{2}{3}}a$ باشد ، ملکول هرم منتظمی را می‌سازد ودر این حال $I_1=I_2=I_3=m_1a^2$ است .

مسئلهٔ ۲ ـ گشتاورهای اصلی ماند را برای اجسام همگن زیر تعیین کنید : (a) میلهٔ نازك به طول l ، (b) کره به شعاع R ، (c) استوانهٔ مدور به‌شعاع R و ارتفاع h، (d) مکعب مستطیل به ابعاد c و b و a، (e) مخروط مدور به ارتفاع h وشعاع قاعدهٔ R ، (f) بیضوی بامحورهای $2c$ و $2b$ و $2a$

حل : (a) ـ با صرف‌نظر کردن از ضخامت میله ، خواهیم داشت :

$$I_3=0 \text{ و } I_1=I_2=\frac{1}{12}\mu l^2 .$$

(b) با محاسبهٔ مجموع $I_1+I_2+I_3=2\rho\int r^2 dV$ به دست می‌آید:

$$I_1=I_2=I_3=\frac{2}{5}\mu R^2$$

(c) داریم :

$$I_1=I_2=\frac{1}{4}\mu(R^2+\frac{1}{3}h^2) \text{ و } I_3=\frac{1}{2}\mu R^2$$

(محور x_3 درامتداد محور استوانه می‌باشد) .

(d) در این حال داریم :

$$I_1=\frac{1}{12}\mu(b^2+c^2) \text{ و } I_2=\frac{1}{12}\mu(a^2+c^2) \text{ و } I_3=\frac{1}{12}\mu(a^2+b^2)$$

(محورهای x_1 و x_2 و x_3 به ترتیب در امتداد ابعاد a و b و c می‌باشند) .

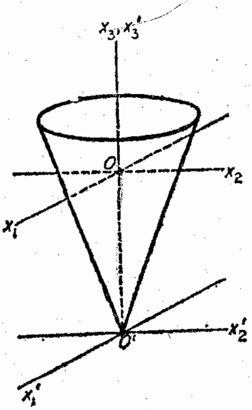
(e) ابتدا تانسور I'_{ik} را نسبت به محورهائی که مبدأشان در رأس

مخروط واقع است ، محاسبه می‌کنیم (شکل ۳۸) .
با به‌کار بردن مختصات استوانه‌ای این محاسبات ساده می‌شوند و نتایج زیر به دست می‌آید :

$$I'_1=I'_2=\frac{3}{5}\mu\left(\frac{1}{4}R^2+h^2\right) \quad و \quad I'_3=\frac{3}{10}\mu R^2$$

به‌آسانی معلوم می‌شود که مرکز ثقل برمحور مخروط و درفاصلهٔ $a=\frac{3}{4}h$ از رأس آن واقع است . با استفاده از رابطهٔ (۱۲-۳۲) نتیجه می‌شود :

$$I_1=I_2=I'_1-\mu a^2=\frac{3}{20}\mu\left(R^2+\frac{1}{4}h^2\right) \quad و \quad I_3=I'_3=\frac{3}{10}\mu R^2$$



(شکل ۳۸)

(f) مرکز ثقل در مرکز بیضوی است ومحورهای اصلی ماند درامتداد محورهای بیضوی قرار دارند . انتگرال‌گیری روی حجم بیضوی را می‌توان باتبدیل مختصات به‌صورت $x=a\xi$ و $y=b\eta$ و $z=c\zeta$ که معادلهٔ سطح بیضوی $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ را به معادلهٔ $\xi^2+\eta^2+\zeta^2=1$ (که معادلهٔ سطح کره‌ای به شعاع واحد است) تبدیل می‌کند ، به انتگرال روی حجم کره بدل کرد . مثلاً گشتاور ماند حول محور x برابر است با :

$$\begin{aligned} I_1&=\rho\iiint(y^2+z^2)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\\ &=\rho abc\iiint(b^2\eta^2+c^2\zeta^2)\,\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta\mathrm{d}\zeta=\\ &=\frac{1}{2}abcI'(b^2+c^2)\end{aligned}$$

که درآن I' گشتاور ماندکره به‌شعاع واحد است. چون حجم بیضوی مساوی $\frac{4\pi abc}{3}$ است ، گشتاورهای ماند برابر با مقادیر زیرمی‌شوند :

$$I_1=\frac{1}{5}\mu(b^2+c^2) \quad \text{و} \quad I_2=\frac{1}{5}\mu(a^2+c^2) \quad \text{و} \quad I_3=\frac{1}{5}\mu(a^2+b^2)$$

مسئلهٔ ۳ـ بسامد نوسانهای کم دامنهٔ پاندول مرکب (جسم صلبی که در میدان ثقل ، حول محور افقی ثابت نوسان می‌کند) را تعیین کنید .

حل : فاصلهٔ بین محور افقی مذکور و مرکز ثقل پاندول را با l و زوایای بین محورهای اصلی ماند را باآن محور با α و β و γ نمایش می‌دهیم. مختصات متغیررا زاویهٔ φ (زاویهٔ بین خط قائم وخطی که ازمرکزثقل برمحور دوران عمود می‌شود) در نظر می گیریم . سرعت مرکز ثقل $V=l\dot{\varphi}$ است و مؤلفه‌های سرعت زاویه‌ای در امتداد محورهای اصلی ماند برابر با $\dot{\varphi}\cos\alpha$ و $\dot{\varphi}\cos\beta$ و $\dot{\varphi}\cos\gamma$ می‌باشند . با فرض کوچك‌بودن φ انرژی پتانسیل برابر است با :

$$U=\mu gl(1-\cos\varphi)\approx\frac{1}{2}\mu gl\varphi^2$$

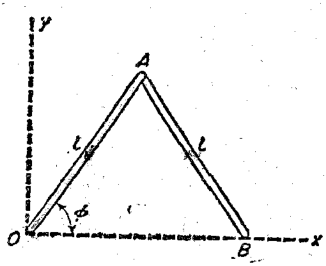
در این حال تابع لاگرانژ مساوی است با :

$$L=\frac{1}{2}\mu l^2\dot{\varphi}^2+\frac{1}{2}(I_1\cos^2\alpha+I_2\cos^2\beta+I_3\cos^2\gamma)\dot{\varphi}^2-\frac{1}{2}\mu gl\varphi^2$$

و درنتیجه بسامد نوسانها چنین خواهد بود:

$$\omega^2=\mu gl/(\mu l^2+I_1\cos^2\alpha+I_2\cos^2\beta+I_3\cos^2\gamma)$$

مسئلهٔ ۴ـ انرژی جنبشی سیستم نشان داده‌شده درشکل ۳۹ را بدست آورید : OA و AB میله‌های همگن و نازك به طول l می‌باشندکه در A به یکدیگرلولاشده‌اند . میلهٔ OA درصفحهٔ شکل،حول O دوران‌می‌کند وانتهای B از میلهٔ AB در طول Ox می‌لغزد .



(شکل ۳۹)

حل : سرعت مرکز ثقل میلهٔ OA (که دروسط میله قراردارد) $\frac{1}{2}l\dot{\varphi}$ است که در آن φ زاویهٔ $\widehat{AOB}$ می‌باشد . بنابراین انرژی جنبشی میلهٔ OA چنین است :

$$T_1=\frac{1}{8}\mu l^2\dot{\varphi}^2+\frac{1}{2}I\dot{\varphi}^2$$

μ جرم هریك از دومیله است .

مختصات کارتزین مرکز ثقل میلهٔ AB چنین است :

$$X=\frac{3}{2}\,l\cos\varphi \quad \text{و} \quad Y=\frac{1}{2}\,l\sin\varphi$$

و چون سرعت زاویه‌ای حاصل ازدوران این میله نیز $\dot{\varphi}$ است‌پس‌انرژی جنبشی آن خواهد بود :

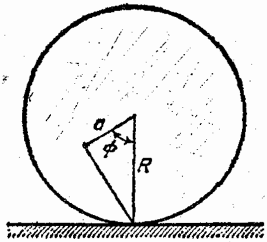
$$T_2=\frac{1}{2}\mu(\dot{X}^2+\dot{Y}^2)+\frac{1}{2}I\dot{\varphi}^2=\frac{1}{8}\mu l^2(1+8\sin^2\varphi)\dot{\varphi}^2+\frac{1}{2}I\dot{\varphi}^2$$

ازآنجا انرژی جنبشی تمام سیستم به دست می‌آید :

$$T=\frac{1}{3}\,\mu l^2(1+3\sin^2\varphi)\,\dot{\varphi}^2$$

(برطبق‌مسئلهٔ ۲ (a) $I=\frac{1}{12}\mu l^2$) .

مسئلهٔ هـ انرژی جنبشی‌استوانه‌ای به شعاع R را که روی صفحه‌ای می‌غلتد پیداکنید . جرم استوانه چنان توزیع شده است‌که یکی از محورهای اصلی ماند با محور استوانه موازی‌است و به فاصلهٔ a ازآن قراردارد. گشتاور ماند، درحول آن محوراصلی، I است .



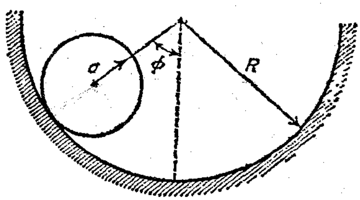
(شکل ۴۰)

حل : زاویهٔ φ را زاویهٔ بین قائم وخطی‌که ازمرکز ثقل عمودبرمحور

استوانه شده است ، فرض می‌کنیم . حرکت استوانه را در هرلحظه می‌توان دوران خالص حول محورآنی‌که منطبق برخط تماس استوانه با صفحه است ، درنظر گرفت (شکل ۴۰) . سرعت زاویه‌ای این دوران $\dot{\varphi}$ است (چون سرعت زاویه‌ای دوران حول دو محور موازی یکسان است . مرکز ثقل در فاصلهٔ $\sqrt{a^{2}+R^{2}-2aR\cos\varphi}$ از محور آنی قرار دارد و بنابراین سرعت آن مساوی است با : $V=\dot{\varphi}\sqrt{a^{2}+R^{2}-2aR\cos\varphi}$ و انرژی جنبشی سیستم برابر است با :

$$T=\frac{1}{2}\mu(a^{2}+R^{2}-2aR\cos\varphi)\,\dot{\varphi}^{2}+\frac{1}{2}I\dot{\varphi}^{2}$$

مسئلهٔ ۶ ـ انرژی جنبشی استوانهٔ همگنی به شعاع a را که برسطح داخلی استوانه‌ای به شعاع R می‌غلتد به دست آوردید (شکل ۴۱).



(شکل ۴۱)

حل : زاویهٔ φ را بین قائم و خطی‌که مراکز استوانه را به هم متصل می‌سازد ، فرض می‌کنیم . مرکز ثقل استوانهٔ غلتان در روی محورش قرار دارد و سرعت آن $V=\dot{\varphi}(R-a)$ است . می‌توان سرعت زاویه‌ای را باتصور دوران خالص‌حول محورآنی که منطبق برخط تماس دواستوانه است ، به دست آورد :

$$\Omega=\frac{V}{a}=\dot{\varphi}(R-a)/a$$

اگر گشتاور ماند حول محور استوانه I_{3} باشد ، داریم :

$$T=\frac{1}{2}\mu(R-a)^{2}\dot{\varphi}^{2}+\frac{1}{2}I_{3}(R-a)^{2}\dot{\varphi}^{2}/a^{2}=\frac{3}{4}\mu(R-a)^{2}\dot{\varphi}^{2}$$

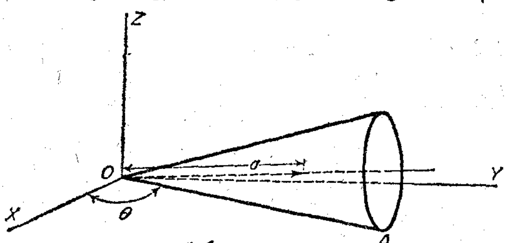
(I_{3} در مسئلهٔ ۲(c) به دست آمده است) .

مسئلهٔ ۷ ـ انرژی جنبشی حاصل از غلت مخروط همگنی را روی صفحه به دست‌آورید .

حل : زاویهٔ بین OA (محل‌تماس مخروط با صفحه) و امتداد دلخواه OX درصفحهٔ مزبوررا به θ نمایش‌می‌دهیم (شکل۴۲). مکان مرکز ثقل روی محورمخروطاست وسرعت‌آن‌چنین‌است: $V=a\dot{\theta}\cos\alpha$ که در آن 2α زاویهٔ رأس مخروط و a فاصلهٔ مرکز ثقل تا رأس مخروط است ، سرعت زاویه‌ای با تصور دوران خالص حول محورآنی OA به دست می‌آید :

$$\Omega=\frac{V}{a\sin\alpha}=\dot{\theta}\cot g\,\alpha$$

یکی از محورهای اصلی گشتاور ماند (x_3) در امتداد محور مخروط است . محور دیگر (x_2) را می‌توان عمودبر OA ومحور مخروط درنظر گرفت . از



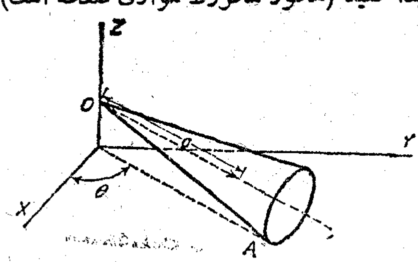
(شکل ۴۲)

آنجا مؤلفه‌های‌بردار $\vec{\Omega}$ (که موازی OA است) در امتداد محورهای اصلی ماند $\Omega\sin\alpha$ و صفرو $\Omega\cos\alpha$ هستند . انرژی جنبشی از این‌رو چنین خواهد بود :

$$T=\frac{1}{2}\mu a^2\dot{\theta}^2\cos^2\alpha+\frac{1}{2}I_1\dot{\theta}^2\cos^2\alpha+\frac{1}{2}I_3\dot{\theta}^2\frac{\cos^4\alpha}{\sin^2\alpha}$$
$$=3\mu h^2\dot{\theta}^2(1+5\cos^2\alpha)/40$$

که درآن h ارتفاع مخروطاست و I_1 و I_3 و α درمسئلهٔ ۲(e) به‌دست‌آمده‌اند.

مسئلهٔ ۸ ـ انرژی جنبشی مخروط همگنی را که قاعدهٔ آن برسطح صفحه‌ای می‌غلتد و رأسش در ارتفاعی برابر شعاع قاعدهٔ آن ازسطح این‌صفحه ثابت شده است ، پیدا کنید (محور مخروط موازی صفحه است) .



(شکل ۴۳)

حل : زاویهٔ بین تصویر محورمخروط برصفحه و امتداد ثابت دلخواهی را که درصفحه قراردارد ، θ می‌نامیم (شکل۴۳) . سرعت مرکز ثقل $V=a\dot{\theta}$ است (علائم مسئلهٔ ۷ نیز در اینجا مراعات می‌شود) . محورآنی دوران مولد OA است که از نقطهٔ تماس مخروط باصفحه می گذرد. مرکز ثقل در فاصلهٔ $a\sin\alpha$ از این محور قرار دارد ، پس $\Omega=\frac{V}{a\sin\alpha}$ یا $\Omega=\frac{\dot{\theta}}{\sin\alpha}$.
هرگاه محور x_2 عمود برمحورمخروط و خط OA رسم شود، مؤلفه‌های بردار $\vec{\Omega}$ در امتداد محورهای اصلی ماند $\Omega\cos\alpha=\dot{\theta}\cot g\alpha$ و صفر و $\Omega\sin\alpha=\dot{\theta}$ خواهدبود . بنابراین انرژی جنبشی برابر است با :

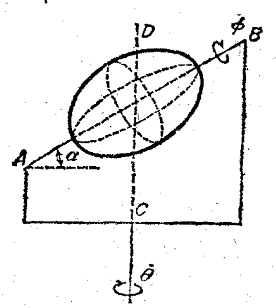
$$T=\frac{1}{2}\mu a^2\dot{\theta}^2+\frac{1}{2}I_1\dot{\theta}^2+\frac{1}{2}I_3\dot{\theta}^2\cot g^2\alpha$$

$$=3\mu h^2\dot{\theta}^2(\sec^2\alpha+5)/40$$

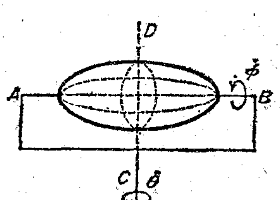
مسئلهٔ ۹ــ انرژی جنبشی بیضوییی را که حول یکی ازمحورهای خود (AB در شکل ۴۴) دوران می کند ، به دست آورید . محور AB خود نیز حول خط CD (عمودبر AB و مار برمرکز بیضوی) دوران دارد .

حل : زاویهٔ دوران حول CD را با θ و حول AB (زاویهٔ بین CD و محور x_1 ماند که عمود بر AB است) را با φ نمایش می‌دهیم . مؤلفه‌های بردار $\vec{\Omega}$ در امتداد محورهای ماند ، $\dot{\theta}\cos\varphi$ و $\dot{\theta}\sin\varphi$ و $\dot{\varphi}$ هستند (محور x_3 را AB درنظر گرفته‌ایم) . چون مرکز ثقل (واقع در مرکز بیضوی) درحال سکون است ، انرژی جنبشی چنین خواهد بود :

$$T=\frac{1}{2}(I_1\cos^2\varphi+I_2\sin^2\varphi)\dot{\theta}^2+\frac{1}{2}I_3\dot{\varphi}^2$$



(شکل ۴۵)



(شکل ۴۴)

مسئلهٔ ۱۰ـ مسئلهٔ شمارهٔ ۹ را در حالتی که محور CD عمود بر AB نیست و AB یکی از محورهای تقارن بیضوی است ، به دست آورید (شکل ۴۵).

حل : مؤلفه‌های $\vec{\Omega}$ در امتداد AB و دو محور اصلی ماند دیگر که عمودبر AB هستند ، چنین خواهند بود :

$$\dot{\theta}\cos\alpha\cos\varphi \quad ، \quad \dot{\theta}\cos\alpha\sin\varphi \quad ، \quad \dot{\varphi}+\dot{\theta}\sin\alpha$$

و ازآنجا انرژی جنبشی به دست می‌آید :

$$T=\frac{1}{2}I_1\dot{\theta}^2\cos^2\alpha+\frac{1}{2}I_3(\dot{\varphi}+\dot{\theta}\sin\alpha)^2$$

۳۳ : مقدار حرکت زاویه‌ای جسم صلب

همان طور که می‌دانیم مقدار حرکت زاویه‌ای یك سیستم بستگی به نقطه‌ای که نسبت به آن مقدار حرکت زاویه‌ای سنجیده می‌شود ، دارد . در مکانیك اجسام صلب متداولترین نقطه‌برای این مقصود مبدأ مختصات سیستم متحرك است ؛ یعنی‌مرکزثقل جسم. مقدارحرکت زاویه‌ای نسبت به این نقطه در زیر با $\mathbf{M}$ نمایش داده می‌شود .

مطابق فرمول (۶ـ۹) ، هرگاه مبدأ درمرکزثقل جسم منظورشود ، مقدار حرکت زاویه‌ای $\mathbf{M}$ برابر است‌با مقدار حرکت زاویه‌ای «خالص» که درنتیجهٔ حرکت جسم‌نسبت به مرکزثقل‌نتیجه شده‌است. بنا به‌تعریف:

$$\mathbf{M}=\Sigma m\mathbf{r}\times\mathbf{v}$$

با جایگزین‌کردن $\mathbf{v}=\vec{\Omega}\times\mathbf{r}$ داریم :

$$\mathbf{M}=\sum m\mathbf{r}\times(\vec{\Omega}\times\mathbf{r})=\sum m[r^2\vec{\Omega}-\mathbf{r}(\mathbf{r}.\vec{\Omega})]$$

و به صورت تانسوری :

$$M_i=\sum m(x_l^2\Omega_i-x_ix_k\Omega_k)=\Omega_k\sum m(x_l^2\delta_{ik}-x_ix_k)$$

و با به‌کاربردن تعریف (۲ـ۳۲) دربارهٔ تانسور ماند ، خواهیم داشت :

$$M_i=I_{ik}\Omega_k \qquad (۳۳ـ۱)$$

اگر x_1 و x_2 و x_3 سه محور اصلی ماند باشند ، از فرمول فوق نتیجه می‌شود :

$$M_1=I_1\Omega_1 \quad و \quad M_2=I_2\Omega_2 \quad و \quad M_3=I_3\Omega_3 \qquad (۳۳ـ۲)$$

مثلاً درمورد فرفرهٔ کروی که سه مؤلفهٔ اصلی گشتاور ماند برابرند ، به سادگی داریم :

$$\mathbf{M} = I\overrightarrow{\Omega} \qquad (۳-۳۳)$$

یعنی بردار مقدار حرکت زاویه‌ای متناسب و در جهت بردار سرعت زاویه‌ای است . اما در مورد جسمی دلخواه بردار $\mathbf{M}$ معمولاً در جهت $\overrightarrow{\Omega}$ نیست و این امر تنها درصورتی مصداق دارد که جسم حول یکی از سه محور اصلی ماند بگردد .

جسم صلبی را که حرکت آزاد دارد ، درنظرمی گیریم (یعنی جسم تحت تأثیر نیروهای خارجی قرار نمی گیرد) . چون هر نوع حرکت انتقالی یکنواخت فاقد اهمیت است ، بردار حرکت انتقالی را از بردار حرکت جسم کم می کنیم؛ درنتیجه تنها دوران آزاد جسم باقی می‌ماند.

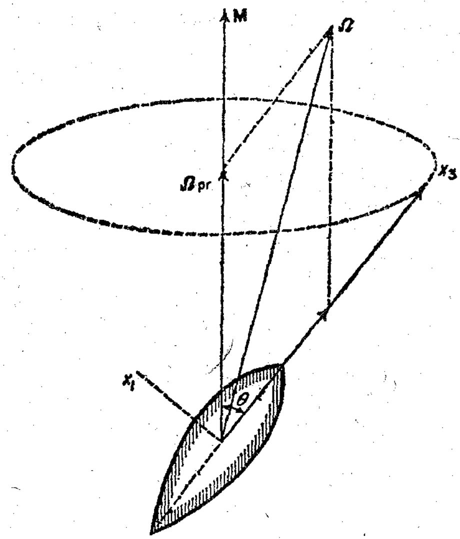
مانند هر سیستم بسته‌ای ، بردار مقدار حرکت زاویه‌ای دوران آزاد جسم ثابت است و برای فرفرهٔ کروی ازشرط $\mathbf{M} = cte$ نتیجه می‌شود : $\overrightarrow{\Omega} = cte$. ازآنجا حرکت آزاد فرفرهٔ کروی درحالت کلی دوران یکنواخت حول محور ثابتی درفضا است .

در موردی که سیستم یك «چرخنده» است نیز به سادگی چنین حاصل می‌شود :

$$\mathbf{M} = I\,\overrightarrow{\Omega}$$

که بردار $\overrightarrow{\Omega}$ درآن عمود بر محور چرخنده است . از این‌رو دوران آزاد «چرخنده»، دوران یکنواخت در یك صفحه و حول محوری عمود بر آن صفحه است .

با به کار بردن اصل بقاء مقدار حرکت زاویه‌ای ، می‌توان دوران آزاد سیستمهای پیچیده‌تر را که دارای محور تقارن باشند ، به دست آورد . با در نظر گرفتن این حقیقت که محورهای ماند x_1 و x_2 (عمود برمحور تقارن x_3 فرفره) را می‌توان به طور دلخواه تعیین کرد . ما محور x_2 را عمود بر صفحه‌ای که شامل بردار ثابت $\mathbf{M}$ ومحور آنی دوران x_3 است، انتخاب می کنیم . از این رو $M_2 = 0$ است و نیز از روابط (۳-۳۲) نتیجه می‌شود که $\Omega_2 = 0$ است . این بدان معنی است که $\mathbf{M}$ و $\overrightarrow{\Omega}$ و محور تقارن فرفره در هر لحظه دریک صفحه قرار دارند (شکل ۴۶) . ازآنجا بردار سرعت $\mathbf{v} = \overrightarrow{\Omega} \times \mathbf{r}$ هر نقطه واقع برمحور تقارن فرفره ، درهرلحظهٔ دلخواه ، عمود برصفحهٔ مزبور است . یعنی محور تقارن فرفره به‌طوریکنواخت و درحول امتداد $\mathbf{M}$ دوران می کند ومخروط دواری رادرفضا رسم می کند . این حرکت **تقدیم منظم** فرفره نامیده می‌شود . درعین حال فرفره به طور یکنواخت حول محورش می گردد .



(شکل ۴۶)

سرعت زاویه‌ای این دوران را می‌توان به سادگی برحسب مقدار حرکت زاویه‌ای $\mathbf{M}$ و زاویهٔ θ (بین محور فرفره و امتداد $\mathbf{M}$) به دست آورد. سرعت زاویه‌ای فرفره حول محورش مؤلفهٔ $\Omega_۳$ از بردار $\overrightarrow{\Omega}$ در امتداد محور تقارن است :

$$\Omega_۳ = \frac{M_۳}{I_۳} = \frac{M}{I_۳} \cos\theta \qquad (۳۳-۴)$$

برای تعیین مقدار تقدیم $\Omega_ت$ ، بردار $\overrightarrow{\Omega}$ را درامتداد $x_۳$ وامتداد $\mathbf{M}$ تجزیه می‌کنیم. اولی باعث تغییرمکان محور فرفره نمی‌شود ، بنابراین دومین‌مؤلفه ، سرعت زاویه‌ای تقدیم را به دست می‌دهد . از شکل ۴۶ آشکار است که :

$$\Omega_ت \sin\theta = \Omega_۱$$

و چون

$$\Omega_۱ = \frac{M_۱}{I_۱} = \frac{M}{I_۱} \sin\theta$$

پس :

$$\Omega_ت = \frac{M}{I_۱} \qquad (۳۳-۵)$$

۳۴ : معادلات حرکت جسم صلب

چون عموماً درجات آزادی اجسام صلب شش تا است ، معادلات عمومی حرکت باید

شش عدد باشند. آنها را ممکن است طوری نوشت که مشتق دو بردار مقدارحرکت و مقدار حرکت زاویه‌ای جسم را به دست دهند.

اولین معادله ازجمع روابط $\dot{\mathbf{p}}=\mathbf{f}$ برای هرجزء جسم به دست می‌آید ($\mathbf{p}$ مقدار حرکت جزء جسم و $\mathbf{f}$ نیرویی است که برآن‌اعمال می‌شود. برحسب مجموع مقادیرحرکت جسم، $\mathbf{P}=\Sigma\mathbf{p}=\mu\mathbf{V}$ و مجموع نیروهای واردبرآن، $\mathbf{F}=\Sigma\mathbf{f}$ داریم:

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt}=\mathbf{F} \qquad (۳۴-۱)$$

هرچند $\mathbf{F}$ به عنوان مجموع همهٔ نیروهای $\mathbf{f}$ اعمال‌شده برذرات مختلف جسم، منجمله نیروهای داخلی ناشی از خود ذرات، تعریف شده است معهذا $\mathbf{F}$ عملاً تنها شامل نیروهای خارجی است: نیروهای متقابل بین ذرات تشکیل‌دهندهٔ جسم باید حذف شوند چه اگرهیچ نیروی خارجی برجسم وارد نشود، مانند هرسیستم بسته‌ای، مقدار حرکت جسم باید ثابت بماند، یعنی در این حالت $\mathbf{F}=0$ است.

چه اگر U انرژی پتانسیل جسم صلب در میدان خارجی باشد، نیروی $\mathbf{F}$ با دیفرانسیل گرفتن از U نسبت به مختصات مرکز ثقل جسم به دست می‌آید:

$$\mathbf{F}=-\partial U/\partial\mathbf{R} \qquad (۳۴-۲)$$

چه هنگامی که جسم به‌اندازهٔ $\delta\mathbf{R}$ انتقال پیدا کند، بردارحامل $\mathbf{r}$ هرنقطهٔ جسم به‌اندازهٔ $\delta\mathbf{R}$ تغییر می‌کند وازآنجا درانرژی پتانسیل به‌اندازهٔ زیرتغییرحاصل می‌گردد:

$$\delta U=\Sigma(\partial U/\partial\mathbf{r})\cdot\delta\mathbf{r}=\delta\mathbf{R}\cdot\Sigma\partial U/\partial\mathbf{r}=-\delta\mathbf{R}\cdot\Sigma\mathbf{f}=-\mathbf{F}\cdot\delta\mathbf{R}$$

می‌توان معادلهٔ (۳۴-۱) را با نوشتن معادلهٔ لاگرانژ برای مرکزثقل جسم به دست آورد:

$$(d/dt)\partial L/\partial\mathbf{V}=\partial L/\partial\mathbf{R}$$

با استفاده از تابع لاگرانژ جسم صلب که درمعادلهٔ (۳۲-۴) به دست‌آمده است، داریم:

$$\partial L/\partial\mathbf{V}=\mu\mathbf{V}=\mathbf{P} \quad \text{و} \quad \partial L/\partial\mathbf{R}=-\partial U/\partial\mathbf{R}=\mathbf{F}$$

اکنون معادلهٔ دوم حرکت را استخراج می‌کنیم. این معادله مشتق مقدار حرکت زاویه‌ای $\mathbf{M}$ را نسبت به زمان به‌دست می‌دهد. برای سهولت چارچوب ثابت (ماند) مرجع را چنان اختیار می‌کنیم که در آن چارچوب مرکز ثقل در لحظهٔ مورد مطالعه درحالت سکون باشد. داریم:

$$\dot{\mathbf{M}}=(d/dt)\Sigma\mathbf{r}\times\mathbf{p}=\Sigma\dot{\mathbf{r}}\times\mathbf{p}+\Sigma\mathbf{r}\times\dot{\mathbf{p}}$$

در چارچوب مرجع انتخابی ما (با $\mathbf{V}=0$) ، مقدار $\dot{\mathbf{r}}$ در لحظهٔ بررسی همان $\mathbf{v}=\dot{\mathbf{r}}$ است . چون بردارهای $\mathbf{v}$ و $\mathbf{p}=m\mathbf{v}$ موازیند ، حاصلضرب $\dot{\mathbf{r}}\times\mathbf{p}=0$ است. باجایگزین کردن $\mathbf{f}$ به جای $\dot{\mathbf{p}}$ به دست می‌آید :

$$d\mathbf{M}/dt=\mathbf{K} \qquad (۳۴-۳)$$

که در آن :

$$\mathbf{K}=\Sigma\mathbf{r}\times\mathbf{f} \qquad (۳۴-۴)$$

چون $\mathbf{M}$ به عنوان مقدارحرکت زاویه‌ای حول مرکز ثقل تعریف شده است (بخش ۳۳)، مقدار آن در عبور از یك چارچوب ماند به چارچوب ماند دیگر تغییر نمی‌کند . این موضوع از معادلهٔ (۵-۹) به ازاء $\mathbf{R}=0$ دیده می‌شود . بنابراین می‌توان نتیجه گرفت که معادلهٔ حرکت (۳-۳۴) که دربارهٔ چارچوب مرجع خاصی به دست آمده است ، برای هر چارچوب ماند دیگر نیز بنابراصل نسبیت گالیله معتبر است .

بردار $\mathbf{r}\times\mathbf{f}$ **گشتاور** نیروی $\mathbf{f}$ نامیده می‌شود و $\mathbf{K}$ **لنگر پیچشی کل** نام دارد (یعنی مجموع گشتاورهای نیروهای مؤثر بر جسم) . مانند نیروی کلی $\mathbf{F}$ ، در مجموعهٔ (۴-۳۴) نیز تنها کافی است نیروهای خارجی را درنظر گرفت ؛ بنابراصل بقاء مقدارحرکت زاویه‌ای ، مجموع گشتاورهای نیروهای داخلی در یك سیستم بسته صفر است .

گشتاور یك نیرو مانند مقدار حرکت زاویه‌ای ، عموماً بستگی به نحوهٔ انتخاب مبدأ دارد. در (۳-۳۴) و(۴-۳۴) گشتاورها نسبت به مرکز ثقل جسم سنجیده شده‌اند .

هنگامی که مبدأ مختصات به اندازهٔ $\mathbf{a}$ تغییرمکان دهد ، شعاع $\mathbf{r}'$ حامل هر نقطهٔ جسم برابر با $\mathbf{r}-\mathbf{a}$ می‌شود . از آنجا :

$$\mathbf{K}=\Sigma\mathbf{r}\times\mathbf{f}=\Sigma\mathbf{r}'\times\mathbf{f}+\Sigma\mathbf{a}\times\mathbf{f}$$

و یا :

$$\mathbf{K}=\mathbf{K}'+\mathbf{a}\times\mathbf{F} \qquad (۳۴-۵)$$

ازرابطهٔفوق مشاهده می‌شود که درمورد خاصی که برآیندنیروهاصفر باشد ($\mathbf{F}=0$)، گشتاور بستگی به مبدأ انتخابی‌ندارد . در این مورد گفته می‌شودبر جسم «زوجی[1]» اثر کرده است.

معادلهٔ (۳-۳۴) را می‌توان با توجه به معادلهٔ لاگرانژ

$$(d/dt)\partial L/\partial\vec{\Omega}=\partial L/\partial\phi$$

1_ Couple

در مختصات «دورانی[1]» به دست آورد. با دیفرانسیل گیری از تابع لاگرانژ (۴-۳۲) نسبت به مؤلفه‌های بردار $\vec{\Omega}$ نتیجه می‌شود :

$$\partial L/\partial\Omega_i = I_{ik}\Omega_k = M_i$$

با دوران جزئی به اندازهٔ $\delta\phi$ ، در انرژی پتانسیل جسم به اندازهٔ زیر تغییر حاصل می‌شود:

$$\delta U = -\Sigma \mathbf{f}\cdot\delta\mathbf{r} = -\Sigma \mathbf{f}\cdot\delta\boldsymbol{\phi}\times\mathbf{r} = -\delta\boldsymbol{\phi}\cdot\Sigma\mathbf{r}\times\mathbf{f} = -\mathbf{K}\cdot\delta\boldsymbol{\phi}$$

که در آن

$$\mathbf{K} = -\partial U/\partial\boldsymbol{\phi} \qquad (۳۴-۶)$$

به طوری که :

$$\frac{\partial L}{\partial\boldsymbol{\phi}} = -\frac{\partial U}{\partial\boldsymbol{\phi}} = \mathbf{K}$$

اگر بردارهای $\mathbf{F}$ و $\mathbf{K}$ برهم عمود باشند ، همیشه برداری مانند $\mathbf{a}$ وجود خواهد داشت که به ازاء آن $\mathbf{K}'$ که از معادلهٔ (۳۴-۵) به دست می‌آید ، صفر شود :

$$\mathbf{K} = \mathbf{a}\times\mathbf{F} \qquad (۳۴-۷)$$

بردار انتخابی $\mathbf{a}$ یگانه نیست چه باافزودن هر برداری موازی $\mathbf{F}$ بر آن ، درمعادلهٔ (۳۴-۷) تغییری حاصل نمی‌شود . پس از شرط $\mathbf{K}' = 0$ ، در سیستم مختصات متحرك ، خط مستقیمی نتیجه می‌شود و نه یك نقطه. از این رو وقتی $\mathbf{K}$ عمودبر $\mathbf{F}$ است ، همهٔ نیروهای وارد بر جسم به نیروی واحد $\mathbf{F}$ که در امتداد این خط اثر می‌کند ، مختصر می‌شود .

این مورد مربوط به میدان یکنواخت نیرو است که در آن نیروی وارد بر جزء جسم $\mathbf{f} = e\mathbf{E}$ می‌باشد . بردار ثابت $\mathbf{E}$ مشخصهٔ این میدان و e مشخصهٔ جزء جسم نسبت به این میدان است[2].

از آنجا :

$$\mathbf{K} = \Sigma e\mathbf{r}\times\mathbf{E} \quad \text{و} \quad \mathbf{F} = \mathbf{E}\Sigma e$$

با فرض $\Sigma e \neq 0$ ، شعاع حاملی مانند $\mathbf{r}_0$ تعریف می‌کنیم که از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:

$$\mathbf{r}_0 = \Sigma e\mathbf{r}/\Sigma e \qquad (۳۴-۸)$$

پس بردار لنگر پیچشی کل چنین خواهد شد :

$$\mathbf{K} = \mathbf{r}_0\times\mathbf{F} \qquad (۳۴-۹)$$

۱- Rotational

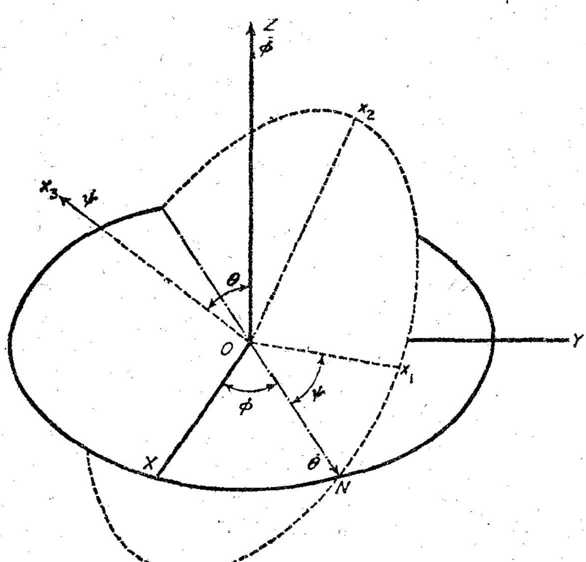
۲- مثلاً دریك میدان یکنواخت الکتریکی $\mathbf{E}$ قدرت میدان و e بار الکتریکی است و درمیدان جاذبه $\mathbf{E}$ شتاب ثقلی ($\mathbf{g}$) و e جرم جسم (m) است .

از این رو برای جسمی که تحت اثر میدان یکنواختی از نیرو حرکت می‌کند، اثر نیروها به‌نیروی واحد F (که بر نقطه‌ای به‌شعاع حامل (۸ـ۳۴) وارد می‌شود) خلاصه می‌شود. موضع این نقطه فقط به مشخصات جسم بستگی دارد: مثلاً در میدان نیروهای ثقل، این نقطه مرکز ثقل است.

۳۵: زوایای اولر

همان طور که در پیش گفتیم، حرکت جسم صلب را می‌توان با مختصات مرکز ثقل آن و سه زاویهٔ غیر مشخص که امتداد محورهای x_1 و x_2 و x_3 سیستم متحرك را نسبت به محورهای سیستم ثابت، X و Y و Z تعیین می‌کنند، بیان کرد. این سه زاویه را اغلب برای سهولت به نحوی انتخاب می‌کنند که مشهور به زوایای اولر است.

چون در اینجا تنها زوایای بین محورهای مختصات اهمیت دارد، مبدأ دو سیستم را منطبق بر هم اختیار می‌کنیم (شکل ۴۷). صفحهٔ متحرك x_1x_2 صفحهٔ ثابت XY را در خطی مانند ON که خط «گره» نامیده می‌شود، قطع می‌کند. این خط هم بر Z و هم بر x_3 عمود است وجهت مثبت آنرا درجهت بردار حاصلضرب $\mathbf{z} \times \mathbf{x}_3$ اختیار می‌کنیم ($\mathbf{z}$ و $\mathbf{x}_3$ بردارهای یکهٔ محورهای Z و x_3 هستند).



(شکل ۴۷)

زوایایی که برای تعیین امتدادهای x_1 و x_2 و x_3 نسبت به X و Y و Z به‌کار می‌روند،

عبارتنداز: زاویهٔ θ بین Z و x_3 وزاویهٔ φ بین X و ON وزاویهٔ ψ بین x_1 و ON . زوایای φ و ψ به ترتیب درحول محور Z و x_3 و درجهت‌پیچ سر بطری درنظر گرفته می‌شوند . زاویهٔ θ از صفر تا π و φ و ψ از صفر تا 2π تغییر می‌کنند[1] .

اکنون مؤلفه‌های بردارسرعت $\vec{\Omega}$ را در امتداد محورهای متحرك x_1 و x_2 و x_3 برحسب زوایای اولر ومشتقات آن به دست می‌آوریم. برای این کار باید مؤلفه‌های سرعتهای زاویه‌ای $\dot{\theta}$ و $\dot{\varphi}$ و $\dot{\psi}$ را در امتداد آن محورها پیدا کنیم . سرعت زاویه‌ای $\dot{\theta}$ در امتدادخط گره ON است و مؤلفه‌های آن عبارتند از :

$$\dot{\theta}_1 = \dot{\theta}\cos\psi \quad و \quad \dot{\theta}_2 = -\dot{\theta}\sin\psi \quad و \quad \dot{\theta}_3 = 0$$

سرعت زاویه‌ای $\dot{\varphi}$ در امتداد محور Z است ومؤلفهٔ آن در امتداد محور x_3 ، $\dot{\varphi}_3 = \dot{\varphi}\cos\theta$ و در صفحهٔ x_1 و x_2 ، $\dot{\varphi}\sin\theta$ می‌باشد با تجزیهٔ این جمله در امتداد x_1 و x_2 ، نتیجه می‌شود :

$$\dot{\varphi}_1 = \dot{\varphi}\sin\theta\sin\psi \quad و \quad \dot{\varphi}_2 = \dot{\varphi}\sin\theta\cos\psi$$

وبالاخره مؤلفهٔ سرعت زاویه‌ای $\dot{\psi}$ در امتداد محور x_3 قرار دارد با جمع مؤلفه‌های مزبور در امتداد هر یك از محورها ، داریم :

$$\left|\begin{array}{l} \Omega_1 = \dot{\varphi}\sin\theta\sin\psi + \dot{\theta}\cos\psi \\ \Omega_2 = \dot{\varphi}\sin\theta\cos\psi - \dot{\theta}\sin\psi \\ \Omega_3 = \dot{\varphi}\cos\theta + \dot{\psi} \end{array}\right. \qquad (۳۵-۱)$$

اگر محورهای x_1 و x_2 و x_3 محورهای اصلی ماند فرض شوند ، انرژی جنبشی دورانی بر حسب زوایای اولر با جایگزینی (۱-۳۵) در (۸-۳۲) به دست می‌آید .

برای فرفرهٔ متقارن $(I_1 = I_2 \neq I_3)$ عبارت سادهٔ زیر نتیجه می‌شود :

$$T_{\text{rot}} = \frac{1}{2}I_1(\dot{\varphi}^2\sin^2\theta + \dot{\theta}^2) + \frac{1}{2}I_3(\dot{\varphi}\cos\theta + \dot{\psi})^2 \qquad (۳۵-۲)$$

۱ـ زوایای θ و $\varphi - \frac{1}{2}\pi$ به ترتیب زاویهٔ قطبی «polar» وسمت «azimuth» امتداد x_3 نسبت به‌محورهای X و Y و Z هستند. زوایای θ و $\frac{1}{2}\pi - \psi$ به‌ترتیب زاویهٔ قطبی وسمت امتداد Z نسبت به‌محورهای x_1 و x_2 و x_3 هستند .

این عبارت را می‌توانیم، با درنظر گرفتن این حقیقت که انتخاب امتدادهای اصلی x_1 و x_2 برای فرفرهٔ متقارن اختیاری است ، با سادگی بیشتری نوشت . اگر محور x_1 در امتداد خط گره ON فرض شود (یعنی $\psi = 0$) ، مؤلفه‌های سرعت زاویه‌ای چنین خواهند بود .

$$\Omega_1 = \dot{\theta} \text{ و } \Omega_2 = \dot{\varphi} \sin\theta \text{ و } \Omega_3 = \dot{\varphi} \cos\theta + \dot{\psi} \qquad (۳۵-۳)$$

ـ برای آشنا شدن به‌نحوهٔ استفاده از زوایای اولر، به‌طور مثال آنها را درتعیین حرکت آزاد فرفرهٔ متقارن به‌کار می‌بریم (این مسئله در بخش ۳۳ بررسی شده بود) . محور Z را در سیستم ثابت در امتداد مقدار حرکت زاویه‌ای ثابت فرفره ($\mathbf{M}$) درنظر می‌گیریم . محور x_3 سیستم متحرك را در امتداد محورفرفره ومحور x_1 را در هر لحظه منطبق بر خط گره فرض می‌کنیم . مؤلفه‌های بردار $\mathbf{M}$ به کمك رابطهٔ (۳-۳۵) به دست می‌آیند :

$$M_1 = I_1\Omega_1 = I_1\dot{\theta} \text{ و } M_2 = I_1\Omega_2 = I_1\dot{\varphi}\sin\theta \text{ و } M_3 = I_3\Omega_3 = I_3(\dot{\varphi}\cos\theta + \dot{\psi})$$

چون محور x_1 عمود بر محور Z است ، نتیجه می‌شود :

$$M_1 = 0 \text{ و } M_2 = M\sin\theta \text{ و } M_3 = M\cos\theta$$

و از مقایسهٔ روابط فوق‌الذکر با یکدیگر به دست می‌آید :

$$\dot{\theta} = 0 \text{ و } I_1\dot{\varphi} = M \text{ و } I_3(\dot{\varphi}\cos\theta + \dot{\psi}) = M\cos\theta \qquad (۳۵-۴)$$

ازمعادلهٔ اول نتیجه می‌شود $\theta = \text{cte}$ ؛ یعنی زاویهٔ بین محور فرفره وامتداد بردار $\mathbf{M}$ ثابت است . ازمعادلهٔ دوم سرعت زاویه‌ای‌تقدیم‌محاسبه می‌شود :

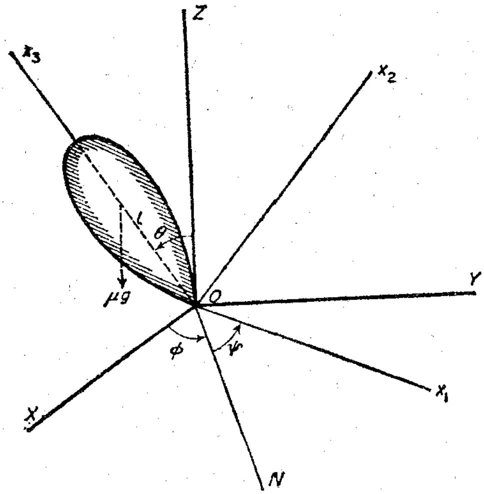
$$\dot{\varphi} = M/I_1 \quad \text{(مانند معادلهٔ (۳۳-۵))}$$

و بالاخره معادلهٔ سوم ، سرعت زاویه‌ای فرفره را در حول محور خودش به دست می‌دهد :

$$\Omega_3 = (M/I_3)\cos\theta$$

مسائل

مسئلهٔ ۱ ـ حرکت‌فرفره سنگین و متقارنی را که‌نقطهٔ تحتانی‌آن ثابت است ، به انتگرال بیضوی تبدیل کنید (شکل ۴۸) .



(شکل ۴۸)

حل : مبدأ مختصات سیستم ثابت و سیستم متحرك را در نقطهٔ تحتانی ثابت فرفره (O) فرض می‌کنیم . محور Z را نیز قائم درنظر می‌گیریم . تابع لاگرانژ فرفره در میدان نیروی جاذبه چنین است :

$$L = \frac{I_1+\mu l^2}{2}(\dot\theta^2+\dot\varphi^2 \sin^2\theta) + \frac{1}{2}I_3(\dot\psi+\dot\varphi\ \cos\theta)^2-\mu g l \cos\theta$$

که در آن μ جرم فرفره و l فاصلهٔ نقطهٔ ثابت تا مرکز ثقل فرفره است .

مختصات ψ و φ حلقوی هستند از این رو دو انتگرال حرکت داریم :

$$p_\psi=\partial L/\partial\dot\psi= I_3(\dot\psi+\dot\varphi\cos\theta)=\text{cte}\equiv M_3 \qquad (1)$$

$$p_\varphi=\partial L/\partial\dot\varphi=(I'_1 \sin^2\theta +I_3\cos^2\theta)\dot\varphi+ I_3\dot\psi\cos\theta\equiv\text{cte}\equiv M_z \qquad (2)$$

که درآنها $I'_1=I_1+\mu l^2$ و p_ψ و p_φ به ترتیب مؤلفه‌های مقدار حرکت زاویه‌ای (حول نقطهٔ O) در امتداد محورهای x_3 و Zاست .

انرژی جسم برابر است با :

$$E=\frac{1}{2}I'_1(\dot\theta^2+\dot\varphi^2\sin^2\theta) + \frac{1}{2}I_3(\dot\psi+\dot\varphi\cos\theta)^2+\mu g l\cos\theta \qquad (3)$$

از معادلات (۱) و (۲) نتیجه می‌شود :

$$\dot{\varphi}=(M_z-M_3\cos\theta)/I'_1\sin^2\theta \tag{۴}$$

$$\dot{\psi}=\frac{M_3}{I_3}-\cos\theta\frac{M_z-M_3\cos\theta}{I'_1\sin^2\theta} \tag{۵}$$

با حذف $\dot{\varphi}$ و $\dot{\psi}$ از معادلهٔ انرژی (۳) به کمك معادلات (۴) و (۵) به دست می‌آید :

$$E'=\frac{1}{2}I'_1\dot{\theta}^2+U_{eff}(\theta)$$

که در آن :

$$\left\{\begin{aligned} E'&=E-\frac{M_3^2}{2I_3}-\mu gl\\ U_{eff}(\theta)&=\frac{(M_z-M_3\cos\theta)^2}{2I'_1\sin^2\theta}-\mu gl(1-\cos\theta)\end{aligned}\right. \tag{۶}$$

از این رو خواهیم داشت :

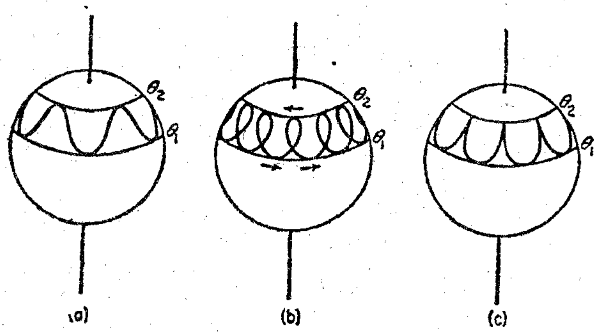
$$t=\int\frac{d\theta}{\sqrt{2[E'-U_{eff}(\theta)]/I'_1}} \tag{۷}$$

و این یك انتگرال بیضوی است . زوایای ψ و φ برحسب θ از معادلات (۴) و (۵) به دست می‌آیند .

میزان‌تغییرات θ ضمن حرکت، باشرط $E'\geqslant U_{eff}(\theta)$ معین می‌شود . تابع $U_{eff}(\theta)$ به‌ازاء π و $\theta=0$ به سمت $+\infty$ میل‌می‌کند (اگر $M_3\neq M_z$) و دربین این دومقدار مینیمی دارد . معادلهٔ $E'=U_{eff}(\theta)$ دو ریشه دارد که مقادیر حدی θ_1 و θ_2 (تمایل محورفرفره نسبت‌به خط‌قائم) را به‌دست می‌دهد.

وقتی θ از θ_1 تا θ_2 تغییر می‌کند ، مشتق $\dot{\varphi}$ تنها در صورتی تغییر علامت می‌دهد که تفاضل $M_z-M_3\cos\theta$ بین آن دو حد تغییر علامت دهد. وقتی $\dot{\varphi}$ تغییر علامت ندهد ، محور فرفره حول خط قائم به طور یکنواخت دوران می‌کند و در عین حال به‌بالا و پایین نوسان دارد. نوسان اخیر را رقص محوری می‌نامند ؛ (شکل ۴۹ a) منحنی مسیر محور را روی سطح کره‌ای که مرکزش در نقطهٔ ثابت فرفره قرار دارد ، نشان می‌دهد . اگر $\dot{\varphi}$ تغییرعلامت دهد، جهت تقدیم در دو دایرهٔ حدی مخالف هم است و از این رومحورفرفره منحنی مارپیچی را در حول خط قائم طی می‌کند (۴۹b) . بالاخره اگر $M_z-M_3\cos\theta$ به ازاء θ_1 یا θ_2 صفرشود ، $\dot{\varphi}$ و $\dot{\theta}$ دردایرهٔ حدی‌مربوط

صفر هستند و مسیر محور مانند شکل (c ۴۹) است .



شکل ۴۹

مسئلهٔ ۲ـ شرایطی را که به ازاء آن دوران فرفره در حول محور قائم پایدار باشد ، به دست آورید .

حل : به ازاء $\theta=۰$ محورهای $x_۳$ و Z برهم منطبقند ؛ از آنجا $M_۳=M_z$ و $E'=۰$. دوران حول محور قائم در صورتی پایدار است که در $\theta=۰$ تابع $U_{eff}(\theta)$ مینیم باشد . به ازاء مقادیر کوچك θ داریم :

$$U_{eff}\approx(M_۳^۲/۸I'_۱-\frac{۱}{۲}\mu gl)\theta^۲$$

و شرط پایداری چنین است : $M_۳^۲>۴I'_۱\mu gl$

یا :

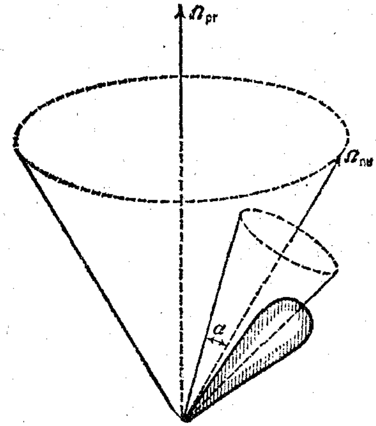
$$\Omega_۳^۲>۴I'_۱\mu gl/I_۳^۲$$

مسئلهٔ ۳ـ حرکت فرفره را وقتی انرژی جنبشی دورانی آن حول محورش ، در مقایسه با انرژی ثقلی بسیار بزرگ باشد ، به دست آورید (فرفره سریع) .

حل : در تقریب اول ، با صرف‌نظر کردن از جاذبه ، حرکت جسم تقدیم آزاد محور حول بردار مقدار حرکت زاویه‌ای $\mathbf{M}$ است (که در این مورد مربوط به رقص محوری فرفره می‌باشد) و بر طبق (۵ـ۳۳) ، سرعت زاویه‌ای تقدیم چنین است :

$$\vec{\Omega}_ر=\mathbf{M}/I'_۱ \qquad (۱)$$

در تقریب دوم، تقدیم آهسته مقدارحرکت زاویه‌ای حول خطقائم وجود



شکل ۵۰

دارد (شکل ۵۰). برای تعیین مقدارمتوسط تقدیم، متوسط معادلهٔ دقیق حرکت $\left(\frac{d\mathbf{M}}{dt}=\mathbf{K}\right)$ را در دورهٔ تناوب رقص محوری به دست می‌آوریم . گشتاور نیروی ثقل روی فرفره برابر است با : $\mathbf{K}=\mu l\mathbf{n}_3\times\mathbf{g}$ که $\mathbf{n}_3$ بردار یکهٔ محورفرفره است. به علت تقارن آشکار است که برای محاسبهٔ متوسط $\mathbf{K}$ در «مخروط رقص محوری» کافی است به جای $\mathbf{n}_3$ مؤلفهٔ آن در امتداد $\mathbf{M}$ ، یعنی $\frac{\mathbf{M}}{M}\cos\alpha$ را قرار دهیم (که در آن α زاویهٔ بین $\mathbf{M}$ و محور فرفره است) . پس داریم :

$$\overline{\frac{d\mathbf{M}}{dt}}=-(\mu l/M)\mathbf{g}\times\mathbf{M}\cos\alpha$$

این رابطه نشان می‌دهد که بردار $\mathbf{M}$ ، در امتداد $\mathbf{g}$ (یعنی امتداد قائم) ، با سرعت زاویه‌ای متوسط زیر تقدیم دارد .

$$\overline{\vec{\Omega}_{ت}}=-(\mu l/M)\mathbf{g}\cos\alpha \qquad (۲)$$

که در مقایسه با $\vec{\Omega}_ر$ کوچك است .

در این تقریب مقادیر M و $\cos\alpha$ درفرمولهای (۱) و (۲) ثابت‌فرض شده‌اند (اگر چه آن دو انتگرالهای دقیق حرکت نیستند) . با همان تقریب آنها با مقادیر E و M_3 (که اصل بقا دربارهٔ آن دو دقیقاً صادق است) به وسیلهٔ

روابط زیر مربوطند :

$$M_{۳}=M\cos\alpha$$

$$E\approx\frac{۱}{۲}M^{۲}\left(\frac{\cos^{۲}\alpha}{I_{۳}}+\frac{\sin^{۲}\alpha}{I'_{۱}}\right)$$

۳۶ : معادلات اولر

معادلات حرکت که در بخش ۳۴ نسبت به سیستم مختصات ثابت تعریف شده‌اند و مشتقات $\frac{dM}{dt}$ و $\frac{dP}{dt}$ در معادلات (۱–۳۴) و (۳–۳۴) تغییرات دو بردار M و P را نسبت به آن سیستم به دست می‌دهد . اما ساده‌ترین رابطه بین مؤلفه‌های مقدار حرکت زاویه‌ای جسم صلب (M) و مؤلفه‌های سرعت زاویه‌ای ، در دستگاه مختصات متحرکی که محورهای آن محورهای اصلی ماند باشد ، به دست می‌آید . برای به‌کاربردن این رابطه ، باید معادلات حرکت را به سیستم مختصات متحرك $x_{۱}$ ، $x_{۲}$ ، $x_{۳}$ انتقال داد .

فرض می‌کنیم $\frac{dA}{dt}$ تغییرات بردار A نسبت‌به سیستم مختصات‌ثابت باشد . اگر بردار A در سیستم متحرك تغییر نکند ، تغییرات آن در سیستم ثابت تنها در نتیجهٔ دوران است ، به طوریکه $\frac{dA}{dt}=\vec{\Omega}\times A$ (بخش۹). باید خاطرنشان‌کرد که معادلات (۱–۹) و(۲–۹) برای هر برداری معتبر است . در موارد کلی طرف راست معادله ، شامل تغییرات بردار A نسبت‌به سیستم متحرك هم است . اگر این تغییرات را با $\frac{d'A}{dt}$ نمایش‌دهیم،خواهیم‌داشت:

$$\frac{dA}{dt}=\frac{d'A}{dt}+\vec{\Omega}\times A \qquad (۳۶–۱)$$

با استفاده از معادلهٔ‌کلی می‌توان به راحتی معادلات (۱–۳۴) و(۳–۳۴) رابه‌صورت زیر نوشت :

$$\frac{d'P}{dt}+\vec{\Omega}\times P=F \quad و \quad \frac{d'M}{dt}+\vec{\Omega}\times M=K \qquad (۳۶–۲)$$

چون درمعادلات فوق ، عمل دیفرانسیل گیری در سیستم مختصات متحرك انجام شده است، می‌توان مؤلفه‌های این معادلات را در امتداد محورهای سیستم مختصات متحرك به دست‌آورد:

$$(d'\mathbf{P}/dt)_1 = dP_1/dt \quad \text{و} \quad \dots \quad \text{و} \quad (d'\mathbf{M}/dt)_1 = dM_1/dt \quad \text{و} \quad \dots$$

که‌اندیس‌های ۱، ۲ و۳، مؤلفه‌ها را در امتداد محورهای x_1 و x_2 و x_3 نشان می‌دهند. در معادلهٔ اول به جای $\mathbf{P}$ مقدار مساوی آن، $\mu\mathbf{V}$ را قرار می‌دهیم:

$$\begin{cases} \mu\left(\dfrac{dV_1}{dt} + \Omega_2 V_3 - \Omega_3 V_2\right) = F_1 \\ \mu\left(\dfrac{dV_2}{dt} + \Omega_3 V_1 - \Omega_1 V_3\right) = F_2 \\ \mu\left(\dfrac{dV_3}{dt} + \Omega_1 V_2 - \Omega_2 V_1\right) = F_3 \end{cases} \qquad (۳۶-۳)$$

اگرمحورهای x_1 و x_2 و x_3 محورهای اصلی ماند باشند، می‌توان به جای M_1 و... مساوی آنها، یعنی $I_1\Omega_1$ و... را قرار داد. معادلهٔ دوم (۲ـ۳۶) چنین خواهد شد:

$$\begin{cases} I_1 d\Omega_1/dt + (I_3 - I_2)\Omega_2\Omega_3 = K_1 \\ I_2 d\Omega_2/dt + (I_1 - I_3)\Omega_3\Omega_1 = K_2 \\ I_3 d\Omega_3/dt + (I_2 - I_1)\Omega_1\Omega_2 = K_3 \end{cases} \qquad (۳۶-۴)$$

که به معادلات اولر مشهورند.

اگر دوران جسم آزاد باشد، $\mathbf{K} = 0$ است ومعادلات اولر به صورت زیر درمی‌آیند:

$$\begin{cases} d\Omega_1/dt + (I_3 - I_2)\Omega_2\Omega_3/I_1 = 0 \\ d\Omega_2/dt + (I_1 - I_3)\Omega_3\Omega_1/I_2 = 0 \\ d\Omega_3/dt + (I_2 - I_1)\Omega_1\Omega_2/I_3 = 0 \end{cases} \qquad (۳۶-۵)$$

برای مثال، این معادلات را درمورد دوران آزاد فرفرهٔ متقارن به‌کار می‌بریم؛ در این حال $I_1 = I_2$ است. از معادلهٔ سوم نتیجه می‌شود: $\dot{\Omega}_3 = 0$ و از آنجا $\Omega_3 = cte$. پس‌معادلات اول و دوم چنین می‌شوند:

$$\dot{\Omega}_1 = -\omega\Omega_2 \quad \text{و} \quad \dot{\Omega}_2 = \omega\Omega_1$$

که در آن:

$$\omega = \Omega_3(I_3 - I_1)/I_1 \qquad (۳۶-۶)$$

مقدار ثابتی است. معادلهٔ اول را در i ضرب وبا معادلهٔ اول‌جمع می‌کنیم، خواهیم داشت:

$$d(\Omega_1+i\Omega_2)/dt=i\omega(\Omega_1+i\Omega_2)$$

و یا :

$$\Omega_1+i\Omega_2=Ae^{i\omega t}$$

که در آن A ثابتی است که با انتخاب مبدأ زمان مناسب ، مقداری حقیقی خواهد داشت .

$$\Omega_1=A\cos\omega t \text{ و } \Omega_2=A\sin\omega t \qquad (۳۶-۷)$$

این معادلات نشان می‌دهد که تصویر سرعت زاویه‌ای بر صفحه‌ای عمود بر محور فرفره ، در آن صفحه با سرعت زاویه‌ای ω دوران می‌کند ، به طوری که قدر مطلق آن ($A=\sqrt{\Omega_1^2+\Omega_2^2}$) در ضمن دوران ثابت‌باقی می‌ماند . چون مؤلفهٔ Ω_3 نیز در امتداد محور فرفره ثابت است ، پس نتیجه می‌گیریم که بردار $\vec{\Omega}$ ، با سرعت زاویه‌ای یکنواخت ω حول محورفرفره دوران می‌کند ، ولی قدرمطلق‌آن همواره ثابت‌باقی می‌ماند. با توجه به روابط

$$M_1=I_1\Omega_1 \text{ ، } M_2=I_2\Omega_2 \text{ ، } M_3=I_3\Omega_3$$

که بین مؤلفه‌های $\vec{\Omega}$ و $\mathbf{M}$ برقرار است ، بردار مقدارحرکت زاویه‌ای $\mathbf{M}$ نیز نظیر همان حرکت را نسبت به محور فرفره خواهد داشت .

واضح است که این تنها بیان دیگری از حرکت بحث شده دربخش ۳۳ و ۳۵ (که نسبت به دستگاه مختصات ساکن‌بررسی شده بود) است . خصوصاً سرعت زاویه‌ای بردار $\mathbf{M}$ (محورZدرشکل ۴۸، بخش۳۵) حول محورx_3، برحسب زوایای‌اولر، همان سرعت‌زاویه‌ای $\dot{\psi}-$ است. با به‌کاربردن معادلات (۳۵-۴) ، داریم :

$$\dot{\psi}=\frac{M\cos\theta}{I_3}-\dot{\varphi}\cos\theta=M\cos\theta\left(\frac{1}{I_3}-\frac{1}{I_1}\right)$$

و یا مطابق رابطهٔ (۳۶-۶) :

$$-\dot{\psi}=\Omega_3(I_3-I_1)/I_1$$

۳۷ : فرفرهٔ نامتقارن

اکنون معادلات اولر را درمورد مسئلهٔ پیچیده‌تری، یعنی دوران‌آزاد فرفرهٔ نامتقارن به کار می‌بریم . در این جا هر سه گشتاور ماند مخالف هم می‌باشند و فرض می‌شود :

$$I_3>I_2>I_1 \qquad (۳۷-۱)$$

دو انتگرال از معادلات اولر قبلاً با استفاده از اصل بقاء انرژی و مقدار حرکت زاویه‌ای به دست آمده‌اند :

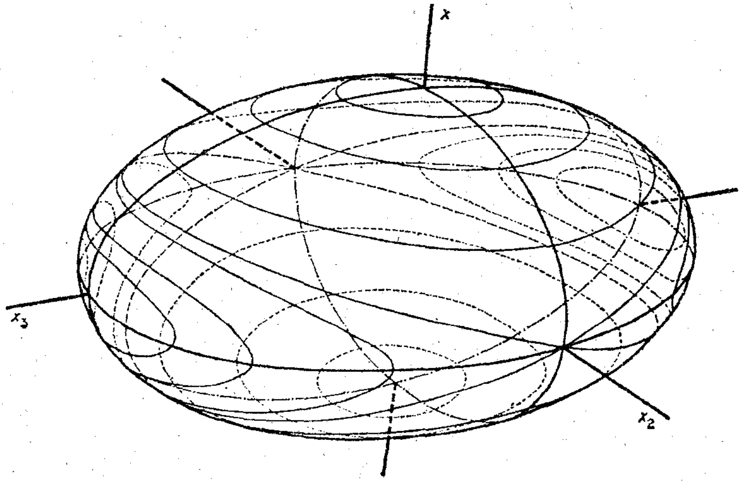
$$\begin{cases} I_1\Omega_1^2+I_2\Omega_2^2+I_3\Omega_3^2=2E \\ I_1^2\Omega_1^2+I_2^2\Omega_2^2+I_3^2\Omega_3^2=M^2 \end{cases} \qquad (۳۷-۲)$$

که درآن ، انرژی E وقدرمطلق‌مقدارحرکت‌زاویه‌ای M ثابتند . این دو معادله رابرحسب مؤلفه‌های بردار $\mathbf{M}$ می‌نویسیم :

$$\frac{M_1^2}{I_1}+\frac{M_2^2}{I_2}+\frac{M_3^2}{I_3}=2E \qquad (۳۷-۳)$$

$$M_1^2+M_2^2+M_3^2=M^2 \qquad (۳۷-۴)$$

ازبررسی این معادلات ، نتایجی از ماهیت حرکت‌فوق‌به دست می‌آوریم . برای این کار متذکر می‌شویم‌که معادلات اخیر (۴-۳۷ و ۳-۳۷) در دستگاه مختصاتی‌با محورهای M_1 ، M_2 ، M_3 به ترتیب نمایش‌دهندهٔ بیضویی بانیم محورهای $\sqrt{2EI_3}$ و $\sqrt{2EI_2}$ و $\sqrt{2EI_1}$ وکره‌ای‌با شعاع M هستند . هنگامی که بردار $\mathbf{M}$ نسبت‌به محورهای ماندفرفره حرکت می‌کند ، انتهای آن در امتداد خطوطی‌که از تقاطع این دو سطح به دست می‌آیند، حرکت می‌کند . شکل ۵۱ تعدادی از این خطوط را که از تقاطع یك بیضوی باکرات به شعاعهای مختلف به دست می‌آیند ، نشان می‌دهد .



(شکل ۵۱)

امکان وجود چنین تقاطعی به وسیلهٔ نامعادلات سادهٔ زیر تعیین می گردد .

$$۲EI_۱<M^۲<۲EI_۳ \qquad (۳۷-۵)$$

یعنی شعاع کرهٔ (۴-۳۷) بین نیم محور کوچك و نیم محور بزرگ بیضوی قرار دارد .

حال این مسیرها[1] را ــ که انتهای بردار $\mathbf{M}$ را نشان می‌دهدــ هنگامی که M تغییر می کند ، بررسی می کنیم . وقتی $M^۲$ تنها کمی بزرگتر از $۲EI_۱$ است ، تقاطع کره و بیضوی دو منحنی بسته در حول محور $x_۱$ و در نزدیکی دوقطب مربوط به این محور خواهد بود . وقتی $M^۲\to۲EI_۱$ ، این دومنحنی به دو نقطه در قطبین بدل می‌شود . با افزایش $M^۲$ ، منحنیها بزرگتر شده و به ازاء $M^۲=۲EI_۲$ ، به دو منحنی مسطحه (بیضی) بدل می‌شوند و آن دویکدیگر را درقطبین محور $x_۲$ قطع می کنند. هر گاه $M^۲$ افزایش بیشتری پیدا کند، دوباره دو منحنی مجزا و بسته ظاهر می‌شود که این بار حول قطبهای محور $x_۳$ می گردند و وقتی $M^۲\to۲EI_۳$ به دونقطه در این قطبها بدل می‌شوند .

قبل از همه یادآور می‌شویم که چون مسیرها بسته هستند ، حرکت بردار $\mathbf{M}$ نسبت به فرفره تناوبی است؛ درهر تناوب، بردار $\mathbf{M}$ سطوحی‌مخروطی راطی می کند و به وضع اولیهٔ خود باز می گردد .

سپس اختلاف اساسی که درماهیت منحنیهای مجاور قطبهای مختلف وجود دارد، نشان می‌دهیم . نزدیك محورهای $x_۳$ و $x_۱$ مسیرها کاملاً درجوار قطبهای مربوط قرارمی گیرند ولی مسیرهایی که ازنزدیك قطبهای محور $x_۲$ می گذرند ، بەفواصل دورتری ازقطبین رانده می‌شوند . این اختلاف نمایش‌دهندهٔ این موضوع است که نوع پایداری در دوران‌فرفره حول سه محور ماندش متفاوت است . دوران حول محورهای $x_۱$ و $x_۳$ (که محورهای حداقل و حداکثر ماند هستند) پایدار است ؛ یعنی هر گاه فرفره از وضع خود اندکی منحرف شود، مسیر حرکت ، نزدیك مسیر اولیه باقی می‌ماند . دوران حول محور $x_۲$ ناپایدار است ؛ یعنی با انحراف جزئی کافی است که حرکت فرفره ازحالت اولیهٔ خود بسیار دورشود .

برای‌تعیین ارتباط زمانی مؤلفه‌های $\overrightarrow{\Omega}$ (ویامؤلفه‌های $\mathbf{M}$ که با آنها متناسب هستند) ، معادلات اولر (۵-۳۶) را به‌کارمی بریم . به‌کمك معادلات (۲-۳۷) $\Omega_۱$ و$\Omega_۳$ برحسب $\Omega_۲$ به دست می آیند :

۱ـ منحنیهای مشابه مربوط به انتهای بردار $\overrightarrow{\Omega}$ را «پلهدز» Polhodes می‌نامند .

۲ـ منحنی مسطحه قابل رسم دریك صفحه است وبالعکس منحنی چپ رانمی‌توان دریك صفحه رسم کرد . (م)

$$\begin{cases} \Omega_1{}^2 = [(2EI_3 - M^2) - I_2(I_3 - I_2)\Omega_2{}^2]/I_1(I_3 - I_1) \\ \Omega_3{}^2 = [(M^2 - 2EI_1) - I_2(I_2 - I_1)\Omega_2{}^2]/I_3(I_3 - I_1) \end{cases} \qquad (۳۷-۶)$$

باگذاشتن آنها در معادلهٔ دوم (۵-۳۶) ، نتیجه می‌شود :

$$\begin{aligned} d\Omega_2/dt &= (I_3 - I_1)\Omega_1\Omega_3/I_2 = \\ &= \sqrt{(2EI_3 - M^2) - I_2(I_3 - I_2)\Omega_2{}^2} \times \\ &\times \sqrt{(M^2 - 2EI_1) - I_2(I_2 - I_1)\Omega_2{}^2} / I_2\sqrt{I_1 I_3} \end{aligned} \qquad (۳۷-۷)$$

انتگرال بیضوی معادلهٔ فوق تابع $t(\Omega_2)$ را به دست می‌دهد . برای تبدیل آن به صورت استاندارد ، بافرض $M^2 > 2EI_3$ ، (اگراین نامعادله معکوس شود، تنها جای اندیسهای ۱ و ۳ روابط زیر تغییر می‌کند) با به‌کاربردن متغیرهای زیر به جای t و Ω_2 :

$$\begin{cases} \tau = t\sqrt{(I_3 - I_2)(M^2 - 2EI_1)/I_1 I_2 I_3} \\ s = \Omega_2\sqrt{I_2(I_3 - I_2)/(2EI_3 - M^2)} \end{cases} \qquad (۳۷-۸)$$

و پادامتر مثبت $k^2 < 1$ که به وسیلهٔ رابطهٔ

$$k^2 = (I_2 - I_1)(2EI_3 - M^2)/(I_3 - I_2)(M^2 - 2EI_1) \qquad (۳۷-۹)$$

مشخص می‌شود ، خواهیم داشت :

$$\tau = \int_0^s \frac{ds}{\sqrt{(1 - s^2)(1 - k^2 s^2)}}$$

مبدأ زمان درلحظه‌ای‌که $\Omega_2 = 0$ است در نظر گرفته می‌شود . تابع عکس انتگرال فوق ، تابع بیضوی ژاکوبی است :

$$s = \mathrm{sn}\,\tau$$

و این تابع Ω_2 را برحسب زمان به دست می‌دهد . $\Omega_1(t)$ و $\Omega_3(t)$ توابع جبری از $\Omega_2(t)$ هستند و به وسیلهٔ رابطهٔ (۶-۳۷) به دست می‌آیند . با به‌کاربردن تعاریف

$$\mathrm{cn}\,\tau = \sqrt{1 - \mathrm{sn}^2\tau} \quad \text{و} \quad \mathrm{dn}\,\tau = \sqrt{1 - k^2\mathrm{sn}^2\tau}$$

داریم :

$$\begin{cases} \Omega_1=\sqrt{(2EI_3-M^2)/I_1(I_3-I_1)}\,\mathrm{cn}\,\tau \\ \Omega_2=\sqrt{(2EI_3-M^2)/I_2(I_3-I_2)}\,\mathrm{sn}\,\tau \\ \Omega_3=\sqrt{(M^2-2EI_1)/I_3(I_3-I_1)}\,\mathrm{dn}\,\tau \end{cases} \qquad (۳۷-۱۰)$$

این‌سه تابع تناوبی هستند و زمان تناوب آنها برای متغیر τ، $4K$ است که K انتگرال کامل بیضوی از نوع اول است :

$$K=\int_0^1 \frac{\mathrm{d}s}{\sqrt{(1-s^2)(1-k^2s^2)}}=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{1-k^2\sin^2 u}} \qquad (۳۷-۱۱)$$

پس زمان تناوب t چنین خواهد بود :

$$T=4K\sqrt{I_1I_2I_3/(I_3-I_2)(M^2-2EI_1)} \qquad (۳۷-۱۲)$$

در هرتناوب T ، بردار $\vec{\Omega}$ به موضع اولیهٔ خود ، نسبت به محورهای فرفره بازمی‌گردد . اما خود فرفره به موضع اولیهٔ خود ، نسبت به دستگاه ساکن باز نمی‌گردد .

به ازاء $I_1=I_2$ رابطهٔ (۳۷-۱۰) به فرم روابط بررسی شده درمورد فرفرهٔ متقارن درمی‌آید (بخش۳۶) . وقتی $I_1\to I_2$ پارامتر $k^2\to 0$ وتوابع بیضوی فوق به‌توابع نوسانی ساده بدل می‌شوند :

$$\mathrm{sn}\,\tau\to\sin\tau \quad \text{و} \quad \mathrm{cn}\,\tau\to\cos\tau \quad \text{و} \quad \mathrm{dn}\,\tau\to 1$$

و به رابطهٔ (۳۶-۷) می‌رسیم .

به ازاء $M^2=2EI_3$ نتیجه می‌شود $\Omega_1=\Omega_2=0$ و $\Omega_3=\mathrm{cte}$ ؛ یعنی بردار $\vec{\Omega}$ همواره موازی محور x_3 است . این حالت مربوط به دوران یکنواخت فرفره حول محور x_3 است . همین طور اگر $M^2=2EI_1$ $(\tau\equiv 0)$ باشد ، دورانی یکنواخت حول محور x_1 داریم .

حال‌حرکت مطلق فرفره را درفضا تعیین‌می‌کنیم (یعنی‌حرکت نسبت به‌دستگاه ساکن X و Y و Z). برای این‌کار زوایای‌اولر ψ و φ و θ را به‌کارمی‌بریم (زوایای‌بین‌محورهای x_1 و x_2 و x_3 ؛ X و Y و Z) . Z را در امتداد بردار ثابت $\mathbf{M}$ فرض می‌کنیم . چون زاویهٔ قطبی و سمت محور Z نسبت محورهای x_1 و x_2 و x_3 به ترتیب θ و $\frac{1}{2}\pi-\psi$ هستند (زیرنویس بخش ۳۵) ، مؤلفه‌های این بردار روی محورهای x_1 و x_2 و x_3 چنین خواهند بود :

$$\begin{cases} M\sin\theta\sin\psi = M_1 = I_1\Omega_1 \\ M\sin\theta\cos\psi = M_2 = I_2\Omega_2 \\ M\cos\theta = M_3 = I_3\Omega_3 \end{cases} \qquad (۳۷-۱۳)$$

از این‌رو :

$$\cos\theta = I_3\Omega_3/M \quad \text{و} \quad tg\psi = I_1\Omega_1/I_2\Omega_2 \qquad (۳۷-۱۴)$$

از رابطهٔ (۱۰-۳۷) نتیجه می‌شود :

$$\begin{cases} \cos\theta = \sqrt{I_3(M^2-2EI_1)/M^2(I_3-I_1)}\,\mathrm{dn}\tau \\ tg\psi = \sqrt{I_1(I_3-I_2)/I_2(I_3-I_1)}\,\mathrm{cn}\tau/\mathrm{sn}\tau \end{cases} \qquad (۳۷-۱۵)$$

که زوایای ψ و θ را در توابعی برحسب زمان به دست می‌دهد . آنها نیز مانند توابع مؤلفه‌های $\vec{\Omega}$ تناوبی هستند و زمان تناوب آنها همان (۱۲-۳۷) است .

زاویهٔ φ در روابط (۱۳-۳۷) موجود نیست و برای محاسبهٔ آن بایدازرابطهٔ (۱-۳۵) که مؤلفه‌های $\vec{\Omega}$ را برحسب مشتقات زوایای اولر نسبت به زمان به دست می‌دهد ؛ استفاده کرد . باحذف $\dot{\theta}$ از معادلات زیر

$$\Omega_1 = \dot{\varphi}\sin\theta\sin\psi + \dot{\theta}\cos\psi \quad \text{و} \quad \Omega_2 = \dot{\varphi}\sin\theta\cos\psi - \dot{\theta}\sin\psi$$

نتیجه می گیریم :

$$\dot{\varphi} = (\Omega_1\sin\psi + \Omega_2\cos\psi)/\sin\theta$$

بابه‌کاربردن معادلات (۱۳-۳۷) ، خواهیم داشت :

$$d\varphi/dt = (I_1\Omega_1^2 + I_2\Omega_2^2)M/(I_1^2\Omega_1^2 + I_2^2\Omega_2^2) \qquad (۳۷-۱۶)$$

تابع $\varphi(t)$ با انتگرال گیری از معادلهٔ فوق به دست می‌آید . انتگرال فوق شامل توابع پیچیدهٔ بیضوی است و به وسیلهٔ تبدیلهای دقیق و پیچیده انتگرال فوق برحسب توابع تتا[1] به دست می‌آید . این محاسبات را شرح نمی‌دهیم و تنها در نتیجهٔ حاصل بحث می‌کنیم :

تابع $\varphi(t)$ را می‌توان به صورت مجموع دوجمله نشان داد (بدون مقدار ثابت) .

$$\varphi(t) = \varphi_1(t) + \varphi_2(t) \qquad (۳۷-۱۷)$$

اولی به وسیلهٔ رابطهٔ زیر به دست می‌آید :

$$e^{2i\varphi_1(t)} = \vartheta_{01}\left(\frac{2t}{T} - i\alpha\right)/\vartheta_{01}\left(\frac{2t}{T} + i\alpha\right) \qquad (۳۷-۱۸)$$

۱- theta functions

که درآن ϑ_{01} تابع تتا و α مقدار ثابتی است ، به طوری که :

$$\mathrm{sn}(2i\alpha K)=i\sqrt{I_3(M^2-2EI_1)/I_1(2EI_3-M^2)} \qquad (۳۷\text{–}۱۹)$$

K و T به وسیلهٔ روابط (۳۷–۱۱) و (۳۷–۱۲) به دست می‌آیند . تابع طرف دوم رابطهٔ (۳۷–۱۸) تناوبی است و زمان تناوب آن $\frac{1}{2}T$ است؛ به طوریکه $\varphi_1(t)$ در تناوب T به اندازهٔ 2π تغییر می‌کند . قسمت دوم (۳۷–۱۷) از رابطهٔ زیر به دست می‌آید :

$$\varphi_2(t)=2\pi t/T' \quad \text{و} \quad \frac{1}{T'}=\frac{M}{2\pi I_1}-\frac{i}{\pi T}\cdot\frac{\vartheta_{01}'(i\alpha)}{\vartheta_{01}(i\alpha)} \qquad (۳۷\text{–}۲۰)$$

به این تابع در تناوب T' ، 2π افزوده می‌شود . از این‌رو حرکت برحسب φ ، ترکیبی از دوحرکت‌تناوبی است : یکی با تناوب T که همان زمان تناوب متغیرهای ψ و θ است و دیگری T' که با T یکسان نیست . از این تفاوت نتیجه می‌گیریم که فرفره هرگز دقیقاً به حالت نخستین خود باز نمی‌گردد .

مسائل

مسئلهٔ ۱ـ دوران‌آزاد فرفره را حول‌محوری نزدیك x_1 یا x_3 به‌دست آورید .

حل : فرض می‌کنیم محور x_3 نزدیك امتداد $\mathbf{M}$ قرارداشته باشد . در این صورت مقادیر M_1 و M_2 کوچکند و $M_3\cong M$ (بدون درنظر گرفتن جملات بی‌نهایت‌کوچك مرتبهٔ دو وبالاتر) . با این تقریب دومعادلهٔ اول اولر (۳۶–۵) را می‌توان به صورت

$$\mathrm{d}M_1/\mathrm{d}t=\Omega_0 M_2(1-I_3/I_2) \quad \text{و} \quad \mathrm{d}M_2/\mathrm{d}t=\Omega_0 M_1(I_3/I_1-1)$$

(که درآن $\Omega_0=M/I_3$ است) نوشت . مطابق معمول جوابهای M_1 و M_2 را متناسب با $e^{i\omega t}$ فرض‌می‌کنیم وبسامد ω را به صورت زیر به‌دست می‌آوریم:

$$\omega=\Omega_0\sqrt{\left(\frac{I_3}{I_1}-1\right)\left(\frac{I_3}{I_2}-1\right)} \qquad (۱)$$

مقادیر M_1 و M_2 چنین خواهند بود :

$$M_1 = Ma\sqrt{\left(\frac{I_3}{I_2}-1\right)}\cos\omega t \text{ و } M_2 = Ma\sqrt{\left(\frac{I_3}{I_1}-1\right)}\sin\omega t \quad (2)$$

a مقدار ثابت اختیاری و کوچکی است. این معادلات ، حرکت بردار $\mathbf{M}$ را نسبت به فرفره نشان می‌دهد . درشکل ۵۱ انتهای بردار $\mathbf{M}$ ، با بسامد ω ، بیضی کوچکی را حول قطب محور x_3 طی می‌کند .

برای تعیین حرکت مطلق فرفره در فضا ، زوایای اولر آن را محاسبه می‌کنیم . در این مورد زاویهٔ θ بین محورهای x_3 و Z (امتداد $\mathbf{M}$) کوچك است . با استفاده از رابطهٔ (۱۴ـ۳۷) داریم :

$$tg\,\psi = M_1/M_2$$

$$\theta^2 \approx 2(1-\cos\theta) = 2\left(1-\frac{M_3}{M}\right) \approx (M_1^2+M_2^2)/M^2$$

با قراردادن (۲) درآنها، نتیجه می‌شود :

$$\begin{cases} tg\,\psi = \sqrt{I_1(I_3-I_2)/I_2(I_3-I_1)}\,\cot g\,\omega t \\ \theta^2 = a^2\left[\left(\frac{I_3}{I_2}-1\right)\cos^2\omega t + \left(\frac{I_3}{I_1}-1\right)\sin^2\omega t\right] \end{cases} \quad (3)$$

برای به دست‌آوردن φ، متذکرمی‌شویم که با استفاده ازرابطهٔ سوم (۱ـ۳۵)، در ازای $1 \gg \theta$ داریم :

$$\Omega_0 \approx \Omega_3 \approx \dot\psi + \dot\varphi$$

و از این‌رو با حذف مقدار ثابت انتگرال خواهیم داشت :

$$\varphi = \Omega_0 t - \psi$$

با بررسی نحوهٔ تغییرات‌امتداد سه محور ماند ، تجسم دقیقی ازحرکت واقعی فرفره به دست می‌آید . $\mathbf{n}_1$ و $\mathbf{n}_2$ و $\mathbf{n}_3$ بردارهای یکهٔ این سه محور فرض می‌شوند . بردارهای $\mathbf{n}_1$ و$\mathbf{n}_2$ به طوریکنواخت و بابسامد Ω_0 درصفحهٔ XY دوران می‌کنند و درعین حال نوسانهای عرضی با دامنهٔ کوتاه و بسامد ω انجام می‌دهند. این نوسانها به وسیلهٔ مؤلفه‌های واقع بر Z بردارهاتعیین می‌شوند :

$$\begin{cases} n_{1x} \approx M_1/M = a\sqrt{\dfrac{I_3}{I_2}-1}\cos\omega t \\ n_{2x} \approx M_2/M = a\sqrt{\dfrac{I_3}{I_1}-1}\sin\omega t \end{cases}$$

با همان تقریب درمورد بردار $\mathbf{n}_3$ داریم :

$$n_{3z} \approx 1 \quad \text{و} \quad n_{3y} \approx -\theta\cos\varphi \quad \text{و} \quad n_{3x} \approx \theta\sin\varphi$$

(زوایای قطبی و سمت $\mathbf{n}_3$ نسبت به محورهای X و Y و Z به ترتیب θ و $\varphi - \frac{\pi}{2}$ هستند) . همچنین با استفاده از رابطهٔ (۱۳-۳۷) داریم :

$$\begin{aligned} n_{3x} &= \theta\sin(\Omega_0 t - \psi) = \\ &= \theta\sin\Omega_0 t\cos\psi - \theta\cos\Omega_0 t\sin\psi = \\ &= (M_2/M)\sin\Omega_0 t - (M_1/M)\cos\Omega_0 t = \\ &= a\sqrt{\frac{I_3}{I_1}-1}\,\sin\Omega_0 t\sin\omega t - a\sqrt{\frac{I_3}{I_2}-1}\,\cos\Omega_0 t\cos\omega t = \\ &= -\frac{1}{2}a\left[\sqrt{\frac{I_3}{I_1}-1} + \sqrt{\frac{I_3}{I_2}-1}\right]\cos(\Omega_0+\omega)t + \\ &\quad + \frac{1}{2}a\left[\sqrt{\frac{I_3}{I_1}-1} - \sqrt{\frac{I_3}{I_2}-1}\right]\cos(\Omega_0-\omega)t \end{aligned}$$

و همین طور :

$$\begin{aligned} n_{3y} &= -\frac{1}{2}a\left[\sqrt{\frac{I_3}{I_1}-1} + \sqrt{\frac{I_3}{I_2}-1}\right]\sin(\Omega_0+\omega)t + \\ &\quad + \frac{1}{2}a\left[\sqrt{\frac{I_3}{I_1}-1} - \sqrt{\frac{I_3}{I_2}-1}\right]\sin(\Omega_0-\omega)t \end{aligned}$$

از این‌جا دیده می‌شود که حرکت $\mathbf{n}_3$ مجموع دو حرکت دورانی حول محور Z با بسامد $\Omega_0 \pm \omega$ است .

مسئلهٔ ۲ ـ دوران آزاد فرفره‌ای را که در آن رابطهٔ $M^2 = 2EI_2$ برقرار است ، به دست‌آورید .

حل : این مورد منطبق با حالتی است که انتهای بردار $\mathbf{M}$ ، منحنی مار برقطب محور x_2 را طی می‌کند (شکل۵۱) . معادلهٔ (۷-۳۷) دراین‌مورد چنین است :

$$s=\Omega_{\text{۲}}/\Omega_{\circ} \text{ و } \tau=t\sqrt{(I_{\text{۲}}-I_{\text{۱}})(I_{\text{۳}}-I_{\text{۲}})/I_{\text{۱}}I_{\text{۳}}}\,\Omega_{\circ} \text{ و } ds/d\tau=\text{۱}-s^{\text{۲}}$$

که در آن :

$$\Omega_{\circ}=M/I_{\text{۲}}=\text{۲}E/M$$

با انتگرال گیری از این معادله و به‌کار بردن (۶ـ۳۷) نتیجه می‌شود :

$$\left\{\begin{aligned} \Omega_{\text{۱}}&=\Omega_{\circ}\sqrt{I_{\text{۲}}(I_{\text{۳}}-I_{\text{۲}})/I_{\text{۱}}(I_{\text{۳}}-I_{\text{۱}})}\cdot\frac{\text{۱}}{\mathrm{ch}\tau}\\ \Omega_{\text{۲}}&=\Omega_{\circ}\mathrm{th}\tau\\ \Omega_{\text{۳}}&=\Omega_{\circ}\sqrt{I_{\text{۲}}(I_{\text{۲}}-I_{\text{۱}})/I_{\text{۳}}(I_{\text{۳}}-I_{\text{۱}})}\cdot\frac{\text{۱}}{\mathrm{ch}\tau}\end{aligned}\right. \qquad (\text{۱})$$

برای شرح حرکت مطلق فرفره زوایای اولر را به‌کار می‌بریم . θ را زاویهٔ بین محور Z (امتداد $\mathbf{M}$) و $x_{\text{۲}}$ (نه مانند قبل محور $x_{\text{۳}}$) در نظر می‌گیریم . در روابط (۱۴ـ۳۷) و(۱۶ـ۳۷) که مؤلفه‌های بردار$\vec{\Omega}$را نسبت به زوایای اولر به دست می‌دهد ، باید تبدیل دوری اندیسهای ۱ و ۲ و ۳ را به ۳ و ۲ و ۱ انجام دهیم . باگذاشتن (۱) در این روابط ، نتیجه می‌شود :

$$tg\psi=\sqrt{I_{\text{۳}}(I_{\text{۲}}-I_{\text{۱}})/I_{\text{۱}}(I_{\text{۳}}-I_{\text{۲}})} \text{ و } \varphi=\Omega_{\circ}t+\mathrm{cte} \text{ و } \cos\theta=\mathrm{th}\tau$$

از این روابط دیده می‌شودکه هرگاه $t\to\infty$ بردار $\vec{\Omega}$ به طور مجانب به محور $x_{\text{۲}}$ نزدیك می‌شودکه خود دارای مجانب Z است .

۳۸ : جسم صلب در تماس

معادلات حرکت (۱ـ۳۴) و (۳ـ۳۴) نشان می‌دهد که شرایط تعادل جسم صلب را می‌توان با صفر قراردادن مجموع نیروها و گشتاورهای وارد بر جسم به دست آورد :

$$\mathbf{F}=\Sigma\mathbf{f}=\circ\ ,\ \mathbf{K}=\Sigma\mathbf{r}\times\mathbf{f}=\circ \qquad (\text{۱ـ۳۸})$$

این مجموعه شامل تمام نیروهای خارجی وارد بر جسم است و $\mathbf{r}$ شعاع حامل «نقطهٔ کاربرد» می‌باشد . مبدائی که گشتاورها نسبت به آن سنجیده می‌شوند ، اختیاری است چه هرگاه $\mathbf{F}=\circ$ باشد این انتخاب تأثیری درمقدار $\mathbf{K}$ نخواهد داشت [(۵ـ۳۴) راببینید].

اگر سیستمی از اجسام صلب در تماس داشته باشیم ، شرایط (۱ـ۳۸) برای هر جسم به طور مجزا باید برقرار باشد . نیروهای مورد بررسی بایست شامل آنهایی نیز باشدکه

بر هر جسم به وسیلهٔ جسمی که با آن در تماس است وارد می‌شود . این نیروهاکه در نقاط تماس به جسم وارد می‌شوند ، «نیروهای واکنشی» نام دارند . آشکار است که واکنشهای متقابل ، درتماس هر دو جسم دو مقدار مساوی است که در جهت مخالف یکدیگر اثرمی کنند.

عموماً مقدار و امتداد واکنشها به وسیلهٔ حل همزمان معادلات تعادل (۱-۳۸) برای تمام اجسام به دست می‌آید ولی در برخی از موارد امتداد آنها به وسیله شرط مسئله داده شده‌است؛ به طور مثال دوجسم که آزادانه برروی یکدیگرمی‌لغزند، چه‌دراین حال واکنشهای بین آندو عمود برسطح تماس است .

درمورد دوجسم درتماس که نسبت بهم متحرکند ، علاوه برنیروهای واکنشی، نیروهای اتلاف مربوط به اصطکاك نیز به وجود می‌آیند .

دو نوع حرکت برای اجسام در تماس وجود دارد : لغزش و غلت . در لغزش واکنش عمود بر سطح تماس است و نیروهای اصطکاك مماس برسطحند . در مورد غلت خالص تعریف زیر صادق است : در نقطهٔ تماس هیچ حرکت نسبی بین دو جسم وجود ندارد (یعنی می‌توان گفت که درغلت، نقطهٔ تماس در هر لحظه ساکن‌است) . واکنشها در هر امتدادی ممکن است باشند (یعنی‌لازم نیست که حتماً عمود بر سطح تماس باشند). اصطکاك درغلت مانندگشتاوری که با گشتاور غلت جسم مخالفت می‌کند ، ظاهر می‌شود .

هرگاه‌اصطکاك درلغزش قابل صرف‌نظر کردن‌باشد،سطح موردبررسی‌را«کاملاً صیقلی» می‌گویند. برعکس هرگاه تنها غلت خالص و بدون لغزش برای جسم ممکن شود و اصطکاك در غلت قابل صرف‌نظرکردن باشد ، سطح‌را «کاملاً زبر» می‌نامند .

در هر دو این موارد ، نیروهای اصطکاك صریحاً در مسئله وارد نمی‌شوند و درنتیجه مسئله کاملاً به طور مکانیکی قابل تحلیل است . برعکس هرگاه نیروهای اصطکاك نقش مهمی را در حرکت جسم ایفا کنند ، آنگاه تحلیل کاملاً مکانیکی مسئله ناممکن است (به بخش ۲۵ مراجعه شود) .

تماس بین دو جسم درجات آزادی آنرا نسبت به حرکت‌آزاد جسم‌کاهش می‌دهد . تا کنون در بحث از این مسائل ، کاهش درجات آزادی جسم را بابه‌کارگرفتن مختصاتی که مستقیماً به درجات آزادی واقعی جسم بستگی داشت ، محسوب داشته‌ایم ، اما در مورد غلت انتخاب چنین مختصاتی میسر نیست .

شرطی که در غلت اجسام اهمیت زیادی دارد ، این است که سرعتهای نقاط در تماس باید برابر هم باشند . مثلا در غلت جسم روی سطح ساکن ، سرعت نقطهٔ تماس صفر است . در حالت کلی این شرط به وسیلهٔ «معادلات بازدارنده» به شکل

$$\sum_i c_{\alpha i}\dot{q}_i = 0 \qquad (۳۸-۲)$$

بیان می‌شود .

$c_{\alpha i}$ تنها توابعی از مختصات هستند (اندیس α معادلات را شماره‌گذاری می‌کند) . اگر طرف چپ این معادلات مشتق کامل[1] توابعی از مختصات نسبت به زمان نباشد ، معادلات قابل انتگرال‌گیری نیستند. به عبارت دیگر آنها را نمی‌توان تبدیل به روابطی بین مختصات کرد تا وضعیت اجسام را با مختصات کمتری که درجات آزادی واقعی را نشان می‌دهد ، بررسی کرد . این نوع بازدارنده‌ها را «غیر هولونوم» می‌گویند و برعکس بازدارنده‌های «هولونوم» به آنهائی گفته می‌شود که روابطی بین مختصات ایجاد می‌کنند .

برای مثال غلت کره، روی صفحه را درنظر می‌گیریم . مانند همیشه ، $\mathbf{V}$ را سرعت انتقالی (سرعت مرکز ثقل) و $\vec{\Omega}$ را سرعت زاویه‌ای دوران فرض می‌کنیم . سرعت نقطهٔ تماس کره با صفحه ، با نهادن $\mathbf{r}=-a\mathbf{n}$ در معادلهٔ عمومی $\mathbf{v}=\mathbf{V}+\vec{\Omega}\times\mathbf{r}$ به دست می‌آید (a شعاع کره و $\mathbf{n}$ برداریکهٔ امتداد عمود بر سطح است) . شرط لازم آنست که کره روی صفحه ، در نقطهٔ تماس نلغزد ؛ یعنی :

$$\mathbf{V}-a\vec{\Omega}\times\mathbf{n}=0 \qquad (۳۸-۳)$$

این معادله‌قابل انتگرال‌گیری‌نیست (اگرچه $\mathbf{V}$ دیفرانسیل‌کامل شعاع حامل مرکز ثقل کره است ولی سرعت زاویه‌ای عموماً دیفرانسیل‌کامل هیچ مختصاتی نیست). بازدارندهٔ (۳۸-۳) در این صورت «غیرهولونوم» است[2].

چون معادلات بازدارنده‌های «غیرهولونوم» برای‌کاهش تعداد مختصات قابل استفاده نیست . هرگاه این بازدارنده‌ها وجود داشته باشند ، باید از مختصاتی که همهٔ آنها مستقل نیستند ، استفاده‌کرد . برای رسیدن به معادلات‌لاگرانژ مربوط ، به اصل‌کوچکترین عمل باز می‌گردیم .

وجود بازدارندهٔ (۳۸-۲) ، محدودیتهای معینی را در نحوهٔ تغییر مختصات ایجاب

۱ـ اگر یك عبارت دیفرانسیل کامل را بردیفرانسیل یك متغیر تقسیم کنیم ، مشتق‌کامل آن نسبت به متغیر اخیر به دست می‌آید (م) .

۲ـ باید خاطرنشان‌کرد که بازدارندهٔ مشابهی ، درغلت استوانه «هولونوم» است . در آن مورد محور دوران درفضا جهت ثابتی دارد و از این‌رو $\Omega=d\varphi/dt$ دیفرانسیل کامل زاویهٔ φ در دوران استوانهٔ حول محورش است . شرط (۳۸-۳) در این صورت قابل انتگرال‌گیری است و رابطه‌ای بین زاویهٔ φ و مختصات مرکز ثقل استوانه ایجاد می‌کند .

می‌کند : باضرب معادلهٔ (۲ـ۳۸) در δt ملاحظه می‌کنیم که تغییرات δq_i مستقل نیست ، بلکه مطابق رابطهٔ زیر دارای محدودیتهایی است .

$$\sum_i c_{\alpha i}\delta q_i = 0 \tag{۳۸ـ۴}$$

و این امر در تغییرات عمل باید محسوب شود . مطابق روش‌لاگرانژ برای یافتن اکسترمم شرطی[1] باید به مقدار زیر انتگرال تغییرات عمل

$$\delta S = \int \sum_i \delta q_i \left[\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)\right]dt$$

مقدار سمت چپ رابطهٔ (۴ـ۳۸) راکه درضریب مجهول λ_α (تابعی از مختصات) ضرب شده است ، بیافزائیم و سپس انتگرال حاصل را مساوی صفر قرار دهیم . در این کار تغییرات δq_i کاملاً مستقل فرض شده است و نتیجهٔ حاصل چنین است :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = \sum_\alpha \lambda_\alpha c_{\alpha i} \tag{۳۸ـ۵}$$

این معادلات همراه با معادلات (۲ـ۳۸) روابط لازم جهت تعیین مجهولات q_i و λ_α را به دست می‌دهند .

در این طریق‌نیروهای واکنشی ظاهر نمی‌شوند و تماس اجسام‌کاملاً به‌وسیلهٔ معادلات بازدارنده قابل تعبیر است . اما روش دیگری برای به دست آوردن معادلات حرکت اجسام درتماس وجود داردکه درآن نیروهای واکنشی صریحاً وارد عمل می‌شوند . خصوصیت ویژهٔ این روش (که گاهی اصل دالامبر نامیده می‌شود) ، نوشتن معادلات مجزا برای هر یك از اجسام است :

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = \Sigma \mathbf{f} \text{ و } d\mathbf{M}/dt = \Sigma \mathbf{r}\times\mathbf{f} \tag{۳۸ـ۶}$$

که در آن نیروهای $\mathbf{f}$ که به هریك از اجسام وارد می‌شوند ، شامل نیروهای واکنشی نیز هستند. این‌نیروها درابتدا مجهولند و همزمان با تعیین حرکت جسم، به وسیلهٔ حل‌معادلات به دست می‌آیند . این روش هم در مورد بازدارندهٔ « هولونوم » و هم « غیرهولونوم » قابل اجرا است .

۱ـ به ضمیمهٔ کتاب مراجعه شود .

مسائل

مسئلهٔ ۱ـ با به‌کاربردن اصل دالامبر معادلات حرکت کرهٔ متجانسی‌را که برصفحه‌ای ، تحت تأثیر نیروی خارجی $\mathbf{F}$ وگشتاور $\mathbf{K}$ می‌غلتد به دست آورید .

حل: معادلهٔ بازدارنده دراین موردهمان رابطهٔ (۳ـ۳۸) است. نیروی واکنشی صفحه و کره را درنقطهٔ تماس $\mathbf{R}$ می‌نامیم. معادلات (۶ـ۳۸) به‌شکل زیر هستند :

$$\mu d\mathbf{V}/dt = \mathbf{F} + \mathbf{R} \qquad (۱)$$

$$I d\vec{\Omega}/dt = \mathbf{K} - a\mathbf{n} \times \mathbf{R} \qquad (۲)$$

و این روابط با به‌کار بردن رابطهٔ $\mathbf{P} = \mu\mathbf{V}$ و استفاده از رابطهٔ $\mathbf{M} = I\vec{\Omega}$ در مورد فرفرهٔ کروی ، به دست آمده‌اند . با دیفرانسیل‌گرفتن از معادلات بازدارندهٔ (۳ـ۳۸) نسبت به زمان داریم :

$$\dot{\mathbf{V}} = a\dot{\vec{\Omega}} \times \mathbf{n}$$

آن را در معادلهٔ (۱) می‌گذاریم و $\dot{\vec{\Omega}}$ رابه وسیلهٔ رابطهٔ (۲) حذف می‌کنیم ؛ درنتیجه داریم :

$$a\mathbf{n}(\mathbf{n}\cdot\mathbf{R}) + \mathbf{K} \times \mathbf{n} - a\mathbf{R} = (I/a\mu)(\mathbf{F} + \mathbf{R})$$

این رابطه $\mathbf{F}$ و $\mathbf{R}$ و $\mathbf{K}$ را به هم مربوط می‌سازد . مؤلفهٔ این معادلات را می‌نویسیم و به جای I ، $\frac{۲}{۵}\mu a^{۲}$ را قرارمی‌دهیم (بخش۳۲ مسئلهٔ ۲(b))، درنتیجه چنین حاصل می‌شود :

$$R_x = \frac{۵}{۷a}K_y - \frac{۲}{۷}F_x \quad \text{و} \quad R_y = \frac{-۵}{۷a}K_x - \frac{۲}{۷}F_y \quad \text{و} \quad R_z = -F_z$$

صفحه را صفحهٔ xy فرض‌کرده‌ایم . بالاخره با نهادن این معادلات در (۱)، معادلات حرکت که تنها شامل نیرو و گشتاور خارجی هستند ، به دست می‌آیند :

$$\frac{dV_x}{dt}=\frac{۵}{۷\mu}(F_x+\frac{K_y}{a})$$

$$\frac{dV_y}{dt}=\frac{۵}{۷\mu}(F_y-\frac{K_x}{a})$$

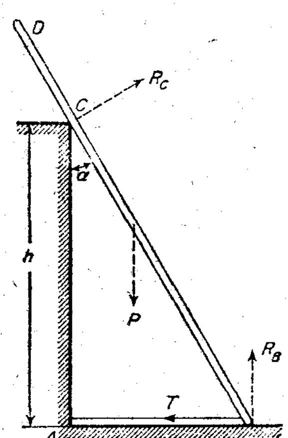
Ω_y و Ω_x برحسب V_x و V_y ، به وسیلهٔ معادلات بازدارندهٔ (۳ـ۳۸) به دست می‌آیند ؛ برای Ω_x رابطهٔ زیر برقرار است (مؤلفهٔ z معادلهٔ (۲)) :

$$\frac{۲}{۵}\mu a^۲ d\Omega_x/dt=K_x$$

مسئلهٔ ۲ـ میلهٔ متجانس BD به وزن P و درازای l مانند شکل ۵۲ بردیواری تکیه‌کرده است . انتهای‌تحتانی آن B نیز به وسیلهٔ نخ AB محکم شده است . نیروی‌کشش نخ و واکنش دیوار را به دست آورید .

حل : نیروی وزن میلهٔ BD را به وسیلهٔ نیروی P که در وسط آن و در امتداد قائم و به طرف پائین اثر می‌کند ، نشان می‌دهیم . واکنشهای R_B و R_C به ترتیب عمود بر AB و درجهت بالا و عمود برمیله به طرف خارج هستند . نیروی‌کشش نخ در جهت B به A قرار دارد . از حل معادلات تعادل نتیجه می‌شود :

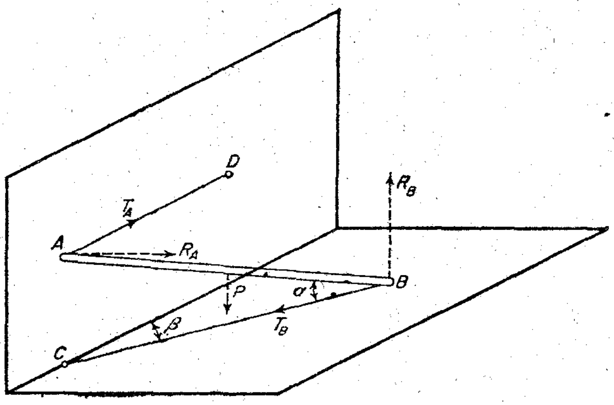
$R_C=(Pl/۴h)\sin ۲\alpha$ و $R_B=P-R_C\sin\alpha$ و $T=R_C\cos\alpha$



(شکل ۵۲)

مسئلهٔ ۳ـ انتهای A میله‌ای به وزن P روی سطح قائم قرار دارد و انتهای B آن درسطح افق نهاده شده است (شکل ۵۳) و به وسیلهٔ دونخ افقی

AD و BC در وضع ثابت نگاه داشته شده است . BC در صفحهٔ قائم مار بر AB قرار دارد . واکنشهای صفحات وکشش نخ را به دست آورید .

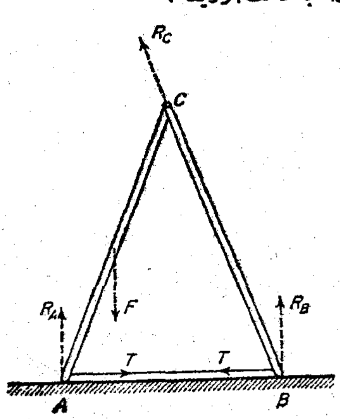


(شکل ۵۳)

حل: کششهای T_A و T_B به ترتیب درجهت A به D و B به C هستند. واکنشهای R_A و R_B عمود بر صفحات مربوط می‌باشند. باحل معادلات تعادل نتیجه می‌شود :

$$T_A=T_B\cos\beta \quad \text{و} \quad R_A=T_B\sin\beta \quad \text{و} \quad T_B=\frac{1}{2}P\cot g\alpha \quad \text{و} \quad R_B=P$$

مسئلهٔ ۴ـ دومیله به طول l که وزنشان قابل صرف‌نظر کردن است ، به هم مفصل شده‌اند . دوانتهای دیگر آنها با نخ AB به هم متصل است (شکل ۵۴) . آنها روی صفحه‌ای ایستاده‌اند و نیروی F در وسط یکی از آنها اثر می‌کند ، واکنشها را به دست‌آورید .



(شکل ۵۴)

حل : کشش T در A از A به B و در B از B به A عمل می‌کند. واکنشهای R_A و R_B در A و B عمود برصفحه هستند. R_C واکنش میلهٔ AC در مفصل است و در نتیجه واکنش $-R_C$ به میلهٔ BC وارد می‌شود. چون مجموع گشتاورهای نیروهای R_B و T و $-R_C$ وارد برمیلهٔ BC باید صفر باشند، پس R_C در امتداد BC قرار دارد. ازشرایط دیگر تعادل (برای دو میله و به طور مجزا) حاصل می‌شود :

$$T=\frac{1}{4}F\cot g\alpha \quad و \quad R_A=3F/4 \quad و \quad R_B=F/4 \quad و \quad R_C=\frac{F}{4\sin\alpha}$$

(α زاویهٔ $\widehat{CAB}$ است).

۳۹ : حرکت در چارچوب مرجع غیرماند

تاکنون در بحث ازحرکت سیستمهای مکانیکی، چارچوب مرجع ماند به‌کارمی‌رفت. مثلاً تابع‌لاگرانژ

$$L_0=\frac{1}{2}m\mathbf{v}_0^2-U \tag{۳۹-۱}$$

و معادلهٔ حرکت مربوط به آن

$$m d\mathbf{v}_0/dt=-\frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}}$$

برای‌نقطهٔ مادی تحت اثر میدان نیروهای خارجی، تنها در چارچوب ماند معتبر است (در این مبحث اندیس ۰ نماینده کمیاتی است که مربوط به مرجع ماند هستند).

اکنون معادلات حرکت را درسیستمهای غیرماندبررسی می‌کنیم. اساس‌حل این مسئله نیز همان اصل‌کوچکترین عمل است، چه اعتبارآن منوط‌به چارچوب مرجع انتخابی‌نیست. معادلات لاگرانژ

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}}\right)=\frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}} \tag{۳۹-۲}$$

مانند گذشته معتبرند، ولی تابع لاگرانژ دیگر به شکل (۳۹-۱) نیست و برای به دست آوردن آن، باید انتقال لازم را در مورد L_0 انجام دهیم.

این انتقال در دو مرحله انجام می‌شود. ابتدا فرض می‌کنیم چارچوب مرجع K' با

سرعت انتقالی $\mathbf{V}(t)$ نسبت به چارچوب ماند حرکت می‌کند. سرعتهای $\mathbf{v}_\circ$ و $\mathbf{v}'$ ذرهٔ مادی (به ترتیب در چارچوب $K_\circ$ و K') با رابطهٔ زیر به‌هم مربوطند:

$$\mathbf{v}_\circ = \mathbf{v}' + \mathbf{V}(t) \qquad (۳۹\text{-}۳)$$

آنرا در معادلهٔ (۱-۳۹) می‌گذاریم؛ تابع لاگرانژ در K' به دست می‌آید:

$$L' = \frac{۱}{۲} m\mathbf{v}'^{۲} + m\mathbf{v}'\cdot\mathbf{V} + \frac{۱}{۲} m\mathbf{V}^{۲} - U$$

$\mathbf{V}^{۲}(t)$ تابع معینی برحسب زمان است و از این‌رو نسبت به زمان دیفرانسیل کامل می‌باشد. در نتیجه جملهٔ سوم L' حذف می‌شود. ازطرفی $\mathbf{v}' = \dfrac{\mathrm{d}\mathbf{r}'}{\mathrm{d}t}$ (که درآن $\mathbf{r}'$ شعاع حامل ذرهٔ مادی درچارچوب K' است)، ازآنجا:

$$m\mathbf{V}(t)\cdot\mathbf{v}' = m\mathbf{V}\cdot \mathrm{d}\mathbf{r}'/\mathrm{d}t = \mathrm{d}(m\mathbf{V}\cdot\mathbf{r}')/\mathrm{d}t - m\mathbf{r}'\cdot \mathrm{d}\mathbf{V}/\mathrm{d}t$$

با گذاردن آن درتابع لاگرانژ و حذف دیفرانسیلهای کامل بالاخره نتیجه می‌شود:

$$L' = \frac{۱}{۲} mv'^{۲} - m\mathbf{W}(t)\cdot\mathbf{r}' - U \qquad (۳۹\text{-}۴)$$

که در آن $\mathbf{W} = \dfrac{\mathrm{d}\mathbf{V}}{\mathrm{d}t}$ شتاب انتقالی چارچوب K' است.

معادلهٔ لاگرانژ حاصل از (۴-۳۹) چنین است:

$$m\frac{\mathrm{d}\mathbf{v}'}{\mathrm{d}t} = -\frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}'} - m\mathbf{W}(t) \qquad (۳۹\text{-}۵)$$

از این‌رو حرکت شتاب‌دار در یك چارچوب مرجع، باتوجه به اثرآن درمعادلات حرکت ذرهٔ مادی، معادل است با عمل میدان یکنواخت نیرویی که قدرمطلق آن برابر حاصلضرب جرم ذرهٔ مادی در شتاب $\mathbf{W}$ و جهت‌آن مخالف این شتاب است.

در مرحلهٔ دوم چارچوب مرجع K را درنظر می‌گیریم و فرض می‌کنیم مبدأ آن با مبدأ چارچوب K' منطبق است ونسبت به K' با سرعت زاویه‌ای $\vec{\Omega}(t)$ دوران می‌کند. در این حال K نسبت به چارچوب ماند $K_\circ$ هم حرکت دورانی و هم حرکت انتقالی دارد.

سرعت $\mathbf{v}'$ ذرهٔ مادی نسبت به K' از ترکیب سرعت آن نسبت به K ($\mathbf{v}$) و سرعت $\vec{\Omega}\times\mathbf{r}$ (درنتیجهٔ دوران K نسبت به K') به دست می‌آید:

$$\mathbf{v}' = \mathbf{v} + \vec{\Omega}\times\mathbf{r}$$

(چون شعاعهای حامل $\mathbf{r}$ و $\mathbf{r}'$ درچارچوب K و K' برهم منطبق هستند). باگذاردن آن درتابع لاگرانژ (۴-۳۹) نتیجه می‌شود:

$$L=\frac{1}{2}mv^2+m\mathbf{v}(\vec{\Omega}\times\mathbf{r})+\frac{1}{2}m(\vec{\Omega}\times\mathbf{r})^2-m\mathbf{W}\cdot\mathbf{r}-U \quad (۳۹\text{-}۶)$$

این شکل کلی تابع لاگرانژ ذرهٔ مادی درچارچوب مرجع اختیاری است (که لازم نیست حتماً ماند باشد). توجه کنید که دوران چارچوب، درتابع لاگرانژ جمله‌ای خطی از سرعت ذره به وجود می‌آورد.

برای محاسبهٔ معادلهٔ لاگرانژ دیفرانسیل کامل آن را می‌نویسیم:

$$\begin{aligned}dL&=m\mathbf{v}\cdot d\mathbf{v}+md\mathbf{v}\cdot\vec{\Omega}\times\mathbf{r}+m\mathbf{v}\cdot\vec{\Omega}\times d\mathbf{r}+\\&+m(\vec{\Omega}\times\mathbf{r})\cdot(\vec{\Omega}\times d\mathbf{r})-m\mathbf{W}\cdot d\mathbf{r}-(\partial U/\partial\mathbf{r})\cdot d\mathbf{r}=\\&=m\mathbf{v}\cdot d\mathbf{v}+md\mathbf{v}\cdot\vec{\Omega}\times\mathbf{r}+md\mathbf{r}\cdot\mathbf{v}\times\vec{\Omega}+\\&+m[(\vec{\Omega}\times\mathbf{r})\times\vec{\Omega}]d\mathbf{r}-m\mathbf{W}\cdot d\mathbf{r}-(\partial U/\partial\mathbf{r})\cdot d\mathbf{r}\end{aligned}$$

از جملات شامل $d\mathbf{v}$ و $d\mathbf{r}$ نتیجه می‌شود:

$$\frac{\partial L}{\partial\mathbf{v}}=m\mathbf{v}+m\vec{\Omega}\times\mathbf{r}$$

$$\frac{\partial L}{\partial\mathbf{r}}=m\mathbf{v}\times\vec{\Omega}+m(\vec{\Omega}\times\mathbf{r})\times\vec{\Omega}-m\mathbf{W}-\frac{\partial U}{\partial\mathbf{r}}$$

با قراردادن این معادلات در (۲-۳۹)، معادلهٔ حرکت به دست می‌آید:

$$md\mathbf{v}/dt=-\partial U/\partial\mathbf{r}-m\mathbf{W}+m\mathbf{r}\times\dot{\vec{\Omega}}+2m\mathbf{v}\times\vec{\Omega}+m\vec{\Omega}\times(\mathbf{r}\times\vec{\Omega}) \quad (۳۹\text{-}۷)$$

می‌بینیم که نیروهای ماند حاصل از دوران سیستم شامل سه جمله هستند. نیروی $m\mathbf{r}\times\dot{\vec{\Omega}}$ درنتیجهٔ دوران غیریکنواخت‌ایجاد می‌شود ولی دوجملهٔ دیگر حتی اگر دوران یکنواخت هم‌باشد وجود دارند. نیروی $2m\mathbf{v}\times\vec{\Omega}$ را «نیروی کریولیس» می‌نامند که شباهتی به نیروهایی (غیراتلاف) که تاکنون خوانده‌ایم، ندارد و به سرعت ذرهٔ مادی وابسته است. نیروی $m\vec{\Omega}\times(\mathbf{r}\times\vec{\Omega})$ را «نیروی گریز از مرکز» می‌نامند وآن در صفحهٔ ماربر $\mathbf{r}$ و $\vec{\Omega}$ قرار دارد و عمود برمحور دوران (یعنی $\vec{\Omega}$) است وبه‌طرف خارج محورامتداد دارد[1]. مقدار این نیرو $m\rho\Omega^2$ است (که درآن ρ فاصلهٔ ذرهٔ مادی از محور دوران است).

حال ذرهٔ مادی را درحالتی‌که دوران چارچوب یکنواخت و شتاب انتقال صفراست، بررسی می‌کنیم. درمعادلات (۶-۳۹) و (۷-۳۹) $\vec{\Omega}=\text{cte}$ و $\mathbf{W}=0$ را قرارمی‌دهیم.

۱- یعنی این نیرو باعث دورشدن ذرهٔ مادی ازمحور دوران می‌شود. (م)

تابع لاگرانژ به صورت زیر درمی‌آید :

$$L=\frac{1}{2}mv^2+m\mathbf{v}\cdot\vec{\Omega}\times\mathbf{r}+\frac{1}{2}m(\vec{\Omega}\times\mathbf{r})^2-U \qquad (۳۹-۸)$$

و معادلهٔ حرکت چنین می‌شود :

$$m\mathrm{d}\mathbf{v}/\mathrm{d}t=-\partial U/\partial\mathbf{r}+2m\mathbf{v}\times\vec{\Omega}+m\vec{\Omega}\times(\mathbf{r}\times\vec{\Omega}) \qquad (۳۹-۹)$$

انرژی ذرهٔ مادی در این مورد با قراردادن

$$\mathbf{p}=\partial L/\partial\mathbf{v}=m\mathbf{v}+m\vec{\Omega}\times\mathbf{r} \qquad (۳۹-۱۰)$$

در رابطهٔ

$$E=\mathbf{p}\cdot\mathbf{v}-L$$

به دست می‌آید :

$$E=\frac{1}{2}mv^2-\frac{1}{2}m(\vec{\Omega}\times\mathbf{r})^2+U \qquad (۳۹-۱۱)$$

باید توجه کرد که در انرژی جملهٔ خطی ازسرعت وجود ندارد. دوران چارچوب به انرژی جمله‌ای که تنها به مختصات ذرهٔ مادی وابسته است ، می‌افزاید . جملهٔ مزبور متناسب با مجذور سرعت زاویه‌ای است . جملهٔ اضافی $-\frac{1}{2}m(\vec{\Omega}\times\mathbf{r})^2$ را « انرژی پتانسیل گریز ازمرکز» می‌نامند .

سرعت $\mathbf{v}$ ذره نسبت به چارچوب مرجعی که دوران یکنواخت دارد ، سرعت $\mathbf{v}_0$ آن نسبت به چارچوب ماند K_0، با رابطهٔ زیر مربوط است :

$$\mathbf{v}_0=\mathbf{v}+\vec{\Omega}\times\mathbf{r} \qquad (۳۹-۱۲)$$

مقدارحرکت $\mathbf{p}$ (۱۰-۳۹) ذرهٔ مادی درچارچوب K ، بنابراین همان مقدارحرکت $\mathbf{p}_0=m\mathbf{v}_0$ درچارچوب K_0 است ومقدارحرکت زاویه‌ای $\mathbf{M}_0=\mathbf{r}\times\mathbf{p}_0$ و $\mathbf{M}=\mathbf{r}\times\mathbf{p}$ نیز برابرند . اما انرژی دوذره دردوچارچوب مساوی نیست . بانهادن $\mathbf{v}$ از (۱۲-۳۹) در (۱۱-۳۹) نتیجه می‌شود :

$$E=\frac{1}{2}mv_0^2-m\mathbf{v}_0\vec{\Omega}\times\mathbf{r}+U=\frac{1}{2}mv_0^2+U-m\mathbf{r}\times\mathbf{v}_0\cdot\vec{\Omega}$$

دوجملهٔاول همان انرژی E_0 درچارچوب K_0 است . با به‌کاربردن مقدارحرکت زاویه‌ای داریم :

$$E=E_0-\mathbf{M}\cdot\vec{\Omega} \qquad (۳۹-۱۳)$$

این رابطه قانون تبدیل انرژی را وقتی چارچوب دوران یکنواخت دارد ، به دست می‌دهد و اگرچه آن را برای یك ذرهٔ مادی به دست آورده‌ایم ، واضح است که این استنتاج را می‌توان دربارهٔ همهٔ سیستمهای مادی کلیت داد و درتمام این موارد رابطهٔ (۱۳ـ۳۹) را به‌کار برد .

مسائل

مسئلهٔ ۱ـ انحراف مسیر سقوط آزاد جسم را نسبت به خط قائم ـ که در نتیجهٔ دوران زمین ایجاد می‌شود ـ به دست آورید (فرض می‌شود سرعت زاویه‌ای این دوران کوچك است) .

حل : در میدان ثقل داریم $U=-m\mathbf{g}.\mathbf{r}$ که درآن $\mathbf{g}$ بردار شتاب ثقل است . با صرف نظر کردن ازنیروی گریز ازمرکز درمعادلهٔ (۹ـ۳۹) که حاوی جملهٔ مربع $\vec{\Omega}$ است ، معادلهٔ حرکت به صورت زیر به دست می‌آید :

$$\dot{\mathbf{v}} = ۲\mathbf{v}\times\vec{\Omega}+\mathbf{g} \qquad (۱)$$

این معادله را باتقریبات‌متوالی می‌توان حل کرد . برای‌این کارفرض می‌کنیم:

$$\mathbf{v}=\mathbf{v}_۱+\mathbf{v}_۲$$

که $\mathbf{v}_۱$ جواب معادلهٔ $\dot{\mathbf{v}}_۱=\mathbf{g}$ است؛ یعنی $\mathbf{v}_۱=\mathbf{g}t+\mathbf{v}_۰$ ($\mathbf{v}_۰$ سرعت‌ابتدایی است) . باگذاردن $\mathbf{v}=\mathbf{v}_۱+\mathbf{v}_۲$ در(۱)وفقط نگهداشتن $\mathbf{v}_۱$ در سمت راست ، برای $\mathbf{v}_۲$ معادلهٔ زیر به دست می‌آید :

$$\dot{\mathbf{v}}_۲ = ۲\mathbf{v}_۱\times\vec{\Omega}=۲t\mathbf{g}\times\vec{\Omega}+۲\mathbf{v}_۰\times\vec{\Omega}$$

با انتگرال گرفتن ازآن نتیجه می‌شود :

$$\mathbf{r}=\mathbf{h}+\mathbf{v}_۰t+\frac{۱}{۲}\mathbf{g}t^۲+\frac{۱}{۳}t^۳\mathbf{g}\times\vec{\Omega}+t^۲\mathbf{v}_۰\times\vec{\Omega} \qquad (۲)$$

که درآن $\mathbf{h}$ بردار حامل اولیه است .

هرگاه محور z درجهت قائم و به طرف‌بالا ومحور x روی نصف‌النهار و به طرف قطب باشد ، دراین صورت داریم :

$$g_x=g_y=0 \quad \text{و} \quad g_z=-g$$
$$\Omega_x=\Omega\cos\lambda \quad \text{و} \quad \Omega_y=0 \quad \text{و} \quad \Omega_z=\Omega\sin\lambda$$

که درآن λ عرض جغرافیایی است (برحسب تعریف آنرا عرض شمالی درنظر گرفته‌ایم). باگذاردن $\mathbf{v}_0=0$ در (۲) نتیجه می‌شود:

$$y=-\frac{1}{3}t^3 g\Omega\cos\lambda \quad \text{و} \quad x=0$$

باقراردادن زمان سقوط $t\approx\sqrt{2h/g}$ درآن، چنین به دست می‌آید:

$$x=0 \quad \text{و} \quad y=-\frac{1}{3}(2h/g)^{\frac{3}{2}} g\Omega\cos\lambda$$

علامت منفی نشان دهندهٔ انحراف درجهت شرق است.

مسئلهٔ ۲ـ انحراف از صفحهٔ مسیر ذرهٔ مادی را که از سطح زمین با سرعت $\mathbf{v}_0$ پرتاب می‌شود، به دست آورید.

حل: فرض می‌کنیم صفحهٔ xz شامل بردار سرعت $\mathbf{v}_0$ و ارتفاع اولیه صفرباشد ($h=0$). انحراف‌جانبی به‌وسیلهٔ معادلهٔ (۲) مسئلهٔ ۱ به‌دست می‌آید:

$$y=-\frac{1}{3}t^3 g\Omega_x+t^2(\Omega_x v_{0z}-\Omega_z v_{0x})$$

و یا باگذاشتن زمان پرواز $t\approx\frac{2v_{0z}}{g}$ در آن:

$$y=4v_{0z}^2\left(\frac{1}{3}v_{0z}\Omega_x-v_{0x}\Omega_z\right)/g^2$$

مسألهٔ ۳ـ تأثیر دوران زمین رادرنوسان‌کوتاه‌آونگ به دست‌آورید. (مسئلهٔ پاندول فوکو).

حل: با صرف نظر کردن از تغییر مکان عمودی آونگ که جمله‌ای از بی‌نهایت‌کوچك درجهٔ دوم است، می‌توان تصورکرد که حرکت دو صفحهٔ xy افقی‌انجام می‌شود. باحذف جملات Ω^2، معادلات حرکت به صورت زیر به‌دست می‌آیند:

$$\ddot{x}+\omega^2 x=2\Omega_z\dot{y} \quad \text{و} \quad \ddot{y}+\omega^2 y=-2\Omega_z\dot{x}$$

ω بسامد نوسان آونگ در صورت صرف نظرکردن از دوران زمین است. با

ضرب معادلهٔ دوم در i و اضافه کردن آن به اولی معادلهٔ زیر نتیجه می‌شود:

$$\ddot{\xi}+2i\Omega_z\dot{\xi}+\omega^2\xi=0$$

که درآن $\xi=x+iy$ کمیت موهومی است .

به ازاء $\Omega_z \ll \omega$ از حل این معادله نتیجه می‌شود :

$$\xi=e^{-i\Omega_z t}\,[A_1 e^{i\omega t}+A_2 e^{-i\omega t}]$$

و یا :

$$x+iy=(x_0+iy_0)e^{-i\Omega_z t}$$

که توابع $y_0(t)$ و $x_0(t)$ مسیر آونگ را وقتی دوران زمین‌را نادیده‌انگاریم، به دست می‌دهند. اثراین دوران گردش‌مسیرحول محور قائم باسرعت زاویه‌ای Ω_z است .

فصل هفتم

معادلات کانونیك

۴۰: معادلات هامیلتون

در معادله‌بندیهای مکانیك برحسب تابع لاگرانژ (و معادلات لاگرانژ مستخرج از آن) ، همواره حالت مکانیکی سیستم با مشخص کردن مختصات و سرعتهای عمومی آن تعیین می‌شد . اما این روش تنها راه ممکن نیست . دربررسی مسائل عمومی مکانیك ، بیان حالات مکانیکی برحسب مختصات و مقادیرحرکت سیستم دارای مزایای خاصی است . آنچه دراین فصل مطمح نظر است ، شکل معادلات حرکت در این نوع معادله‌بندی است .

تبدیل یك دسته متغیرمستقل به دستهٔ دیگر را در ریاضیات می‌توان با روشی که «تبدیل لژاندر» نامیده می‌شود ، انجام داد . در این مورد ، تغییر متغیرها به ترتیب زیر عملی می‌شود : دیفرانسیل کامل تابع لاگرانژ راکه تابعی ازمختصات و سرعتها است ، می‌نویسیم:

$$\mathrm{d}L = \sum_i \frac{\partial L}{\partial q_i}\mathrm{d}q_i + \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\mathrm{d}\dot{q}_i$$

این عبارت را می‌توان به صورت زیر بیان کرد :

$$\mathrm{d}L = \Sigma \dot{p}_i \mathrm{d}q_i + \Sigma p_i \mathrm{d}\dot{q}_i \qquad (۴۰-۱)$$

چه مشتقات $\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$ ، بنابه تعریف مقادیرحرکت عمومی هستند و از معادلات‌لاگرانژ نتیجه می‌شود :

$$\partial L/\partial q_i = \dot{p}_i$$

جملهٔ دوم (۱ـ۴۰) را به شکل

$$\Sigma p_i \mathrm{d}\dot{q}_i = \mathrm{d}(\Sigma p_i \dot{q}_i) - \Sigma \dot{q}_i \mathrm{d} p_i$$

می‌نویسیم و دیفرانسیل $\mathrm{d}(\Sigma p_i \dot{q}_i)$ را به طرف چپ برده علامات را عوض می‌کنیم، نتیجه می‌شود:

$$\mathrm{d}(\Sigma p_i \dot{q}_i - L) = -\Sigma \dot{p}_i \mathrm{d}q_i + \Sigma \dot{q}_i \mathrm{d} p_i$$

جملهٔ دیفرانسیل گرفته شدهٔ سمت چپ، انرژی سیستم است (بخش ۶) و بر حسب مختصات و مقادیر حرکت بیان شده است و تابع هامیلتون نام دارد.

$$H(p,q,t) = \sum_i p_i \dot{q}_i - L \qquad (۲ـ۴۰)$$

و دیفرانسیل آن برابراست با:

$$\mathrm{d}H = -\Sigma \dot{p}_i \mathrm{d}q_i + \Sigma \dot{q}_i \mathrm{d} p_i \qquad (۳ـ۴۰)$$

که متغیرهای مستقل در آن مختصات و مقادیر حرکت هستند. معادلات زیر از دیفرانسیل فوق نتیجه می‌شوند:

$$\dot{q}_i = \partial H/\partial p_i \qquad \dot{p}_i = -\partial H/\partial q_i \qquad (۴ـ۴۰)$$

این روابط، معادلات حرکت موردنظر، برحسب‌متغیرهای p و q هستند ومعادلات هامیلتون نام دارند. از این $2s$ معادلهٔ دیفرانسیل رستهٔ اول، $2s$ تابع مجهول $p_i(t)$ و $q_i(t)$ نتیجه می‌شوند که جانشین s معادلهٔ رستهٔ دوم لاگرانژ شده‌اند. به خاطر شکل ساده وتقارن آنها را «معادلات کانونیك[1]» نیز می‌نامند.

مشتق کامل تابع هامیلتون چنین است:

$$\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial H}{\partial t} + \sum \frac{\partial H}{\partial q_i} \dot{q}_i + \sum \frac{\partial H}{\partial p_i} \dot{p}_i$$

با قراردادن $\dot{q}_i$ و $\dot{p}_i$ از معادلات (۴ـ۴۰) دیده می‌شود که دو جملهٔ آخری حذف می‌شوند و در نتیجه:

$$\mathrm{d}H/\mathrm{d}t = \partial H/\partial t \qquad (۵ـ۴۰)$$

خصوصاً هرگاه تابع هامیلتون به طور ضمنی به زمان وابسته نباشد، $\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t} = 0$ است؛ که از آن قانون بقای انرژی نتیجه می‌شود.

۱ـ Canonical Equations به معنی استاندارد یا قراردادی. (م)

درکنار متغیرهای دینامیکی[۱] q و $\dot{q}$ یا q و p. تابع‌لاگرانژ وتابع هامیلتون شامل پارامترهای مختلفی نیز هستندکه بستگی به خصوصیات مکانیکی خود سیستم یا نیروهای خارجی وارد برآن دارد . هرگاه λ یکی ازاین پارامترها باشد ، با فرض متغیر بودن‌آن، به جای معادلهٔ (۱ــ۴۰) داریم :

$$\mathrm{d}L=\Sigma \dot{p}_i \mathrm{d}q_i+\Sigma p_i \mathrm{d}\dot{q}_i+(\partial L/\partial \lambda)\mathrm{d}\lambda$$

و به جای (۳ــ۴۰) خواهیم داشت :

$$\mathrm{d}H=-\Sigma \dot{p}_i \mathrm{d}q_i+\Sigma \dot{q}_i \mathrm{d}p_i-(\partial L/\partial \lambda)\mathrm{d}\lambda$$

و از آنجا :

$$(\partial H/\partial \lambda)_{p,q}=-(\partial L/\partial \lambda)_{\dot{q},q} \qquad (۴۰\text{ــ}۶)$$

که مشتقات جزئی تابع لاگرانژ و هامیلتون را نسبت به پارامتر λ به هم مربوط می‌سازد (اندیسهای مشتقات ، کمیاتی را نشان می‌دهندکه در دیفرانسیل گیری ثابت فرض شده‌اند).

این نتیجه را می‌توان از راه دیگری نیز به دست‌آورد : فرض می‌کنیم تابع لاگرانژ به شکل $L=L_\circ+L'$ باشد که در آن L' تصحیح کوچکی از $L_\circ$ است ؛ مقدار H' که درنتیجهٔ این تصحیح باید به تابع هامیلتون افزوده شود $(H=H_\circ+H')$ ، با رابطهٔ زیر به L' مربوط است :

$$(H')_{p,q}=-(L')_{\dot{q},q} \qquad (۴۰\text{ــ}۷)$$

باید خاطرنشان ساخت‌که در تبدیل (۱ــ۴۰) به (۳ــ۴۰) جمله‌ای شامل $\mathrm{d}t$ دخالت نمی‌کرد تا «بستگی صریح[۲]» احتمالی تابع لاگرانژ را نسبت به زمان به حساب بیاوریم ، از این رو زمان در این جا نقش پارامتری را بازی می‌کندکه در تبدیل وارد نمی‌شود . با استفاده از رابطهٔ (۶ــ۴۰) ، ارتباط مشتقات جزئی L و H نسبت به‌زمان به‌دست می‌آید :

$$(\partial H/\partial t)_{p,q}=-(\partial L/\partial t)_{\dot{q},q} \qquad (۴۰\text{ــ}۸)$$

۱ــ منظور ازمتغیرهای‌دینامیکی q، $\dot{q}$، $\ddot{q}$،...، p، $\dot{p}$، $\ddot{p}$،... و یا ترکیبی از آنهاست . (م)

۲ــ هرگاه متغیری به‌طور صریح درتابعی‌آشکار نشود، گویند تابع به‌آن متغیر «بستگی‌صریح» ندارد. (م)

مسائل

مسئلهٔ ۱ـ تابع هامیلتون را برای ذرهٔ مادی در مختصات کارتزین، استوانه‌ای و کروی به دست آورید.

حل: درمختصات کارتزین x و y و z:

$$H=\frac{1}{2m}(p_x^2+p_y^2+p_z^2)+U(x, y, z)$$

در مختصات استوانه‌ای z و φ و r:

$$H=\frac{1}{2m}\left(p_r^2+\frac{p_\varphi^2}{r^2}+p_z^2\right)+U(r, \varphi, z)$$

درمختصات کروی θ و φ و r:

$$H=\frac{1}{2m}\left(p_r^2+\frac{p_\theta^2}{r^2}+\frac{p_\varphi^2}{r^2\sin^2\theta}\right)+U(r, \varphi, \theta)$$

مسئلهٔ ۲ـ تابع هامیلتون را برای ذرهٔ مادی، درچارچوبی که دوران یکنواخت دارد، به دست آورید.

حل: دررابطهٔ (۱۱ـ۳۹) به‌جای $\mathbf{v}$ معادل آن را برحسب $\mathbf{p}$ (به وسیلهٔ ۱۰ـ۳۹) قرار می‌دهیم:

$$H=p^2/2m-\vec{\Omega}\cdot\mathbf{r}\times\mathbf{p}+U$$

۴۱ : تابع روت

در برخی از موارد بهتر است، درتغییر متغیرها تنها چند ونه همهٔ سرعتهای عمومی را به مقدارحرکت تبدیل کرد. روش تبدیل کاملاً شبیه آنچه دربخش ۴۰ گفته شد، است.

برای سادگی عملیات، در ابتدا فرض می‌کنیم که‌تنها دو مختصات q و ξ وجود دارند ومی‌خواهیم متغیرهای q، ξ، $\dot{q}$، $\dot{\xi}$ را به q، ξ، p، $\dot{\xi}$ تبدیل کنیم. p مقدارحرکت عمومی مربوط به مختصات q است.

دیفرانسیل تابع لاگرانژ $L(q, \xi, \dot{q}, \dot{\xi})$ چنین است:

$$dL=\left(\frac{\partial L}{\partial q}\right)dq+\left(\frac{\partial L}{\partial \dot q}\right)d\dot q+\left(\frac{\partial L}{\partial \xi}\right)d\xi+\left(\frac{\partial L}{\partial \dot\xi}\right)d\dot\xi=$$
$$=\dot p dq+p d\dot q+\frac{\partial L}{\partial \xi}d\xi+\frac{\partial L}{\partial \dot\xi}d\dot\xi$$

از آنجا :

$$d(L-p\dot q)=\dot p dq-\dot q dp+(\partial L/\partial\xi)d\xi+(\partial L/\partial\dot\xi)d\dot\xi$$

تابع روت را به شکل زیر تعریف می‌کنیم :

$$R(q\,,p\,,\xi\,,\dot\xi)=p\dot q-L \tag{۴۱-۱}$$

که در آن سرعت $\dot q$ ، به وسیلهٔ رابطهٔ $p=\partial L/\partial\dot q$ ، برحسب مقدار حرکت p بیان شده است. دیفرانسیل‌تابع روت چنین است :

$$dR=-\dot p dq+\dot q dp-(\partial L/\partial\xi)d\xi-(\partial L/\partial\dot\xi)d\dot\xi \tag{۴۱-۲}$$

که در آن

$$\dot q=\partial R/\partial p \quad , \quad \dot p=-\partial R/\partial q \tag{۴۱-۳}$$

$$\partial L/\partial\xi=-\partial R/\partial\xi \quad , \quad \partial L/\partial\dot\xi=-\partial R/\partial\dot\xi \tag{۴۱-۴}$$

با قرار دادن این معادلات در تابع لاگرانژ ، برای مختصات ξ داریم :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial R}{\partial\dot\xi}\right)=\frac{\partial R}{\partial\xi} \tag{۴۱-۵}$$

از اینرو تابع روت ، تابع هامیلتونی‌نسبت به مختصات q (معادلات (۴۱-۳)) وتابع لاگرانژی نسبت به مختصات ξ (معادلهٔ (۴۱-۵)) است .

انرژی سیستم از روی تعریف کلی آن برابر است با :

$$E=\dot q\partial L/\partial\dot q+\dot\xi\partial L/\partial\dot\xi-L=p\dot q+\dot\xi\partial L/\partial\dot\xi-L$$

با جایگرین کردن (۴۱-۱) و (۴۱-۴) درآن، انرژی برحسب‌تابع روت به دست می‌آید:

$$E=R-\dot\xi\partial R/\partial\dot\xi \tag{۴۱-۶}$$

تعمیم معادلات فوق در مورد چند مختصات q و چند مختصات ξ نیز امکان‌پذیراست.

استفاده از تابع روت ممکن است باعث سادگی عمل ، خصوصاً هنگامی که بعضی از مختصات حلقویند ، بشود . اگر مختصات q حلقوی باشد ، نه درتابع لاگرانژ ونه درتابع

روت ظاهر نمی‌شود و در نتیجه تابع اخیر تنها تابعی از p و ξ و $\dot{\xi}$ خواهد بود . مقادیر حرکت p مربوط به مختصات حلقوی ثابت است (با توجه به معادلهٔ دوم (۳-۴۱)) وقتی به جای مقادیرحرکت p ، مقادیر ثابت داده شدهٔ آنها را جایگزین کنیم ، معادلات (۵-۴۱) $(d/dt)\partial R(p\,,\,\xi\,,\,\dot{\xi})/\partial\dot{\xi}=\partial R(p\,,\,\xi\,,\,\dot{\xi})/\partial\xi$ تنها شامل مختصات ξ خواهند بود و در نتیجه دیده می‌شود که مختصات حلقوی به‌طورکامل حذف شده است . اگر این معادلات را حل کنیم و $\xi(t)$ را به دست آوریم و سپس نتیجه به دست آمده را درطرف راست معادلات $\dot{q}=\partial R(p\,,\,\xi\,,\,\dot{\xi})/\partial p$ قرار دهیم، تابع $q(t)$ به وسیلهٔ انتگرال گیری مستقیماً به دست می‌آید .

مسئله

تابع روت را برای فرفرهٔ متقارن در میدان خارجی $U(\varphi,\theta)$ ، با حذف مختصات حلقوی ψ به دست‌آورید (φ و θ و ψ زوایای اولرند) .

حل : تابع لاگرانژ فرفرهٔ متقارن چنین است (باتوجه به مسئلهٔ (۱) بخش ۳۵) :

$$L=\frac{1}{2}I'_1(\dot{\theta}^2+\dot{\varphi}^2\sin^2\theta)+\frac{1}{2}I_3(\dot{\psi}+\dot{\varphi}\cos\theta)^2-U(\varphi,\theta)$$

و تابع روت برابر است با :

$$R=p_\psi\dot{\psi}-L=\frac{p_\psi^2}{2I_3}-p_\psi\dot{\varphi}\cos\theta-$$

$$-\frac{1}{2}I'_1(\dot{\theta}^2+\dot{\varphi}^2\sin^2\theta)+U(\varphi,\theta)$$

جملهٔ اول مقدار ثابتی است ومی‌توان آن راحذف کرد .

۴۲ : کروشهٔ پواسون

$f(p,q,t)$ راکه تابعی ازمختصات ومقدارحرکت و زمان است ، درنظرمی‌گیریم.

مشتق کامل آن نسبت به زمان برابر است با :

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial f}{\partial t}+\sum_k\left(\frac{\partial f}{\partial q_k}\dot{q}_k+\frac{\partial f}{\partial p_k}\dot{p}_k\right)$$

مقادیر $\dot{q}_k$ و $\dot{p}_k$ را از معادلات هامیلتون (۴ـ۴۰) درآن قرار می‌دهیم؛ نتیجه می‌شود:

$$\mathrm{d}f/\mathrm{d}t=\partial f/\partial t+[H,f] \tag{۴۲-۱}$$

که درآن

$$[H,f]\equiv\sum_k\left(\frac{\partial H}{\partial p_k}\frac{\partial f}{\partial q_k}-\frac{\partial H}{\partial q_k}\frac{\partial f}{\partial p_k}\right) \tag{۴۲-۲}$$

این عبارت کروشهٔ پواسون کمیات f و H نام دارد .

می‌دانیم ، توابعی از متغیرهای دینامیکی که در ضمن حرکت سیستم ثابت باقی می‌مانند ، «انتگرالهای حرکت» هستند. ازرابطهٔ (۱ـ۴۲) دیده می‌شود که‌شرط انتگرال حرکت‌بودن کمیت f ($\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}=0$) به رابطهٔ زیر منتهی می‌شود :

$$\partial f/\partial t+[H,f]=0 \tag{۴۲-۳}$$

اگر انتگرال حرکت به طور صریح به زمان بستگی نداشته باشد ، نتیجه می‌شود :

$$[H,f]=0 \tag{۴۲-۴}$$

یعنی کروشهٔ پواسون متشکل از انتگرال حرکت و تابع هامیلتون صفر است .

برای هردوکمیت f و g کروشهٔ پواسون با مقایسهٔ (۲ـ۴۲) به شکل زیر تعریف می‌شود :

$$[f,g]\equiv\sum_k\left(\frac{\partial f}{\partial p_k}\frac{\partial g}{\partial q_k}-\frac{\partial f}{\partial q_k}\frac{\partial g}{\partial p_k}\right) \tag{۴۲-۵}$$

کروشهٔ پواسون دارای خصوصیات زیراست که به سهولت ازتعریف آن به دست می‌آید: اگر جای دوتابع درکروشهٔ پواسون عوض شود ، علامت کروشه نیز عوض می‌شود :

$$[f,g]=-[g,f] \tag{۴۲-۶}$$

اگر یکی از توابع ثابت c باشد ، کروشه مساوی صفر خواهد شد .

$$[f,c]=0 \tag{۴۲-۷}$$

همچنین :

$$[f_1+f_2,g]=[f_1,g]+[f_2,g] \tag{۴۲-۸}$$

$$[f_1f_2,g]=f_1[f_2,g]+f_2[f_1,g] \tag{۴۲-۹}$$

مشتق جزئی (۵-۴۲) نسبت به زمان برابر است با :

$$\frac{\partial}{\partial t}[f,g]=\left[\frac{\partial f}{\partial t},g\right]+\left[f,\frac{\partial g}{\partial t}\right] \qquad (۴۲\text{-}۱۰)$$

اگر یکی از توابع f و g یکی ازمقادیرحرکت یا مختصات باشد ، کروشهٔ پواسون به یك مشتق جزئی بدل می‌شود :

$$[f,q_k]=\partial f/\partial p_k \qquad (۴۲\text{-}۱۱)$$

$$[f,p_k]=-\partial f/\partial q_k \qquad (۴۲\text{-}۱۲)$$

به طور مثال ، رابطهٔ (۱۱-۴۲) به وسیلهٔ قراردادن $g=q_k$ در (۵-۴۲) به دست می‌آید. دراین‌حالت ، دست راست رابطهٔ (۵-۴۲) به‌یك جمله کاهش می‌یابد ، چه $\frac{\partial q_k}{\partial p_l}=0$ و $\frac{\partial q_k}{\partial q_l}=\delta_{kl}$. خصوصاً باگذاردن $f=q_i$ یا $f=p_i$ در (۱۱-۴۲) و (۱۲-۴۲) خواهیم داشت :

$$[q_i,q_k]=0 \text{ و } [p_i,p_k]=0 \text{ و } [p_i,q_k]=\delta_{ik} \qquad (۴۲\text{-}۱۳)$$

بین کروشه‌های پواسون که شامل سه تابع f و g و h هستند ، رابطهٔ زیربرقراراست:

$$[f,[g,h]]+[g,[h,f]]+[h,[f,g]]=0 \qquad (۴۲\text{-}۱۴)$$

این رابطه را «اتحاد ژاکوبی» می‌نامند . برای اثبات‌آن ابتدا نکتهٔ زیر را تذکرمی‌دهیم: برطبق‌تعریف (۵-۴۲) کروشهٔ پواسون $[f,g]$ ، دوجمله‌ای متجانس «دوخطی»[1] ازمشتقات رستهٔ‌اول f , g است. ازاین‌رو کروشهٔ $[h,[f,g]]$ تابع‌خطی ومتجانس‌ازمشتقات رستهٔ دوم f,g خواهد بود . بنابراین طرف چپ رابطهٔ (۱۴-۴۲) تابع خطی ازمشتقات رستهٔ دوم سه‌تابع h,g,f است. اکنون، جملاتی راکه شامل مشتقات رستهٔ دوم f است ، به‌طورمثال، محاسبه کنیم. کروشهٔ اول چنین جمله‌ای‌ندارد وتنها شامل مشتق‌اول f است. بااستفاده‌ازاپراتورهای دیفرانسیلی $D_1(\varphi)=[g,\varphi]$ و $D_2(\varphi)=[h,\varphi]$ ، مجموع کروشه‌های دوم وسوم را به صورت زیر می‌نویسیم :

$$\begin{aligned}[g,[h,f]]+[h,[f,g]]&=[g,[h,f]]-[h,[g,f]]\\&=D_1[D_2(f)]-D_2[D_1(f)]\\&=(D_1D_2-D_2D_1)f\end{aligned}$$

۱- عبارت دوخطی از متغیرهای x_1 و x_2 و ... عبارتی است که نسبت به هریك از متغیرهای سازندهٔ آن از درجهٔ اول باشد؛ مثلاً $ax_1+bx_2+cx_1x_2$. (م)

به سهولت دیده می‌شود که این ترکیب از اپراتورهای دیفرانسیلی خطی، نمی‌تواند شامل مشتقات رستهٔ دوم f باشد : شکل کلی اپراتور دیفرانسیلی خطی چنین است:

$$D_1=\sum_k \xi_k \frac{\partial}{\partial x_k} \text{ و } D_2=\sum_k \eta_k \frac{\partial}{\partial x_k}$$

که ξ_k و η_k توابعی اختیاری ازمتغیرهای x_1 وx_2 و... هستند. پس:

$$D_1D_2=\sum_{k,l}\xi_k\,\eta_l\,\frac{\partial^2}{\partial x_k\partial x_l}+\sum_{k,l}\xi_k\frac{\partial\eta_l}{\partial x_k}\,\frac{\partial}{\partial x_l}$$

$$D_2D_1=\sum_{k,l}\eta_k\,\xi_l\,\frac{\partial^2}{\partial x_k\partial x_l}+\sum_{k,l}\eta_k\frac{\partial\xi_l}{\partial x_k}\,\frac{\partial}{\partial x_l}$$

و تفاضل آن‌دو،

$$D_1D_2-D_2D_1=\sum_{k,l}\left(\xi_k\frac{\partial\eta_l}{\partial x_k}-\eta_k\frac{\partial\xi_l}{\partial x_k}\right)\frac{\partial}{\partial x_l}$$

نیز اپراتوری‌است که تنها شامل مشتقات رستهٔ اول است . از این‌رو مجموع مشتقهای رستهٔ دوم f در(۱۴ـ۴۲) صفراست. همین‌طور باقیاس درموردg وh، عبارت‌سمت چپ (۱۴ـ۴۲) صفر خواهد بود .

یکی ازخصوصیات مهم کروشهٔ پواسون این است که اگر f و g هردو انتگرالهای حرکت باشند، کروشهٔ پواسون نیز انتگرال حرکت خواهد بود .

$$[f,g]=\mathrm{cte} \qquad (۴۲\text{–}۱۵)$$

و این قضیهٔ پواسون نام دارد. اگر f و g به طور صریح به زمان بستگی نداشته باشند ، اثبات‌آن خیلی ساده است. باقراردادن $h=H$ در اتحاد ژاکوبی حاصل می‌شود :

$$[H,[f,g]]+[f,[g,H]]+[g,[H,f]]=0$$

که اگر $[H,g]=0$ و $[H,f]=0$ باشند، نتیجه می‌شود : $[H,[f,g]]=0$.

اگر f ، g ، انتگرالهای حرکت به‌طور صریح به زمان بستگی داشته باشند، برطبق رابطهٔ (۱ـ۴۲) داریم :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[f,g]=\frac{\partial}{\partial t}[f,g]+[H,[f,g]]$$

با به‌کاربردن معادلات (۱۰ـ۴۲) و نوشتن $[H,[f,g]]$ برحسب دوجملهٔ دیگر ، به‌کمك اتحاد ژاکوبی ، به دست می‌آید :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[f,g]=[\frac{\partial f}{\partial t},g]+[f,\frac{\partial g}{\partial t}]-[f,[g,H]]-[g,[H,f]]=$$

$$=[\frac{\partial f}{\partial t}+[H,f],g]+[f,\frac{\partial g}{\partial t}+[H,g]]=$$

$$=[\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t},g]+[f,\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}t}] \qquad (۴۲-۱۶)$$

که آشکارا قضیهٔ پواسون را اثبات می‌کند.

البته همیشه قضیهٔ پواسون انتگرالهای دیگری از حرکت ایجاد نمی‌کند چه هرگاه درجهٔ آزادی s باشد، تنها $۲s-۱$ انتگرال حرکت داریم. دربرخی ازموارد کروشهٔ پواسون عدد ثابتی است و در برخی موارد دیگر انتگرال به دست آمده، به طور ساده، تابعی از انتگرالهای اصلی f و g است. اگرهیچ یك ازاین دوحالت نبود، کروشهٔ پواسون انتگرال حرکت جدیدی را به دست می‌دهد.

مسائل

مسئلهٔ ۱ـ کروشهٔ پواسون متشکل از مؤلفه‌های مقدار حرکت $\mathbf{p}$ و مقدارحرکت زاویه‌ای $\mathbf{M}=\mathbf{r}\times\mathbf{p}$ یك ذرهٔ مادی را درمختصات کارتزین به دست‌آورید.

حل: از معادلهٔ (۴۲-۱۲) نتیجه می‌شود:

$$[M_x,\ p_y]=-\partial M_x/\partial y=-\partial(yp_z-zp_y)/\partial y=-p_z$$

$$[M_x,\ p_x]=0 \text{ و } [M_x,\ p_z]=p_y$$

کروشه‌های دیگر با تبدیل دوری اندیسهای x و y و z به دست می‌آیند.

مسئلهٔ ۲ـ کروشه‌های پواسون متشکل از مؤلفه‌های $\mathbf{M}$ را بنویسید.

حل: مستقیماً با محاسبهٔ رابطهٔ (۴۲-۵) نتیجه می‌شود:

$$[M_x,\ M_y]=-M_z \text{ و } [M_y,\ M_z]=-M_x \text{ و } [M_z,\ M_x]=-M_y$$

چون مقادیر حرکت ومختصات ذرات مختلف متغیرهای مستقل ازهم هستند، به‌سادگی دیده می‌شود که روابط به‌دست‌آمده‌ازمسائل (۱) و(۲) برای مقادیر

حرکت کل و مقادیرحرکت زاویه‌ای کل هرسیستم ذرات مادی نیز معتبراست.

مسئلهٔ ۳ـ نشان دهید که $[\varphi, M_z]=0$ است . که درآن φ تابعی ازمختصات و مقدار حرکت ذرهٔ مادی است و نسبت به مبدأ مختصات متقارن می‌باشد .

حل : بستگی تابع‌اسکالر φ به مؤلفه‌های بردارهای $\mathbf{r}$ و $\mathbf{p}$ ، می‌تواند تنها به صورت ترکیبی از $\mathbf{r}^2$ و $\mathbf{p}^2$ و $\mathbf{r}\cdot\mathbf{p}$ باشد . از این‌رو :

$$\frac{\partial\varphi}{\partial \mathbf{r}}=\frac{\partial\varphi}{\partial(\mathbf{r}^2)}\cdot 2\mathbf{r}+\frac{\partial\varphi}{\partial(\mathbf{p}\cdot\mathbf{r})}\cdot\mathbf{p} \quad \text{و} \quad \frac{\partial\varphi}{\partial \mathbf{p}}=\frac{\partial\varphi}{\partial(\mathbf{p}^2)}\cdot 2\mathbf{p}+\frac{\partial\varphi}{\partial(\mathbf{p}\cdot\mathbf{r})}\cdot\mathbf{p}$$

رابطهٔ مورد نظر را می‌توان بامحاسبهٔ مستقیم (۵ـ۴۲) و استفاده از مشتقات جزئی فوق‌الذکر تحقیق کرد .

مسئلهٔ ۴ ـ نشان دهید که $[\mathbf{f}, M_z]=\mathbf{n}\times\mathbf{f}$ ، که در آن $\mathbf{f}$ «تابع برداری» ازمختصات و مقدارحرکت ذرهٔ مادی است و $\mathbf{n}$ بردار یکهٔ محور z می‌باشد .

حل : بردار دلخواه $\mathbf{f}(\mathbf{r},\mathbf{p})$ را می‌توان به صورت زیر نمایش داد :

$$\mathbf{f}=\mathbf{r}\varphi_1+\mathbf{p}\varphi_2+(\mathbf{r}\times\mathbf{p})\varphi_3$$

که درآن φ_1 و φ_2 و φ_3 «توابع اسکالر» هستند . رابطهٔ مورد نظر را می‌توان با محاسبهٔ مستقیم واستفاده از (۹ـ۴۲) و (۱۱ـ۴۲) و (۱۲ـ۴۲) ومعادلات مسئلهٔ (۳) تحقیق کرد .

۴۳: عمل در تابعی از مختصات

درمعادله‌بندی اصل کوچکترین عمل ، انتگرال

$$S=\int_{t_1}^{t_2} L dt \qquad (۴۳\text{ـ}۱)$$

را درطول مسیری بین دو موضع $q^{(1)}$ و $q^{(2)}$ که سیستم درلحظات t_1 و t_2 اتخاذ می‌کرد ، مطالعه‌کردیم . درهنگام تغییردادن عمل، ما مقادیر انتگرال را درمسیرهای مختلف مجاور هم (که مقادیر $q(t_1)$ و $q(t_2)$ درهمهٔ آنها یکسان‌بود) بررسی‌کردیم. تنها یکی‌ازاین‌مسیرها مربوط به حرکت واقعی بودکه به‌ازاء آن انتگرال (S) مینیمم می‌شد .

اکنون ، عمل را از دیدگاه دیگری موردبررسی‌قرار می‌دهیم . S را به عنوان کمیتی که حرکت را در مسیر واقعی مشخص می‌کند ، درنظر می‌گیریم ومقادیر S را درمسیرهایی که مبدأ یکسانی در $q(t_1)=q^{(1)}$ دارند ولی در لحظهٔ t_2 از نقاط مختلفی می‌گذرند ، با هم مقایسه می‌کنیم : به عبارت دیگر انتگرال عمل را برای مسیرحقیقی ، تابعی ازمختصات حد بالایی انتگرال درنظر می‌گیریم .

تغییر عمل از مسیری به مسیر مجاورآن به وسیلهٔ عبارت (۵-۲) بیان می‌شود (اگر تنها یك درجهٔ آزادی موجود باشد) .

$$\delta S=\left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\,\delta q\right]_{t_1}^{t_2}+\int_{t_1}^{t_2}\left(\frac{\partial L}{\partial q}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right)\delta q\mathrm{d}t$$

چون مسیرهای واقعی‌حرکت درمعادلات‌لاگرانژ صدق می‌کنند ، انتگرال موجود در رابطهٔ بالا صفر است . در جملهٔ اول $\delta q(t_1)$ را مساوی صفر می‌گذاریم ومقدار $\delta q(t_2)$ را به‌طور ساده با δq نمایش می‌دهیم و بالاخره به جای $\partial L/\partial \dot{q}$ ، p را قرارمی‌دهیم. نتیجه می‌شود: $\delta s=p\delta q$ و یا به طور کلی با هر درجهٔ آزادی :

$$\delta S=\sum_i p_i\delta q_i \qquad (۴۳-۲)$$

از این رابطه‌نتیجه می‌شودکه مشتق جزئی عمل‌نسبت به مختصات‌برابر مقدارحرکت مربوط به آن است :

$$\partial S/\partial q_i=p_i \qquad (۴۳-۳)$$

با بررسی مسیرهایی‌که در لحظهٔ معلوم t_1 از نقطهٔ معلوم $q^{(1)}$ شروع می‌شوند و در زمانهای مختلف $t_2=t$ به نقطهٔ معلوم $q^{(2)}$ می‌رسند ، عمل را ممکن است به صورت تابعی ضمنی اززمان درنظر گرفت. بنابراین مشتق‌جزئی $\partial S/\partial t$ را ممکن است‌به وسیلهٔ تغییرهای مقتضی در انتگرال S به دست‌آورد ، ولی ساده‌ترآن است‌که معادلهٔ (۳-۴۳) را به‌کاربریم.

از تعریف عمل نتیجه می‌شود که دیفرانسیل آن نسبت به زمان چنین است :

$$\mathrm{d}S/\mathrm{d}t=L \qquad (۴۳-۴)$$

حال اگر S را تابعی از مختصات و زمان فرض‌کنیم ، با توجه به (۴-۴۳) و به کاربردن (۳-۴۳) خواهیم داشت :

$$\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial S}{\partial t}+\sum_i\frac{\partial S}{\partial q_i}\dot{q}_i=\frac{\partial S}{\partial t}+\sum_i p_i\dot{q}_i$$

از یك مقایسهٔ ساده نتیجه می‌شود :

$$\frac{\partial S}{\partial t}=L-\sum p_i\dot{q}_i$$

یا :

$$\frac{\partial S}{\partial t}=-H \tag{۴۳-۵}$$

معادلات (۳-۴۳) و (۵-۴۳) را می‌توان با رابطهٔ زیر نشان داد :

$$\mathrm{d}S=\sum_i p_i\,\mathrm{d}q_i-H\,\mathrm{d}t \tag{۴۳-۶}$$

این عبارت ، دیفرانسیل کامل عمل را که به صورت تابعی از مختصات و زمان درحد فوقانی انتگرال (۱-۴۳) است ، به دست می‌دهد. حال فرض می کنیم که مختصات و زمان درابتدای حرکت نیز مانند پایان حرکت متغیر باشد ؛ واضح است که تغییر S ، در این مورد از تفاضل عبارت (۶-۴۳) در ابتدا و انتهای مسیر به دست می‌آید :

$$\mathrm{d}S=\sum p_i^{(2)}\mathrm{d}q_i^{(2)}-H^{(2)}\mathrm{d}t^{(2)}-\sum p_i^{(1)}\mathrm{d}q_i^{(1)}+H^{(1)}\mathrm{d}t^{(1)} \tag{۴۳-۷}$$

این رابطه نشان می‌دهد که نیروی خارجی وارد بر سیستم در ضمن حرکت هر چه باشد ، باز حالت انتهایی آن را نمی‌توان تابع دلخواهی از حالت اولیه فرض کرد : تنها حرکاتی ممکن است که به ازاء آنها سمت راست معادلهٔ (۷-۴۳) دیفرانسیل کامل شود . از این رو اصل کوچکترین عمل خود ، بدون در نظر گرفتن خواص تابع لاگرانژ ، محدودیتهای معینی را برای حرکات ممکن ایجاب می کند . مثلاً می‌توان برای دسته‌ای از ذرات که از نقاطی درفضا به‌طور واگرا منتشر می‌شوند ، خواصی کلی (مستقل ازنوع میدانهای خارجی) به دست آورد . مطالعهٔ این خواص بر روی هم مبحث نور هندسی را تشکیل می‌دهد .

جالب‌است که می‌توان معادلات هامیلتون را با استفاده ازشرط مینیمم‌شدن عملی به‌شکل

$$S=\int\Big(\sum_i p_i\mathrm{d}q_i-H\mathrm{d}t\Big) \tag{۴۳-۸}$$

که از رابطهٔ (۶-۴۳) نتیجه شده است ، به دست آورد (مختصات و مقادیر حرکت در این جا به‌طور مستقل تغییر می کنند) . باز برای سهولت فرض می‌کنیم، تنها یك مختصات ویك مقدارحرکت داشته‌باشیم . دراین صورت تغییرات عمل چنین‌است :

$$\delta S=\int[\delta p\mathrm{d}q+p\mathrm{d}\delta q-(\partial H/\partial q)\delta q\mathrm{d}t-(\partial H/\partial p)\delta p\mathrm{d}t]$$

با انتگرال گرفتن از جملهٔ دوم به طریق جزء به جزء داریم :

$$\delta S = \int \delta p\left(\mathrm{d}q - \frac{\partial H}{\partial p}\mathrm{d}t\right) + [p\delta q] - \int \delta q\left(\mathrm{d}p + \frac{\partial H}{\partial q}\mathrm{d}t\right)$$

حدود قسمت انتگرال گرفته شده $\delta q = 0$ است و بنابراین این جمله صفر خواهد بود. عبارت باقیمانده تنها در صورتی صفر خواهد شد که دو عبارت داخل دو پرانتز به طور مجزا صفر شوند چه تغییرات δp و δq مستقل و دلخواهند:

$$\mathrm{d}q = \frac{\partial H}{\partial p}\mathrm{d}t \text{ و } \mathrm{d}p = -\frac{\partial H}{\partial q}\mathrm{d}t$$

که پس از تقسیم بر $\mathrm{d}t$ معادلات هامیلتون به دست می‌آید.

۴۴: اصل موپرتویی

حرکت سیستم مکانیکی به وسیلهٔ اصل کوچکترین عمل کاملاً تعیین می‌شود: به وسیلهٔ حل معادلات حرکت که از این اصل نتیجه می‌شوند، می‌توان هم شکل مسیر و هم موقعیت سیستم را روی مسیر، نسبت به زمان بدست آورد.

اگر منحصراً منظور تعیین مسیر، بدون در نظر گرفتن موقعیت زمانی سیستم باشد، شکل سادهٔ اصل کوچکترین عمل را به کار می‌بریم. فرض می‌کنیم که توابع لاگرانژ و هامیلتون به طور صریح به زمان وابسته نباشند، در این صورت انرژی سیستم ثابت است: $H(p,q) = E = \mathrm{cte}$. بر طبق اصل کوچکترین عمل، تغییرات عمل به ازاء مختصات و زمانهای اولیه و انتهایی (یعنی t_0 و t) صفر است. اما اگر زمان انتهایی t را متغیر فرض کنیم و مختصات اولیه و انتهایی ثابت بمانند، با مقایسه با (۷-۴۳) داریم:

$$\delta S = -H\delta t \tag{۴۴-۱}$$

اکنون نه همهٔ تغییر مکانهای مجازی سیستم، بلکه تنها آنهایی را که در قانون بقای انرژی صدق می‌کنند، بررسی می‌کنیم. در چنین مسیرهایی می‌توان به جای H در رابطهٔ (۱-۴۴) مقدار ثابت E را گذارد. در نتیجه:

$$\delta S + E\delta t = 0 \tag{۴۴-۲}$$

اگر عمل را به شکل (۸-۴۳) بنویسیم و باز به جای H، E را قرار دهیم، خواهیم داشت:

$$S = \int \sum_i p_i\,\mathrm{d}q_i - E(t - t_0) \tag{۴۴-۳}$$

جملهٔ اول عبارت فوق،

$$S_0 = \int \sum_i p_i\,\mathrm{d}q_i \tag{۴۴-۴}$$

را گاهی «عمل مختصر» می‌نامند .

با گذاردن (۳ـ۴۴) در (۲ـ۴۴) به دست می‌آید :

$$\delta S_{\circ}=\circ \qquad (۴۴\text{ـ}۵)$$

از این رو عمل مختصر نسبت به تمام مسیرهایی که در اصل بقای انرژی صدق می‌کنند و از نقطهٔ انتهایی درلحظات مختلف می‌گذرند ، مینیممی دارد . برای استفاده از این‌نتیجه باید مقادیر حرکت (و از آنجا تمام عبارت زیر انتگرال (۴ـ۴۴) را برحسب مختصات q و دیفرانسیل آن $\mathrm{d}q$ بیان کرد . برای این کار از تعریف مقدار حرکت :

$$p_i=\frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} L\left(q, \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}\right) \qquad (۴۴\text{ـ}۶)$$

و اصل بقای انرژی

$$E\left(q, \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}\right)=E \qquad (۴۴\text{ـ}۷)$$

استفاده می‌کنیم . با نوشتن $\mathrm{d}t$ برحسب مختصات q و دیفرانسیل آن $\mathrm{d}q$ [با استفاده از (۷ـ۴۴)] وقرار دادن‌آن در (۶ـ۴۴)، مقادیرحرکت را برحسب q و $\mathrm{d}q$ وپارامترانرژی E به دست می‌آوریم . اصلی که‌به طریق فوق به دست می‌آید ، مسیر سیستم را تعیین می‌کند و معمولاً به اصل موپرتویی مشهور است (اگر چه معادله‌بندی دقیق و درست آن را اولر و لاگرانژانجام‌داده‌اند) .

محاسبات فوق، با به‌کاربردن شکل‌معمولی تابع لاگرانژ به صورت تفاضل دو انرژی جنبشی و پتانسیل (۵ـ۵) ، به دست می‌آید :

$$L=\frac{۱}{۲}\sum_{i,k} a_{ik}(q)\dot{q}_i \dot{q}_k-U(q)$$

و مقادیر حرکت چنینند :

$$p_i=\partial L/\partial \dot{q}_i=\sum_{k} a_{ik}(q)\dot{q}_k$$

و انرژی برابر است با :

$$E=\frac{۱}{۲}\sum_{i,k} a_{ik}(q)\dot{q}_i \dot{q}_k+U(q)$$

از جملهٔ اخیر نتیجه می‌شود :

$$\mathrm{d}t=\sqrt{\Sigma a_{ik}\mathrm{d}q_i\mathrm{d}q_k/۲(E-U)} \qquad (۴۴\text{ـ}۸)$$

با نهادن آن در

$$\sum_i p_i \mathrm{d}q_i = \sum_{i,k} a_{ik} \frac{\mathrm{d}q_k}{\mathrm{d}t} \mathrm{d}q_i$$

عمل مختصر به دست می‌آید :

$$S_\circ = \int \sqrt{۲(E-U)\sum_{i,k} a_{ik}\, \mathrm{d}q_i\, \mathrm{d}q_k} \qquad (۴۴\text{–}۹)$$

مثلاً در مورد یك ذرهٔ منفرد با انرژی جنبشی $T = \frac{۱}{۲} m(\mathrm{d}l/\mathrm{d}t)^۲$ (m جرم ذره و $\mathrm{d}l$ جزء طول مسیر است) ، اصل فوق‌الذکر که مسیر حرکت را تعیین می کند ، چنین بیان می‌شود :

$$\delta \int \sqrt{۲m(E-U)}\,\mathrm{d}l = \circ \qquad (۴۴\text{–}۱۰)$$

این انتگرال بین دو نقطه در فضا گرفته می‌شود . این معادله منسوب به ژاکوبی است .

درحرکت آزاد ذره ($U=\circ$) . از رابطهٔ (۱۰–۴۴) نتیجه واضح $\delta \int \mathrm{d}l = \circ$ عاید می‌شود؛ یعنی مسیرحرکت آزاد ذرهٔ مادی بین دونقطه درفضا، کوتاهترین مسیر است (یعنی خط مستقیم)[1] .

حال به عبارت (۳–۴۴) باز می گردیم و عمل را این‌بار نسبت به پارامتر E متغیر فرض می کنیم . داریم :

$$\delta S = \frac{\partial S_\circ}{\partial E}\delta E - (t-t_\circ)\delta E - E\delta t$$

با قرار دادن در (۲–۴۴) به دست می‌آید :

$$\partial S_\circ/\partial E = t - t_\circ \qquad (۴۴\text{–}۱۱)$$

وقتی «عمل مختصر» شکل (۹–۴۴) را دارد ، از معادلهٔ فوق نتیجه می‌شود :

$$\int \sqrt{\sum a_{ik}\mathrm{d}q_i\mathrm{d}q_k/۲(E-U)} = t - t_\circ \qquad (۴۴\text{–}۱۲)$$

که درست انتگرال معادلهٔ (۸–۴۴) است. این رابطه همراه با معادلهٔ مسیر، حرکت سیستم را کاملاً معین می کند .

۱ــ در این کتاب همانطور که قبلاً نیز یادآوری شد ، بحثی از نسبیت و فضاهای غیراقلیدسی به میان نخواهدآمد. (م)

مسئله

معادلهٔ دیفرانسیل مسیر را با استفاده از (۱۰ـ۴۴) به دست‌آورید .

حل : بامحاسبهٔ تغییرات ، به دست می‌آید :

$$\delta\int\sqrt{E-U}\,\mathrm{d}l=$$

$$=-\int\left\{\frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}}\cdot\frac{\delta\mathbf{r}}{2\sqrt{E-U}}\mathrm{d}l-\sqrt{E-U}\,\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}l}\cdot\mathrm{d}\delta\mathbf{r}\right\}$$

در جملهٔ دوم با توجه به این حقیقت که $\mathrm{d}l^2=\mathrm{d}\mathbf{r}^2$ است ، نتیجه می‌شود : $\mathrm{d}l\mathrm{d}\delta l=\mathrm{d}\mathbf{r}\cdot\mathrm{d}\delta\mathbf{r}$. ازاین جمله به‌طریق جزء به جزء انتگرال می گیریم وسپس‌ضریب$\delta\mathbf{r}$ را درعبارت زیرانتگرال صفرقرارمی‌دهیم، معادلهٔ دیفرانسیل مسیر به دست می‌آید :

$$2\sqrt{E-U}\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}l}\left[\sqrt{E-U}\,\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}l}\right]=-\partial U/\partial\mathbf{r}$$

باگسترش سمت چپ و دخالت دادن نیروی $\mathbf{F}=-\dfrac{\partial U}{\partial\mathbf{r}}$ نتیجه می‌شود :

$$\mathrm{d}^2\mathbf{r}/\mathrm{d}l^2=[\mathbf{F}-(\mathbf{F}\cdot\mathbf{t})\mathbf{t}]/2(E-U)$$

که درآن $\mathbf{t}=\dfrac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}l}$ بردار یکهٔ مماس برمسیر است . عبارت $\mathbf{F}-(\mathbf{F}\cdot\mathbf{t})\mathbf{t}$ برابر $\mathbf{F}_n$ مؤلفهٔ نیرو درامتداد نرمال واردبرمسیر است. مشتق $\dfrac{\mathrm{d}^2\mathbf{r}}{\mathrm{d}l^2}=\dfrac{\mathrm{d}\mathbf{t}}{\mathrm{d}l}$ را با استفاده ازهندسهٔ تحلیلی می‌توان به‌صورت $\dfrac{\mathbf{n}}{R}$ نوشت . R شعاع انحنای مسیر و $\mathbf{n}$ بردار یکهٔ امتداد نرمال اصلی[1] است . با قراردادن $\dfrac{1}{2}mv^2$ به جای $E-U$ ، داریم :

$$\mathbf{F}_n=(mv^2/R)\mathbf{n}$$

که باعث ایجادشتاب نرمال، درحرکت روی مسیر منحنی می‌شود .

۱ـ بریك منحنی چپ بی‌نهایت نرمال می‌توان وارد کرد . نرمالی که در صفحهٔ اسکولاتور « Osculatory » (صفحه‌ای که در هرلحظه بردارهای سرعت وشتاب را دربر می‌گیرد) قرار دارد، نرمال اصلی نام دارد .

۴۵ : تبدیل کانونیك

در نحوهٔ انتخاب مختصات عمومی q هیچ محدودیتی وجود ندارد و ممکن است هر s کمیت که متفقاً موقعیت سیستم را در فضا مشخص کند ، برگزید . شکل معادلات لاگرانژ (۶-۲) بستگی به این انتخاب ندارد و از این نظر می‌توان گفت که معادلات لاگرانژ در تبدیل مختصات q_1 و q_2 و . . . به کمیات مستقل دیگری مانند Q_1 و Q_2 و . . . «تغییر ناپذیر» است . مختصات جدید Q توابعی از q هستند و فرض می‌کنیم که به طور صریح به زمان بستگی دارند ، یعنی شکل تبدیلات که گاهی «تبدیل نقطه‌ای» نیز نامیده می‌شوند ، به صورت زیر است :

$$Q_i = Q_i(q,t) \qquad (۴۵-۱)$$

چون معادلات لاگرانژ در اثر تبدیل (۱-۴۵) تغییر نمی‌کنند ، معادلات هامیلتون (۴-۴۰) نیز با این تبدیل ثابت‌باقی می‌مانند . هرچند ، معادلات اخیر تبدیلهای وسیعتری را می‌پذیرند. چه برطبق خاصیت تابع هامیلتون مقادیرحرکت p متغیرهای مستقلی هستند و وضعی مشابه مختصات q دارند . از این رو تبدیل ممکن است شامل همهٔ $2s$ متغیر مستقل p و q باشد :

$$Q_i = Q_i(p,q,t) \quad \text{و} \quad P_i = P_i(p,q,t) \qquad (۴۵-۲)$$

این افزایش امکان تبدیل ، یکی از مزایای مهم تابع هامیلتون است .

اما معادلات حرکت ، همواره در اثر تبدیل (۲-۴۵) به صورت کانونیك خود باقی نمی‌مانند. اکنون شرایطی را جستجو می‌کنیم که معادلات حرکت با متغیرهای جدید P و Q ، تحت آن شرایط به صورت زیر باشند :

$$\dot{Q}_i = \partial H'/\partial P_i \quad \text{و} \quad \dot{P}_i = -\partial H'/\partial Q_i \qquad (۴۵-۳)$$

تابع هامیلتون دراین‌جا $H'(P,Q)$ است. تبدیل تحت این‌شرایط، «تبدیل کانونیك»نام دارد.

معادلات تبدیل کانونیك را می‌توان به روش زیر به دست‌آورد . در انتهای بخش ۴۳ دیدیم که معادلات هامیلتون را می‌توان با استفاده از اصل کوچکترین عمل ، به ترتیب زیر به دست آورد :

$$\delta \int (\sum_i p_i \mathrm{d}q_i - H\mathrm{d}t) = 0 \qquad (۴۵-۴)$$

اثر δ درآن شامل همهٔ مختصات و مقادیرحرکت ، به طور مستقل می‌شود . اگرمتغیرهای جدید P و Q در معادلات هامیلتون صدق کنند ، باید اصل کوچکترین عمل

$$\delta \int (\sum_i P_i \mathrm{d}Q_i - H'\mathrm{d}t) = 0 \qquad (۴۵-۵)$$

نیز برقرار باشد. دو شکل (۴–۴۵) و (۵–۴۵) تنها در صورتی با هم معادلند که اختلاف جملات زیر دو انتگرال، دیفرانسیل کامل تابعی مانند F (که تابع مختصات ومقادیرحرکت و زمان است) باشد[1]. در این صورت اختلاف دو انتگرال مقدار ثابتی که برابر تفاضل دو مقدار F در حد بالایی و پایینی انتگرال است، خواهد بود و در نتیجه تغییرات آن صفر است. از آنجا داریم:

$$\sum p_i \mathrm{d}q_i - H\mathrm{d}t = \sum P_i \mathrm{d}Q_i - H'\mathrm{d}t + \mathrm{d}F$$

هر تبدیل کانونیك به وسیلهٔ تابعی مانند F مشخص می‌شود. این تابع «تابع مولد تبدیل» نام دارد.

با نوشتن رابطهٔ فوق‌الذکر به صورت

$$\mathrm{d}F = \sum p_i \mathrm{d}q_i - \sum P_i \mathrm{d}Q_i + (H' - H)\mathrm{d}t \qquad (۴۵-۶)$$

دیده می‌شود که:

$$p_i = \partial F/\partial q_i \text{ و } P_i = -\partial F/\partial Q_i \text{ و } H' = H + \partial F/\partial t \qquad (۴۵-۷)$$

اگر تابع مولد تبدیل به صورت تابعی از مختصات قدیم و جدید و زمان در دست باشد:

$$F = F(q, Q, t)$$

به وسیلهٔ معادلات (۷–۴۵)، رابطهٔ بین p،q و P،Q وهمچنین توابع جدید وقدیم هامیلتون معلوم خواهد شد.

گاهی بهتر است، تابع مولد را برحسب مختصات قدیم q و مقادیرحرکت جدید P و نه برحسب q و Q بیان کرد. در این مورد برای استخراج معادلات کانونیك باید روش تبدیل لژاندر را در (۶–۴۵) به کار برد. این رابطه را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\mathrm{d}(F + \sum P_i Q_i) = \sum p_i \,\mathrm{d}q_i + \sum Q_i \,\mathrm{d}P_i + (H' - H)\mathrm{d}t$$

جملهٔ دیفرانسیل گرفته شدهٔ سمت چپ که برحسب متغیرهای q و P بیان می‌شود، تابع مولد جدید $\Phi(q,P,t)$ می‌باشد. درنتیجه[2]:

۱- در این‌جا تبدیلهای بی‌اهمیت نظیر $P_i = ap_i$ ، $Q_i = q_i$ ، $H' = aH$ را که درآن a ثابت دلخواهی است، بررسی نمی‌کنیم چه دراین تبدیل تفاوت دوعبارت‌زیرانتگرال (۴–۴۵) و (۵–۴۵) تنها درضریب ثابتی خواهد بود.

۲- ازتابع مولدی به شکل $\Phi = \sum f_i(q,t) P_i$ (f_i توابع دلخواهی هستند)، تبدیلی حاصل می‌شودکه در آن مختصات جدید برابر $Q_i = f_i(q,t)$است، یعنی مختصات جدید تنها برحسب مختصات قدیم (و نه مقادیرحرکت) بیان می‌شوند. این تبدیلی نقطه‌ای است که مورد خاصی ازتبدیل کانونیك می‌باشد.

$$p_i = \partial\Phi/\partial q_i \text{ و } Q_i = \partial\Phi/\partial P_i \text{ و } H' = H + \partial\Phi/\partial t \qquad (۴۵-۸)$$

همچنین می‌توان روابطی برای تبدیل کانونیکی که تابع مولد آن به‌متغیرهای p و Q یا P و p وابسته است ، به دست آورد .

رابطهٔ بین دوتابع هامیلتون جدید وقدیم همواره به یك شکل است : تفاضل $H' - H$ مشتق جزئی‌تابع مولدنسبت به زمان است. خصوصاً هر گاه تابع مولد مستقل از زمان باشد، داریم $H' = H$ ؛ یعنی تابع هامیلتون جدید تنها با جایگزین کردن متغیرهای جدید P و Q به جای متغیرهای p و q در H به دست می‌آید .

تبدیلهای متنوع کانونیك در تابع هامیلتون ، مفاهیم اولیهٔ مختصات عمومی و مقادیر حرکت عمومی را گاهی‌کاملاً دگرگون می‌کند . چون تبدیل (۲-۴۵) ، هر یك ازکمیات P و Q را هم برحسب مختصات q و هم مقدار حرکت p بیان می‌کند ، دیگر متغیرهای Q منحصراًمختصات‌فضایی نیستند. تفاوت بین Q و P ضرورتاً نام‌گذاری‌آنها را پیش می‌کشد. این مسئله‌آشکاری‌است ، چه به‌طور مثال درتبدیل $Q_i = p_i$ ، $P_i = -q_i$ (که تابع مولد آن $F = \Sigma q_i Q_i$ است) شکل معادلات‌کانونیك تغییری‌نمی‌کند وتنها باید مختصات را مقادیر حرکت ومقادیرحرکت را مختصات نامید .

به علت اختیاری بودن این نام‌گذاری ، متغیرهای p و q تابع هامیلتون را اغلب به طور ساده «زوجهای کانونیکی» می‌نامند . شرایطی‌که این کمیات را به هم پیوند می‌دهد ، به‌کمك‌کروشهٔ پواسون قابل بیان است . برای این‌کار ابتدا قضیهٔ‌کلی تغییرناپذیری‌کروشهٔ پواسون را در تبدیلهای کانونیکی اثبات می‌کنیم .

هرگاه $[f,g]_{p,q}$ ، کروشهٔ پواسون دوکمیت f و g راکه در آن مشتق‌گیری‌نسبت به p و q انجام گرفته است و نیز کروشهٔ پواسون $[f,g]_{P,Q}$ را که مشتق‌گیری در آن نسبت به متغیرهای P و Q صورت گرفته است ، در نظر بگیریم ، می‌توان گفت :

$$[f,g]_{p,q} = [f,g]_{P,Q} \qquad (۴۵-۹)$$

صحت رابطهٔ بالا را می‌توان با محاسبهٔ مستقیم و به‌کاربردن معادلات تبدیل‌کانونیکی تأیید کرد . همچنین می‌توان به طریق زیر نیز آن را ثابت‌کرد .

در ابتدا خاطر نشان می‌سازیم‌که زمان در تبدیلهای کانونیکی (۷-۴۵) و (۸-۴۵) نقش یك پارامتر را داراست . از این رو کافی است (۹-۴۵) را برای‌کمیاتی که به طور صریح‌به زمان بستگی ندارند ، اثبات کنیم . فرض می‌کنیم g تابع هامیلتون سیستمی‌خیالی باشد . به وسیلهٔ معادلهٔ (۱-۴۲) نتیجه می‌گیریم : $[f,g]_{p,q} = \dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}$. مشتق $\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}$ تنها

بستگی به خصوصیات حرکت سیستم خیالی دارد و به انتخاب متغیرها وابسته‌نیست . ازاین رو کروشهٔ پواسون $[f,g]$ با تبدیل یك دسته متغیر کانونیك به دستهٔ دیگر تغییرنمی‌کند.

از معادلات (۱۳-۴۲) و (۹-۴۵) نتیجه می‌شود :

$$[Q_i,Q_k]_{p,q}=0 \quad و \quad [P_i,P_k]_{p,q}=0 \quad و \quad [P_i,Q_k]_{p,q}=\delta_{ik} \qquad (۴۵-۱۰)$$

این روابط که به‌کمك کروشهٔ پواسون بیان شده است، شرایطی را نشان می‌دهد که متغیرهای جدید ، در تبدیل کانونیك $p,q \rightarrow P,Q$ ، باید دارا باشند.

جالب توجه است که تغییر کمیات q , p در ضمن حرکت ، خود می‌تواند به عنوان یك رشته تبدیلهای کانونیك به حساب آید ؛ یعنی هرگاه q_t ، p_t مقدار متغیرهای کانونیك در زمان t و $q_{t+\tau}$ ، $p_{t+\tau}$ در زمان $t+\tau$ باشد ، کمیات اخیر تابعی از کمیات قبلی است (که در آن فاصلهٔ زمانی τ نقش پارامتری را دارد) :

$$q_{t+\tau}=q(q_t,p_t,\tau), \quad p_{t+\tau}=p(q_t,p_t,\tau)$$

اگراین روابط را به‌عنوان تبدیلی‌ازمتغیرهای p_t, q_t به $p_{t+\tau}, q_{t+\tau}$ درنظربگیریم،این تبدیل کانونیك خواهد بود. این‌امر به‌سادگی ازعبارت $dS=\Sigma(p_{t+\tau}dq_{t+\tau}-p_t dq_t)$، دیفرانسیل عمل $S(q_{t+\tau} ، q_t)$ ، درمسیر واقعی ماربر دو نقطهٔ q_t و $q_{t+\tau}$ درزمانهای t و $t+\tau$ نتیجه می‌شود (با (۷ - ۴۳) مقایسه‌کنید) . مقایسهٔ این معادله با (۶ - ۴۵) نشان می‌دهدکه $S-$ تابع مولد این تبدیل است .

۴۶ : قضیهٔ لیوویل

برای تعبیر هندسی پدیده‌های مکانیکی غالباً از «فضای نمود» استفاده می‌شود . این فضایی است با $2s$ بعد که محورهای مختصات آن مربوط به s مختصات عمومی و s مقدار حرکت سیستم می‌باشد. هرنقطه درفضای نمود مربوط به حالت معینی از سیستم است . وقتی سیستم حرکت می‌کند ، نقطهٔ مزبور منحنیی رسم می‌کندکه «مسیر نمود» نام دارد .

حاصلضرب دیفرانسیلهای

$$d\Gamma=dq_1\cdots dq_s\, dp_1\cdots dp_s$$

را می‌توان به عنوان جزء حجم فضای نمود در نظر گرفت . حال انتگرال $\int d\Gamma$ راکه در ناحیه‌ای از «فضای‌نمود» گرفته شده است ، بررسی می‌کنیم ونشان می‌دهیم‌که مقدار انتگرال در تبدیل کانونیك تغییر نمی‌کند ؛ یعنی در تبدیل کانونیك متغیرهای q ، p به Q ، P حجم ناحیهٔ مزبور در فضای q ، p با حجم آن در فضای Q ، P برابر است :

$$\int\cdots\int dq_1\cdots dq_s dp_1\cdots dp_s=\int\cdots\int dQ_1\cdots dQ_s dP_1\cdots dP_s \quad (۴۶-۱)$$

تغییر متغیرها در یك انتگرال چندتائی به کمك رابطهٔ زیر انجام می گیرد

$$\int\cdots\int dQ_1\cdots dQ_s dP_1\cdots dP_s=\int\cdots\int D\, dq_1\cdots dq_s dp_1\cdots dp_s$$

که در آن

$$D=\frac{\partial(Q_1,\cdots,Q_s,P_1,\cdots,P_s)}{\partial(q_1,\cdots q_s,p_1,\cdots,p_s)} \quad (۴۶-۲)$$

ژاکوبین تبدیل است . بنابراین برای اثبات (۱-۴۶) کافی‌است‌ثابت کنیم که ژاکوبین هر تبدیل کانونیك مساوی واحد است :

$$D=1 \quad (۴۶-۳)$$

ما از خاصیت مشهور ژاکوبین که می‌توان آن را مانند کسری فرض کرد استفاده می‌کنیم وصورت ومخرج را بر $\partial(q_1,\cdots,q_s,P_1,\cdots,P_s)$ تقسیم می کنیم. نتیجه می‌شود:

$$D=\frac{\partial(Q_1,\cdots,Q_s,P_1,\cdots,P_s)}{\partial(q_1,\cdots,q_s,P_1,\cdots,P_s)}\Bigg/\frac{\partial(q_1,\cdots,q_s,p_1,\cdots,p_s)}{\partial(q_1,\cdots,q_s,P_1,\cdots,P_s)}$$

خاصیت دیگر ژاکوبین این‌است که هرگاه کمیات مشابهی هم در دیفرانسیل جزئی صورت ژاکوبین وهم در مخرج آن وجود داشته باشد ، متغیرهای ژاکوبین را می‌توان کاهش داد؛ یعنی متغیرهای تکراری را در دیفرانسیل گیری ثابت فرض کرد .

$$D=\left\{\frac{\partial(Q_1,\cdots,Q_s)}{\partial(q_1,\cdots,q_s)}\right\}_{P=\text{cte}}\Bigg/\left\{\frac{\partial(p_1,\cdots,p_s)}{\partial(P_1,\cdots,P_s)}\right\}_{q=\text{cte}} \quad (۴۶-۴)$$

ژاکوبین صورت بنابه‌تعریف دترمینانی از درجهٔ s است که جملهٔ سطر i وستون k آن مساوی است با $\partial Q_i/\partial q_k$. با نشان دادن تبدیل به وسیلهٔ تابع مولد $\Phi(q,P)$ ، برطبق رابطهٔ (۸-۴۵) داریم :

$$\partial Q_i/\partial q_k=\partial^2\Phi/\partial q_k\partial P_i$$

همین طور جملهٔ ik از دترمینان مخرج (۴-۴۶) برابر است با : $\partial^2\Phi/\partial q_i\partial P_k$. دیده می‌شود که یکی از دترمینان وارونهٔ دیگری است ؛ یعنی جای سطر و ستون این دو با هم عوض شده است . نتیجتاً مقدار آن دو یکی است وکسر (۴-۴۶) برابر واحد است .

حال فرض می کنیم که هر نقطه از یك‌ناحیهٔ فضایی‌نمود، نسبت‌به زمان برطبق معادلات حرکت سیستم تغییر مکان دهد . خود ناحیه نیز تغییر مکان می‌یابد ولی همواره حجمش ثابت است .

$$\int d\Gamma=\text{cte} \quad (۴۶-۵)$$

این‌نتیجه (که به قضیهٔ لیوویل مشهور است) در عین حال هم‌به سبب تغییرناپذیربودن حجم فضای نمود تحت اثر تبدیل کانونیك و هم به سبب این حقیقت‌که تغییرات p,q را در ضمن حرکت می‌توان به عنوان یك تبدیل کانونیك محسوب داشت ، حاصل می‌شود .

با روش کاملاً مشابهی به سادگی می‌توان نشان دادکه انتگرالهای

$$\iint\sum_i \mathrm{d}q_i\mathrm{d}p_i \quad \text{و} \quad \iiiint \sum_{i\neq k} \mathrm{d}q_i\mathrm{d}p_i\mathrm{d}q_k\mathrm{d}p_k,\cdots,$$

که در آنها انتگرال گیری نسبت به تغییرات دو ، چهار و چند بعدی فضای نمود انجام می‌گیرد ، نیز تغییر ناپذیرند .

۴۷ : معادلات هامیلتون ـ ژاکوبی

در بخش ۴۳ عمل به صورت تابعی از مختصات و زمان مورد بررسی قرار گرفت و نشان داده شدکه مشتقات جزئی عمل $S(q,t)$ نسبت به زمان ، با تابع هامیلتون در رابطهٔ زیر صدق می‌کنند :

$$\partial S/\partial t+H(q,p,t)=0$$

و مشتقات جزئی آن نسبت به مختصات برابر مقادیر حرکت است .

هرگاه در تابع هامیلتون به جای مقدارحرکت p مساوی‌آن $\partial S/\partial q$ را قرار دهیم ، رابطهٔ زیر به دست می‌آید :

$$\frac{\partial S}{\partial t}+H(q_1,\cdots,q_s;\frac{\partial S}{\partial q_1},\cdots,\frac{\partial S}{\partial q_s};t)=0 \qquad (۴۷-۱)$$

و تابع $S(q,t)$ می‌بایست در آن صدق‌کند . این معادلهٔ دیفرانسیل با مشتقات جزئی رستهٔ اول به نام معادلهٔ هامیلتون ـ ژاکوبی مشهور است .

مانند معادلات لاگرانژ و معادلات کانونیك ، معادلهٔ هامیلتون ـ ژاکوبی نیز اساس یك رشته پژوهشهایی است‌که برای استخراج معادلات حرکت به‌کار می‌رود .

پیش از بیان این روش ، به این نکته اشاره می‌کنیم که هر معادلهٔ دیفرانسیل رستهٔ اول جوابی دارد که به تابعی دلخواه وابسته است : چنین جوابی «انتگرال عمومی» معادله نام دارد . جواب این معادلهٔ دیفرانسیل را می‌توان به صورت تابعی‌که به مقدار متغیرهای مستقل موجود ، ثابت اختیاری دارد نیز بیان کرد . این جواب « انتگرال کامل » معادلهٔ دیفرانسیل‌نامیده می‌شود. درکاربردهای مکانیکی‌انتگرال‌عمومی معادلهٔ هامیلتون ـ ژاکوبی نسبت به انتگرال کامل آن دارای اهمیت‌کمتری است :

متغیرهای مستقل درمعادلهٔ هامیلتون ـ ژاکوبی مختصات و زمان هستند. برای سیستمی با s درجهٔ آزادی، انتگرال کامل معادلهٔ شامل $s+1$ ثابت اختیاری است. چون در این معادله تابع S تنها به صورت مشتقات جزئیش وارد می‌شود، یکی از این ثابتها در انتگرال کامل به صورت ثابتی افزایشی ظاهر می‌شود. بنابراین صورت کلی انتگرال کامل معادلهٔ هامیلتون ژاکوبی چنین است:

$$S=f(t,q_1,\dots,q_s;\ \alpha_1,\dots,\alpha_s)+A \qquad (۴۷-۲)$$

که در آن $\alpha_1,\dots,\alpha_s$ و A[1] ثابتهای اختیاری هستند.

حال رابطهٔ بین انتگرال کامل معادلهٔ هامیلتون ـ ژاکوبی و جواب معادلات حرکت را به دست می‌آوریم. برای این کار تبدیل کانونیکی بر روی متغیرهای q , p انجام می‌دهیم. در این تبدیل $f(t,q;\alpha)$ را تابع مولد جدید فرض کرده و کمیات $\alpha_1,\alpha_2\dots,\alpha_s$ و $\beta_1,\beta_2,\dots,\beta_s$ را به ترتیب مقادیر حرکت و مختصات جدید فرض می‌کنیم. چون تابع مولد تابعی از مختصات قدیم و مقادیر حرکت جدید و زمان است، رابطهٔ (۸-۴۵) را به کار می‌بریم:

$$p_i=\partial f/\partial q_i,\ \ \beta_i=\partial f/\partial\alpha_i,\ \ H'=H+\partial f/\partial t$$

چون f در معادلهٔ هامیلتون ـ ژاکوبی صدق می‌کند، تابع هامیلتون جدید صفر است:

$$H'=H+\partial f/\partial t=H+\partial S/\partial t=0$$

---

۱ ـ اگرچه انتگرال عمومی معادلهٔ هامیلتون ـ ژاکوبی در اینجا مورد استفاده قرار نمی‌گیرد، معهذا نشان می‌دهیم که می‌توان آن را از انتگرال کامل معادله به دست آورد. برای این کار A را تابعی دلخواه از ثابتهای دیگر فرض می‌کنیم:

$$S=A(\alpha_1,\dots,\alpha_s)+f(t,q_1,\dots,q_s;\ \alpha_1,\dots,\alpha_s)$$

به جای α_i توابعی ازمختصات و زمان که به وسیلهٔ رابطهٔ $\partial S/\partial\alpha_i=0$ حاصل می‌شوند، قرار می‌دهیم؛ انتگرال عمومی برحسب تابع دلخواه $A(\alpha_1,\dots,\alpha_s)$ به دست می‌آید. تابع S که از این راه به دست آمده است، در رابطهٔ زیر صدق می‌کند:

$$\partial S/\partial q_i=\left(\frac{\partial S}{\partial q_i}\right)_\alpha+\sum_k\left(\frac{\partial S}{\partial\alpha_k}\right)_q\frac{\partial\alpha_k}{\partial q_i}=\left(\frac{\partial S}{\partial q_i}\right)_\alpha$$

کمیات $\left(\frac{\partial S}{\partial q_i}\right)_\alpha$ در معادلهٔ هامیلتون ژاکوبی صدق می‌کنند، چه تابع $S(t,q;\alpha)$ انتگرال عمومی معادله فرض شده است. همچنین کمیات $\frac{\partial S}{\partial q_i}$ نیز درهمان معادله صدق می‌کنند.

از این رو معادلات کانونیك برحسب متغیرهای جدید به شکل زیر است :

$$\dot{\alpha}_i=0,\ \dot{\beta}_i=0$$

ازآنجا :

$$\alpha_i=\mathrm{cte},\qquad \beta_i=\mathrm{cte} \tag{۴۷-۳}$$

به‌وسیلهٔ s معادلهٔ $\partial f/\partial\alpha_i=\beta_i$ ، s مختصات q برحسب‌زمان و $2s$ ثابت αوβ بیان می‌شوند. از این جا انتگرال کلی معادلات حرکت به دست می‌آید .

دراین صورت راه به دست‌آوردن معادلات حرکت سیستم مکانیکی به روش هامیلتون ـ ژاکوبی به ترتیب زیر خواهد بود : از تابع هامیلتون ، معادلهٔ هامیلتون ـ ژاکوبی را به دست می‌آوریم و انتگرال کامل آن را پیدا می‌کنیم (۲ـ۴۷) . از آن نسبت به ثابتهای اختیاری α مشتق می‌گیریم و مساوی ثابتهای جدید β قرار می‌دهیم ؛ s معادلهٔ جبری به دست می‌آید :

$$\partial S/\partial\alpha_i=\beta_i \tag{۴۷-۴}$$

که از حل آنها مختصات q برحسب تابعی از زمان و $2s$ ثابت اختیاری به دست می‌آید . مقادیر حرکت توابعی از زمان هستند و می‌توان آنها را از رابطهٔ زیر به دست آورد :

$$p_i=\partial S/\partial q_i$$

اگر حل ناقصی از معادلهٔ هامیلتون ـ ژاکوبی که شامل کمتر از s ثابت اختیاری است ، در دسترس باشد، نمی‌توان معادلات کلی حرکت را از آن نتیجه گرفت ولی می‌توان از این حل برای ساده‌تر کردن استخراج معادلات کلی حرکت استفاده کرد . مثلاً اگر تابع S که شامل یك ثابت اختیاری α است ، معلوم باشد ، رابطهٔ $\partial S/\partial\alpha=\mathrm{cte}$ معادله‌ای بین $q_1,\dots,q_s$ و t ایجاد می‌کند .

اگر در معادلهٔ هامیلتون ـ ژاکوبی H به طور صریح به زمان بستگی نداشته باشد (یعنی اگرسیستم محفوظ باشد) ، این معادله شکل ساده‌تری خواهد داشت . ارتباط زمانی عمل به زمان منحصر به جملهٔ $-Et$ است :

$$S=S_0(q)-Et \tag{۴۷-۵}$$

(بخش ۴۴ دیده شود) . با قرار دادن آن در رابطهٔ (۱ـ۴۷) معادلهٔ هامیلتون ـ ژاکوبی برای عمل مختصر $S_0(q)$ به شکل زیرخواهد بود :

$$H\left(q_1,\dots,q_s;\frac{\partial S_0}{\partial q_1},\dots,\frac{\partial S_0}{\partial q_s}\right)=E \tag{۴۷-۶}$$

۴۸ : تجزیهٔ متغیرها

در بسیاری از موارد مهم ، انتگرال کامل معادلهٔ هامیلتون ـ ژاکوبی را می‌توان به کمك «تجزیهٔ متغیرها» به دست آورد . این روش به ترتیب زیر است :

فرض می‌کنیم یکی از مختصات مانند q_1 و مشتق جزئی مربوط به آن $\partial S/\partial q_1$ در معادلهٔ هامیلتون ـ ژاکوبی تنها در ترکیبی باشکل $\varphi(q_1, \partial S/\partial q_1)$ (که به‌مختصات‌دیگر وزمان و مشتقات جزئی دیگر وابسته نیست) ظاهر شود ؛ یعنی معادله به‌صورت

$$\Phi\left\{q_i, t, \frac{\partial S}{\partial q_i}, \frac{\partial S}{\partial t}, \varphi\left(q_1, \frac{\partial S}{\partial q_1}\right)\right\}=0 \qquad (۴۸-۱)$$

باشد که در آن q_i همهٔ مختصات جز q_1 را مشخص می‌سازد .

ما جوابی را به صورت مجموع زیر جستجو می‌کنیم :

$$S=S'(q_i, t)+S_1(q_1) \qquad (۴۸-۲)$$

با قرار دادن آن در معادلهٔ (۱ـ۴۸) داریم :

$$\Phi\left\{q_i, t, \frac{\partial S'}{\partial q_i}, \frac{\partial S'}{\partial t}, \varphi\left(q_1, \frac{dS_1}{dq_1}\right)\right\}=0 \qquad (۴۸-۳)$$

فرض می‌کنیم جواب (۲ـ۴۸) به دست آمده باشد ، آن را درمعادلهٔ (۳ـ۴۸) قرارمی‌دهیم. معادلهٔ اخیر باید اتحادی باشدکه به‌ازاء هرمقدار q_1 معتبراست. تغییر q_1 تنها باعث‌تغییر φ می‌شود و بنابراین اگر معادلهٔ (۳ـ۴۸) بخواهد اتحادی باشد φ به ناچار مقدار ثابتی خواهد بود . در نتیجه از معادلهٔ (۳ـ۴۸) ، دو معادلهٔ زیر به دست می‌آید :

$$\varphi(q_1, dS_1/dq_1)=\alpha_1 \qquad (۴۸-۴)$$

$$\Phi\{q_i, t, \partial S'/\partial q_i, \partial S'/\partial t, \alpha_1\}=0 \qquad (۴۸-۵)$$

که در آن α_1 ثابتی اختیاری است . معادلهٔ اول ، معادلهٔ دیفرانسیل معمولی است و تابع $S_1(q_1)$ با انتگرال گیری ساده به دست می‌آید . معادلهٔ مشتقات جزئی (۵ـ۴۸) نیز شامل متغیرهای مستقل کمتری است .

اگر بتوانیم همهٔ مختصات و زمان را متوالیاً تجزیه کنیم ، به دست آوردن انتگرال کامل معادلهٔ هامیلتون ـ ژاکوبی منجر به انتگرالهای ساده خواهد شد . در مورد سیستم محفوظ ، کافی است تنها s متغیر (مختصات) معادلهٔ (۶ـ۴۷) را تجزیه‌کنیم و وقتی این تجزیه تمام شد ، جواب معادله به صورت زیر خواهد بود :

$$S=\sum_k S_k(q_k; \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s)-E(\alpha_1, \cdots, \alpha_s)t \qquad (۴۸-۶)$$

که درآن هرتابع S_k تنها به یك متغیر بستگی دارد؛ انرژی E که تابعی ازثابتهای اختیاری $\alpha_1,\ldots,\alpha_s$ است ، باگذاردن $S_0=\Sigma S_k$ در معادلهٔ (۶ـ۴۷) به دست می‌آید .

یك حالت خاص از تجزیهٔ متغیرها ، تجزیهٔ متغیرحلقوی است. مختصات حلقوی q_1 به طور صریح نه در تابع هامیلتون و نه درمعادلهٔ هامیلتون ـ ژاکوبی ظاهر نمی‌شود . از این رو تابع $\varphi(q_1,\partial S/\partial q_1)$ به جملهٔ $\partial S/\partial q_1$ خلاصه می‌شود و از معادلهٔ (۴ـ۴۸) به سادگی نتیجه می‌شود : $S_1=\alpha_1 q_1$ و بنابراین :

$$S=S'(q_i,t)+\alpha_1 q_1 \tag{۴۸ـ۷}$$

ثابت α_1 همان مقدار حرکت ثابت $p_1=\partial S/\partial q_1$ مربوط به مختصات حلقوی است .

وجود زمان در جملهٔ $-Et$ ، در مورد سیستم محفوظ ، مربوط به تجزیهٔ مختصات حلقوی t است .

از این قرار همهٔ روشهای مورد بررسی فصول گذشته در به‌کاربردن مختصات حلقوی برای سهولت استخراج معادلات حرکت ، جزئی از روش کلی تجزیهٔ متغیرها در معادلهٔ هامیلتون ـ ژاکوبی است . علاوه‌بر متغیرهای حلقوی در این جا امکان تجزیهٔ متغیرهای غیرحلقوی‌نیز وجود دارد. در نتیجه روش هامیلتون ژاکوبی مؤثرترین روش‌تعیین انتگرال عمومی معادلات حرکت است .

برای‌تجزیهٔ متغیرها درمعادلهٔ هامیلتون ـ ژاکوبی می‌بایست مختصات مناسبی اختیار کرد . دراین جا چند مثال ازتجزیهٔ متغیرها را درسیستمهای مختلف مختصات که درمسائل مربوط به حرکت ذرهٔ مادی تحت اثرمیدانهای خارجی گوناگون دارای اهمیت عینی است، ذکر می‌کنیم .

۱ـ **مختصات کروی** : دراین‌سیستم مختصات(r,θ,φ)، تابع هامیلتون چنین‌است:

$$H=\frac{1}{2m}\left(p_r^2+\frac{p_\theta^2}{r^2}+\frac{p_\varphi^2}{r^2\sin^2\theta}\right)+U(r,\theta,\varphi)$$

و اگر U در رابطهٔ زیر صدق کند متغیرها را می‌توان تجزیه‌کرد :

$$U=a(r)+\frac{b(\theta)}{r^2}+\frac{c(\varphi)}{r^2\sin^2\theta}$$

که در آن $a(r)$ ، $b(\theta)$، $c(\varphi)$ توابع اختیاریند . جملهٔ آخری بعید است که واقعیت عینی داشته باشد . بنابراین فرض می‌کنیم :

$$U=a(r)+b(\theta)/r^2 \tag{۴۸ـ۸}$$

در این مورد معادلهٔ هامیلتون ـ ژاکوبی برای تابع S_0 چنین است :

$$\frac{1}{2m}\left(\frac{\partial S_0}{\partial r}\right)^2 + a(r) + \frac{1}{2mr^2}\left[\left(\frac{\partial S_0}{\partial \theta}\right)^2 + 2mb(\theta)\right] +$$

$$+\frac{1}{2mr^2 \sin^2\theta}\left(\frac{\partial S_0}{\partial \varphi}\right)^2 = E$$

چون مختصات φ حلقوی است ، جواب S_0 را به صورت $S_0 = p_\varphi \varphi + S_1(r) + S_2(\theta)$
در نظر می‌گیریم و برای توابع $S_1(r)$ و $S_2(\theta)$ روابط زیر را به دست می‌آوریم :

$$\left(\frac{dS_2}{d\theta}\right)^2 + 2mb(\theta) + \frac{p_\varphi^2}{\sin^2\theta} = \beta$$

$$\frac{1}{2m}\left(\frac{dS_1}{dr}\right)^2 + a(r) + \frac{\beta}{2mr^2} = E$$

با انتگرال گرفتن از آنها نتیجه می‌شود :

$$S = -Et + p_\varphi \varphi + \int \sqrt{\beta - 2mb(\theta) - p_\varphi^2/\sin^2\theta}\, d\theta +$$

$$+\int \sqrt{2m[E - a(r)] - \beta/r^2}\, dr \qquad (۴۸-۹)$$

ثابتهای اختیاری در (۹ـ۴۸) p_φ و β و E هستند که با مشتق گرفتن نسبت به آنها ومساوی قراردادن نتیجهٔ حاصل‌شده با ثابتهای دیگر، جواب عمومی معادلات حرکت به‌دست می‌آید .

۲ـ **مختصات سهموی** : تبدیل‌مختصات استوانه‌ای (که با ρ و φ و z نمایش داده می‌شوند) به مختصات سهموی ξ, η, φ به وسیلهٔ معادلات زیر انجام‌می‌پذیرد :

$$z = \frac{1}{2}(\xi - \eta), \qquad \rho = \sqrt{\xi\eta} \qquad (۴۸-۱۰)$$

مختصات ξ و η از 0 تا ∞ تغییر می‌کنند ؛ به‌سادگی دیده می‌شود که سطوح $\xi = \text{cte}$ و $\eta = \text{cte}$ دو دسته سهموی دوار ، با محور تقارن z تشکیل می‌دهند . معادلات (۱۰ـ۴۸) را می‌توان برحسب

$$r = \sqrt{z^2 + \rho^2} = \frac{1}{2}(\xi + \eta) \qquad (۴۸-۱۱)$$

نوشت (r شعاع حامل در مختصات کروی است) ؛ یعنی :

$$\xi = r + z, \qquad \eta = r - z \qquad (۴۸-۱۲)$$

حال تابع لاگرانژ ذرهٔ مادی را درمختصات η, ξ, φ به‌دست می‌آوریم . بامشتق گرفتن از (۱۰–۴۸) نسبت به زمان و قراردادن مشتقات حاصل‌درتابع لاگرانژمختصات استوانه‌ای

$$L = \frac{1}{2} m(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2) - U(\rho, \varphi, z)$$

نتیجه می‌شود :

$$L = \frac{1}{8} m(\xi + \eta)\left(\frac{\dot{\xi}^2}{\xi} + \frac{\dot{\eta}^2}{\eta}\right) + \frac{1}{2} m\xi\eta\dot{\varphi}^2 - U(\xi, \eta, \varphi) \quad (۴۸–۱۳)$$

مقادیر حرکت برابرند با :

$$p_\xi = \frac{1}{4} m(\xi + \eta)\dot{\xi}/\xi, \quad p_\eta = \frac{1}{4} m(\xi + \eta)\dot{\eta}/\eta, \quad p_\varphi = m\xi\eta\dot{\varphi}$$

و تابع هامیلتون مساوی است با :

$$H = \frac{2}{m} \cdot \frac{\xi p_\xi^2 + \eta p_\eta^2}{\xi + \eta} + \frac{p_\varphi^2}{2m\xi\eta} + U(\xi, \eta, \varphi) \quad (۴۸–۱۴)$$

موردی که تجزیهٔ متغیرها در این‌نوع مختصات واقعیت عینی دارد ، مربوط به انرژی پتانسیلی به شکل زیر است :

$$U = \frac{a(\xi) + b(\eta)}{\xi + \eta} = \frac{a(r+z) + b(r-z)}{2r} \quad (۴۸–۱۵)$$

معادله‌بندی برای S_0 چنین است :

$$\frac{2}{m(\xi + \eta)}\left[\xi\left(\frac{\partial S_0}{\partial \xi}\right)^2 + \eta\left(\frac{\partial S_0}{\partial \eta}\right)^2\right] + \frac{1}{2m\xi\eta}\left(\frac{\partial S_0}{\partial \varphi}\right)^2 + \\ + \frac{a(\xi) + b(\eta)}{\xi + \eta} = E$$

مختصات حلقوی φ را به صورت جملهٔ $p_\varphi \varphi$ تجزیه می‌کنیم . با ضرب معادلهٔ فوق در $m(\xi+\eta)$ و مرتب‌کردن آن داریم :

$$2\xi\left(\frac{\partial S_0}{\partial \xi}\right)^2 + ma(\xi) - mE\xi + \frac{p_\varphi^2}{2\xi} + 2\eta\left(\frac{\partial S_0}{\partial \eta}\right)^2 + \\ + mb\eta - mE\eta + \frac{p_\varphi^2}{2\eta} = 0$$

با قرار دادن $S_0 = p_\varphi \varphi + S_1(\xi) + S_2(\eta)$ درآن دو معادلهٔ زیر به دست می‌آید :

$$2\xi\left(\frac{dS_1}{d\xi}\right)^2+ma(\xi)-mE\xi+\frac{p_\varphi^2}{2\xi}=\beta$$

$$2\eta\left(\frac{dS_2}{d\eta}\right)^2+mb(\eta)-mE\eta+\frac{p_\varphi^2}{2\eta}=-\beta$$

انتگرال گیری از آنها نتیجه می‌دهد :

$$S=-Et+p_\varphi\varphi+\int\sqrt{\frac{1}{2}mE+\frac{\beta}{2\xi}-\frac{ma(\xi)}{2\xi}-\frac{p_\varphi^2}{4\xi^2}}\,d\xi+$$

$$+\int\sqrt{\frac{1}{2}mE-\frac{\beta}{2\eta}-\frac{mb(\eta)}{2\eta}-\frac{p_\varphi^2}{4\eta^2}}\,d\eta \qquad (۴۸-۱۶)$$

ثابتهای اختیاری در این جا E، β، p_φ هستند .

۳- **مختصات بیضوی** : متغیرها در این سیستم مختصات φ ، η ، ξ هستند که با روابط زیر تعریف می‌شوند :

$$\rho=\sigma\sqrt{(\xi^2-1)(1-\eta^2)}, \qquad z=\sigma\xi\eta \qquad (۴۸-۱۷)$$

ثابت σ پارامتر تبدیل است . مختصات ξ از ۱ تا ∞ و η از ۱- تا ۱+ تغییر می‌کند. برای به‌دست‌آوردن روابط هندسی‌قابل تجسم[1] ، دوفاصلهٔ r_1 و r_2 را که مربوط به دو نقطهٔ A_1 و A_2 واقع بر محور z (در ازاء $z=\pm\sigma$) هستند ، تعریف می کنیم :

$$r_1=\sqrt{(z-\sigma)^2+\rho^2}, \quad r_2=\sqrt{(z+\sigma)^2+\rho^2}$$

با نهادن آنها در (۱۷-۴۸) داریم :

$$r_1=\sigma(\xi-\eta), \qquad r_2=\sigma(\xi+\eta)$$

$$(۴۸-۱۸)$$

$$\xi=(r_1+r_2)/2\sigma, \quad \eta=(r_2-r_1)/2\sigma$$

با تبدیل تابع لاگرانژ مختصات استوانه‌ای به تابع لاگرانژ مختصات‌بیضوی داریم:

$$L=\frac{1}{2}m\sigma^2(\xi^2-\eta^2)\left(\frac{\dot\xi^2}{\xi^2-1}+\frac{\dot\eta^2}{1-\eta^2}\right)+$$

$$+\frac{1}{2}m\sigma^2(\xi^2-1)(1-\eta^2)\dot\varphi^2-U(\xi,\eta,\varphi) \qquad (۴۸-۱۹)$$

---

۱ ـ از سطوح $\xi=$cte بیضویهای $z^2/\sigma^2\xi^2+\rho^2/\sigma^2(\xi^2-1)=1$ نتیجه می‌شوند که A_1 و A_2 دوکانون آنها است . سطوح $\eta=$cte هذلولی وارهای زیر را با کانونهای A_1 و A_2 ایجاد می‌کنند : $z^2/\sigma^2\eta^2-\rho^2/\sigma^2(1-\eta^2)=1$.

و تابع هامیلتون خواهد بود :

$$H=\frac{1}{2m\sigma^2(\xi^2-\eta^2)}\Big[(\xi^2-1)p_\xi^{\,2}+(1-\eta^2)p_\eta^{\,2}+ \\ +\Big(\frac{1}{\xi^2-1}+\frac{1}{1-\eta^2}\Big)p_\varphi^{\,2}\Big]+U(\xi,\eta,\varphi) \qquad (۴۸-۲۰)$$

در صورتی تجزیهٔ متغیرها امکان پذیر است و واقعیت عینی دارد که انرژی پتانسیل چنین باشد :

$$U=\frac{a(\xi)+b(\eta)}{\xi^2-\eta^2}=\frac{\sigma^2}{r_1r_2}\Big\{a\Big(\frac{r_2+r_1}{2\sigma}\Big)+b\Big(\frac{r_2-r_1}{2\sigma}\Big)\Big\} \qquad (۴۸-۲۱)$$

که درآن $a(\xi)$، $b(\eta)$ توابع اختیاری هستند . نتیجهٔ تجزیهٔ متغیرها در معادلهٔ هامیلتون ـ ژاکوبی چنین است :

$$S=-Et+p_\varphi\varphi+\int\sqrt{2m\sigma^2E+\frac{\beta-2m\sigma^2a(\xi)}{\xi^2-1}-\frac{p_\varphi^{\,2}}{(\xi^2-1)^2}}\,d\xi+ \\ +\int\sqrt{2m\sigma^2E-\frac{\beta+2m\sigma^2b(\eta)}{1-\eta^2}-\frac{p_\varphi^{\,2}}{(1-\eta^2)^2}}\,d\eta \qquad (۴۸-۲۲)$$

مسائل

مسئلهٔ ۱ــ انتگرال کامل معادلهٔ هامیلتون ـ ژاکوبی را برای حرکت ذرهٔ مادی درمیدان $U=\alpha/r-Fz$ به دست‌آورید (ترکیب میدان یکنواخت و میدان کولمب) .

حل : میدان از نوع (۱۵ــ۴۸) است و داریم :

$$a(\xi)=\alpha-\frac{1}{2}F\xi^2,\quad b(\eta)=\alpha+\frac{1}{2}F\eta^2$$

از معادلهٔ (۱۶ــ۴۸) نتیجه می‌شود :

$$S=-Et+p_\varphi\varphi+\int\sqrt{\frac{1}{2}mE-\frac{m\alpha-\beta}{2\xi}-\frac{p_\varphi^{\,2}}{4\xi^2}+\frac{mF\xi}{4}}\,d\xi+ \\ +\int\sqrt{\frac{1}{2}mE-\frac{m\alpha+\beta}{2\eta}-\frac{p_\varphi^{\,2}}{4\eta^2}-\frac{mF\eta}{4}}\,d\eta$$

که‌ثابتهای اختیاری در آن E و p_φ و β هستند. ثابت β در این مورد بقای کمیت

$$\beta=-m\left[\frac{\alpha z}{r}+\frac{p_\rho}{m}(zp_\rho-\rho p_z)\right]-\frac{۱}{۲}mF\rho^۲$$

را که تابعی یك ارزشی ازمختصات ومقدارحرکت ذره است ، نشان می‌دهد . عبارت داخل کروشه انتگرال حرکت درمیدان خالص کولمب را نشان می‌دهد (بخش ۱۵ دیده شود) .

مسئلهٔ۲ـ مانندمسئلهٔ‌یك‌است، تنهامیدان‌دراین‌جا $U=\alpha_۱/r_۱+\alpha_۲/r_۲$ می‌باشد (میدان کولمب حاصل از دو نقطه به فاصلهٔ ۲σ) .

حل : این میدان از نوع (۲۱ـ۴۸) است و داریم :

$$a(\xi)=(\alpha_۱+\alpha_۲)\xi/\sigma,\quad b(\eta)=(\alpha_۱-\alpha_۲)\eta/\sigma$$

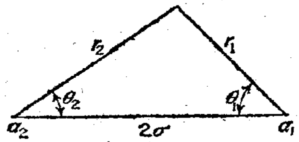
از معادلهٔ (۲۲ـ۴۸) نتیجه می‌شود :

$$S=-Et+p_\varphi\varphi+$$
$$+\int\sqrt{۲m\sigma^۲E+\frac{\beta-۲m\sigma(\alpha_۱+\alpha_۲)\xi}{\xi^۲-۱}-\frac{p_\varphi^۲}{(\xi^۲-۱)^۲}}\,d\xi+$$
$$+\int\sqrt{۲m\sigma^۲E-\frac{\beta+۲m\sigma(\alpha_۱-\alpha_۲)\eta}{۱-\eta^۲}-\frac{p_\varphi^۲}{(۱-\eta^۲)^۲}}\,d\eta$$

ثابت β در اینجا بقای کمیت زیر را نشان می‌دهد :

$$\beta=\sigma^۲p_\rho^۲-M^۲+۲m\sigma(\alpha_۱cos\theta_۱+\alpha_۲cos\theta_۲)$$

که در آن M مقدارحرکت زاویه‌ای کل ذره و $\theta_۱$ و $\theta_۲$ زوایای نشان داده‌شده در شکل ۵۵ هستند .



(شکل۵۵)

۴۹ : پایاهای آدیاباتیك

در اینجا سیستمی مکانیکی را با حرکت محدود یك بعدی که با پارامتر λ مشخص می‌شود ، بررسی می‌کنیم . پارامتر λ خصوصیات سیستم یا میدان خارجی را که سیستم در

آن واقع شده است ، نشان می‌دهد . فرض می‌کنیم تغییرات λ ، در نتیجهٔ عوامل خارجی، نسبت به زمان کند (آدیاباتیک) باشد .

منظور از لفظ تغییرات «کند» این است که λ در پریود T ، تغییر بسیار کمی بکند :

$$T\,\mathrm{d}\lambda/\mathrm{d}t \ll \lambda \qquad (۱-۴۹)$$

چنین سیستمی بسته نیست و انرژی E آن محفوظ نمی‌ماند . اما چون λ به‌تدریج تغییر می‌کند ، میزان تغییرات $\dot{E}$ با میزان تغییرات $\dot{\lambda}$ متناسب است و ازاین‌امر نتیجه می‌شود که انرژی سیستم تابعی از متغیر λ است . به عبارت دیگر ، عبارتی مرکب از λ و E وجود دارد که درحین حرکت ثابت باقی می‌ماند . این کمیت را «پایای آدیاباتیک» نام نهاده‌اند .

فرض کنیم $H(p,q;\lambda)$ تابع هامیلتون سیستمی است که به λ وابسته‌است . بر طبق معادلهٔ (۵-۴۰) مشتق کامل انرژی سیستم نسبت به زمان برابر است با :

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial H}{\partial t}=\left(\frac{\partial H}{\partial \lambda}\right)\left(\frac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}t}\right)$$

در تعیین متوسط این معادله در پریود حرکت چون λ (در نتیجه $\dot{\lambda}$) به‌کندی‌تغییر می‌کند، لازم نیست که متوسط عامل دوم معادلهٔ فوق را به دست آوریم :

$$\overline{\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t}}=\frac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}t}\cdot\overline{\frac{\partial H}{\partial \lambda}}$$

در تابع متوسط $\frac{\partial H}{\partial \lambda}$ ، تنها p و q را متغیرفرض می‌کنیم و λ راثابت می‌انگاریم ؛ یعنی مقدار متوسط برای حرکتی گرفته می‌شود که در ضمن آن λ ثابت فرض شده است .

مقدار متوسط را می‌توان چنین نوشت :

$$\overline{\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t}}=\frac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}t}\cdot\frac{۱}{T}\int_{۰}^{T}\frac{\partial H}{\partial \lambda}\,\mathrm{d}t$$

برطبق معادلات هامیلتون $\dot{q}=\frac{\partial H}{\partial p}$ و یا :

$$\mathrm{d}t=\frac{\mathrm{d}q}{\partial H/\partial p}$$

بنابراین انتگرال گیری‌نسبت‌به زمان را می‌توان به انتگرال گیری‌نسبت به مختصات تبدیل کرد . پریود T نیز به صورت زیر بدل می‌شود :

$$T=\int_0^T \mathrm{d}t=\oint \mathrm{d}q\div(\partial H/\partial p)$$

علامت $\oint$ در این جا نشان دهندهٔ آن است که حدود انتگرال شامل تغییرات همه جانبهٔ مختصات در هر پویود است (تغییر به عقب و جلو)[1]. از این رو :

$$\frac{\overline{\mathrm{d}E}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}t}\cdot\frac{\oint(\partial H/\partial\lambda)\mathrm{d}q/(\partial H/\partial p)}{\oint\mathrm{d}q/(\partial H/\partial p)} \qquad (۴۹\text{–}۲)$$

همان طور که قبلاً گفته شد ، انتگرالهای این معادله باید روی مسیر حرکت به ازاء مقدار ثابت λ گرفته شود . در روی چنین مسیری تابع هامیلتون مقدار ثابت E را دارا است . مقدار حرکت تابع معینی از مختصات q و دو پارامتر ثابت و مستقل E و λ است. از آن جا با فرض $p=p(q;E,\lambda)$ و مشتق گرفتن از معادلهٔ $H(p,q;\lambda)$ نسبت به λ داریم :

$$\partial H/\partial\lambda+(\partial H/\partial p)(\partial p/\partial\lambda)=0$$

و یا

$$\frac{\partial H/\partial\lambda}{\partial H/\partial p}=-\frac{\partial p}{\partial\lambda}$$

با استفاده از این نتیجه در صورت کسر (۲–۴۹) و نوشتن مقدار زیر علامت انتگرال مخرج کسر مزبور به صورت $\frac{\partial p}{\partial E}$ خواهیم داشت :

$$\frac{\overline{\mathrm{d}E}}{\mathrm{d}t}=-\frac{\mathrm{d}\lambda\oint(\partial p/\partial\lambda)\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t\oint(\partial p/\partial E)\mathrm{d}q} \qquad (۴۹\text{–}۳)$$

و یا :

$$\oint\left(\frac{\partial p}{\partial E}\frac{\overline{\mathrm{d}E}}{\mathrm{d}t}+\frac{\partial p}{\partial\lambda}\frac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}t}\right)\mathrm{d}q=0$$

این رابطه را می‌توان به صورت زیر نوشت :

$$\overline{\mathrm{d}I/\mathrm{d}t}=0 \qquad (۴۹\text{–}۴)$$

که در آن :

$$I\equiv\frac{1}{2\pi}\oint p\mathrm{d}q \qquad (۴۹\text{–}۵)$$

[1] اگر حرکت سیستم دورانی و مختصات q زاویهٔ دوران φ باشد ، انتگرال باید روی یك «دوران کامل» گرفته شود ؛ یعنی از صفر تا 2π .

انتگرال در روی مسیر به ازاء E و λ معلوم گرفته می‌شود . باتقریبی که مسئلهٔ فوق بررسی شد ، وقتی λ تغییر می‌کند I ثابت باقی می‌ماند ؛ یعنی I پایای آدیاباتیك است[1].

کمیت I تابعی ازانرژی سیستم (وپارامتر λ) است. مشتق جزئی آن نسبت به انرژی چنین است :

$$\partial I/\partial E = \frac{۱}{۲\pi}\oint \frac{\partial p}{\partial E}\mathrm{d}q$$

(یعنی $\frac{۱}{۲\pi}$ ام انتگرال مخرج (۳ـ۴۹)) و پریود حرکت سیستم برابر است با :

$$۲\pi\partial I/\partial E = T \qquad (۴۹\text{–}۶)$$

انتگرال (۵ـ۴۹) با استفاده از مفهوم مسیر نمود سیستم دارای تعبیر هندسی است . در مورد فوق‌الذکر (با یك درجهٔ آزادی) فضای نمود یك فضای دو بعدی است (یعنی صفحه) و مختصات آن p و q اند . مسیر نمود سیستمی که حرکتی تناوبی دارد ، منحنی بسته‌ای در صفحهٔ مزبور است . انتگرال (۵ـ۴۹) که روی این منحنی گرفته می‌شود ، مساحت سطح داخلی منحنی مزبور را نشان می دهد . آشکار است که انتگرال روی منحنی

$$I = -\frac{۱}{۲\pi}\oint q\mathrm{d}p$$

را می‌توان به انتگرال روی سطح

$$I = \frac{۱}{۲\pi}\int\int \mathrm{d}q\mathrm{d}p$$

بدل کرد .

به عنوان مثال پایای آدیاباتیك را برای نوسان کنندهٔ یك بعدی تعیین می کنیم . تابع

۱ـ می‌توان نشان داد که اگر تابع $\lambda(t)$ دارای نقاط استثنایی نباشد، فرق I بامقداری ثابت تنها درضریبی که به طور نمائی کوچك است ، می‌باشد .

نقاط استثنائی «**singularities**» :

اگر برای تابع $F(X,Y)=۰$ درنقطهٔ $x=x_۰$ و $y=y_۰$ داشته باشیم ،

$$\frac{\partial F}{\partial x}=۰ \text{ و } \frac{\partial F}{\partial y}=۰$$

نقطهٔ مزبور را نقطهٔ استثنایی می‌نامند . آشکار است که امکان وجود این نقاط در مورد تابع $\lambda(t)$ وقتی است که تابع مذکور چندارزشی باشد؛ یعنی به‌ازاء هرمقدار t چند مقدار برای λ به دست آید . (م)

هامیلتون آن برابر است با :

$$H=\frac{1}{2}p^2/m+\frac{1}{2}m\omega^2q^2$$

که در آن ω بسامد نوسان‌کنندهٔ است . معادلهٔ مسیر نمود به وسیلهٔ اصل بقای انرژی ، $H(p,q)=E$ به دست می‌آید . مسیر بیضیبی با نیم محورهای $\sqrt{2mE}$ و $\sqrt{2E/m\omega^2}$ است . مساحت آن بخش بر 2π مساوی است با :

$$I=E/\omega \qquad (۴۹-۷)$$

پایای I نشان می‌دهد که وقتی پارامترهای نوسان‌کننده به‌کندی تغییر کنند ، انرژی آن با بسامدش متناسب است[1].

معادلات حرکت یك سیستم‌بسته با پارامترهای‌ثابت را می‌توان برحسب جملهٔ I بیان کرد . تبدیل‌کانونیکی بر روی متغیرهای p و q انجام می‌دهیم و I را مقدار حرکت جدید فرض می‌کنیم . تابع مولد در این‌جا عمل مختصر S_0 است که تابعی برحسب I و q می‌باشد. چون S_0 برای انرژی معینی از سیستم تعریف شده و درسیستم بسته I تنها تابعی از انرژی است ، بنابراین S_0 را می‌توان تابعی به شکل $S_0(q,I)$ در نظر گرفت . به ازای I ثابت مشتق‌جزئی $\left(\frac{\partial S_0}{\partial q}\right)_I$ برابر مشتق جزئی $\left(\frac{\partial S_0}{\partial q}\right)_E$ خواهد بود . از این رو بر طبق معادلهٔ اول (۸-۴۵) تبدیل کانونیك خواهیم داشت :

$$p=\partial S_0(q,I)/\partial q \qquad (۴۹-۸)$$

۱- مسئلهٔ صحت و دقت بقای پایای آدیاباتیك (۷-۴۹) به ایجاد رابطه‌ای بین ضرایب $c_\pm$ درعبارات مجانبی (به ازاء $t\to\pm\infty$) $q=\mathrm{real}(c_\pm e^{i\omega_\pm t})$ ، جواب معادلهٔ حرکت نوسان‌کنندهٔ $\ddot{q}+\omega^2(t)q=0$ برمی‌گردد . در آن بسامد ω نسبت به زمان تغییرات کمی دارد و درحد وقتی $t\to\pm\infty$، به‌سمت حدود ثابت $\omega_\pm$ میل می‌کند ؛ مقادیر حدی I تابعی از ضرایب مزبور به شکل $\frac{1}{2}\omega_\pm|c_\pm|^2$ است . اگر به تشابه معادلهٔ حرکت نوسان کننده و معادلهٔ شرودینگر $\psi''+k^2(x)\psi=0$ مربوط به حرکت نقطهٔ مادی در بالای « سد پتانسیلی» باتغییرات آهسته (نیمهٔ کلاسیك) توجه کنیم، درمی‌یابیم که می‌توان ازمکانیك‌کوانتیك برای‌حل این مسئله کمك گرفت ؛ تعیین رابطه‌ای‌بین عبارتهای مجانبی $\psi(x\to\pm\infty)$،منجر به یافتن «عامل انعکاس» درسد پتانسیل میشود (به مکانیك‌کوانتیك مراجعه شود) .

این روش‌حل مسئلهٔ دقت بقای پایای‌آدیاباتیك یك نوسان‌کننده منسوب به پیتاوسکی (L.P.pitavski) است . محاسبات مربوط را می‌توان در مقالهٔ دیخنه (A.M.Dykhné) در مجلهٔ فیزیك عملی وتئوری ، ۳۸ ، ۵۷۰ (۱۹۶۰) یافت .

معادلهٔ دوم (۸–۴۵) مختصات جدیدی را به دست می‌دهد که با w نمایش می‌دهیم:

$$w = \partial S_\circ(q,I)/\partial I \qquad (۴۹–۹)$$

متغیرهای I و w را «متغیرهای کانونیک» می‌نامند؛ I را «متغیر عمل» و w را «متغیر زاویه» نام نهاده‌اند.

چون تابع مولد $S_\circ(q,I)$ به‌طور صریح به‌زمان وابسته نیست، تابع هامیلتون جدید H' مساوی تابع هامیلتون قدیم H است، تنها در این‌جا به جای متغیرهای قدیم، متغیرهای جدید گذاشته می‌شوند. به عبارت دیگر، H' انرژی $E(I)$ است که تابعی از متغیر عمل می‌باشد. معادلات هامیلتون برحسب متغیرهای کانونیک چنینند:

$$\dot{I} = \circ, \quad \dot{w} = \mathrm{d}E(I)/\mathrm{d}I \qquad (۴۹–۱۰)$$

معادلهٔ اول نشان می‌دهد که I ثابت است و این نتیجهٔ آشکاری است، چه انرژی ثابت و از آنجا I نیز ثابت می‌ماند. از معادلهٔ دوم متغیر زاویه برحسب تابعی خطی از زمان به دست می‌آید:

$$w = (\mathrm{d}E/\mathrm{d}I)t + \text{ثابت} \qquad (۴۹–۱۱)$$

عمل $S_\circ(q,I)$ تابع چند ارزشی از مختصات است. در هر تناوب به این تابع مقدار

$$\Delta S_\circ = ۲\pi I \qquad (۴۹–۱۲)$$

افزوده می‌شود که به سادگی از رابطهٔ $S_\circ = \int p\,\mathrm{d}q$ و (۴۹–۵) نتیجه می‌شود. در همان زمان به متغیر زاویه به اندازهٔ

$$\Delta w = \Delta(\partial S_\circ/\partial I) = \partial(\Delta S_\circ)/\partial I = ۲\pi \qquad (۴۹–۱۳)$$

افزوده می‌گردد و این از رابطهٔ (۴۹–۱۱) و (۴۹–۶) مستقیماً به دست می‌آید. برعکس، هرگاه p و q و یا هر تابع یک ارزشی $F(p,q)$ از آنها را برحسب متغیرهای کانونیک بنویسیم با افزایش w به اندازهٔ ۲π (با I ثابت)، آنها بدون تغییر باقی می‌مانند. یعنی هر تابع یک ارزشی $F(p,q)$ وقتی برحسب متغیرهای کانونیک بیان شود، تابعی تناوبی از w با تناوب ۲π خواهد بود.

۵۰: خصوصیات عمومی حرکت در فضا

سیستمی را با درجهٔ آزادی دلخواهی، که حرکت محدودی نسبت به تمام مختصات انجام می‌دهد، در نظر می‌گیریم و فرض می‌کنیم که بتوان همهٔ متغیرها را به طور کامل به روش هامیلتون ــ ژاکوبی تجزیه کرد. این بدان معنی است که با انتخاب مناسب مختصات، عمل مختصر را می‌توان به شکل زیر نوشت:

$$S_\circ = \sum_i S_i(q_i) \qquad (۵۰-۱)$$

که مجموعهٔ توابعی است که هر کدام تنها به یك مختصات بستگی دارد.

مقادیر حرکت عمومی چنینند:

$$p_i = \partial S_\circ / \partial q_i = \mathrm{d}S_i / \mathrm{d}q_i$$

و برای هر تابع S_i می‌توان نوشت:

$$S_i = \int p_i \mathrm{d}q_i \qquad (۵۰-۲)$$

اینها توابعی چند ارزشی هستند. چون حرکت محدود است، هر مختصات تنها در محدودهٔ معینی تغییر می کند. وقتی q_i دراین محدوده «به جلو و عقب» تغییرمی‌کند، به عمل مقدار

$$\Delta S_\circ = \Delta S_i = ۲\pi I_i \qquad (۵۰-۳)$$

افزوده می‌شود که در آن:

$$I_i \equiv \oint p_i \mathrm{d}q_i / ۲\pi \qquad (۵۰-۴)$$

انتگرال فوق در محدودهٔ تغییرات q_i که ذکر شد، گرفته می‌شود[۱].

حال تبدیل کانونیکی، مشابه روش به‌کار برده شده در بخش ۴۹ در مورد یك درجهٔ آزادی، انجام می‌دهیم. متغیرهای جدید، «متغیرهای عمل» I_i و «متغیرهای زاویهٔ»

$$w_i = \partial S_\circ(q, I)/\partial I_i = \sum_k \partial S_k(q_k, I)/\partial I_i \qquad (۵۰-۵)$$

هستند. تابع مولد باز همان عمل است که به صورت تابعی ازمختصات و I_i بیان می‌شود. معادلات حرکت برحسب این متغیرها چنین هستند:

$$\dot{I}_i = \circ, \quad \dot{w}_i = \partial E(I)/\partial I_i$$

از آنجا:

$$I_i = \text{ثابت} \qquad (۵۰-۶)$$

$$w_i = [\partial E(I)/\partial I_i]t + \text{ثابت} \qquad (۵۰-۷)$$

مشابه (۱۳-۴۹)، در این‌جا نیز تغییرات به «عقب وجلوی» مختصات q_i در نتیجهٔ

۱ـ باید متذکر شد که این مربوط به تغییرات ظاهری مختصات q_i در سراسر محدودهٔ تغییرات است نه مربوط به تغییرات در تناوب حرکت واقعی (که در مورد حرکت یك بعدی مصداق داشت). حرکت واقعی محدود یك سیستم باچند درجهٔ آزادی نه‌تنها به طور کلی عموماً تناوبی نیست بلکه حتی به‌طور مجزا نیز تغییرات زمانی هریك ازمختصات تناوبی نیست.

تغییر 2π در w_i حاصل می‌شود :

$$\Delta w_i = 2\pi \qquad (50-8)$$

به عبارت دیگر کمیات $w_i(q,I)$ توابع چند ارزشی از مختصاتند : وقتی مختصات تغییر می‌کنند و به مقادیر اولیهٔ خود باز می‌گردند ، w_i به صورت مضرب صحیحی از 2π تغییر خواهد کرد . همچنین این خاصیت را می‌توان در فضای نمود سیستم به عنوان خاصیتی از تابع $w_i(p,q)$ (که تابعی از مختصات و مقادیر حرکت است) به دست آورد . چون I_i توابعی یك ارزشی از متغیرهای p و q هستند ، با قرار دادن $I_i(p,q)$ در $w_i(q,I)$ تابع $w_i(p,q)$ به‌دست می‌آید که با هر بازگشتن به دور هرمسیر بسته در فضای نمود به صورت مضرب صحیحی از 2π تغییر می‌کند (این مضرب ممکن است صفر هم باشد) .

از این رو نتیجه می‌شود که هر تابع یك ارزشی[1] $F(p,q)$ که موضع سیستم را نشان می‌دهد ، هر گاه برحسب متغیرهای کانونیك بیان شده باشد ، تابعی تناوبی از متغیرهای زاویه است که تناوب هر یك از آنها 2π می‌باشد. این تابع را می‌توان به صورت یك سری چند تایی فوریه نمایش داد :

$$F = \sum_{l_1=-\infty}^{\infty} \cdots \sum_{l_s=-\infty}^{\infty} A_{l_1 l_2 \ldots l_s}\, e^{i(l_1 w_1 + \ldots + l_s w_s)} \qquad (50-9)$$

(که در آن $l_1, l_2, \ldots, l_s$ اعداد صحیحند) . با قرار دادن متغیرهای زاویه بر حسب توابعی از زمان ، بستگی F به زمان در مجموعه‌ای به صورت زیر به دست می‌آید :

$$F = \sum_{l_1=-\infty}^{\infty} \cdots \sum_{l_s=-\infty}^{\infty} A_{l_1 l_2 \ldots l_s} e^{it\left(l_1 \frac{\partial E}{\partial I_1} + \ldots + l_s \frac{\partial E}{\partial I_s}\right)} \qquad (50-10)$$

هر جملهٔ این مجموعه تابعی تناوبی از زمان با بسامد زیر است :

$$l_1 \partial E/\partial I_1 + \ldots + l_s \partial E/\partial I_s \qquad (50-11)$$

اما چون بسامدها معمولاً کمیاتی متوافق[2] نیستند، نه خود مجموعه ونه به خصوص مختصات

۱ـ رابطهٔ مختصات دورانی φ (زیرنویس اول بخش ۴۹ دیده شود) با موضع سیستم «ارتباط همسان» ندارد ، چه تمام مقادیر $\varphi + 2k\pi$ (k عدد صحیح است) مربوط به یك موضع سیستمند. اگر مختصات q شامل چنین زوایایی باشند، این مختصات در تابع $F(p,q)$ تنها بصورت $\cos\varphi$ و $\sin\varphi$ می‌توانند ظاهر شوند (منظور از «ارتباط همسان» (one-to-one) این است که به‌ازاء یك مقدار متغیر برای تابع یك مقدار به دست آید و بالعکس ؛ یعنی تابع ومتغیر هردو نسبت به‌هم یك‌ارزشی باشند .

۲ـ کمیاتی که می‌توان آنها را به صورت نسبت دوعدد صحیح نوشت . (م)

q و مقادیر حرکت p سیستم توابعی تناوبی نیستند .

از این رو عموماً حرکت سیستم نه به طور کلی و نه در هر یك از مختصات تناوبی نیست . این بدان معنی است که با گذر از یك موضع معین ، سیستم در یك زمان محدود دوباره به آن موضع باز نمی‌گردد . ولی می‌توان گفت که در مدت زمانی کافی سیستم با تقریبی دلخواه از نزدیکی آن موضع عبور خواهد کرد. به این دلیل آن را «حرکت تناوبی مشروط» می‌نامند .

در برخی ازموارد دو یا چند بسامد اصلی $w_i = \partial E/\partial I_i$ به ازاء مقادیر دلخواهی از I_i متوافقند . این را « دگرگونی » می‌نامند و اگر همهٔ s فرکانس متوافق باشند ، می‌گویند حرکت سیستم « کاملاً دگرگون » است . در مورد اخیر حرکت سیستم تناوبی است و مسیر حرکت هر ذرهٔ آن بسته است .

دگرگونی قبل از هر چیز باعث کاهش تعداد کمیات مستقل I_i (که انرژی سیستم به آن وابسته است) می‌شود . اگر دو بسامد ω_1 و ω_2 این‌گونه باشند ، داریم :

$$n_1 \partial E/\partial I_1 = n_2 \partial E/\partial I_2 \qquad (۵۰-۱۲)$$

که در آن n_1 و n_2 اعداد صحیحند . در نتیجه I_1 و I_2 تنها به صورت $n_2 I_1 + n_1 I_2$ در انرژی ظاهر می‌شوند .

یکی ازمهمترین خصوصیات حرکت دگرگون ، افزایش تعداد انتگرالهای یك ارزشی حرکت نسبت به سیستم کلی دگرگون نشده با همان درجهٔ آزادی است . در مورد اخیر از ۱ — ۲s انتگرال حرکت تنها s تابع حالت سیستم یك ارزشی است ؛ که مثلاً ممکن است s کمیت I_i باشند . ۱ — s انتگرال دیگر را می‌توان به صورت تفاضل زیر نوشت :

$$w_i \partial E/\partial I_k - w_k \partial E/\partial I_i \qquad (۵۰-۱۳)$$

ثابت‌بودن این کمیت از معادلهٔ (۷-۵۰) نتیجه می‌شود ولی اینها توابع یك ارزشی از حالت سیستم نیستند چه متغیرهای زاویه یك ارزشی نیستند .

وقتی دگرگونی‌وجود داشته‌باشد ، وضع‌فرق می‌کند. به طورمثال رابطهٔ (۱۲-۵۰) نشان می‌دهد که اگر چه انتگرال حرکت

$$w_1 n_1 + w_2 n_2 \qquad (۵۰-۱۴)$$

یك ارزشی‌نیست، ولی این امر تنها به علت‌افزوده شدن مضرب صحیح دلخواهی از 2π است. از این رو تنها کافی است که تابعی مثلثاتی از این کمیت را در نظر بگیریم تا انتگرال یك ارزشی دیگری از حرکت به دست‌آید .

یك مثال دیگر برای دگرگونی، حرکت درمیدان $U = -\alpha/r$ است (مسئلهٔ این بخش

را نگاه کنید) . در نتیجهٔ این میدان ، انتگرال یك ارزشی دیگری (۱۷ـ۱۵) علاوه بر دو انتگرال عمومی[1] یك ارزشی (مقدارحرکت زاویه‌ای و انرژی) که‌برای هرمیدان مرکزی وجود دارد ، به دست می‌آید .

باید توجه داشت که وجود انتگرالهای یك ارزشی اضافی به‌نوبه خود خاصیت دیگری را برای حرکت دگرگون ایجاد می‌کند : دگرگونی تجزیهٔ کامل متغیرها را در چند (و نه تنها یك[2]) سیستم مختصات ممکن می‌سازد . کمیات I_i در سیستم مختصاتی که تجزیهٔ متغیرها در آن امکان پذیر است ، انتگرالهای یك ارزشی حرکت هستند . هر گاه سیستم دگرگون‌باشد، تعداد انتگرالهای یك ارزشی حرکت از s متجاوز می‌شود و در نتیجه نحوهٔ انتخاب I_iها دیگر منحصر بفرد نخواهد بود .

به عنوان مثال حرکت کپلری را خاطر نشان می‌کنیم که در آن تجزیهٔ متغیرها هم در مختصات کروی و هم در مختصات سهموی امکان‌پذیر است .

دربخش ۴۹ نشان داده‌شد که‌برای حرکت محدود یك‌بعدی، متغیرعمل پایای آدیاباتیك است . این مطلب برای سیستمهای با درجهٔ‌آزادی بیشتر از یك نیز مصداق دارد. ما دراین جا اثباتی را که در موردکلی نیز معتبر است ، می‌آوریم :

بار دیگر $\lambda(t)$ را پارامتری ازسیستم با تغییرکند فرض می‌کنیم[3]. در تبدیل‌کانونیك متغیرهای p و q به I و w همان طور که می‌دانیم ، تابع مولد عمل $S_\circ(q,I)$ است . این تابع به پارامتر λ بستگی دارد و اگر λ تابعی از زمان باشد ، تابع $S_\circ(q,I;\lambda(t))$ به طور صریح به زمان وابسته است . در این صورت‌تابع هامیلتون جدید H' همان H نیست (یعنی همان انرژی $E(I)$) و به وسیلهٔ معادلهٔ‌کلی تبدیل کانونیك (۸ـ۴۵) به‌دست می‌آید:

$$H'=E(I)+\partial S_\circ/\partial t=E(I)+\Lambda\dot{\lambda}$$

که در آن :

$$\Lambda\equiv(\partial S_\circ/\partial\lambda)_I$$

از معادلات هامیلتون نتیجه می‌شود :

$$\dot{I}_i=-\partial H'/\partial w_i=-(\partial\Lambda/\partial w_i)\dot{\lambda} \qquad (۱۵ـ۵۰)$$

۱ـ حرکت در این‌جا دوبعدی درنظرگرفته می‌شود .

۲ـ ازتغییر مختصات بی‌اهمیتی نظیر $q'_1=q'_1(q_1)$ ، $q'_2=q'_2(q_2)$ صرف‌نظرمی‌شود.

۳ـ برای سادگی معادله‌بندی فرض می‌شودکه تنها یك پارامتر داریم ولی اثبات برای هرتعدادآن معتبر است .

متوسط این معادله را در مدتی که نسبت به زمانهای تناوب اصلی سیستم بزرگ ولی نسبت به زمانی که پارامتر λ به‌طورمحسوسی تغییر می‌کند، کوچك است، به دست می‌آوریم. با شرط اخیر دیگر احتیاجی به متوسط گرفتن از $\dot{\lambda}$ در طرف راست معادله نیست و نیز برای تعیین متوسط کمیاتهای $\frac{\partial \Lambda}{\partial w_i}$ فرض می‌کنیم حرکت سیستم درمقدارثابتی از λ انجام گیرد و بنابراین خواص حرکت تناوبی مشروط را که در بالا شرح داده شد ، دارا است .

عمل $S_\circ$ تابع یك ارزشی از مختصات نیست چه وقتی q_i به مقدار اولیهٔ خود باز می‌گردد ، به $S_\circ$ مضرب صحیحی از $2\pi I_i$ افزوده می‌شود . اما چون مشتق $\Lambda=\left(\frac{\partial S_\circ}{\partial \lambda}\right)_I$ در مقدار ثابت I_i گرفته شده است ، یك ارزشی می‌باشد و در نتیجه $S_\circ$ افزایشی ندارد . از آن جا Λ که برحسب تابعی از متغیر زاویه w_i بیان شده است ، تناوبی می‌باشد و در نتیجه مقدار متوسط مشتق $\frac{\partial \Lambda}{\partial w_i}$ صفر است . با استفاده از (۱۵ـ۵۰) داریم :

$$\frac{\partial I_i}{\partial t}=-\overline{(\partial \Lambda/\partial w_i)_I}\,\dot{\lambda}=\circ$$

که نشان می‌دهد کمیات I_i پایای آدیاباتیك هستند .

بالاخره به اختصار خواص حرکت محدود سیستم بسته با s درجهٔ آزادی را درحالت کلی که متغیرهای معادلهٔ هامیلتون ـ ژاکوبی تجزیه ناپذیرند ، بررسی می‌کنیم .

خاصیت اصلی سیستمهایی که متغیرها درآن تجزیه پذیرند ، این است که انتگرالهای حرکت I_i (تعداد آنها برابر درجهٔ آزادی است) یك ارزشی هستند . اما در حالت کلی که متغیرها تجزیه ناپذیرند ، انتگرالهای یك ارزشی حرکت تنها شامل آنهایی است که ثابت بودنشان در نتیجهٔ همگن و همسان بودن فضا و زمان نتیجه شده باشد ؛ یعنی انرژی، مقدار حرکت و مقدار حرکت زاویه‌ای .

مسیر نمود سیستم از ناحیه‌هایی ازفضای نمود می‌گذردکه به وسیلهٔ مقادیر ثابت وداده شدهٔ انتگرالهای یك ارزشی حرکت مشخص می‌شوند . برای یك سیستم با متغیرهای تجزیه پذیر و s انتگرال یك ارزشی ، این شرایط یك چندگونه s بعدی (فوق صفحه) را درفضای نمود ایجاد می‌کند . در یك مدت زمان کافی مسیرسیستم با تقریبی دلخواه از مجاورت هر نقطهٔ این فوق صفحه عبور خواهدکرد .

اما در سیستمی که متغیرها تجزیه ناپذیرند ، تعداد انتگرالهای یك ارزشی کمتر از

s است و مسیر نمود تمام یا قسمتی از فوق صفحه‌ای به ابعاد بیشتر از s را در فضای نمود طی می‌کند.

از طرف دیگر، در یك سیستم دگرگون که بیش‌از s انتگرال حرکت دارد، مسیر نمود چندگونه‌ای با ابعاد کمتر از s را اشغال می‌کند.

اگر اختلافات تابع هامیلتون سیستمی با تابعی که متغیرها درآن تجزیه پذیرند تنها در جملات کوچکی باشد، خواص حرکت نزدیك به حرکت تناوبی مشروط خواهد بود و اختلاف بین‌آن دو از درجهٔ بی‌نهایت‌کوچکتری‌نسبت به جملات اضافی‌تابع هامیلتون است.

مسئله

متغیرهای عمل را برای حرکت بیضوی درمیدان $U=-\frac{\alpha}{r}$ به دست آورید.

حل: درمختصات قطبی r ، φ درصفحهٔ حرکت داریم:

$$I_\varphi=\frac{۱}{۲\pi}\int_{0}^{۲\pi} p_\varphi \mathrm{d}\varphi=M$$

$$I_r=۲\frac{۱}{۲\pi}\int_{r_{\min}}^{r_{\max}}\sqrt{۲m\left(E+\frac{\alpha}{r}\right)-\frac{M^۲}{r^۲}}\,\mathrm{d}r$$

$$=-M+\alpha\sqrt{m/۲|E|}$$

از این رو انرژی برحسب متغیرهای عمل چنین خواهد بود:

$$E=-\frac{m\alpha^۲}{۲(I_r+I_\varphi)^۲}$$

که تنها به مجموع I_r+I_φ بستگی دارد و درنتیجه حرکت دگرگون است و دوبسامد اصلی (برحسب r و φ) بریکدیگر منطبقند.

رابطهٔ پارامترهای p و e مدار [به (۴-۱۵) مراجعه شود] با I_r و I_φ چنین است :

$$p=\frac{I_\varphi^{2}}{m\alpha} \quad \text{و} \quad e^{2}=1-\left(\frac{I_\varphi}{I_\varphi+I_r}\right)^{2}$$

چون I_r و I_φ پایاهای آدیاباتیکند، هرگاه ضریب α ویاجرم m به‌کندی تغییر کند ، خروج از مرکز مدار بدون تغییر باقی می‌ماند ؛ درحالی‌که ابعاد آن متناسب باعکس α و m تغییر می‌کند .

ضمائم

۱ : «تابع گاما»

یکی از توابعی که در ریاضیات کاربرد وسیعی دارد تابع گاما است که به ترتیب زیر تعریف می‌شود :

$$\Gamma(n)=\int_{0}^{\infty} e^{-x}x^{n-1}\mathrm{d}x \quad , \quad n>0$$

در محاسبهٔ انتگرال بالا اگر $n<1$ باشد انتگرال به ازاء حد پایینی خود (در $n=0$) نیز بی‌نهایت خواهد شد و در نتیجه محاسبهٔ انتگرال باید در هر دو حد تحتانی وفوقانی انجام گیرد .

حال رابطهٔ مهمی را بین توابع Γ به دست می‌آوریم :

$$\Gamma(n+1)=\int_{0}^{\infty} x^{n}e^{-x}\mathrm{d}x$$

با انتگرال گیری به طریق جزء به جزء داریم :

$$\int_{0}^{\infty} x^{n}e^{-x}\,\mathrm{d}x=-\left| x^{n}e^{-x} \right|_{0}^{+\infty}+n\int_{0}^{\infty} x^{n-1}e^{-x}\mathrm{d}x=$$

$$=n\int_{0}^{\infty} x^{n-1}e^{-x}\mathrm{d}x=n\Gamma(n) \Longrightarrow$$

$$\Gamma(n+1)=n\Gamma(n)$$

به ازاء اعداد صحیح n با استفاده از رابطهٔ بالا به‌نتیجهٔ جالبی می‌رسیم :

داریم : $\Gamma(1)=\int_{0}^{\infty} e^{-x}\mathrm{d}x=1$

$: n=1 \qquad \Gamma(2)=1\times\Gamma(1)=1=1!$

$: n=2 \qquad \Gamma(3)=2\times\Gamma(2)=1\times 2=2!$

$$\vdots \qquad \vdots$$

$: n=n-1 \qquad \Gamma(n)=1\times 2\times\cdots\times(n-1)=(n-1)!$

$: n=n \qquad \Gamma(n+1)=1\times 2\times\cdots\times n=n!$

آشکار است که رابطهٔ فوق تنها به ازای مقادیرصحیح n قابل قبول است ، هرچند می‌توان $n!$ را برای اعداد غیرصحیح n نیز به‌کمك رابطهٔ بالا تعریف‌کرد .

$\Gamma(n)$ را به ازاء مقادیر منفی n نیز می‌توان تعریف‌کرد :

$$\Gamma(n)=\frac{\Gamma(n+۱)}{n} \qquad (۱)$$

رابطهٔ (۱) به ازاء $n=۰$ نامعین است چه :

$$\lim_{n\to+۰}\Gamma(n)=+\infty, \qquad \lim_{n\to-۰}\Gamma(n)=-\infty$$

از آنجا تابع $\Gamma(n)$ به ازای $n=۰$ پیوسته نیست . وقتی $-۱<n<۰$ است با جایگزینی n درسمت راست (۱) می‌توان $\Gamma(n)$ را به ازای مقادیر منفی n به دست‌آورد . مثلاً :

$$\Gamma\left(-\frac{۱}{۲}\right)=\frac{\Gamma\left(\frac{۱}{۲}\right)}{-\frac{۱}{۲}}=-۲\Gamma\left(\frac{۱}{۲}\right)$$

همین طور درمحدودهٔ $-۲<n<-۱$ باز می‌توان $\Gamma(n)$ را تعریف‌کرد . به این قیاس تابع $\Gamma(n)$ در مقادیر منفی n به دست می‌آید . این تابع در $n=-۱,-۲,-۳,\ldots$ برابر $-\infty$ است .

اکنون رابطهٔ زیر را که به روش جالبی به دست می‌آید ، اثبات می‌کنیم :

$$\Gamma\left(\frac{۱}{۲}\right)=\sqrt{\pi}$$

داریم :

$$\Gamma\left(\frac{۱}{۲}\right)=\int_۰^{\infty} e^{-x}x^{-\frac{۱}{۲}}\mathrm{d}x$$

با تغییر متغیر $x=u^۲$ نتیجه می‌شود :

$$\Gamma\left(\frac{۱}{۲}\right)=۲\int_۰^{\infty} e^{-u^۲}\mathrm{d}u$$

$$\left[\Gamma\left(\frac{۱}{۲}\right)\right]^۲=۴\int_۰^{\infty} e^{-u^۲}\mathrm{d}u\cdot\int_۰^{\infty} e^{-v^۲}\mathrm{d}v=۴\int_۰^{\infty}\int_۰^{\infty} e^{-(u^۲+v^۲)}\mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

باتبدیل‌مختصات‌درانتگرال‌فوق‌به مختصات قطبی حاصل می‌شود ($u=\rho\cos\theta$ ، $v=\rho\sin\theta$):

$$\left[\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right]^2=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{\infty}2e^{-\rho^2}\rho d\rho=-\pi\,.\,\left|e^{-\rho^2}\right|_0^{\infty}=\pi \Longrightarrow$$

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}$$

با مشتق‌گیری از تابع $\Gamma(n)$ نسبت به n داریم :

$$\frac{d^\alpha\Gamma(n)}{dn^\alpha}=\int_0^\infty x^{n-1}e^{-x}(Log n)^\alpha dx$$

α مرتبهٔ مشتق است .

۴: «تابع بتا»

تابع $\beta(m,n)$ به وسیلهٔ انتگرال زیر تعریف می‌شود :

$$\beta(m,n)=\int_0^1 x^{m-1}(1-n)^{n-1}dx$$

می‌توان تابع $\beta(m,n)$ را به توابع Γ بدل کرد . برای این کار به جای x در $\Gamma(n)$ ، y^2 قرار می‌دهیم ؛ داریم :

$$\Gamma(n)=\int_0^\infty x^{n-1}e^{-x}\,dx=2\int_0^\infty e^{-y^2}y^{2n-1}\,dy$$

با استفاده از این رابطه حاصل می‌شود :

$$\Gamma(m)\cdot\Gamma(n)=4\int_0^\infty x^{2n-1}e^{-x^2}\,dx\int_0^\infty y^{2m-2}e^{-y^2}dy=$$

$$=4\int_0^\infty\int_0^\infty x^{2n-1}y^{2m-1}e^{-x^2-y^2}dx\,dy$$

مختصات را به مختصات قطبی $x=\rho\cos\theta$ ، $y=\rho\cos\theta$ تبدیل می‌کنیم :

$$\Gamma(m)\cdot\Gamma(n)=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\infty}(\rho\cos\theta)^{2n-1}(\rho\sin\theta)^{2m-1}e^{-\rho^2}\rho\,d\rho\,d\theta$$

$$=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{2n-1}\theta\cdot\sin^{2m-1}\theta\,d\theta\int_0^{\infty}2\rho^{2(m+n-1)}e^{-\rho^2}\rho\,d\rho$$

$$=\left\{2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{2n-1}\theta\sin^{2m-1}\theta\,d\theta\right\}\Gamma(m+n)$$

عبارت داخل آکلاد با تبدیل $x=\sin^2\theta$ به تابع بتا بدل می‌شود . از آنجا :

$$\beta(m,n)=\beta(n,m)=\frac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)}$$

۳ : «انتگرالها و توابع بیضوی»

انتگرالهای

$$F(k,x)=\int_0^x\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}\qquad;\ 0<k<1\qquad(1)$$

$$E(k,x)=\int_0^x\sqrt{\frac{1-k^2x^2}{1-x^2}}\,dx\qquad;\ 0<k<1\qquad(2)$$

$$\pi(n,k,x)=\int_0^x\frac{dx}{(1+n^2x^2)\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}\qquad;\ 0<k<1\qquad(3)$$

به ترتیب انتگرالهای بیضوی‌نوع اول و دوم و سوم نام دارند . انتگرالهای (۱) و (۲) با تبدیل $x=\sin\varphi$ به صورت زیر در می‌آیند :

$$F(k,\varphi)=\int_0^{\varphi}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}\qquad(4)$$

$$E(k,\varphi)=\int_0^{\varphi}\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}\,d\varphi\qquad(5)$$

دوانتگرال اخیرشکل عمومی انتگرالهای بیضوی رابرحسب دامنهٔ φ ومدول k بیان می کند و به فرم لژاندر موسوم است . x خواه حقیقی یا موهومی یا مختلط باشد ، آرگومان نام دارد .

وقتی انتگرالهای (۱) و (۲) بین ۰ و ۱ گرفته شوند ، انتگرالهای بیضوی کامل نامیده می‌شوند . این انتگرالها در این حال تابعی از k هستند . انتگرال بیضوی کامل نوع اول را با تابع $K(k)$ نمایش می‌دهند . $k'=\sqrt{1-k^2}$ مدول مکمل نام دارد .

در حالت‌کلی انتگرال

$$\int f(x,\sqrt{R})dx$$

را که در آن R تابعی درجهٔ چهارم از x است و f تابعی منطقی[1] از R می‌باشد ، می‌توان به انتگرالهای بیضوی‌نوع اول تا سوم تبدیل‌کرد . مثلاً انتگرال $\int \frac{dx}{\sqrt{R}}$ که در‌آن

$$R=a_0x^4+a_1x^3+a_2x^2+a_3x+a_4, \quad a_0\neq 0$$

را با تبدیل $x=\frac{at+b}{1-\mu t}$ می‌توان به انتگرال بیضوی نوع اول بدل‌کرد (a و b و μ را پس از تبدیل آنچنان تعیین می‌کنندکه انتگرال به صورت انتگرال بیضوی درآید) .

از معادلات (۱) و (۴) تابع u :

$$u=F(k,\varphi)=\int_0^{\varphi}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}=\int_0^{x}\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}$$

برحسب φ و یا x وبرحسب مقدار معینی از k تعریف می‌شود . به عکس φ را نیز می‌توان تابعی از u به حساب‌آورد :

$$\varphi=am(u)$$

(خوانده شود دامنهٔ u) . چون $x=\sin\varphi$ است ، می‌توان نوشت :

$$x=\sin(am(u))$$

و یا به اختصار

$$x=snu$$

۱ـ تابع منطقی «rational» تابعی است‌که بتوان‌آن را به صورت نسبت دو کثیرالجمله ازمتغیر نمایش داد .

توابع cnu و dnu نیز به ترتیب زیر مشخص می‌شوند :

$$snu = \sin(amu) = \sin\varphi = x$$

$$cnu = \cos(amu) = \cos\varphi = \sqrt{1 - x^2}$$

$$dnu = \Delta(amu) = \Delta\varphi = \sqrt{1 - k^2 \sin^2\varphi} = \sqrt{1 - k^2 x^2}$$

توابع فوق به توابع بیضوی ژاکوبی مشهورند .

روابط زیر در مورد این توابع صادق است :

$$\begin{cases} sn(0) = 0, \quad cn(0) = 1, \quad dn(0) = 1 \\ sn(K) = 0, \quad cn(K) = 0, \quad dn(K) = k' \end{cases}$$

$$\begin{cases} sn(u \pm v) = \dfrac{snu\, cnv\, dnv \pm snv\, cnu\, dnu}{1 - k^2 sn^2 u\, sn^2 v} \\[2ex] cn(u \pm v) = \dfrac{cnu\, cnv \mp snu\, snv\, dnu\, dnv}{1 - k^2 sn^2 u\, sn^2 v} \end{cases}$$

تابع sn فرد است و توابع cn و dn زوجند :

$$sn(-u) = -snu, \quad cn(-u) = cnu, \quad dn(-u) = dnu$$

تابع sn تناوبی است و دورهٔ تناوب آن $4K$ است :

$$sn(u + 4K) = snu$$

و نیز داریم :

$$sn(u + 2K) = -snu, \quad sn(2K - u) = snu$$

با تبدیل $x = snu$ در انتگرال بیضوی نوع دوم به دست می‌آید :

$$\sqrt{\frac{1 - k^2 x^2}{1 - x^2}} = \frac{dnu}{cnu}$$

$$du = \frac{dx}{\sqrt{(1 - x^2)(1 - k^2 x^2)}} = \frac{dx}{cnu\, dnu} \Longrightarrow$$

$$E = \int_0^x \sqrt{\frac{1 - k^2 x^2}{1 - x^2}} dx = \int_0^x dn^2 u\, du$$

تابع E تناوبی نیست .

در مورد انتگرال بیضوی نوع سوم با تبدیل $x=snu$ نتیجه می‌شود :

$$\pi=\int_{\circ}^{x}\frac{\mathrm{d}x}{(n^{۲}x^{۲}+۱)\sqrt{(۱-x^{۲})(۱-k^{۲}x^{۲})}}=\int_{\circ}^{x}\frac{\mathrm{d}u}{۱+n^{۲}\,sn^{۲}u}$$

توابع sn و cn و dn را به راحتی می‌توان بسط داد :

$$snu=u-(۱+k^{۲})\frac{u^{۳}}{۳!}+(۱+۱۴k^{۲}+k^{۴})\frac{u^{۵}}{۵!}-\dots$$

$$cnu=۱-\frac{u^{۲}}{۲!}+(۱+۴k^{۲})\frac{u^{۴}}{۴!}$$

$$dnu=۱-\frac{k^{۲}u^{۲}}{۲!}+(k^{۴}+۴k^{۲})\frac{u^{۴}}{۴!}$$

۴ : اکسترمم شرطی

در بخش ۲ کتاب درمحاسبهٔ اکسترمم انتگرال عمل هیچ گونه محدودیتی موجود نبود. اما در بخش ۳۸ اکسترمم انتگرال عمل را در حالی که معادلات باز دارنده محدودیتهایی ایجاب می‌کرد ، مورد بررسی قرار دادیم . نحوهٔ به دست آوردن اکسترمم شرطی در زیر بیان می‌شود .

انتگرال

$$J=\int_{x_{\circ}}^{x_{۱}}F(x,y,y',z,z')\mathrm{d}x \qquad (۱)$$

را در نظر می‌گیریم . منظور یافتن توابعی مانند $y(x)$ و $z(x)$ است که انتگرال مزبور را با توجه به بازدارندهٔ

$$G(x,y,z)=\circ \qquad (۲)$$

اکسترمم کند . شرایط حدی عبارتند از :

$$y(x_{\circ})=y_{\circ} \quad \text{و} \quad z(x_{\circ})=z^{\circ}$$

$$y(x_{۱})=y_{۱} \quad \text{و} \quad z(x_{۱})=z_{۱}$$

مختصات $x_{\circ}$ و $y_{\circ}$ و $z_{\circ}$ و $x_{۱}$ و $y_{۱}$ و $z_{۱}$ باید در رابطهٔ (۲) صدق کنند .

از نظر هندسی این بحث مشابه یافتن منحنیهایی بر سطح (۲) است به طوری که انتگرال (۱) اکسترمم شود، می‌توان z را از (۲) برحسب تابعی از x و y به دست‌آورد

و در انتگرال (۱) قرارداد و درنتیجه‌با حذف یك متغیر مسئله‌به یافتن اکسترمم انتگرالی بدون وجود بازدارنده‌ها منجر می‌شود . در بسیاری از موارد عملاً انجام کار فوق ناممکن یا دشوار است ، از این رو به ترتیب زیر عمل می‌کنیم .

فرض می‌کنیم مشتق جزئی G_z (در این جا مشتقات جزئی رستهٔ اول تابعی مانند Q رانسبت‌به متغیری مانند p با Q_p نشان می‌دهیم) درمحدودهٔ مسئله صفر نشود . در این حالت می‌توان معادلهٔ (۲) را به صورت زیر نمایش داد :

$$z=\varphi(x, y)$$

بعد از قرار دادن این رابطه در (۱) داریم

$$J=\int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y', \varphi, \varphi_x+\varphi_y y')\mathrm{d}x \tag{۳}$$

منحنی مسطحهٔ حاصل از تصویر منحنی چپ اکسترمم مسئلهٔ می‌بایست اکسترمم انتگرال (۳) باشد . عبارت زیر انتگرال (۳) را با $[F]$ نمایش می‌دهیم . این تابع به x و y و y' بستگی دارد . تابع F را (بدون کروشه) برای نشان دادن تابع ابتدایی $F(x, y, y', z, z')$ به‌کارمی‌بریم. $[F]$ با جایگزینی $z=\varphi(x, y)$ و $z'=\varphi_x+\varphi_y y'$ در F به‌دست می‌آید. داریم :

$$\frac{\partial [F]}{\partial y}=F_y+F_z\varphi_y+F_{z'}(\varphi_{xy}+\varphi_{yy} y')$$

$$\frac{\partial [F]}{\partial y'}=F_{y'}+F_{z'}\varphi_y$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}_x}\cdot\frac{\partial [F]}{\partial y'}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}_x}F_{y'}+\varphi_y\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}_x}F_{z'}+F_{z'}(\varphi_{xy}+\varphi_{yy'})$$

مانند به‌دست‌آوردن اکسترمم غیرشرطی در بخش (۲) کتاب برای اکسترمم بودن $[F]$ باید:

$$\frac{\partial [F]}{\partial y}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}_x}\ \frac{\partial [F]}{\partial y'}=0$$

از روابط فوق‌الذکر نتیجه می‌شود :

$$F_y+\varphi_y\left(F_z-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}_x}F_{z'}\right)-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}_x}F_{y'}=0$$

از طرفی دیفرانسیل (۲) چنین است :

$$G_y+G_z\varphi_y=0$$

با حذف φ_y از دو رابطهٔ بالا داریم :

$$\left(\frac{d}{d_x}F_{y'}-F_y\right)/G_y=\left(\frac{d}{d_x}F_{z'}-F_z\right)/G_z$$

طرفین رابطهٔ فوق برابر تابعی مانند $\lambda(x)$ (که تنها به x بستگی دارد) است . از آنجا :

$$\frac{d}{dx}F_{z'}-[F_y+\lambda(x)G_y]=0$$

$$\frac{d}{dx}F_{z'}-[F_z+\lambda(x)C_z]=0$$

این روابط لازم برای اکسترمم بودن است . آنها را می‌توان به صورت زیر نوشت :

$$\begin{cases}\dfrac{d}{dx}\,f_{y'}-f_y=0\\[2ex]\dfrac{d}{dx}\,f_{z'}-f_z=0\end{cases}\tag{۴}$$

که در آن

$$f=F+\lambda(x)G\tag{۵}$$

یعنی اکسترممهای مسئله می‌بایست ، اکسترممهای غیر شرطی انتگرال $\int f dx$ باشد که f با رابطهٔ (۵) مشخص می‌شود .

بعد ازحذف $\lambda(x)$ و یکی ازتوابع(مثلاً z) از معادلهٔ (۲) و(۴) معادلهٔ دیفرانسیل رستهٔ دومی از تابع $y(x)$ نتیجه می‌شود . مقادیر ثابت به دست آمده به کمك شرایط حدی معین می‌شوند .

بحث فوق را می‌توان در مورد چند بازدارنده و چند تابع نیز تعمیم داد :
یافتن اکسترمم انتگرال

$$\int_{x_0}^{x_1}F(x, y_1, y_1', \ldots, y_n, y_n')dn\tag{۶}$$

تحت شرایط

$$G_s(x, y_1, \ldots, y_n)=0 \qquad (s=1,2,\ldots,p)$$

به حل معادلات

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f_{y'_i} - F_{y_i} = ۰ \qquad (i = ۱, ۲, \ldots, n)$$

که در آنها

$$f = F + \sum_{s=۱}^{k} \lambda_s(x) G_s$$

منجر می‌شود . $\lambda_s(x)$ توابعی از x هستند .

تذکر :

در صفحهٔ ۱۴۲ کتاب درمحاسبهٔ f_k نویسنده دچاراشتباهی شده است که ذیلا خاطر - نشان می‌شود .

هر گاه $f = f_k$ باشد ، بنا به تعریف قسمت CD منحنی به نقطهٔ عطفی بدل می‌شود و شیب مماس براین نقطه ∞ است . شرط آن که نقطه‌ای عطف باشد آن است که $\frac{\mathbf{d}^۲ b}{\mathbf{d}\varepsilon^۲}$ دراین نقطه تغییر علامت دهد و برای آنکه شیب نقطه‌ای ∞ باشد ، لازم است این نقطه یکی از ریشه‌های مخرج $\frac{\mathbf{d}b}{\mathbf{d}\varepsilon}$ باشد . از دو شرط مذکور نتیجه می‌شود که مخرج $\frac{\mathbf{d}b}{\mathbf{d}\varepsilon}$ باید دارای ریشه مضاعف باشد . هر گاه مخرج را برحسب ε یا b به تنهایی بنویسیم از این شرط f_k مستقیماً به دست می‌آید . در این جا مضاعف‌بودن ریشه مخرج $\frac{\mathbf{d}b}{\mathbf{d}\varepsilon}$ نسبت به $b^۲$ نیز همان نتیجه را می‌دهد. این‌نتیجه از برقراری این شرط که قاطع $\varepsilon = \mathbf{cte}$ باید برمنحنی درنقطهٔ عطف مماس باشد ، به دست می‌آید . نویسنده ریشهٔ مضاعف را نسبت به ε در نظر گرفته و به اشتباه رفته است . مبین معادلهٔ مخرج برحسب $b^۲$ چنین است :

$$x^۲\varepsilon^۲ - ۳x^۲\lambda^۲ = ۰$$

که از صفر نهادن آن نتیجه می‌شود :

$$\varepsilon^۲ = ۳\lambda^۲$$

و ریشهٔ مضاعف مخرج $\frac{\mathbf{d}b}{\mathbf{d}\varepsilon}$ ، $xb^۲ = \frac{۲\varepsilon}{۳}$ خواهد بود . با قراردادن $b^۲$ و ε از روابط بالا در (۵-۲۹) حاصل می‌شود :

$$f_k^۲ = \frac{۳۲m^۲\omega_۰^۲\lambda^۳}{۳\sqrt{۳}\,|x|} \qquad (۲۹-۷)$$

فرهنگ لغات

Acceleration	شتاب
Action	عمل
— abbreviated A.	عمل مختصر
— A. variable	متغیر عمل
Additivity	جمع پذیری
Adiabatic invariants	پایاهای آدیاباتیك
Amplitude	دامنه
— complex A.	دامنهٔ مختلط
Angle variable	متغیر زاویه
Angular momentum	مقدارحرکت زاویه‌ای
Angular velocity	سرعت زاویه‌ای
Area integral	انتگرال مساحت
Azimuth	سمت
Beats	ضربان
Canonical	کانونیك
— C. equations	معادلات کانونیك
— C. transformation	تبدیل کانونیك
— C. variables	متغیرهای کانونیك
— C. conjugate quantities	زوجهای کانونیکی
Central field	میدان مرکزی
Centrally symmetric field	میدان متقارن مرکزی
Centre of field	مرکز میدان
Centre of mass	مرکز جرم
Centrifugal force	نیروی گریز ازمرکز
Centrifugal potential	انرژی پتانسیل گریز ازمرکز
Characteristic	مشخصه
— C. equation	معادلهٔ مشخصه
— C. frequencies	بسامدهای مشخصه
Closed system	سیستم بسته
Collisions between particles	برخورد ذرات
Complete integral	انتگرال کامل
Conditionally periodic motion	حرکت تناوبی مشروط
Conservation laws	قوانین بقا
Conservative system	سیستم محفوظ
Conserved quantities	انتگرالهای بقا
Constraints	بازدارنده
— equations of C.	معادلات بازدارنده
— holonomic C.	بازدارنده‌های هولونوم
Co-ordinates	مختصات
— cyclic C.	مختصات حلقوی
— generalised C.	مختصات عمومی
— normal C.	مختصات طبیعی
— rotational C.	مختصات دورانی
Coriolis force	نیروی کریولیس
Couple	زوج

Cross-section effective مقطع مؤثر
— for scattering مقطع مؤثر پراکندگی
C system سیستم C

d'Alembert's principle اصل دالامبر
Damped oscillations
نوسانهای مستهلك شده
Damping استهلاك
— aperiodic D. مستهلك شدهٔ غیرمتناوب
— D. coefficent=D. decrement
ضریب استهلاك=میرائی
Degeneracy دگرگونی ، نزول
— complete D. دگرگونی کامل
Degrees of freedom درجهٔ آزادی
Disintegration of particles
متلاشی‌شدن ذرات
Dispersion (معادلهٔ) انتشار
Dissipative function تابع اتلاف
Dummy suffix اندیس گنگ

Eccentricity خروج ازمرکز
Eigenfrequencies بسامدهای طبیعی
Elastic collision برخورد ارتجاعی
Elliptic integrals انتگرالهای بیضوی
Energy انرژی
— centrifugal E. انرژی‌گریز ازمرکز
— internal E. انرژی داخلی
— kinetic E. انرژی جنبشی
— potential E. انرژی پتانسیل
Equations of motion معادلات حرکت
Eulerian angles زوایای اولر
Euler's equations معادلات‌اولر

Finite motion حرکت محدود
Force نیرو
— generalised F. نیروی عمومی
Foucault's pendulum آونگ فوکو
Frame of reference چارچوب مرجع
Frequency بسامد
— circular F. بسامد زاویه‌ای
— combination F. بسامد مرکب
Friction اصطکاك

Galilean transformation تبدیل گالیله
Galileo's relativity principle
اصل نسبیت گالیله
General integral انتگرال عمومی
Generating function تابع مولد

Half-width نیم پهنا
Hamiltonian تابع هامیلتون
Holonomic constraint
بازدارندهٔ هونولوم
Hypersurface فوق صفحه

Impact parameter پارامتر برخورد
Inertia ماند
— moments of I. گشتاور ماند
— I. tensor تانسور ماند
Infinite motion حرکت نامحدود
Instantaneous axis محور آنی

Jacobi's identity اتحاد ژاکوبی

Kepler کپلر
Kinetic energy انرژی جنبشی

Laboratory system سیستم‌آزمایشگاهی
Lagrange's equations معادلات‌لاگرانژ
Lagrangian تابع لاگرانژ
Latus rectum پارامتر مسیر
Least action principle
اصل کوچکترین عمل
Legendre's transformation
تبدیل لژاندر
Liouville's theorem قضیهٔ لیوویل
L system سیستم L

Mass جرم
— centre of M. مرکز جرم

— reduced M. جرم تعدیل یافته
Mathieu,s equation معادلهٔ ماتیو
Maupertuis principle اصل موپرتویی
Mechanical similarity تشابه مکانیکی
Moment گشتاور
Momentum مقدار حرکت
— generalised M. مقدارحرکت عمومی
Multi_dimensional چند بعدی

Newton نیوتن
Nodes گره
— line of N. خط گره
Non_honolomic غیرهولونوم
Normal co_ordinates مختصات طبیعی
Normal oscillations نوسانهای طبیعی
Nutation رقص محوری

One_dimensional یك بعدی
Oscillation نوسان
Oscillator نوسانگر
— O. space فضای نوسانگر

Particle نقطهٔ مادی ، ذرهٔ مادی
Pendulum آونگ
— compound P. آونگ مرکب
— conical P. آونگ مخروطی
— Foucault's P. آونگ فوکو
— spherical P. آونگ کروی
Perihelion حضیض
Phase فاز
— P. path مسیر نمود
— P. space فضای نمود
Point transformation تبدیل نقطه‌ای
Poisson brackets کروشهٔ پواسون
Poisson's theorem قضیهٔ پواسون
Polar angle زاویهٔ قطبی
Polhodes پلهدز
Potential پتانسیل
— P. energy انرژی پتانسیل
— centrifugal P. energy
انرژی گریز ازمرکز

— effective P. energy
انرژی پتانسیل مؤثر
— P. well چاه پتانسیل، چال پتانسیل
Precession تقدیم
— regular P. تقدیم منظم

Rapidly oscillating field
میدان نوسانی تند
Reactions نیروهای واکنشی
Reduced mass جرم تعدیل‌یافته
Rest سکون
— system at R. سیستم ساکن
Reversibility of motion
برگشت‌پذیری حرکت
Rigid bodies اجسام صلب
— R. in contact جسم صلب‌درتماس
Rolling غلت
Rotational coordinates مختصات‌دورانی
Rotator چرخنده
Rough surface سطح زبر
Routhian تابع روت
Rutherford's formula رابطهٔ روترفورد

Scattering پراکندگی (تفرق)
— small angle S.
پراکندگی در زاویهٔ کوچك
Sectorial velocity سرعت سطحی
Separation of variablers تجزیهٔ‌متغیرها
Similarity تشابه
— mechanical S. تشابه مکانیکی
Sliding لغزش
Small oscillations نوسانهای کوچك
— anharmonic O.
نوسانهای غیریکنواخت
— damped O. نوسانهای مستهلك شده
— forced O. نوسانهای اجباری
— free O. نوسانهای آزاد
— linear O. نوسانهای خطی
— non_linear O. نوسانهای غیرخطی
— normal O. نوسانهای طبیعی
Smooth surface سطح صیقلی

Space فضا
– homogeneity of S. همگن‌بودن فضا
– isotropy of S. همسان‌بودن فضا
Space oscillator فضای نوسانگر

Time زمان
– homogeneity of T. همگن‌بودن‌زمان
– isotropy of T. همسان‌بودن زمان
Top فرفره
– asymmetrical T. فرفرهٔ نامتقارن
– fast T. فرفرهٔ سریع
– spherical T. فرفرهٔ کروی
– symmetrical T. فرفرهٔ متقارن
Torque لنگر پیچشی
Turning points نقاط بازگشت
Two–body problem مسئلهٔ دوجسم

Uniform field میدان یکنواخت
Unperturbed منحرف نشده

Variation تغییر
– first V. تغییر اول
Velocity سرعت
– angular V. سرعت زاویه‌ای
– generalised V. سرعت عمومی
– sectorial V. سرعت سطحی
– translational V. سرعت انتقالی
Virial ویریال
– V. theorem قضیهٔ ویریال

Well چاه، چال
– potential W.
چاه پتانسیل ، چال پتانسیل

راهنمای واژه‌ها