

گستره و شدت خاصه ایست بر اثر فرکانس و در شب Plich Ke در درجه اول است که در این حالت که در این شکل دیده می شود
 در این حالت که در این شکل دیده می شود در این حالت که در این شکل دیده می شود

۱- Intensive (ناخون در)

۲- Extensive (خون در)

Intensive ها، کمیت های هستند که با تعداد سیستم تغییری ندارند و Extensive ها، کمیت های هستند که با تعداد سیستم تغییر می کنند. اینها را می توان به این صورت بیان کرد:
 مثلاً جگانه برای سیستم های یکدانه فرقی نمی کند که یک قسمت کوچک از سیستم را در یک قسمت بزرگ از سیستم را در یک
 قسمت Intensive است ولی تعداد ذرات یک قسمت Extensive است چون آن سیستم را قسمت کنیم تعداد ذرات تغییر می کند
 ولی جگانه فرقی نمی کند یا مثلاً یک قسمت Intensive است ولی حجم یک قسمت Extensive است و آن سیستم را به دو قسمت
 تقسیم کنیم، حجم هم به دو قسمت تقسیم می شود ولی فشار به دو قسمت تقسیم نمی شود
 معمولاً اگر یک جور انرژی (که معلوم نیست) داشته باشیم (dx) ، همیشه بصورت ضرب یک قسمت Intensive (در یک قسمت
 Extensive است:

$$dx = y dz \quad \text{in. ex} \quad \text{کار: } dw = p dv$$

intensive extensive

$$dQ = T ds \quad \text{تغییر انرژی گرمایی}$$

$$dG = \mu dn \quad \text{انرژی آزاد گیبس}$$

تغییرات سیستم: قابلیت سیستم برای انجام کار از یک طرف به طرف دیگر

در همه مثالها با آنکه خواص حرکی و دما داشته باشد (تفاوت از جهت حرکت مکانیکی نیست و از جهت دما و انرژی درونی نیست)
 در یک تغییرات یا اثرش چیزی وجود داشته باشد یا نه، اینها هم تفاوت دارند

$P_1 \quad \quad P_2$	$T_1 \quad \quad T_2$	$\mu_1 \quad \quad \mu_2$
<p>اگر دما و دما با یکدیگر هم تغییرات داشته باشند این اختلاف باعث اثرش تعداد ذرات می شود که در این حالت جایی که اینها با هم تفاوت دارند</p>	<p>اگر دما و دما با یکدیگر هم تغییرات داشته باشند این اختلاف باعث اثرش تعداد ذرات می شود که در این حالت جایی که اینها با هم تفاوت دارند</p>	<p>اگر دما و دما با یکدیگر هم تغییرات داشته باشند این اختلاف باعث اثرش تعداد ذرات می شود که در این حالت جایی که اینها با هم تفاوت دارند</p>

مثلاً در واکنش $Na + Cl \rightarrow NaCl$ وقتی فاکتور در جهت $NaCl$ است
 یعنی تغییرات سیستمی در طرف راست بیشتر از طرف چپ بوده که به آن سمت
 جریان پیدا کرده و متعادل می شود.

اما اگر بصورت $NaCl \rightleftharpoons Na + Cl$ باشد، هرگز سیستم Na ها به مقدار او فرجه سیستمی که $NaCl$ است را به سیستم
 سیستمی که $NaCl$ است در جهت مخالف آن حرکت می کند که وارد می شود، همان قدر هم خارج می شود.

پس همیشه وقتی کمیتها Intensive به یکی تغییر کنند باعث ایجاد اثرش می شود و اگر اینها با هم تفاوت دارند
 پس این دو کمیت هم هستند که خود تفاوت اولیها را می کنند

التمه برای سیستمی که Order N در حدود 10^{23} باشد، آرایش‌های مختلف یعنی تعداد درصدهای مختلف می‌تواند بسیار زیاد باشد.
 حالتی نشان داده می‌شود:
 مثال:

$$\begin{aligned} \epsilon_3 &= 3 \\ \epsilon_2 &= 2 \\ \epsilon_1 &= 1 \end{aligned}$$

سیستم را فرض کنید که سه حالت انرژی داشته باشد:

توزین می‌کنیم پنج ذره هم داریم.

فقط می‌خواهیم نشان دهیم که حالت ماکروسیک معین می‌تواند از درصدهای میکروسیک مختلف بدست آید.

حالتی شد 5 ذره داریم و سه حالت انرژی ماکروسیک برابر شود: $E=9$ ، حال می‌خواهیم سیستم می‌تواند آرایش‌های می‌تواند و می‌تواند باشد:

$N=5$ $E=9$

میکروصفت

$\{3, 0, 2\}$ $\{2, 2, 1\}$ $\{1, 4, 0\}$ $\{0, 0, 3\}$
 (از آرایش انرژی) (از آرایش انرژی) (از آرایش انرژی) (از آرایش انرژی)
 در آرایش در آرایش در آرایش در آرایش

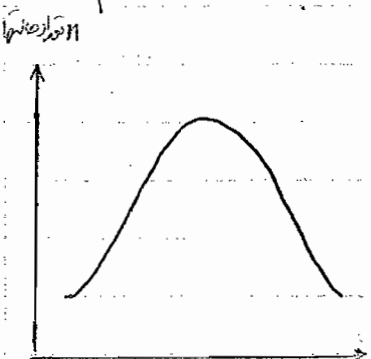
$N = \sum n_i = 5$ $N = 2 + 2 + 1 = 5$ $N = 5$ $N \neq 5$
 که این را می‌توانیم عطفاً دارد عطفاً دارد عطفاً دارد
 $E = 3 \times 1 + 0 \times 2 + 2 \times 3 = 9$ $E = 2 \times 1 + 2 \times 2 + 1 \times 3 = 9$ $E = 9$ $E = 9$
 انرژی: $E = 3 \times 1 + 0 \times 2 + 2 \times 3 = 9$

حال اگر تعداد N را بیشتر کنیم، طبق تعداد این میکروسیک‌های مختلف که می‌تواند بسیار انرژی معین ماکروسیک برسد، بیشتر می‌شود.

به هر حال از درصدهای میکروسیک (با $N=5$ و $E=9$) می‌تواند که $N=5$ و $E=9$ باشد و یک ماکروصفت هم داریم. اما می‌توانیم تعداد زیاد ماکروصفت داشته باشیم و می‌تواند با هر کدام از آنها تعداد زیاد میکروصفت هم داریم پیدا کنیم.

التمه سیستم می‌تواند میکروصفت‌ها بسیار متنوع باشد، مثال می‌تواند،
 و در هر زمان هم اینها به یک ماکروصفت منحصر نمی‌شوند و اینها هم متنوعی دارند.

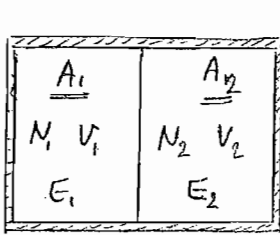
$$\begin{aligned} \{5, 0, 0\} &\rightarrow E=5 \\ \{0, 5, 0\} &\rightarrow E=10 \\ &\vdots \end{aligned}$$



توزین می‌کنیم عدد در حال را بگیریم و مثلاً چون در اینجا 5 ذره فقط وجود دارد که یک آن را می‌توانیم بگیریم و می‌توانیم از درصدهای زیاد نشان نمی‌توانیم این را در اینجا نشان رو می‌توانیم بگیریم که سیستم چگونه در این حالت‌ها را می‌توانیم و می‌توانیم با یکدیگر در درصدهای اینها حساب کنیم و می‌توانیم از این کارها انجام دهیم، می‌توانیم با این انرژی‌ها ماکروسیک‌ها را (E) از این سیستم گرفته است و تعداد ذرات هم گرفته است این انرژی‌ها ماکروسیک هم یک برآورد می‌تواند که می‌تواند بود. تعداد حالتها را می‌توانیم و می‌توانیم در هر انرژی چند حالت قرار می‌گیرد و می‌توانیم و می‌توانیم نت توزین می‌تواند شکل معالی بگیرد. اگر چه که آرایش میکروصفتها فرق می‌کند، ولی می‌تواند که در یک انرژی قرار می‌گیرد و می‌تواند ماکروسیک‌ها را

قرار می‌گیریم که سیستم‌ها E و N، A هستند و تصور کنید که کارکنان سیستم را صورت کارکنان یک شرکت کنید.

بگذاریم A یک کارکن است و به یک روشی برای شروع این سیستم بپردازیم و یک کارکن است. اما در این کارکنان هم قرار می‌گیرد که معنی فیزیکی در هم که همان نیروی تولید است.
قبل از اینکه سیستم را راه‌اندازی کنیم، اول باید رابطه بین شرکت و کیفیت تولید را بدست آوریم.



سیستم به این صورت در نظر می‌گیریم:

هر سیستم انرژی است و هیچ ارتباطی با جایی ندارد و سیستم A0 یک سیستم بسته است

$$A_0 = A_1 + A_2$$

$\Omega_1(E_1, N_1, V_1)$ تعداد حالت‌های قابل حصول برای سیستم A_1 است وقتی انرژی آن E_1 ، تعداد ذرات N_1 و حجم آن V_1 باشد. $\Omega_2(E_2, N_2, V_2)$ تعداد حالت‌های قابل حصول برای سیستم A_2 است. هیچ نیرویی ندارد که شکل یا حجم A_1 و A_2 یکدیگر را تغییر دهد. به سبب E_1, N_1, V_1 یک صورت می‌تواند داشته باشد و به سبب E_2, N_2, V_2 یک صورت دیگر می‌تواند داشته باشد.

وقتی که کنیم این دو سیستم A_1 و A_2 به صورتی با هم بهمکنش کنند، فقط برای کارکنان می‌کنیم N و A آنها تغییر کنند و فقط یک تغییر کنند. در صورتی که هیچ نیرویی در میان سیستم وجود ندارد. اگر ما تغییر کنند یعنی اینکه در سیستم کل هیچ کارکنانی انجام نمی‌دهند و به سبب نمی‌شود که سیستم فشرده و انبساط شود. به سبب E تغییر کند بدون اینکه N و A تغییر کنند در واقع گویا در دو جهت می‌شود.

چون هر سیستم انرژی است، پس:

$$E_0 = E_1 + E_2 = \text{ثابت}$$

حال هرگاه سیستم شمارش $\Omega_1(E_1, N_1, V_1)$ به هم صورت است، $\Omega_2(E_2, N_2, V_2)$ را هم دارد، اصل شمارش می‌تواند صورتها را قابل حصول برای هر دو تعداد صورتها باشد، پس:

$$\Omega(E_1, E_2) = \Omega_1(E_1) \cdot \Omega_2(E_2)$$

اما فرض کنید در $\Omega_1(E_1, N_1, V_1)$ در تغییر وجود ندارد و یک تغییر می‌شود و وجود ندارد می‌تواند تغییر بین E_1 و E_2 یک قید را وجود دارد، پس کل سیستم انرژی است، پس:

$$\Omega'(E_1, E_2) = \Omega_1(E_1) \cdot \Omega_2(E_0 - E_1)$$

حال سؤال این است که به ازای چه مقدار از E_1 کل سیستم به درجهت تعادل است؟ قید حالت تعادل را تعریف کنیم یعنی به ازای چه مقدار از E_1 این سیستم بیشترین حالتها را قابل حصول را دارد. چون باید به برابر با وقت انرژی، Ω' در حقیقت تابعی

است از E_1, E_0 ، این به E_1 در حقیقت وابسته است. به ازای هر E_1 ، این سیستم کل می تواند یک تعداد حالت قابل حصول داشته باشد، مثلاً به ازای $E_1 = 1$ یک مقدار ...، و به ازای $E_1 = 2$ یک مقدار ...، و به ازای $E_1 = 3$ یک مقدار ... و بیشتر حالت را دارد. هر چه تعداد حالتها قابل حصول بیشتر باشد، سیستم سریعتر به حالت تعادل می رسد. به عنوان یک مثال در جدول گفته، اگر در یک اتاق ۲۰ آدم بزنند، اگر تعداد صافه های نرسن ۵۰۰ ثابت باشد، اینطور سریعاً می نشینند، اما اگر صافه ها ۱۵۰۰ ثابت باشد، مدت زمان بیشتری طول می کشد و در نتیجه به حالت تعادل می رسند. هر چه تعداد حالتها قابل حصول بیشتر باشد، سیستم به تعادل نزدیک تر می ماند.

این ما در ضرایب محتمل ترین حالتها را پیدا کنیم، کاری که همان کار این است که از آن نسبت به E_1 مشتق کنیم و سیستم را این تغییرات نسبت به E_1 صفر کنیم.

اسم کل حالتها را می گذاریم:

$$\Omega^*(E_0) = \text{کل حالتها}$$

$P(E_1)$ یعنی احتمال اینکه سیستم A_1 انرژی E_1 را داشته باشد:

$$P(E_1) = \frac{\Omega^*(E_1, E_0)}{\Omega^*(E_0)}$$

ثابت \rightarrow

یعنی مثلاً کل حالتها برابر ۱۰۰۰۰۰ باشد در هر ۱۰۰۰۰ از این حالتها انرژی سیستم E_1 (مثلاً A_1) باشد، احتمال اینکه سیستم در انرژی E_1 باشد برابر آنست که با این ۱۰۰۰۰۰ است به کل حالتها می بیند!

با انرژی سیستم در A_1 کار می نماند، بنا بر این وقت سیستم اول از انرژی E_1 باشد سیستم دوم از انرژی $E_0 - E_1$ می باشد.

در رابطه با $\Omega^*(E)$ یک چیز ثابت است، این:

$$P(E_1) \propto \Omega_1(E_1) \Omega_2(E_0 - E_1)$$

کل اینها هم محتمل ترین حالتها را می سازد، یعنی بیشترین رابطه با \ln است، این:

$$\left. \frac{dP(E_1)}{dE_1} \right|_{E_1 = \bar{E}_1} = 0$$

یعنی انرژی ثابت تعادل

$$\text{پس: } \frac{\partial \Omega_1(E_1)}{\partial E_1} \Omega_2(E_0 - E_1) + \Omega_1(E_1) \frac{\partial \Omega_2(E_0 - E_1)}{\partial (E_0 - E_1)} \frac{d(E_0 - E_1)}{dE_1} = 0$$

$E_2 = E_0 - E_1 \rightarrow \frac{dE_2}{dE_1} = -1$ چون -1

$$\Rightarrow \frac{1}{\Omega_1} \frac{\partial \Omega_1(E_1)}{\partial E_1} \Big|_{E_1 = \bar{E}_1} = \frac{1}{\Omega_2} \frac{\partial \Omega_2(E_2)}{\partial E_2} \Big|_{E_2 = \bar{E}_2}$$

از این برداشت می شود در حقیقت معرفت مشتق لگاریتمی است، این:

$$\left. \frac{\partial \ln \Omega_1}{\partial E_1} \right|_{E_1 = \bar{E}_1} = \left. \frac{\partial \ln \Omega_2}{\partial E_2} \right|_{E_2 = \bar{E}_2} = \beta \rightarrow \frac{1}{\text{انرژی}} \quad \textcircled{D}$$

بنابر این اگر این سیستم بخواهد در حال تعادل باشد، رابطه بین β و β' باید مشتق β نسبت به β' را برابر مشتق β' نسبت به β قرار می‌گیرد.

این صفت انرژی بود و هنوز ترمودینامیک را وارد این قضیه نکرده ایم. می‌فهمیم یک معنی فیزیکی برای β پیدا کنیم و ببینیم β چه نوع کمیتی فیزیکی هست!

اولاً بدانیم β برابر $(\frac{1}{kT})$ است، چون k که تعداد حالت است که نسبت به انرژی مشتق گرفته می‌شود.

بنابراین با ترمودینامیک k می‌فهمیم که:
$$\beta = \frac{1}{kT}$$

البته نسبت به این که فقط ارتباط بین k و ترمودینامیک هست و هنوز ما هیچ راهی را بدست نیاورده ایم که چگونه برای این سیستم k را پیدا کنیم و هنوز وارد داستان آن هم نشده ایم یعنی پیدا کردن k که β را پیدا کنیم، و هر جا که β را پیدا کنیم به چه دردی می‌خورد و چه می‌توانیم از آن استنباط کرد.

برای اینکه معنی فیزیکی β را پیدا کنیم، بر می‌گردیم به سراغ ترمودینامیک و می‌بینیم که در ترمودینامیک وقتی که k را دانسته باشیم و اگر ما k را ندانیم، از چه کمیتی استفاده می‌کنیم.

β به ما می‌گوید که چگونه سیستم به حالت تعادل می‌رسد و فقط به ما می‌گوید که سیستم در حالت تعادل است.

حرفه ترمودینامیک قابل حصول بیشتر شود، آن حالت تعادلی است و مکانیک آماری که ما بر سرش می‌کنیم، مکانیک آماری تعادلی است. البته چگونه سیستم از یک حالت تعادلی به یک حالت تعادلی می‌رسد، اصلاً کار به این نیست (مکانیک آماری دکتر ا. کاشانی) ما می‌بینیم که ما بر سرش می‌کنیم فقط مکانیک آماری تعادلی است، و البته به حالت تعادل می‌رسد، اما به این است و بنظر این است که این حالت تعادلی تعادلی سیستم است، و باید بود، اصلاً تعادلی سیستم است.

بنظر این است که حرفه ترمودینامیک قابل حصول بیشتر باشد، آن حالت تعادلی است، و البته به حالت تعادل می‌رسد (و به این اشاره را وسط می‌آوریم) یک داستان گریز است و بحث ما نیست. مکانیک آماری یا مکانیک آماری تعادلی است و به تعادلی می‌ماند.

نکته دیگری که در مورد این است که در رابطه (1) انرژی ϵ ، d می‌گذشتیم، فرقی نمی‌کند، چون تنها متغیر ما انرژی بود و فرض کردیم این طور که در اینجا N و V ثابت باشد، با این حال هر جا که در انتقالات N و V زنده شود، چون کمیت ثابت داریم که مشتق گرفته می‌شود، نسبت به β از این کمیت است و وقتی $\frac{d}{d\epsilon}$ می‌زنیم یعنی در حقیقت منظور N و V ثابت است.

سوالی پیدا کردیم معنی فیزیکی β ، بر می‌گردیم سراغ ترمودینامیک. در ترمودینامیک در آنجا که انتقال گرما داریم و در واقع داریم که dQ انرژی بیرون می‌رود که برابر است با:

بنابراین حاصل است:
$$dS = \frac{dQ}{T}$$
 (17)

علاقت d یعنی اینکه (توانایی کامل نیست، یعنی اینکه بعضی دارایی‌ها می‌توانند گرما را داده شود و در واقع به بیرون می‌رود). می‌دانیم که dQ انرژی از هر جا که بیرون می‌رود و اصطلاح انرژی بیرون می‌رود نسبت به dQ به بیرون می‌رود است. اما اگر در مورد اصطلاح

طالع است.
 برای کیفیت انرژی یک قانونی داشته‌یم که به آن قانون دوم ترمودینامیک می‌گویند که می‌گوید همیشه تغییرات انرژی در یک سیستم
 مثبت است. تغییر می‌کند که از انرژی داشته‌یم به نوعی معروف به ظرفیت سیستم است که نشان می‌دهد چقدر بار که اندازه توانایی ندارد
 حالتها می‌تواند حصول در واقع همان انرژی است.
 رابطه (II) در واقع یعنی اینکه تغییر در ظرفیت کوپل گرایی که به انرژی تغییر درجه (کار و ادا) با به سیستم می‌دهیم را آن انرژی اسم
 می‌گذاریم.

انرژی یک کیفیت Extensive است، یعنی اینکه:
 کل سیستم
 $\Delta S^0 = \Delta S_1 + \Delta S_2$

الگوریتم کنیم ΔS حالا تغییر انرژی، تغییر کند در این صورت می‌توانیم بنویسیم:
 $\Delta S^0 = \frac{\partial S}{\partial E_1} \Delta E_1 + \frac{\partial S}{\partial E_2} \Delta E_2$ (III)

این ΔE_2 را هم به صورت قابل می‌گذاریم که نسبتاً برابر ΔE_1 - است چون سیستم انرژی است:
 $\Delta E_2 = \Delta E = - \Delta E_1$ (IV) خوبه کنیم

قانون دوم ترمودینامیک
 $\Delta S^0 = \left(\frac{\partial S}{\partial E_2} - \frac{\partial S}{\partial E_1} \right) \Delta E$ (V) سهاری برای حالتی است که سیستم در حالت تعادله

چون $\Delta E > 0$ فرض کنیم
 $\frac{\partial S}{\partial E_2} - \frac{\partial S}{\partial E_1} \geq 0$ (VI) در حالت تعادل
 بنابراین: $\Delta S^0 = 0$ (II) $\rightarrow dQ = 0$ در حالت تعادل

در حالت تعادل (علاقه ما)
 $\frac{\partial S}{\partial E_2} = \frac{\partial S}{\partial E_1} = \frac{1}{T}$ (VII) دما مطلق

که از ترمودینامیک می‌توان این نتیجه را گرفت که:
 $\frac{\partial S}{\partial E} \Big|_{N,V} = \frac{1}{T}$ (VII)

ترمودینامیک می‌گوید طبق رابطه (VII) برابر $\frac{\partial S}{\partial E_1}$ و برابر یک ثابت است که آن ثابت $\frac{1}{T}$ می‌باشد. این نتیجه معلوم است
 چون وقتی یک سیستم با سیستم دیگر در حالت تعادل باشد، باید دماها در تمام گرایش‌های مادی برابر باشند.

باید ضریب در هم از اندازه پیدا کنیم و طبق رابطه (I) داریم که طبق یک چیزی ثابت به E_1 بر این سیستم ۱، باید برابر طبق همان
 دو صورت نسبت به E_2 بر این سیستم ۲ باشد و باید برابر یک ثابت هم باشند. این می‌توانیم از رابطه (I) و (VII) نتیجه بگیریم.

یعنی که باید مطابق با $L \ln L$ بدو یک ثابت باشد
 $S = k \ln L + S_0$ (VII)

ثابت که اهمیت ندارد چون برای رابطه که مشتق آن اهمیت دارد و نه فرم آن.

$$\Delta S = K \ln \Omega$$

رابطه (VI) چون که E هم در میان گرفته شده پس $\frac{1}{T}$ درون رمانیون است و پس در رابطه (VII) چون $\ln \Omega$ بیرون رمانیون است پس برای اینکه $K \ln \Omega$ هم در میان باشد باید K را بیرون از پرانتز داشته باشد پس K یک ثابت بعد از آن است.

پس تا اینجا ما از روشی که گفتیم استفاده کردیم، رابطه (I) از مکانیک آماری نتیجه شد برای سیستمی که در حالت تعادل هستند و N و V ثابت هستند، از ترمودینامیک هم رابطه (VII) و (VI) درست آمد، از تعادل این دو نتیجه درست آمده، نتیجه میگیریم که $\ln \Omega$ باید به گونه ای به که ربط داشته باشد.

فقط این نتیجه ضعیف هم دور از نظر نمی آید برای آنکه در این به عنوان یک نظریه نیست و صرفاً تعادل ترمودینامیک قابل حصول نیست پس آنرو پس هم بیشتر می شود.

رابطه (I) نتیجه ای است که از ترمودینامیک و مکانیک آماری می آید پس در رابطه (II) فقط از ترمودینامیک است و قابل اثبات نیست. رابطه (I) در واقع به هم تراز است و در نظر می آید و می گویند آن ترمودینامیک و مکانیک آماری یک چیز است پس می توانیم بگوییم در آن صورت نتیجه می آید که در ترمودینامیک داریم از آن استخراج می شود و ترمودینامیک اثبات نیست.

برای هر سیستم وقتی مکانیک آن تمام می شود باید مکانیک آماری هم برای آن توسعه و باید صافاً را ترمودینامیک می آید پس این استخراج کنیم.

روابط (I) و (VII) دو چیز جدا از هم هستند، رابطه (VII) را از تجربه می آید و رابطه (I) هم چیزی است که ما آن شروع کردیم. حال ربط این دو بصورت (VIII) می آید البته یک فرض است پس که سیستم در حال تعادل یعنی تعداد حالتها قابل حصول در ربط به آن ثابت ماکرو و میکرو باشند تا به دست آوریم.

در نهایت برای ما ΔS اهمیت دارد که بصورت زیر است بعداً ΔS هم می آید که طبق Ω را ترمودینامیک می آید پس $\ln \Omega$ را از همه کلمات میکرو میکرو می آید پس ما رابطه زیر که را بدست می آوریم و وقتی که را بدست آوریم یعنی اینکه ترمودینامیک بدست آمده و ما در متن آن و انواع مشتق گیریم ها از آن، یا رابطه های مختلف ربط ترمودینامیک را می آید پس استخراج کنیم.

$$\Delta S = K \ln \Omega \quad (VIII)$$

گاهی که ما آنرا می گیریم هر قایم بقایه است که حالت تعادل از روش آماری و ترمودینامیک یعنی صافاً همانطور هم که گفتیم این روش (VII) تعریف می شود آنرو پس را بر این ما راحت تر می کند.

حالت آماری این معنی به ندرت در مورد اطلاعات هم صحبت می کند و اثر سیستم فقط یک حالت قابل حصول دانسته می آید یعنی اینکه دقیقاً می دانیم سیستم چیست و یک حالت بیشتر ندارد. حال آنکه سیستم Ω حالت قابل حصول دانسته در بصورت اطلاعات ما از سیستم گفته شده و در هر کلمه می توانیم از این حالت باشد، در واقع هر چه در تعداد حالتها قابل حصول سیستم بیشتر باشد اطلاعات ما از سیستم کمتر می شود یا به عبارتی آنرو پس بیشتر تناظر با اطلاعات کمتر از سیستم است.

آنرو تعداد حالتها قابل حصول سیستم برابر است با $\ln \Omega$ پس ما از سیستم کلمات مطلع هستیم، بنابراین آنرو رابطه (VII) ثابت است که را بر این می آید و ما می توانیم بگوییم که هم برابر صفر می شود و این کلمات به اندازه ای است که می توانیم از آن بگوییم دانسته باشیم. از آنجا که در همه کلمات تغییرات آنرو پس اهمیت دارد پس این ثابت است که جنبه برای ما اهمیت ندارد.

در واقع اهمیت رابطه (VII) این است که این رابطه می آید پس این است بین میکرو و ماکرو (که) و ماکرو حالتها (که) و این پس بین میکرو و

و ما کو ترکیب است.

پس با توجه به ثابت K در رابطه (VIII) ، β در رابطه (I) برابر می شود با:

$$(I), (VIII) \Rightarrow \beta = \frac{1}{KT}$$

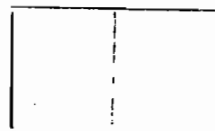
که K باید از دینامیک انرژی باشد و T در واقع دمای مطلق است که در ترمودینامیک آنرا تعریف می کنیم.

قبل از آنکه سراغ محاسبه Ω برویم، ببینیم انرژی یک سیستم E تعداد را مشخص می کنیم پس چه ثابت می آید.

زودن کنیم در سیستم در نظر فقط انرژی تغییر نکند، بلکه تعداد ذرات هم تغییر کند و دوباره هاجم تیرانده های زودن یعنی هم تغییر

کند، پس داریم:

تعداد ذرات سیستم $\Omega^*(E^0, N^0, V^0)$:



که می بینیم که داریم دو سیستم را

$$\text{شرطاً} \begin{cases} E^0 = E_1 + E_2 \\ V^0 = V_1 + V_2 \\ N^0 = N_1 + N_2 \end{cases} \quad (1)$$

با دینامیک حالت های قابل هستیم یعنی حالت هایی که می تواند که انرژی از سیستم سمت راست به سیستم سمت چپ منتقل می شود و برعکس از سیستم سمت چپ به سیستم سمت راست منتقل شود، همان طوری که در مورد دینامیک تعداد ذرات.

Ω^0 را بر حسب $E_1, N_1, V_1, E_2, N_2, V_2$ می نویسیم و از آنجا که E_1, N_1, V_1 و E_2, N_2, V_2 را می نویسیم چون آنجا با توجه به شرط

$$\Omega^0(E_1, V_1, N_1, E_2, V_2, N_2) = \Omega_1(E_1, V_1, N_1) \Omega_2(E_2, V_2, N_2) \quad (2)$$

حالا می خواهیم ببینیم در Ω^0 بین E_1, V_1, N_1 و E_2, V_2, N_2 چه تفاوتی است که ضروری است N, V, E (صورت اول) چون در اینجا Ω^0 به سه متغیر است باید مشتق جزئی Ω^0 نسبت به هر کدام از آنها صفر باشد یعنی:

$$\left. \frac{\partial \Omega^0}{\partial E_1} \right|_{E_1=E_1, V_1, N_1} = 0 \quad \left. \frac{\partial \Omega^0}{\partial V_1} \right|_{V_1=V_1, E_1, N_1} = 0 \quad \left. \frac{\partial \Omega^0}{\partial N_1} \right|_{N_1=N_1, V_1, E_1} = 0$$

(3)

حالا اگر می خواهیم در این روابط به صورت مشتق از Ω^0 در E_1, V_1, N_1 و مشتق از Ω^0 در E_2, V_2, N_2 برابر می شود که به صورت به مشتق Ω^0 را (E_2, V_2, N_2) نسبت به (E_1, V_1, N_1) برابر -1 می شود در نهایت به صورت مشتق Ω^0 نسبت به E_1, V_1, N_1 می آید این

$$\frac{\partial \ln \Omega_1}{\partial E_1} = \frac{\partial \ln \Omega_2}{\partial E_2} \equiv \beta = \frac{1}{KT}$$

توازن گرمایی

$$\frac{\partial \ln \Omega_1}{\partial U_1} = \frac{\partial \ln \Omega_2}{\partial U_2} \equiv \eta$$

توازن مکانیکی

$$\frac{\partial \ln \Omega_1}{\partial N_1} = \frac{\partial \ln \Omega_2}{\partial N_2} \equiv \{$$

توازن شیمیایی

بدون دیاگرام

از طرفی دیدیم که $\ln \Omega$ نسبت به انرژی لوج، انرژی گرمایی و به طور مشابه نگاه کنیم به معنی که تغییرات انرژی نسبت به حجم برابر تعداد مکانیک سیستم بدون به نسبت باشد، تغییرات انرژی نسبت به تعداد ذرات و قوت تعادل شیمیایی باشد، اینها به طور یک نسبت باشد. بطور کلی تعادل ترمودینامیک یعنی تعادل مکانیکی، تعادل شیمیایی و تعادل گرمایی.

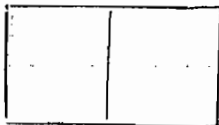
برای پیدا کردن این نسبت ها $(\beta, \eta, \{)$ این طور عمل می کنیم که تغییرات $\ln \Omega$ را به معنی انرژی و تغییرات حجم و تغییرات ذره در نظر بگیریم، این:

$$d \ln \Omega = \frac{\partial \ln \Omega}{\partial E} dE + \frac{\partial \ln \Omega}{\partial U} dU + \frac{\partial \ln \Omega}{\partial N} dN$$

$$\Rightarrow d \ln \Omega = \beta dE + \eta dU + \{ dN$$

$$\Rightarrow dE = KT d \ln \Omega - KT \eta dU - KT \{ dN \quad (4)$$

dE را سه قسمتی که حسیت یعنی تغییرات انرژی، حال یک سیستم فرض کنیم که هم مشاهده انرژی آن تغییر کند، انرژی به چند صورت می تواند تغییر کند، یکی با تبادل گرما است، انرژی به سیستم گدا و انرژی $(dQ > 0)$ در آن صورت انرژی سیستم زیاد شود.



$$\downarrow \quad dQ > 0 \rightarrow dE > 0$$

دلیل تغییر انرژی می تواند ناشی از کار باشد، اگر کار کنیم روی سیستم است، اگر کارها روی سیستم می توانیم تغییرات جهت کار انجام شود، به عبارتی نسبت آن وقت که یعنی حجم کاهش پیدا کند، این اثر هم کاهش پیدا کند $(dV < 0)$ در آن صورت انرژی سیستم با کم شود:

$$\downarrow \quad dV < 0 \rightarrow dE > 0$$

اگر تعداد ذرات هم زیاد شود، چون هر کلام از ذرات انرژی را به این انرژی می دهد، این:

$$\downarrow \quad dN > 0 \rightarrow dE > 0$$

$$A = E - TS = E - T S(N, V)$$

$$H = E - V \left(\frac{\partial E}{\partial V} \right)_{S, N} = E + PV$$

$$G = E - T S \left(\frac{\partial E}{\partial S} \right)_{N, V} - V \left(\frac{\partial E}{\partial V} \right)_{S, N} = E - TS + PV = \mu N$$

این مقادیر : است

بین dE که در رابطه (4) را با مقادیر زیر بنویسیم :

$$dE = dQ - PdV + \mu dN \quad (5)$$

$$T ds = K T \ln \Omega$$

رابطه (5) و (4) را در کنار هم قرار می دهیم و نتیجه می گیریم است.

از طرف دیگر داریم dS و $K d \ln \Omega$ است پس رابطه (5) را در آن جایگزین کردیم :

$$(4) : dE = K T d \ln \Omega - K T \eta dV - K T \xi dN$$

این می بینیم که عبارت اول یک است، عبارت دوم را هم برابر می نویسیم :

$$PdV = K T \eta dV$$

$$\Rightarrow P = K T \eta \rightarrow \eta = \frac{P}{K T}$$

نتیجه می گیریم که اگر Ω را برابر کنیم (از روش های آماری و ترمودینامیک) تغییرات $\ln \Omega$ نسبت به μ به ما فشار را می دهد.

و عبارت سوم را برابر قرار می دهیم :

$$-K T \xi dN = \mu dN$$

$$\Rightarrow -K T \xi = \mu \rightarrow \xi = -\frac{\mu}{K T}$$

پس می بینیم از آن روش شروع کنیم و از آن نسبت به تغییرات مختلف آنان تغییرات می گیریم و کسب می شود و در نهایت به این می رسیم که از آن

نتیجه آماری تنها کسب می کنیم نسبت و در آن هم از این روش ها می بینیم است که می بینیم

$$A = E - TS \quad \text{از روش آماری}$$

$$G = \mu N \rightarrow \text{نبرد وقتی می شود که بتواند ثابت بود}$$

این نوعی در برابری صاف

$$H = G + TS$$

$$C_x = \left(\frac{dQ}{dT} \right)_x \quad \left\{ \begin{array}{l} C_V = \left. \frac{dQ}{dT} \right|_V = \left. \frac{\partial E}{\partial T} \right|_{N, V} \\ C_P = \left. \frac{dQ}{dT} \right|_P = T \left. \frac{\partial S}{\partial T} \right|_{N, P} = \frac{\partial}{\partial T} (E + PV) = \frac{\partial H}{\partial T} \end{array} \right.$$

پس می بینیم که این روابط با هم برابر است و که می بینیم و که با مقادیر $K T \ln \Omega$ می بینیم.

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \lambda^n f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} x_i$$

E یعنی از جنبه انت نسبت به V, N, μ :

$$E(S, N, V) = S \left(\frac{\partial E}{\partial S} \right)_{N, V} + N \left(\frac{\partial E}{\partial N} \right)_{S, V} + V \left(\frac{\partial E}{\partial V} \right)_{S, N}$$

$$\Rightarrow E = ST + \mu N - PV \Rightarrow E - ST + PV = \mu N = G$$

و بعد روشی برای شکر آن پیدا می‌کنیم، در آن صورت می‌توانیم هم ضرایب آن را بدست آوریم. اسم $KLn\Omega$ را که (آندروسی) می‌گذاریم که نسبت شکر که می‌خواهیم با شکر در سیستم را بدست آید. از این به بعد کارمان با شکر کردن Ω هم باشد برای شرایط مختلف و این یعنی مکانیک آماری. طبق معول می‌توانیم این ضرایب که برای آن می‌رویم ذرات آزاد هستند و باید برای آن ضرایب معروف $PV = NKT$ را بدست آوریم. بعد از این به مثال ترسنگ می‌رویم. این در مثال، چیزهایی هستند که در سیستم حل کنیم. نقشه ضرایب را به این ترتیب مختلف حل کنیم.

در سیستم V, N, μ

حالا قبل از شروع می‌کنیم که می‌خواهیم بدانیم که می‌توانیم این کار کنیم اهمیت داریم، در این ما در صورت می‌رویم نسبت کار می‌کنیم و تعداد ذرات زیاد است و حجم هم بزرگ است و همان به تعداد ذرات و شکر می‌توانیم سیستم را بدست آوریم و این حالتی است که نسبت به شکر در حالت ما در سیستم می‌توانیم کار را Ω می‌کنیم که صورت معادله آن در سیستم نسبت به شکر $Ln\Omega \propto S$ آندروسی سیستم \rightarrow شکر در سیستم \rightarrow شکر در سیستم \rightarrow شکر در سیستم

این می‌توانیم بدانیم و می‌توانیم سیستم را بدست آوریم و از روی آن می‌توانیم با استفاده از روشی که می‌توانیم.

از این جنبه می‌خواهیم برای سیستم خاص این Ω را بدست آوریم و شکر که نسبت به Ω را بدست می‌آوریم. بطور کلی کار اصلی ما در این فصل معادله Ω برای سیستم‌های مختلف است که در شرایط ویژه و شکر را بدست می‌آوریم. حجم ثابت و ... می‌باشد.

اولین شکر که می‌توانیم سیستم است متصل از N ذره، که این ذرات بدون برهم‌کنش هستند و در یک حجم V محبوس هستند. برای شکر Ω باید شرایط مختلف را قرار دهیم و Ω را حساب کنیم. اول می‌توانیم که Ω به شکر نسبت به شکر است. در این حالت هر چه حجم که ذرات را قرار دهیم بزرگتر است، طبیعتاً شکر می‌توانیم که ذرات در آنجا قرار بگیرند بیشتر می‌باشد، یعنی در واقع شکرهای قابل حصول آن، که در این حالت همان مکان می‌باشد. در این می‌توانیم ذرات یک سیستم را حساب می‌کنیم و با فرض V باز می‌توانیم سیستم شکر کنیم (می‌توانیم شکر). وقتی می‌توانیم در یک سیستم شکر کنیم ذرات می‌توانیم در تعدادی از شکرها بینهایت را بدست آوریم و در مکان آنها چون از یک جایی محبوس هستند فقط در اجزاء آن فضا قرار می‌گیرند. شکر Ω در یک شکر Ω می‌توانیم در شکرها قرار می‌دهیم و در فضا V قرار می‌گیرند و شکرها را بدست می‌آوریم.

این حالتها را می‌توانیم حساب کنیم یعنی می‌توانیم که ذرات می‌توانیم قرار می‌دهیم، حال می‌توانیم در فضا قرار می‌دهیم این مکانها را می‌توانیم حساب کنیم. برای ذرات بدست می‌آوریم و در واقع تعداد حالتها قابل حصول بیشتر می‌شود، یعنی به شکر تعداد حالتها (Ω) نسبت به V می‌باشد. و هر چه V بیشتر شود، تعداد حالتها قابل حصول بیشتر می‌شود $\Omega \propto V$ تعداد حالتها قابل حصول را می‌توانیم

از روی روشی که می‌توانیم، برای شکر در این تعداد حالتها نسبت به V است، این برای رویه V^3 می‌باشد، البته این به شکر است.

که ذرات خود را نسبت به هم می‌توانند و همچنین از حجم را اشغال می‌کنند

برای اندازه : $\Omega \propto V^2$
 اگر ذرات خود را نسبت به هم می‌توانند و همچنین از حجم را اشغال می‌کنند، صورت از حجم اصل کم می‌شود و در V خود محدود می‌شود و باید در واقع کم
 که ذره اشغال می‌کند را باید کم کنیم چون برای ذرات بزرگ جسم کمتر می‌ماند، این
 جسم که ذره اشغال می‌کند $\rightarrow V - V_0$: برای اندازه جسم

در این ذره را بدون خود در نظر بگیریم، این هر کلاس مناسب V باشد، بنابراین برای هر کلاس Ω برابر می‌شود:

برای هر کلاس : $\Omega = C(E, N) V^N$ (1)
 که نسبت رابطه به E و N در دسترس V

نسبت $C(E, N)$ را می‌توانیم حدس بزنیم و باید فرضیات بسازیم از سیستم برای اینکه بتوانیم این C را پیدا کنیم.
 ما می‌توانیم این وجود بسیار از کینتیک را از روی Ω محاسبه کنیم، همانطور که همیشه پیش می‌رویم:

$$\frac{P}{T} = \left. \frac{K \partial \ln \Omega}{\partial V} \right|_{E, N} \stackrel{(1)}{=} K \frac{\partial}{\partial V} (\ln C(E, N) + N \ln V) = K \frac{\partial}{\partial V} (N \ln V)$$

چون در C V نداریم
 این تقوین نسبت به V مندرج است

$$\Rightarrow \frac{P}{T} = KN \frac{\partial}{\partial V} \ln V = \frac{KN}{V}$$

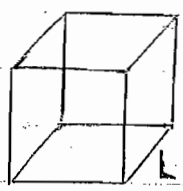
$$\Rightarrow \boxed{PV = NKT} \quad (2)$$

این رابطه معروف را در کینتیک است که از طریق ترمودینامیک هم بدست می‌آید و این را از روی شمارش تعداد حالتها می‌توان بدست آورد.
 این رابطه حالت بسازیم بخوانیم باید C را هم بدست می‌آوریم
 بنابراین رابطه این است که بسازیم چقدر است و وجود دارد که این انرژی E را ایجاد کند. برای این کار باید بدین ترتیب
 تعداد درجه آزادی $3N$

$$E = \sum_{r=1}^{3N} \epsilon_r \quad (3)$$

انرژی تک تک درجه آزادی

در رابطه با این سوال به خودکام است و هر ذره سه درجه آزادی دارد و N ذره هم داریم، این $3N$ درجه آزادی داریم
 برای اینکه به (انرژی تک ذرات درجه آزادی) را حساب کنیم، باید یک مکانیک برای پیدا کردن انرژی ذرات داشته باشیم. در اینجا ما از
 مکانیک کوانتوم استفاده می‌کنیم به خاطر اینکه هر چه را که بسازیم باید، قدر از صلاکت استفاده کنیم یک طرف می‌تواند
 که ما می‌خواهیم ضرایب را درگیر اشغال حساب - کلان کنیم و فقط می‌خواهیم بصورت جمع رابطه (3) را بنویسیم



این مکانیک استفاده می‌کنیم، مکانیک کوانتوم است و فرض می‌کنیم که V بصورت یک جعبه
 با ابعاد L باشد و برای بدست آوردن انرژی می‌توانیم زیر را حل کنیم

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi = \epsilon \psi \quad (4)$$

در رابطه (۴) انرژی و تغییرات E در نوسان یک جرم m در یک فنر با ثابت فنر k برای هر یک از این حالات می توانیم رابطه $E = \frac{1}{2} k x^2$ را بنویسیم. این رابطه برای هر یک از این حالات نیز صادق است.

۴. رابطه انرژی و تغییرات E در نوسان یک جرم m در یک فنر با ثابت فنر k برای هر یک از این حالات می توانیم رابطه $E = \frac{1}{2} k x^2$ را بنویسیم. این رابطه برای هر یک از این حالات نیز صادق است.

$$\begin{aligned} \Psi &= XYZ \\ E &= E_x + E_y + E_z \end{aligned} \quad (5)$$

تکرار این رابطه (۵) در رابطه (۴) می توانیم به سه رابطه $E_x = \frac{1}{2} k x^2$ ، $E_y = \frac{1}{2} k y^2$ و $E_z = \frac{1}{2} k z^2$ دست یابیم. هر یک از این حالات را می توانیم به صورت $E_i = \frac{1}{2} k x_i^2$ بنویسیم. در این صورت انرژی هر یک از این حالات می توانیم به صورت زیر بنویسیم:

$$E_i = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2mL^2} n_i^2 \quad (6)$$

این انرژی هر یک از این حالات می توانیم به صورت زیر بنویسیم:

$$E = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2mL^2} (n_x^2 + n_y^2 + n_z^2) \quad (7)$$

تکرار این رابطه (۷) در رابطه (۴) می توانیم به سه رابطه $E_x = \frac{1}{2} k x^2$ ، $E_y = \frac{1}{2} k y^2$ و $E_z = \frac{1}{2} k z^2$ دست یابیم. هر یک از این حالات را می توانیم به صورت $E_i = \frac{1}{2} k x_i^2$ بنویسیم. در این صورت انرژی هر یک از این حالات می توانیم به صورت زیر بنویسیم:

$$n_x^2 + n_y^2 + n_z^2 = \frac{8mV^{2/3}}{h^2} E \equiv E^* \quad (8) \rightarrow \Omega(1, E, V)$$

این رابطه در واقع به ما می گوید که برای هر یک از این حالات، انرژی آن به صورت $E = \frac{1}{2} k x^2$ است. این رابطه را می توانیم به صورت $E = \frac{1}{2} k x^2$ بنویسیم. در این صورت انرژی هر یک از این حالات می توانیم به صورت زیر بنویسیم:

تکرار این رابطه (۷) در رابطه (۴) می توانیم به سه رابطه $E_x = \frac{1}{2} k x^2$ ، $E_y = \frac{1}{2} k y^2$ و $E_z = \frac{1}{2} k z^2$ دست یابیم. هر یک از این حالات را می توانیم به صورت $E_i = \frac{1}{2} k x_i^2$ بنویسیم. در این صورت انرژی هر یک از این حالات می توانیم به صورت زیر بنویسیم:

$$n_x, n_y, n_z = (1, 1, \sqrt{E^* - 2}), (1, \sqrt{E^* - 2}, 1), (1, 2, \sqrt{E^* - 5}), \dots$$

این حالات را می توانیم به صورت $E = \frac{1}{2} k x^2$ بنویسیم. در این صورت انرژی هر یک از این حالات می توانیم به صورت زیر بنویسیم:

تکرار این رابطه (۷) در رابطه (۴) می توانیم به سه رابطه $E_x = \frac{1}{2} k x^2$ ، $E_y = \frac{1}{2} k y^2$ و $E_z = \frac{1}{2} k z^2$ دست یابیم. هر یک از این حالات را می توانیم به صورت $E_i = \frac{1}{2} k x_i^2$ بنویسیم. در این صورت انرژی هر یک از این حالات می توانیم به صورت زیر بنویسیم:

$$\sum_{r=1}^{3N} n_r^2 = \frac{8mV^{2/3}}{h^2} E \equiv E^* \quad (9)$$

این رابطه در واقع به ما می گوید که برای هر یک از این حالات، انرژی آن به صورت $E = \frac{1}{2} k x^2$ است. این رابطه را می توانیم به صورت $E = \frac{1}{2} k x^2$ بنویسیم. در این صورت انرژی هر یک از این حالات می توانیم به صورت زیر بنویسیم:

تکرار این رابطه (۷) در رابطه (۴) می توانیم به سه رابطه $E_x = \frac{1}{2} k x^2$ ، $E_y = \frac{1}{2} k y^2$ و $E_z = \frac{1}{2} k z^2$ دست یابیم. هر یک از این حالات را می توانیم به صورت $E_i = \frac{1}{2} k x_i^2$ بنویسیم. در این صورت انرژی هر یک از این حالات می توانیم به صورت زیر بنویسیم:

$$\Omega = C(E, N) V^N$$

در سیستم با همان انرژی و وابسته که در رابطه (۹) داریم، آیا می توانیم اطلاعات بیشتری پیدا کنیم. اگر به رابطه (۹) توجه کنیم طرف سمت چپ فقط به N وابسته است (یعنی در ربع نور فقط N وجود دارد)، در رابطه (۱) وابسته به E و این را داریم و پس وابسته به V را پیدا کرده بودیم و به صورت $N \propto V^{2/3} E$ وابسته به E را می توانیم. اما اکنون در رابطه (۹) عرضی می که هست وابسته به E و V به صورت $E V^{2/3}$ است

$$(9) \quad \sum_{r=1}^{3N} n_r^2 = \frac{2\pi}{h^2} V^{2/3} E$$

وابسته به E و V

حال یعنی اینکه اگر تعداد انرژی بزرگیم، E به این صورت می باشد:

$$S(E, N, V) = S(N, V^{2/3} E) \quad (10)$$

به هر حال ما می بینیم که وابسته به E و V را داریم و از آن Ln بگیریم و از آنجا که انرژی را نسبت به V داریم، در اینجا می بینیم که رابطه با E و V وابسته به N معلوم نیست و پس وابسته به E و V است به صورت $V^{2/3} E$ می باشد.

کمیته انرژی را می بینیم که وابسته به E و V است و dQ برابر صفواند یعنی تغییر کرد در آن وابسته به E و V است در آن صورت یعنی dS باید صفواند و وابسته به E و V است (سیستم انرژی ثابت است)، آنگاه سیستم انرژی ثابت است و $dQ = 0$ و $dS = 0$ و $V^{2/3} E = cte$ و $E = \frac{cte}{V^{2/3}}$ (۱)

$$dQ = 0 \rightarrow dS = 0 \Rightarrow S = cte \rightarrow V^{2/3} E = cte \rightarrow E = \frac{cte}{V^{2/3}} \quad (I)$$

$$P = \left(\frac{\partial E}{\partial V} \right)_{N, S} \quad (II)$$

از طرفی می دانیم که فشار به این صورت می باشد

$$(I), (II) \Rightarrow PV^{5/3} = const. \quad (III)$$

این رابطه به آنکه در واقع معادله حالت برای سیستم انرژی ثابت می باشد.

حال اگر بخواهیم به شکل حالت در رابطه (۹):

اگر رابطه (۹) را بنویسیم، می توانیم آنرا با معادله یک کوه N توده مقایسه کنیم،

$$x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_N^2 = R^2 \quad (11)$$

معادله یک کوه N توده با شعاع R

به تعبیر آن $3N$ کوه که عادی است، در بعدی یعنی داریم و در هر یک توده یعنی یک پاره خط!

در رابطه (۹) $\sum n_r^2$ که باید حساب کنیم یعنی اینکه مجموع عبارات را پیدا کنیم که در رابطه (۹) صدق کند، یعنی یک کوه

$3N$ توده و در آن با شعاع $\sqrt{E^*}$.

$$(9) \quad \sum_{r=1}^{3N} n_r^2 = E^*$$

در رابطه (۱۱) x_1, x_2, \dots, x_N هر کدام از اعداد مثبت و هم اعداد منفی باشند چنانچه N که به مرکز می باشد مختصات است که

x_1, x_2, \dots, x_N آن هم از اعداد مثبت و هم منفی باشند و پس در رابطه (۹) می بینیم که این n_r فقط اعداد مثبت هستند.

پس رابطه (۹) همان کوه رابطه (۱۱) است به این دلیل که در سمت راست مختصات E^* (به معنی E) است. در رابطه (۱۱)

به علت وجود رانشین عمود بر سطح، در واقع رانج مورد نظر برابر با رانج که را مشخص کند در واقع معادله (11) معادله زیر می شود است. این معادله رانج (11) یعنی در واقع معادله رانج که مورد نظر اصحاب می کنیم (رابطه یک که N تعدادی) را می بینیم. هم که ساده تر از رابطه یک که 3N تعدادی است. در واقع می خواهیم ببینیم که (تعدادی که می خواهیم) به خوبی تناسب است با سطح یک که 3N تعدادی می داریم.

هم می بینیم که N تعدادی را که با N می داریم و نکته این هم که وجود دارد ما در این مسئله هم رانج در نظر گرفتیم، این سطح که مورد نظر با انرژی تغییر می کند و البته انرژی ما که در سطح ما محدود باشد، این سطح تغییر می کند. هم که N تعدادی ما برابر سطح انرژی هستیم که در این انرژی کمتر است و در سطح قرار می گیرند یعنی همان N.

$$\text{هم می بینیم که } N : \sum_{E \leq E} \Omega(E, N, V) = \sum_{E \leq E} \Omega(E, N, V) \quad (12)$$

یعنی اگر یک که N تعدادی می کنیم، این هم آن برابر مجموع سطح می خواهیم که در این آن قرار می گیرند که سطح این که ما از انرژی داریم، این هم سطح می خواهیم که ما داریم است که انرژی آن از سطح شروع می شود تا به E برسد.



از آن می بینیم که حساب کردن طرف چپ رابطه (12) ساده تر از سمت راست آن است که N تعدادی به معادله معادله رانج برابر است با:

$$(11) \quad x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_N^2 = R^2$$

$$\text{هم می بینیم که } V_N(R) = \int \dots \int dx_1 \dots dx_N$$

در شرطی که: $0 \leq \sum_{i=1}^N x_i^2 \leq R^2$

این هم معادله آن می بینیم که داریم فقط وابسته به R، N و البته در این معادله است، این هم که می بینیم که وابسته به N است که ما داریم در R^N یعنی:

$$V_N(R) = \int \dots \int dx_1 \dots dx_N = C_N R^N \quad (13)$$

فاضل است این C_N اصحاب می کنیم. معادله برابر که سه تعدادی داریم.

$$V_3(R) = \frac{4}{3} \pi R^3$$

$$V_2(R) = \pi R^2$$

برای که از معادله تغییر داریم، هم که در این معادله سطح داریم.

از طرف تغییرات هم برابر که N تعدادی برابر سطح که N تعدادی در dR تغییر می کنیم:

$$dV_N = S_N(R) dR \quad (14)$$

$$(15) \quad dV_N = d(C_N R^N) = C_N N R^{N-1} dR = S_N(R) dR$$

برای C_N ، اصلاً C_N از یک طرف و C_N از طرف دیگر است.

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x_1^2} dx_1 = \sqrt{\pi}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x_2^2} dx_2 = \sqrt{\pi}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x_N^2} dx_N = \sqrt{\pi}$$

از x_1, x_2, \dots, x_N که از هم مستقل هستند در روابط V_N و S_N را در نظر بگیرید.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\sum x_i^2} dV_N = \pi^{N/2} \quad (16)$$

$dV_N = dx_1 dx_2 \dots dx_N$

از (15) با C_N در dV_N ضرب کنیم و dR در R از طرف دیگر بنویسیم (در این صورت R^2 از $\sum x_i^2$ می‌آید).

$$\int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\sum x_i^2} dV_N \stackrel{(15)}{=} \int_0^{\infty} e^{-R^2} C_N N R^{N-1} dR \stackrel{(16)}{=} \pi^{N/2}$$

(از $-\infty$ تا $+\infty$)

$$\Rightarrow C_N N \int_0^{\infty} e^{-R^2} R^{N-1} dR = \pi^{N/2} \Rightarrow C_N \frac{N}{2} \Gamma\left(\frac{N}{2}\right) = \pi^{N/2} \quad (17)$$

$\frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{N}{2}\right)$

از طرف دیگر: $n \Gamma(n) = n!$ (18)

$$(17), (18) \Rightarrow (N/2)! C_N = \pi^{N/2} \quad (19)$$

برای C_N و S_N از (13) و (19) استفاده می‌کنیم. C_N و S_N را در V_N و S_N قرار می‌دهیم و از (15) استفاده می‌کنیم.

$$\left. \begin{aligned} (3) \quad V_N(R) &= \frac{\pi^{N/2}}{(N/2)!} R^N \\ S_N(R) &= \frac{2\pi^{N/2}}{(N/2-1)!} R^{N-1} \end{aligned} \right\} (20)$$

$$(14) \quad S_N = \frac{dV_N}{dR}$$

$$N=3 \rightarrow V_3 = \frac{4}{3}\pi R^3, \quad S_3 = 4\pi R^2$$

که V_3 و S_3 را می‌توانیم چک کنیم:

$$N=2 \rightarrow V_2 = \pi R^2, \quad S_2 = 2\pi R$$

$$N=1 \rightarrow V_1 = 2R, \quad S_1 = 2 \rightarrow \text{دو نقطه است و ثابت}$$

$R_i = R$ در $i=1, 2, 3$

حال اگر دریم به رابطه (۹) در آنجا که $\sqrt{E^*}$ داشته باشیم، بنابراین در رابطه (۲۰) R یا $\sqrt{E^*}$ را می‌کنیم:

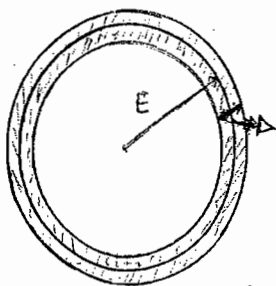
$$(۹): \sum_{r=1}^{3N} n_r^2 = \frac{2\pi V^{2/3}}{h^2} E \equiv E^* \quad (۲۰)$$

این هم یک کره $3N$ بُعدی برای ما می‌باشد:

$$(۹), (۲۰) \Rightarrow \sum_{\text{حالت‌های } 3N \text{ بُعدی}} (E) = \left(\frac{V}{h^3}\right)^N \frac{(2\pi m E)^{3N/2}}{(3N/2)!} \quad (۲۱)$$

در رابطه (۲۰) اگر $(N/2)$ بود، اما در اینجا فقط $3N$ بعدی است.

اما تصور کنید که گفتم تعداد حالت‌های قابل حصول مربوط به سطح مورد نظر است و در واقع این سطح مربوط به این هم رابطه است، برای ما سبب این سطح هم همان رابطه از رابطه (۲۰) استفاده کنیم و این را برای محاسبات بعدی ما می‌توانیم استفاده کنیم، این تکرار می‌کنیم، این معنی که فرض می‌کنیم یک پوسته است، این را می‌توانیم که در این حالت Δ می‌باشد.



این هم مربوط به این پوسته را به دست می‌آوریم، یعنی در واقع محصور حالت‌های را به دست آوریم که انرژی آن‌ها بین $E - \Delta/2$ تا $E + \Delta/2$ می‌باشد. این موضوع برای تعیین به حالت پیوسته نسبت به دردمی مورد

هم این پوسته که تعداد حالت‌ها را می‌دهد، حاصل است، تغییرات هم \sum به تغییرات انرژی ضمیمه تغییرات Δ :

$$\Gamma = \frac{\partial \Sigma}{\partial E} \Delta \quad (۲۱) \quad \frac{3N}{2E} \sum \Delta \quad (۲۲)$$

هم پوسته = تعداد حالت‌های قابل حصول
بین $E + \Delta/2$ تا $E - \Delta/2$.

$$\frac{\partial \Sigma}{\partial E} = \left(\frac{V}{h^3}\right)^N \frac{3N/2}{(3N/2)!} \frac{1}{(2\pi m)^{3N/2}} E^{3N/2} = \frac{3N}{2E}$$

البته ما در نهایت به \ln این رابطه نیاز داریم چون تمام کسرها تغییرات ما نسبت به \ln تعداد حالت‌ها می‌باشد، پس از رابطه (۲۲) \ln می‌گیریم:

$$\ln \Gamma = \ln \sum + \ln \frac{\Delta}{E} + \ln \frac{3N}{2} \quad (۲۳)$$

در اینجا می‌توانیم Δ/E را بگیریم.

از طرفی اگر از رابطه (۲۱) $\ln \sum$ را حساب کنیم می‌شود:

$$(۲۱): \ln \sum = N \ln \frac{V}{h^3} (2\pi m E)^{3/2} - \ln \left(\frac{3N}{2}\right)! \quad (۲۴)$$

چون معمولاً N بزرگ است، از این تقریب استفاده می‌کنیم: \ln فاکتوریل‌ها استفاده می‌کنیم.

$$\ln N! \approx N \ln N + N \quad (۲۵) \quad \text{تقریب استرلینگ}$$

(برای مطالعه بیشتر فاکتوریل‌ها و تابع گاما مراجعه کنید به فصل ۵ از آرفین)

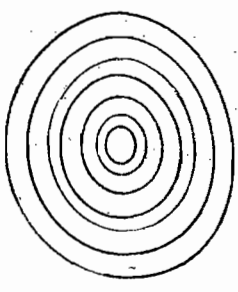
(۲۴), (۲۵) - (۲۳) \Rightarrow

$$\ln \Gamma = N \ln \frac{V}{h^3} \left(\frac{2\pi m E}{3N/2}\right)^{3/2} + \ln \frac{\Delta}{E} + \ln \left(\frac{3}{2}N\right) + \frac{3N}{2} \quad (۲۶)$$

در رابطه (26) جمله اول و جمله آخر ضرب N دارند که N از order 23 است و Ln از آن بزرگتر می شود در صورتی که N در این صورت N معادل از Ln صورتی ضمیمه بزرگ است (البته هم طریقه 105). بین این حالات نسبت N هستند برای ما جدت غالب هستند، پس در تقویب هم ترتیب را طبق (26) را بدین صورت بنویسیم:

$$\text{Ln } \Gamma = N \text{Ln} \left[\frac{V}{h^3} \left(\frac{2\pi m E}{3N} \right)^{3/2} \right] + \frac{3N}{2} \quad (27)$$

در این رابطه این محاسبه را انجام دادیم، بیشتر به خاطر این است که بگویم بارش به انرژی در رابطه کینتیک باقی مانده مربوط به عبارت کم است و اصل سطح وجود ندارد، یعنی با انرژی یک جسم و در فضای 3N تقویب حساب کردیم و در نتیجه تعداد در همان سطح قرار گرفته است اول کم ترتیب می باشد این رابطه Ln هستند و آن تعدادی که در داخل هستند به مراتب کمتر از این سطح هستند و ضمیمه آنها به عنوان یک تصحیح اضافی، اگر این کم را به بالا که حذف کنیم، هم ترتیب بنویسیم



$$\sum_{\epsilon} = \sum_{\epsilon=1}^{E/\Delta E} \sum_{\Delta E}$$

یعنی هم در سطح را به ΔE تقسیم کنیم و سطح این طوری برابر $E/\Delta E$ از این که روش است:

$$\sum_{\Delta E} \leq \sum_{\epsilon} \leq \frac{E}{\Delta E} \sum_{\Delta E} \quad (28)$$

کمتر از $E/\Delta E$ (یعنی از کمترین ΔE)
بزرگتر از $E/\Delta E$ (یعنی از کمترین ΔE)

رابطه (27) تقویب دقیق است و رابطه ما هم رابطه نسبت داشته ایم و هم ما در رابطه ما هم در تقویب اشتباه نداریم و نکته این است که در تقویب (27) هم تا وقتی که از آن Ln قدرتی داریم هم در تقویب بنویس و وقتی Ln گرفتیم به آن صورت بنویس.

$$\text{Ln} \sum_{\Delta E} \leq \text{Ln} \sum_{\epsilon} \leq \text{Ln} \sum_{\Delta E} + \text{Ln} \frac{E}{\Delta E} \quad (29)$$

این صورت به ما آن اشتباه داریم از طریق رابطه (28) میگیریم. از مرتبه $E/\Delta E$ از مرتبه N است، پس $\text{Ln} \frac{E}{\Delta E}$ از مرتبه $\text{Ln} N$ است، اما $\sum_{\Delta E}$ از مرتبه N است، پس $\text{Ln} \sum_{\Delta E}$ از مرتبه $\text{Ln} N$ است. N و $\text{Ln} N$ جمع شود و وقتی N زیاد شود هم ترتیب از $\text{Ln} N$ است به آن صورت بنویسیم، پس هم ترتیب از $\text{Ln} \sum_{\Delta E}$ در مقابل $\text{Ln} \sum_{\epsilon}$ ضمیمه بنویسیم.

$$\text{Ln} \sum_{\Delta E} \leq \text{Ln} \sum_{\epsilon} \leq \text{Ln} \sum_{\Delta E} + \text{Ln} \frac{E}{\Delta E} \rightarrow \text{Ln} \sum_{\Delta E} = \text{Ln} \sum_{\epsilon}$$

یعنی Ln هم نسبت به Ln هم بسیار بزرگتر است و اشتباه از Ln هم بسیار بزرگتر است و اشتباه کنیم این

کتاب هم در واقع رابط (27) را نشان می دهد.

به فرض بدست آمدن این تقسیم یعنی تعداد حالت های قابل حصول، اگر از آنرا در K ضرب کنیم یعنی آنقدری

$$\textcircled{27} \rightarrow S = NKLn \left[\frac{V}{h^3} \left(\frac{4\pi m E}{3N} \right)^{3/2} \right] + \frac{3}{2} NK \quad \textcircled{30}$$

$$E = \frac{3L^2 N}{4\pi m V^{2/3}} e^{\frac{2S}{3NK} - 1} \quad \textcircled{31}$$

پس از آنکه از رابطه بدست آمده، E را بر حسب S حساب کنیم این داریم:

حال تعداد کفیه های مختلف را از این رابطه بدست آورد. معادله (30) را از جزئیات رابطه با هم جدا کردیم که E ، V ، N به نام هم جدا کردیم. حال بر فرض بدست آوردن این مقادیر می توانیم بگوییم که به این تقسیم رسیدیم. حال آنکه برای هم کفیه های دیگر و ترتیب را مثل آدیت در هم داریم:

$$T = \left(\frac{\partial E}{\partial S} \right)_{N,V} \stackrel{\textcircled{31}}{=} \frac{2}{3NK} E$$

$$\Rightarrow E = \frac{3}{2} NKT \quad \textcircled{32}$$

این رابطه برای ما خیلی آسان است. قضیه چهارم هم در واقع همین را می گوید. عدد درجه آزادی $\frac{1}{2} KT$ است، به تعداد این درجه آزادی $\frac{3}{2} KT$ می شود و چون N ذره داریم می شود $\frac{3}{2} NKT$. پس از آنکه از NK استفاده کنیم، هم از این رابطه با هم جدا می کنیم و نهایتاً می توانیم بگوییم:

$$\Rightarrow E = \frac{3}{2} NRT$$

با استفاده از این رابطه با تعویض حجم معیار بویوس می آید:

$$P = \left(\frac{\partial E}{\partial V} \right)_{N,S} = \frac{2}{3} \frac{E}{V} \stackrel{\textcircled{32}}{=} \frac{2}{3V} \times \frac{3}{2} NKT$$

$$\Rightarrow PV = NKT \quad \textcircled{33}$$

و یا کفیه های دیگری می شود:

$$\left. \begin{aligned} \text{ظرفیت گرما در درجه آزادی} \\ C_p = \frac{\partial (E + PV)}{\partial t} \stackrel{\textcircled{32} \textcircled{33}}{=} \frac{5}{2} NK \\ \text{ظرفیت گرما در درجه آزادی} \\ C_v = \frac{\partial E}{\partial t} \stackrel{\textcircled{32}}{=} \frac{3}{2} NK \end{aligned} \right\} \Rightarrow \gamma = \frac{C_p}{C_v} = \frac{5}{3} \quad \textcircled{34}$$

این تقسیم را برای گاز ایده آل از نظر هم می دانیم.

چون راه مناسبی که از هم جدا می شود می توانیم در رابطه با بدست بیاریم، قبل از آنکه در (در واقع نظریه) نظریه جیسین نو که آن هم در یک سری حالت ها خاص جواب می دهد ولی در اینجا حالت نظیر می توانیم شروع کردیم و این کفیت خاص ما که در بدست آوردیم.

البته ما در اینجا هم می بینیم که بعد از آنکه به دست می آید از این تقسیم بعد از آنکه در تقسیم بندی داریم و معادله حالت

رابطه شرایط مختلف نیست یا داریم. مثلا در فرآیند همبند:

فرآیند همبند
 $T = cte$

رابطه (32) را مستقیماً از رابطه چرخه ای ثابت میگیریم، بدین ترتیب، چون $T = (\frac{\partial E}{\partial S})_{N, V}$ ، رابطه در N و V ثابت نیست و در نظر میگیریم اصل همبند و در N و V ثابت بود، پس رابطه (32) برای سیستمی که تعداد آن ثابت باشد و حجم آن ثابت باشد، عملی است. این برای سیستم همبند یا یعنی سیستمی که در فرآیند ثابت است، چون:

(32):
 $E = \frac{3}{2} NKT \xrightarrow{T=cte, N, V} E = cte$

وقتی انرژی ثابت شد، در این سیستم هم توانیم تغییرات آمپدین را بدست میآوریم و می بینیم که فقط NK در تغییرات هم رابطه ثابت است.

فرآیند همبند که هم توانیم در نظر بگیریم، فرآیند همبند در حالت:

فرآیند همبند در دو
 $dQ = 0 \xrightarrow{\text{این معنی است که}} dS = 0$

این هم توانیم در رابطه (31)، که رابطه در نظر بگیریم، که رابطه ثابت در نظر بگیریم چون N هم ثابت بود، پس رابطه E با V تغییرات متقابل خواهد بود:

(31) $S = cte \quad E = \frac{C}{V^{2/3}}$

(چون S, N, V ثابت هستند)

حالا اگر فرض کنیم فشار را حساب کنیم باید $\frac{\partial E}{\partial V}$ را بگیریم:

$\Rightarrow PV^\gamma = cte, \quad \gamma = \frac{5}{3}$

اما تا حالا فرآیندهایی که این روش دارد، یک مثل با سیستم دارد و که بدین ترتیب در رابطه (30) یک مثل اساسی دارد و آن هم این است که ما از اول گفته بودیم که باید یک کیفیت $extensive$ باشد، یعنی مثلا اگر تعداد ذرات d برابر شود باید انرژی هم d برابر شود و حجم و ابعاد سیستم d برابر شود. باید انرژی هم d برابر شود و در اینجا این طور نیست. بنا بر کار کردن N در L در رابطه (30)، اگر در توان و جایی انرژی و در آن وقت خوب بود و در صورت L که باشد، وقتی آنها را d برابر کنیم لزوماً که d برابر شود این موضوع به یاد داریم که این معنی معروف است که با توجه به اینکه تمام چیزها را این روش در دست حساب می دهد، خطراتی که این کیفیت را نمیتواند برای ما حساب کند.

حالا برای اینکه این مثل را بدین روش حل کنیم و یا ببینیم چه آن در چیست، همین کاری که داشتیم را به نوعی تست کنیم چون اینجا بدون هیچ کنش بودن، هم توانیم آنها را حل کنیم، اما یک تست کنیم و بعد از آن سیستم را بصورت حاصل جمع این تست کنیم و اگر نتوانیم حاصل جمع قابل حصول را بصورت حاصل جمع تعداد آنها را حل کنیم.

حالا بیاییم همان کار را با دو زیر سیستم انجام دهیم: توجه داشته باشیم که این ذرات بدون هیچ کنش هستند یعنی هم 10^{-10} تا 10^{-15} م است. هیچ فرقی نمیکنند با این که خود N تا 10^{23} م است، چون کار ما بدون هیچ کنش است پس به این صورت در نظر میگیریم:

N_1, V_1	N_2, V_2
T	T

تکلیف T intensive است و برای هر سیستمی که این سیستم را در دست که در حالیم. برای هر کدام از این زیر سیستم ها رابطه (30) بدین صورت در نظر میگیریم که N, V سیستم را حل می کنند.

بنابراین انرژی هر کدام از این زیر سیستم‌ها برابر است با:

(35) =>

$$S_1 = N_1 K \ln V_1 + \frac{3}{2} N_1 K \left\{ 1 + \ln \frac{2\pi m K T}{h^3} \right\} \quad (35)$$

$E = \frac{3}{2} N K T$

فرض کنیم اول یک دیواره این دو گاز را از هم جدا کرده‌ایم، بنابراین انرژی هر یک از این سیستم‌ها برابر است با:

$$S_{\text{tot}} = S_1 + S_2 = N_1 K \ln V_1 + N_2 K \ln V_2 + \frac{3}{2} (N_1 + N_2) K \left\{ 1 + \ln \frac{2\pi m K T}{h^3} \right\} \quad (36)$$

(V₁, V₂) → (V_{tot})

بنابراین دیواره‌ها برداشته می‌شوند، انرژی هر یک از این سیستم‌ها همگام می‌شود و این دو گاز با هم آمیخته می‌شوند، بنابراین انرژی هر یک از این سیستم‌ها برابر است با $N_1 + N_2$ و دمای آن $V_1 + V_2$ باید برابر باشد.

$$S_t = \sum_{i=1}^2 N_i K \ln V_i + \frac{3}{2} N_i K \left\{ 1 + \ln \frac{2\pi m K T}{h^3} \right\}$$

(در حالت آمیخته) برده شده است

$$\Rightarrow S_t = N_1 K \ln V + N_2 K \ln V + \frac{3}{2} (N_1 + N_2) K \left\{ 1 + \ln \frac{2\pi m K T}{h^3} \right\} \quad (37)$$

(36), (37)

$$\Rightarrow \Delta S = S_t - S_{\text{int}} = K \left[N_1 \ln \frac{V_1 + V_2}{V_1} + N_2 \ln \frac{V_1 + V_2}{V_2} \right] > 0 \quad (38)$$

این نتیجه را درست می‌دانیم:

$$P_1 = \frac{N_1}{V_1}, \quad P_2 = \frac{N_2}{V_2} \quad (39)$$

چون جمله هم از کمیتها *intensive* است، پس اثر تفاوت با آن

باید P_1 و P_2 با هم برابر باشند، این رابطه (38) را درست می‌داند.

P ها از صورت و فرج صاف می‌شوند و در نتیجه رابطه (38) درست می‌شود.

(38), (39)

$$\Rightarrow \Delta S = K \left[N_1 \ln \frac{N_1 + N_2}{N_1} + N_2 \ln \frac{N_1 + N_2}{N_2} \right] > 0 \quad (40)$$

حال می‌توانیم از رابطه (38) و (39) استفاده کنیم تا ببینیم که آیا این نتیجه درست است یا نه. اگر فرض کنیم که دو گاز را با هم آمیخته می‌کنیم، دمای آن‌ها برابر می‌شود و دمای آن‌ها برابر می‌شود. اگر فرض کنیم که دو گاز را با هم آمیخته می‌کنیم، دمای آن‌ها برابر می‌شود و دمای آن‌ها برابر می‌شود. اگر فرض کنیم که دو گاز را با هم آمیخته می‌کنیم، دمای آن‌ها برابر می‌شود و دمای آن‌ها برابر می‌شود.

بنابراین رابطه (30) که توضیح می‌دهد ارتباط دارد و این‌ها آن‌ها را به هم می‌رساند که در (31), (32), (33) نیز می‌توانیم

روابط درست می‌شود.

گسیس این مسئله را این طور حل کرد که در واقع در نوع شکرهای آن یک انگارگی وجود دارد یعنی همان جایی که تقریب فاکتوریل ها را زدیم.
رابطه (۴۰) را بر این صورت بازنویس کنیم و $N_1 + N_2$ اضافه و کم می کنیم:

$$\frac{1}{K} \Delta S = \left\{ (N_1 + N_2) \ln(N_1 + N_2) - (N_1 + N_2) \right\} - (N_1 \ln N_1 - N_1) - (N_2 \ln N_2 - N_2)$$

با N و N های بزرگ را گرفته ایم و می بینیم $N \ln N - N$ گزاشته بودیم اصل حالت در (الف) برعکس، رابطه اصل را می بینیم
می بینیم $N \ln N - N$ ، $N \ln N_1$ می گنایم؛

$$\Rightarrow \frac{1}{K} \Delta S = \ln N_{tot}! - \ln N_1! - \ln N_2!$$

$$\frac{1}{K} \Delta S = \ln \frac{N_{tot}!}{N_1! N_2!}$$

به عبارتی آمده است که می توانیم ضرب $N_1! N_2!$ در آن وجود داشت و وقتی که از آن \ln می گرفتیم این ضرب به صورت بعضی
ظاهر می شد و در نتیجه به صورت \ln ظاهر می شد و K کل برابر می شود.

$\frac{N_{tot}!}{N_1! N_2!}$ با این عبارت به قدری که وجود دارد می آید یعنی وقتی اینها را دو قسمت می کنیم و هم می نایم؛ $N_{tot}!$ مربوط به کل شمارش است
و کم کردن آنها در شمارش باقیمانده می شود (همانطور که جمع حالتها با ضرب داده می شد) چون N_1 ها و N_2 ها هم چون
همه کنند از این شمارش می گویند که N_1 حالت و N_2 حالت داشته باشیم، کل حالتها برای N_1, N_2 می شود، اگر بخواهیم کم کنیم باقیمانده
کم نمی کنیم.

پس در واقع اگر این حالت (صورت N_1, N_2) به کوی وارد می شد، ضمیمه ضرب بود. البته در اینجا با دو قسمت کردیم و یعنی
روایتی بر سیستم بین دستگیریم و در واقع اول وقت N تا بود که تقسیم می کردیم به ترتیب به صورت تکیده تکیده... نگاه کنیم در آن صورت
 N تا بر سیستم بین دستگیریم. این لزوم نداشت که آنرا دو قسمت کنیم هرگز تقسیم آنرا سه قسمت، چه وضعیت N قسمت
کنیم. آن N قسمت می کردیم می شد.

$$\ln \frac{N_{tot}!}{N_1! N_2!} \rightarrow \text{فرد تکیده بر سیستم می شد با} \\ \text{بجای آن می شد و آنرا N_1 و N_2 بنویس}$$

پس چیزی که باید از رابطه یاد کنیم $\ln N!$ است چنانچه! اما که هم برابر می هستند و باید عبارتی از آن را در این معادله
باید $\ln N!$ کم کنیم، یعنی؛

$$(30) \quad S = NK \ln \left[\frac{V}{h^3} \left(\frac{4\pi m E}{3N} \right)^{3/2} \right] + \frac{3}{2} NK - K \ln N!$$

با این عبارت در شمارش حالتها را می بینیم؛

$$\Gamma_{New} = \frac{1}{N!} (\Gamma_{Old})$$

این $N!$ عامل شمارش یک یک بودن ذرات است یعنی تعدادی که قبلاً حساب کرده بودیم
صفتی را برای تعداد ذرات بود و باید به تعدادی را از آن کم کنیم و این کم کردن در حقیقت همین $N!$ است که این روابط همان
ضرب شمارش است که در این صورتها به نظر می آید.

رواقت که جدید را به این صورت بنویسیم:

$$S_{New} = S_{old} - K \ln N!$$

این را این جور فرادستی وارد کنیم تا حاصل شکل مورد نظر داشته باشد اگر درست بنویسیم باید بعد از آن یک طرفش ظاهر شود این نشانه بنویسیم داریم:

$$S_{New} = S_{old} - K \ln N! = NK \ln \left(\frac{V}{N h^3} \right) \left(\frac{4\pi m E}{3N} \right)^{3/2} + \frac{5}{2} NK \quad (41)$$

Sackur-Tetrode equation

این که در فرادستی نیست هم آید و تمام روابط که قبلاً نوشتیم با هم، همچنین درستی است که اینها به عنوان مثال E درستی است

$$E = \frac{3h^2 N^{5/3}}{4\pi m V^{2/3}} e^{2S/3NK - 5/3}$$

intensive، در برابر کلان N، که هم در برابر هم شود.

حال اگر این رابطه نسبت به S مشتق کنیم، دوباره V در همان جا بر قبلی ظاهر شده و دوباره همان نتیجه قبلی را مابین E هم دهد این رابطه را می دهیم:

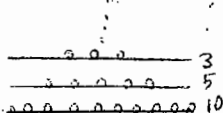
$$P = \left(\frac{\partial E}{\partial V} \right)_{N,S} = \frac{2}{3} \frac{E}{V} \rightarrow PV = NKT$$

حال همان روابط همچنان باقی میمانند و چیزی عوض نمیشود و فقط یک فریب در آن عوض شود که همین فریب ثابت است که در این شکل و در روابط است

این در واقع مثل این میماند که اگر از اول هم فرادستی N زده داشتیم و آنجا را هم فرادستی در N می جا دهیم، N! حالت داریم اما نه N₁ زده آنجا یک N₂ زده آنجا با هم میماند... آنجا هم که در افتد این است که اگر بنویسیم اینها را دوباره بنویسیم و مثل حالتها برابر می شود:

$$N! : \frac{N!}{N_1! N_2! N_3! \dots}$$

این در واقع همان ترکیبات است، مثلاً برای فرادستی و فرادستی ذرات را در آنجا قرار دهیم و تعداد حالتها را بنویسیم، مثل ۱۰ تا در برابر اول، ۵ تا در برابر دوم، ۳ تا در برابر سوم... و اینها در واقع بعد از ۱۰ تا در برابر اول قرار گرفت... و اینها یک حالت جدید در نظر داریم چون فرقی بین ذرات وجود ندارد یعنی اگر چه در ذره دوم یک ذره را عوض کنیم دو تا همان حالت است و بنابر آن حالت را دوباره بنویسیم. این در برابر نشود در هر کدام از این حالتها باید N₁، N₂... را که بنویسیم.



این هم ثابت در کد می بود و می توانیم آنرا بنویسیم و می توانیم آنرا بنویسیم و درستی بنویسیم و درستی بنویسیم و درستی بنویسیم. از جمله بعد ما در مورد نظریه آنتالپی می بنویسیم و درستی بنویسیم و درستی بنویسیم و درستی بنویسیم.

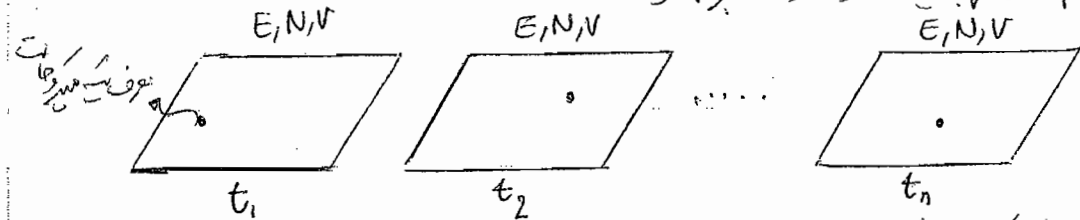
Chapter 2:

در حسابات گذشته در این مورد صحبت کردیم که در واقع ما سیستم را با یک سری میکرو حالتها و یک سری ماکرو حالتها میسنجیم که برای محاسبه ماکرو تریپ خاصه مثلا با انرژی و تعداد ذرات در حجم مشخص کنیم، تعداد زیاد میکرو حالتها وجود دارد که به عنوان فرض این سری میزنیم که در صورت تقابل این میکرو حالتها با احتمال یک قرار گرفته اند.

به این موضوع می توان طوری نگاه کرد و آن این است که سیستم یک سری میکرو حالت دارد و مثلا در لحظه t_1 در حالت t_1 سیستم در یکی از این میکرو حالتها قرار دارد. در یک لحظه دیگر به این سیستم نگاه کنیم، سیستم در یکی از میکرو حالتها قرار گرفته و این اتفاق یعنی وقتی زمان بگذرد، سیستم از یک میکرو حالت به میکرو حالت دیگر عبور می کند.

حقیقی طبیعت است که وقتی بخوایم بیانش کنیم که چیزی بخوایم از هم یعنی در یک باره زمانی شخصی در واقع هدایتی از یک ماکرو حالت و بعد در هر کدام از این زمانها در واقع ماکرو حالتها را اندازه گیری می کنیم و بعد بیانش این اندازه ها را به عنوان تعداد این میکرو حالتها میزنیم. در زمانهای بعد از آن نگاه می کنیم. در زمانهای بعد از آن در واقع اندازه گیری های ما همان یک مقدار شخصی لغت وضع داشته باشد، به آن حالت، حالت تعادل میگویند.

سیستم را جوهری میزنیم هم می توان نگاه کرد، فرض کنیم نقاط فضایی که داریم هر کدام تساطع با هم انداخته اند و حالتها باشند، یعنی این فضای این تساطع $transparency$ تصور کنیم، در این $transparency$ نقاط مختلف این هر کدام معرف نوع میکرو حالتها باشند و در یک زمان t_1 مثلا سیستم در یکی از این نقاط است. در یک لحظه دیگر t_2 ممکن است سیستم در میکرو حالت دیگری باشد و در یک میکرو حالت دیگر به همین ترتیب در زمانهای مختلف میزنیم سیستم را در میکرو حالتها مختلف پیدا کنیم. همه این میکرو حالتها با یک E و N و V دارند، یعنی مجموعه چیزهایی که داریم یک عددیست مثلا E, N, V سیستم با یک سری حرکات انرژی و مشخص شده باشد، این میکرو حالتها یعنی یک سری $\{n_i\}$ ها و هر کدام از میکرو حالتها بسته به این $\{n_i\}$ ها هستند، این درسته $\{n_i\}$ ها فقط به یک E, N, V منحصر نمیشوند.



حال میفهمیم که این لایه ها را بصورت باد و افسر نگاه کنیم، این $transparency$ ها را بصورت زیر و رو میزنیم هم می توانیم. اما از باد به آن نگاه کنیم می بینیم که در آن یک سازه یا یک سازه اند، مثلا در سازه که همگی این نقاط بیست است و با در واقع سازه تراشیده یعنی اینکه سیستم در مدت زمان بیشتر در آنجا قرار گرفته است، یعنی با احتمال زیاد سیستم در آن نقاط قرار گرفته است.



تا آنجا که می بینیم بصورت افسر (مثل باد) نگاه کنیم، بصورت تقابل نگاه کنیم، به آن یک آن بین (Ensembl) یا همگروه میزنیم که در واقع در این مجموعه، چگالی میکرو حالتها برابر با ضمیمه اهمیت دارد که گفته

انگیزه میزنیم که در واقع کاهای بعدی ما این است که بر حسب ذرات آنها را به صورت شخصی کنیم. البته در کل حالتها قابل حصول یک سیستم را داشته باشیم یعنی کل حالتها که به ما E, N, V منحصر شده باشد، آن بین مجموعه تمام آنها هستند

معنی است طی این بازه زمانی سیستم از بعضی از این مقدارها کمتر و بعضی مواردی که در آن سیستم فقط این حالتها نسبت به یکدیگر
 است که علی‌الاصول سیستم می‌تواند به N و $N+1$ برسد. نکته اینست که هرگاه این مقدار کمتر از 50 باشد، این را به ترتیب
 کنیم، در آن صورت 50 سیستم عین هم را نشان می‌دهد و این 50 تا را هم نگاه کنیم.

مطابق این است که طبقه 4 قابل حصول را در یک مجموعه قرار دهیم. در این مجموعه یک آن مثل می‌توانیم.
 به نظر که گفتیم آن به عنوان یک کیت به محل آن نگاه کنیم، نحوه توزیع در آنجا برای ما مهم می‌باشد. آنرا می‌توانیم از کیت 50 می‌گیریم
 به این طریق تابع توزیع را در این مقدار ضرب کنیم و از آن استنتاج می‌کنیم، این در واقع در اینجا یک تابع توزیع بدست آوریم.
 فقط در این است که یک صورتی این تابع توزیع را از روی مشخصات فیزیکی سیستم بدست می‌آوریم، مشخصات یک سیستم هم یعنی اینکه
 از آنجا می‌توانیم و می‌توانیم سیستم را بدلیسیم.

یعنی با توجه به اینکه سیستم را با N می‌خواهیم و می‌توانیم، هر فراهم این توزیع‌ها را بدست می‌آوریم و این توزیع‌ها را هم فراهم
 در شرایط q یا P می‌گیریم یعنی این تابع q که برای آنجا در نظر می‌گیریم بازمانده تغییرات صریح نداشته باشد و معنی است $\frac{d}{dt}$ (استدلال)

فعلاً یک سیستم کلاسیک در نظر می‌گیریم. این کیت و حالتها را همانطور که قبلاً هم گفتیم در خواصم می‌توانیم نگاه کنیم در واقع $(\alpha_1, \dots, \alpha_N)$
 می‌باشد و هر کدام از اینها یک تابع توزیع هستند و تابع درجه اول مختلفی هستند که همه به اندازه E می‌رسند و چیزی که ما در نظر می‌گیریم
 تقریباً 50 تا سیستم را در اینجا می‌توانیم قابل حصول یک سیستم می‌گیریم.

اما معادله برقرار می‌ماند، هر دو کلاسیک است و در این صورت ما در تابع توزیع سیستم را می‌توانیم و آن چیزی که برای ما مهم است در واقع مشخصه
 و سیستم در حالت و چیزی که اسم آنرا فضای فاز می‌گویند.

حالت ذره 1 به منطقه q_1 و q_2 و q_3 و q_4 و q_5 و q_6 و q_7 و q_8 و q_9 و q_{10} و q_{11} و q_{12} و q_{13} و q_{14} و q_{15} و q_{16} و q_{17} و q_{18} و q_{19} و q_{20} و q_{21} و q_{22} و q_{23} و q_{24} و q_{25} و q_{26} و q_{27} و q_{28} و q_{29} و q_{30} و q_{31} و q_{32} و q_{33} و q_{34} و q_{35} و q_{36} و q_{37} و q_{38} و q_{39} و q_{40} و q_{41} و q_{42} و q_{43} و q_{44} و q_{45} و q_{46} و q_{47} و q_{48} و q_{49} و q_{50} و q_{51} و q_{52} و q_{53} و q_{54} و q_{55} و q_{56} و q_{57} و q_{58} و q_{59} و q_{60} و q_{61} و q_{62} و q_{63} و q_{64} و q_{65} و q_{66} و q_{67} و q_{68} و q_{69} و q_{70} و q_{71} و q_{72} و q_{73} و q_{74} و q_{75} و q_{76} و q_{77} و q_{78} و q_{79} و q_{80} و q_{81} و q_{82} و q_{83} و q_{84} و q_{85} و q_{86} و q_{87} و q_{88} و q_{89} و q_{90} و q_{91} و q_{92} و q_{93} و q_{94} و q_{95} و q_{96} و q_{97} و q_{98} و q_{99} و q_{100} و q_{101} و q_{102} و q_{103} و q_{104} و q_{105} و q_{106} و q_{107} و q_{108} و q_{109} و q_{110} و q_{111} و q_{112} و q_{113} و q_{114} و q_{115} و q_{116} و q_{117} و q_{118} و q_{119} و q_{120} و q_{121} و q_{122} و q_{123} و q_{124} و q_{125} و q_{126} و q_{127} و q_{128} و q_{129} و q_{130} و q_{131} و q_{132} و q_{133} و q_{134} و q_{135} و q_{136} و q_{137} و q_{138} و q_{139} و q_{140} و q_{141} و q_{142} و q_{143} و q_{144} و q_{145} و q_{146} و q_{147} و q_{148} و q_{149} و q_{150} و q_{151} و q_{152} و q_{153} و q_{154} و q_{155} و q_{156} و q_{157} و q_{158} و q_{159} و q_{160} و q_{161} و q_{162} و q_{163} و q_{164} و q_{165} و q_{166} و q_{167} و q_{168} و q_{169} و q_{170} و q_{171} و q_{172} و q_{173} و q_{174} و q_{175} و q_{176} و q_{177} و q_{178} و q_{179} و q_{180} و q_{181} و q_{182} و q_{183} و q_{184} و q_{185} و q_{186} و q_{187} و q_{188} و q_{189} و q_{190} و q_{191} و q_{192} و q_{193} و q_{194} و q_{195} و q_{196} و q_{197} و q_{198} و q_{199} و q_{200} و q_{201} و q_{202} و q_{203} و q_{204} و q_{205} و q_{206} و q_{207} و q_{208} و q_{209} و q_{210} و q_{211} و q_{212} و q_{213} و q_{214} و q_{215} و q_{216} و q_{217} و q_{218} و q_{219} و q_{220} و q_{221} و q_{222} و q_{223} و q_{224} و q_{225} و q_{226} و q_{227} و q_{228} و q_{229} و q_{230} و q_{231} و q_{232} و q_{233} و q_{234} و q_{235} و q_{236} و q_{237} و q_{238} و q_{239} و q_{240} و q_{241} و q_{242} و q_{243} و q_{244} و q_{245} و q_{246} و q_{247} و q_{248} و q_{249} و q_{250} و q_{251} و q_{252} و q_{253} و q_{254} و q_{255} و q_{256} و q_{257} و q_{258} و q_{259} و q_{260} و q_{261} و q_{262} و q_{263} و q_{264} و q_{265} و q_{266} و q_{267} و q_{268} و q_{269} و q_{270} و q_{271} و q_{272} و q_{273} و q_{274} و q_{275} و q_{276} و q_{277} و q_{278} و q_{279} و q_{280} و q_{281} و q_{282} و q_{283} و q_{284} و q_{285} و q_{286} و q_{287} و q_{288} و q_{289} و q_{290} و q_{291} و q_{292} و q_{293} و q_{294} و q_{295} و q_{296} و q_{297} و q_{298} و q_{299} و q_{300} و q_{301} و q_{302} و q_{303} و q_{304} و q_{305} و q_{306} و q_{307} و q_{308} و q_{309} و q_{310} و q_{311} و q_{312} و q_{313} و q_{314} و q_{315} و q_{316} و q_{317} و q_{318} و q_{319} و q_{320} و q_{321} و q_{322} و q_{323} و q_{324} و q_{325} و q_{326} و q_{327} و q_{328} و q_{329} و q_{330} و q_{331} و q_{332} و q_{333} و q_{334} و q_{335} و q_{336} و q_{337} و q_{338} و q_{339} و q_{340} و q_{341} و q_{342} و q_{343} و q_{344} و q_{345} و q_{346} و q_{347} و q_{348} و q_{349} و q_{350} و q_{351} و q_{352} و q_{353} و q_{354} و q_{355} و q_{356} و q_{357} و q_{358} و q_{359} و q_{360} و q_{361} و q_{362} و q_{363} و q_{364} و q_{365} و q_{366} و q_{367} و q_{368} و q_{369} و q_{370} و q_{371} و q_{372} و q_{373} و q_{374} و q_{375} و q_{376} و q_{377} و q_{378} و q_{379} و q_{380} و q_{381} و q_{382} و q_{383} و q_{384} و q_{385} و q_{386} و q_{387} و q_{388} و q_{389} و q_{390} و q_{391} و q_{392} و q_{393} و q_{394} و q_{395} و q_{396} و q_{397} و q_{398} و q_{399} و q_{400} و q_{401} و q_{402} و q_{403} و q_{404} و q_{405} و q_{406} و q_{407} و q_{408} و q_{409} و q_{410} و q_{411} و q_{412} و q_{413} و q_{414} و q_{415} و q_{416} و q_{417} و q_{418} و q_{419} و q_{420} و q_{421} و q_{422} و q_{423} و q_{424} و q_{425} و q_{426} و q_{427} و q_{428} و q_{429} و q_{430} و q_{431} و q_{432} و q_{433} و q_{434} و q_{435} و q_{436} و q_{437} و q_{438} و q_{439} و q_{440} و q_{441} و q_{442} و q_{443} و q_{444} و q_{445} و q_{446} و q_{447} و q_{448} و q_{449} و q_{450} و q_{451} و q_{452} و q_{453} و q_{454} و q_{455} و q_{456} و q_{457} و q_{458} و q_{459} و q_{460} و q_{461} و q_{462} و q_{463} و q_{464} و q_{465} و q_{466} و q_{467} و q_{468} و q_{469} و q_{470} و q_{471} و q_{472} و q_{473} و q_{474} و q_{475} و q_{476} و q_{477} و q_{478} و q_{479} و q_{480} و q_{481} و q_{482} و q_{483} و q_{484} و q_{485} و q_{486} و q_{487} و q_{488} و q_{489} و q_{490} و q_{491} و q_{492} و q_{493} و q_{494} و q_{495} و q_{496} و q_{497} و q_{498} و q_{499} و q_{500} و q_{501} و q_{502} و q_{503} و q_{504} و q_{505} و q_{506} و q_{507} و q_{508} و q_{509} و q_{510} و q_{511} و q_{512} و q_{513} و q_{514} و q_{515} و q_{516} و q_{517} و q_{518} و q_{519} و q_{520} و q_{521} و q_{522} و q_{523} و q_{524} و q_{525} و q_{526} و q_{527} و q_{528} و q_{529} و q_{530} و q_{531} و q_{532} و q_{533} و q_{534} و q_{535} و q_{536} و q_{537} و q_{538} و q_{539} و q_{540} و q_{541} و q_{542} و q_{543} و q_{544} و q_{545} و q_{546} و q_{547} و q_{548} و q_{549} و q_{550} و q_{551} و q_{552} و q_{553} و q_{554} و q_{555} و q_{556} و q_{557} و q_{558} و q_{559} و q_{560} و q_{561} و q_{562} و q_{563} و q_{564} و q_{565} و q_{566} و q_{567} و q_{568} و q_{569} و q_{570} و q_{571} و q_{572} و q_{573} و q_{574} و q_{575} و q_{576} و q_{577} و q_{578} و q_{579} و q_{580} و q_{581} و q_{582} و q_{583} و q_{584} و q_{585} و q_{586} و q_{587} و q_{588} و q_{589} و q_{590} و q_{591} و q_{592} و q_{593} و q_{594} و q_{595} و q_{596} و q_{597} و q_{598} و q_{599} و q_{600} و q_{601} و q_{602} و q_{603} و q_{604} و q_{605} و q_{606} و q_{607} و q_{608} و q_{609} و q_{610} و q_{611} و q_{612} و q_{613} و q_{614} و q_{615} و q_{616} و q_{617} و q_{618} و q_{619} و q_{620} و q_{621} و q_{622} و q_{623} و q_{624} و q_{625} و q_{626} و q_{627} و q_{628} و q_{629} و q_{630} و q_{631} و q_{632} و q_{633} و q_{634} و q_{635} و q_{636} و q_{637} و q_{638} و q_{639} و q_{640} و q_{641} و q_{642} و q_{643} و q_{644} و q_{645} و q_{646} و q_{647} و q_{648} و q_{649} و q_{650} و q_{651} و q_{652} و q_{653} و q_{654} و q_{655} و q_{656} و q_{657} و q_{658} و q_{659} و q_{660} و q_{661} و q_{662} و q_{663} و q_{664} و q_{665} و q_{666} و q_{667} و q_{668} و q_{669} و q_{670} و q_{671} و q_{672} و q_{673} و q_{674} و q_{675} و q_{676} و q_{677} و q_{678} و q_{679} و q_{680} و q_{681} و q_{682} و q_{683} و q_{684} و q_{685} و q_{686} و q_{687} و q_{688} و q_{689} و q_{690} و q_{691} و q_{692} و q_{693} و q_{694} و q_{695} و q_{696} و q_{697} و q_{698} و q_{699} و q_{700} و q_{701} و q_{702} و q_{703} و q_{704} و q_{705} و q_{706} و q_{707} و q_{708} و q_{709} و q_{710} و q_{711} و q_{712} و q_{713} و q_{714} و q_{715} و q_{716} و q_{717} و q_{718} و q_{719} و q_{720} و q_{721} و q_{722} و q_{723} و q_{724} و q_{725} و q_{726} و q_{727} و q_{728} و q_{729} و q_{730} و q_{731} و q_{732} و q_{733} و q_{734} و q_{735} و q_{736} و q_{737} و q_{738} و q_{739} و q_{740} و q_{741} و q_{742} و q_{743} و q_{744} و q_{745} و q_{746} و q_{747} و q_{748} و q_{749} و q_{750} و q_{751} و q_{752} و q_{753} و q_{754} و q_{755} و q_{756} و q_{757} و q_{758} و q_{759} و q_{760} و q_{761} و q_{762} و q_{763} و q_{764} و q_{765} و q_{766} و q_{767} و q_{768} و q_{769} و q_{770} و q_{771} و q_{772} و q_{773} و q_{774} و q_{775} و q_{776} و q_{777} و q_{778} و q_{779} و q_{780} و q_{781} و q_{782} و q_{783} و q_{784} و q_{785} و q_{786} و q_{787} و q_{788} و q_{789} و q_{790} و q_{791} و q_{792} و q_{793} و q_{794} و q_{795} و q_{796} و q_{797} و q_{798} و q_{799} و q_{800} و q_{801} و q_{802} و q_{803} و q_{804} و q_{805} و q_{806} و q_{807} و q_{808} و q_{809} و q_{810} و q_{811} و q_{812} و q_{813} و q_{814} و q_{815} و q_{816} و q_{817} و q_{818} و q_{819} و q_{820} و q_{821} و q_{822} و q_{823} و q_{824} و q_{825} و q_{826} و q_{827} و q_{828} و q_{829} و q_{830} و q_{831} و q_{832} و q_{833} و q_{834} و q_{835} و q_{836} و q_{837} و q_{838} و q_{839} و q_{840} و q_{841} و q_{842} و q_{843} و q_{844} و q_{845} و q_{846} و q_{847} و q_{848} و q_{849} و q_{850} و q_{851} و q_{852} و q_{853} و q_{854} و q_{855} و q_{856} و q_{857} و q_{858} و q_{859} و q_{860} و q_{861} و q_{862} و q_{863} و q_{864} و q_{865} و q_{866} و q_{867} و q_{868} و q_{869} و q_{870} و q_{871} و q_{872} و q_{873} و q_{874} و q_{875} و q_{876} و q_{877} و q_{878} و q_{879} و q_{880} و q_{881} و q_{882} و q_{883} و q_{884} و q_{885} و q_{886} و q_{887} و q_{888} و q_{889} و q_{890} و q_{891} و q_{892} و q_{893} و q_{894} و q_{895} و q_{896} و q_{897} و q_{898} و q_{899} و q_{900} و q_{901} و q_{902} و q_{903} و q_{904} و q_{905} و q_{906} و q_{907} و q_{908} و q_{909} و q_{910} و q_{911} و q_{912} و q_{913} و q_{914} و q_{915} و q_{916} و q_{917} و q_{918} و q_{919} و q_{920} و q_{921} و q_{922} و q_{923} و q_{924} و q_{925} و q_{926} و q_{927} و q_{928} و q_{929} و q_{930} و q_{931} و q_{932} و q_{933} و q_{934} و q_{935} و q_{936} و q_{937} و q_{938} و q_{939} و q_{940} و q_{941} و q_{942} و q_{943} و q_{944} و q_{945} و q_{946} و q_{947} و q_{948} و q_{949} و q_{950} و q_{951} و q_{952} و q_{953} و q_{954} و q_{955} و q_{956} و q_{957} و q_{958} و q_{959} و q_{960} و

اگر فرض کنیم θ که کنیم، این معادلات (توزیع) هرگز اندر یک نقطه در P_i, q_i باشد، در یک نقطه نیز نظر داریم به یک نقطه P_i, q_i دیگر هر دو در این نقاط مختلف با گذشت زمان یک ابر سطح یا رویه در فضای $6N$ بعدی در دست می‌کنند. هر چه رویه اینها قوی‌تر باشد، رویه‌ای که در آنجا در دست می‌شود، محدودتر می‌شود. مثلاً یکی از قوی‌ها هم مهم این است که نیروی E ثابت باشد و این نیروی ثابت یعنی اینکه همانند نیروی E وابسته نباشد و مقدار آن هم مساوی E باشد یعنی:

$$H(q_i, p_i) = E \rightarrow \text{این یک قید روزیست است}$$

این قید باعث می‌شود که بین این مختصات را بر حسب قیود نوسان بگیریم. البته اینکه خیلی دقیق و Sharp می‌شود $H(q_i, p_i)$ برابر E می‌شود، کار صعبی نیست (معمولاً این مختصلاً در اندازه گیری‌ها نیز اهمیت دقیقاً E را اندازه می‌گیریم).

از طرف دیگری هم منظور که حساسیت بین کنیم معیاری وقتی تعداد ابعاد زیاد می‌شود، حجم یک فضا را راحت‌تر می‌توانیم حساب کنیم تا سطح آن. بنابراین همیشه وقتی این کار را می‌کنیم در فضای فاز محدود H بین $E - \Delta_2$ تا $E + \Delta_2$ می‌گیریم، هر کدام از اینها یک رویه را در فضای فاز برای ما نشان می‌دهند و اینها یکی که در این باره هستند فضای بین دو ابر رویه و در واقع یک حجم از فضای فاز است. در اکثر موارد وقتی می‌خواهیم Δ در حد Δ باشد، اگر این نسبت صفر میل می‌کند.

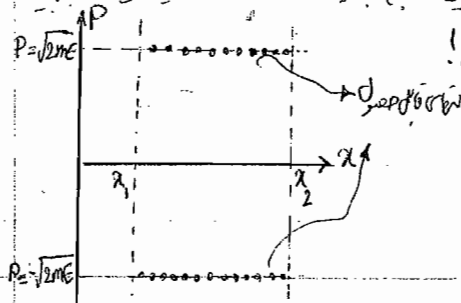
مثال: یک ذره آزاد در یک قید
 هنگامی که این به این صورت است:

$$H = \frac{p^2}{2m} = E \quad (1)$$

در هر حالتی زمان ظاهر شده بطور صریح، این ثابت حرکت است و هم فزاینده برای انرژی هر سطح E باشد.

این رابطه یک قید است که روی p ظاهر می‌گردد. اینها در p و q هر کدام $3N$ تکرار می‌کنند، این یک ذره است و در یک قید هم هست، این واقعاً یک مختصلاً و یک مختصلاً نیست. اگر حجم فیزیکی را قید کنیم که برابر Δ باشد، یعنی مختصات ذره می‌تواند فقط بین دو نقطه x_1 تا x_2 متغیر باشد. این قید است که در x محدود می‌شود. این البته حجم را قید کنیم، می‌گوییم که در فضای فاز نمی‌تواند خارج از x_1 تا x_2 باشد.

از طرفی رابطه (1) می‌گوید مختصات ذره جوهری نمی‌تواند باشد و فقط می‌تواند $p = \pm \sqrt{2mE}$ باشد. در فضای در بعدی، ابر سطح یعنی سطحی و حجم یعنی سطح. در فضای $6N$ بعدی، ابر سطح یعنی دو نقطه و حجم یعنی فاصله. در فضای $6N$ بعدی، ابر سطح همان سطح است و حجم یعنی یک نقطه واقعاً اینها نیستند. در فضای 4 بعدی و در بالا، حجم یعنی تمام ناحیه بین یک نقطه اولیه تا یک مقدار دیگر، و ابر سطح هم یعنی اینها و در بالا و در بالا $H(q_i, p_i) = E$ و وقتی یک رابطه بود ثابت باشد از حجم به ابر سطح تبدیل می‌شود. از این رابطه ثابت می‌شود $H \leq E$ ، این یعنی یک حجم، مثلاً برای که این طور که می‌بینیم: $R^2 = x^2 + y^2 + z^2$ ، یعنی یک حجم را نشان می‌دهد. اما اگر این رابطه بصورت T داده شد یعنی یک رابطه بین مختصات ایجاد کرده ایم و یک رابطه را می‌توانیم بر حسب قیود نوسان و این یعنی یک سطح!



این صحنه‌ها قابل حصول است، اینها از نظر قابل می‌تواند باشد و اگر می‌خواهیم تعداد صحنه‌ها قابل حصول را بشماریم باید روایع تعداد این نقاط را بشماریم. بنابراین این صحنه‌ها تغییر می‌کنند و اینها را به صحنه‌ها می‌توانیم بشماریم.

اینکه خطوط از یک نقطه در فضای فاز به یک نقطه دیگر از فضای فاز می‌رود، از الزام این معادلات نباید گشتیم:

$$\begin{cases} \dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \\ \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \end{cases}$$

این معادلات نشان می‌دهد که به ما نمی‌گوید از هر نقطه از فضای فاز به چه صورت به نقطه دیگری از فضای فاز می‌رود، فقط تغییرات آن را از این معادلات بدست می‌آید. پس برای مثال ما، این را با یک بیان صورت می‌دهیم:

$$H = \frac{P^2}{2m} \rightarrow \begin{cases} \dot{x} = \frac{P}{m} \\ \dot{P} = 0 \end{cases}$$

این را بگیریم و ببینیم که در هر لحظه چه می‌گذرد، اگر فرض کنیم که $P = \sqrt{2mE}$ یا $P = -\sqrt{2mE}$ دو صورت دارد. عرضاً این را می‌توانیم آن را به حساب می‌آوریم و می‌توانیم ببینیم که در هر لحظه چه می‌گذرد و در هر لحظه چه می‌گذرد. این دو حالت را می‌توانیم به صورت $P = \sqrt{2mE}$ و $P = -\sqrt{2mE}$ در نظر بگیریم و می‌توانیم ببینیم که در هر لحظه چه می‌گذرد. این دو حالت را می‌توانیم به صورت $P = \sqrt{2mE}$ و $P = -\sqrt{2mE}$ در نظر بگیریم و می‌توانیم ببینیم که در هر لحظه چه می‌گذرد. این دو حالت را می‌توانیم به صورت $P = \sqrt{2mE}$ و $P = -\sqrt{2mE}$ در نظر بگیریم و می‌توانیم ببینیم که در هر لحظه چه می‌گذرد.

همانطور که می‌دانیم ما دو شکل داریم و می‌توانیم ببینیم که در هر لحظه چه می‌گذرد و در هر لحظه چه می‌گذرد.

مثال: نوسان‌گر هارمونیک

$$H(x, p) = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} K x^2$$

حاصل می‌شود از یک نوسان‌گر هارمونیک در یک بُعد به این صورت است:

می‌توانیم فقط با آنرا در فضای فاز یک ذره در یک بُعد را در نظر بگیریم و می‌توانیم ببینیم که در هر لحظه چه می‌گذرد و در هر لحظه چه می‌گذرد. این دو حالت را می‌توانیم به صورت $P = \sqrt{2mE}$ و $P = -\sqrt{2mE}$ در نظر بگیریم و می‌توانیم ببینیم که در هر لحظه چه می‌گذرد.

$$H(x, p) = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} K x^2 = E$$

یعنی این در فضای فاز که داریم، این را می‌توانیم ببینیم که در هر لحظه چه می‌گذرد و در هر لحظه چه می‌گذرد.

$$\frac{p^2}{(\sqrt{2mE})^2} + \frac{x^2}{(\sqrt{\frac{2E}{K}})^2} = 1$$

که این یک قطعه بیضی است و $\sqrt{2mE}$ و $\sqrt{\frac{2E}{K}}$ به این معنی است:

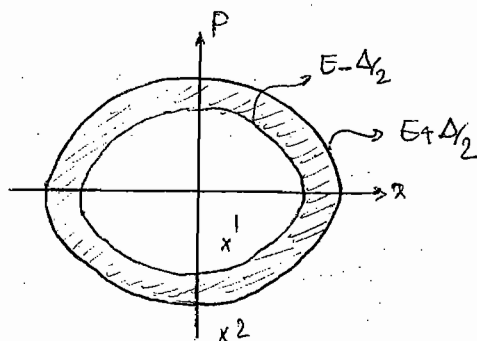
بطور کلی ما می‌توانیم این را به صورت $\frac{p^2}{2mE} + \frac{x^2}{\frac{2E}{K}} = 1$ در نظر بگیریم و می‌توانیم ببینیم که در هر لحظه چه می‌گذرد و در هر لحظه چه می‌گذرد.

تعداد حالتها می‌تواند حاصل از این معادلات باشد، اما ما می‌دانیم که ما یک خط بیضی داریم، بعد از آنکه این معادلات را حل می‌کنیم:

در این حجم یک بیضی را می‌توانیم حساب کنیم و برابر πab است.

پس این بیضی را می‌توانیم حساب کنیم و برابر πab است. این بیضی را می‌توانیم حساب کنیم و برابر πab است.

چون این در بعضی را حساب کنیم و از بعد کم کنیم و در آخر Δ را به صفر مساوی کنیم.



حال اگر بخواهیم به نقطه آن برسیم که ثابتیم، همانطور که گفتیم در هر نقطه t سیستم در یکی از نقاط فضای فاز است و مسلماً در یک لحظه در تمام نقاط نیست و در یکی از نقاط است، زمانی که بلندتر می‌شود به یک نقطه می‌رسد. اگر چه این نقاط را دنبال کنیم می‌توانیم در فضای فاز خصوصاً در آنجا باقی‌مانیم که هم ثابتیم این مسیرها می‌توانند در یک محدوده خاصی قرار بگیرند. معنی است از بعضی از این نقاط بیرون می‌روند و از بعضی آن‌ها بیرون می‌روند. این نقاط کمتر می‌توانند (همانطور که قبلاً گفتیم) از روی هم قرار بگیرند و بعضی‌ها کمتر می‌روند، اما این کیفیت را بعداً زیر بحث گذاریم:

$$P(q_i, P_i, t)$$

تعریف P به این شکل است که اگر P را در تمام حجم فضای فاز ضرب کنیم، می‌شود تعداد نقاط از فضای فاز که در زمان t در حوض q_i و P_i قرار دارد و در یک شیء این همان حجم فضای فاز قرار دارد:

$$\int P(q_i, P_i, t) dq dP = \text{تعداد نقاط از فضای فاز در زمان } t \text{ در حوض } q_i, P_i$$

این در واقع به روشی جدیدتری توزیع اعضای آن محل را در حوض t به ما می‌دهد. اگر در حوض q_i و P_i این تعداد زیاد باشد یعنی کثرت اعضای آن محل در آن نقطه هستیم زیاد هستند و اگر کم باشد یعنی اعضای آن محل در آن نقطه کم هستند.

P را به این یک ناصیه تعریف می‌کنیم بلکه برای تمام فضای فاز تعریف می‌کنیم، در همه محل بالا، این P در نقاط (محل) 1 و 2 دارای مقدار صفر است و فقط در آن رگه وجود ندارد.

اگر تمام نقاط مساوی احتمال باشند، P را به یک مقدار ثابت می‌گذارند، معنی است تمام فضای فاز احتمال هم‌بند است و هیچکدام بیشتر و یک هیچکدام کمتر باشد.

$$\langle f \rangle = \frac{\int f(q_i, P_i, t) P(q_i, P_i, t) dq_i dP_i}{\int P(q_i, P_i, t) dq_i dP_i}$$

بنابراین آن سیستمی که کثرت را با این صورت حساب می‌کنیم:

را به بالا تبدیل آن به هر حرکتی که خواه می‌شود.

حکایتی را که در نظر می‌گیریم به کوی به q و P و البته t است. مثلاً اگر می‌خواهیم انرژی را حساب کنیم، می‌دانیم که انرژی به q و P وابسته است، اگر تابع f را داشته باشیم، انرژی را از آن ضرب می‌کنیم و میانگین می‌گیریم. این حرکتی فیزیکی رفتار q و P را می‌توانیم به این صورت به بالا بنویسیم آن را ثابت می‌گوییم.

$$\frac{dP}{dt} = 0 \rightarrow \text{آن به بالا}$$

آن محل را با این می‌گوییم، اگر $\frac{dP}{dt}$ نظر داشته باشیم هیچ زوالی است که این معنی را داشته و منظور $\frac{dP}{dt}$ نیست، چون q و P در آنجا می‌توانند با هم تغییر کنند.

این معادله در فرجه‌های پیوسته‌ترین گیرنده‌ها که در واقعیت را حساب کنیم، مسئله اصلی ما به خطی در حساب کردن ρ ، بر مگر در دو معادله است (برای ρ حاکم است).

معادله بصری را در نظر می‌گیریم. معادله‌ای که ρ حاکم است را معادله لیورین می‌گوئیم که از دو معادله تکلیف آراست است (آرایه).

معادله لیورین:

معادله لیورین: $\rho(x, y, z, t)$ بیان از کار ρ داریم که در حقیقت از یک بیان از کار ρ داریم.

و جزء x, y, z و t را به هم می‌زنیم، پس معادله لیورین که $x_i(t)$; $x_i = x, y, z$.

در هر مکان و زمان این مقدار عددی ثابت است که به دو صورت می‌تواند عوض شود، یا زمان تغییر کند که این بیان در این حالت ثابت است، یا در این معادله تغییر می‌کند. به نقطه (x, y, z) در t تغییر می‌کند.

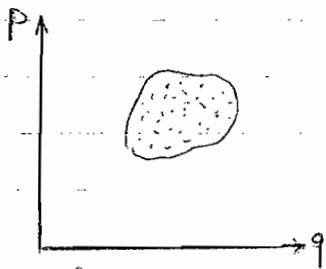
تغییرات این بیان می‌تواند به این صورت باشد که با تغییرات مکان و یا تغییرات صریح زمان تغییر کند:

$$\Delta\rho = \frac{\partial\rho}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial\rho}{\partial y} \Delta y + \frac{\partial\rho}{\partial z} \Delta z + \frac{\partial\rho}{\partial t} \Delta t$$

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\rho}{\Delta t} = \frac{d\rho}{dt} = (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}\rho) + \frac{\partial\rho}{\partial t}$$

این تغییرات کامل یک تابع از کار را بصورت ρ می‌بینیم، یک قسمت از تغییرات صریح و یک مقدار بخاطر حرکت.

حال به فضای فاز می‌رویم، در فضای فاز، یک قسمت از فضای فاز را جدا می‌کنیم، تعداد نقاط این فضای فاز را به این صورت می‌بینیم:



تعداد نقاط این فضای فاز: $\int \rho dw$
 $d^3w = dq^3 dp^3$

$\int \rho dw$ به نمره ρ با تعداد ρ در ناحیه مورد نظر مرتبط است.

حالا می‌خواهیم تغییرات این تعداد بصورت ρ را حساب کنیم، در واقعیت تعدادی که از آن کم می‌شود یا از ناحیه مورد نظر خارج می‌شود، را به است آرایه و خارج شده بصورت ρ در آن کم می‌کنیم چون ρ در آن یعنی این ρ ، ρ تغییر می‌کند پس داریم:

$$-\frac{\partial}{\partial t} \int \rho dw = \int \rho \vec{v} \cdot \hat{n} d\sigma$$

همه اینها را در فضای $6N$ می‌بینیم، $6N$ بصورت $6N$ تعداد است، \hat{n} آن که اینها را اطراف کرده و $d\sigma$ هم یعنی $6N$ تعداد این حجم فضا.

$$\Rightarrow \int (\vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v}) + \frac{\partial\rho}{\partial t}) dw = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \int \rho dw = \int \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v}) d\sigma$$

$$-\frac{\partial}{\partial t} \int \rho dw = \int \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v}) d\sigma = \int \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v}) dw$$

این تغییرات بصورت ρ است و همان معادله لیورین است، در اینجا هم فقط این فضای فاز را در نظر می‌گیریم و وجود هم نمی‌باشد در این معادله.

بنی لازم است
 در این
 و بالعکس
 است
 $\vec{v} \cdot \hat{n}$
 و از است
 است
 $\frac{\partial}{\partial t}$

و چون $\nabla \cdot (pV)$ همگرا از یک جا به جا می آید برود. پس معادله ای که به عنوان معادله لیورینگ نامیده می شود حکایت این است که این معادله است:

$$\nabla \cdot (pV) + \frac{\partial p}{\partial t} = 0 \quad \text{I}$$

این $\nabla \cdot (pV)$ را باز کنیم بنویسیم:

$$\nabla \cdot (pV) = \sum_{i=1}^{3N} \frac{\partial}{\partial q_i} (p \dot{q}_i) + \frac{\partial}{\partial p_i} (p \dot{p}_i) = \left(\frac{\partial p}{\partial q_i} \right) \dot{q}_i + \left(\frac{\partial p}{\partial p_i} \right) \dot{p}_i + p \left(\frac{\partial \dot{q}_i}{\partial q_i} + \frac{\partial \dot{p}_i}{\partial p_i} \right) \quad \text{II}$$

از این معادله می توانیم بنویسیم:

$$\left. \begin{aligned} \dot{q}_i &= \frac{\partial H}{\partial p_i} \rightarrow \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial p_i} = \frac{\partial^2 H}{\partial p_i \partial q_i} \\ \dot{p}_i &= -\frac{\partial H}{\partial q_i} \rightarrow \frac{\partial \dot{p}_i}{\partial p_i} = -\frac{\partial^2 H}{\partial q_i \partial p_i} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial q_i} + \frac{\partial \dot{p}_i}{\partial p_i} = 0 \quad \text{III}$$

III \rightarrow II $\Rightarrow \nabla \cdot (pV) = \sum_{i=1}^{3N} \left(\frac{\partial p}{\partial q_i} \right) \dot{q}_i + \left(\frac{\partial p}{\partial p_i} \right) \dot{p}_i \quad \text{IV}$

IV \rightarrow I $\Rightarrow \frac{\partial p}{\partial t} + \sum_{i=1}^{3N} \left(\frac{\partial p}{\partial q_i} \frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial p}{\partial p_i} \frac{\partial H}{\partial q_i} \right) = 0 \quad \text{V}$

گروه پواسون

فیزیکی که اینجا ظاهر می شود چیست؟ همواره در مکانیک کلاسیک این معادله را برای هر دو کمیت پواسون تعریف می کنند:

$$\{A, B\} \pm [A, B]_{P.B.} = \sum_i \frac{\partial A}{\partial q_i} \frac{\partial B}{\partial p_i} - \frac{\partial A}{\partial p_i} \frac{\partial B}{\partial q_i}$$

در واقع این معادله بیان می کند که اگر دو کمیت پواسون A و B را در نظر بگیریم و $\{A, B\}$ را به عنوان پواسون تعریف کنیم، این معادله بیان می کند که این دو کمیت پواسون با هم همگرا هستند. این معادله را می توانیم به صورت $\{p, H\} = 0$ بنویسیم.

$$\text{VI: } \frac{dp}{dt} = \frac{\partial p}{\partial t} + [p, H] = 0 \quad \text{VII}$$

این معادله بیان می کند که اگر p و H را در نظر بگیریم و $\{p, H\}$ را به عنوان پواسون تعریف کنیم، این معادله بیان می کند که این دو کمیت پواسون با هم همگرا هستند. این معادله را می توانیم به صورت $\{p, H\} = 0$ بنویسیم.

معادله لیورینگ که در بالا نوشتیم این است که $\{p, H\} = 0$ را به عنوان پواسون تعریف کنیم. البته این معادله کار ما را به سبب این که در بالا نوشتیم $\{p, H\} = 0$ را به عنوان پواسون تعریف کنیم.

این معادله را می توانیم به صورت $\frac{dp}{dt} = \frac{\partial p}{\partial t} + [p, H] = 0$ بنویسیم. این معادله را می توانیم به صورت $\{p, H\} = 0$ بنویسیم.

پس این معادله را می توانیم به صورت $\{p, H\} = 0$ بنویسیم. این معادله را می توانیم به صورت $\{p, H\} = 0$ بنویسیم.

معادله (۱۷) جواب می دهد اگر به شکل کوانتوم آنتروپی نگاه کنیم به این صورت است که ρ تابعی از H باشد، معروف ترین آن $\rho = e^{-H/KT}$ است که توزیع بولتزمن می باشد.

$$[\rho, H] = 0 \rightarrow \begin{cases} \rho = \text{ثابت} \\ \rho(H) \end{cases}$$

نکته به جایگاه مختلف که ما برای این معادله در دست می آوریم (یعنی ρ ها مختلف) ما به آن آن بل ها می گفتیم، یعنی می گوئیم که ما این توزیع ها را در آنجا می بینیم و در آنجا می بینیم که به آن آن بل ها می گوئیم و می بینیم که این ρ تابعی از H باشد یعنی بر هم کنش با اطراف فقط بر سید تبادل انرژی باشد و حجم و تعداد ذرات ثابت باشد که به آن آن بل کوانتوم می گوئیم و وقتی معادله را حل کنیم برای این حل ρ بصورت $e^{-\beta H}$ بدست می آید. آن بل کوانتوم می گوئیم، آن بل کوانتوم است اما معمولاً در هم سیستم های ما حجم را ثابت می کنیم؛ در این آن بل کوانتوم هم بتواند تبادل انرژی داشته باشد و هم زره تبادل شود، به آن آن بل کوانتوم بزرگ (The Grand Canonical Ensemble) می گوئیم که تعمیم یافته آن بل کوانتوم است و بصورت $e^{-\beta H - \mu N}$ می باشد.

این کارها، کارهای جدید نیست و در قرن نوزدهم انجام شد، یعنی مکانیک کوانتوم صحت پذیر است و می تواند این را توضیح دهد که وجود دارد معادله لایبزن (۱۷) ضمیمه معادله کوانتوم است.

روشنایی که در اینجا می بینیم، روشنایی است که در کوانتوم مکانیک هم از آن استفاده می شود مثل تحول زمنی سیستم با $e^{-iHt/\hbar}$ می شود و در مکانیک کوانتوم $\rho = e^{-H/KT}$ این طور به نظر می رسد که $\frac{1}{KT}$ در واقع نقش $i\hbar$ را بازی می کند. ضمیمه از روشهای ریاضی که در کوانتوم استفاده می کنیم، به خوبی بعد از آن در کوانتوم مکانیک استفاده کرده اند و به کارهای زمنی ما می رسد.

البته این دو کار کاملاً متفاوت از هم هستند و فقط روشهای ریاضی که برای آنها بکار می رود، شبیه هم هستند و بین این دو هیچ ربطی ندارند.

اتفاقاً در مکانیک کوانتوم دقیقاً به این موضوع اشاره شد که اگر تبدیل زیر را انجام دهیم بدون اینکه اصلی برای آن وجود داشته باشد، تمام ضمیمه به کوانتوم می رسد و نمی دانیم دلیل آن چیست! خوب بختانه چون ریاضیات آنها شبیه هم هستند، از روشهای هم استفاده می کنند و این هم ربطی به هم ندارند.

$$\left\{ \right\}_{P.B.} \rightarrow \frac{1}{i\hbar} [\quad]$$

حالا منظور که گفتیم یک جواب معروفی معادله (۱۷) همین این است که ρ ثابت باشد، یعنی مثبت همین است آن بل کوانتوم که می تواند برای ما صحت بقا را بیاورد کند.

حال از این استفاده می کنیم و چند سوال از آن حل می کنیم و می بینیم که می تواند مکانیک کوانتوم را در هم سیستم برای ما بیاورد کند.

حال به اولین نوع آن بل کوانتوم می پردازیم.

The Microcanonical Ensemble: آن سیستم‌های میکروکانونیک

در این آن سیستم فرض می‌شود که حجم، تعداد ذرات و انرژی ثابت باشند
 به دلایلی که قبلاً بیان شده‌اند، انرژی کل سیستم E ثابت است و در هر لحظه در یک حالت با انرژی $E \pm \Delta_2$ قرار می‌گیرد.
 به دلایلی که قبلاً بیان شده، بین حالت‌های انرژی را این طرز درجه می‌نویسیم:

$$E - \Delta_2 \leq H(p, q) \leq E + \Delta_2$$

حجم این فضای فاز برابر است با:

$$\omega = \int dw = \int d^{3N}q d^{3N}p$$

توجه کنید که برای آن سیستم‌هایی که این معنای H تعریف شده است!

آن سیستم‌های میکروکانونیک را آنهایی می‌نامیم که در آن فضای فاز در آن صورت قرار دارند.

$$P(p, q) = \begin{cases} \frac{1}{\omega} & E - \Delta_2 \leq H \leq E + \Delta_2 \\ 0 & \text{غیر صحت} \end{cases}$$

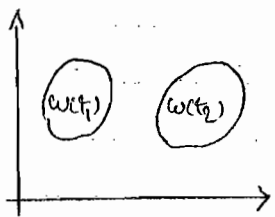
بنابراین آن سیستم‌ها را این صورت می‌نویسند:

$$\langle f \rangle = \frac{1}{\omega} \int f d^{3N}q d^{3N}p$$

توجه کنید که در این نوع آن سیستم‌ها، این سیستم‌ها آن‌قدر که بصورت به هم می‌گیرند چون M ثابت است، بنابراین به رابطه M^2 از صورت و فرج حذف می‌شود و همان‌طور که می‌بینیم، این تعریف کنیم و یک شرط آن‌ها می‌باشد!

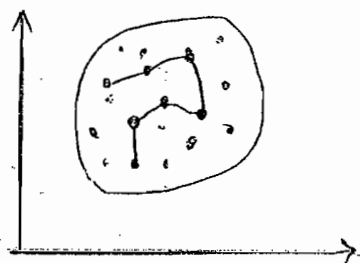
توجه کنید $\langle f \rangle_{ave}$ تعریف می‌شود

اما برای این نوع آن سیستم‌ها که در واقع کم‌کم به این اتفاق می‌افتد، این سیستم‌ها (تقریباً) با هم فرقی نمی‌کنند.
 دلیل ما این است که از آنجایی که این M به زمان وابسته نیست، در هر لحظه که نگاه کنیم، همان فضای فاز را در زمان t_1 یعنی $\omega(t_1)$ و در زمان t_2 یعنی $\omega(t_2)$ می‌بینیم و هر دو یکسان هستند، چون زمان در این حالت ندارد.



در هر لحظه چون حالت‌های ممکن این آن سیستم چون M ثابت است، در واقع می‌گویند که تمام نقاط این فضای فاز هم‌بسته و در اتصال هستند و هیچ فرقی با هم ندارند، و وقتی زمان می‌گذرد سیستم از این میکروکانونیک به میکروکانونیک دیگر می‌رود و...

چون سیستم‌ها در اتصال هم هستند، این در هر زمانی با احتمال یکسان در آنجا وجود دارند است. فرقی که این است این است که وقتی می‌بینیم آن سیستم می‌گیریم، در این روی آنجا می‌توانیم (صاف می‌بینیم)، وقتی می‌بینیم (صاف می‌گیریم) روی آنجا که هیچ فرقی ندارد.



چون برای این نوع آن سیستم‌ها، لزوماً از آنجا که این سیستم‌ها در آنجا قرار می‌گیرند، قبلاً هم گفتیم که این فضای فاز، این است که تمام نقاط درجه می‌نویسیم و در هر لحظه هم‌بسته و قابل اتصال هستند و وقتی زمان می‌گذرد، این سیستم‌ها که در هر لحظه در آنجا قرار می‌گیرند، از آنجا که می‌بینیم، این سیستم‌ها که در هر لحظه در آنجا قرار می‌گیرند، وقتی می‌بینیم آن سیستم‌ها که در هر لحظه در آنجا قرار می‌گیرند.

تا این حالت جمع می کنیم و تقسیم بر ۳۰ می کنیم و سه از اینها که تمام این حالتها مساوی احتمال هستند می قسمتی از اینها
 به ۱۵ تا از اینها و عدد آنها را قدر کسرت آنها کنیم و تقسیم بر ۱۵ کنیم و صیغ هم را جمع کنیم و تقسیم بر تعداد کل کنیم فرق می کند.
 این فقط می طر این است که هم آنها مساوی احتمال هستند، مثلاً ۵۰ تا از آنها را جمع کنیم و تقسیم بر ۵۰ حالت کنیم، چون آنها
 با هم فرق ندارند، اگر ۱۵ تا از هم در تقسیم و تقسیم بر ۱۵ کنیم فرق نمی آید.
 فقط در این شرایط است که می بینیم هم آنها مساوی دقیقاً همان می بینیم هم می شوند، یا به عبارتی همان چیزهایی هستند که در این
 مسئله هم کنیم، مقدار می دانیم از اینها هم می خواهد بود، اگر آن اصل می شود که می باشد.
 در تقسیمها باید مراقب این موضوع باشیم، در اینجا ما احتمال می دهیم که می کنیم و می بینیم به احتمال بعد از اینها این مقدار نیست، آید
 و سه در اینها می گوئیم دقیقاً همین بدست می آید!

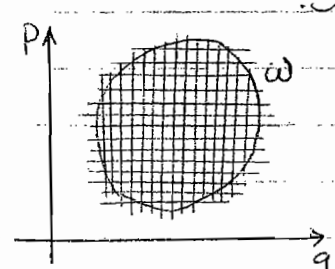
و اگر می بینیم به چیزهایی که قبلاً می بینیم، اگر می بینیم از اینها حساب کنیم باید تعداد حالتها می قابل حصول را حساب کنیم، برای این کار
 هم این فضای فاز را حساب کنیم اما چون تعداد اینها هم حساب کنیم و این چیزی که ما حساب می کنیم 3^N و 3^N عدد دارد و باید
 طول x (مختصر) 3^N دارد، اما وقتی ما می بینیم از اینها حساب کنیم ما h را حساب می کنیم که h تعداد دارد و می توانست
 این در اینها بدست است که این h مناسب با تعداد حالتها می قابل حصول است اما باید این هم حساب کنیم و تقسیم بر چیزی می کنیم که
 می از اینها می بینیم یعنی یک نقطه از فضای فاز اشغال کرده است.
 این جمله به همین جهت چون بزرگترین h است! بزرگترین h است که در اینجا نقطه می ندارد و نقطه می ندارد، می گفت اگر هم فضای فاز را
 با تقسیم و می بینیم تعداد حالتها می قابل حصول را می بینیم باید این حالتها مساوی احتمال هستند، می بینیم:

حجم فضای فاز بر طول

$$\Omega = \frac{\omega}{\omega_0}$$

حجم فضای فاز با تقسیم
 (طول یک سکه و صالت)

از طرفی این موضوع یک مثل بر او می نشاند، در واقع به از اینها هر نقطه q و p را دقیقاً می بینیم، این جمله به نقطه می بینیم
 بزرگترین اسم فضای فاز که به طول یک h است، اسم گذاشت و این h را بزرگترین چیزی می دانند است
 با توجه افزونی آنرا به آن نگاه کنیم به این علت است که حجم فضای فاز را نقطه نمی می بینیم و تقسیم بر کوچکترین و بعضی می بینیم که
 کوچکترین و بعضی برابر h است که برابر h می باشد و این عدد h از آنجا می آید می دانند است.



فرض می کنیم این کسرت در کسرها می بزرگ شود و می بزرگ شود و وقتی آنرا به سمت صفر
 می بینیم حجم می بینیم به آن ربط پیدا نمی کند، این معنی می آید که

در واقع تعداد حالتها را این طور حساب کرد که برابر است با حجم فضای فاز بر طول تقسیم
 بر حجم یک سکه فضای فاز.

حجم فضای فاز را می بینیم، چند مثال می بینیم و آن h می بینیم که اگر حجم فضای فاز را همان h بداند می بینیم
 هم چیز درست می شود، در زمان بزرگترین اینها می بینیم که h را گذاشتند و برای N زده می شد h^N

$$\omega_0 = \Delta q \Delta p^{3N} \equiv h^{3N}$$

حجم فضای فاز یک سکه و صالت

اسم را فعلاً h^{3N} میگیریم و ثابت h را بعداً در محاسبه ثابت پلانک وارد میکنیم. بعداً در فصل ۳۱ بازنوع مربوط به ذره آزاد را میخوانیم.

مثال: ذره آزاد

حاصلگیری برابر است با:

$$H = \sum_{i=1}^{3N} \frac{p_i^2}{2m}$$

$$\omega = \int d^3q d^3p$$

فرض در است در V تصویر شده اند، برای حرکت ذره، d^3q برابر V است. $d^3q = dq_1 dq_2 dq_3 \dots$ که در N آزادیها d دارد d^3p هستند، این صورتها از آنجا که N درجه از N هستند پس V^N است.

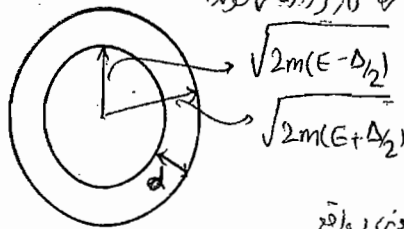
$$\omega = \int d^3q d^3p = V^N \int d^3p_1 d^3p_2 \dots d^3p_N \quad (1)$$

یک قید در انرژی وجود دارد:

$$2mE - \Delta_{1/2} \leq \sum_{i=1}^{3N} p_i^2 \leq 2mE + \Delta_{1/2}$$

این رابط یعنی حجم کره $3N$ توری را البته حجم پوینت میباشند.

این برای حساب انتگرال با N درجه $3N$ توری در نظر میگیریم که با شعاع d از مرکز آن است.



حال باید این دو حجم را از هم کم کنیم.

طبقه قبلی هم وسط یک کره دیگر را بدست آورده بودیم. برای تقویت بهتر کنیم

فاصله d را فضا در سطح کره $3N$ توری کنیم که اندازه آن برابر E باشد یعنی در واقع

این هم را هم برانیم بنویسیم:

$$\omega = d \times \frac{2\pi^{3N/2}}{(3N/2 - 1)!} (2mE)^{3N/2 - 1/2} \quad (2)$$

$$S_N(R) = \frac{2\pi^{N/2}}{(N/2 - 1)!} R^{N-1} \quad R = \sqrt{2mE}$$

این فضا در سطح قبلی هم وسط یک کره $3N$ توری بدست آورده بودیم. بر تقویت بهتر کنیم ω دهیم که اگر رابط V را برابر

$E + \Delta_{1/2}$ و $E - \Delta_{1/2}$ بنویسیم و از هم کم کنیم برای حجم سطح در نظر در فاصله d است. که فضا d از فضا در سطح

بدست میآید پس d است.

$$d = \sqrt{2mE} \left[\left(1 + \frac{\Delta}{2E}\right)^{1/2} - \left(1 - \frac{\Delta}{2E}\right)^{1/2} \right]$$

$d \approx \Delta \sqrt{\frac{m}{2E}}$ (3) Δ فضا که یک است رابط با Δ رابط هم Δ است. پس بدست میآید:

$$d \approx \Delta \sqrt{\frac{m}{2E}} \quad (3)$$

که در رابط V قرار دهیم:

$$\omega = \frac{\Delta}{E} V^N \frac{(2m\pi E)^{3N/2}}{[(3N/2 - 1)!]} \quad (4)$$

از طرفی از نسبت قبل تعداد فوتون‌ها قبل و بعد را نسبت آورده بودیم:

$$\Gamma = \frac{V^N (2\pi m E)^{3N/2}}{h^{3N} (3N/2)!} \cdot \frac{3N}{2} \frac{\Delta}{E} \quad (5)$$

از این معادله معلوم است که این Γ باید برابر $\frac{\omega}{\omega_0}$ شود یعنی رقم مضاعف فاز تقسیم بر رقم بسط می‌شود. پس فرآیند یک‌ساز می‌شود پس باید این نسبت $\frac{\omega}{\omega_0}$ برابر Γ شود.

$$\Gamma = \frac{V^N (2\pi m E)^{3N/2}}{h^{3N} (3N/2)!} \cdot \frac{3N}{2} \frac{\Delta}{E} = \frac{\omega}{\omega_0} \stackrel{(4)}{=} \frac{1}{\omega_0} \left[\frac{\Delta}{E} V^N \frac{(2\pi m E)^{3N/2}}{(3N/2 - 1)!} \right]$$

$$\Rightarrow \frac{V^N (2\pi m E)^{3N/2}}{h^{3N} (3N/2)!} \cdot \frac{3N}{2} \frac{\Delta}{E} = \frac{1}{\omega_0} \left[\frac{\Delta}{E} V^N \frac{(2\pi m E)^{3N/2}}{(3N/2 - 1)!} \right]$$

نتیجه: $\omega_0 = h^{3N}$

این h^{3N} چون از Γ نسبت آمده بود همان ثابت پلانک است.

Γ از کوانتوم ثابت نسبت آورده بودیم و در اینجا عدم قطعیت را قبول داشتیم.

البته خاطر نشان هست که با تقسیم به نسبت به این صورت (یعنی h^{3N}) نسبت آورده بودیم و این در معادله $P = NKT$ را نسبت آورده

بودیم و با منظور صحت P را بر حسب E و کار آرد. نسبت آورده بودیم و در نتیجه یک نام از آنجا h ظهور می‌کند.

در اینجا هم می‌توانیم بگوییم که این h را با این جلد بر روی h و بعد که معادلات ماکروسکوپی را بنویسیم نسبت می‌آوریم پس نتیجه می‌گیریم که این h همان

ثابت پلانک است که در آنجا درج شده است و می‌بینیم که دقیقاً همان h پلانک همان است.

مثال انوار

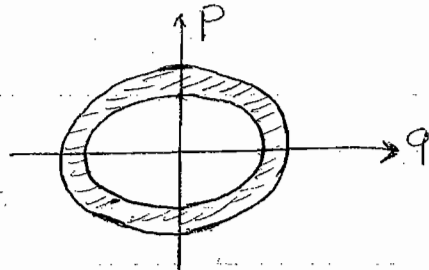
اگر بخواهیم برای نورانی این کار را کنیم، سطح موج و زخم (گرم) ارتفاع E فاز بصورت بیضی می‌شود، که معادله آن به این صورت می‌باشد:

$$\frac{P^2}{2mE} + \frac{q^2}{2E} = 1$$

معادله یک بیضی است
نورانی در یک بُعد

$$\left(\frac{2E}{m\omega^2} \right)^{1/2} (2mE)^{1/2}$$

نیم قطری بزرگ در یک بُعد آن هست



برای هر کدام از این بیضی‌ها که انرژی آن E باشد، می‌توانیم که این شکل را بکشیم:

حجم اشغال شده: $\omega_1 = \frac{2\pi E}{\omega} \quad (I)$ چون $\pi ab = \pi (2mE)^{1/2} \cdot \left(\frac{2E}{m\omega^2} \right)^{1/2} = \frac{2\pi E}{\omega}$

حال آنکه ω مربوط به کم فضا یا فاز را می باشد، ω_0 یعنی کم فضا را می بینیم

(I) \Rightarrow کم فضا یا فاز : $\omega = \frac{2\pi(E + \Delta/2)}{\omega_0} - \frac{2\pi(E - \Delta/2)}{\omega_0}$

$\Rightarrow \omega = \frac{2\pi\Delta}{\omega_0}$ (II) $\omega_0 \rightarrow$ فضا

تعداد حالتها یا حالتها

تعداد حالتها یا حالتها : $\Gamma = \frac{\omega_0}{\omega_0} \stackrel{(II)}{=} \frac{2\pi\Delta}{\omega_0 h} = \frac{\Delta}{\omega_0 h}$

h : \downarrow یعنی کم فضا یا فاز را می بینیم

تعداد حالتها یا حالتها

Δ کم فضا یا فاز است که تقسیم بر کم فضا یا فاز شده است، این معرف تعداد حالتها است

این کار را می توان برای N نوسانگر انجام داد (فرا فرکانس را می توان از فرکانس را می توان جدا کرد)

حالا بعد از این که دیدیم که در حالت کوانتیزه، به نظر می آید که در حالت کوانتیزه، ω_0 را می توان از فرکانس ω_0 جدا کرد. ω_0 را می توان از فرکانس ω_0 جدا کرد. ω_0 را می توان از فرکانس ω_0 جدا کرد. ω_0 را می توان از فرکانس ω_0 جدا کرد.

جلسه چهارم : ۱۰/۷/۸۵

جلسه گذشته در مورد آن بین میکرو کوانتیزه صحبت کردیم و دیدیم که هر چه از حالتها یا حالتها ω_0 را می بینیم، کم فضا یا فاز را می بینیم.

حالا بعد از این که دیدیم که در حالت کوانتیزه، به نظر می آید که در حالت کوانتیزه، ω_0 را می توان از فرکانس ω_0 جدا کرد. ω_0 را می توان از فرکانس ω_0 جدا کرد. ω_0 را می توان از فرکانس ω_0 جدا کرد.

در مورد این بنیادی هم قضایای فزاینده را باید یادآوری کنیم که هر قضیه‌ای که در مورد فیزیک به اندازه h باشد یعنی آنجا که h کوچک است و h داشته باشیم، وقتی N بزرگ داریم، $3N$ درجه آزادی می‌تواند داریم و $3N$ می‌تواند داریم، به ازای هر q و p یک داریم بنابرین کل آن می‌شود h^{3N} .

اگر فرض کنیم از آن پس استفاده کنیم و در قضیه را بیان کنیم که این قضیه در محاسبات ما ضمیمه اهمیت دارد و فرض می‌کنیم که در این قضیه به آن می‌رسیم، امروزه هم می‌تواند نقطه شروعی برای محکم کارهای تحقیقاتی جدید باشد.

قضیه اول، قضیه همبندی است.

The Equipartition theorem: قضیه همبندی

این قضیه برای تمام آن‌ها بیان می‌کند که گفتم و گزار است و می‌تواند اثبات آنرا فقط برای آن‌ها بیان می‌کند و می‌تواند اثبات کنیم، یعنی آن‌ها می‌تواند که با چند پارامتر N و M و E ، Δ مشخص می‌شود، Δ را برای این انتخاب کرده‌ایم که می‌توانیم آن سطح را با استفاده از قضیه فزاینده بیان کنیم.

به ضمیمه اثبات می‌کنیم که $\langle x_i \frac{\partial H}{\partial x_j} \rangle = ?$ را حساب می‌کنیم.

H که همان هامیلتونی سیستم است که به ازای q_i و p_i می‌باشد، x_i و z_j می‌تواند هر کدام از این q ها و p ها باشد و فرض می‌کنیم که هر دو آنها از یک سیستم باشند و می‌تواند یکی از آنها q_1 و دیگری p_2 باشد.

هامیلتونی: $H(q_i, p_i)$

این قضیه را برای آن‌ها بیان می‌کنیم و اثبات می‌کنیم، در این آن‌ها بیان می‌کنیم که f بیان می‌کند است.

$\langle f \rangle = \frac{\int dw P(q, p) f}{\int dw P(q, p)}$ از آنجا که آن‌ها بیان می‌کنیم که P همان است که در این سوال خارج می‌شوند و با هم می‌توانند.

در تدریس کسیت در روزهای بعدی $x_i \frac{\partial H}{\partial x_j}$ یک نکته‌ای وجود دارد که این است که $x_i \frac{\partial H}{\partial x_j}$ در واقع یعنی می‌تواند محسوسات همبره سرعت در فضای فاز، یعنی $\frac{\partial H}{\partial x_j}$ به p و q می‌تواند یکی از این کسیت می‌تواند محسوس توان یا نیرو و کار را داشته باشد.

این همان است که می‌خواهیم، $\langle x_i \frac{\partial H}{\partial x_j} \rangle = \frac{\int x_i \frac{\partial H}{\partial x_j} dw}{\int dw}$ (1)

که یعنی می‌توانیم که در نظریه واریانس $E - \Delta/2 \leq H \leq E + \Delta/2$ (2)

این رابطه (1) را می‌توانیم به یک صورت ساده‌تر بیان کنیم، اگر f را فرض کنیم H داشته باشیم به قسمتی که در

رابطه (2) صدق کند و می‌توانیم بنویسیم: $f(H | E - \frac{\Delta}{2} \leq H \leq E + \frac{\Delta}{2}) \approx \Delta \frac{df}{dE}$ (3)

$\Delta \frac{\partial E}{\partial E}$ در واقع نقش حجم را بازی می کند که در فرایند تقسیم یک حجم به دو حجم این طرف و آن طرف سطح را از دید فاصله می بینیم که داریم.
 این سطح هم برابری است با متغیر تابعی که در این حجم منقسم است. به عبارتی سطح
 این در واقع به نوعی یک سطح سیلور است، و وقتی یک تابعی مثل $V(R)$ داشته باشیم
 که بر حجم هم را حساب کنیم، ما گوییم سطح برابری است با:

$$\int \alpha \frac{\partial V}{\partial R}$$

بعد صورت هم برابر شد با این سطح در فاصله Δ اگر این Δ خیلی خیلی کوچک
 باشد:

$$\Delta V \propto \frac{\partial V}{\partial R} \Delta$$

در رابطه ① هم $d\omega$ در فرج یک نوع حجم است و در همان رابطه $d\omega$ در صورت هم یک نوع حجم است که با $\alpha_i \frac{\partial H}{\partial x_j}$ وزن می شود
 در همان است که هم H ها در یک بازه کوچک $E - \Delta/2$ تا $E + \Delta/2$ قرار گرفته اند.
 در رابطه ①، در صورت $\int \alpha_i \frac{\partial H}{\partial x_j} d\omega$ نقش اصلی $(d\omega)$ را بازی می کند و در فرج $d\omega$ این نقش را دارد.

پس رابطه ① را می توانیم بیان صورت کنیم:

$$\langle \alpha_i \frac{\partial H}{\partial x_j} \rangle = \frac{\int \alpha_i \frac{\partial H}{\partial x_j} d\omega}{\int d\omega} \approx \frac{\Delta \frac{\partial E}{\partial E} \int \alpha_i \frac{\partial H}{\partial x_j} d\omega}{\Delta \frac{\partial E}{\partial E} \int d\omega} \quad (4)$$

در این رابطه $\int \alpha_i \frac{\partial H}{\partial x_j} d\omega$ کل حجم مورد نظر می باشد یعنی فقط بازه $E - \Delta/2$ تا $E + \Delta/2$ است و این بازه وقتی در $\Delta \frac{\partial E}{\partial E}$ منظور شده است، پس در رابطه بالا اشتغال برای H در بازه E می باشد.
 پس در حقیقت هم (پسند) را این طور می بینیم که هم کل را وقتی صورت E باشد حساب کنیم بعد از آن نسبت به E حساب کرده و در حقیقت سطح پر شده بدست می آید و بعد ضرب در فاصله Δ داریم، برای فرج رابطه هم همین کار را داریم، پس در اشتغال ها بریم را بر می داریم.
 از لحاظ ریاضی این رابطه در حقیقت یک سیلور است.

اشغال بریم در حساب کردن با این معنی است که در فضای فازی که داریم یک ابر سطحی در نظر می گیریم که در آنجا $H = E$ باشد و این دو ابر سطح $H = E + \Delta/2$ و $H = E - \Delta/2$ قرار گرفته اند. ما در فضا Δ خیلی کوچک باشد، وقتی بر حجم این ابر سطح را حساب کنیم هم گوییم ابتدا هم را حساب می کنیم بعد نسبت به E بر می آوریم سطح بدست می آید، بعد این سطح را ضرب در فاصله Δ می کنیم.

در اینجا (4) هم دقیقاً همین کار را داریم، در اشتغال فرج $\int d\omega$ دقیقاً یعنی هم را دارد و پس در اشتغال صورت هم است که فقط آن وزن می شود تا کیفیت $\alpha_i \frac{\partial H}{\partial x_j}$
 این کار هم که داریم به این درد می خورد که هر دو ابر هم از جنس خود است و در این ابر سطحی ما این ابر سطحی را در فضای ما داریم و این ابر سطحی که داریم، پس این که بصورت اشتغال روی کل هم می آید و در این ابر سطحی است که داریم.

از طرف E ثابت است پس: $\frac{\partial E}{\partial x_j} = 0 \rightarrow$ می‌توانیم این را ثابت داریم

(4) $\langle x_i \frac{\partial H}{\partial x_j} \rangle = \frac{\Delta \int_{H \leq E} x_i \frac{\partial (H-E)}{\partial x_j} dw}{\Delta \int_{H \leq E} dw}$ (5)

این رابطه (5) را می‌توانیم به صورت زیر بنویسیم:

فرض کنیم انتگرال معادله (5) را با هم جمع کنیم، هر یک از dw را با هم جمع کرد:

$$\int x_i \frac{\partial f}{\partial x_j} dw = \int x_i \frac{\partial f}{\partial x_j} dx_j dx_1 dx_2 \dots dx_{j-1} dx_{j+1} \dots dx_n$$

یعنی dw را در آنجا که dx_j کم می‌شود است $\equiv dw_j$

$$\int x_i \frac{\partial f}{\partial x_j} dw = \int dw_j \left[\int \frac{\partial (x_i f)}{\partial x_j} dx_j - \int f \frac{\partial x_i}{\partial x_j} dx_j \right]$$

پس در بعضی موارد $\rightarrow \delta_{ij}$

$$\Rightarrow \int x_i \frac{\partial f}{\partial x_j} dw = \int dw_j x_i f \Big|_{x_j(1)}^{x_j(2)} - \int f \delta_{ij} dw_j dx_j$$
 (6)

حال با استفاده از رابطه (6) در رابطه (5) و قرار دادن $(H-E)$ بجای f داریم:

(5) $\langle x_i \frac{\partial H}{\partial x_j} \rangle = - \int dw (H-E) \delta_{ij} + \int dw_j x_i (H-E) \Big|_{x_j(1)}^{x_j(2)}$ (7)

می‌توانیم در اینجا در مورد δ_{ij} و $\int dw_j x_i (H-E) \Big|_{x_j(1)}^{x_j(2)}$ توضیح دهیم. $H-E$ برابر است با E پس وقتی x_j از $x_j(1)$ به $x_j(2)$ تغییر می‌دهد، $H-E$ هم تغییر می‌دهد و در این صورت δ_{ij} و $\int dw_j x_i (H-E) \Big|_{x_j(1)}^{x_j(2)}$ برابر می‌شوند.

(7)-(5) $\Rightarrow \langle x_i \frac{\partial H}{\partial x_j} \rangle = \frac{\delta_{ij} \int_{H \leq E} (E-H) dw}{\int_{H \leq E} dw}$ (8)

حال باید در اینجا انتگرال معادله (8) را با هم جمع کنیم، یعنی $\sum_i \langle x_i \frac{\partial H}{\partial x_j} \rangle = \frac{\delta_{jj} \int_{H \leq E} (E-H) dw}{\int_{H \leq E} dw}$ که در این صورت است:

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} \int_{x=h_1(\alpha)}^{x=h_2(\alpha)} f(x, \alpha) dx = \int_{h_1(\alpha)}^{h_2(\alpha)} \frac{\partial f}{\partial \alpha} dx + \left[\frac{\partial h_2}{\partial \alpha} f(\alpha, h_2(\alpha)) - \frac{\partial h_1}{\partial \alpha} f(\alpha, h_1(\alpha)) \right]$$

در این حالت، $f = E - H$ نسبت به E مشتق می‌گیرد. این عبارت به شکل $f = E - H$ یا $H = E - f$ یا $E = H + f$ نوشته می‌شود. در این صورت $\frac{\partial H}{\partial E} = 1$ است. در صورتی که H به صورت $H = \sum \frac{p_i^2}{2m} + V(q)$ باشد، $\frac{\partial H}{\partial E} = 1$ است. در صورتی که H به صورت $H = \sum \frac{p_i^2}{2m} + V(q)$ باشد، $\frac{\partial H}{\partial E} = 1$ است.

①

$$\langle \alpha_i \frac{\partial H}{\partial \alpha_j} \rangle = \delta_{ij} \frac{\int dw + [0]}{\frac{\partial}{\partial E} \int dw}$$

این رابطه را می‌توانیم به این صورت بنویسیم:

$$\Rightarrow \langle \alpha_i \frac{\partial H}{\partial \alpha_j} \rangle = \delta_{ij} \frac{1}{\frac{\partial}{\partial E} \int dw}$$

$$\Rightarrow \langle \alpha_i \frac{\partial H}{\partial \alpha_j} \rangle = \delta_{ij} \frac{1}{\frac{\partial}{\partial E} \ln \int dw}$$

در این رابطه به درجه $\frac{\partial}{\partial E} \ln \int dw$ که ضرایب α_i و α_j در آن ظاهر شده‌اند، توجه کنید. این ضرایب نسبت به انرژی متوسط E تغییر می‌کنند.

$$\langle \alpha_i \frac{\partial H}{\partial \alpha_j} \rangle = \delta_{ij} \frac{1}{\frac{K}{k} \frac{\partial}{\partial E} \ln \omega - \frac{\partial}{\partial E} \ln \omega_0} = \delta_{ij} \frac{1}{\frac{1}{k} \frac{\partial}{\partial E} (K \ln \frac{\omega}{\omega_0})}$$

ضرایب (متغیرها) $\frac{1}{k} \frac{\partial}{\partial E} (K \ln \frac{\omega}{\omega_0})$

$$\Rightarrow \langle \alpha_i \frac{\partial H}{\partial \alpha_j} \rangle = \delta_{ij} \frac{1}{\frac{1}{k} \frac{\partial}{\partial E} (K \ln \frac{\omega}{\omega_0})} = \delta_{ij} \frac{1}{\frac{\partial S}{\partial E} N, V} = \frac{1}{T}$$

از معادلات ترمودینامیک می‌دانیم $\frac{\partial S}{\partial E} = \frac{1}{T}$ است.

$\langle \alpha_i \frac{\partial H}{\partial \alpha_j} \rangle = \delta_{ij} \cdot KT$

The Equipartition theorem

این عبارت را می‌توانیم به شکل $\langle \alpha_i \frac{\partial H}{\partial \alpha_j} \rangle = \delta_{ij} \cdot KT$ بنویسیم. در اینجا α_i و α_j به صورت q_i و p_i در نظر گرفته می‌شوند. در این صورت $\langle p_i \frac{\partial H}{\partial p_i} \rangle = \langle p_i q_i \rangle = KT$ و $\langle q_i \frac{\partial H}{\partial q_i} \rangle = \langle q_i p_i \rangle = KT$ است.

$$\alpha_i = p_i, \alpha_j = p_i \rightarrow \langle p_i \frac{\partial H}{\partial p_i} \rangle = \langle p_i q_i \rangle = KT$$

$$\alpha_i = q_i, \alpha_j = q_i \rightarrow \langle q_i \frac{\partial H}{\partial q_i} \rangle = \langle q_i p_i \rangle = KT$$

این روابط را برای یک محاسبه کنیم. اگر برای هم نگاه می‌کنیم:

$$\sum_{i=1}^{3N} \langle P_i \dot{q}_i \rangle = 3NKT$$

حاصلگیری‌هایی که معمولاً داریم را می‌توان بصورت ترائج درجه دوم از P و Q هائونست: اگر هم به این صورت بطور مستقیم بدو شود معمولاً باید تبدیلات ویژه‌ای که به آن تبدیلات کاننیک می‌گویند (فصل ۸، ۹، ۱۰، Goldstein) می‌زنیم به آن صورت در می‌آوریم. تبدیلات کاننیک معمولاً بطور ضمنی با q, p های جدید داریم و همین کار دسته معادلات حرکتی داریم که از این معادلات بدست می‌آیند:

$$\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q}, \quad \dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p}$$

حالتی که بین q ها و P ها انجام دهیم در آن صورت حاصلگیری می‌تواند بر حسب P, q قدیم نوشته شود بر حسب P, q جدید و یک سری ثابت نوشته شود. حال اگر طوری باشد که معادلات حرکت عوض نشود و روابط باقی بماند برای P, q جدید می‌توانیم حاصلگیری کنیم و در نتیجه تغییرات معادلات عوض نشود.

$$q_{New} \rightarrow q_{Old} + Q$$

$$\rightarrow K(q, P, q_{New}, P_{New})$$

$$P_{New} \rightarrow P_{Old} + P$$

یک نمونه ساده این قضیه این است که اگر در یک لوله که در آن یک سیال است معادلات حرکت عوض نمی‌شود این یک مورد تبدیل می‌باشد که می‌توانیم آن را (توضیح کنیم) بطور ضمنی چهار دسته تبدیلات کاننیک بدین گونه که این اتفاق برای آن‌ها می‌افتد: ثابت این است که این دسته تبدیلات باعث می‌شود که تغییرات حاصلگیری را به این صورت بنویسیم:

$$H = \sum_i A_i P_i^2 + \sum_j B_j Q_j^2 \quad \text{I}$$

یعنی به عنوان حالات تقیه دوازده P, Q می‌نویسیم.

البته لزوماً A_i تغییرات $\frac{1}{2m}$ را نریزیم نمی‌کنند و B_j هم لزوماً $\frac{1}{2}k$ را نریزیم نمی‌کنند. این عملی اصولاً می‌توانیم به هر سیستمی که سیستم فزونی نسبت دهیم که یک جسم دور و یک ثابت فزونی درازد.

اگر بتوانیم به این صورت نوشت یعنی اینکه نسبت به P, Q از نوع دوم هستند و وقتی از نوع اول را داشته‌اند

$$\sum_k P_k \frac{\partial H}{\partial P_k} + Q_k \frac{\partial H}{\partial Q_k} \stackrel{\text{I}}{=} \sum_k P_k \sum_i A_i 2P_i \frac{\partial P_i}{\partial P_k} + \sum_k Q_k \sum_j B_j 2Q_j \frac{\partial Q_j}{\partial Q_k} \stackrel{\text{II}}{=} 2H$$

$\frac{\partial P_i}{\partial P_k} = \delta_{ik}$ $\frac{\partial Q_j}{\partial Q_k} = \delta_{jk}$

$$\Rightarrow \sum P_k \frac{\partial H}{\partial P_k} + Q_k \frac{\partial H}{\partial Q_k} = 2H$$

تعداد $P_k \frac{\partial H}{\partial P_k}$ جلای تعداد درجات آزادی سیستم است. حال اگر این را با $Q_k \frac{\partial H}{\partial Q_k}$ جمع کنیم و این تعداد درجات آزادی را

$$\Rightarrow \left\langle \sum_k p_k \frac{\partial H}{\partial p_k} + Q_k \frac{\partial H}{\partial Q_k} \right\rangle = 2 \langle H \rangle$$

قضیه هویلی
در صورت آزادی

$$\Rightarrow \langle H \rangle = \frac{f}{2} K T$$

قضیه هویلی

این درصت آزادی (f) در واقع به تعداد درجات آزادی در هر درجه دم بستگی دارد و تغییرات کنونی متعلق به این شکل آزادی است. ما فرض می‌کنیم که سیستم در حالت تعادل است و تغییرات در درجات آزادی (برای آن جهت) در $\frac{1}{2} K T$ است.

این همان چیزی است که از قبل به عنوان قضیه هویلی می‌شناختیم و همگونی حریف p_{2m}^2 دارای میانگین انرژی $\frac{1}{2} K T$ است. این $\frac{1}{2} K T$ را هم می‌توانیم با توجیح بر لزوم نمانده ایم، یعنی اینکه این قضیه‌ای که می‌شناسیم فقط برای سیستم‌های کلاسیک درست است و برای تمام آن‌ها که در این قضیه ثابت کردیم.

از این قضیه استفاده می‌کنیم و یک کسیت تئوری را حساب می‌کنیم. این کسیت در واقع قضیه بیست و معروف است به قضیه ویال. صفت صحت قضیه از قضیه هویلی به دست می‌آید.

قضیه ویال | The Virial theorem

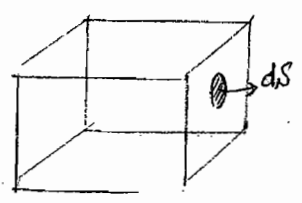
ویال یک سیستم را در این صورت تعریف می‌کنیم:

$$Q = \sum_{i=1}^{3N} \langle q_i \cdot p_i \rangle = \frac{d}{dt} \dots = -3NKT \quad (II)$$

حکایت از $\langle q_i \cdot p_i \rangle$ برابر $K T$ هستند و چون $3N$ داریم برابر $3NKT$ می‌شود. قضیه هویلی $q_i \cdot p_i$ را همین انرژی است. صفت به این است که سیستم آزادی را در آن لحظه حساب می‌کنیم.

مثال باره!

یک گاز غیر برهم کنشی را در نظر می‌گیریم که در یک جعبه به حجم V قرار گرفته است. بین نیروی درونی و بیرونی که بر ذرات وارد می‌شود، همواره از برابری آنها با هم یعنی یک ذره می‌آید و ظن می‌کنیم در برابری است.



همین‌طور تغییر فشار آن در واقع همان نیرویی که از طرف دیواره‌ها به آن وارد می‌شود. نیرویی که از طرف دیواره‌ها می‌شود بر واحد سطح را فشار است. می‌توانیم که بر این سیستم یک کسیت $intensive$ است یعنی:

$F_{int} \Rightarrow$

$F_{ext} \Rightarrow -P dS \rightarrow$ جهت dS به سمت خارج می‌گیریم و نیروها چون به کار می‌آید به سمت داخل است.

$$\oint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s} = \int (\nabla \cdot \mathbf{A}) dV$$

در حال این سیستم (مثلاً برای حالت غیر برهمکنش) $(F_{int} = 0)$ برابر شود با:

$$\mathcal{V}_0 = \sum_i q_i F_i = - \int p d\vec{s} \cdot \vec{r} = -P \int (\vec{\sigma} \cdot \vec{r}) dV = -3PV \quad \text{III}$$

تقسیم کردن

انتگرال سه بعدی

توان درجه آزادی

معادله حالت

$$\text{II} = \text{III} \Rightarrow -3PV = -3NKT \rightarrow \boxed{PV = NKT}$$

این از روی قضیه نظریه کلاسیک است. P, q_i و از روی پارامترهای ماکروسکوپی سیستم T و N (تعداد ذرات) و V (حجم) را بدین ترتیب

اگر فرض کنیم شکل آن قضیه همگامی یعنی $\langle H \rangle = \frac{f}{2} KT$ را بنویسیم، چون در این حالت $f=6$ داریم، این حالتی صرفاً تئوری جینیست می‌باشد، این به تئوری این اثر همبستگی با $\frac{1}{2} KT$ ربط داشته باشد.

$$H = K \sum \frac{p_i^2}{2m}$$

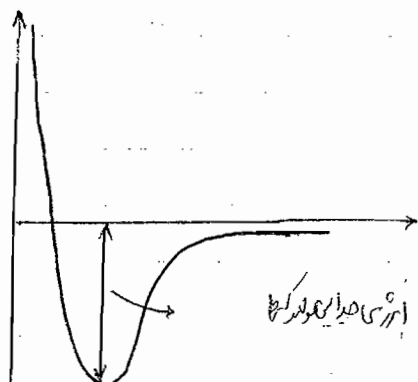
$$\Rightarrow \langle K \rangle = 3N \times \frac{1}{2} KT = \frac{1}{2} 3NKT = \frac{1}{2} \mathcal{V}_0 \Rightarrow \boxed{\mathcal{V}_0 = 2 \langle K \rangle}$$

توان درجه آزادی

این همان چیزی است که به عنوان قضیه ویل مطرح می‌شود.

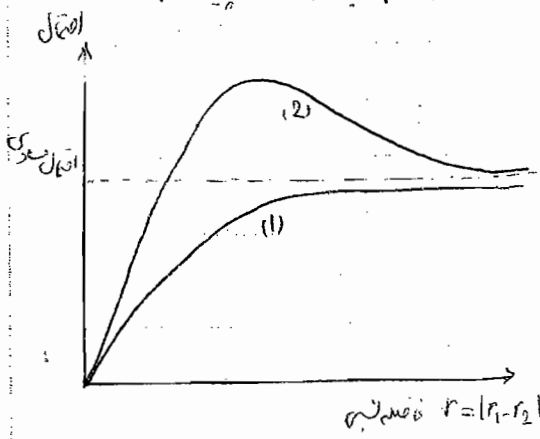
اما نکته جالبی که باید بدانیم آنست که در حالت غیر برهمکنش، یعنی در حالتی که $PV = NKT$ است، همان اثر همبستگی وجود داشته باشد، اثر این شکل نیست، اما اثر همبستگی در انواع خاصی است. و در واقع کم می‌شود و اثر تئوری بین آنها از نوع دافعه است. این است که در حالت بیشتر به درازها ظاهراً برنده و نیروی خارجی بیشتر می‌شود و در نتیجه فشار و در واقع بیشتر می‌شود. حال هم فرض کنیم بیشتر کم می‌شود و اثر دافعه است و در نتیجه در واقع اثر همبستگی کم می‌شود. آیا اثر همبستگی بین آنها در حالت غیر برهمکنش معادله حالت را بدین ترتیب!

فرض کنیم که نیروی همبستگی را داشته باشیم، البته این فرض را در واقع فرض می‌کنیم که در حالتی که $PV = NKT$ است و ما به اثر همبستگی خاص می‌رسیم!



فرض نیروی همبستگی برای سیستم‌های مولکولی در حالت فقط در سیستم‌هایی که برهمکنش‌های آنها از نوع برهمکنش‌های تا نیروی و $\frac{1}{2} KT$ در حالت دافعه هستند و اثر دافعه‌ها خیلی قوی است، یعنی این نیروها آنها را از هم جدا می‌کند. این در حد فزونی است که بیشتر برهمکنش‌ها در حالت غیر برهمکنش است که نسبت نیروها را در نظر می‌گیرد و در نتیجه است که وقتی از آنها با هم می‌کنیم، خصوصیت را ظاهر می‌شود و یک همه از نوع $\frac{1}{2} KT$ دارد.

اسم این تابع توزیع را $g(r)$ می‌گذاریم و به آن تابع توزیع دوزره می‌گوییم. زیرا اگر فرض کنیم این تابع توزیع دوزره‌ای داشته‌اند و می‌خواهند از دوزره‌ها به این صورت است که برای یک سیستم یک دوزره باید همانقدری سیستم را بشناسیم و این سیستم بین دوزره‌ها به طریق مساوی گنیم. و احتمال اینکه دوزره r_1 باشد و دیگری r_2 فرایه عبارتی فاصله آن دوزره هم برابر r باشد، برابر می‌کنیم.



بعضی حال این تابع توزیع علمی از اصول برای سیستم‌های دوزره‌ای به واسطه آنکه بیان می‌کند باید ابتدا تعیین کرد و یعنی این دوزره محله روی هم در فراموشی گیرند. این تابع توزیع نباید از این کمتر بداند که اگر این سیستم‌ها فریب دهند و با وجود این تابع توزیع هر کویه اگر فاصله بین دوزره صفر باشد این احتمال تقریباً صفر است و کنار هم قرار نمی‌گیرند. اگر فاصله دوزره صفر صفری زیاد شود یعنی این ذرات با هم بر هم کشتی می‌زنند و بنا بر این در فاصله زیاد با احتمال مساوی می‌توانند در فاصله از هم قرار بگیرند. گاهی وقتها ممکن است این تابع توزیع به شکل منحنی (2) شود، که این به معنی آن است که یک جبهه‌ای وجود دارد که محله ذرات باشد آن وجود دارد که این دوزره کنار هم قرار گیرند. در هر حال فرض می‌کنیم که باشد باید:

دفعه این دوزره در یک فاصله نسبت به هم قرار می‌گیرند، یعنی جمع هم اصطلاحاً باید یک شود.

پس اگر این تابع توزیع $g(r)$ را از یک صیغه نسبت می‌دانیم و می‌خواهیم در طول دوزره را بشناسیم، که می‌توانیم کار را در دوزره باید بشناسیم و در صورت ذرات را بصورت $\frac{N^2}{2}$ می‌زنیم:

$$\mathcal{V}_{int} = -\frac{N^2}{2} \langle r \frac{\partial U}{\partial r} \rangle = -\frac{N^2}{2} \int g(r) r \frac{\partial U}{\partial r} \frac{d\vec{r}_1 d\vec{r}_2}{V^2} \quad (9)$$

در رابطه بالا دلیل آنکه r این است که $g(r)$ احتمال دوزره‌هاست که $r = |r_1 - r_2|$ است. وقتی بیان می‌کنیم نسبت به r_1 در r_2 را هم در این تابع توزیع دوزره‌ای بصورت $g(|r_1 - r_2|)$ می‌بندیم. این وقت می‌خواهیم آنرا بشناسیم باید هم r_1 و هم r_2 آنرا بشناسیم.

البته می‌توانیم بیان کنیم این در نقطه را تبدیل به نقطه مرکز جرم و فاصله نسبت می‌کنیم:

$$\vec{r}_1 d\vec{r}_2 = d\vec{r} dR, \quad r = r_1 - r_2, \quad R = \frac{1}{2}(r_1 + r_2)$$

در رابطه (9) هر چه به فاصله نسبت داشته‌اند و آنرا در مرکز dR به شکل فضا یعنی هم V را هم در $d\vec{r}$ را هم در $d\vec{r}$ در رابطه هم می‌توانیم داشته‌اند.

$$d\vec{r} = d^3r = r^2 dr d\Omega = 4\pi r^2 dr$$

$$\mathcal{V}_{int} = -\frac{N^2}{2} \frac{1}{V^2} \int d\vec{R} \int 4\pi r^2 dr g(r) r \frac{\partial U}{\partial r} = -\frac{N^2}{2V} 4\pi \int r^2 dr g(r) r \frac{\partial U}{\partial r}$$

$$\Rightarrow \mathcal{V}_{int} = -\frac{2\pi N^2}{V} \int \frac{\partial U}{\partial r} g(r) r^3 dr \quad (10)$$

راشته شده، انرژی سیستم نیز E_0 میسر آن انرژی است.

چون $\Omega(E_r) \sim \Omega(E_0)$ برای درجات انرژی است، برای یک سبب حالتی با E_r را با E_0 معادل می‌کنیم.

اگر $\Omega(E_r)$ را با $\Omega(E_0)$ در E_r معادل کنیم، آنگاه P_r به صورت زیر است:

با فرض $\Omega(E_r) = \Omega(E_0)$ و در نتیجه A به صورت زیر می‌آید:

$$P_r = \frac{\Omega'(E_r) \Omega(E_r)}{\Omega^2}$$

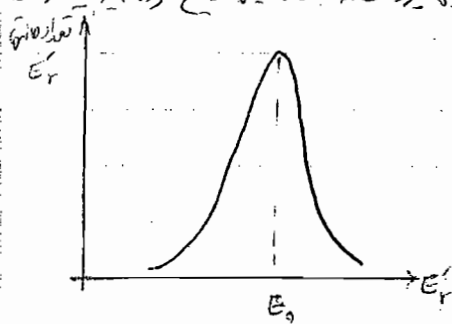
از آنجا که $\Omega(E_r) \sim \Omega(E_0)$ به مراتب از $\Omega(E_r)$ بزرگتر است، می‌توانیم P_r را به صورت زیر بنویسیم:

$\Omega(E_r) \sim \Omega(E_0)$ است که البته در واقع E_r و E_0 تفاوت کمی دارند، زیرا E_r به E_0 نزدیک است.

$$P_r \propto \Omega'(E_r)$$

$$P_r = C \Omega'(E_r) \quad \text{I}$$

چون $\Omega(E_r)$ یک تابع گسسته است، به عبارت دیگر انرژی کل این سیستم بیشتر از E_r است، به عبارتی E_r یک انرژی میسر است. E_r و E_0 را فرض کنیم، اگر فرض کنیم E_r به E_0 نزدیک است، آنگاه $\Omega(E_r) \sim \Omega(E_0)$ و $\Omega'(E_r) \sim \Omega'(E_0)$.



پس $\ln \Omega(E_r)$ را حول E_0 بسط می‌دهیم. شکل آن حول E_0 خطی‌تر است. اگر E_r را با E_0 معادل کنیم، آنگاه $\Omega(E_r) \sim \Omega(E_0)$ و $\Omega'(E_r) \sim \Omega'(E_0)$. شکل آن خطی‌تر است. در ضمن این شکل آفرین باشد بنابراین از \ln آن استفاده می‌کنیم:

$$\ln \Omega'(E_r) = \ln \Omega'(E_0) + \frac{\partial \ln \Omega'(E_r)}{\partial E_r} \Big|_{E_r=E_0} (E_r - E_0) + \dots$$

$$\Rightarrow \ln \Omega'(E_r) \approx \ln \Omega'(E_0) - \beta E_r$$

$$\Rightarrow \Omega'(E_r) = \Omega'(E_0) e^{-\beta E_r} \quad \text{II}$$

$$\text{I, II} \Rightarrow P_r = C \Omega'(E_r) \Rightarrow P_r = C e^{-\beta E_r} \quad \text{III} \quad P_r = \frac{C e^{-\beta E_r}}{\sum_r C e^{-\beta E_r}}$$

در اینجا $\Omega(E_0)$ را هم در ثابت C قرار می‌دهیم. ثابت C از این جهت می‌آید که با توجه به این سیستم درجه آزادی E_r باشد و در E_r یک حالتی داشته باشیم. در این انرژی میسر است. در این انرژی میسر است و از طرفی این ثابت C است. $\Omega(E_0)$ را هم در ثابت C قرار می‌دهیم.

$$\sum_r P_r = 1$$

$$P_r = \frac{e^{-\beta E_r}}{\sum_r e^{-\beta E_r}} \quad \text{IV}$$

* E_1 می تواند نهایتاً E_0 باشد و متغیر مابین است که E_2 ضمیمه ضمیمه ترتیب E_0 است، ممکن است بهتر باشد که حول آن توضیح دهیم
 رابطه هم این کار است که در ادامه انجام می دهیم و در این مسئله که در آنجا در می بینیم که با تغییر بعضی ضمیمه ها می توانه ثابت ماند و این
 E_1 صحت روشن این E_0 است. به همین دلیل ما روش دیگری را بیان می کنیم که این مسئله را حل می کند و ما دوباره رابطه
 را ثابت می آوریم.

رابطه P_1 این که بدست آوریم همان چیزی است که به عنوان توزیع ماکسوی ارفین می شناسیم. این روش که بکار می آوریم، روش آن بعضی این
 صورتی که گفتیم سیستم A می تواند انرژی های مختلف داشته باشد و حالتها را می بینیم و از آنجا می توانیم حالتها را بشماریم و می توانیم

اما اگر می خواهیم آن سیستم نگاه کنیم باید این طور کنیم که مجموعه ای از این سیستم های A را در دست بگیریم. اسم این مجموعه سیستم های
 N را می گذاریم.

$$N = \begin{matrix} \text{تعداد اعضا آن سیستم} \\ \text{یا تعداد کپی های که از سیستم داریم} \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} \text{یا تعداد گشت که سیستم A دارد از توانی نگاه} \\ \text{کردیم در آن از این step می نماند.} \end{matrix}$$

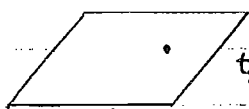
سوال: اگر فرض کنید صحتها را در نظر بگیریم، آن بین می شود؟

آن مثل کل می شود و صحتها نسبت. در حقیقت قبل هم وقتی فضای فاز را می کشیم گفتیم ممکن است که ضمیمه ها جزء حالتها می توانند حاصل می شوند
 باشد اما سیستم لزوماً از همه آنها نمی گذرد و یک اثر سطح را در دست می گیریم.

اعضای آن مثل کپی های مختلف از سیستم هستند مثل حالتها می توانیم حاصل می شوند که سیستم می تواند داشته باشد. در آن مثل می توانیم ترتیب E_0 و
 N کپی های سیستم، هیچ است اما در آن مثل کانونی که در دست می آید که E_0 آنها کپی می باشد.



آن مثل کانونی تغییر می کند و صحتها را می کشیم که N آنها ثابت باشد و E_0 آنها تغییر می کند
 باشد و E_0 های مختلف داشته باشد.



تغییر می آید در فضای فاز فقط یک اثر سطح داشته باشیم و در یک اثر سطح نداریم بلکه یک
 حجم داریم. آن مثل مجموعه ای است که ما از کپی های سیستم در نظر می گیریم و این مجموعه با تغییر N

مختلف سیستم مشخص می شود و صحتها را مختلف سیستم این مجموعه را می سازند اما این مجموعه اثرها می تواند صحتها نسبت است که در کنار
 آنهاست. بعد از N وابسته به بی نهایت مثل می تواند یعنی تعداد مجموعه ها صحتها زیاد باشد

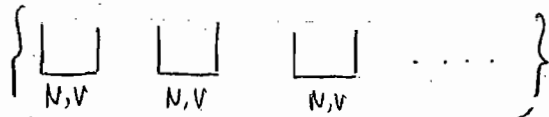
سوال: چه E_0 برای همه اعضا می توانیم آن مثل است؟

در روش آن بسی، در E_0 رابطه می کشیم و ظاهر می آید که چه چیزی تغییر را در این روش وارد می کنیم و در E_0 را وارد نمی کنیم که بی اهمیت حول آن
 رابطه به هم در بار و قید می کشیم. در واقع این طور است که E_0 می تواند از این مقدار صفر تا بی نهایت باشد و تغییر می کند که انرژی

نسبت باشد، چون که در E_0 ثابت است یعنی سیستم می تواند ترتیب است و E_0 می تواند در E_0 نسبت می کشیم و
 سیستم ما که ترتیب است و در این کسب می کشیم که E_0 است، اسم این کسب را N می گذاریم. نسبت چون N می کشیم به معنای N

تعداد انرژی آنها نسبت و می تواند بسیار انرژی صورت بگیرد، اما N و N ثابت هستند و صحتها را می کشیم که N و N
 آنها ثابت باشد اما انرژی آنها می تواند از صفر تا بی نهایت باشد.

در یک لحظه ممکن است نقطه ای از فضای فاز و این شرایط باشد، در لحظه بعد ممکن است نقطه دیگری از فضای فاز این شرایط داشته
 باشد و بعد همه آنها را با هم نگاه می کنیم و یک مجموعه می شود که به این مجموعه آن مثل می کشیم.



همه میکروصفتها یا تعداد قابل حفظه این از اینها که برابران روی آنها کارها می آید انجام دارد آن معین است.
 آن پس یک مجموعه آماری است و همه میکروصفتها یا نیست. حسن نظریه آن اینست که ما ثابت مجموعه آماری و صفتها که وابسته به رابط لازم باشد می توانیم حسابها را انجام دهیم نه اینکه لزوماً مجبور باشیم همه میکروصفتها را در نظر بگیریم.
 حسن اینکه ما مجبور نیستیم همه میکروصفتها را به عنوان آن پس در نظر بگیریم، این است که اگر همه میکروصفتها را در نظر بگیریم در واقع یک صورت میکروصفتها را شمرده ایم و نکته مهم این است که ما همه میکروصفتها را نمی شماریم فقط بازه زمانی را به آن منطبق کنیم.
 می گوئیم سیستم را این بازه زمانی از این میکروصفتها گذراند، این آنگاه این میکروصفتها را در نظر بگیریم و می بینیم که در این صورت ظاهر نیرو و به نتیجه مطلب خواهیم رسید.

در روش اول کل صفتها یا قابل حصول را شمریم و بعد احتمال را بدست می آوریم و می آید می توانیم همیشه همه را بشماریم؟!
 در حالت میکروکاننیک باید N, V, E سیستم ثابت باشد
 در حالت کانونیک باید N, V, μ سیستم ثابت باشد

در حالت Grand Canonic فقط μ سیستم ما به ثابت باشد و N هم به ثابت نیست.
 از هر کدام از صفتها یا فوق به حالت بعدی می رویم (مثلاً از میکروکاننیک به کانونیک) تعداد صفتها یا قابل حصول در هر دو (نظریه های) N اثر N و V, E سیستم ثابت باشد یعنی یک بر سطح و فرضها یا غایب را در نظر داریم، اثر N در μ سیستم ثابت باشد یعنی یک حجم و فرضها یا غایب در نظر گرفته ایم.

بین N تعداد اعضاء آن پس یا تعداد میکروصفتها یا قابل شمرن هستند (می گوئیم تمام میکروصفتها: این میکروصفتها میکروصفتها یا قابل شمرن هستند که سیستم از آنها می تواند بشمارد)

فرض کنیم از N سیستم که داریم، n_r تا از آنها انرژی E_r داشته باشند بین n_r کسری از اعضاء آن پس است که انرژی E_r داشته باشند

$$n_r \rightarrow E_r$$

مغناطی قیده ها زیر باید در نظر داشته باشند

$$\sum n_r = N$$

$$\sum n_r E_r = E = N u \quad \text{از این جهت} \quad u = \frac{\sum n_r E_r}{\sum n_r}$$

و آنچه فوق بیان معنا نیست که انرژی هر کدام از اعضاء آن پس ثابت است، اینها هر کدام یک انرژی دارند و این انرژی جمع فوق را انجام دهیم برابر انرژی کل می شود که البته آنرا بصورت $N u$ می نویسیم، در وضعیت u یعنی انرژی هر واحد آن پس. به عبارت دیگر N اعضاء داریم، انرژی کل E را تقسیم بر تعداد اعضاء آن پس کنیم، می توانیم بگوییم پس این است که هر کدام از اعضاء آن پس بطور متوسط انرژی u را داشته اند. E که ثابت است و اگر N تبدیل به $N+1$ شود، مقدار u عوض می شود.

نکته N کم را در نظر می گیریم، این مجموعه ای از n_r حالت که اولاً در شرط $\sum n_r = N$ صدق می کند و انرژی کل E را پس N تا توزیع می کند، یعنی ممکن است انرژی های مختلفی داشته باشیم.
 مثالی در این مورد می بینیم

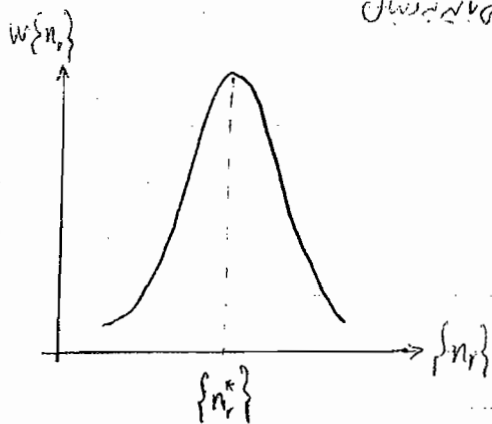
آنرا نیز اهمیت برای این مورد صلب کنیم، می شود:

- (1, 2, 3, 4, 5)
- (1, 3, 2, 4, 5)
- (1, 4, 2, 3, 5)
- (1, 5, 2, 3, 4)
- (2, 3, 1, 4, 5)
- (2, 4, 1, 3, 5)
- (2, 5, 1, 3, 4)
- (3, 4, 1, 2, 5)
- (3, 5, 1, 2, 4)
- (4, 5, 1, 2, 3)

10 حالت نوشتیم که باید در هر یک 2! یعنی 2 حالت (1, 2, ...) را بنویسیم و در هر یک 1! یعنی 1 حالت (2, 1, ...) هم داشته باشیم. این همان چیزی است که در رابطه $\frac{n!}{n_1! n_2! \dots}$ نوشتیم:

$$\frac{5!}{1! 1! 1! 1! 1!} = 20$$

توجه کنید در اصل تعداد تکرار آن بیشتر باشد، وقوع آن محتمل تر است. یعنی با هر چه در مقابل توزیع ما کمتر کنیم بزرگتر.



$W\{n_r\}$ خط یک $\{n_r^*\}$ ما کمترین بار را. این بیان معنی نیست که حالتی که در آن همه n_r ها 1 باشد، یعنی $\{5, 0, 0, 0, 0\}$ است و حالت $\{0, 5, 0, 0, 0\}$ هم یک حالت است و حالت $\{0, 0, 5, 0, 0\}$ هم هست که در آن $W\{n_r\}$ بیشینه است.

حاصل جمع در هر توزیع حالت

$$\langle n_r \rangle = \frac{\sum_{\{n_r\}} n_r W\{n_r\}}{\sum W\{n_r\}}$$

کمیته بدین n_r را بصورت زیر تعریف می کنیم:

$\langle n_r \rangle$ یعنی متوسط تعداد سیستمی که در حالت انرژی E_r قرار گرفته اند (در این انرژی معلوم قرار گرفته اند) چون انرژی هر کدام از این n_r ها مشخص است. هر n_r این یک توزیع دارد و باید فراوانی ظاهر می شود، n_r عدد فراوانی $W\{n_r\}$ تقسیم بر تعداد کل آنها تعداد متوسط سیستمی را که انرژی آنها مربوط به توزیع n_r است را می دهد. احتمال اینکه سیستم در حالت انرژی E_r باشد می شود،

$$P_r = \frac{\langle n_r \rangle}{N}$$

به هر حال انرژی هر سیستم هم ثابت است و آن هم E_r است.

مثلاً در حالتی که سیستم انرژی E_1 است یا E_2 یا E_3 و آفرین جداگانه E_1 است و از آن بیخبر که نمی توانیم بگوییم $\langle n_r \rangle$ تعداد متوسط سیستمی است که انرژی آنها E_r است که در اینجا ظاهر شده است مثلاً در حالتی که n_r یا 1 یا 2 یا 3.

باز هم می گوئیم که این n_r وقتی بزرگ می شود که تراکم سیستم باشد و آن تراکم سیستمی است $\langle n_r \rangle$ هم باید یک کمیته نوشت. این صورت سیستم ما می تواند در حالتی بیرون می آید.

در مسائل که دریم $r = 2$ تا عدد بیست و سه است و در مسئله آخر هم گفته است که باید هرگز آنرا ننویسید تا از دست ندهد.
 حال در فرایع این P_r (در n ها) را بدست آوریم. یک روش، روش تصادفی تعداد است و از فرایع معین در آن استفاده می کنیم.

روش محتمل ترین مقدار: The method of most probable values:

برای سیستم های وابسته مقدار $W\{n_r\}$ ضمیمه زیاد است. برای سیستم هایی که تعداد حالت های قابل حصول آنها ضمیمه زیاد است نه بیش نهایی که در این و تعداد حالت های قابل حصول سه تا بود، این $W\{n_r\}$ تعدادش نظریه های زیاد می شود، مثلاً در مثال که دریم 25، 30 و 35 می شود، اما اگر از صفر تا بیست و سه بود این کمیت (تعداد حالت های قابل حصول) سه از آن بزرگتر خواهد بود.

بنابراین می توانیم با حذف $W\{n_r\}$ کار کنیم، با تقریب آن کار می کنیم و می گوئیم:

$$\ln W\{n_r\} = \ln n! - \sum_r \ln n_r \quad (1)$$

وقتی کمیتی به صورت حاصلضرب ظاهر می شود، لگاریتم آن بصورت حاصلجمع ظاهر می شود.

از تعداد کل سیستم های n که تعداد آن ضمیمه زیاد است، n_1 حالت پایه، n_2 حالت 2 و n_3 حالت 3 و ... هستند که قید $\sum n_r = n$ را دارند.

$$W = \frac{n!}{n_1! n_2! \dots}$$

از این تمام اینها دنبال داریم می گردیم که این $W\{n_r\}$ را بگیریم کند، قید تغییر می کند که در نتیجه بصورت برآورد:

$$\sum n_r = n$$

$$\sum n_r E_r = E$$

پس ما با تقریب کردن یک صفحه سه کار داریم با روش قید دارد؛ باید روشی برای تقریب کردن پیدا کنیم چون n ضمیمه بزرگ است، از ترتیب دست نگین استفاده می کنیم و

$$\ln W\{n_r\} \approx n \ln n - n - \sum_r (n_r \ln n_r - n_r) \quad (1)$$

$$\Rightarrow \ln W\{n_r\} = n \ln n - n - \sum_r n_r \ln n_r + \sum_r n_r = n \ln n - \sum_r n_r \ln n_r \quad (2)$$

واقعاً به دلیل که اینجوری وجود دارد، راه حل سومی نداریم که ضمیمه بزرگ است و این روشی که در اینجا وجود دارد را ندارد، ربط فوق برای $\ln n_r$ وقتی درست است که عدد n_r ها ضمیمه زیاد باشند.
 مثلاً اگر سیستم کم روشی را در نظر بگیریم، همه اینها در حالت پایه قرار می گیرند و تعداد حالت های برآورد شده کمتر و کمتر می شود و در آن صورت بطریقی که بصورت فوق را می توانیم ضمیمه قابل اطمینان نیست.

بنابراین راه حل تقریبی برای تقریب کردن $W\{n_r\}$ داریم که روش ضمیمه مطمئن است و در آن روش از آنجا نقطه استفاده می کنیم که خواص این روش هم به نسبتی که در اینجا بدست می آوریم و قید هم بدست آوریم، بزرگ می شود.

حال اگر فرض کنیم که همه n_r ها ضمیمه بزرگ باشند در آن صورت $\ln N$ را می توانیم به $\ln \sum_r n_r$ که ظاهرش در صورت
 است که با هم برابر شوند پس:

$$\text{②} \quad \ln W \{n_r\} = N \ln N - \sum_r n_r \ln n_r$$

برای آنکه این یک کسیت باشد از آن کسیت تغییرات بگیریم و بعد تغییرات آن را از روی صفر قرار دهیم. در اینجا در شرایط مختلف n_r ها
 مختلف تغییر می کنند بنابراین $\delta \ln W$ را تغییرت زیر می نویسیم:

$$\text{③} \quad \delta \ln W = \ln W \{n_r + \delta n_r\} - \ln W \{n_r\}$$

در رابطه با تغییر در رابطه ② از طرف اول $N \ln N$ متغیر نیست و صرفاً δn_r را تغییر می دهیم پس ما باید تغییرت زیر را بنویسیم:

$$\delta \ln W = - \sum_r (n_r + \delta n_r) \ln (n_r + \delta n_r) + \sum_r n_r \ln n_r$$

و این است که متوجه می شویم δn_r را به صفر میل دهیم پس برای δn_r (یعنی n_r کوچک است) $\ln (n_r + \delta n_r)$ را
 به صورت زیر می نویسیم:

$$\Rightarrow \delta \ln W = - \sum_r (n_r + \delta n_r) \ln (n_r + \delta n_r) + \sum_r n_r \ln n_r$$

$$\left(\ln n_r + \delta n_r \frac{\partial \ln n_r}{\partial n_r} + \dots \right) \quad \frac{\partial \ln n}{\partial n} = \frac{1}{n}$$

$$\Rightarrow \delta \ln W = - \sum_r n_r \ln n_r - \sum_r n_r \delta n_r \frac{\partial \ln n_r}{\partial n_r} - \sum_r \delta n_r \ln n_r + \sum_r n_r \ln n_r + O(\delta n_r)^2$$

$$\Rightarrow \delta \ln W = - \sum_r (\delta n_r \ln n_r + \delta n_r)$$

یعنی از نوع $(\delta n_r)^2$ غافل شویم، این است که در رابطه زیر می بینیم و در نتیجه δn_r را می نویسیم:

$$\text{④} \quad \delta \ln W = - \sum_r (1 + \ln n_r) \delta n_r$$

حال باید این $\delta \ln W$ را از روی صفر قرار دهیم. اگر این δn_r ها مختلف از هم مستقل بودند شرط این می شد که
 $1 + \ln n_r = 0$ یا این δn_r ها مستقل نیستند و یک رابطه بین آنها وجود دارد و رابطه که وجود دارد $\sum_r n_r = N$ است.
 یعنی هم تراشیم یعنی از این n_r ها را برای n_r بقیه n_r ها تراشیم یعنی یک قید وجود دارد. قید دیگر که وجود دارد این است که
 $\sum_r n_r E_r = E$ است، چون E_r ها هر کدام مشخص هستند بنابراین $\sum_r n_r E_r$ هم ثابت است و وجود دارد.
 برای اینکه یک n_r را باقی بماند و بقیه n_r ها را تغییر دهیم از روی صفر می بینیم که اگر n_r را کم کنیم

$$\sum n_r = N \rightarrow \sum \delta n_r = 0 \quad \text{⑤}$$

این یک رابطه بین δn_r ها است.

چون عملکرد از E_r ثابت هستند، آنگاه در تمام بصورت زیر در می آید:

$$\sum n_r E_r = E \rightarrow \sum E_r \delta n_r = 0 \quad (6)$$

این این دو قید (6)، (7) را در $\delta \ln W$ (4) اعمال کنیم و به دست می آوریم:

$$\delta \ln W = - \sum (1 + \ln n_r) \delta n_r = - \sum (1 + \ln n_r + \alpha + \beta E_r) \delta n_r = 0$$

در واقع رابطه $\sum \delta n_r = 0$ را در α ضرب کنیم و $\sum E_r \delta n_r = 0$ را در β ضرب کنیم و با $\delta \ln W = 0$ جمع کنیم، حاصل رو قیدی که داشتیم در رابطه با اعمال شده است.

$$\Rightarrow \delta \ln W = - \sum (1 + \ln n_r + \alpha + \beta E_r) \delta n_r = 0$$

حال اگر رابطه فوق را به دست آوریم، به دست می آوریم که n_r^* و n_r از آن رو ثابت که قرار است به ازای آن $\ln W$ بیشینه باشد.

$$1 + \ln n_r^* + \alpha + \beta E_r = 0$$

$$\Rightarrow \ln n_r^* = -\beta E_r - (\alpha + 1)$$

α یک ثابت است که باید پیدا شود. به کمک α و β هنوز تعیین هستند و باید به دست آوریم n_r^* آنرا از رابطه $n_r^* = C e^{-(\alpha+1) - \beta E_r}$ ثابت حد C (که C هم α و β به دست می آید) را به دست می آوریم. به این ترتیب n_r^* از روی رابطه بالا می آید.

$$n_r^* = C e^{-\beta E_r} \quad (7)$$

از طرفی داریم:

$$P_r = \frac{n_r^*}{N} \quad (8) \quad \text{که} \quad \sum_r n_r^* = N$$

$$\Rightarrow P_r = \frac{e^{-\beta E_r}}{\sum_r e^{-\beta E_r}} \quad (9)$$

فرض ثابت را هم از روی اینده با $\sum n_r = N$ به دست آوریم. حال فرض می کنیم که n_r ها در حالت بیشینه باشند (n_r^*) و n_r ها که در حالت بیشینه نیستند. به این جمع روی n_r ها برابر N می شود یعنی:

$$\sum_r n_r^* = \sum_r C e^{-\beta E_r} = N$$

n_r^* آنرا اینها در حالت بیشینه به طور توزیع می شوند، یعنی حال 1 چند حالت، حال 2 چند حالت و... ولی به هر حال جمع n_r^* ها برابر N می شود.

مانند آن که در این ترتیب باقی میماند که باید آنرا حساب کنیم β است. β را با به ازای $\sum n_r E_r = E$ حساب کنیم
 $\sum n_r = N$ را با α یا در واقع $e^{-\alpha}$ حاصل کرد. β را هم باید از قید $\sum n_r E_r = E$ که در انرژی سیستم ربطی
 میگذرد حساب کنیم.

$$\sum_r \frac{N_r e^{-\beta E_r}}{\sum_s e^{-\beta E_s}} E_r = N u \Rightarrow u = \frac{\sum_r E_r e^{-\beta E_r}}{\sum_s e^{-\beta E_s}} \quad (10)$$

یعنی انرژی میانگین در سیستم و یا بهتر است بگوییم انرژی میانگین سیستم. چون وقتی به انرژی در درجات مختلف نگاه میکنیم به
 هر کلاس از آن کلاس انرژی میانگین نسبت می دهیم. ممکن است که سیستم در انرژی u باشد و بعداً هم در آن انرژی آید یا نه
 ولی بطور میانگین سیستم در انرژی u قرار گرفته است.

توی حالت β می دهیم که این β باید همان $\frac{1}{KT}$ باشد.

$$\beta = \frac{1}{KT}$$

حل معادله فوق بر حسب β کار سختی است اما اگر از قوانین ترمودینامیک استفاده کنیم، β معادل ترمودینامیک انرژی است و ما
 اگر آن را بدست می آوریم $\beta = \frac{1}{KT}$ می شود.
 همان طور که گفتیم باید که این روش کار کرد و همان چیزی را بدست آوردیم که قبلاً با استفاده از شمارش حالتها بدست آورده بودیم و
 البته بزرگم این تفاوت که با حالتها می توانیم حاصل را بشویم. صرفاً فرض کردیم که تعداد قابل توجهی از این حالتها می
 سیستم می تواند در انرژی های مختلف قرار بگیرند و تنها از این مطلب استفاده کردیم.

اینی هنوز بقیه توانا مثل کویف بر بعضی درجه دارد. یعنی عدد اطمینان از ربط $n_r = n_r - n_r \ln n_r$ است و معنی در
 وارد کردن ضرب لاگاریتم در معادله وجود دارد.
 بحث در این مورد مفصل است که آنرا برای همیشه بگذرانیم.

حال چرا اینها با جویات نیستند؟ آنگاه شویم، فرض کنیم که $P_r = \frac{e^{-\beta E_r}}{\sum e^{-\beta E_r}}$ را به هر کلاس از این روشها بدست آوریم چه
 روش شمارش حالتها و چه روش β ها که اینها را اشتباه دانستند.
 می خواهیم ببینیم که P_r بصورت رابطی گفته شده باشد، بطور ممتد اینم کمیات فیزیکی را از آن استنباط کنیم و این با هم جور گفته
 فیزیکی ربط دارد.

$$P_r = \frac{e^{-\beta E_r}}{\sum e^{-\beta E_r}}$$

کمیت $\sum e^{-\beta E_r}$ نقش مهمی را بازی می کند یا خود P_r ها می توانند کل باره های سیستم در انرژی های مختلف که می توانند
 داشته باشند: E_1, E_2, E_3, \dots و هر یک از آنها هر دو روش در نظر می گیریم، چه احتمال دارند
 یک از آنها هر دو روش می تواند $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots$ از روشی داشته باشد (اینجا به ما انرژی مختلف می توان داشته
 باشد) ، اگر همین دو روش هر دو در حالت تعادل گرایی یا بیسی اطرافش باشد یعنی به آن انرژی به عدد و از آن انرژی که در این روش
 یک درجه حرارت ثابت باشد از بین تمام این انرژی ها کدام انرژی برای آن معین تر است و یا هر دو انرژی آن با هم احتمال دارند روش
 آنکه چقدر در هر کلاس از این انرژی ها در آنجا قسمت می شوند یا تابع $\sum e^{-\beta E_r}$ داده می شود. در همین دلیل به این تابع تابع پارسی

سیستم (System Partition Function) P_r که هر کدام از این انرژی‌های قابل حصول سیستم بعد از یک گسش گرایی و بعد از اینکه نسبت به حالت تعادل رسیدند، هم به هم روی سیستم ما دارند.
 این حالت را می‌توانیم به صورت $\sum_r e^{-\beta E_r}$ که به صورت P_r می‌نویسیم و در واقع این P_r همان احتمال است که در هر یک از این حالت‌ها (مثلاً u) شکل گرفته است، این را می‌توانیم به صورت P_r بنویسیم. در این مورد صحبت خواهیم کرد.

حال به فرآیند بسط این P_r بپردازیم که می‌توانیم در رابطه است.

$$P_r = \frac{e^{-\beta E_r}}{\sum_r e^{-\beta E_r}} = \frac{1}{\beta} \frac{\partial}{\partial E_r} \ln \left\{ \sum_r e^{-\beta E_r} \right\}$$

تجزیه انرژی سیستم

$$\frac{\partial}{\partial E_r} \sum_r e^{-\beta E_r} = \sum_r \frac{\partial}{\partial E_r} e^{-\beta E_r} = -\beta e^{-\beta E_r}$$

این $\sum_r e^{-\beta E_r}$ را می‌توانیم به صورت Q_N بنویسیم و این Q_N همان تابع پارتیشن است که در فصل اول دیدیم که این N مولکول است و در هر یک از این حالت‌ها (مثلاً u) قرار دارند (تعداد ذرات را مشخص می‌کند).
 سیستم هم در حالت u قرار می‌گیرد (هم V) است، β که به ما ربط دارد و V در E_r در این است (یعنی آنجا که قبلاً هم گفتیم چیزی که انرژی سیستم را تعیین می‌کند، شرایط انرژی است و ما به شرایط انرژی می‌پردازیم تا بتوانیم انرژی سیستم را مشخص کنیم، مثلاً برای ذرات آزاد داریم که انرژی ذرات u و n و T و V به هم ربط داشته‌اند.)

$$P_r = \frac{1}{\beta} \frac{\partial}{\partial E_r} \ln \left\{ \sum_r e^{-\beta E_r} \right\} \quad (11)$$

$Q_N(V, T)$

حالا نظر کنید u و n و T و V را مشخص می‌کنیم:

$$u = -\frac{\partial}{\partial \beta} \ln Q \quad (12)$$

$$\Rightarrow u = -\frac{\partial}{\partial \beta} \ln Q = + \frac{\sum_r E_r e^{-\beta E_r}}{\sum_r e^{-\beta E_r}} \rightarrow \text{عبارت } u \text{ همان سیستم می‌باشد}$$

میان $Q = \sum_r e^{-\beta E_r}$

فرآیند u همان u را به انرژی‌های داخل سیستم ربط می‌دهیم.

$$A = -\frac{1}{\beta} \ln Q$$

کمیت A را بصورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$d(\beta A) = - \left[\frac{\partial}{\partial \beta} \ln Q d\beta + \sum_r \frac{\partial}{\partial E_r} \ln Q dE_r \right] \quad (13)$$

چون تغییرات Q ناشی از دو حالت است β و E_r ،
 ما در اینجا می‌بینیم که Q چیست و شرط داریم تغییرات آنرا حساب می‌کنیم یک قسمت از تغییرات Q ناشی از β و یک قسمت ناشی از E_r می‌گیریم.
 E_r و β از یکدیگر مستقل هستند. E_r مربوط به یک مولکول خاص است و β مربوط به روابط به حالت تعادل است و ما می‌دانیم که در این تعریف هر دو.

یا توجه به اینکه du تغییر انرژی می‌شود سیستم و dW تغییرات انرژی در اثر عوامل خارجی، کارایی و قانون اول ترمودینامیک هرگز به $du - dW$ تغییر نمی‌کند و در اینجا می‌گوییم تغییرات گرما یک کمیت دینامیک کامل است، این ما برای نتیجه‌ای که گرفتیم از قوانین ترمودینامیک استفاده کردیم فقط برای اینکه بتوانیم β را پیدا کنیم.

از روابط در بالا می‌توانیم انرژی دینامیک کامل را خواهیم به یک دینامیک نا کامل بصورت βdQ تبدیل کنیم، باید β یک کمیت intensive باشد، که البته در اینجا باید کمیت intensive می‌باشد که از خودش $\frac{1}{A}$ باشد.

اگر کمیت intensive ای که در این دو سیستم برابر می‌شود را A می‌گذاریم و برای A معادله همبستگی ثابت K قرار می‌دهیم که KT از جنس انرژی باشد:

$$\beta = \frac{1}{KT}$$

چهارمات نتیجه β همان کمیت تغییرات که وقتاً سیستم A و A در حال تعادل هستند این کمیت باید در نقاط A باشد که به یک نقطه معادله A باشد و ترمودینامیک هم می‌گوید که باید $\frac{1}{KT}$ باشد. حال که این اتفاق بیفتد از ترمودینامیک استفاده می‌کنیم و می‌توانیم dQ را بنویسیم:

$$Tds = dQ$$

یا به عبارتی:

$$(12) \quad \beta(U - A) = \frac{S}{K}$$

dS یک دینامیک کامل است و ضرایب را هم می‌توانیم قرار دهیم چون در طرف دینامیک کامل هستند. طبق تعریفی که کردیم، A به صورت زیر می‌شود:

$$(13) \quad A = \frac{-1}{\beta} \ln Q \rightarrow \boxed{A = U - TS} \rightarrow$$

انرژی آزاد هندسه برابر است با میانگین انرژی نهایی در حالت تعادل.

این کمیت ضریب هم است که می‌توانیم از روی آن رفتار سیستم را بدانیم. اگرچه ما از سیستم A استفاده می‌کنیم. بنابراین برای A این که ثابت کردیم می‌توانیم یک تعبیر فیزیکی داشته باشیم و آن هم انرژی آزاد هندسه است.

* روشی که بعد از حل مسائل فصل ۲

جلسه ششم: ۱۲، ۱۳، ۱۴، ۱۵

چیزی که در مورد آن سخن گفتیم صحبت کردیم و گفتیم باید سیستم را در نظر بگیریم که در آن انرژی ثابت نیست و سیستم به تدریج محیط اطرافش تبادل انرژی کند. اما پارادوکس آن در حالت تعادل به این صورت است که همزمان با برابری دینامیک و تعداد ذرات در هر دو سیستم ثابت است. بعد ما ترمیم به قیدهایی که داشتیم، پیدا کردیم که اگر حالت‌هایی مختلف انرژی قابل حدس که سیستم می‌تواند داشته باشد را در نظر بگیریم E می‌توانیم که ممکن است گسسته یا پیوسته باشد و در هر دو گسسته یا پیوسته

مگر برای β ، احتمال اینکه سیستم در حالت r از این حالت قرار گیرد در این صورت بدست می آید:

$$P_r = \frac{e^{-\beta E_r}}{\sum_r e^{-\beta E_r}} \quad \text{احتمال}$$

$$\beta = \frac{1}{kT}$$

روش کار اینست که $\beta = \frac{1}{kT}$ است.

در این فرآیند که با انجام داریم و این نتایج را بدست آوردیم اول تعداد حالتها را شماریم، در بدست آوردن تعداد حالتها کنیم یک ربط حول E که از E کم داریم، و با نظریه کنیم این ربط یک ربط دقیق نیست چون E در حالتها ثابت و در واقع از E کم کردن توزیع شده است.

در ضمن داریم که فرآیند از نظریه آنتالپی استفاده کنیم، و فقط داریم:

$$\sum_r n_r = N \quad \text{توزیع حالتها} \\ \sum_r E_r n_r = N U \quad (*)$$

بعد وقت فراستیم از این مقدمات استفاده کنیم، قبول داریم تعداد N صلیب خالص بزرگ است و بعد از آن از یک ربط استفاده کردیم، حال در همان جا باید حواسمان به این هم رسیده و نه آن هم به این است که چون رابطه از یک وضعیت است استفاده کردیم برای این ربط $\ln n_r$ و گفتیم این ربط تماماً صحیح نیست و برای n_r صلیب بزرگ نیست.

بعد گفتیم باید یک روشی را بدست بیآوریم تا با ترفند بالا، تعداد n_r که این n_r ها ممکن است داشته باشند یعنی $\{n_r\}$ بیغینه شود.

حاصلی که بتواند بیشترین n_r که بصورت مقبول است را حساب کنیم.

$$\langle n_r \rangle = \frac{\sum_r n_r W\{n_r\}}{\sum_r W\{n_r\}} \quad (1)$$

زیرا بصورت کافی است این کسرت را تقسیم بر N می کنیم تا در واقع احتمال پیدا شود که کدام از حالتها n_r بتواند بوضوح باید را بدست بیآوریم.

$$P_r = \frac{\langle n_r \rangle}{N} \quad (2)$$

$$W\{n_r\} = \frac{N!}{n_0! n_1! \dots} \quad (3)$$

برای بدست آوردن $\langle n_r \rangle$ این کار را می کنیم، ضریب n_r را به این صورت بودا.

$$\tilde{W}\{n_r\} \equiv \frac{N!}{n_0! n_1! \dots} \omega_0^{n_0} \omega_1^{n_1} \dots \quad (4)$$

سپس وقت همه ω ها را برابر یک بگیریم \tilde{W} همان W داریم است:

$$\tilde{W}\{n_r\} \Big|_{\omega_i=1} = W\{n_r\}$$

حالا این \tilde{W} را بدست می آوریم است که وقتی روی ω ها جمع بزنیم اصول $\langle n_r \rangle$ به جمع آنها نیاز داریم، بصورت \tilde{W} که

داشته باشیم یعنی \tilde{W} مثل $(\alpha_1 + \alpha_2)^N$ باشد، لااقل \tilde{W} را بدست می آوریم که بصورت ترکیبی α_1 و α_2 باشد:

$$(\alpha_1 + \alpha_2)^N = \sum_{\{n_r\}} \frac{N!}{n_1! n_2!} \alpha_1^{n_1} \alpha_2^{n_2} \quad \sum n_r = N$$

$$n_1 + n_2 = N \quad \text{در اینجا}$$

در صورتی که n_1 را صحت دیگری بنویسیم یعنی:

$$(x_1 + x_2)^n = \sum \frac{n!}{n_1! (n-n_1)!} x_1^{n_1} x_2^{n-n_1}$$

که همان رابطه دو جمله معروف است.

البته در توانیم تعداد x ها را بیشتر کنیم، در آن صورت داریم:

$$(x_1 + x_2 + \dots + x_p)^n = \sum_{\{n_r\}} \frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_p!} x_1^{n_1} x_2^{n_2} \dots x_p^{n_p} \quad (5)$$

با استفاده از فرمولها در توانیم رابطه را تبدیل به \sum ها کنیم.

$\{n_r\}$ را که بصورت رابطه (4) در تقسیم این روشها می توانیم جمع مورد نظر را بصورت $(\omega_0 + \omega_1 + \omega_2 + \dots)^n$ بنویسیم.

دو فرمول دیگر را بنویسیم

$$\sum_{\{n_r\}} \tilde{w}\{n_r\} = \Gamma(n, \omega)$$

چیزی که ما لازم داریم کسیت مقول است که اسم آنرا $\Gamma(n, \omega)$ می گویند.

حالتی که ω را ω می بینیم معنی است که باید در وقتید ω را داشته باشیم و n ها

مختلف که در آنجا ω مختلف هستند باید در روش ω برقرار باشد؛ بنابراین وقتی جمع رابطه بالا را بنویسیم، نتیجه می شود

باید به نتایج n_r ها داشته باشیم و در آن فرمولها n_r که در آن در ضمن است n و ω است. با استفاده از رابطه (4) داریم:

$$\Gamma(n, \omega) = \sum_{\{n_r\}} \tilde{w}\{n_r\} \stackrel{(4)}{=} n! \sum_{\{n_r\}} \frac{\omega_0^{n_0}}{n_0!} \frac{\omega_1^{n_1}}{n_1!} \dots \quad (6)$$

از طرفی ما دنبال $\langle n_r \rangle$ هستیم بر این صورت که در P_r با استفاده از روش (4) می توانیم $\langle n_r \rangle$ را حساب کنیم که:

$$\langle n_r \rangle = \omega_r \frac{\partial}{\partial \omega_r} \ln \Gamma \Big|_{\omega_i=1} \quad (7)$$

نهایت این است که ما در اینجا نسبت ω را فقط ω_r متغیر کنیم.

$$\omega_r \frac{\partial}{\partial \omega_r} \ln \Gamma \Big|_{\omega_i=1} = \omega_r \frac{1}{\Gamma} \frac{\partial \Gamma}{\partial \omega_r} \stackrel{(6)}{=} \omega_r n! \sum \frac{\omega_0^{n_0}}{n_0!} \dots \frac{n_r \omega_r^{n_r-1}}{n_r!} \times \frac{1}{\Gamma}$$

وقتی ω_r در آن ضرب شود همان $\Gamma(n, \omega)$ است و $\sum_{\{n_r\}} \tilde{w}\{n_r\}$ است فقط n_r را n_r قرار دادیم:

$$\Rightarrow \omega_r \frac{\partial}{\partial \omega_r} \ln \Gamma \Big|_{\omega_i=1} = \frac{\sum \tilde{w}\{n_r\} n_r}{\sum \tilde{w}\{n_r\}} \Big|_{\omega_i=1}$$

که مقادیر ω هم اینها را در $\omega_i = 1$ حساب کنیم، در آن صورت \tilde{w} و ω هم در رابطه $\langle n_r \rangle$ (رابطه (7))

$$\omega_r \frac{\partial}{\partial \omega_r} \ln \Gamma \Big|_{\omega_i=1} = \frac{\sum \tilde{w}\{n_r\} n_r}{\sum \tilde{w}\{n_r\}} \stackrel{(7)}{=} \langle n_r \rangle$$

بنابراین مسئله ما این است که در یک مورد از رابطه (6) ، $\sum n_r$ را حساب کنیم و بعد $\sum n_r!$ را حساب کنیم و بعد با استفاده از رابطه (7) ، $\langle n_r \rangle$ را حساب کنیم.
 اگر فقط قید $\sum n_r = n$ را داشته باشیم ، جمع در رابطه (6) را همیشه ساده می توانیم حساب کنیم ، در این صورت :

$$\sum_{\{n_r\}} \tilde{W}(\{n_r\}) = n! (\omega_0 + \omega_1 + \dots)^n \quad (5)$$

اما الان این طور نیست چون تنها قید $\sum n_r = n$ وجود ندارد بلکه قید $\sum E_r n_r = Nu$ هم وجود دارد و بین n_r ها فقط یک شرط وجود ندارد که بتوانیم رابطه (5) را بنویسیم.
 نکته n_r ها هم به سمت بی نهایت می روند ، چون اگر این اتفاق می افتد می توانیم از روش فریب تعیین کردن آن استفاده کنیم.
 مسئله را حل کنیم ، اما رابطه تنها چیزی که داریم این است که N به سمت بی نهایت می رود و خیلی ضعیف تر است.

برای آنکه جمع مورد نظر را بنویسیم ، رابطه را حساب کنیم ، از آن روشی که در فصل فریب تعیین می شود استفاده می کنیم و معادله را حل می کنیم.

اقتضا با آن مواجه شده ایم ، باید توابع بی نهایت فریب را حساب کنیم و باید بدانیم که چگونه می توانیم این توابع را حساب کنیم.

$$\frac{1}{(1+t^2-2tx)^{1/2}} = \sum t^n P_n(x)$$

فریب این رابطه را حساب می کنیم ، و با استفاده از آن می توانیم فریب $\frac{1}{(1+t^2-2tx)^{1/2}}$ را حساب کنیم.
 اگر آن را حساب کنیم ، به عبارت دیگر ، می توانیم فریب $\frac{1}{(1+t^2-2tx)^{1/2}}$ را حساب کنیم.
 ما همیشه می توانیم $\frac{1}{(1+t^2-2tx)^{1/2}}$ را حساب کنیم ، اما از آنکه فریب $\frac{1}{(1+t^2-2tx)^{1/2}}$ را حساب کنیم.

برای این کار می توانیم فریب $\frac{1}{(1+t^2-2tx)^{1/2}}$ را حساب کنیم ، و با استفاده از آن می توانیم فریب $\frac{1}{(1+t^2-2tx)^{1/2}}$ را حساب کنیم.

$$G(n, z) = \sum_{u=0}^{\infty} z^{nu} \Gamma(n, u) \quad (8)$$

حس این تابع این است که u را یک ثابت می بینیم و روی n ها می بینیم ، یعنی u ها می توانند یک ، دو ، سه ، ... باشند و در واقع u ها می توانند یک ، دو ، سه ، ... باشند و در واقع u ها می توانند یک ، دو ، سه ، ... باشند.
 در وقت روی n ها ، u ها جمع می شوند و در واقع $\sum E_r n_r = Nu$ را یک فریب می حساب کنیم ، $\sum n_r = n$ را حساب می کنیم ، $\sum n_r = n$ را حساب می کنیم ، $\sum n_r = n$ را حساب می کنیم.
 بنابراین رابطه (8) فریب نیست جز :

$$G(n, z) = \sum_{u=0}^{\infty} \sum_{\{n_r\}} \frac{n!}{n_0! n_1! \dots} (\omega_0 z^{E_0})^{n_0} (\omega_1 z^{E_1})^{n_1} \dots \quad (9)$$

$$G(n, z) = \sum_{u=0}^{\infty} z^{nu} \sum_{\{n_r\}} \frac{n!}{n_0! n_1! \dots} \omega_0^{n_0} \omega_1^{n_1} \dots = \sum_{u=0}^{\infty} \sum_{\{n_r\}} \frac{n!}{n_0! n_1! \dots} \omega_0^{n_0} \omega_1^{n_1} \dots z^{n_0 E_0 + n_1 E_1 + \dots}$$

$z^{nu} = z^{\sum n_r E_r} = z^{n_0 E_0 + n_1 E_1 + \dots}$

$$\sum n_r = n$$

این در رابطه (9) یک قید بیشتر داریم

در تمام موارد

این را به این رابطه یک ربط

(9, 5) =>

$$G(n, z) = (\omega_0 z^{E_0} + \omega_1 z^{E_1} + \dots)^n \equiv [f(z)]^n$$

این $f(z)$ را این طور تعریف می کنیم

$$f(z) = \sum_r \omega_r z^{E_r} \quad (10)$$

اگر z را به یک کسیت مختلط در نظر بگیریم، رابطه (8) چیزی نیست غیر ط لورن تابع $G(n, z)$ بر حسب توان z است و یک

چیزی است شبیه به ط لورن که در واقع صقیقه می بینیم.

فراوانی این رابطه از کجا به دست می آید؟

$$(8): G(n, z) = \sum_{u=0}^n z^{nu} \Gamma(n, u)$$

فراوانی $\Gamma(n, u)$ به این صورت به دست می آید که البته با توجه به عدالت با $f(z)$ می توانیم $f(z)$ را

$$\Gamma(n, u) = \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{f(z)^n}{z^{nu+1}} dz \quad (11)$$

در واقع فراوانی ط لورن را این طور می بینیم (فرض z آفتاب)

$$f(z) = \sum a_n z^n$$

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{f(z)^n}{z^{n+1}} dz \quad (12)$$

انتگرال روی مسیر بسته است که نقطه z را دور می زند

این فرایند n را هم که z حقیقی باشد، ط لورن به ط لورن می بینیم

این باید به صورتی باشد که انتگرال رابطه (11) را در z که n به دست می آید از z دور است و حساب کنیم این ط لورن است

$$I(t) = \oint \Phi(z) e^{t\psi(z)} dz \quad (13)$$

و تکه t ضریب $\psi(z)$ است

معمولا $\psi(z)$ ما از فرم خاصی باشد برای t را هم استوار کنیم، سرفه انتگرال با یک صورت ساده شود

ساده است که داریم (11) این اسم گذاری ما انجام می دهیم

$$(11) \text{ در } \frac{f^n}{z^{nu+1}} \equiv e^{ng(z)}$$

$$\Gamma(n, u) = \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{f(z)^n}{z^{nu+1}} dz = \frac{1}{2\pi i} \oint e^{ng(z)} dz \quad (14)$$

باقی مانده رابطه (13) را

باقی مانده رابطه (13) $\frac{1}{2\pi i}$ که به قدری است معنی $\Phi(z)$ را می بینیم که n و t و $g(z)$ را می بینیم

برسخت قبل از اینکه بهتر بدیم، در این مقایسه شکل خود $g(z)$ را بر حسب $f(z)$ بدست میاریم:

$$\frac{f^n}{z^{n(u+1)}} = e^{ng(z)} \rightarrow g(z) = \frac{1}{n} (n \ln f(z) - (n(u+1)) \ln z)$$

$$\Rightarrow g(z) = \ln f(z) - (u + \frac{1}{n}) \ln z \quad (15)$$

$f(z)$ طبق رابطه (10) تابعی است از z و E_r است که نسبت به z از جنس z است و $z=0$ را به عنوان نقطه صفر می‌داند که $z=0$ است. $\ln z$ و $\ln f(z)$ در همین نقطه صفر می‌شوند و در نتیجه $g(z)$ نیز آنجا صفر می‌شود. $z \rightarrow \infty$ ، در اینجا z نامعین نمی‌شود و باید به محاسبه $g(z)$ یک تابع کلیه از z با توجه به تعریفی که کردیم. این $g(z)$ در رابطه (13) آورده شد که $g(z)$ یک تابع کلیه است. در شکل‌ها ما نیز در این رابطه (13) استفاده کردیم.

برای اثبات رابطه (13) باید اثبات کردیم که $g(z)$ یک تابع کلیه است. این $g(z)$ یک تابع کلیه است و $z=0$ را به عنوان نقطه صفر می‌داند. $z \rightarrow \infty$ ، در اینجا z نامعین نمی‌شود و باید به محاسبه $g(z)$ یک تابع کلیه از z با توجه به تعریفی که کردیم. این $g(z)$ در رابطه (13) آورده شد که $g(z)$ یک تابع کلیه است.

$$(13) \int_{\gamma} \phi(z) e^{t\psi(z)} dz = \int_{\gamma} \phi(z) e^{t u(x,y)} e^{i t v(x,y)} dz \quad (16)$$

زیر آنکه $\phi(z)$ یک تابع کلیه است و $e^{t\psi(z)}$ یک تابع کلیه است و $z=0$ را به عنوان نقطه صفر می‌داند که $z=0$ است. $\ln z$ و $\ln f(z)$ در همین نقطه صفر می‌شوند و در نتیجه $g(z)$ نیز آنجا صفر می‌شود. $z \rightarrow \infty$ ، در اینجا z نامعین نمی‌شود و باید به محاسبه $g(z)$ یک تابع کلیه از z با توجه به تعریفی که کردیم. این $g(z)$ در رابطه (13) آورده شد که $g(z)$ یک تابع کلیه است.

$$\text{Max } u \rightarrow \text{بیشینه هم در انتگرال}$$

نکته مهمی که بر این اساس است، هر تابعی از z و u که $g(z)$ یک تابع کلیه است و $z=0$ را به عنوان نقطه صفر می‌داند که $z=0$ است. $\ln z$ و $\ln f(z)$ در همین نقطه صفر می‌شوند و در نتیجه $g(z)$ نیز آنجا صفر می‌شود. $z \rightarrow \infty$ ، در اینجا z نامعین نمی‌شود و باید به محاسبه $g(z)$ یک تابع کلیه از z با توجه به تعریفی که کردیم. این $g(z)$ در رابطه (13) آورده شد که $g(z)$ یک تابع کلیه است.

بیشینه طول u ، یعنی u است.

شرط اول برای تابع u در بیشینه طول $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y} = 0$ ①

از طرفی $\frac{d\psi}{dz} = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial u}{\partial y} \stackrel{\text{شرط اول}}{=} 0$ ②

$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$ $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$

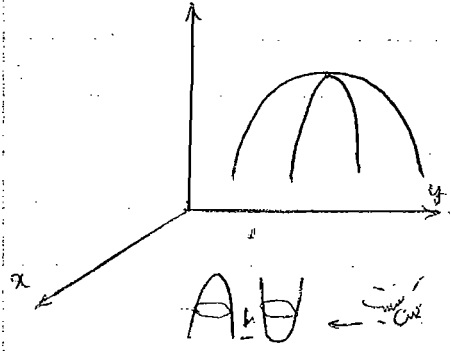
فرض کنیم u و v هر دو z را به تابعی از z تبدیل می‌کنیم. این تبدیل $I(z)$ است که هم حقیقی و هم تخیلی است. $I(z)$ را اصل کنیم و اصل این شرط یعنی u و v هر دو z را به تابعی از z تبدیل می‌کنیم. این تبدیل $I(z)$ است که هم حقیقی و هم تخیلی است.

از طرفی اگر u و v را به تابعی از z تبدیل می‌کنیم، u و v را به تابعی از z تبدیل می‌کنیم.

③
$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \\ \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0 \end{cases}$$

اگر u و v را به تابعی از z تبدیل می‌کنیم، u و v را به تابعی از z تبدیل می‌کنیم. u و v را به تابعی از z تبدیل می‌کنیم.

در صورتی که u و v را به تابعی از z تبدیل می‌کنیم، u و v را به تابعی از z تبدیل می‌کنیم.



④ اگر u و v را به تابعی از z تبدیل می‌کنیم، u و v را به تابعی از z تبدیل می‌کنیم.

$$\nabla u \cdot \nabla v = 0$$

به عبارتی سطح u ثابت و سطح v ثابت، بر هم عمودند. بنابراین ∇u نیز عمود بر سطح u ثابت و ∇v نیز عمود بر سطح v ثابت، در سطحی که عمود هائیک بر هم عمود باشند طبق رابطه (۷)، یعنی ضرایب این دو سطح بر هم عمود هستند. به عبارتی بر این اساس این طور می‌توانیم که سطح $u = ct$ بر ∇u و ∇v ثابت چون $\nabla v \cdot \nabla u$ به هم عمودند.

با بیان پیشین u به v یعنی دنبال v می‌گردیم که u بیشتر در حضور u ثابت باشد و گوییم u یعنی چیزی که بیشتر از v ثابت باشد. u را ثابت می‌کنیم؛ یعنی $u = ct$ و v را $v = ct + u$ و v بر u عمود است. به عبارتی ∇u یعنی جهت بیشتر از u ، و ∇v یعنی جهت بیشتر از v ، و ∇u و ∇v در این راستا با هم عمود هستند. حال اگر در مسیر u بیشتر تغییرات u را داشته باشیم یعنی u را بیشتر از v تغییر می‌دهیم که u ثابت باشد، چون $u = ct$ ، ∇u و ∇v بر هم عمود است و ∇v را هم ثابت می‌کنیم.

بنابراین نتیجه این است که انواع مختلف مسیرهای مختلف $I(t)$ را در رابطه (۱۶) برای u از $u = ct$ خلاص می‌شویم. وقتی $u = ct$ را در $u + v$ بگذاریم، گفتیم v بر u عمود است که u را بیشتر از v تغییر می‌دهیم. کتاب می‌گوید که u بیشتر از v یعنی در v و در u می‌توانیم نقطه u را بیشتر از v تغییر می‌دهیم و در u ∇u بیشتر از v تغییرات u باشد و ∇u و ∇v بر هم عمود است. در این مسیر که u را بیشتر از v تغییر می‌دهیم v آن تقریباً ثابت باشد.

بنابراین به v نزدیک می‌شویم در تقریب $I(t)$ در رابطه (۱۶) $e^{i\sqrt{v}}$ را از u جدا می‌کنیم. حال $u = ct$ را در $u + v$ بگذاریم که u بیشتر از v است و v تقریباً ثابت است، ∇u و ∇v بر هم عمود است.

$$\Psi(z) \approx \Psi(z_0) + (z - z_0) \Psi'(z_0) + \frac{1}{2} (z - z_0)^2 \Psi''(z_0)$$

چون Ψ را ثابت می‌گیریم که این حرکت
منتهی به (۱۷) منتهی است

$$\Psi(z) - \Psi(z_0) \approx \frac{1}{2} (z - z_0)^2 \Psi''(z_0)$$

ما در z_0 که Ψ را تقریباً ثابت است، u را $u = ct$ می‌گیریم بیشتر از v است. $\Psi(z)$ یعنی $\Psi(z) = \Psi(z_0) + u + v$ ، در واقع همان u است که گفتیم u را $u = ct$ می‌گیریم و v را $v = ct + u$ می‌گیریم. u را بیشتر از v تغییر می‌دهیم و $\Psi(z)$ را $\Psi(z_0) + u + v$ می‌گیریم. u را $u = ct$ می‌گیریم و v را $v = ct + u$ می‌گیریم. u را $u = ct$ می‌گیریم و v را $v = ct + u$ می‌گیریم. u را $u = ct$ می‌گیریم و v را $v = ct + u$ می‌گیریم.

$$\Psi(z) - \Psi(z_0) \approx \frac{1}{2} (z - z_0)^2 \Psi''(z_0) = -\frac{1}{2t} \delta^2 \quad (۷)$$

تا که Ψ را ثابت است بود، که Ψ را $\Psi(z_0) + u + v$ می‌گیریم. u را $u = ct$ می‌گیریم و v را $v = ct + u$ می‌گیریم. u را $u = ct$ می‌گیریم و v را $v = ct + u$ می‌گیریم. u را $u = ct$ می‌گیریم و v را $v = ct + u$ می‌گیریم.

لازم تغییر Ψ را $\Psi(z_0) + u + v$ می‌گیریم، که Ψ را $\Psi(z_0) + u + v$ می‌گیریم. u را $u = ct$ می‌گیریم و v را $v = ct + u$ می‌گیریم. u را $u = ct$ می‌گیریم و v را $v = ct + u$ می‌گیریم.

$$\Rightarrow \frac{1}{2} (z - z_0)^2 \Psi''(z_0) = -\frac{1}{2t} \delta^2 \Rightarrow r^2 e^{2i\alpha} \Psi''(z_0) = -\frac{1}{t} \delta^2$$

$$\Rightarrow S^2 = -t \Psi''(z_0) r^2 e^{2i\alpha}$$

$$\Rightarrow S = \pm r |t \Psi''(z_0)|^{1/2} \quad (VI)$$

بنابراین آنچه که می‌خواهیم تغییریم در این مسیر و در واقع آن اتفاق گفته شد و ما آن را بر می‌گردانیم!

$$(13) \quad I(t) = \oint \phi(z) e^{t\Psi(z)} dz \stackrel{(V)}{=} \phi(z_0) e^{t\Psi(z_0)} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-s^2/2} \frac{dz}{ds} ds \quad (VII)$$

انتظار می‌کنیم که اینی گفته‌اند، این است که ما بر اساس نقطه z_0 که نقطه زنی است (همین، چون بیشترین سهم انتقال حول z_0 است و حاصلی جز این نیست. بین حول و حول این نقطه را گرفتیم و در رابطه با $\phi(z_0)$ یک تابع خوش رفتار است و ضمیمه تغییر نمی‌کند البته برای آن است که هندسه در هر این طرف است و هم ثابت است، این از $\phi(z_0)$ گفتیم. بیاییم $\Psi(z)$ هم از رابطه (V) قرار دهیم. در مورد حدود انتقال هم باید که که تا بی‌نهایت طول است نه در z_0 پس به ازای t که از $-\infty$ تا $+\infty$ تغییر می‌کند بخاطر اینکه در انتقال $e^{-s^2/2}$ ظاهر شده و در جهت است که در $-\infty$ و $+\infty$ در z_0 و $-\infty$ به طور آنکه ما یک خوش همگونی می‌شویم. کانه است از آن $\frac{dz}{ds}$ را هم حساب کنیم

$$\frac{dz}{ds} = \left(\frac{ds}{dz}\right)^{-1} = \left(\frac{ds}{dr} \frac{dr}{dz}\right)^{-1} \stackrel{(VI)}{=} \left(e^{-i\alpha} |t \Psi''(z_0)|^{1/2}\right)^{-1} = e^{i\alpha} |t \Psi''(z_0)|^{-1/2}$$

$z - z_0 = r e^{i\alpha}$ $\frac{dr}{dz} = e^{-i\alpha}$

در اینجا رابطه در $e^{i\alpha}$ که در هر دو طرف است و وقتی $\frac{dz}{ds}$ را تغییر می‌دهیم که به $e^{-i\alpha}$ باشد در رابطه (VII) می‌توان آنرا از انتقال بیرون آورد و ما به انتقال $e^{-s^2/2}$ فقط تغییر می‌دهیم، بنابراین:

$$(VIII) \quad I(t) = \phi(z_0) e^{t\Psi(z_0)} e^{i\alpha} |t \Psi''(z_0)|^{-1/2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-s^2/2} ds$$

$$\Rightarrow I(t) \approx \frac{\sqrt{2\pi} \phi(z_0) e^{t\Psi(z_0)} e^{i\alpha}}{|t \Psi''(z_0)|^{1/2}} \quad (VIII)$$

پس آنچه می‌خواهیم انتقال $I(t)$ (8) را حساب کنیم و $\Psi(z)$ را به تابع $\phi(z)$ ضمیمه تغییرات حساب و فریب داشته باشد، لیکن صورت گذار $I(t)$ تقریباً برابر رابطه (VIII) می‌باشد به شرطی که z_0 نقطه زنی تابع ما باشد. $z - z_0 = r e^{i\alpha}$ هم در واقع فارسی است که برای $z - z_0$ در نظر می‌گیریم:

حالا همین را برای s صورت می‌دهیم و اینها را حساب می‌کنیم، البته آنرا حساب می‌کنیم و بعد نتیجه را داخل برادرانه می‌نویسیم.

آنکه اگر α به عقب رفته کنیم، α به بیسیستم Γ از آن گذشته بودیم بر حسب ω ، α_1 ، α_2 ، ... زنده بودیم و از آن زمان Z و Z^* (۶ ص ۶۸)، تابع $B(n, \alpha)$ ، اگر سیستم بصورت جمع روی Z^{n_u} در Γ ها بود (۸ ص ۶۹). بین α و $\Gamma(n, u)$ هم ترانسیت تابع حقیقی باشد، بنابراین هم ترانسیت Z را روی Z^* حقیقی کنیم بدون آنکه هیچ مشکلی پیش نیاید.

با این-ب غایب $\alpha = \alpha_2$ در رابطه (۲۰) برای آنکه از سر تا خلاصان کنیم و با این هم ترانسیت Γ کار را کنیم فقط نسبت حقیقی این عبارت را بگیریم، در این صورت عبارت (۲۰) می شود:

$$\Gamma(n, u) = \frac{f^n(\alpha_0)}{\alpha_0^{nu+1}} \frac{1}{|2\pi n g'(\alpha_0)|^{1/2}} = \left(\frac{f(\alpha_0)}{\alpha_0^u} \right)^n \frac{1}{|2\pi n g'(\alpha_0)|^{1/2}} \quad (21)$$

برای α به عقب رفتن $\frac{1}{n} \ln \Gamma$ ، P_r را هم در نظر بگیریم:

$$P_r = \frac{\langle n_r \rangle}{n}, \quad \langle n_r \rangle = \omega_r \frac{\partial}{\partial \omega_r} \ln \Gamma \Big|_{\omega_r=1}$$

$$\Rightarrow P_r = \omega_r \frac{\partial}{\partial \omega_r} \frac{1}{n} \ln \Gamma \Big|_{\omega_r=1} \quad (22)$$

یعنی $\frac{1}{n} \ln \Gamma$ را α به عقب رفته کنیم

$$\frac{1}{n} \ln \Gamma(n, u) = \frac{1}{n} \left\{ n \left(\ln \frac{f(\alpha_0)}{\alpha_0^u} \right) - \frac{1}{2} \ln(2\pi n g'(\alpha_0) \times n) \right\} = \left\{ \ln f(\alpha_0) - u \ln \alpha_0 \right\} - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n} \ln 2\pi n g'(\alpha_0) + \frac{1}{n} \ln n \right)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{n} \ln \Gamma(n, u) \approx \left\{ \ln f(\alpha_0) - u \ln \alpha_0 \right\} - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n} \ln 2\pi n g'(\alpha_0) + \frac{1}{n} \ln n \right)$$

باید رابطه n را در حد $n \rightarrow \infty$ صدق کنیم، n که به بیسیستم Γ می رود عبارت اول نسبت اول است یعنی α به عقب رفته (۱ ص ۶۹) و $\frac{1}{n} \ln 2\pi n g'(\alpha_0) + \frac{1}{n} \ln n$ در آنجا غایب می شود. پس در حد $n \rightarrow \infty$ داریم:

$$\frac{1}{n} \ln \Gamma(n, u) \approx \ln f(\alpha_0) - u \ln \alpha_0 \quad (23)$$

از طرفی طبق رابطه (۱۰ ص ۶۸) داریم:

$$f(z) = \sum_r \omega_r z^{E_r} \rightarrow f(\alpha) = \sum_r \omega_r \alpha^{E_r} \quad (24)$$

α یک کیفیت حقیقی و مثبت است، پس آنرا به این صورت می نویسیم:

$$\alpha_0 = e^{-\beta} \quad (25)$$

وقتی β را هم بیسیستم Γ می نویسیم، β در حد $\beta \rightarrow \infty$ KT زنده می شود. β را به عقب رفته α از رابطه (۲۳) تعیین می شود. پس هم ترانسیت می نویسیم:

$$\frac{1}{n} \ln \Gamma(n, u) \approx \ln \sum_r \omega_r e^{-\beta E_r} + \beta u \quad (26)$$

یعنی $\langle n_r \rangle$ را داریم:

$$\langle n_r \rangle = \omega_r \frac{\partial}{\partial \omega_r} \ln \Gamma \Big|_{\omega_r=1}$$

توجه داشته باشیم که طبق رابطه (۲۵) β به α وابسته است. α همواره از رابطه (۲۶) بدست می آید.

$$\alpha_0 = e^{-\beta} \quad (25)$$

$$u = \alpha_0 \frac{f'(n_0)}{f(n_0)} \quad (17)$$

در صورت $f(n_0)$ ، u وجود دارد، یعنی باید فرض کنیم که وقتی n از 1 نسبت به w_r بزرگ می شود، β هم به w_r وابسته است و باید تغییرات β نسبت به w_r را در نظر بگیریم. این درج:

(22)

$$P_r = \frac{\langle n_r \rangle}{n} = \frac{1}{n} w_r \frac{\partial}{\partial w_r} \ln \prod_{w_i=1} = w_r \frac{\partial}{\partial w_r} \left\{ \ln \sum_r w_r e^{-\beta E_r} + \beta u \right\}$$

$$\Rightarrow P_r = \frac{\langle n_r \rangle}{n} = \frac{w_r e^{-\beta E_r}}{\sum_r w_r e^{-\beta E_r}} + \left\{ u - \frac{\sum_r w_r E_r e^{-\beta E_r}}{\sum_r w_r e^{-\beta E_r}} \right\} \frac{d\beta}{dw_r} \Big|_{w_r=1}$$

همه مشتقات نسبت به β

همه رابطه ها را با $w_r = 1$ مساوی کنیم، اما اگر جمله دوم داخل $\{ \}$ را مساوی کنیم با u (توجه کنید که u همواره u است)

$$u = \frac{\sum_r E_r e^{-\beta E_r}}{\sum_s e^{-\beta E_s}} \quad (10)$$

این دانه $\{ \}$ صفر می شود، پس w_r را ثابت نگذاریم، P_r می شود:

$$P_r = \frac{\langle n_r \rangle}{n} = \frac{e^{-\beta E_r}}{\sum_r e^{-\beta E_r}} \quad (27)$$

باید فرض کنیم که در این رابطه که در فرمول u قرار داده شده است، w_r را برابر 1 قرار دهیم. این فرض را می توانیم در آن فرضیه u هم قرار دهیم. α همواره 1 است و n همواره 1 است. این فرضیه را می توانیم در آن فرضیه u هم قرار دهیم. α همواره 1 است و n همواره 1 است. این فرضیه را می توانیم در آن فرضیه u هم قرار دهیم.

بنابراین P_r را داریم $P_r = \frac{e^{-\beta E_r}}{\sum_r e^{-\beta E_r}}$ که در آن β همواره 1 است. این فرضیه را می توانیم در آن فرضیه u هم قرار دهیم. α همواره 1 است و n همواره 1 است. این فرضیه را می توانیم در آن فرضیه u هم قرار دهیم.

گفته شد که β به α وابسته است. α همواره 1 است.

$$Q = \sum e^{-\beta E_r} \quad (28)$$

اگر Q نسبت به β برابر Q است، u همواره 1 است.

$$u = \frac{\partial}{\partial \beta} \ln Q \quad (29)$$

و اگر Q را Q قرار دهیم، u همواره 1 است.

$$A = -\frac{1}{\beta} \ln Q \quad (30)$$

A که نسبت به β برابر A است، u همواره 1 است.

قبل از اینکه وارد جزئیات گمانه این کیفیت ها برای چند سیستم کنیم، یک نتیجه دیگر داریم و اینست که تابع پارس پذیر است و نسبت به آن
این A درست همانند را صحبت می کنیم.

که می بینیم آن دردی سیستم را حساب کنیم
یعنی آن دردی را که در سیستم جزئیات با آن دردی ضرب در A
این چیزها را که ما حساب کردیم، می بینیم:

$$\frac{S}{K} = \beta(U - A) \rightarrow$$

$$\frac{S}{K} = \beta(U - A) = \beta \sum_r E_r P_r - \beta \left(\frac{1}{\beta} \ln Q \right) \sum_r P_r$$

نیست پارسی صحبت می باشد (30) در میان این را اضافه کنیم چون جزئیات است

$$\Rightarrow \frac{S}{K} = \sum_r P_r (\beta E_r + \ln Q) \quad (31)$$

$$P_r = \frac{e^{-\beta E_r}}{Q}$$

از طرفی خود P_r برابری است

$$\ln P_r = -\beta E_r - \ln Q \quad (32)$$

$$\text{بنابراین: } (32) \rightarrow (31) \Rightarrow \frac{S}{K} = \sum_r P_r (\beta E_r + \ln Q) = -K \sum_r P_r \ln P_r$$

(32) $-\ln P_r$

$$\Rightarrow S = -K \sum_r P_r \ln P_r \quad (33)$$

در سیستم فقط یک حالت قابل حصول داشته باشد، یعنی برای r حافظ
یک r وجود داشته باشد که برای آن P_r برابر یک باشد، در آن صورت آن دردی که معنی
است آن دردی که صورت و به نظیر آن صورت و سیستم کاملی نظام است و دقیق می دانیم به صورت است.
* اگر r یک یا شود یعنی تعداد حالت های قابل حصول زیاد شود، بنابراین هر کدام از P_r ها به نسبت کم می شوند و چون هر کدام
از P_r ها کوچک تر است هستند و وقتی کم می شوند به نسبت تعداد های کوچک تر شوند در نتیجه $\ln P_r$ ها بیشتر می شوند و منفی تر می شوند
و به نسبت بیشتر می شوند منفی تر می شود، در رابطه (33) یک نتیجه آن است که رابطه منفی تر می شود، این آن دردی سیستم بیشتر می شود.
 $\Omega \uparrow \rightarrow P_r \downarrow \xrightarrow{P_r \propto} \ln P_r \rightarrow -\infty \xrightarrow{(33)} S \uparrow$

* ولو آنکه در هر Ω اندازه داشته باشد قابل حصول آن کمتر شود، در آن صورت $\ln P_r$ اندک اندک کوچک تر می شود و در نتیجه S
کمی بیشتر می شود، در این صورت $\ln P_r$ به نسبت تعدادی بزرگ تر می شوند (به نسبت منفی) و در نتیجه آن دردی که بیشتر می شود
 $\Omega \downarrow \rightarrow P_r \uparrow \rightarrow \ln P_r \rightarrow 0 \xrightarrow{(33)} S \downarrow$

در سیستم پذیرفته شده است، زیرا E_r داریم و همه حالت های دارای انرژی E هستند چون نمی توانیم بگوییم که فقط یک انرژی
بسته داشته باشد، این چون بسته دارد به اینکه چند حالت داشته باشیم و همه حالت های یک انرژی بسته به P_r در این صورت
 $\frac{1}{n}$ است یعنی یک چیزی می باشد چون همه این حالت ها با هم فرق نمی کنند، هم انرژی در هم می آید و هم تعداد ذرات آنهاست است.

تکثیر یافته (33) شود

$$E_r = E \rightarrow P_r = \frac{1}{\Omega} \xrightarrow{(33)} S = -K \sum_{\frac{1}{\Omega}} P_r \ln P_r = -K \sum_{\frac{1}{\Omega}} \frac{1}{\Omega} \ln \Omega^{-1}$$

$$\Rightarrow S = \frac{K}{\Omega} \ln \Omega \sum_{\frac{1}{\Omega}} 1$$

$$\sum_{\frac{1}{\Omega}} 1 = \Omega \Rightarrow S = K \ln \Omega$$

یعنی همان چیزی که قبلاً داشتیم

البته رابط (33) ضربه رابط می‌باشد! چه تکرار کنیم و چه قانونی باشد این رابط برقرار است.

فکر کنید اگر این که اگر سیستم به هم می‌زنند باشد:

اگر سیستم به هم می‌زنند یعنی با هم برخورد می‌کنند که جمع روی $e^{-\beta E_r}$ است و بعضی حالتها وجود دارند که انرژی خاصی دارند، در این صورت قبل از برخورد با هم می‌زنند و می‌توانیم بگوییم که این حالتها سهمی است که دارند و در هر آنرا g_r می‌توانیم بگوییم تا بعد از برخورد با هم می‌زنند.

$$Q = \sum_r e^{-\beta E_r} \xrightarrow{\text{به هم می‌زنند}} Q = \sum_r g_r e^{-\beta E_r} \quad (34)$$

یعنی همان سیستم است!

مثلاً اگر Q را برای این سیستم حساب کنیم که ترازهای انرژی مختلفی دارند، خودتان از آنجا یک حالت (انرژی) را حساب کنید و این ضربه g_r برای هر حالتی که E_r باشد در آنجا g_r می‌باشد.

با آن حالت E_r می‌توانیم این ضربه را حساب کنیم و اگر هر کدام یک g_r را حساب کنیم!

$$P_r = \frac{g_r e^{-\beta E_r}}{\sum_r g_r e^{-\beta E_r}} \quad (35)$$

اما در طرح انرژی‌ها حالتی که در آنجا گسترده می‌باشد و در واقع حالت و همش انرژی‌ها ترازهای انرژی و از هم جدا می‌شوند فقط می‌توانیم بگوییم احتمال اینکه انرژی حالت و همش E باشد یعنی از بازه $E - \Delta E_1$ تا $E + \Delta E_2$ باشد و در آن صورت تمام این حالتها $g(E)$ در این بازه انرژی است. این اتفاق این $g(E)$ است که گسترده می‌شود و با یک کسری می‌توانیم این $g(E)$ را حساب کنیم و E و $E + \Delta E$ باشد از هم جدا می‌شود.

$$P(E) dE = \frac{e^{-\beta E} g(E) dE}{\int_{E_0}^{\infty} g(E) e^{-\beta E} dE} \quad (36)$$

~~اینجا E را می‌توانیم حذف کنیم~~

با این صورت می‌توانیم بگوییم!

$$Q(N, V) = \int_{E_0}^{\infty} g(E) e^{-\beta E} dE \quad (37)$$

فصلی و در واقع که می‌توانیم تابع پارتنی را حساب کنیم و از روی تابع پارتنی $g(E)$ را بدست می‌آوریم. در این حالت $g(E)$ یعنی قسمتی که می‌توانیم بگوییم در واقع تعداد ترازهای انرژی است که در بازه $E - \Delta E_1$ تا $E + \Delta E_2$ قرار گرفته اند و یا توزیع ترازهای انرژی را می‌توانیم حساب کنیم که در این حالت $g(E)$ را می‌توانیم حساب کنیم و E و $E + \Delta E$ باشد از هم جدا می‌شود.

ابتدا سیستمی طرد شده را بررسی می کنیم. نتیجه اینکه نیروی کم در فضای فاز می باشد و حرکتی صورت می گیرد:

$$\langle f \rangle = \frac{\int f \rho(p, q) dw}{\int \rho(p, q) dw} \quad (1)$$

$\rho(p, q)$ از واقع توزیع نقاط در فضای فاز است. اینده برای p و q ربط داشت یعنی اگر یک جوری برای انرژی های مختلف نگاه کنیم، همان انرژی یک رابطه مشخص بین p و q است. یعنی این باید به صورت انرژی هم ربط داشته باشد.

$$\langle f \rangle = \frac{\int f g(E) e^{-\beta E} dE}{\int g(E) e^{-\beta E} dE} \quad (2)$$

dE جوری نیست هم که از انتهای سطح فضای فاز که داریم. یعنی اگر بخواهیم رابطه (1) و (2) را هم مقایسه کنیم، رابطه (1) خیلی صریح بود و نزدیک به آنست که سیستم های $6N$ کانزیک و غیر کانزیک باشد، مقایسه رابطه های (1) و (2) می کنیم برای سیستم کانزیک، توزیع عناصر فضای فاز یعنی $\rho(p, q)$ ، در واقع همین $e^{-\beta E}$ یعنی در این مسئله $\rho \propto e^{-\beta E}$ است.

$$\rho \propto e^{-\beta E}$$

در نتیجه $\langle f \rangle$ در رابطه (2) به p و q در E ($e^{-\beta E}$) وابسته است، چون E بر حسب p و q نوشته می شود. البته این هم یکی از معانی کانزیک است که در معادله لیوویل صدق می کرد، چون در معادله لیوویل این طور بود که باید $[H, \rho]_{p, q} = 0$ باشد و سیستم در حالت تعادل باشد. یعنی از کانزیک بود که ρ تابع از H باشد. در واقع در بحث ما به نسبت ρ نسبت به H ، همین $e^{-\beta H}$ است، یعنی به نسبت ρ از حرکت بر می آید.

$$\rho \propto e^{-\beta H}$$

این انرژی هم ρ را برای سیستم های همگنی میزنیم، بجای ρ نسبت به $e^{-\beta H}$ میزنیم و نسبت به ρ ضرایب است ندارد بنابراین در رابطه (1) و (2) در صورت و خروجی ظاهر می شود و حذف می شود.

نکته دیگری که در اینجا وجود دارد، البته در رابطه (1) ضریب اهمیت ندارد، این بود که وقتی در فضای فاز میزنیم بر ما می آید dw این حجم فضای فاز بود که ما نسبت کنونی بر هم بنیادی فضای فاز میزنیم، یعنی در واقع هر dw را باید به dw تقسیم می کنیم h^{3N} تبدیل کنیم، چون فضای $6N$ بعدی بود و بعد از آن فضای فازش h بود، بنابراین h^{3N} کل $6N$ بعد را برای ما تصحیح می کند و اثر این نقاط با هم وقتی میزنیم در dw h^{3N} dw که در مورد گیسو گفتیم، باید یک $N!$ هم در خروجی ما درج، اثرات ما تعیین می شود.

$$dw \rightarrow \frac{dw}{h^{3N} N!}$$

اگر یک بر حسب روش ذات بخورد، $N!$ در خروجی لازم نیست اما به محض اینکه تعیین می کنیم باید تا وقتی که کانزیک است این $\frac{1}{N!}$ در خروجی وجود داشته باشد.

این نکته در سیستم های اتمی در رابطه (1) و (2) در صورت و خروجی ظاهر می شود و حذف می شود. در این حالت انرژی هم Q (تایم و روش) را برای ذرات تعیین می کنیم، میزنیم.

Partition function: $Q_N = \frac{1}{N! h^{3N}} \int e^{-\beta H} dw \quad (3)$

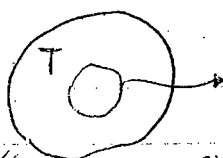
این Q را برای چند سیستم همان حساب می‌کنیم
 اولین سیستمی که می‌فهمیم بررسی کنیم ذرات آزاد است
 ذرات آزاد
 حاصلش در صورت ترموی هم باشد

$$H = \sum_i \frac{P_i^2}{2m} \quad (4)$$

اگر جاس m ، m بگذاریم ، یعنی بین ذرات تفاوت قابل توجهی نداریم ، $N!$ در فرج نماند نسبت وقت
 ذرات یک هستند ، $N!$ را در فرج وارد می‌کنیم

$$Q_N = \frac{1}{N! h^{3N}} \int e^{-\beta \sum_i \frac{P_i^2}{2m}} d^3p d^3q \quad (5)$$

نزدیک می‌کنیم ، یعنی در این سیستم متعلق از ذرات آزاد داریم که این ذرات آزاد در یک همان قرار گرفته‌اند که وقتی این ذرات با هم در فرج
 می‌کنند ، هم آزادند با هم در فرج می‌کنند اما یک کعبه در این حالت است ، باید که آن کعبه را با هم در فرج آزاد را که
 بررسی کنیم هم را فرض کردیم که انرژی کل ثابت باشد ، یعنی $\sum_i \frac{P_i^2}{2m}$ ثابت باشد (برای سیستم ترموی کلاسیک) ، ولی اینجا چنین
 فرضی را نداریم و اصل این محاسبه $\sum_i \frac{P_i^2}{2m}$ است که ثابت می‌ماند



ذرات آزاد در یک حالت قرار گرفته‌اند

از آنجا که این ذرات ، آزاد هستند و در واقع بی‌نهایت وابسته به q ، این و هم ندارند ، این اشتغال روی d^3q گرفته می‌شود و اشتغال
 روی d^3q یعنی جایی که هرگز اشتغال هرگز ، وقتی به ترمول N برسد یعنی حجم به ترمول N

$$\int d^3q \rightarrow V^N$$

پس Q رابطه (5) می‌شود:

$$Q_N = \frac{V^N}{N! h^{3N}} \prod_{i=1}^N \left(\int e^{-\beta(P_{xi}^2 + P_{yi}^2 + P_{zi}^2)/2m} d^3P_i \right)$$

در رابطه $e^{-\beta P}$ به ترمول حاصل می‌شود ، حاصل $e^{-\beta P}$ ، $e^{-\beta P}$ حاصل می‌شود ، رابطه اشتغال برهنه کرده ایم
 بازه P_i را d^3P_i آن می‌گذاریم ، برای دوره هم به همین ترتیب و اشتغال حاصل می‌شود این اشتغال برهنه
 اشتغال فوق هر کدام از محاسبه می‌شود که از 0 تا ∞ تغییر می‌کنند ، بنابراین اشتغال کلاسیکی ما شود که تنها به β و m وابسته
 است و در ترمول N و هم ندارد ، بنابراین وقتی حاصل می‌شود N ، حاصل می‌شود این اشتغال برهنه که اشتغال برهنه اشتغال برهنه
 N بار در ترمول ضرب می‌شود

پس Q را در ترمول برهنه اشتغال برهنه

$$Q_N = \frac{1}{N!} \left[\frac{V}{h^3} \int e^{-\beta P^2/2m} d^3P \right]^N \quad (6)$$

اگر رابطه (6) را رابطه (3) قرار می‌دهیم ، رابطه (3) تابعی برهنه N زده باشد ، یعنی که در رابطه (6) آمده ، همان رابطه
 است فقط N آنجا یک گذشتیم
 $\int e^{-\beta P^2/2m} d^3P$ ، تابعی برهنه N زده است ، تابعی برهنه N زده است ، در واقع یعنی رابطه (6) از

از روی یک ذره ... می‌تواند از روی ... مختلف داشته باشد ... را چطور می‌توانیم این تابع را بدست آوریم؟

$$Q_N = \frac{1}{N!} \left[\frac{V}{h^3} \int e^{-\beta P^2/2m} d^3p \right]^N = \frac{Q_1^N}{N!} \quad (7)$$

برای تقسیم به دست آمده از این ... و انتظارات را داریم. چون ذرات با هم برهم‌کنش ندارند انتظارات را می‌توانیم برای هر یک حساب کنیم و به آن N مرتبه می‌زنیم چون هیچ ربطی به هم ندارند. وقتی این ذرات را از یک بدون برهم‌کنش می‌کنیم که در یک حالتی خاص قرار گرفته‌اند، اما هم چنین چیزی را نمی‌توانیم بگوییم. برای حالت $Q_1 = \frac{Q_1^N}{N!}$ را می‌توانیم دوباره بنویسیم یعنی Q_1 از این ذرات نظیر عمل در یک ... یعنی در آن صورت در توان \exp یک (q) نوشته می‌شود، در حالتی که ما هم همین اتفاق می‌افتد و ما اشتباه می‌کنیم. اشتباه می‌کنیم و باید به $P_1 \cdot P_2$ یا $q_1 \cdot q_2$ نیست (یعنی که برهم‌کنش دارند و برسانند) این باز هم به شکل تابع پارتیشن یک ذره اشتباه است. N می‌شود به شرطی که هم آنها از هم متنقل باشند.

با کیفیت Q_1 ... در صورتی که Q_1 بصورت زیر می‌شود:

$$Q_1 = \frac{V}{h^3} 4\pi \int_0^\infty e^{-\beta P^2/2m} p^2 dp \quad (8) \quad (d^3p = 4\pi p^2 dp)$$

این اشتباه یک اشتباه است که به این صورت می‌باشد:

$$\frac{d}{d\alpha} \int_0^\infty e^{-\alpha p^2} p^2 dp = -\frac{d}{d\alpha} \int_0^\infty e^{-\alpha p^2} dp \quad (9)$$

$(8) \cdot (9) \Rightarrow$

$$Q_1 = \frac{V \cdot 4\pi}{h^3} \left(-\frac{\partial}{\partial (\beta/2m)} \cdot \sqrt{\frac{\pi \cdot 2m}{\beta}} \right) = \frac{4\pi V}{h^3} \times \frac{1}{4} \sqrt{\pi} (2mKT)^{3/2} = \frac{V}{h^3} (2\pi mKT)^{3/2}$$

$$\Rightarrow Q_1 = \frac{V}{h^3} (2\pi mKT)^{3/2} \quad (10)$$

این اشتباه ... h^3 تبدیل به h می‌شود و توان $3/2$ هم تبدیل به $1/2$ می‌شود. کیفیت $2\pi mKT$ کیفیت است که بعداً به عنوان طول موج گرین از آن اسم می‌بریم. Q_N بدست می‌آید.

$$Q_N = \frac{1}{N!} Q_1^N = \frac{1}{N!} \left[\frac{V}{h^3} (2\pi mKT)^{3/2} \right]^N \quad (11)$$

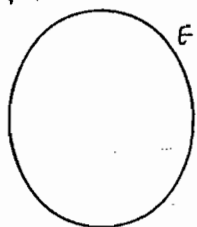
حال می‌توانیم تمام کمالات ترمودینامیک را نسبت به A از روی Q_N بدست آوریم:

$$A = -\frac{1}{\beta} \ln Q_N$$

$$A = -KT \ln Q_N = -NKT \ln \left[\frac{V}{h^3} (2\pi mKT)^{3/2} \right] + KT \ln N!$$

$\frac{N \ln N - N}{N \ln N - N}$ کیفیت N

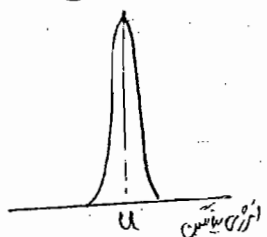
در روشی که در گذشته داشتیم برای حوازی ثابت یک جسم را حساب کرده بودیم در واقع ما با این سطح از حساب کنیم و بعد آنرا با این حجم تقریب زدیم. این بیشترین تعداد حالتی قابل حصول روی این سطح قرار گرفته اند. و طبق تعداد قابل محاسب این نیستند.



ما با این سطح را حساب کنیم

در این حجم هم گوئیم در صورت است که توزیع $e^{-\beta E}$ وجود دارد. اما اگر این توزیع را حساب کنیم (یعنی ببینیم این توزیع کی میسر است) چه سیستم حول خودش همان انرژی ای این توزیع میسر است که طبق انرژی ثابت

توزیع شده بودیم. طبق آنکه انرژی ثابت بود، انرژی میسر است، انرژی کل درون سیستم و در اصل انرژی بود. اینها را حساب کنیم باید بر این سیستم گوئیم که این توزیع یک جوری حول این انرژی میسر است. اما که نسبت آوردیم که در آنجا همان انرژی کل E بود، توزیع شده است و در سطح همین توزیع است و برای انرژی های کمتر و بیشتر از آن، فرضیه که داریم عدد لغزناست، یعنی در این سیستم هم توزیع است. توزیع کانونی و دیگر کانونی توزیع است به صورتی عمل می کنند.



$$\textcircled{3} \quad u = - \frac{\partial \ln Q}{\partial \beta} = \frac{3}{2} NKT$$

حال در فرضیم این را به دست می آوریم و ببینیم چه صورت است. قبل از این کار $g(E)$ تعداد حالتی که انرژی آنها E است را به دست می آوریم. با فرض اینکه در هر حال انرژی ای هم امکان را به دست می آوریم به این نیاز داریم و $g(E)$ است که در $e^{-\beta E}$ هم در صورت امکان را به دست می آوریم.

$$Q(\beta) = \int_0^{\infty} e^{-\beta E} g(E) dE \quad \textcircled{15}$$

گوئیم که $Q(\beta)$ و $g(E)$ تبدیل از هم می شوند. چون که این انرژی ها $e^{-\beta E}$ است. رابطه ای بصورت فوقی تبدیل از هم است که $e^{-\beta E}$ که این ها گوئیم.

$$g(E) = h^{-1} Q(\beta)$$

تدریس رابطه $Q(\beta)$ را در رابطه $\textcircled{11}$ نگاه کنیم، و این است که β بصورت یک عددی درجه اولی تقسیم β است.

$$\textcircled{11} \quad Q(\beta) = \left(\frac{2\pi m}{h^2} \right)^{3N/2} \frac{1}{\beta^{3N/2}}$$

ما طبق فرضیم که در هر حال انرژی ای هم امکان را به دست می آوریم به این نیاز داریم و $g(E)$ است که در $e^{-\beta E}$ هم در صورت امکان را به دست می آوریم.

$$g(E) = h^{-1} Q(\beta) = \frac{1}{N!} \left(\frac{2\pi m}{h^2} \right)^{3N/2} \frac{1}{2\pi \beta^{3N/2}} \int_0^{\infty} \frac{e^{-\beta E}}{\beta^{3N/2}} d\beta \quad \textcircled{16}$$

ما به فرضیم که در هر حال انرژی ای هم امکان را به دست می آوریم به این نیاز داریم و $g(E)$ است که در $e^{-\beta E}$ هم در صورت امکان را به دست می آوریم. اینها را حساب کنیم، یعنی عدد $\textcircled{15}$ را برای آن حساب کنیم، بصورت زیر می شود.

$$Q(\beta) = \int_0^{\infty} e^{-\beta t} \frac{t^n}{n!} dt = \frac{1}{\beta^{n+1}} \quad \textcircled{17}$$

از رابطه (۱۷) رابطه (۱۱) تأیید کنیم. $3N/2$ را با $n+1$ معادله قرار دهیم و n را به ترتیب از برای

$$(11) \quad Q_N = \frac{1}{N!} \left[\frac{V}{h^3} (2\pi m k T)^{3/2} \right]^N$$

$$(11), (17) \Rightarrow n = \frac{3N}{2} - 1 \quad (18)$$

بنابراین $g(E)$ برابر است با $\frac{t^n}{n!}$ باشد یعنی $\frac{E^{3N/2-1}}{(3N/2-1)!}$ باشد به اضافه یک سری ضرایب ثابت که به آن ربط ندارد. بنابراین

$$g(E) = \begin{cases} \frac{V^N}{N!} \left(\frac{2\pi m}{h^2} \right)^{3N/2} \frac{E^{3N/2-1}}{(3N/2-1)!} & E > 0 \\ 0 & E < 0 \end{cases} \quad (19)$$

شرط $E > 0$ یعنی $t > 0$ باشد، اگر $t < 0$ باشد، $Q(N) = \int_0^\infty e^{-\beta t} \frac{t^n}{n!} dt$ صفر شود.

بنابراین در حال حاضر E تعداد حالتها $g(E)$ که انرژی آنها بین E و $E+dE$ است این مقدار (۱۹) است. این را با $e^{-\beta E}$ مقایسه کنیم، در حالت میکروکاننیک وقتی حجم که از ظرف E بود را حساب می‌کنیم، بصورت زیر می‌باشد:

$$\int_0^\infty g(E) e^{-\beta E} dE = \frac{V^N}{h^3} \frac{(2\pi m E)^{3N/2}}{(3N/2)!} \quad (20)$$

$g(E)$ (تعداد حالتها) که انرژی E داشته باشد این سطح بود یعنی باید از این هم نسبت به E مشتق بگیریم:

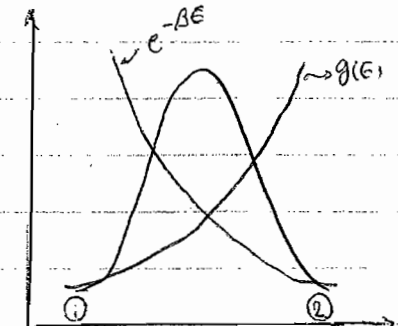
$$g'(E) = \frac{\partial}{\partial E} \int_0^\infty g(E) e^{-\beta E} dE$$

اگر از نسبت به E مشتق بگیریم، دقیقاً رابطه (۱۹) بدست می‌آید.

توجه کنید که در (۱۹) هم زمان این است که اگر N ها ضمیمه کنیم بزرگ باشند در $\left\{ \frac{3N}{2} - 1 \right\}$ از این مقدار $3N/2$ کم می‌کنیم و این هم خط این بود که ما از اینجا یک کم را حساب کردیم و از این کم، سطح را حساب کردیم. در حالت، احتمال اینکه سیستم در حال انرژی E قرار بگیرد و در قسمت ثابت که $g(E)$ و دیگری $e^{-\beta E}$ بود:

$$P(E) dE \propto g(E) e^{-\beta E}$$

گفتیم برای اینکه احتمال یک انرژی را حساب کنیم، باید توزیع انرژی ها را حساب کنیم و ببینیم که کجا این نسبت $P(E)$ بیشتر است. P همان دو تا نسبت است یعنی $g(E)$ که تابع فرکانس است و $e^{-\beta E}$ است (رابطه (۱۹)) یعنی هم E زیاد شود g زیاد شود و دیگر هم $e^{-\beta E}$ است که چون β ثابت است، یک عدد مابین است.



g در $e^{-\beta E}$ ضرب می‌شود، یعنی که g هم زیاد شود همش زیاد شود و تعداد حالتها با انرژی ها را زیاد کند $e^{-\beta E}$ هم خط را پایین می‌کشد. اگر کم باشد می‌شود که حاصل ضرب را از آن کم شود. در انرژی های پایین که هم $e^{-\beta E}$ زیاد است، g کم است می‌شود که هم آن کم شود. بنابراین حاصل ضرب این دراز (۱) شروع می‌شود و به (۲) میرسد، بنابراین این حاصل ضرب باید حتماً از یک ماکزیمم بگذرد.

را می بینیم که این تابع از $g(E)e^{-\beta E}$ نسبت به E مشتق می گیریم و مساوی صفر قرار می دهیم تا بیشترین رقم E را بیابیم

$$\frac{\partial}{\partial E} (g(E)e^{-\beta E}) \Big|_{E=E^*} = 0 \quad (21)$$

از اینجا بدست می آوریم:

$$\beta = \frac{\partial \ln g(E)}{\partial E} \Big|_{E=E^*} \quad (22)$$

پس فرض می کنیم $g(E)e^{-\beta E}$ تابعی باشد که بیشترین مقدار آن از روی E^* گذر کنیم. این E^* که از رابطه $\beta = \frac{\partial \ln g(E)}{\partial E}$ بدست می آید، همان E^* است که بیشترین رقم E را می دهد. این E^* هم E^* است که از رابطه $u = -\frac{\partial}{\partial \beta} \ln Q$ بدست می آید.

$$\left(\frac{\partial S}{\partial E} \right)_{E=u} = \frac{1}{T} = k\beta \quad (23)$$

اصولاً کار سخت نیست که رابطه زیر را بدست آوریم:

$$S = k \ln g(E)$$

پس در این رابطه $g(E)$ از فصل ۳ است که ما به این رابطه را برای هر حالتی Ω داریم، از اینجا باید شروع کنیم که Ω بدست آورده شود.

$$\Omega = -k \sum P_r \ln P_r \quad (33)$$

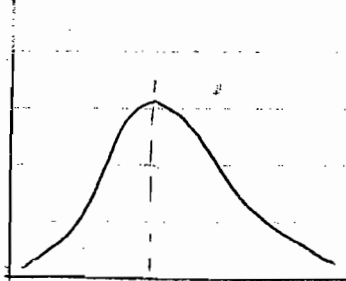
و در هر حالت $P_r = \frac{g(E)e^{-\beta E_r}}{\sum e^{-\beta E_r} g(E_r)}$ قرار دهیم. بعد از باز کردن \ln و ساده کردن رابطه فوق به $S = k \ln g(E)$ می رسد.

پس $\left(\frac{\partial S}{\partial E} \right)_{E=u} = \frac{1}{T} = k\beta$ را در $\beta = k\beta$ قرار می دهیم. $\beta = k\beta$ در این رابطه بدست می آید.

$$k\beta = k \frac{\partial \ln g}{\partial E} \Big|_{E=E^*}$$

پس برای این E^* همان انرژی بیشترین است که ما از سیستم انتظار داریم. چون ما از قبل نمی دانستیم که این توزیع کدام یک است، ممکن بود هیچ قبلی از بیشترین یا هیچ بعد از بیشترین نباشد. از اینجا هم توزیع را به طور دقیق گرفتیم که آن توزیع نامعادل است. در آن صورت مسئله در نقطه آن ممکن است، یا بیشترین آن که فرق داشته باشد. اگر توزیع نامعادل است، ولی اگر مسئله در نقطه درست روی بیشترین نقطه، یعنی این توزیع را بدست می آوریم در نظر می گیریم.

پس بارها بارها در کتاب نگاه می کنیم که توزیع را بدست می آوریم. توزیع های که متعادل نیستند مثل شکل مقابل در این شکل در ابتدا توزیع نامعادل است و در نهایت به توزیع معادل ترین می رسد. ممکن است در بیشترین آن مساوی می کنیم، در یک مکان می توانیم آن را بدست آوریم. و در آن صورت هم ممکن است که توزیع نامعادل باشد.



یعنی از همین آنجا می‌توانیم داریم که توزیع ما یک صورتی خاص است و یعنی یک توزیع گوسی داشته باشد یعنی یک جورایی باید بصورت $e^{-(E-u)^2}$ باشد و این را که می‌گیریم، توزیع ما $E=u$ می‌شود که اگر u ها بزرگ به نسبت u ها باشند پس همگی به سمت آن می‌روند.

حال فرض کنیم شکل صریح آنرا حساب کنیم. برای حساب کردن آن، می‌دانیم احتمال متناسب با $e^{-\beta E} g(E)$ بود.

$$P(E)dE \propto g(E)e^{-\beta E}$$

این تابع در یک نقطه ای بیشینه است، $e^{-\beta E} g(E)$ همیشه مثبت است با \ln آن کار می‌کنیم. $\ln(e^{-\beta E} g(E))$ را حاصل $E=u$ رابطه می‌گیریم:

$$\ln(e^{-\beta E} g(E)) = \left[-\beta u + \ln g(E) \right]_{E=u} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial E^2} \ln(e^{-\beta E} g(E)) \Big|_{E=u} (E-u)^2 + \dots \quad (24)$$

که $\frac{K}{R}$ در صورت u است

شقوق اول در عبارت با E هم‌تراز بود چون در هر دو طرف E که در فاصله کار می‌کنیم که u است، آنرا با هم مقایسه می‌کنیم. شقوق دوم آن تقسیم بر فوژون که اگر شقوق را فاصله آن را در u حساب کنیم، صفر شود، بنابراین شقوق اول را با هم مقایسه می‌کنیم. (24) باید از عبارت زیر شقوق گرفت (دوباره):

$$\frac{d}{dE} (g(E)e^{-\beta E}) \Big|_{E=E^*} = 0$$

از این رابطه دوباره به نسبت به E شقوق بگیریم، E را u قرار می‌دهیم

$$\frac{d}{dE} \left(\frac{-\beta e^{-\beta E} g(E) + e^{-\beta E} g'(E)}{e^{-\beta E} g(E)} \right) \Big|_{E=u}$$

بازی با این عملیات نسبت فراهم آورد:

$$\ln(e^{-\beta E} g(E)) = \left[-\beta u + \frac{K}{R} \right] + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial E^2} \ln(e^{-\beta E} g(E)) \Big|_{E=u} (E-u)^2 + \dots$$

که C_v را هم از روی A می‌توان نسبت آورد $-\frac{K}{C_v} \beta^2$

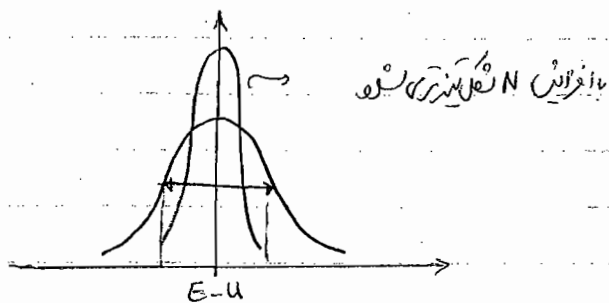
در رابطه با $\frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial E^2} \ln(e^{-\beta E} g(E)) \Big|_{E=u}$ برابر $-\frac{K}{C_v} \beta^2$ می‌شود که C_v یک کمیت مثبت است.

$\ln(g(E)e^{-\beta E})$ را نسبت آوردیم، بنابراین صفر $e^{-\beta E} g(E)$ صورت زیر می‌شود:

$$P(E) \propto e^{-\beta E} g(E) = e^{(-\beta u + \frac{K}{R}) - \frac{K\beta^2}{C_v} (E-u)^2} \quad (25)$$

می‌توان از این نتیجه گرفت که در عبارت $\frac{K\beta^2}{C_v}$ می‌بینیم که توزیع حول u یک توزیع گوسی است.

پهنای این توزیع با عبارت $\frac{K\beta^2}{C_v}$ متناسب است. (یعنی که عبارت $\frac{K\beta^2}{C_v}$ به $\frac{1}{\sigma}$ مقدار بزرگ می‌شود کنترل پیدا می‌کند، حساب می‌کنیم)



$$\Delta E \approx \frac{k\beta^2}{C_v}$$

C_v را برای ذرات آزاد حساب کنیم.

$$C_v = \frac{3}{2} NK$$

سیستمی که N ذره دارد، C_v بیشتر می شود. (هر چه N زیادتر می شود، ظرفیت گرمایی سیستم برای ذرات آزاد کم می شود) و ΔE کوچکتر می شود. یعنی شکل تنگتر می شود. هر چه تعداد ذرات بیشتر و بیشتر باشد، این منجر به ظرفیت گرمایی بیشتر می شود (انتظار ما این است که این درجه هم تنگتر می شود). این اتفاق وقتی افتد که N به مقدار کافی زیاد باشد.

هر ذره ای که از این به بعد ϵ انرژی از آن داریم که اول فرض می کنیم Q را حساب کنیم و Q را از این توزیع که از این به بعد آوردیم حساب کنیم و Q را از این تقریب بنویسیم و این برای E ها تبدیل می شود که از این کار استفاده می کنیم.

Q این که از رابطه (25) به دست می آید به صورت زیر است:

$$Q_N(u) = e^{-B(u-T\epsilon)} \sqrt{\frac{2\pi}{B} K C_v}$$

برای Q با این رابطه (25) در E استفاده می کنیم که Q حاصل A را حساب کنیم، می شود:

$$A = -KTL \ln Q = (u - T\epsilon) - \frac{1}{2} KTL \ln(2\pi K T^2 C_v)$$

رابطه بالا یک رابطه ساده دارد. یادآور می کنیم که A همواره برابر است با $u - T\epsilon$ و این رابطه بر روی این همواره برقرار است.

$$A = u - T\epsilon$$

برای وقوع در صورت فوق یک جمله زیاد داریم، یک جمله ای را اینجا نباید به دست می آید و این همانطور که ما حساب کنیم این در واقع است که N به دست می آید. N به دست می آید. اتفاقاً که ما افتادیم این است که C_v به دست می آید. C_v که به دست می آید، $C_v = \frac{3}{2} NK$ است. $-\frac{1}{2} KTL \ln(2\pi K T^2 C_v)$ یک عبارت فزاینده (A) و سایر کسرها را این کسرها هستند. و از آنجایی که انرژی آزاد همواره بیشتر است، گوییم این انرژی آزاد همواره بیشتر است. به این حساب کرده ایم که به این را در اینجا به دست می آید.

ولی هر چه تعداد ذرات آزاد حساب کنیم و C_v را در رابطه قبلی $\frac{3}{2} NK$ بنویسیم این جمله ثابت می ماند و سایر کسرها هم در اینجا به دست می آید. چون از مشتقات A به دست می آید.

پس داریم نتیجه می گیریم که ذرات آزاد در این شرایط و نتایج آن مثل نتایج میکروکاننیکال است. ضمیمه زیر از انتظارات و دستوراتی که در N معادله بر این طور است.

فقط کویفیتی را به ما به در نظر بگیرید تا یک بار تمام کنیم.

حالا نظر کنیم که ظاهر داریم قضیه همبستگی را برای سیستم کوانتوم ثابت کرده ایم و گفتیم برای هر سیستمی هر دو زنجیری که در هم قرار می‌گیرند، قابل قبول است. حال قضیه همبستگی را در اینجا برای آن سیستم کوانتوم هم ثابت می‌کنیم.

اثبات قضیه همبستگی برای آن سیستم کوانتوم:

قضیه همبستگی می‌گوید $\langle \alpha_i \frac{\partial H}{\partial \alpha_j} \rangle$ برابری با $KT \delta_{ij}$ این را با نظر عمومی ترسیم و هم با توزیع کانونی ثابت می‌کنیم. با توزیع کانونی هم به همان آنگاه در اینجا ثابت کرد.

$$KT \delta_{ij} = \langle \alpha_i \frac{\partial H}{\partial \alpha_j} \rangle = \frac{\int \alpha_i \frac{\partial H}{\partial \alpha_j} e^{-\beta H} d\omega}{\int e^{-\beta H} d\omega} \quad (I)$$

برای ثابت کردن این، $d\omega$ را به نرمیم $d\omega_j d\alpha_j$ یعنی $d\omega_j$ یعنی $d\alpha_j$ فقط تغییر $d\omega_j$ را از آن جدا کرده ایم.

$$\text{صورت اول} = \int d\omega_j \alpha_i \int d\alpha_j \left(-\frac{1}{\beta}\right) \frac{\partial e^{-\beta H}}{\partial \alpha_j} \quad (\beta \text{ در سیستم کوانتوم ثابت است})$$

$$= -\frac{1}{\beta} \int d\omega_j \int \alpha_i \frac{\partial e^{-\beta H}}{\partial \alpha_j} d\alpha_j$$

$$= -\frac{1}{\beta} \int d\omega_j \alpha_i e^{\beta H} \Big|_{\alpha_j^{(1)}}^{\alpha_j^{(2)}} + \frac{1}{\beta} \int d\omega_j d\alpha_j e^{-\beta H} \frac{\partial \alpha_i}{\partial \alpha_j} \delta_{ij}$$

$$\Rightarrow \text{صورت اول} = \frac{1}{\beta} \int d\omega e^{-\beta H} \delta_{ij} \quad (II)$$

$$(II) \rightarrow (I) \Rightarrow KT \delta_{ij} = \langle \alpha_i \frac{\partial H}{\partial \alpha_j} \rangle = \frac{\frac{1}{\beta} \int d\omega e^{\beta H} \delta_{ij}}{\int e^{-\beta H} d\omega} = \frac{1}{\beta} \delta_{ij} = KT \delta_{ij}$$

که همان نتیجه قبلی است.

از این به بعد مسئله این خواهد بود که شاید با حلقه‌های مختلف راضی باشیم که بهترین سوال هم نزدیک به کار است.

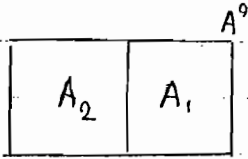
حل مسائل:

خیلی مهم است که وقتی با یک مسئله مواجه می‌شوید، بدانید که موضوع چیست و باید حل آنرا از کجا شروع کنیم و چگونه آن را حل کنیم. مطمئن باشید می‌توانیم که در کتاب درسی هم بعضی از این مسائل را پیدا کنیم و می‌توانیم با آن راضی کنیم یا اینکه به کمک ترسکریپت یک حلقه بنویسیم که در مطالب شما وجود دارد که می‌تواند که کاملاً با آن راضی از این مسئله ربط دارد که کتاب این مسئله را از شما می‌خواهد.

بعضی از مسائل کتاب ما به گونه‌ای است که باید به سبب روابط موجود بین آنها بدانیم که فعلی این مسائل را کنار می‌گذاریم اما نمی‌توانیم این مسائل را کنار می‌گذاریم که باید بدانیم که چه چیزی را با هم می‌کنیم.

منتهی با یک سید کابل برافش است که با هر یک از اجزای سیستم، مانند Ω و Ω_1 و Ω_2 که از روابطی که کتاب داده یک سر کابل
 عددی استنتاج کنیم مثلا مقدار عددی Ω را برای مقدار Ω_1 و Ω_2 مشخص و چند نصاب مشخص بدست می آوریم.
 ما می بینیم که در این فصل به کارهای آماری مربوط به نمودارهای Ω و Ω_1 است. مثلا از هم یک مقدار آماری است که
 تقریبا بقیه مسائل به خودشانست بر می گردد. مثلا اینده معنی است که اگر از آنجا که جهت مسائل از این صورت می رود
 مسئله افضل اول:

گفته است Ω را در وقتی دو سیستم بزرگ در حال تماس حرارتی هستند، تعداد Ω_1 و Ω_2 که در واقع تعداد حالتها قابل حصول
 سیستم می باشد را در آن صورت یک تابع گوسی فرض می کنند.



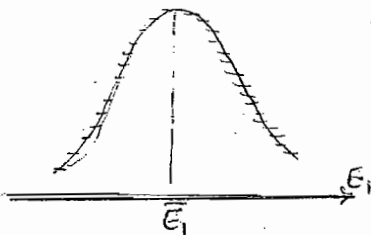
آیا انتظاری داریم که چنین اتفاقی بفتد یا نه؟ اگر سیستم ما بزرگ باشد
 که تعداد حالتها قابل درستی یک سیستم است. دو سیستم A_1 و A_2 داریم که با هم
 در حال تبادل انرژی هستند با هم سیستم کل را A^0 می نامیم، حال این چگونه می شود است

$$E^0 = E_1 + E_2$$

پس $\Omega_1(E_1)$ و $\Omega_2(E_2)$ در Ω مربوط به A_1 و A_2 را داریم و در هم ضرب می کنیم. در مسئله گفته که این دو سیستم
 با هم در حال تماس حرارتی هستند و باید که از انرژی می کنند. علاوه بر این اینها به عنوان حالتها در نظر می آید
 انرژی تقابلی را E_1 و E_2 می نامیم.

$$E^0 = E_1 + E_2$$

که مثلا E_1 و E_2 در رابطه قابل حصول می کنند.
 بدون اینکه مسئله را حل کنیم با این انتظاری را داریم که تعداد حالتها قابل حصول حول این E_1 بسیار تیز باشد و چون وقتی در حال
 تبادل انرژی می باشد که تعداد حالتها قابل حصول آن حالت بیشتر و بیشتر باشد، یعنی همان کاری که در فصل 3 انجام دادیم و توزیع
 گائوسی را بدست آوردیم، در اینجا هم فرض می کنیم از راه Ω ها بدست می آوریم و فرض می کنیم رابطه بدست می آوریم.



پس انتظاری داریم اثر این Ω را در E_1 می بینیم، شکل صورت زیر
 داشته باشد مقدار آن وقتی به E_1 برسد از هم بیشتر باشد. حال E_1
 می بینیم توزیع گائوسی تابع گوسی توپ بزرگ است که فاصله گوسی باشد
 و در حول E_1 باید توپ بزرگ آنرا یک تابع گوسی توپ بزرگ
 اثر خواهیم شکل تابع را حول E_1 نقطه بدست می آوریم چگونه کنیم؟

حول E_1 و E_2 آن نقطه تابع را با هم فرض می کنیم و فرض می کنیم E_1 و E_2 را در آنجا بدست می آوریم و بدست می آوریم E بدست می آوریم
 تابع است که این E را می نامیم است. یک مشتق از Ω می گیریم و مساوی صفر قرار می دهیم تا E بدست می آوریم و
 بعد این تابع را حول نقطه E_1 بسازیم.

علاوه بر این وقتی این اعداد ضمیم بزرگ هستند کار کردن با خود Ω ها کار سختی است و باید با \ln آنها کار کنیم. پس در واقع
 با \ln رابطه $E_1 = E_2$ را داریم و چیزی نیست یک عبارت گوسی برای آن بدست می آوریم، مسئله گفته که باید شکل
 گوسی بدست می آوریم، اگر هم نمی گفت ما به حالت این شکل گوسی را بدست می آوریم.

$$\ln \Omega(E_1, E_2)$$

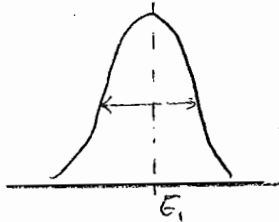
$$\ln \Omega(E^0, E_1) = \ln \Omega_1(E_1) + \ln \Omega_2(E_0 - E_1)$$

برای E_1 هم عمل می کنیم:

$$\ln \Omega(E^0, E_1) = \ln \Omega_1(E_1) + \ln \Omega_2(E_0 - E_1)$$

C_V^{-1} و β و T کمیت‌های ترمودینامیکی هستند بنابراین $\frac{\partial \beta}{\partial E_1}$ ، $\frac{\partial \beta}{\partial E_2}$ نیز کمیت‌ها را بدست می‌آوریم و می‌تواند:

$$\Omega(E_1, E_2) = \Omega(E_0, \bar{E}_1) e^{-\frac{\beta}{2T} (C_{1V}^{-1} + C_{2V}^{-1}) (E_1 - \bar{E}_1)^2}$$



و چیزی که مسئله فراتر است این است:

یعنی اگر طول \bar{E}_1 گوسی است:

هر چه β بزرگتر باشد، پهنای آن کمتر می‌شود و در صورتی که β کوچک باشد، پهنای آن بزرگتر می‌شود.

$$\langle (\Delta E)^2 \rangle^{1/2} = \left[\sqrt{\frac{\pi}{16}} \alpha^{-3/2} + \sqrt{\frac{\pi}{4\alpha}} \bar{E}_1^2 + \frac{\bar{E}_1}{2\alpha} - \bar{E}_1^2 \right]^{1/2}$$

$$\alpha = \frac{\beta}{2T} (C_{1V}^{-1} + C_{2V}^{-1})$$

$$\langle (\Delta E)^2 \rangle = \langle E_1^2 \rangle - \langle E_1 \rangle^2$$

تغییرات کوچک را حساب کنیم:

میانگین E_1^2 و میانگین E_1 ($\langle E_1^2 \rangle$ و $\langle E_1 \rangle$) یعنی E_1^2 و E_1 را در افعال فرکانس کنیم و آن‌ها را کم کنیم.

افعال در اینجا چیست؟

افعال در اینجا یعنی مشتق $\frac{\partial \Omega}{\partial E_1}$ است. فرکانس ثابت را از افعال حذف می‌کنیم و آن‌ها را کم می‌کنیم.

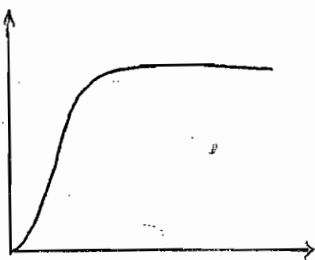
توجه: فضا افعال را بزرگتر می‌کند.

KUB_{ex} طی بیان دهنده در اینجا نیز گفته شده، نگاه کنیم!

حل مسئله هشتم: ۲۹، ۷، ۸۱۵

توجه از مسائل مهم را حل می‌کنیم که فضا در اینجا هم در طبیعت هم به همین شکل وجود دارد. به لحاظ تاریخی هم نگاه کنیم، این از این است که در نظریه جنبشی، حدی که در آنجا به وجود می‌آید و بعد به مکانیک کوانتومی می‌رسد، اگر کسی ویژه طوالت بود.

این مسئله که اگر کسی ویژه طوالت نزدیک شد به معنی این است که در آنجا به وجود می‌آید و بعد به مکانیک کوانتومی می‌رسد و این تابع توزیع خاصی که شکل عرضی بصورت زیر دارد، رفتار می‌کند.



در این نمودار می‌توانیم هم به این شکل نگاه کنیم، چون در این مسائل محدودی از مسائل هم در طبیعت هم به این شکل وجود دارد. در این مسائل هم به این شکل نگاه کنیم، در این مسائل هم به این شکل نگاه کنیم.

این سری نام منتهی به صفر است و به صورت زیر می آید:

$$Q_1 = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\beta(n+1/2)h\omega} = e^{-\beta h\omega/2} \lim_{k \rightarrow \infty} (1 + e^{-\beta h\omega} + \dots + e^{-\beta k h\omega}) = e^{-\beta h\omega/2} \frac{1}{1 - e^{-\beta h\omega}}$$

$$\Rightarrow Q_1 = \frac{e^{-\beta h\omega/2}}{e^{-\beta h\omega/2} \frac{1}{e^{-\beta h\omega/2} - e^{-\beta h\omega/2}}} \Rightarrow Q_1 = \frac{1}{2\beta h\omega (\frac{\beta h\omega}{2})} \quad (4)$$

* در رابطه (3) برای یک ذره است. فرض کنیم N ذره در حضور است. $\sum e^{-\beta E_{ni}}$ برای یک ذره در حضور است. $E_{ni} = (n+1/2)h\omega$ است. $Q_1 = \sum e^{-\beta E_{ni}}$ یعنی جمع روی تمام حالتها گرفته شده است. β در اینجا $1/kT$ است. Q_1 تغییر می کند و فقط با تغییر n در رابطه $E_{ni} = (n+1/2)h\omega$ در آن تغییر می کند. Q_1 تغییر می کند و برای هر ذره Q_1 در آن تغییر می کند. A این که در مورد قبل صحبت را به هم وصل می کند. A این که در مورد قبل صحبت را به هم وصل می کند.

$$A = -KT \ln Q_N = N \left[\frac{1}{2} h\omega + KT \ln(1 - e^{-\beta h\omega}) \right]$$

هر جا که $h\omega$ از KT استوار است. $Q_1 = \frac{e^{-\beta h\omega/2}}{1 - e^{-\beta h\omega}}$ را با Q_1 که در رابطه (3) استوار است.

$$\mu = \frac{\partial A}{\partial N} \Big|_{T,V} = \left[\frac{1}{2} h\omega + KT \ln(1 - e^{-\beta h\omega}) \right] = A/N$$

پس A نسبت به N خطی است و μ نسبت به N مستقل است. A نسبت به N خطی است و μ نسبت به N مستقل است.

$P = 0$

و U است:

$$U = -\frac{\partial}{\partial \beta} \ln Q_N = \frac{1}{2} N h\omega \frac{\beta h\omega}{2} \quad \checkmark$$

در این U نسبت به T متناسب است.

$$C_p = C_v = NK (\beta h\omega)^2 \frac{e^{\beta h\omega}}{(e^{\beta h\omega} - 1)^2}$$

این رابطه است که با $h\omega$ متناسب است. $h\omega$ متناسب است با KT و KT متناسب است با $h\omega$ و $h\omega$ متناسب است با KT .

$$\beta h\omega = \frac{h\omega}{KT} \ll 1$$

KT متناسب است با $h\omega$ و $h\omega$ متناسب است با KT و $h\omega$ متناسب است با KT .

در $\frac{h\omega}{KT}$ ضریب تغییرات است. $h\omega$ متناسب است با KT و $h\omega$ متناسب است با KT .

این در واقع معنی آنست که برای Q_N داریم رابطه را به صورت زیر بنویسیم:

$$Q_N = e^{-N\alpha/2} \sum_{l=0}^{\infty} \binom{N+l-1}{l} e^{-lx} = \sum_{l=0}^{\infty} \binom{N+l-1}{l} e^{-(N_2+l)\beta\hbar\omega} \quad (7)$$

$x = \beta\hbar\omega$

برای Q_N می توانیم بنویسیم $Q_N = \int_0^{\infty} g(E) e^{-\beta E} dE$ یا $Q_N = \sum_{l=0}^{\infty} g_l e^{-\beta E_l}$ یا $Q_N = \int_0^{\infty} g(E) e^{-\beta E} dE$

$$Q_N = \sum_{l=0}^{\infty} \binom{N+l-1}{l} e^{-(N_2+l)\beta\hbar\omega} \xrightarrow{\text{مقایسه کنیم}} Q_N = \sum_{l=0}^{\infty} g_l e^{-\beta E_l}$$

تدریس مقایسه را از این رو می بینیم: $g(E) = \delta(E - (N_2 + l)\hbar\omega)$ از این معنی می آید که $g(E)$ تنها در $E = (N_2 + l)\hbar\omega$ مقدار غیر صفر دارد.

$$\Rightarrow g(E) = \sum_{l=0}^{\infty} \binom{N+l-1}{l} \delta(E - (N_2 + l)\hbar\omega) \quad (8)$$

رابطه بالا را می توانیم به این صورت نیز بنویسیم: $g(E) = \sum_{l=0}^{\infty} \binom{N+l-1}{l} \delta(E - (N_2 + l)\hbar\omega)$ که از این معنی است که $g(E)$ تنها در $E = (N_2 + l)\hbar\omega$ مقدار غیر صفر دارد. N_2 نیز می تواند صفر باشد.

در $(N_2 + l)\hbar\omega$ یعنی جمع $N_2 + l$ که این جمع $N_1 + N_2 + N_3 + N_4 + \dots$ که این جمع $N_1 + N_2 + N_3 + N_4 + \dots$ می تواند صفر باشد.

تدریس می کند که N نیز می تواند صفر باشد و از این رو می بینیم که $N\hbar\omega$ را می توانیم به صورت $N\hbar\omega = \hbar\omega(N_1 + N_2 + N_3 + N_4 + \dots)$ بنویسیم. $N\hbar\omega$ می تواند صفر باشد.

تدریس می کند که N_1 می تواند صفر باشد و از این رو می بینیم که $N_1\hbar\omega$ را می توانیم به صورت $N_1\hbar\omega = \hbar\omega(N_{11} + N_{12} + N_{13} + N_{14} + \dots)$ بنویسیم. $N_1\hbar\omega$ می تواند صفر باشد.

تدریس می کند که N_2 می تواند صفر باشد و از این رو می بینیم که $N_2\hbar\omega$ را می توانیم به صورت $N_2\hbar\omega = \hbar\omega(N_{21} + N_{22} + N_{23} + N_{24} + \dots)$ بنویسیم. $N_2\hbar\omega$ می تواند صفر باشد.

تدریس می کند که N_3 می تواند صفر باشد و از این رو می بینیم که $N_3\hbar\omega$ را می توانیم به صورت $N_3\hbar\omega = \hbar\omega(N_{31} + N_{32} + N_{33} + N_{34} + \dots)$ بنویسیم. $N_3\hbar\omega$ می تواند صفر باشد.

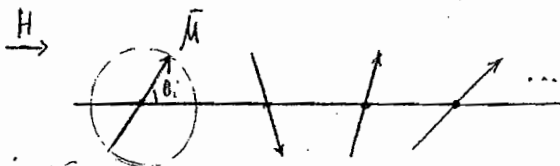
تدریس می کند که N_4 می تواند صفر باشد و از این رو می بینیم که $N_4\hbar\omega$ را می توانیم به صورت $N_4\hbar\omega = \hbar\omega(N_{41} + N_{42} + N_{43} + N_{44} + \dots)$ بنویسیم. $N_4\hbar\omega$ می تواند صفر باشد.

این معنی است که $g(E) = \sum_{l=0}^{\infty} \binom{N+l-1}{l} \delta(E - (N_2 + l)\hbar\omega)$ را می توانیم به صورت $g(E) = \sum_{l=0}^{\infty} \binom{N+l-1}{l} \delta(E - (N_2 + l)\hbar\omega)$ بنویسیم.

این مطلب را می توانیم به این صورت نیز بنویسیم: $g(E) = \sum_{l=0}^{\infty} \binom{N+l-1}{l} \delta(E - (N_2 + l)\hbar\omega)$ که از این معنی است که $g(E)$ تنها در $E = (N_2 + l)\hbar\omega$ مقدار غیر صفر دارد.

مسئله دیگری که ارتباط خیلی نزدیکی با همین مسئله دارد را در ادامه بررسی می‌کنیم.
 N یا آهنربا در N (دو قطب مغناطیسی) که آنها را روی یک خط صاف می‌کشیم. این کار به خاطر این است که می‌فهمیم از انرژی
 صافش و ... چشم پوشی می‌کنیم.

در این مسئله را اگر بررسی در تقویم کنیم، ارتباط خیلی نزدیکی با سیستم‌های ایزتروپیک فرار دارد و اما در این زمین می‌کنیم که یک تعداد آهنربا
 داریم که روی یک خط صاف می‌کشیم و بعدی قرار گرفته‌اند. حرکتی که از اینهاست همان مغناطیسی دارند. این سیستم می‌تواند آهنربا بسوزد یا نه؟



این سیستم را می‌توانیم به صورت

آنها یک میدان مغناطیسی H بصورت یکنواخت در این سیستم اعمال کنیم، اتفاقی که می‌افتد این است
 که همه این دو قطب‌ها هم مغناطیسی سعی می‌کنند در راستای میدان قرار بگیرند. اما به خاطر وجود برهم‌کنش‌هایی که اینها با هم دارند
 (برهم‌کنش‌هایی که اینها با هم دارند را به نوبت بررسی می‌کنیم) با محیط اطراف تبادل انرژی می‌کنند. البته برهم‌کنش‌های
 بسیار از برهم‌کنش‌هایی که اینها با هم دارند وجود دارند که از نوع MdN است که در اینجا نمی‌توانیم، چون کار سخت‌تری می‌شود و در برهم‌کنش‌های
 خارجی را این طور در نظر می‌گیریم که پس این است که سیستم با محیط اطرافش شروع به تبادل انرژی می‌کند. یعنی با محیط اطرافش در یک
 تبادلی در حال تبادل است. اگر این T صفر بود یعنی در واقع هیچ برهم‌کنش خارجی وجود ندارد، اما در واقع استیم که هم اینها در راستای میدان
 بصورت خطی قرار می‌گیرند و مغناطیس کاملی شکل می‌گیرد.

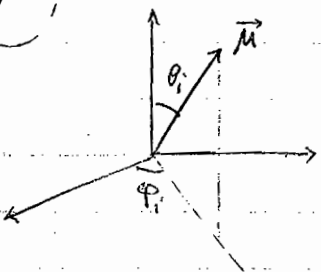
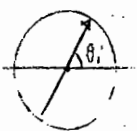
اگر T به سمت بی‌نهایت برود یعنی تبادل انرژی از بیرون به این سیستم وارد می‌شود، این حالت می‌تواند آزادانه حرکتی که
 می‌تواند در آن کند و بعداً اینها بصورت کامل $Random$ قرار می‌گیرند. اگر ما همانا بصورت کامل $Random$ قرار می‌گیرند، بیانش این
 مغناطیسی آنها باید صفر شود.

این وسطها هم یعنی در T معین، غرض از مدل ما (مغناطیس‌نگاری) باید به نوعی وابسته به M, H و T باشد و نهایت آن
 هم صاف باید از نوع $f(\frac{MH}{KT})$ باشد.
 MH و KT جزء از همین انرژی هستند و احتمال اینکه در یک حالتی قرار بگیرند یا $\frac{MH}{KT}$ بیان می‌شود.

انرژی که این سیستم دارد از اینها بدست می‌آید که وقتی یک مغناطیسی روی یک خارجی قرار می‌دهیم، $\vec{M} \cdot \vec{H}$ انرژی آن است، این
 انرژی بصورت تقابلی می‌شود.

$$E = - \sum_{i=1}^N \vec{M}_i \cdot \vec{H}$$

این مقادیر در صحنه می‌تواند چیزی باشد. اگر یک که مطابق شکل در نظر می‌گیریم، اگر وسطی این که می‌تواند چیزی باشد
 بدون اینکه از صفت مسئله باشد، H را می‌توانیم یک راستای مشخص بگیریم و اسم این راستا را Z
 می‌گذاریم و اسم راستای دیگر که هر کجا از مقادیر با این راستا هم‌راستا θ_i می‌گذاریم.



$$E = - \sum_{i=1}^N \vec{M}_i \cdot \vec{H} = - \sum_{i=1}^N MH \cos \theta_i$$

اینجا θ_i زاویه است که می‌کنیم

9

105

حال این کیت را حساب می‌کنیم. مشتق M_z یعنی مشتق M_z نسبت به M_z .

$$\langle M_z \rangle = \langle M_z e^{\beta M_z} \rangle$$

برای M_z مشتق می‌گیریم:

$$\langle M_z \rangle = \frac{\sum (M_z) e^{\beta M_z}}{\sum e^{\beta M_z}} = \frac{1}{\beta} \frac{\partial}{\partial H} \ln Q_1 \quad (17)$$

آن از $\ln Q_1$ نسبت به H مشتق می‌گیرد و $\frac{1}{\beta}$ در آن ضرب می‌شود. این M_z به این صورت است.

برای N کیت:

$$\langle M_z \rangle = \frac{1}{\beta} \frac{\partial}{\partial H} \ln Q_N = \frac{N}{\beta} \frac{\partial}{\partial H} \ln Q_1 = N \langle M_z \rangle \quad (18)$$

(15), (17) \Rightarrow

$$\langle M_z \rangle = \frac{1}{\beta} \frac{\partial}{\partial H} \ln \left(\frac{4\pi}{\beta M H} \frac{e^{\beta M H} - e^{-\beta M H}}{2} \right) = \frac{1}{\beta} \frac{\partial}{\partial H} \left\{ \ln \frac{4\pi}{\beta M H} + \ln \sinh \beta M H \right\}$$

$$\langle M_z \rangle = \frac{1}{\beta} \left\{ -\frac{4\pi}{\beta M H^2} + \frac{\beta M \cosh \beta M H}{\sinh \beta M H} \right\} = \frac{1}{\beta} \left(\beta M \coth \beta M H - \frac{1}{H} \right)$$

$$\Rightarrow \langle M_z \rangle = M \left(\coth \beta M H - \frac{1}{\beta M H} \right) \quad (19)$$

یعنی $\beta M H = x$

$$\beta M H = x \quad (20)$$

اینجا $\coth x - \frac{1}{x}$ تابع لانگورین $L(x)$ نامیده می‌شود.

(19), (20) \Rightarrow لانگورین function

$$\langle M_z \rangle = N \mu L(x) \quad (21) \quad ; \quad L(x) = \coth x - \frac{1}{x}$$

در فرمول $L(x)$ که نسبت μ را دارد، μ را با β و M و H می‌توانیم بنویسیم. μ بزرگترین β ها و کوچکترین β ها را می‌توانیم بنویسیم!

$\coth x$ را $x \ll 1$ یا $x \gg 1$ با تقریب می‌توان نوشت.

بطور تقریبی $\coth x$ در $x=0$

$$\coth x \approx \frac{1}{x} + \frac{x}{3} - \frac{x^3}{45} + \dots$$

$\coth x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ که اگر $x \gg 1$ باشد، e^{-x} نسبت به e^x بسیار کوچک است و $\coth x \approx 1$.

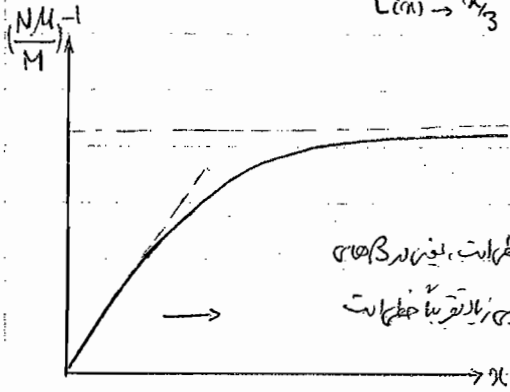
آن $T \rightarrow 0$ (زود) به معنی $\beta \rightarrow \infty$ یا $x \rightarrow \infty$ است. $L(x)$ به سمت 1 میل می‌کند. $\langle M_z \rangle$ در $T \rightarrow 0$ به سمت $N \mu$ میل می‌کند. $T \rightarrow \infty$ (تدریجاً) $\beta \rightarrow 0$ یا $x \rightarrow 0$ است. $L(x)$ به سمت 0 میل می‌کند. $\langle M_z \rangle$ در $T \rightarrow \infty$ به سمت 0 میل می‌کند.

$$T \rightarrow 0, \beta \rightarrow \infty \quad ; \quad x \rightarrow \infty \quad , \quad L(x) \approx 1$$

$$T \rightarrow \infty, \beta \rightarrow 0 \quad ; \quad x \rightarrow 0 \quad , \quad L(x) \approx 0$$

$$\langle M_z \rangle = N\mu L(\alpha) \xrightarrow[\substack{T \rightarrow 0 \\ L(\alpha) \rightarrow 1}]{\alpha \rightarrow \infty} \langle M_z \rangle \rightarrow N\mu$$

$$\langle M_z \rangle = N\mu L(\alpha) \xrightarrow[\substack{T \rightarrow \infty \\ L(\alpha) \rightarrow \alpha/3}]{\alpha \rightarrow 0} \langle M_z \rangle \rightarrow N\mu \frac{\alpha}{3} = N\mu \left(\frac{\beta\mu H}{3} \right)$$



در این زاویه تقریباً خطی است، یعنی در 30 درجه
کوینت یا 100 درجه، یعنی بالاتر تقریباً خطی است

در سه alpha ها بزرگ، زاویه M نسبت به سطح عمود

الکترون در روابط قبلی یعنی M2 در زاویه 90 درجه

فقط وقتی M هم از نیم یعنی مغناطیس را در دو قطب قرار دهیم

پس تقریباً N (تعداد) در رابطه $\langle M_z \rangle = N\mu L(\alpha)$ می توانیم

تعداد در واقع هم، اما در صورت $\langle M_z \rangle$ به معنی مغناطیس ظاهر شود

در حدود 50 درجه، M (یعنی مغناطیس) بصورت زیر پدید می آید

تعداد در واقع هم: N_0 مغناطیس

$$\Rightarrow M = N_0 \mu \frac{\alpha}{3} = \frac{N_0 \mu^2 H}{3KT} \quad (22)$$

در حدود 60 درجه بزرگ تر از 30 درجه است
 $\alpha \ll 1 \rightarrow L(\alpha) \rightarrow \alpha/3$
 T را می بینیم است که از مغناطیس به خود مغناطیس در حساب می آید. منظور از زاویه بزرگ، یعنی در حدود 300 K است.

زاویه susceptibility مغناطیس یعنی تغییرات مغناطیس بر H نسبت می آید: susceptibility

$$\chi = \lim_{H \rightarrow 0} \frac{\partial M}{\partial H} \stackrel{(22)}{=} \frac{N_0 \mu^2}{3K} \cdot \frac{1}{T} = \frac{C}{T} \quad (23) \Rightarrow \chi = \frac{C}{T}$$

فانک کوری
برای مغناطیس

برای رابطه فانک کوری می توانیم که در 30 درجه در 300 K است. با تغییر دما می توانیم که در 300 K است. این رابطه به مقدار واقعی نزدیک می شود.

آنگاه هم گذرده می آید. اما به حساب می آید. (گذرده می آید که با M قبلی فاکتور شود) گذرده می آید

$$B = \mu' H = H + 4\pi M = H(1 + 4\pi\chi)$$

B در واقع مغناطیس است: $H + 4\pi M$

که H نسبت به مغناطیس و M مغناطیس است. در این رابطه که مغناطیس ها الفایس ها نسبت به خط و محور میدان خارج هستند.
 $H + 4\pi M = H(1 + 4\pi\chi)$ بنابراین گذرده می آید مغناطیس می شود

$$\mu' H = H(1 + 4\pi\chi) \rightarrow \mu' = 1 + 4\pi\chi$$

$$\stackrel{(23)}{\rightarrow} \mu' = 1 + \frac{4\pi N_0 \mu^2}{3KT}$$

یعنی مغناطیس را به مغناطیس نسبت

مقدار $J = S = \frac{1}{2}$ مقدار فریب زور فضایی است یا اگر J فقط مساوی L باشد (فقط تعدادی باشد) $g=1$ است یعنی همان فرمول $\vec{\mu} = \frac{e}{2mc} \vec{L}$

$J = S = \frac{1}{2} \rightarrow g = 2$

$J = L \text{ (که)} \rightarrow g = 1$

در کوانتم مکانیک J را هم می‌گویند که g در حالت کلی عددی بصورت زیر نوشته می‌شود:

$$g = \frac{3}{2} + \frac{S(S-1) - L(L+1)}{2J(J+1)}$$

این رابطه فقط با شرط $g=1$ در $J=L$ و $g=2$ در $J=S$ را نتیجه می‌گیریم.

$J=L \rightarrow g = \frac{3}{2} + \frac{0 - L(L+1)}{2L(L+1)} = \frac{3}{2} - \frac{1}{2} = 1$

$J=S \rightarrow g = \frac{3}{2} + \frac{S(S+1) - 0}{2S(S+1)} = \frac{3}{2} + \frac{1}{2} = 2$

J_x, J_y, J_z که در اینجا داریم معمولاً J_x و J_y است (بصورت ممتد) به همراه J_z . (و با اینها می‌توانند که اعداد کوانتمی آنها را حساب کنند). J_x و J_y را بصورت عملگرهای جبرانی می‌نویسند و بر حسب همانی که می‌خواهیم با J_x^2 و J_y^2 است.

J_x, J_y, J_z, J^2

عملگرهای جبرانی می‌نویسند

و بر روی مقادیر قابل حصولی که برای J وجود دارد $\hbar^2 J(J+1)$ است و در هر کجا J_x

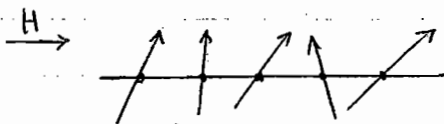
$J^2 |m, j\rangle = j(j+1)\hbar^2 |m, j\rangle$

و J_z که می‌تواند از آنجا را در نظر بگیریم، و بر روی مقادیر قابل حصولی $\hbar m$ است.

$J_z |m, j\rangle = m\hbar |m, j\rangle$

صافی می‌سازیم با m و j بر حسب زور می‌نویسند که $-j \leq m \leq j$

آنها را که می‌بینیم در شکل داریم و در نظر می‌گیریم، یعنی در نقاط فضایی از فضای سه بعدی اینها می‌نویسند و وجود دارد و اینها را یک بیرون از فضای H قرار می‌دهند.



نقاط فضایی از فضای

بیرون از فضای H می‌نویسند، جهت H را در جهت Z می‌گیریم. بنابراین اگر H را در جهت Z می‌نویسند و در جهت Z می‌نویسند.

$E = -\vec{\mu} \cdot \vec{H} = \frac{-eg}{2mc} H J_z = \frac{-eg\hbar}{2mc} H \frac{J_z}{\hbar}$

در این صورت مقادیر قابل حصولی که برای J_z وجود دارد، سه بعدی m می‌باشد که m می‌تواند از $-j$ تا j تغییر کند. و در هر نقطه m از آنجا که تغییر می‌کند.

$E = -\vec{\mu} \cdot \vec{H} = \frac{-eg\hbar}{2mc} H \left(\frac{J_z}{\hbar} \right) m_j$

یعنی J_z را وقتی در یک حالت m می‌نویسند، فقط با m_j مشخص می‌کنیم.

$\Rightarrow E = -g \mu_B m_j H$ (۱)

از همین $\mu_B = \frac{e\hbar}{2mc}$ است و چون برای m_j می‌نویسند، در حالت m_j آن μ_B می‌نویسند.

8

1.4

توجه کنید که Q_N این سیستم بصورت $Q_N = (Q_1)^N$ است. Q_1 این است. Q_1 را می توانیم به روشی دیگر نیز بدست آوریم. $Q_1 = \sum_{m_j=-j}^j e^{\beta g \mu_B m_j H}$ یعنی روی محور m_j که می تواند از $-j$ تا j تغییر کند در این راستای Q_1 را بدست آوریم. Q_1 را می توانیم به روشی دیگر نیز بدست آوریم.

System's Partition function: $Q_N = (Q_1)^N$

$$Q_1 = \sum_{m_j=-j}^j e^{\beta g \mu_B m_j H} = e^{-\beta g \mu_B j H} + \dots + e^{\beta g \mu_B j H}$$

رابطه Q_1 با α می توانیم بدست آوریم که $\alpha = \beta g \mu_B H$ است. در این معادله $2j+1$ است. Q_1 را می توانیم به روشی دیگر نیز بدست آوریم. $Q_1 = \frac{\sinh(\alpha(j+1/2))}{\sinh(\alpha/2)}$ است. $\alpha = \beta g \mu_B H$ است. Q_1 را می توانیم به روشی دیگر نیز بدست آوریم.

$$\beta g \mu_B H = \alpha$$

$$Q_1 = \frac{\sinh\left\{\left(1 + \frac{1}{2j}\right)\alpha\right\}}{\sinh\left(\frac{\alpha}{2j}\right)}$$

$$M_z = \frac{1}{\beta} \frac{\partial}{\partial H} \ln Q_N$$

$$= (N g \mu_B j) \left[\left(1 + \frac{1}{2j}\right) \coth\left(1 + \frac{1}{2j}\right)\alpha - \frac{1}{2j} \coth\left(\frac{\alpha}{2j}\right) \right] \quad (2)$$

به عبارت دیگر $B_j(\alpha)$ است که به این تابع بر می خورد. $B_j(\alpha) = \frac{1}{g \mu_B j} M_z$ می تواند به مقدار M است که سیستم می تواند داشته باشد!

$$M_z = N \mu B_j(\alpha) \quad (3); \quad \mu = g \mu_B j$$

هر چه α بزرگتر است، $B_j(\alpha)$ به 1 نزدیک می شود. $B_j(\alpha) = 1$ یعنی $M = N \mu$ است. $B_j(\alpha) = 0$ یعنی $M = 0$ است. $B_j(\alpha) = -1$ یعنی $M = -N \mu$ است.

در $\alpha \rightarrow \infty$ $B_j(\alpha) \rightarrow 1$ است. در $\alpha \rightarrow 0$ $B_j(\alpha) \rightarrow 0$ است. در $\alpha \rightarrow -\infty$ $B_j(\alpha) \rightarrow -1$ است. $B_j(\alpha) = \frac{1}{g \mu_B j} M_z$ است. $B_j(\alpha) = 1$ یعنی $M = N \mu$ است. $B_j(\alpha) = 0$ یعنی $M = 0$ است. $B_j(\alpha) = -1$ یعنی $M = -N \mu$ است.

بنابراین $\frac{\alpha}{2j} \text{ctgh} \frac{\alpha}{2j}$ وقتی $\alpha \rightarrow \infty$ و j برود $\frac{\infty}{\infty}$ می شود که برای آن باید قاعده هسپیتال را به کار ببریم یعنی از صورت درخرج نسبت به α مشتق می گیریم درخرج هم α می کنیم که $\frac{1}{\alpha}$ می شود:

$$\alpha \rightarrow \infty, \text{ctgh} \frac{\alpha}{2j} = \frac{e^{\frac{\alpha}{2j}} + e^{-\frac{\alpha}{2j}}}{e^{\frac{\alpha}{2j}} - e^{-\frac{\alpha}{2j}}} \rightarrow \infty$$

$$\frac{\text{ctgh} \frac{\alpha}{2j}}{\frac{\alpha}{2j}} \rightarrow \frac{\infty}{\infty}$$

یعنی در اینجا بقدر α می رود یعنی $\frac{\infty}{\infty}$ می شود که وقتی آن را رفع انجام کنیم $\frac{1}{\alpha}$ می شود.

$\text{ctgh} \frac{\alpha}{2j}$ همان تابع $L(\alpha)$ است که جمله β در مورد آن صحبت کردیم، یعنی همان تابعی که برای $\langle M_z \rangle$ بدست آوردیم $N \mu L(\alpha)$ ؛ یعنی همان β که در اینجا ظاهر می شود.

$$\lim_{j \rightarrow \infty} B_j(\alpha) \rightarrow \text{ctgh} \frac{\alpha}{2j} - \frac{1}{\alpha} \rightarrow L(\alpha)$$

همان β که ظاهر می شود.

M_z را می توانیم در رابطه β مختلف بررسی کنیم.

اگر $\beta \rightarrow 0$ برود، انتظار داریم که همه μ ها در راستای میدان قرار گیرند و ما باید نتیجه بگیریم که رابطه β و α که $\beta \rightarrow 0$ برود یعنی β کوچک می شود و این با α در رابطه β با α که β در α قرار می گیرد یعنی β و α با هم می رویند.

$\beta \rightarrow 0$ برود به این معنیست که $\beta \rightarrow \infty$ برود و این یعنی $\alpha \rightarrow \infty$ برود.

$$\beta \rightarrow 0, \beta \rightarrow \infty, \alpha \rightarrow \infty, M_z \rightarrow N \mu$$

وقتی $\alpha \rightarrow \infty$ برود $\text{ctgh} \frac{\alpha}{2j}$ به سمت 1 می رود:

$$\text{ctgh} \frac{\alpha}{2j} = \frac{e^{\frac{\alpha}{2j}} + e^{-\frac{\alpha}{2j}}}{e^{\frac{\alpha}{2j}} - e^{-\frac{\alpha}{2j}}} = 1$$

بنابراین M_z به سمت $N \mu$ می رود یعنی همه μ ها در راستای قرار می گیرند.

در $\beta \rightarrow \infty$ extreme طرف قرار داریم.

$$\beta \rightarrow \infty, \beta \rightarrow 0$$

حالا می بینیم که داریم $\alpha \ll 1$ یا $\alpha \ll \frac{\alpha}{3}$ است

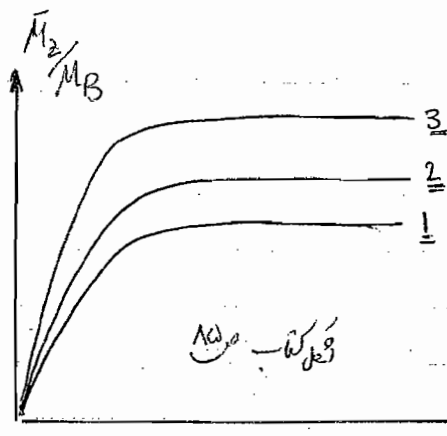
$$\text{ctgh} \frac{\alpha}{2j} \xrightarrow{\alpha \ll 1} \frac{\alpha}{2j}$$

بنابراین در رابطه M_z وقتی $\beta \rightarrow \infty$ برود $\alpha \ll 1$ است و ضرایب را بدست می آوریم:

$$\beta \rightarrow \infty, \beta \rightarrow 0, \alpha \ll 1$$

$$\Rightarrow M_z \rightarrow N \mu \left[\left(1 + \frac{1}{2j}\right)^{1/3} \left(1 + \frac{1}{2j}\right) \alpha - \frac{1}{2j} \frac{\alpha}{2j} + \frac{1}{3} \right] \Rightarrow M_z \rightarrow N \mu \left(1 + \frac{1}{j}\right)^{1/3}$$

$$\Rightarrow M_z = \frac{g^2 \mu_B^2 j(j+1) H}{3 k T} \quad j \gg 1 \quad (4)$$



رابطه ③ مقادیر تجربی است که برای M_z بدست آورده بودیم که با تابع $B_j(x)$ تناسب نزدیکی کتاب به این موارد مختلف است (ص ۱۵۰) و نتیجه تجربی ۱ برای $j=1/2$ است که در آن $B_{1/2}(x) = 2 \operatorname{ctgh} 2x - \operatorname{ctgh} x$ است. خطوط تجربی خطوطی هستند که در ستاره از رابطه ۱ بدست آوریم که دیده شده اند. مقادیر تجربی نیز در شکل مشخص شده اند که از آنرا بدست آورده اند.

مقادیر تجربی بدست آمده از رابطه در توافق است با این نتایج که در این کتاب در فصل دوم در ترتیب بدست آمده است.

گفته شد که $j=1/2$ مورد توجه قرار داده شد که در اینجا $B_{1/2}(x) = 2 \operatorname{ctgh} 2x - \operatorname{ctgh} x$ است. نتیجه تجربی از اینست که $B_{1/2}(x) = \operatorname{ctgh} x$ است.

② \Rightarrow

$$M_z = \frac{1}{N} \frac{\partial}{\partial H} \ln Q_N = (Ng \mu_B j) \left[\left(1 + \frac{1}{2j}\right) \operatorname{ctgh} \left(1 + \frac{1}{2j}\right) x - \frac{1}{2j} \operatorname{ctgh} \frac{x}{2j} \right]$$

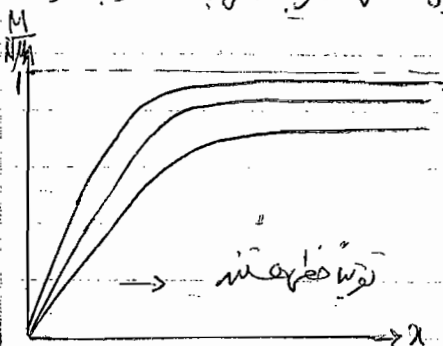
که $j=1/2$ باشد $B_{1/2}(x) = 2 \operatorname{ctgh} 2x - \operatorname{ctgh} x$

$$B_{1/2}(x) = 2 \operatorname{ctgh} 2x - \operatorname{ctgh} x$$

$$\operatorname{ctgh} 2x = \frac{1 + \operatorname{tgh}^2 x}{2 \operatorname{tgh} x} \Rightarrow B_{1/2}(x) = \frac{1 + \operatorname{tgh}^2 x}{\operatorname{tgh} x} - \frac{1}{\operatorname{tgh} x} = \operatorname{tgh} x$$

$$\textcircled{7} \rightarrow \textcircled{2} \Rightarrow M_z = N \langle \mu_z \rangle = N \mu \operatorname{tgh} x \quad \textcircled{8} ; \quad \mu = g \mu_B j \quad (j=1/2)$$

در اینجا μ یعنی μ_B است که در رابطه ۸ را بر روی μ میزنیم، یعنی $\mu = g \mu_B j$ که در اینجا $j=1/2$ است. در اینجا μ یعنی μ_B است که در رابطه ۸ را بر روی μ میزنیم، یعنی $\mu = g \mu_B j$ که در اینجا $j=1/2$ است.



$$M_z = N \langle \mu_z \rangle = N \mu \operatorname{tgh} x \approx N \mu x = N \mu_B g \mu_B H j$$

$\alpha \ll 1$
 $\alpha = \beta g \mu_B H$

انتروپی $S = -\frac{\partial A}{\partial T} = NK [\ln(2 \cosh \epsilon\beta) - \epsilon\beta \tanh \epsilon\beta]$ (*)

magnetization: $M = \frac{\partial A}{\partial H} \Big|_{T,N} = NM \tanh \epsilon\beta$

نت
که پارانتر intensive و extensive است

که همان چیزی است که قبلاً بدست آوریم.

انرژی داخلی $U = -N \epsilon \tanh \epsilon\beta$

ظرفیت گرما $C = \frac{\partial U}{\partial T} = NK (\epsilon\beta)^2 \text{sech}^2 \epsilon\beta$ (**)

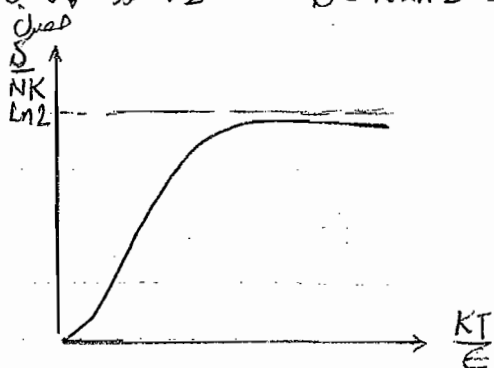
همه ترانسپلرابط (*) را بگیریم، اما هم تران با لحاظات ساده ای هم کاربردت آورد.

در دمای صفر، $\epsilon\beta \rightarrow \infty$ در این حالت میدان قرار می گیرند. بنابراین سیستم دو حالتی است که داریم تنها یکی از حالتهاش را اختیار می کند. پس در دمای صفر تعداد حالتها می قابل حصول نیست. حالت است. انتروپی هم \ln تعداد حالتهاست که در اینجا برابر $\ln 1$ یعنی صفر است. پس شکل به صورت زیر از بسیار شروع می شود.

آنگاه T به سمت بینهایت برود، ما تنها حالتی را در نظر می گیریم که تعداد درجهت میدان و یک تعداد در صلاحت جهت میدان قرار می گیرند. کل حالتها می قابل حصول برای هر کدام 2 است.

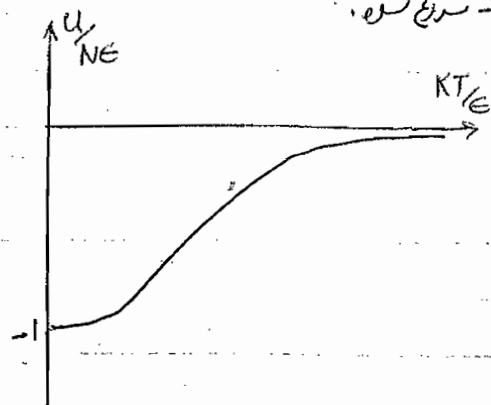
تعداد حالتها می قابل حصول: 2^N $S = K \ln 2^N = KN \ln 2$

بنابراین انتروپی در $T \rightarrow \infty$ به سمت $KN \ln 2$ می رود.



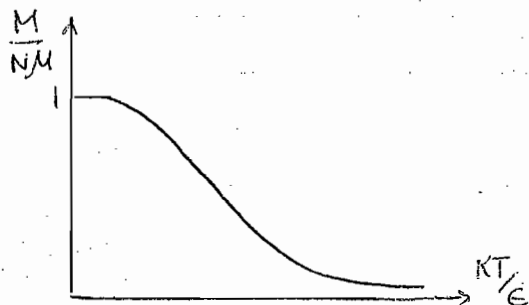
حال انرژی را بررسی می کنیم.

در دمای صفر همه ما تنها هم جهت میدان قرار می گیرند، انرژی هم برابر $-MH$ می شود. $(\epsilon = +MH)$ که برای هم برابر $-N\epsilon$ می شود. پس انرژی $\frac{U}{N\epsilon}$ را رسم کنیم، منفی ما باید از -1 شروع شود.



درما که به سمت بینهایت برود، تعداد آنها هم که در جهت میدان قرار می گیرند با تعداد آنها هم که در خلاف جهت میدان قرار می گیرند نظیر می شود. بنابراین ما باید هم شروع، بنابراین هم انرژی صفر می شود.

magnetization, μ_m و μ_m را نسبت به μ کنیم



magnetization, μ_m نسبت به μ کنیم که β یعنی $\frac{1}{KT}$ است یعنی برعکس این چیزی بود که در اینجا می‌کنیم این در زمانی منفرد هم جهت میدان قرار می‌گیرند یعنی M با $N\mu$ می‌ماند و وقتی $T \rightarrow \infty$ M با $N\mu$ نسبت منفرد است. اگر $\frac{M}{N\mu}$ را نسبت به $\frac{\epsilon}{KT}$ کنیم شکل قبلی که برای M داشتیم برعکس می‌آید.

گفتیم همین که به این شرایط دارد و از وجه مشخصه های این سیستم به شمار می‌آید، ظرفیت گرمایی است. اما همین که از کاغذ فیزیک می‌خواندیم بر این صورت است:

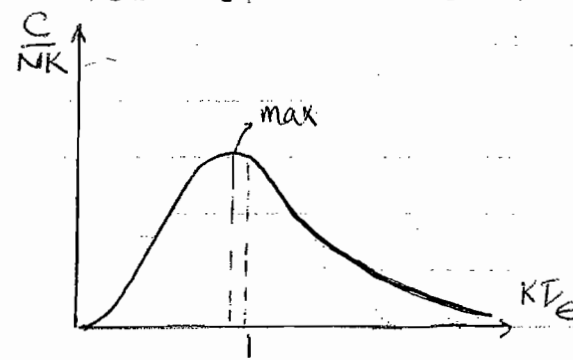
در دماهای پایین μ_m و μ با هم در جهت میدان قرار گرفته‌اند. حال اگر دما را به اندازه کوچکی عوض کنیم، انرژی تقدر عوض می‌شود و در دماهای پایین به این صورت قرار می‌گیرند



انرژی صاف کم می‌شود و اینها با هم در جهت میدان قرار گرفته‌اند و انرژی صاف کم تغییر می‌کند. ظرفیت گرمایی هم یعنی تغییر انرژی به ازای تغییر دما درجه حرارت. یعنی در دماهای پایین با تغییر کوچک دما، انرژی صاف تغییر نمی‌کند و مثل باید به صورت زیر شروع شود.

در $T \rightarrow \infty$ اینها به صورت کامل در جهت میدان قرار گرفته‌اند و انرژی صاف دما از آنها را هم بر گردانیم، انرژی صاف تغییر نمی‌کند. یعنی در $T \rightarrow \infty$ با تغییر کوچک دما، انرژی صاف تغییر نمی‌کند و ظرفیت گرمایی هم در آنجا صاف است.

ظرفیت گرمایی همواره نسبت است و دیدیم که اینها صاف شروع کرده و دوباره به یک صاف رسیده است. بنابراین حتی به هر یک به این صورت است.



همی اینها به این صورت است که $C = \frac{\partial U}{\partial T} = NK(\epsilon\beta)^2 \text{sech}^2 \epsilon\beta$ که اینها است از رابطه بعضی را به حساب $\frac{KT}{\epsilon}$ می‌کنیم، لا به صورت زیر تعریف می‌کنیم و $\frac{C}{NK}$ نسبت به $\frac{KT}{\epsilon}$ می‌کنیم.

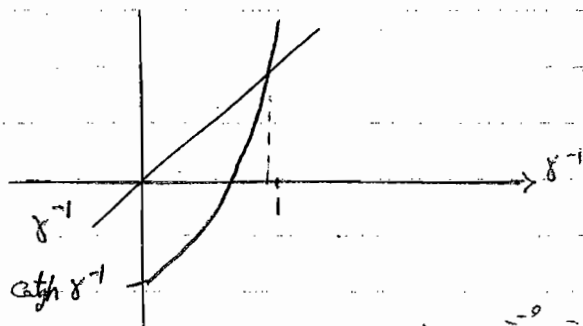
$$\theta = \frac{KT}{\epsilon}$$

$$\frac{C}{NK} = \frac{\gamma^2}{\cosh^2 \gamma^{-1}} \Rightarrow \frac{d \frac{C}{NK}}{d\gamma} = \frac{\gamma^3 (\cosh \gamma^{-1} - \gamma^{-1} \sinh \gamma^{-1})}{\cosh^3 \gamma^{-1}}$$

متن را در مورد شوتکی (Schottky) یک صحت این است که γ (یا γ^{-1}) با دما همبستگی دارد یعنی T با دما همبستگی دارد که همان است که در کتاب گفته شده است. $\cosh \gamma^{-1}$ (زوج کسری) بی نهایت شود و این بدین معنایست که γ^{-1} همگوشه را از بین ببرد و بی نهایت شود. پس صحت هم این است که این را نیز بپذیرد.

$$\cosh \gamma^{-1} = \gamma^{-1}$$

رابطه فوق منجر به برای حل این معادله باید دو طرف را در γ^{-1} ضرب کنیم و نقطه برخورد را در γ^{-1} مشخص کنیم. تقریباً در $\gamma^{-1} \approx 1$ قطع می‌کنند. یعنی بی نهایت $\frac{C}{NK}$ که قبل از آن اتفاق می‌افتد.



آن $\frac{C}{NK}$ را حول این بی نهایت بطور هم متنقّل کردن همگوشه و متنقّل دوم چگونگی در γ^{-1}

$$\frac{C}{NK} \approx \left(\frac{2e}{KT}\right)^2 e^{\frac{2e}{KT}} (1 + e^{\frac{2e}{KT}})^{-2}$$

که به رابطه فوق طریقت گریس Schottky می‌گویند برای سیستم‌های اسپین $\frac{1}{2}$.

نقطه صافی که در این رابطه اسپین $\frac{1}{2}$ وجود دارد، در نگاه کردن به انرژی‌ها منسجم است.

N_+ : تعداد اسپین‌ها که در جهت میدان و اگر گفته اند یعنی انرژی آنها مثبت است.

N_- : تعداد اسپین‌ها که در جهت معکوس میدان و اگر گفته اند یعنی انرژی آنها منفی است (-).

$$N = N_+ + N_- \quad \text{تعداد اسپین}$$

انرژی‌ها منسجم عبارتند از:

$$E = (N_+ - N_-)E = N\mu \quad \text{انرژی سیستم}$$

در این سیستم را می‌توان نوشت N_+ کنیم، این همان انرژی مثبت است که در این سیستم می‌توان نوشت N_+ کنیم. فرض کنیم E کل در رابطه آخر ثابت باشد، بدان صورت هر دو انرژی را می‌توانیم حساب کنیم. اگر E مثبت باشد در E مشخص، N_+ صورت می‌گیرد.

$$N_+ = \frac{1}{2} \left(N \pm \frac{E}{\mu} \right)$$

$$\Omega = \frac{N!}{N_+! N_-!}$$

$$N \gg 1 \rightarrow \ln N! \approx N \ln N$$

$$S = K \ln \Omega = K \left[N \ln N - \frac{1}{2} \left(N + \frac{E}{\epsilon} \right) \ln \frac{1}{2} \left(N + \frac{E}{\epsilon} \right) - \frac{1}{2} \left(N - \frac{E}{\epsilon} \right) \ln \frac{1}{2} \left(N - \frac{E}{\epsilon} \right) \right] \quad (I)$$

این رسم E ثابت است.
 در هر کدام از E ها به هر حال یک تعداد از N ها در هر دو حالت به سمت راست و یک تعداد به سمت چپ هستند. اینها هر کدام
 متناظر با یک E هستند یعنی در واقع رابطه که (I) رابطه ای بین N و E است.
 اگر در رابطه که قرار گرفته ایم، E را $\frac{E}{N}$ بنویسیم و بین آنها رابطه که در هر دو حالت E به یک سمت چپ رابطه (I)
 درست می آید.

ص ۱۱۴

رابطه ای که قرار می دهیم که u بود:

$$S = NK \left[\ln (2 \cosh \beta \epsilon) - \beta \epsilon \tanh \beta \epsilon \right]$$

$$u = -N \epsilon \tanh \beta \epsilon$$

اینجا u ، $\frac{E}{N}$ و $\beta \epsilon$ $\tanh \beta \epsilon$ بر اساس E قرار می دهیم و این صورت رابطه (I) بدست می آید.

فکر کنید چنانچه که در اینجا و چون دارد این است که اگر از رابطه (I) نسبت به E مشتق کنیم

$$\frac{1}{T} = \left. \frac{\partial S}{\partial E} \right|_N = \frac{K}{2\epsilon} \ln \frac{1 - \frac{E}{NE}}{1 + \frac{E}{NE}} \quad (II) \quad \checkmark$$

اگر تعداد اسپین ها N که هم جهت میدان می آیند (N_+) از تعداد اسپین ها N_- که خلاف جهت میدان می آیند (N_-) بیشتر
 باشد، در این صورت E منفی می شود (E را مثبت در نظر گرفتیم)
 و $E < 0$ یعنی است که انرژی می باشد. در قسمت تقعر قرار گرفته است:

$$\text{if } E < 0 \Rightarrow 1 - \frac{E}{NE} > 1 + \frac{E}{NE} \Rightarrow \frac{1 - \frac{E}{NE}}{1 + \frac{E}{NE}} > 1 \xrightarrow{\ln} T > 0$$

↑
 Ln مثبت بزرگتر
 از یک مثبت است

بنابراین $T > 0$ است

اگر $E > 0$ شود یعنی که در مقابل توپها از اسپین ها خلاف جهت میدان می آیند
 (البته این یک حالت تعادل نیست، وقتی اسپین ها خلاف جهت میدان قرار می گیرند، سعی می کنند که در جهت میدان قرار بگیرند و میدان
 باید میدان خارجی برهم نرسد و مانند که این اتفاق نیفتد. یک میدان خارجی باعث می شود که کدر قابل توجهی از اسپین ها خلاف جهت
 میدان قرار بگیرند)

$$\text{if } E > 0, 1 - \frac{E}{NE} < 1 + \frac{E}{NE} \Rightarrow \frac{1 - \frac{E}{NE}}{1 + \frac{E}{NE}} < 1 \xrightarrow{\ln} T < 0 \quad !!$$

بنابراین $T < 0$ است

دست E بدست آوردیم که چیزی که به عنوان α تعریف کردیم، بدست است.
 برای اینکه این مسئله را جزئیات بیشتر بررسی کنیم، احتمالات شکل آنتروپی را هم بنویسیم.

$$\frac{S}{KN} = y$$

$$\frac{E}{NE} = \alpha$$

$$\textcircled{I} \quad y = \frac{1}{N} \ln N - \frac{1}{2} (1+\alpha) \ln \frac{1}{2} (1+\alpha) - \frac{1}{2} (1-\alpha) \ln \frac{1}{2} (1-\alpha) - \frac{1}{2} (1+\alpha) \ln N - \frac{1}{2} (1-\alpha) \ln \frac{1}{2} (1-\alpha) - \frac{1}{2} (1-\alpha) \ln N$$

$$\Rightarrow y = \ln 2 - \frac{1}{2} [(1+\alpha) \ln(1+\alpha) + (1-\alpha) \ln(1-\alpha)] \quad \textcircled{II}$$

مفروضه که برای E مسئله بر حسب KT بنویسیم بر حسب انرژی بنویسیم.
 $\alpha = \frac{E}{NE}$ حد اکثری است چون E کل انرژی است که می‌تواند داشته باشد $N \in$ و $-NE \leq N \in$ و یک چیزی بین این دو است. (و هم در جهت میزان قرار می‌گیرد $(-NE)$ و هم در جهت جهت میزان قرار می‌گیرد (NE))
 $\alpha = \frac{E}{NE} \quad -1 < \alpha < 1$

آنچه بدست می‌آید و در مورد α است. اگر $\alpha = 0$ باشد یعنی همه انرژی در مرکز قرار گرفته باشد. طبق رابطه \textcircled{II} تنها $\ln 2$ باقی می‌ماند که این هم غیر عینی نیست. وقتی امپلین ها با α نزدیک 0 قرار بگیرند، اوقات هم که بیشتر از این بود که کل انرژی 2^N می‌شود. در نتیجه $S = K \ln 2^N$ یعنی $S = KN \ln 2$ می‌شود پس $\frac{S}{KN} = \ln 2$ می‌شود.

برای بدست آوردن $\frac{\partial y}{\partial \alpha}$ با فرضیات رابطه ای که برای $\frac{\partial S}{\partial E}$ را بنویسیم رابطه ای بر حسب α بنویسیم.

$$\frac{1}{T} = \frac{\partial S}{\partial E} \Big|_N = \frac{K}{2E} \ln \frac{1 - \frac{E}{NE}}{1 + \frac{E}{NE}} \quad \frac{S}{KN} = y, \quad \frac{E}{NE} = \alpha$$

$$\frac{\partial S}{\partial E} = \frac{KN \frac{\partial S}{\partial (KN)}}{NE \alpha \frac{E}{NE}} = \frac{K}{E} \frac{\partial y}{\partial \alpha} \Rightarrow \frac{K}{E} \frac{\partial y}{\partial \alpha} = \frac{K}{2E} \ln \frac{1-\alpha}{1+\alpha} \quad \textcircled{IV}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial y}{\partial \alpha} = \frac{1}{2} [\ln(1-\alpha) - \ln(1+\alpha)] \quad \textcircled{V}$$

اگر $E=0$ باشد یعنی یک مقدار کمتر از مرکز باشد. α را $\alpha = -\delta$ می‌گیریم که δ به سمت صفر برود و چون α صغیر کوچک است رابطه بر حسب α یعنی $\ln(1+\alpha)$ را رابطه بر حسب α می‌نویسیم.

$$\left. \begin{aligned} \ln(1-\alpha) &\approx -\alpha = -(-\delta) \\ \alpha &\ll 1 \end{aligned} \right\} \textcircled{VI} \quad \ln(1+\alpha) \approx \alpha - \frac{\alpha^2}{2} + \frac{\alpha^3}{3} - \dots \quad -1 < \alpha < 1$$

$$\textcircled{VII} \rightarrow \textcircled{V} \Rightarrow \frac{\partial y}{\partial \alpha} = \frac{1}{2} \left[\frac{\ln(1-\alpha)}{-\alpha} - \frac{\ln(1+\alpha)}{\alpha} \right] = \frac{1}{2} [-(-\delta) - (-\delta)] = \delta$$

δ مثبت است یعنی مثبت در یک مقدار قبل از صفر مثبت است.
 δ که به سمت صفر برود، ما می‌بینیم که به سمت صفر مثبت می‌رود یعنی $\frac{\partial S}{\partial E} \Big|_N$ از طرف دیگر $\frac{1}{T}$ است. چون δ مثبت صفر است 0^+ (یا 0^-) یعنی یک مقدار قبل از نقطه صفر، δ $+\infty$ است.

$\lambda = -1$

بر $\lambda = -1$ برسد

⑩ $\Rightarrow y = \ln 2 - \frac{1}{2} \left[\underbrace{(1+\alpha) \ln(1+\alpha)}_2 + \underbrace{(1-\alpha) \ln(1-\alpha)}_2 \right] = \ln 2 - \frac{1}{2} \times 2 \ln 2 = 0$

بین آنترنپی در نقطه $\alpha = -1$ ، صفوات و $\frac{S}{kT}$ در نقطه $\alpha = -1$ صفوات، نسبت هم در $\alpha = -1$ است. $\alpha = 0$ نسبت است.

آنرنتی صفوات در نقطه $\alpha = -1$ را می‌خواهیم، در رابطه ای که برای نسبت داریم می‌بینیم که $\alpha = 1$ - حرارت می‌دهیم که $\frac{1-\alpha}{1+\alpha}$ هم $\frac{1}{\infty}$ و $\frac{1}{0}$ برابر است ∞ است که این برابر $\frac{1}{T}$ می‌باشد پس در این نقطه T به سمت صفوات ∞ و در $\alpha = 0$ است.

$\lambda = 0$

حال که $E = 0^+$ را بررسی کنیم

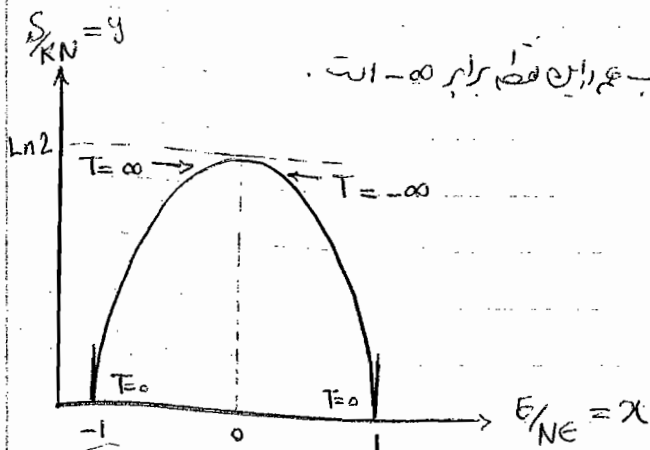
$E = 0^+, \alpha = \delta$

⑪: $\frac{\partial y}{\partial \alpha} = \frac{1}{2} \left[\underbrace{\ln(1-\alpha)}_{-\alpha} - \underbrace{\ln(1+\alpha)}_{\alpha} \right] \approx \frac{1}{2} [-\delta - \delta] = -\delta$

حال که δ - δ که به سمت صفوات ∞ می‌رود، بنابراین یک مقدار صغیرتر از نقطه $E = 0$ را می‌بینیم. T برابر ∞ است و نسبت ها هم در $\alpha = 0$ تا $\alpha = 1$ صفوات هستند.

$\lambda = 1$

نسبت به نقطه $\alpha = -1$ در نقطه $\alpha = 1$ هم صفوات ∞ و در این نقطه برابر ∞ است.



بدانکه باید توجه کنیم که معنای واقعی آنترنپی که در اینجا به عنوان دمای منفی ظاهر شده است یعنی نشانه عدداً منفی که در اینجا من افتد این است که این موصوفات را در یک دفعه در خلاف جهت میدان می‌ایستند و نه به معنای دمای آنترنپی است که داریم.

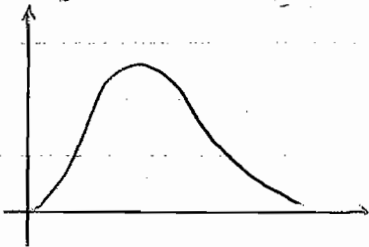
این اتفاق فقط وقتی می‌افتد که آنترنپی من این نسبت به انرژی تغییر حالات به هر دو این وقتی حاصل می‌شود که نسبت عدداً منفی برای انرژی در ∞ باشد.

در یک نسبت که آنترنپی اصل به خصوصیت همیشه یک حد پاسی برای آنترنپی قرار می‌دهد: مثلاً برای تولید هر دو نسبت در آنترنپی نسبتاً است سیستمی که آنترنپی صغیری داشته باشد و معمولاً جدای از آنترنپی ندارند چون آنترنپی صغیری هم می‌تواند به ∞ برسد و آن دمای ∞ خواهد نسبت است و این اتفاق برای آن می‌افتد، برای سیستمی است که آنترنپی صغیری دارند.

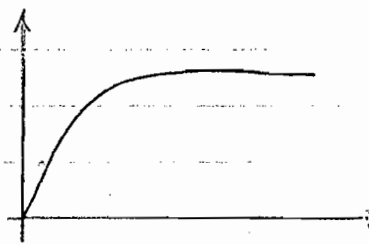
در هر سیستمی که آنترنپی صغیری در آنجا نیست، در دمای منفی به معنای تعویض راستی این سیستم می‌تواند در جهت میدان قرار گیرد، تا به نور آنها را خلاف جهت میدان قرار داده ایم یعنی باید یک برهم کنش خارجی اینجا را در خلاف جهت میدان قرار دهیم.

همین طور که آنترنپی ∞ می‌تواند باشد یعنی که در آن سیستم در حال تعادل است که ∞ برود یا به آنترنپی ∞ (با ∞ ...)

یک شرط دیگر این سیستم، قانون کوانتوم است. قانون کوانتوم که ما در اینجا داریم این است که E توان یک ثابت و n_x, n_y, n_z که در قانون کوانتوم یک ثابت منفی و تغییر را کرد (از مثبت به منفی) یا ظرفیت گرمایی است که برای آن اتفاق افتاده شکر بصورت معکوس در وقت این در نگاه می آید زیرا در هر دو نگاه صفر، بقوله این ظرفیت گرمایی صفر است و یک دقیقه دارد.



در حالتی ظرفیت گرمایی ویژه برای دو اتمی (حالات دو) بصورت معکوس است یعنی در نگاه می آید تقریباً صفر است و در نگاه می آید به یک مقدار ثابت می رسد.



شکل اول موقع نصف سیستم ها است که در آن انرژی دارند و باید اینها را بشود که یک آن من کوانتوم هستند و در آن بسیار کم.

- Statistical Physics * برای مطالب و آرایش ها بیشتر در مورد سیستم های کوانتوم قابل رده کنیم
- A modern course , E. Reichle
- Ramsey

* طبقه بندی بر اساس انرژی از فصلهای ۱ و ۲ حل می کنیم

حلیم تمام : ۸۷ : ۸۷

حل مسائل :

مسئله ۸ فصل اول
یک گاز شش اتمی را در نظر بگیرید که انرژی های عبور از زیر بارند (انرژی های تک ذره ها بصورت زیر مشخص می شود):
 $E = \frac{hc}{2L} (n_x^2 + n_y^2 + n_z^2)^{1/2}$
مسئله گفته است که حالت غیر نسبی انجم بعد از انرژی نسبی است اما یک حالت که در آن همه n_x, n_y, n_z شش اتمی غیر نسبی را یک زیر بارند و آن بصورت m به n برابر 3 است و 3 نیست. نسبت $3/3$ را برای گاز ایده آل بصورت آورده ایم.
پسند بعد m به n است و در آن n است.

$$E = \frac{\pi^2 h^2}{2mL^2} (n_x^2 + n_y^2 + n_z^2)$$

حالی انرژی ای که برای تک ذره به دست آورده ایم کم به این صورت بود

$$E = \sum_{n_x, n_y, n_z} E_{n_x, n_y, n_z}$$

تعداد حالتها $\Omega(E, V, N)$ که بیان انرژی کل سیستم را در یک بازه انرژی E و حجم V و تعداد ذرات N می دهد. این تعداد حالتها را می توان به صورت زیر نوشت:

$$S(E, V, N) = k_B \ln \Omega(E, V, N)$$

برای N ذره وابسته به E, V, N داریم:

$$E = \sum_{n_x, n_y, n_z} \epsilon_{n_x, n_y, n_z} \quad (I)$$

$$E = \frac{hc}{2L} (n_x^2 + n_y^2 + n_z^2)^{1/2} \quad (II)$$

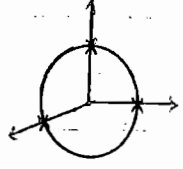
وقتی این ترازها را در نظر بگیریم، این ترازها در فضای n_x, n_y, n_z قرار می گیرند. این فضای سه بعدی را می توان به صورت یک کره در فضای n_x, n_y, n_z تصور کرد. این کره را می توان به صورت زیر نشان داد:

$$\Rightarrow \frac{2L}{hc} E = (n_x^2 + n_y^2 + n_z^2)^{1/2} \quad (III)$$

طول سطحه ای که در اینجا داریم را به صورت R می نامیم. این طول سطحه را می توان به صورت زیر نشان داد:

$$V \propto R^{3N} C \quad (IV)$$

این طول سطحه ای که در اینجا داریم را می توان به صورت زیر نشان داد:



$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2$$

تقاطع ها را این طور به دست می آوریم که دو تا را مساوی صفر قرار دهیم. مثلاً اگر y و z صفر باشند، $x = \pm R$

این طول سطحه ای که در اینجا داریم را می توان به صورت زیر نشان داد:

$$\Omega(E, V, N) \propto E^{3N} \quad (V)$$

برای تیرگی و بعدی در ... هم چنین طرز است .

این N_{ph} ... نقش α در α را بازی می کند ، چون ما در این فضا با هر حجم را می سازیم . یعنی α در α و α در α ... هستند

این طرز ششگانه ای که اینجا وجود دارد از همین $E = \frac{2L}{hc}$ است . بنا بر این تعداد حالت های N که اینجا داریم با N حالت های N است . البته حجم را با N بدست می آوریم و سطح را با N بدست می آوریم و چون یک قید بین آنها وجود دارد ، محاسبه N از N و N ... حاصل می شود که در رابطه (III) صدق می کند . وقتی این رابطه بصورت یک تابع است بین N و N ...

نقد ما $3N$ است (حجم) این برای سطح با هر یک بعد از این $3N$ که کنیم . این Ω با بصورت زیر می شود :

$$\Omega = C_N \left(\frac{2EL}{hc} \right)^{3N-1} \quad (V)$$

Ln (تعداد حالت ها) : $Ln \Omega = Ln C_N + (3N-1) Ln \left(\frac{2EL}{hc} \right)$

$$\Rightarrow S = K Ln \Omega = \alpha + (3N-1) K Ln \left(\frac{2EL}{hc} \right) \quad (VI)$$

اطلاعات ضمیمه از α ...
چون دانستی α به N رابطه را می نویسد!

با این که α را نمی دانیم ، ولی می توانیم که مربوط به C_p است . این توان از این بدست آوردیم از رابطه (I) با بدست می آوریم و در آن $V = L^3$ ، V که داریم چون همیشه به L دارد نظر می گیریم .

$$\Rightarrow E = \frac{hc}{2V^{1/3}} e^{\frac{S-\alpha}{(3N-1)K}} \quad (VII)$$

رابطه E در K را داریم و یک قسمتی از N و V چون ما این α است که در رابطه داریم با N مربوط می شود . ما و این α را با N را می دانیم .

$$\frac{1}{T} = \left(\frac{\partial S}{\partial E} \right)_{N,V} \Rightarrow T = \left(\frac{\partial E}{\partial S} \right)_{N,V}$$

α به N رابطه است بنا بر این را می بینیم که N ثابت است این α قسمتی می ماند که :

$$T = \left(\frac{\partial E}{\partial S} \right)_{N,V} \stackrel{(VII)}{=} \frac{1}{(3N-1)K} \cdot \frac{hc}{2V^{1/3}} e^{\frac{S-\alpha}{(3N-1)K}} = \frac{E}{(3N-1)K}$$

$$\Rightarrow E = (3N-1)KT \quad (VIII)$$

بدست آمدن E ، C_p ، C_v ...

$$C_v = \left(\frac{\partial E}{\partial T} \right)_N \stackrel{(VIII)}{=} (3N-1)K \quad (IX)$$

C_p ... از این بدست می آید ، یعنی با بدست آوردن C_p با این $E + PV$ نسبت به T مشتق می کنیم ، این به صورت زیر می آید

$$C_p = \frac{\partial(E + PV)}{\partial T}$$

در رابطه می آید:

$$P = - \left(\frac{\partial E}{\partial V} \right)_N = +V^{-\frac{4}{3}} \frac{hc}{2} e^{\frac{S-\alpha}{(3N-1)k}} = \frac{1}{3V} \frac{hc}{2V^{\frac{1}{3}}} e^{\frac{S-\alpha}{(3N-1)k}} = \frac{E}{3V}$$

$$\Rightarrow PV = \frac{1}{3} E \quad \text{X}$$

$$C_p = \left. \frac{\partial (E + PV)}{\partial T} \right|_N = \left. \frac{\partial (E + \frac{1}{3}E)}{\partial T} \right|_N = \frac{4}{3} \left. \frac{\partial E}{\partial T} \right|_N = \frac{4}{3} C_v$$

ملاحظه کنیم رابطه $S = k \ln \Omega = \alpha + (3N-1)k \ln \frac{2EL}{hc}$ با توجه به این که در اختیار داریم و در آنجا α و E و V ثابت هستند پس $\ln \Omega$ به $\ln E$ و $\ln V$ وابسته است که E و V ثابت آورد.

مسئله ۱ فصل اول:

N فوتون در یک ظرف داریم که انرژی های آنها بصورت زیر داده شده است:

$$\epsilon = nh\nu$$

انرژی کل را می نویسیم، در رابطه زیر می بینیم:

$$E = h\nu(n_1 + n_2 + \dots + n_N)$$

$$\Rightarrow (n_1 + n_2 + \dots + n_N) = \frac{E}{h\nu}$$

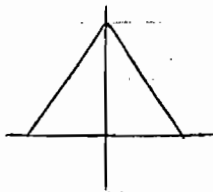
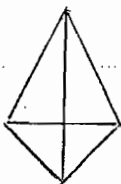
در یک فضای N بعدی، چنین رابطه ای بین N ها وجود دارد، یعنی که اینها وجود

دارد برای هر عدد N یکسان. برای $N=1$ که در آن سطح انرژی E در یک سطح E از

صفر گذاشتن همه n_1, \dots, n_N ها بجز یکی از آنها صفر است. بنابراین طول سطحی که اینها وجود دارند $\frac{E}{h\nu}$ است.

$$n_i = 0 \quad (i \neq 1) \Rightarrow n_1 = \frac{E}{h\nu}$$

این شش چند وجهی هایی است که هم آنها بصورت خطوط ثابت هستند، یعنی بر روی یک فضای سه بعدی، چهار نقطه داریم، این چهار نقطه فضای N بعدی است.



یعنی محل تقاطع اینها با محورها (محور اول) می شود برابر $\frac{E}{h\nu}$

بنابراین معلوم می آید وجود دارد (تعداد حالتها) قابل محاسب است با این طول سطحی $N-1$ بعدی فضای N بعدی است.

$$\Omega \propto \left(\frac{E}{h\nu} \right)^{N-1} \quad \text{D}$$

پس انرژی مساوی شود با یک ثابتی که از تابعی که در $K \ln(N-1)$ است به دست می آید به این صورت می نویسیم:

$$S = \alpha + K(N-1) \ln \left(\frac{E}{h\nu} \right) \quad (2)$$

* هر کدام از n ها از صفر تا یکبار صحیح را می گیرند ولی با اعدادی را می فرماییم که جمع آنها مساوی $\frac{E}{h\nu}$ شود. حال اگر n عدد صحیح را نمی تواند بگیرد و هر کدام از اینها عددی که می تواند بر طول شش ضلعی که پیدا کردیم (E^*) باشد، یعنی هر کدام از اینها می تواند از صفر تا E^* را بگیرند و چیزی که ما پیدا کردیم تعداد ترانهایی است که هر کدام از آنها می توانند بگیرند. بعد N از اینها داریم (در واقع $N-1$ Partition در اینجا وجود دارد که در اینجا می تواند به اندازه E^* قسمت شود که می توانیم تعداد حالتها را فاکتور میس حساب کنیم و بعد حاصل کنیم این هم یک روش برای حل این مسئله می توانیم باشد.

در رابطه $E = nh\nu$ ، n عدد اعداد صحیح را می گیرند اما n ها می را می فرماییم که در رابطه $E = h\nu(n_1 + n_2 + \dots + n_N)$ صدق کنند $\sum_{i=1}^N n_i = \frac{E}{h\nu}$ بنا بر این n ها صفر تا طول شش ضلعی هستند که به دست آوردیم. هر فرستیم تعداد حالتها را می شماریم. با توجه به رابطه ای که داریم n ها تغییر تا ∞ می توانند تغییر کنند. حال آنکه تعدادی که می توانند بگیرند به اندازه این طول شش ضلعی است که به دست آوردیم.

بعرض چون معادلات را ساده می توانیم (رابطه E را فرستادیم) ، رابطه (2) برای ما کافی است:

$$\frac{1}{T} = \left(\frac{\partial S}{\partial E} \right)_{N, V}$$

که این مشتق را حساب کنیم ، کافایت بریزیم شود

$$\frac{1}{T} = \left(\frac{\partial S}{\partial E} \right)_{N, V} = K(N-1) \frac{1/h\nu}{E/h\nu} \Rightarrow \boxed{E = (N-1)KT} \quad (3)$$

این مسئله فیزیک هم فرایسته است و گفته اند $\frac{E}{N} \rightarrow \infty$ برود می توانیم به افتد. $\frac{E}{N}$ اند $h\nu$ ها را به عنوان ΔE ها می فرماییم در نظر بگیریم ، این رابطه یعنی این فاصله ها (ΔE) به صفر میل کنند و صدمه انرژی برای ما وجود نداشته باشد (در سینما ت حالت).

از رابطه (3) T را می توان بر حسب $\frac{E}{N h\nu}$ نوشت:

$$(3) \Rightarrow T^{-1} = K \left(\frac{N}{E} - \frac{1}{E} \right)$$

در رابطه به دست آمده $h\nu$ ضرب و تقسیم می کنیم:

$$\Rightarrow T^{-1} = \frac{K}{h\nu} \left(\frac{N h\nu}{E} - \frac{h\nu}{E} \right)$$

حال آنکه $\frac{E}{N h\nu} \rightarrow \infty$ برود، یعنی $\frac{E}{N h\nu} \rightarrow \infty$ برود می توانیم:

$$T^{-1} = -\frac{K}{E} \Rightarrow T = -\frac{E}{K}$$

حالا یک نسبت است بنا بر این رابطه ما یعنی $\frac{E}{N}$ می فرماییم که مفهوم آن به عنوان $\frac{E}{N}$ به دریا می نویسیم نسبت $\frac{E}{N}$ یعنی نسبتی است که نسبت به حالتها می نویسیم یعنی $\frac{E}{N}$ می رود و انرژی از یک حالت به یک حالت دیگر می رود. در واقع اگر تغییرات انرژی به انرژی را حساب کنیم ، این تغییرات منفی است یعنی جرم انرژی ما به ازای $\frac{E}{N}$ می رود و نسبتاً تمام ترانهها را می بگیرند. یعنی در واقع سیستم را بهتر می توانیم نسبت به حالتها که در یک انرژی $\frac{E}{N}$ داریم که انواع و اقسام حالتها که مختلف دارند به دست می آید.

$\frac{E}{Nh\nu} \rightarrow \infty$ یعنی اینکه اینها دارند تا آرزوهای مختلف را برمی کنند، یعنی تغییرات انرژی نسبت به انرژی تغییر است و با افزایش انرژی آنترپی کم می شود.

ولی سیستمی این که دارای حد بالایی انرژی است در حالت انرژی های پایین آنترپی یک مقداری دارد، بعد آنترپی بیشتر می شود اما وقتی فراتر از حد بالایی آنترپی کاهش پیدا می کند، بنابراین در نظر می آید.

در واقع $\frac{E}{Nh\nu}$ وقتی فراتر از حد بالایی آنترپی کاهش پیدا می کند.

برای مسئله هم $\frac{E}{Nh\nu} \rightarrow \infty$ تغییرات انرژی نسبت به انرژی تغییر می شود.

که ولتاژ α به E صفا بصورت $\alpha \left(\frac{E}{h\nu}\right)^{N-1}$ است اما این ضریب ثابت که به N وابسته است را در این روش نمی توانیم به کار ببریم و بنا بر این مثلا انرژی در هر یک از این ضرایب را در این روش نمی توانیم بگیریم.

مسئله ۱ فصل اول:

با توجه به اینکه آنترپی یک کمیت extensive است، عبارت زیر را ثابت کنید:

$$N \left(\frac{\partial S}{\partial N}\right)_{U,E} + V \left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_{N,E} + E \left(\frac{\partial S}{\partial E}\right)_{N,V} = S \quad (*)$$

از قانون پایستگی انرژی شروع می کنیم:

$$E = TS + \mu N - PV \quad (1) \text{ Gibbs-Puham relation}$$

فرض می کرده ایم که N, E, V از یک تابع است:

$$S(N, E, V) \rightarrow \Delta S = \frac{\partial S}{\partial N} \Delta N + \frac{\partial S}{\partial V} \Delta V + \frac{\partial S}{\partial E} \Delta E \quad (2)$$

بروای سیستم یک S_1 این رابطه درست است که این

$$S_1 \rightarrow S_2$$

رابطه است.

فرض می کنیم $S_2 = \alpha S_1$ (سیستم به اندازه یک ضریب α تغییر میکند)

$$S_2 = \alpha S_1$$

این α ضریب است که بصورت extensive کمیت با آن تغییر می کنند، N, E, V هم با همین ضریب تغییر

می کنند و تمام کمیت extensive همین ضریب تغییر می کنند، یعنی می توانیم ΔS را بصورت زیر بنویسیم:

$$\left. \begin{aligned} \Delta S &= (\alpha - 1) S_1 \\ \Delta N &= (\alpha - 1) N_1 \\ \Delta V &= (\alpha - 1) V_1 \\ \Delta E &= (\alpha - 1) E_1 \end{aligned} \right\} (3) \quad \xrightarrow{\text{چون}} \Delta S = S_2 - S_1 = \alpha S_1 - S_1 = (\alpha - 1) S_1$$

③ در رابطه ② قرار می دهیم:

$$dS = \left(\frac{\partial S}{\partial E}\right)_{N,V} dE + \left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_{N,E} dV + \left(\frac{\partial S}{\partial N}\right)_{E,V} dN$$

رابطه بالا را برای N, V, E در حالت تعادل می نویسیم که این N, V, E هر کدام N, V, E می توانند باشند. سه انبساط ها را بر می داریم

پس این انبساط می تواند این باشد:

$$dS = N \left(\frac{\partial S}{\partial N}\right)_{E,V} + V \left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_{N,E} + E \left(\frac{\partial S}{\partial E}\right)_{N,V}$$

* چرا E, N, V به نسبت تغییر می کنند؟
 کمیت extensive این طور هستند، اگر سیستم به اندازه α تغییر کنیم، طبع کمیت extensive α برابر می شود. E, N, V هم α برابر می شوند ولی P, T, μ تغییر نمی کنند.

رابطه ①، که هم تران بیان همی است

$$S = \frac{1}{T} E + \frac{P}{T} V - \frac{\mu}{T} N \quad (1)$$

در تغییرات این رابطه را حساب کنیم، تحت این تغییرات P, T, μ تغییر نمی کنند و عقاب رابطه ④ با رابطه * برت می آوریم که

$$\left(\frac{\partial S}{\partial N}\right)_{E,V} = \frac{1}{T}, \quad \left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_{N,E} = \frac{P}{T}, \quad \left(\frac{\partial S}{\partial E}\right)_{N,V} = \frac{\mu}{T}$$

مسئله فصل اول، (توضیح)

این مسئله بیشتر ترمودینامیک است و معانی آمارا زیادی ندارد. این مسئله گفته برای یک گاز ایده آل که از مولکولهای تک اتمی تشکیل شده است (اتم مولکولها جدا می باشند، جفتها و جفتها هم بوجود می آید و جفتها جفتها جفتها قابل حصول جفتها بیشتر می شود) البته مسئله گفته مولکولهای تک اتمی به این خاطر است که تنها انرژی جنبشی را برای آنها در نظر بگیریم و همان می باشد که تابع حال برای انرژی انجام می داریم، در اینجا هم قابل قبول می باشد.

تغییر انرژی در دو حالت مختلف برای دو حالت باشد و اینها فشار است و به هر دو لغات است.

مسئله فصل اول، (توضیح)

مسئله سه اتمی است، AK را باید برای حالت P ثابت و برای حالت V ثابت حساب کنیم. این از رابطه ترمودینامیک استفاده می کنیم که وقتی P ثابت است به چه معنای، رابطه $E = PV$ را داریم، پس P ثابت یعنی E ثابت باشد

$$PV = NKT$$

$$E = 3NKT$$

در P ثابت است و V ثابت باشد، در رابطه بالا می توانیم رابطه ای بدست آوریم که مسئله را برای آن ثابت حل کنیم.

E, V را به صورت یک تغییر در نظر می گیریم، نسبت به این تغییر مشتق می گیریم و در آخر آن هم همین کمیت نسبت آنرا یعنی AK وقتی E ثابت است، وقتی E ثابت است E نسبت به V هم تفاوت دارد که ضریب $\frac{5}{3}$ و $\frac{4}{3}$ می باشد که در این است که داریم.

مسئله ۱۳ فصل اول:

عبارت رابطه برای انرژی بیرون داده شده:

$$S_T = NK \ln V + \frac{3}{2} NK \left\{ 1 + \ln \frac{2\pi mKT}{h^2} \right\} \quad \text{①}$$

یک رابطه هم داریم $\frac{1}{N!}$ و در ادامه ثابت آوریم.

$$S = NK \ln \frac{V}{N} + \frac{3}{2} NK \left\{ \frac{5}{3} + \ln \frac{2\pi mKT}{h^2} \right\} \quad \text{②}$$

در رابطه ② رابطه ① را کم می‌کنیم و انرژی بیرون داده شده را می‌گیریم.

رابطه ① قبل از این است که $\frac{1}{N!}$ را وارد کنیم و رابطه ② بعد از آن است که $\frac{1}{N!}$ را وارد کرده‌ایم، در نتیجه تفاوت این دو رابطه در این است که در رابطه ① انرژی یک کسیت extensive نمی‌باشد و در رابطه ② می‌باشد.

مسئله گفته است ثابت کنیم $\frac{N_1}{V_1} = \frac{N_2}{V_2}$ و برای این کار فرض می‌کنیم که $S = S_1 + S_2$ در نقطه تعادل و در آنجا $S(N_1+N_2, V_1+V_2)$ برابر می‌شود. $\Delta S = S_T - S_S = 0$ بر این صورت است.

S_T یعنی وقتی کل سیستم هم برای رابطه ① و هم برای رابطه ② در نظر می‌گیریم و جمع می‌کنیم. S_S یعنی وقتی اینها را یک در نظر می‌گیریم و جمع می‌کنیم. ΔS یعنی تفاوت این دو رابطه ① استوار بگیریم و به رابطه ② می‌رسیم.

$$\frac{N_1}{V_1} = \frac{N_2}{V_2}$$

$$S = S_1 + S_2 = S(N_1, V_1) + S(N_2, V_2)$$

$$S' = S(N_1+N_2, V_1+V_2)$$

$$\Delta S = S_T - S_S = 0$$

این رابطه ① استفاده کنیم:

$$S_S = N_1 K \ln V_1 + \frac{3}{2} N_1 K \left\{ 1 + \ln \left(\frac{2\pi mKT}{h^2} \right) \right\} + N_2 K \ln V_2 + \frac{3}{2} N_2 K \left\{ 1 + \ln \left(\frac{2\pi mKT}{h^2} \right) \right\}$$

عبارت دوم $\left\{ \dots \right\}$ که N و V وابسته نیستند.

$$S_T = (N_1+N_2) K \ln (V_1+V_2) + \frac{3}{2} (N_1+N_2) K \left\{ 1 + \ln \left(\frac{2\pi mKT}{h^2} \right) \right\}$$

S_T انرژی بیرون داده شده و S_S انرژی کل سیستم و با هم جمع کرده‌ایم.

$$\Delta S = S_T - S_S = \frac{(N_1+N_2) K \ln (V_1+V_2)}{(N_1+N_2) K \ln \left(\frac{N_1+N_2}{\rho} \right)} - \frac{N_1 K \ln V_1}{N_1 K \ln \frac{N_1}{\rho}} - \frac{N_2 K \ln V_2}{N_2 K \ln \frac{N_2}{\rho}}$$

$$\frac{N_1}{V_1} = \frac{N_2}{V_2} = \rho$$

یعنی $\frac{N_1}{V_1}$ را ρ می‌نامیم و $\frac{N_2}{V_2}$ را ρ می‌نامیم (دو طرف مساوی را ρ می‌نامیم).

یعنی $V_1 = \frac{N_1}{\rho}$ و $V_2 = \frac{N_2}{\rho}$ و $V_1+V_2 = \frac{N_1+N_2}{\rho}$.

$$\Rightarrow \frac{\Delta S}{K} = (N_1+N_2) \ln \left(\frac{N_1+N_2}{\rho} \right) - N_1 \ln \frac{N_1}{\rho} - N_2 \ln \frac{N_2}{\rho}$$

$$\Rightarrow \frac{\Delta S}{K} = (N_1+N_2) \ln (N_1+N_2) - (N_1+N_2) \ln \rho + (N_1+N_2) \ln \rho - N_1 \ln N_1 - N_2 \ln N_2$$

$$\Rightarrow \frac{\Delta S}{K} = (N_1 + N_2) \ln(N_1 + N_2) - N_1 \ln N_1 - N_2 \ln N_2$$

به رابطه یاد (N₁+N₂) این قدر کم می کنیم و از رابطه $\ln N! = N \ln N - N$ استفاده می کنیم!

$$\Rightarrow \frac{\Delta S}{K} = \underbrace{(N_1 + N_2) \ln(N_1 + N_2) - (N_1 + N_2)}_{\ln(N_1 + N_2)!} - \underbrace{N_1 \ln N_1 + N_1}_{-\ln N_1!} - \underbrace{N_2 \ln N_2 + N_2}_{-\ln N_2!}$$

$$\Rightarrow \frac{\Delta S}{K} \stackrel{\text{I}}{=} \ln(N_1 + N_2)! - \ln N_1! - \ln N_2! = \ln \frac{N!}{N_1! N_2!}$$

عین کار را می توانیم برای رابطه II انجام دهیم، $\Delta S/K$ این که بدست می آید مثل به میزبان است که در اینجا بدست آوریم

$$\frac{\Delta S}{K} \stackrel{\text{II}}{=} \ln \frac{N!}{N_1! N_2!}$$

تعیین ΔS برای هر دو رابطه I و II می شود و به شرط اینکه رابطه

$$\rho = \frac{N_1}{V_1} = \frac{N_2}{V_2}$$

برقرار باشد، در این رابطه برقرار باشد برای رابطه دوم این اتفاق افتاده می باشد از این اتفاق استفاده

* بزرگترین ΔS از این که اصل است، ΔS همواره بزرگتر از صفر است، $\Delta S = 0$ وقتی اتفاق می افتد که $\frac{N_1}{V_1} = \frac{N_2}{V_2}$ برقرار باشد در هر صورت بزرگتر از صفر است.

مسئله ۱ فصل دوم

این مسئله، مسئله فیزیکی است که بر روی جابه جایی فرودستیم آن کامل غرض است. گفته بودیم امان حجم فضای گاز ما ناور است و امان حجم بنداره (q, p) برای q, p این، h می شود. بر فرضیم که هم امان حجم فضای گاز ناور است. (این مسئله در واقع یک مسئله کانت است.)

فرض می کنیم در نقطه ای که داریم، نقطه ها (p₁, q₁) باشند و معادلات حرکت هم از رابطه زیر بدست می آید:

$$(p_i, q_i) \rightarrow \dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}$$

در واقع در این مسئله، مسئله فیزیکی می شود و این مسئله

بدین شکل می آید که فرض می باشد (است)

یعنی است تبدیل از (p₁, q₁) و از این (p₂, q₂) به حقیقت جدید می آید (p₂, q₂) بر روی هم

$$(p_1, q_1) \rightarrow (p_2, q_2)$$

پارامتر از (p₂, q₂) به (p₁, q₁)، H هم عوض می شود و می شود H(p₂, q₂)

عین است تبدیل از (p₁, q₁) به (p₂, q₂) که فرض می باشد که معادلات حرکت هم از این معادلات عین معادلات عین برقرار است

مجموعه تبدیل از (p₁, q₁) به (p₂, q₂) را می توانیم می بینیم که معادلات حرکت هم از این معادلات عین برقرار است

تبدیل از (p₁, q₁) به (p₂, q₂) می باشد که معادلات حرکت هم از این معادلات عین برقرار است

در فضا Q و P ، این حجم فضا Q و P بر حسب q_i و p_i بر حسب Q_i و P_i بیان شود. این حجم فضا Q و P بر حسب q_i و p_i بر حسب Q_i و P_i بیان شود.

$$\prod_{i=1}^{3N} dp_i dq_i = \prod_{i=1}^{3N} dP_i dQ_i$$

این نتیجه بدیهه این است که تا در رابطه با Q و P وارد شویم.

از جمله این مورد تبدیل است. فرض کنید Q و P بر حسب q_i و p_i بیان شود. این حجم فضا Q و P بر حسب q_i و p_i بیان شود. این حجم فضا Q و P بر حسب q_i و p_i بیان شود.

اینجا در ابتدا Q و P بر حسب q_i و p_i بیان شود. این حجم فضا Q و P بر حسب q_i و p_i بیان شود. این حجم فضا Q و P بر حسب q_i و p_i بیان شود.

$$\begin{matrix} P_x & P_y & P_z & & P_r & P_{\theta} & P_{\phi} \\ (x, y, z) & \longrightarrow & (r, \theta, \phi) \end{matrix}$$

$$dx dy dz \longrightarrow r^2 dr d\theta d\phi$$

این قضیه را می توانیم به این شکل بیان کنیم. این قضیه را می توانیم به این شکل بیان کنیم. این قضیه را می توانیم به این شکل بیان کنیم.

$$dp_x dp_y dp_z dx dy dz = d\theta d\phi dr dp_r dp_{\theta} dp_{\phi}$$

برای مثال Q و P بر حسب q_i و p_i بیان شود. این حجم فضا Q و P بر حسب q_i و p_i بیان شود. این حجم فضا Q و P بر حسب q_i و p_i بیان شود.

تبدیل مختصات Q و P بر حسب q_i و p_i بیان شود. این حجم فضا Q و P بر حسب q_i و p_i بیان شود. این حجم فضا Q و P بر حسب q_i و p_i بیان شود.

در اینجا Q و P بر حسب q_i و p_i بیان شود. این حجم فضا Q و P بر حسب q_i و p_i بیان شود. این حجم فضا Q و P بر حسب q_i و p_i بیان شود.

در اینجا Q و P بر حسب q_i و p_i بیان شود. این حجم فضا Q و P بر حسب q_i و p_i بیان شود. این حجم فضا Q و P بر حسب q_i و p_i بیان شود.

برای مثال Q و P بر حسب q_i و p_i بیان شود. این حجم فضا Q و P بر حسب q_i و p_i بیان شود. این حجم فضا Q و P بر حسب q_i و p_i بیان شود.

این قضیه را می توانیم به این شکل بیان کنیم. این قضیه را می توانیم به این شکل بیان کنیم. این قضیه را می توانیم به این شکل بیان کنیم.

$$q_i = q_i$$

$$q_{i+3N} = p_i \quad i \leq 3N$$

برای مثال Q و P بر حسب q_i و p_i بیان شود. این حجم فضا Q و P بر حسب q_i و p_i بیان شود. این حجم فضا Q و P بر حسب q_i و p_i بیان شود.

توانیم J (transpose) را در نظر بگیریم، یعنی J را طوری بنویسیم که

$$\tilde{J} = \left(\begin{array}{c|c} 0 & -1 \\ \hline 1 & 0 \end{array} \right) = -J \Rightarrow J\tilde{J} = 1 \quad *$$

$$\% \det(J\tilde{J}) = (\det J)(\det \tilde{J}) = (\det J)^2 \stackrel{*}{=} \det 1 = 1$$

یعنی همانطور که می بینیم $\det 1$ برابر یک است که عمل ترانسپوز کردن در یک ماتریس را معکوس می کند، پس در اینجا J با ترانسپوز \tilde{J} معکوس است

$$\Rightarrow \det J^2 = 1 \rightarrow \det J = \pm 1$$

دری $\det J = +1$ درست است. یک حالت ساده $+1$ را در نظر بگیریم، یعنی یک P و q داشته باشیم

$$\det \left(\begin{array}{c|c} 0 & 1 \\ \hline -1 & 0 \end{array} \right) = 0 - (-1) = 1$$

برای 2×2 ، J ، 2×2 بود، آن وقت یک 1 و یک -1 را داریم. برای 3×3 ، ... هم همین طریقت. چون دو بزرگ روی هوا هم می خورند و باید دو بزرگ روی قطر فوجی را حساب کنیم. اینجا را که حساب کنیم تعداد مثبت ها در فوج $+1$ می آید. پس $\det J$ برابر -1 نیست و برابر 1 است.

$$\det J = +1$$

چرا ترانسپوز را حساب می کنیم؟ تبدیل از یک دستگاه بزرگ دستگاه دیگر ترانسپوز این موجود برای ما مهم است.

$\det J = 1$ را می بینیم که J را در نظر می گیریم. تغییرات وقتی هست که تبدیل ما را برساند به عددی تبدیل شود. اما این عدد تبدیل است که اینها هم داریم. تغییرات غیر بد هستند و این ترانسپوز 1 است. اما اگر J را طوری بنویسیم که ما در دست از اینها را هم تبدیل کنیم. دستگاه تبدیل اینها 1 است و اگر J را معکوس کنیم -1 باشد. اما در اینجا این اتفاق نمی افتد.

بعضی وقت ها می بینیم که $\det J = -1$ است. این $+1$ هم می شود. $\det J = -1$ به معنای این است که J را معکوس می کنیم. $\det J = 1$ است اما این ± 1 باید در روابطی که داریم صحت کند و در اینجا 1 صحت می کند.

در تبدیل کلاسیک از q و p به Q و P ، رابطه $Q_i = Q_i(q_j, p_j)$ را داریم

$$Q_i = Q_i(q_j, p_j)$$

$$Q_i = \frac{\partial Q_i}{\partial q_j} q_j + \frac{\partial Q_i}{\partial p_j} p_j = \frac{\partial Q_i}{\partial q_j} \frac{\partial H}{\partial p_j} - \frac{\partial Q_i}{\partial p_j} \frac{\partial H}{\partial q_j} \quad (1)$$

$$q_j = \frac{\partial H}{\partial p_j}, \quad p_j = -\frac{\partial H}{\partial q_j}$$

در رابط آخر قاعده جمع برقرار است، یعنی در مجموع صفر است.

$$\frac{\partial H}{\partial P_i} = \frac{\partial H}{\partial P_j} \frac{\partial P_j}{\partial P_i} + \frac{\partial H}{\partial q_j} \frac{\partial q_j}{\partial P_i} \quad (2)$$

به کمک این کارنسیت می‌توانیم که در رابط ①، ② با هم برابر باشند.
 هم‌اکنون در رابط $\dot{P}_i = -\frac{\partial H}{\partial Q_i}$ و $\dot{Q}_i = \frac{\partial H}{\partial P_i}$ برای H که بر حسب Q و P می‌نویسیم، هم برقرار است.

از قیاس در رابط ①، ② می‌توانیم که شرط تبدیلیات کارنسیت مابین ترتیب‌هاست:

$$\frac{\partial Q_i}{\partial q_j} = \frac{\partial P_j}{\partial P_i}, \quad \frac{\partial Q_j}{\partial P_i} = -\frac{\partial q_j}{\partial P_i}$$

به همین ترتیب معادلات معکوس هم به دست می‌آید.

در رابط فوق را برای Q_i نوشتیم، حال باید برای \dot{P}_i بنویسیم. اگر برای P_i بنویسیم، رابطه معکوس زیر به دست می‌آید:

$$\frac{\partial P_i}{\partial q_j} = -\frac{\partial P_j}{\partial Q_i}, \quad \frac{\partial P_j}{\partial P_i} = \frac{\partial q_j}{\partial Q_i}$$

حالا اگر \dot{Q} و \dot{P} را بنویسیم، در \dot{Q} و \dot{P} را بصورت زیر می‌نویسیم:

$$\dot{Q}_i = (Q_1, \dots, Q_{3N}, P_1, \dots, P_{3N})$$

$$\Rightarrow \dot{Q}_i = \frac{\partial \dot{Q}_i}{\partial \eta_j} \eta_j$$

$$\dot{P}_i = (q_1, \dots, q_{3N}, P_1, \dots, P_{3N})$$

\dot{Q} و \dot{P} را به صورت ماتریس M در واقع ماتریس این روابط است. منظور از ماتریس M عبارت است از ماتریس تبدیلیاتی که در آن $\begin{pmatrix} \dot{Q} \\ \dot{P} \end{pmatrix} = M \eta$ است.

$$\begin{pmatrix} \dot{Q} \\ \dot{P} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix}$$

البته معادلات رابط را از آن طرف هم می‌توانیم که خود این ماتریس تبدیل M ، \dot{Q} و \dot{P} را بدست می‌آید. رابط M که داریم لزوماً معکوس است رابط خطی باشد.

این ماتریس تبدیل را M می‌نامیم:

$$\dot{Q} = \bar{M} \eta \quad M_{ij} = \frac{\partial \dot{Q}_i}{\partial \eta_j}$$

البته اگر این ماتریس تبدیل M را در دو طرف بگیریم، در رابط M که داریم، این ماتریس معکوس است.

$$\dot{Q} = \bar{M} \bar{J} \frac{\partial H}{\partial \eta} \quad (3)$$

در این رابطه $\bar{J} = \frac{\partial H}{\partial \eta}$ می‌نویسیم.

$$\frac{\partial H}{\partial \eta_j} = \frac{\partial H}{\partial \dot{Q}_i} \frac{\partial \dot{Q}_i}{\partial \eta_j} = M_{ij} \frac{\partial H}{\partial \dot{Q}_i}$$

رابطه آخر را بصورت برداری می‌نویسیم:

$$\frac{\partial H}{\partial \xi} = \tilde{M} \frac{\partial H}{\partial \xi}$$

بنابراین رابطه (۳) را بصورت زیر می‌نویسیم:

$$\dot{\xi} = \tilde{M}^{-1} \tilde{J} \tilde{M} \frac{\partial H}{\partial \xi}$$

اگر فرض کنیم تبدیل کاریک باشد، معادله $\tilde{J} = \tilde{J} \frac{\partial H}{\partial \xi}$ را می‌توانیم به فرم $\dot{\xi} = \tilde{M}^{-1} \tilde{J} \tilde{M} \frac{\partial H}{\partial \xi}$ بنویسیم.

در این صورت تبدیل \tilde{M} باید در این تبدیل M دانه شود. $dq_1, dq_2, \dots, dq_{3N}, dp_1, \dots, dp_{3N}$ به عنوان $3N$ کمیت با ξ عبارت از رابطه را می‌نویسیم.

در واقع دستگاه دانه که ما داریم تبدیل M است. $3N$ کمیت M را می‌توانیم به این طریق بنویسیم:

بنابراین $3N$ کمیت M را می‌توانیم به این طریق بنویسیم: M است.

$$dq_1, dq_2, \dots, dq_{3N}, dp_1, \dots, dp_{3N} = \prod_{i=1}^{3N} d\eta_i = |\det M| \prod_{i=1}^{3N} d\xi_i \quad (4)$$

این مطلب از آنجاست که M دو مجموعه را به هم می‌رساند و این دو مجموعه را باید با هم تبدیل کنیم، اما این حجم $3N$ در تبدیل این $3N$ کمیت M به هم تبدیل می‌شوند.

بنابراین M را می‌توانیم به این طریق بنویسیم:

$$\tilde{M}^{-1} \tilde{J} \tilde{M} = \tilde{J}$$

$$\det(\tilde{M}^{-1} \tilde{J} \tilde{M}) = \det \tilde{J} = 1 \rightarrow \det M = \pm 1$$

بنابراین M را می‌توانیم به این طریق بنویسیم: M است.

$\det M = \pm 1$ است، بنابراین M را می‌توانیم به این طریق بنویسیم: M است.

بنابراین M را می‌توانیم به این طریق بنویسیم: M است. $\det M = \pm 1$ است، بنابراین M را می‌توانیم به این طریق بنویسیم: M است.

بنابراین M را می‌توانیم به این طریق بنویسیم: M است. $\det M = \pm 1$ است، بنابراین M را می‌توانیم به این طریق بنویسیم: M است.

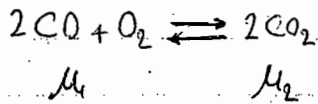
بنابراین M را می‌توانیم به این طریق بنویسیم: M است. $\det M = \pm 1$ است، بنابراین M را می‌توانیم به این طریق بنویسیم: M است.

بنابراین M را می‌توانیم به این طریق بنویسیم: M است. $\det M = \pm 1$ است، بنابراین M را می‌توانیم به این طریق بنویسیم: M است.

بنابراین M را می‌توانیم به این طریق بنویسیم: M است. $\det M = \pm 1$ است، بنابراین M را می‌توانیم به این طریق بنویسیم: M است.

P و T به نوبه بیان تغییر حجم و بیان تغییر انرژی هستند. هر چه بیان بیشتر باشد، توانایی این را دارد که انرژی را از یک ماده به دیگری منتقل کند.

همین اتفاق برای تعداد ذرات بر افتد. یک واکنش شیمیایی پس واکنش زیر را در نظر بگیریم:



در طرف چپ: هر کلاس از اینها را به عنوان block در نظر بگیریم. O_2 را یک block

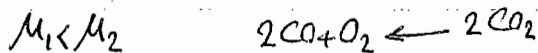
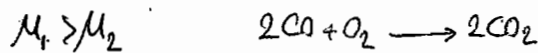
در نظر بگیریم. و CO را نیز یک block در نظر بگیریم.

در طرف راست: CO_2 را یک block در نظر بگیریم.

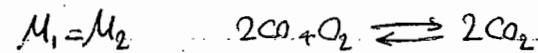
در این صورت در طرف چپ سه تا ذره و در طرف راست دو ذره داریم. از آنجا که واکنش به کدام طرف انجام می‌شود و آن را این سیستم در حال تعادل است یا نه، به بیان تغییر شیمیایی بستگی دارد.

به بیان دیگر، که بیانگر این است که واکنش به کدام طرف انجام می‌شود، بستگی شیمیایی به گرمایی

اگر در شکل بالا، بیان تغییر شیمیایی طرف راست را M_1 و بیان تغییر شیمیایی طرف چپ را M_2 بگذاریم، اگر $M_1 > M_2$ باشد، واکنش از چپ به راست خواهد بود و اگر $M_1 < M_2$ باشد، واکنش از راست به چپ خواهد بود.



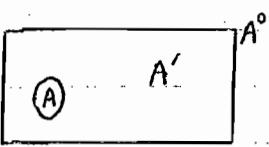
این کیفیت intensive است که بیانگر تعداد ذرات را می‌دهد و احساس را بیان تغییر شیمیایی هم که داریم و این هم از بیان تغییر شیمیایی در طرف سازی باشد و واکنش فوق در طرفه است یعنی تعداد کل ذرات ثابت باقی می‌ماند.



این گفته می‌شود که در اینجا در طرف چپ داریم احساس را M_1 و در راست داریم

در این دو سیستم N ها مساوی نیستند اما در همان تعادل، M ها مساوی می‌شوند، اگر سیستم تعادل نباشد، M ها در آن تغییر میکنند.

حال اگر چنین سیستمی را در نظر بگیریم، یعنی سیستمی که در آن تنها یک ثابت است و همه متغیر سیستم را این طور در نظر بگیریم که:



یک سیستم انرژی A° در نظر بگیریم، آنرا به دو قسمت تقسیم می‌کنیم: A و A' معادل سیستمی که مورد نظر ما است A باشد و A' کل خط اطراف است (عربی که هست) و معادل A' به عبارتی برتر از A است.

انرژی کل E ثابت است اما A می‌تواند در انرژی‌های متفاوت باشد و A' هم می‌تواند در انرژی‌های متفاوت باشد. از آنجا که هر کلاس از این انرژی‌ها را مشخص می‌کنند r نشان می‌دهیم. E_r انرژی است که A دارد و E_r انرژی است که A' دارد. این دو انرژی صرفی باشند، انرژی کل E° باقی می‌ماند.

$$E_r + E_r' = E^\circ = \text{ثابت}$$

انرژی A (E_r) می‌تواند از صفر تا E° تغییر کند و انرژی A' (E_r') هم می‌تواند از صفر تا E° تغییر کند. اگر این انرژی‌ها بسته باشند، واقعاً با این r مشخص می‌شوند و انرژی‌ها بی‌تغییرند. r یک کیفیت بی‌تغییر است. E_r انرژی‌های قابل حصولی است که در سیستم وجود دارد.

با شرط $A \ll A^0$ ، رابطه E_r را حساب کنیم

$$\frac{E_r}{E^0} = (1 - \frac{E_r^0}{E^0}) \ll 1$$

میدانیم E_r ضمیمه از یک کوچه در نزدیکی A می شود. چون معمولاً بیشتر انرژی A می شود. N_r تعداد ذرات است که سیستم A دارد و N_r^0 تعداد ذرات است که سیستم A دارد و N_r^0 تعداد ذرات ثابت است.

$$N_r + N_r^0 = N^0 = \text{ثابت}$$

$$\frac{N_r}{N^0} = (1 - \frac{N_r^0}{N^0}) \ll 1$$

معمولاً ضمیمه ضمیمه از یک است. برای سیستمی آماری این نسبت ضمیمه ضمیمه از یک کوچه است.

با این که هم فراهم کنیم این است که احتمال این را حساب کنیم که A در انرژی E_r و تعداد ذرات N_r باشد. اسم این احتمال را $P_{r,s}$ می گذاریم. $P_{r,s}$ یعنی احتمال اینکه سیستم A انرژی E_r و تعداد ذرات N_r باشد. برای حل این چند راه وجود دارد. شبیه همان کارهایی که برای سیستم کوانتوم انجام داریم. یک کار راه سئوین حالتها استفاده کنیم و یکی از فیلدهای که در سیستم مان وجود دارد استفاده کنیم و یک روش هم استفاده از ماکزیمم پاتنیا و نزدیک saddle point است که در مورد هر کدام از این راهها ماساتنیا انجام داده ایم دار.

$\Omega(E^0, N^0)$ کل حالتها قابل حصولی است که سیستم A^0 می تواند داشته باشد. این کل حالتها برابر است با حاصلضرب حالتها که A دارد و حالتها که A دارد:

$$\Omega(E^0, N^0) = \sum_{r,s} \Omega(E_r, N_r) \Omega'(E_r^0, N_r^0) \quad (1)$$

در یک حالت ویژه و سیستم A در انرژی E_r و تعداد ذرات N_r است و سیستم A^0 در انرژی E_r^0 و تعداد ذرات N_r^0 است. پس اینها فیلدهای مختلف خواهند بود و باید همه حالتها مختلف را با هم جمع کنیم.

$$P_{r,s} = \frac{\Omega(E_r, N_r) \Omega'(E_r^0, N_r^0)}{\Omega(E^0, N^0)} \quad (2)$$

اگر فرض کنیم سیستم A ضمیمه بزرگتر از سیستم A است، در واقع Ω بسیار بزرگتر از Ω' است و در واقع $P_{r,s}$ عدد $\Omega'(E_r^0, N_r^0)$ متناسب است.

$$\Omega' \gg \Omega, \quad P_{r,s} \propto \Omega'(E_r^0, N_r^0)$$

* چارچوب $P_{r,s}$ تنها حالتها A را تقسیم کل حالتها می کنیم؟
احتمال اینکه سیستم A در انرژی E_r و تعداد ذرات N_r باشد و اینکه سیستم A^0 در انرژی E_r^0 و تعداد ذرات N_r^0 باشد این در واقع یک عدد کوچک است و این کل را هم تقسیم کنیم و این باقی می ماند کل حالتها A را که همه در آنجا هستند!

از آنجایی که این Ω عدد ضمیمه بزرگی است از آنجایی که آن استفاده می کنیم. همچنین می دانیم که Ω همیشه مثبت است.
 بجای E_r می نویسیم $E^\circ - E_r$ و بجای N_r هم می نویسیم $N^\circ - N_s$.

$$\ln \Omega'(E_r, N_s) = \ln \Omega'(E^\circ - E_r, N^\circ - N_s)$$

همچنین $\ln \Omega'(E^\circ - E_r, N^\circ - N_s)$ را حول E° و N° بسط می دهیم. البته از همین جا مشخص می شود که این روش شروع می شود. البته در این مورد صحبت کردیم که این یک بسط انتگرالی است که ما صرفاً آن بسط می دهیم:

$$\ln \Omega'(E^\circ - E_r, N^\circ - N_s) \approx \ln \Omega'(E^\circ, N^\circ) + \frac{\partial \ln \Omega'}{\partial N'} \Big|_{N=N^\circ} (N_s - N^\circ) + \frac{\partial \ln \Omega'}{\partial E'} \Big|_{E'=E^\circ} (E_r - E^\circ) \quad (3)$$

البته در فرض ۱ نشان دادیم که در صورت تعادل، مشتقات $\ln \Omega$ در A و A' باید با هم مساوی باشند و اگر سیستم بتواند تعادل برقرار کند، باید داشته باشیم:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \ln \Omega'}{\partial N'} &= \frac{\partial \ln \Omega}{\partial N} = \alpha \\ \frac{\partial \ln \Omega'}{\partial E'} &= \frac{\partial \ln \Omega}{\partial E} = \beta \end{aligned} \right\} (4)$$

که البته عدد α را می نویسیم α ، β را می نویسیم β و نیز می توانیم این روابط را بنویسیم:

$$\Rightarrow \ln \Omega'(E^\circ - E_r, N^\circ - N_s) \approx \ln \Omega'(E^\circ, N^\circ) - \alpha N_s - \beta E_r$$

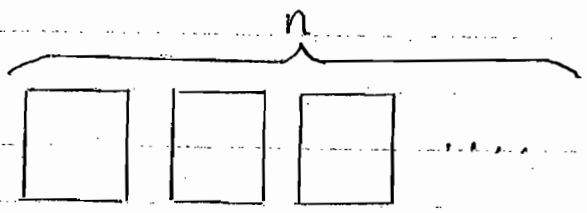
بنابراین Ω بصورت زیر می شود:

$$\Omega'(E_r, N_s) = C e^{-\alpha N_s - \beta E_r} \quad (5)$$

فردا می بینیم که $P_{r,s}$ متناسب با عبارت فوق است، این بصورت زیر می شود که ثابت C را نیز از آنجا که جمع احتمالات باید مساوی یک شود، بدست می آوریم. چون در عین حال باید سیستم در یک E_r و N_s باشد:

$$P_{r,s} = \frac{e^{-\alpha N_s - \beta E_r}}{\sum_{r,s} e^{-\alpha N_s - \beta E_r}} \quad (6)$$

همین سبب را می توانیم به طرف آن بسط می کنیم. برای اینکه سبب را آن بسط می کنیم و از سبب فوق و اینکه این N° و E° می رود، خلاص می شویم، که می توانیم از سیستم را در دست می کنیم، یا عبارت می بر سیستم A در اینجا می مختلف نگاه می کنیم (مانند transparency که می توانیم تعداد این کپی ها تعداد اعضا A را می بینیم و آن سبب ما می باشد. A از اینجا را در نظر می گیریم یعنی در واقع N کپی از سیستم را در نظر می گیریم.



آنطور که هر کدام از موافقین که اینجا هستند \bar{N} زده باشند، nN مخالف با تعداد ذرات است

nN : تعداد ذرات

و اگر \bar{E} انرژی میانگین هر کدام از آن باشد، nE انرژی کل است.

با یک عدد دیگر نگاه کنیم، آنرا تعداد کل این N ها می که وجود دارد (تعداد ذرات) است 4 تا زده و وجود داشته باشد یک بار 10 تا زده و یک بار 20 تا زده و ... را با هم جمع کنیم یعنی در هر نقطه تعداد ذرات سیستم را نگاه کنیم و بعد همه را با هم جمع کنیم و آنرا تقسیم بر این تعداد کنیم بطور میانگین تعداد متوسطی که به هر کدام از آنها هر بار حساب می شود و در یک بازه زمانی این عدد یک عدد فصلی است. به همین ترتیب هر کدام از اینها یک انرژی دارند و جمع این انرژی ها تقسیم بر N ، انرژی میانگین هر کدام می شود (در واقع سهمی که هر کدام از آنها دارند).

فرض کنیم $n_{r,s}$ تعداد سیستمی است که تعداد ذرات آنها N_s و انرژی آنها E_r باشد. N عددی عدد فصلی بزرگی است و بازه های زمانی که در آنها به سیستم نگاه می کنیم را عددی کوچک می گیریم. از این N می که داریم یک تعداد کف تعداد ذرات آنها E_s و تعداد ذراتشان N_s است و تعداد را با هم جمع می کنیم:

$\sum_{r,s} n_{r,s} = N$ در واقع تعداد سیستمی است که داریم

برای گانه انرژی کل یا به انرژی E را افزایش تعداد سیستمی که این انرژی را دارند، کنیم و بعد همه را با هم جمع کنیم.

$\sum_{r,s} E_r n_{r,s} = E_{tot} = N \bar{E}$ } (I) به همین ترتیب:

$\sum_{r,s} N_s n_{r,s} = N_{tot} = nN$

اینها این قیدها داریم که N_{tot} عددی داشته باشد، و وقتی عددی داشته باشد N ، E ، N اینها نیز ضمیمه می کنیم و ما هم داریم N مقدار معینی داشته باشد.

در حدی که N به سمت بی نهایت میل کنند، این هم می تواند تا حد امکان بزرگ شود ولی ضمیمه نسبت N_{tot} به N (تعداد اعضای آن سیستم) مقدار معینی باشد. روابط فوق (I)، قیدهای سیستم ما هستند.

مثال: فرض کنیم N تعداد اعضای آن سیستم 5 باشد یا به عبارتی در 5 نقطه مختلف سیستم را نگاه کنیم یا 5 تکیه از سیستم گرفته ایم یک حالتی از آن می گیریم که $N_{tot} = 14$ و $E_{tot} = 8E$ باشد.

$N = 5$

$N_{tot} = 14$ ، $E_{tot} = 8E$ → سیکلوس معین

تفاوت داشته $n_{r,s}$ حاصل نیستند که به این مقدار می ایکنند. می تواند انرژی های مختلف وجود داشته باشد که همین N_{tot} و E_{tot} را برآورد ما تولید می کند.

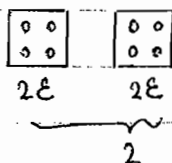
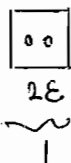
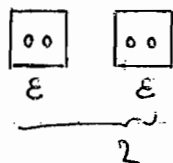
مثلاً $n_{r,s}$ ها می توانند بصورت زیر باشند:

$$\{n_{r,s}\} = \{n_{1,2} = 2, n_{2,2} = 1, n_{2,4} = 2\}$$

از این 5 سیستم زیر سیستم هستند که انرژی آنها و تعداد ذرات آنها روایت است.

یک سیستم وجود دارد که دو ذره دارد و انرژی کل آن 2ε است.

دو سیستم وجود دارد که تعداد ذرات آنها 4 است و انرژی کل آنها 2ε است.



اولاً $2 + 1 + 2 = 5$ انرژی.

در اینجا ما روایات انرژی تصویبیم، انرژی با ε است یا 2ε، یعنی ۲ روایت عددی داریم. همچنین که هم روایات در روایات روایت می‌کنند یا چهار روایت.

$$\sum_{r,s} N_s n_{r,s} = 2 \times 2 + 2 \times 1 + 4 \times 2 = 4 + 2 + 8 = 14$$

$$\sum_{r,s} N_s n_{r,s} = N \bar{N} \rightarrow 14 = 5 \bar{N} \Rightarrow \bar{N} = \frac{14}{5}$$

تعداد کل ذرات 14 است. بنابراین هر سامانه $5 \bar{N}$ قرار دهیم، یعنی بطور متوسط تعداد برابر $\frac{14}{5}$ است، و آنجا تعداد ذرات ذرات نیست و این بطور متوسط است این است که در هر لحظه $\frac{14}{5}$ ذره وجود دارد.

$$\sum_{r,s} E_r n_{r,s} = 2 \times 1 \times \epsilon + 1 \times 2 \epsilon + 2 \times 2 \epsilon = 8 \epsilon$$

ماده اصلی ما این است که تنها این روایات نیست که به $N_{tot} = 14$ و $E_{tot} = 8 \epsilon$ منتهی شود و اینها هم وجود دارد. پس میان اینها هم تفاوت داریم.

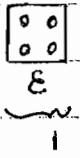
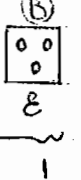
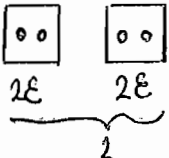
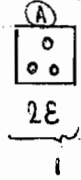
$$\{n_{r,s}\} = \{n_{2,3} = 1, n_{2,2} = 2, n_{1,3} = 1, n_{1,4} = 1\}$$

این 5 زیر سیستم انرژی کلش 2ε و تعداد ذراتش 3 است.

دو تا از این زیر سیستمها هستند که تعداد ذراتش روایت است و انرژی آنها 2ε است.

یک از این زیر سیستمها تعداد ذراتش 3 است و انرژی کلش 8 است.

یک از این زیر سیستمها تعداد ذراتش 4 است و انرژی کلش 8 است.



$$\sum n_{r,s} = 5$$

از مجموع $5 = 1 + 2 + 1 + 1$ می‌شود، یعنی 5 زیر سیستم مختلف داریم.

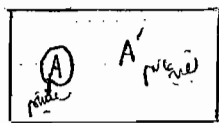
$$\sum E_r n_{r,s} = 2 \epsilon \times 1 + 2 \epsilon \times 2 + \epsilon \times 1 + \epsilon \times 1 = 8 \epsilon$$

$$\sum N_s n_{r,s} = 3 \times 1 + 2 \times 2 + 3 \times 1 + 4 \times 1 = 14$$

توجه داشته باشید که 3 ذره (A) با 3 ذره (B) فرق می‌کند چون انرژی‌های آن با هم فرق می‌کند.

مادر این دو حالت را نوشتیم، اما ممکن است تعداد حالت‌های بیشتر بتواند پیدا کرد. ما روی آن این پیدا کردیم که به $E_{tot} = 8$ و $N_{tot} = 14$ رسیدیم ممکن است تعداد حالت‌های بیشتر وجود داشته باشد. اسم اینها را $W\{n_{rs}\}$ می‌گذاریم.

* سیستمی را می‌فهمیم بررسی کنیم که هم انرژی و هم تعداد ذرات آن تغییر نکند. این بررسی را در وجود این نام داریم. یک جور بررسی این است که سیستم A را در نظر بگیریم و بقیه دنیا، اینها با هم انرژی و ذره می‌مانند و نمی‌توانند کل این سیستم را در حالی انرژی این مشخص است، یعنی انرژی‌های A از صورت‌های E^0 تغییر می‌کنند. این یک جور بررسی است که از تعداد حالت‌ها استفاده می‌کنیم.

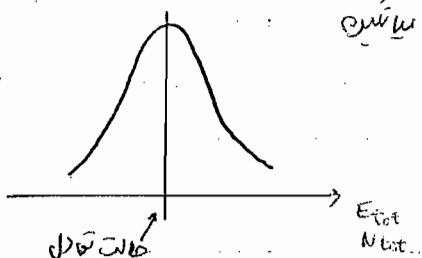


یک جور دیگر بررسی آن سببی است. در بررسی آن سببی با A دیگر کار نمی‌کنیم و می‌گوییم A عرصه می‌خواهد باشد و E^0 کل هم عرصه می‌خواهد باشد و در مورد خود A صحبت نمی‌کنیم که این سیستم در زمانهای مختلف می‌تواند شرایط مختلف داشته باشد و به ایندقت مقدار انرژی بدون هیچ‌کدام کار نمی‌کنیم.

پس این $W\{n_{rs}\}$ یعنی تعداد آرایش‌هایی که به یک E کل و یک N کل می‌خورند، که از روی این E کل و N کل می‌توانیم انرژی می‌توانیم و تعداد ذرات می‌توانیم را تعیین کنیم.

تعداد ذراتی از این $W\{n_{rs}\}$ ها داریم، چون E و N کلی پیدا می‌کنیم داریم. سیستمی را در حال تعادل می‌فهمیم که تعداد آرایش‌های مربوط به یک E و N این از همه بیشتر باشد.

آنکه $W\{n_{rs}\}$ را نسبت به E_{tot} و N_{tot} رسم کنیم، آنرا به ازای یکی از اینها می‌بینیم که آن E_{tot} و N_{tot} را مربوط به حالت تعادل می‌گوییم که انرژی می‌توانیم هر کدام از اینها می‌شود $\bar{E} = \frac{E_{tot}}{N}$ و تعداد ذرات می‌توانیم هر کدام از اینها می‌شود $\bar{N} = \frac{N_{tot}}{N}$.



$$\bar{E} = \frac{E_{tot}}{N}, \quad \bar{N} = \frac{N_{tot}}{N}$$

سلفاً $W\{n_{rs}\}$ از رابطه زیر بدست می‌آید:

$$W\{n_{rs}\} = \frac{n!}{n_0! n_1! \dots} \quad (II)$$

چون ذرات مربوط به n_0 یا n_1 با هم فرقی نمی‌کنند.

اصلاً آنکه سیستم در توزیع خاصی با که ذره و انرژی E_r باشد به $W\{n_{rs}\}$ متناسب است. یکی از توزیع‌ها هست که این $W\{n_{rs}\}$ را می‌بینیم که آنرا n_{rs}^* می‌گوییم.

$$\langle n_{rs} \rangle = \frac{\sum_{\{n_{rs}\}} n_{rs} W\{n_{rs}\}}{\sum_{\{n_{rs}\}} W\{n_{rs}\}} \quad (III)$$

می‌بینیم n_{rs} را بصورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$P_{rs} = \frac{n_{rs}^*}{N} \quad (IV)$$

این (صورت دیگر هم می‌توانیم بنویسیم):

به اعتبار اینکه در هر r و s از n چیزها، n_{rs} چیزها است که $\{n_{rs}\}$ را به این ترتیب می‌کنند، چون به این W ها به احتمال $\frac{1}{n}$ با هم در هر که که اینک محصل تر است.
 این کاری که می‌کنیم این است که یک جدولی عبارت II را بنویسیم. این کار را در جدول قبل هم این m (رایم)، دفعه قبل یاد داشتیم.
 با این n بود که نتایج اندک دانست (n_1, n_2, \dots)

* اثر $\{n_{rs}\}$ را پیدا کنیم. لزومی آن می‌آید که از n چیزها، n_{rs} چیزها که محصل است به سمت بی نهایت برود. در هر اینها اثر به سمت بی نهایت برود، حتی اگر همه اینها n هم باشند، اثری کل به سمت بی نهایت می‌رود. ولی ما نسبت $\frac{E_{tot}}{n}$ را می‌فراهمیم که هم E_{tot} و هم n به سمت بی نهایت می‌رود.

تصور ما این است که از این n ها، n ها این که به این n ها به این جهت محصل تر است و اسم آنرا حالت n می‌گذاریم و سیستم در آن حالت قرار می‌گیرد.

این مسئله این است که به این $\{n_{rs}\}$ را حساب کنیم تا به قدری که معمولاً n به سمت بی نهایت می‌رود. بعد ها هم می‌توانیم از این

$$\text{II} \begin{cases} \sum n_{rs} = n \\ \sum N_s n_{rs} = n \bar{N} \\ \sum E_r n_{rs} = n \bar{E} \end{cases} \quad \text{III: } W\{n_{rs}\} = \frac{n!}{n_1! n_2! \dots}$$

W یک کیفیت نسبت است و می‌تواند با فرضی کار کنیم تا بتوانیم آن کار می‌کنیم

$$\ln W\{n_{rs}\} = \ln n! - \sum_{r,s} \ln n_{rs}!$$

معمولاً n به سمت بی نهایت می‌رود، برای $\ln n!$ ترتیب استفاده می‌کنیم، اثر n_{rs} ها زیاد باشد برای $\ln n_{rs}!$ هم ترتیب استفاده می‌کنیم که البته گاهی این ترتیب ضعیف‌تر است. البته این ترتیب را می‌توانیم به هر دو حالتی که آنجا که تعداد n ها $1, 2, 3, \dots$ (اعداد کوچک) هستند در n این W قرار می‌گیرند. معمولاً روابط n و n_{rs} اندکی باید اینها ضعیف‌تر زیاد باشد. درست است که سیستم باید الحاقی می‌تواند اثری ضعیف‌تر و تعداد ذرات ضعیف‌تر داشته باشد. اینها این اتفاق ضعیف‌تر کم است، یا احتمال اینکه سیستم بی نهایت اثری و بی نهایت ذره داشته باشد. چیزی که است یعنی در هر دو طرفی که کار کنیم قرارداد و قانونی ماکروکوپیک باشد. اینها معمولاً بزرگ هستند و به خاطر این است که این ترتیب به جابجایی مناسب می‌رسد.
 روش درست W این است که W را از روشی ترتیب نقطه‌ای ماکروکوپیک کنیم یعنی یک generation function ترتیب کنیم و فریب آنرا پیدا کنیم. به آن کاری که برای کارونست انجام داریم.

$$\ln W\{n_{rs}\} = \ln n! - \sum_{r,s} \ln n_{rs}! \stackrel{\text{ترتیب اثری}}{=} (n \ln n - n) - \sum_{r,s} (n_{rs} \ln n_{rs} - n_{rs})$$

$$\Rightarrow \ln W\{n_{rs}\} = n \ln n - n - \sum_{r,s} n_{rs} \ln n_{rs} + \sum_{r,s} n_{rs} = n \ln n - \sum_{r,s} n_{rs} \ln n_{rs}$$

$$\delta(n \ln n) = 0$$

مفروضه W را به این ترتیب می‌کنیم، اینها به تغییرات اثری است.
 $n \ln n$ نسبت به تغییرات آن صفر می‌شود.

$$\Rightarrow \delta \ln W = - \left(\sum_{r,s} \delta n_{r,s} \ln n_{r,s} + n_{r,s} \delta (\ln n_{r,s}) \right) = - \left(\sum_{r,s} \delta n_{r,s} \ln n_{r,s} + n_{r,s} \frac{\delta n_{r,s}}{n_{r,s}} \right)$$

$$\Rightarrow \delta \ln W = - \sum_{r,s} \delta n_{r,s} (\ln n_{r,s} + 1)$$

آنچه $n_{r,s}$ ها از هم مستقل بودند، جواب این می شد که $\ln n_{r,s} + 1$ را $n_{r,s}$ ها در رابطه \textcircled{V} صدق می کنند از رابطه \textcircled{V} تغییرات می گیریم:

$$\textcircled{V} \Rightarrow \begin{cases} \sum \delta n_{r,s} = 0 & \gamma \sum \delta n_{r,s} = 0 \\ \sum N_s \delta n_{r,s} = 0 & \alpha \sum N_s \delta n_{r,s} = 0 \\ \sum E_r \delta n_{r,s} = 0 & \beta \sum E_r \delta n_{r,s} = 0 \end{cases}$$

موضعی را می خواهیم بیابیم که α, β, γ ضرایب نامعین لاگرانژ

موضعی را می خواهیم بیابیم که α, β, γ ضرایب نامعین لاگرانژ باشد. هر کدام از این ضرایب ضرایب نامعین لاگرانژ قرار می گیرند.

$$\delta \ln W = 0$$

$$\Rightarrow - \sum_{r,s} \delta n_{r,s} [(\ln n_{r,s} + 1) + \gamma + \alpha N_s + \beta E_r] = 0$$

تقدیم ها در رابطه فوق وارد کردیم این شرط است که ضرایب عبارات باید مساوی صفر باشند.

$\ln n_{r,s}^* = -\alpha N_s - \beta E_r - (1 + \gamma)$

$$\Rightarrow n_{r,s}^* = C e^{-\alpha N_s - \beta E_r} \quad \textcircled{VI}$$

ضرایب نامعین لاگرانژ α, β, γ را می بینیم که باید از طریق تغییرات تعیین کنیم.

\textcircled{VII} ضرایب نامعین لاگرانژ α, β, γ که ضرایب ثابت را هم از $\sum P_{r,s} = 1$ بدست می آوریم

$$P_{r,s} = \frac{e^{-\alpha N_s - \beta E_r}}{\sum e^{-\alpha N_s - \beta E_r}} \quad \textcircled{VII}$$

همانطور که گفتیم مثل این روش این است که بطور کلی برای $n_{r,s}$ ها انجام دهیم، روش دقیق تر بطور کلی نقطه زین است که از آن روش ما گذریم، ما برای این روش را در حالت کاربست داریم.

حال در مورد معنی ضرایب α, β, γ صحبت می کنیم.

اینکه در مورد معنی ضرایب α, β, γ صحبت می کنیم یعنی باید این ضرایب ها را حساب کنیم و بعد با توجه به سیستمی که در دست داریم ضرایب α, β, γ را بدست می آوریم.

قبل از این بهتر است یک مقدار بیشتری در مورد ضرایب α, β, γ صحبت کنیم و در مورد معنی ضرایب α, β, γ صحبت می کنیم.

بر فرض اول داریم که $\Omega(N, V, E)$ تعداد کل حالت های ممکن حاصل سیستم در حالت تعادل صفر باشد یا تعداد حالت های ممکن حاصل سیستم $\Omega(N, V, E)$ است که در حالت تعادل صفر باشد یا تعداد حالت های ممکن حاصل سیستم $\Omega(N, V, E)$ است.

$$d \Omega(N, V, E) = 0$$

صفت تعادل صفر است که تعداد حالت های ممکن حاصل سیستم در حالت تعادل صفر باشد.

در فرض اول ثابت داریم:

$$d \ln \Omega = \frac{\partial \ln \Omega}{\partial N} dN + \frac{\partial \ln \Omega}{\partial V} dV + \frac{\partial \ln \Omega}{\partial E} dE = \frac{dS}{K}$$

$d \ln \Omega$ یا dS متناسب گرفته می‌شود.

بعد به دست آوردیم که در حالت تعادل $\frac{\partial \ln \Omega}{\partial N}$ باید ثابت باشد و اسم آنرا $-\frac{\mu}{KT}$ گذاشتیم و $\frac{\partial \ln \Omega}{\partial V}$ هم باید ثابت باشد و اسم آنرا $\frac{P}{KT}$ گذاشتیم و $\frac{\partial \ln \Omega}{\partial E}$ هم باید ثابت باشد که اسم آنرا $\frac{1}{KT}$ گذاشتیم.

$$\frac{\partial \ln \Omega}{\partial N} = -\frac{\mu}{KT}, \quad \frac{\partial \ln \Omega}{\partial V} = \frac{P}{KT}, \quad \frac{\partial \ln \Omega}{\partial E} = \frac{1}{KT}$$

یعنی به دست آوردیم:

$$\begin{aligned} T_1 = T_2 &\rightarrow dQ = 0 && \text{تعادل گرمایی} \\ P_1 = P_2 &\rightarrow dW = 0 && \text{تعادل مکانیکی} \\ \mu_1 = \mu_2 &\rightarrow dN = 0 && \text{تعادل شیمیایی} \end{aligned}$$

آنچه در تعادل برآورده می‌شود به این تعادل مربوط می‌شود که می‌گوییم

معمولاً چیزی که به عنوان M در حساب می‌شود تابعی از T و P است برای سیستمی که فاز، یعنی سیستمی که فقط از یک نوع ذره ساخته شده است.

مثلاً برای ذرات آزاد M در حالت زیر به دست آوردیم:

$$M = KT \ln \left(\frac{V}{N} \left(\frac{h^2}{2\pi mKT} \right) \right), \quad PV = NKT$$

از دو رابطه بالا، T را حذف می‌کنیم:

$$\Rightarrow M = KT \ln \left(\frac{KT}{P} \left(\frac{h^2}{2\pi mKT} \right) \right) = M(T, P)$$

مربوطی از T و P است

بنظر می‌آید این است که این کمیت extensive را به حسب نوع کمیت extensive می‌توانیم

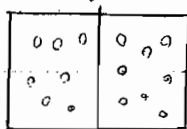
در تعادل هم می‌توانیم آنرا T و M ثابت داشته باشیم، صفاً P هم ثابت است. برای همین در این سیستم V ، N ، T و M متغیرند. تعادل هم می‌تواند بین این معادلات که M و T ثابت نگذاریم، V بطور اتوماتیک ثابت می‌شود. این برای سیستمی است که تک فازند یعنی یک نوع ذره داشته‌اند و آنجا وجود ندارد.

آنچه به نوع ذره در سیستم وجود داشته باشد معمولاً تابعی از T و P است که α غلظت یا همان تعداد مختلف است که در سیستم وجود دارد.

$$M(T, P, \alpha)$$

سیستم تک فاز یعنی مثلاً یک نوع گاز در ظروف دایره و وجود داشته باشد.

فرض کنیم دو نوع گاز وجود داشته باشد مثلاً CO_2 و O_2 و در حالت ثابت T و P و M ثابت داریم و در این صورت وجود داشته باشد.



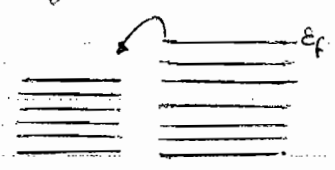
یعنی $P_1 = P_2$ است، یعنی به عنوانی که بین این دو وجود دارد هیچ نوری وارد نمی‌شود.

اینجا $T_1 = T_2$ است یعنی بین این دو با گرما رد و بدل نمی‌شود.

آنکه $M_1 = M_2$ است یعنی آب با نمک از این معیار دیگر نمی‌شود. آب برای سیستم و نمک

رابط سیستم نیز در نظر می آید و اینها را باید به غلظتها هم ربط دادند، یعنی غلظت آب و غلظت نمک به عنوان امر به کیفیت intensive وابسته است.

البته گاهی اوقات امر معنای دیگری پیدا می کند، مثلاً برای سیستم فریبی بعد از آنکه خواص یک ماده را در آن بررسی می کنند، امر را پیدا می کنند. امر در سیستم با انرژی خاصی فرسوخند با یکدیگر در تماس باشند یا بر هم کنش کنند، آنهایی که همافه مثلا این است که تعدادی از ذرات یکی می توانند به تراها همگیری وارد شوند و آن فرسوخ به حال تعادل که برسد انرژی خودی اینها را می بیند.



در اینجا هم خواص را در مورد α و β صحبت کنیم.

بنابراین درباره همین سیستم ترمودینامیکی را می نویسیم. انرژی می بینیم و تعداد ذرات می بینیم و با رابطه ای که داریم می بینیم α و β را بدست می آوریم.

عبارتی که در خروج P_{rs} در رابطه (VII) قرار گرفته است را D می گوئیم و این بدانند Q در سیستم کانتینت است و به آن تابع پارتیشن کانتینت بزرگ می گوئیم.

$$P_{rs} = \frac{e^{-\alpha N_s - \beta E_r}}{\sum e^{-\alpha N_s - \beta E_r}} \Rightarrow P_{rs} = \frac{e^{-\alpha N_s - \beta E_r}}{D} \quad (VII)$$

$$D = \sum_{rs} e^{-\alpha N_s - \beta E_r} \quad (IX)$$

معادله یا $\ln D$ می رویم و کار داریم، چون P_{rs} هم مشتق \ln است این است.

$$q = \ln D$$

یا بصورت مقابل تعریف می کنیم:

$$(VIII) : P_{rs} = \frac{e^{-\alpha N_s - \beta E_r}}{D}$$

$$\bar{N} = \frac{\sum_{rs} N_s e^{-\alpha N_s - \beta E_r}}{D} = -\frac{\partial q}{\partial \alpha} \quad (X)$$

$$\bar{E} = \frac{\sum_{rs} E_r e^{-\alpha N_s - \beta E_r}}{D} = -\frac{\partial q}{\partial \beta} \quad (XI)$$

q تابع است از α ، β و E_r یعنی $q(\alpha, \beta, E_r)$.

E_r را به خاطر این می نویسیم که این E_r حالت فردی را هم در بر می گیرد. به خاطر اینکه انرژی کل هر کدام از اینها از انرژی تک ذرات بدست می آید و انرژی تک ذرات هم از شرایط ترمودینامیک می آید.

نام خواص تغییرات q را می گوئیم نسبت به پارامترهایی که در سیستم وجود دارد (مثلاً تغییر α ، تغییر β ، تغییر E_r و البته هم تغییر N_s) چون در سیستم در سیستم ترمودینامیک α و β ثابت هستند، تغییرات را نسبت به اینها می گیریم و معادله صفر قرار می دهیم یا معادله ای که از این کسوف حاکم می دهیم.

در اینجا می بینیم که از آنجا که سیستم از هر کدام از E_r ها استفاده می کند، تغییرات نسبت به E_r ها به معنای تغییرات q تغییرات شرایط فرزی است. به خاطر همین ما در اینجا E_r را وارد می کنیم.

$$dq = \frac{\partial q}{\partial \alpha} d\alpha + \frac{\partial q}{\partial \beta} d\beta + \sum_r \frac{\partial q}{\partial E_r} dE_r$$

$$\Rightarrow dq = -\bar{N} d\alpha - \bar{E} d\beta - \beta \sum_{r,s} dE_r P_{r,s}$$

از (X), (XII), (XIII) استفاده کردیم

برای $\frac{\partial q}{\partial E_r}$ از رابطه زیر استفاده کردیم:

$$q = \ln D = \ln \sum_{r,s} e^{-\beta E_r} e^{-\alpha N_s}$$

$$\rightarrow \frac{\partial q}{\partial E_r} = -\beta \sum_s P_{r,s}$$

این E ها می توانند به $-\beta$ باشند.
 $\sum_s P_{r,s}$ هم باقی می ماند چون فقط نسبت به E_r متغیر می کنیم.

$$dq = -\bar{N} d\alpha - \bar{E} d\beta - \frac{\beta}{n} \sum_{r,s} \langle n_{r,s} \rangle dE_r$$

$d\alpha, d\beta$ را به فرم های $d\bar{N}, d\bar{E}$ تبدیل می کنیم.

$$dq = -d(\alpha \bar{N}) + \alpha d\bar{N} - d(\beta \bar{E}) + \beta d\bar{E} - \frac{\beta}{n} \sum_{r,s} \langle n_{r,s} \rangle dE_r$$

$$\Rightarrow d(q + \alpha \bar{N} + \beta \bar{E}) = \beta \left(\frac{\alpha}{\beta} d\bar{N} + d\bar{E} - \frac{1}{n} \sum_{r,s} \langle n_{r,s} \rangle dE_r \right) \quad (XIV)$$

همه آن فرم ها dE_r یا هم توان گفت شرایط کار است. چون E_r ها با تغییر q (تغییر شرایط فرزی) تغییر می کنند (این کار عوض قبل هم داشتیم). E_r ها فقط با محاسبات خارجی تغییر می کنند، در واقع وقتی که شرایط فرزی عوض شود. این این جمله یعنی شرایط تغییرات انرژی است که به واسطه تغییر پارامترها α خارجی سیستم تغییر می کند را کار را هم می گذاریم که ممکن است کم باشد، ممکن است بیشتر باشد، ممکن است معنای طبیعی را هم بگیرد سیستم باشد. مثلاً فرض کنیم سیستم معنای طبیعی باشد و در این صورت هر کدام از این E ها مثلاً با تغییر مقدار معنای طبیعی خارجی تغییر می کنند.

رابطه (XIV) یک جورایی با قانون اول ترمودینامیک در ارتباط است.

از ترمودینامیک می دانیم تغییرات انرژی می توانند به واسطه سیستم برابر تغییرات انرژی، تغییرات کار و تغییرات تبادل ذرات است.

تغییرات انرژی سیستم

$$d\bar{E} = dQ + dW + \mu d\bar{N} \quad (XV)$$

$$T dS = \frac{dS}{\beta T}$$

رابطه (XIV), (XV) را مقایسه می کنیم.

$$q + \alpha \bar{N} + \beta \bar{E} = \frac{S}{k}$$

از این مقایسه می دانیم که در اینجا β در اینجا همان $\frac{1}{kT}$ را دارد.

$$\alpha = -\frac{\mu}{kT}, \quad \beta = \frac{1}{kT}$$

رابطه (XII) را از ترمودینامیک و رابطه (XIII) را از تعریف آنتالپی برداشت آوردم و با هم مقایسه کردم
 این به بعد ما از این استفاده می‌کنیم و کسبهای مختلفی که در سیستم وجود دارد را بررسی می‌کنیم

کلیدها: α, β, γ

در مورد سیستم‌های Grand Canonical صحبت کردیم، گفتیم برای این سیستم‌ها متغیرهای N و E ثابت است و سیستم هم ثابت
 در لحظه در یک انرژی مشخص E_r و تعداد ذرات N_s است.

احتمال اینکه انرژی سیستم E_r و تعداد ذرات N_s باشد را از رابطه زیر می‌توان برداشت آورد:

$$P_{rs} = \frac{e^{-\alpha N_s - \beta E_r}}{\sum_{r,s} e^{-\alpha N_s - \beta E_r}}$$

که β, α به عنوان ضرایب نامعین لاگرانژ در سیستم و معادلات ظاهر می‌شوند.

برای پیدا کردن معنی β, α ، سهم را با ترمودینامیک مقایسه کردیم. ابتدا تابعی به نام تابع پارتیشن کانونیک بزرگ معرفی کردیم:

$$D = \sum_{r,s} e^{-\alpha N_s - \beta E_r} \quad (1)$$

چون می‌توانیم تابع پارتیشن سروکار داریم q را بصورت زیر معرفی کردیم:

$$q = LND \quad (2)$$

برای پیدا کردن معنی فیزیکی β, α به ترمودینامیک تشریح می‌کنیم. در ترمودینامیک با کسبهای ماکروسکوپی سروکار داریم و قانون پایستگی
 انرژی داریم. قانون پایستگی انرژی در ترمودینامیک به صورت زیر است (تغییرات انرژی از چند جا حاصل می‌شود):

$$d\bar{E} = dQ + dW + \mu dN \quad (3) \quad \leftarrow \text{Thermodynamic}$$

تغییرات انرژی، تغییرات کار، تغییرات انرژی درجه آزادی، تغییرات انرژی درجه آزادی، تغییرات انرژی درجه آزادی، تغییرات انرژی درجه آزادی

پس به ازای رابطه پایستگی انرژی را بصورت $d\bar{E} = dQ + dW + \mu dN$ (معنی ترمودینامیک، ترمودینامیک و ...)

در رابطه (3)، کسب را به ترمودینامیک بصورت $d\bar{E} = dQ + dW + \mu dN$ که N را ثابت می‌دانیم تغییرات بیضیاتی کوپ
 انرژی برابر است با تغییرات بیضیاتی کوپ گرما، تغییرات بیضیاتی کوپ کار و تغییرات بیضیاتی کوپ تعداد ذرات.
 همین کار را باید در رابطه (1) و (2) انجام دهیم. برای این کار باید کسب را پیدا کنیم. و تغییرات α را هم کسب است با کسب
 ماکروسکوپی سیستم در ارتباط باشد.

در این که داریم جمع روی همه r ها و N ها زده می شود، تغییرات q متن است به α, β که به پارامترهای تکرر و متوسط ربط دارند وابسته باشد. پس q تابعی از α, β است.
 قیدهایی که در سیستم داریم بصورت زیر هستند:

$$\sum n_{rs} E_r = Nu$$

$$\sum n_{rs} = N$$

اینها به نوعی به میانگین انرژی و میانگین تعداد ذرات مرتبط هستند که چون قیدهای ما در اینجا وابسته هستند، این α, β به میانگین انرژی و میانگین تعداد ذرات وابسته است. از طرفی $\sum n_{rs} E_r = Nu$ که برای حالتی که میانگین انرژی متوسط تکرر در هر حرکت از حرکتها از یک مکانی بدست می آید. برای ذرات ما یک مکانی داشته باشیم که E_r حرکتها از ذرات را بدست می آوریم

مکانی که در اینجا هست به گونه ای که انرژی های قابل حصول به شرایط فیزی وابسته هستند، یعنی باید شرایط فیزی را بدست می آوریم حرکتها از این E_r ها را بدست می آوریم. پس به نوعی چیزی که می خواهیم به کسوفی تکرر و متوسط خارجی وابسته باشد α, β که از طریق قیدها به انرژی میانگین و تعداد ذرات میانگین وابسته است و خود E_r ها هم که اینجا وجود دارند بطور غیر مستقیم به α, β وابسته هستند اینجا روابط پارامترهای خارجی را می بینیم که اینجا وجود دارند

البته از طرف D هم می توانیم استفاده کنیم چون D هم α, β و حرکتها از حرکتها را دارد.

پس این که می خواهیم تغییرات کسوفی را که از انرژی بدست آوریم را حساب کنیم و آنرا با رابطه ③ مقایسه کنیم، از تغییرات کسوفی q استفاده می کنیم

تغییرات q را بدست می آوریم و بررسی می کنیم که آیا می توان چیزی را به رابطه ③ بدست آورد. اگر بتوانیم این تغییرات q چیزی است به رابطه ③ بدست می آوریم، تناظرهایی بین α, M, dQ و سایر کسوفی برقرار می کنیم.
 * D چیزهایی را که می خواهیم دارد. اما معمولاً چون ضمیمه بزرگ است N آن کار می کنند.

$$dq = \frac{\partial q}{\partial \alpha} d\alpha + \frac{\partial q}{\partial \beta} d\beta + \sum_r \frac{\partial q}{\partial E_r} dE_r$$

حلیسم قبل در این که رابطه فوق را می توانیم بصورت زیر بنویسیم:

$$dq = -N d\alpha - \bar{E} d\beta - \beta \sum_{rs} \langle n_{rs} \rangle dE_r$$

در رابطه ③ dN, dQ و dE داریم. پس در رابطه با dE را می توانیم با dN مقایسه کنیم. از طرفی کسوفی که در رابطه با dE داریم $\frac{1}{N} \sum_{rs} \langle n_{rs} \rangle dE_r$ معهود کار را دارد.

$$dq = - [d(\alpha N) - \alpha dN] - [d(\beta \bar{E}) - \beta d\bar{E}] - \beta dW$$

dE را در این طرف می داریم و مقایسه را به طرف دیگر می آوریم.

$$d\bar{E} = \frac{1}{\beta} dq + \frac{1}{\beta} d(\alpha N) + \frac{1}{\beta} d(\beta \bar{E}) + dW - \frac{\alpha}{\beta} dN \quad (4)$$

رابطه ③، ④ را با هم مقایسه می کنیم

$$③: d\bar{E} = dQ + dW + \mu dN$$

پس داریم

$$-\frac{\alpha}{\beta} = \mu, \quad \beta dQ = d(q + \alpha \bar{N} + \beta \bar{E}) = \beta T dS = \frac{dS}{K}$$

در $dQ = T dS$ ، از ترمودینامیک می‌دانیم. بنابراین اگر β را همان $(KT)^{-1}$ معین کنیم، عبارت $q + \alpha \bar{N} + \beta \bar{E}$ نقش dQ را بازی می‌کند و هم $-\frac{\mu}{KT}$ می‌شود که KT ثابت است. در آخر q را هم می‌توانیم بصورت زیر بنویسیم:

$$q = \frac{S}{K} - \alpha \bar{N} - \beta \bar{E} \quad (5)$$

که α, β بصورت زیر هستند:

$$\alpha = -\frac{\mu}{KT}, \quad \beta = \frac{1}{KT}$$

پس یک تغییر ترمودینامیک برای $q = \ln D$ بدست می‌آید. q برابر است با انرژی تقسیم بر K معنای α برابر \bar{N} و معنای β برابر \bar{E} است. $M \bar{N}$ را از ترمودینامیک G می‌گذاریم که به آن انرژی آزاد گیبس می‌گویند.

$$M \bar{N} = G = E - TS + PV \quad (6) \quad \leftarrow \text{از ترمودینامیک می‌دانیم}$$

← انرژی آزاد گیبس

از تلفیق دو رابطه (5) و (6) q بصورت زیر می‌شود:

$$(5), (6) \Rightarrow q = \frac{PV}{KT}$$

معنی به ترمودینامیک D را حساب کنیم و از آن $\ln D$ بگیریم و q را بدست می‌آوریم. طبق رابطه فوق یک جور می‌توانیم به دست آوریم. با بدست آوردن معادله حالت، ترمودینامیک سیستم بدست می‌آید. سایر کمیت‌ها مثل توان درازت، پتانسیل و انرژی می‌توانند بدست می‌آیند. نکته انرژی می‌تواند از $\frac{dS}{dE}$ بدست می‌آید.

پس می‌توانیم به این بر می‌گردیم که با کمیت D را حساب کنیم که به آن تابع پارتیشن Grand Canonic می‌گویند.

$$D = \sum_{N, S} e^{-\frac{M \mu}{KT}} e^{-\beta E_S} \quad (7) \quad \alpha = -\frac{\mu}{KT} \text{ از رابطه (5) می‌گیریم}$$

اسم $e^{-\frac{M \mu}{KT}}$ را Z می‌گذاریم و به آن *fugacity* (قابلیت فراری) می‌گویند. علت این است که در این حالت که می‌توانیم از سیستم خارج کنیم (از سیستم خارج شوند) باید سیستم وارد شوند، N و E هستند از سیستم (Grand Canonic). اگر Z را با سیستم با هم فرق داریم یعنی یا M فرق می‌کند یا T . که آنرا M فرق می‌کند و به آن Z سیستم می‌گویند. و اگر T فرق می‌کند یعنی از ترمودینامیک سیستم جدا می‌شود. پس آنرا هم می‌توانیم جدا کنیم. چیزی که در سیستم (با هم) سیستم و بیرون سیستم، با هم تفاوت می‌کند. Z (در سیستم با هم فرق می‌کند) M (در سیستم فرق می‌کند) یعنی فقط در بیرون سیستم، آنرا Z فرق می‌کند و در حالت Z در سیستم با هم فرق می‌کند یعنی M (در سیستم).

Z یک تابعی قسیمی هم دارد:

$$e^{-\alpha} = e^{\frac{\mu}{KT}} = Z \rightarrow \mu = KT \ln Z$$

$$\frac{\partial Z}{\partial \alpha} = -Z$$

پس اگر بخواهیم $\frac{\partial \mu}{\partial \alpha}$ را حساب کنیم، می توانیم بنویسیم (در صورت Z ، وابسته α به α از طریق Z است):

$$D = \sum_{r,s} Z^{N_r} e^{-\beta E_s}$$

پس رابطه (۷) را بصورت D می نویسیم:

یعنی r مربوط به Z^{N_r} است و r نیز وابسته به α است بنابراین:

$$D = \sum_r Z^{N_r} \sum_s e^{-\beta E_s}$$

اینجا $\sum_s e^{-\beta E_s}$ تابع پارشی کاننیک است (تبدیل می کند که تعداد ذرات ثابت N است)

یعنی به ازای هر r می توانیم N_r را در $\sum_s e^{-\beta E_s}$ قرار دهیم. پس $Q_N(T, V)$ می نویسیم که V در E_s ظاهر است. است (از رابطه (۵))، T به β ربط دارد و این N_r را در $\sum_s e^{-\beta E_s}$ می نویسیم

$$\sum_s e^{-\beta E_s} = Q_N(T, V)$$

پس D را می توانیم بصورت زیر بنویسیم:

$$D = \sum_r Z^{N_r} Q_{N_r}(T, V) \quad (8)$$

مثل این است که در هر کدام از N_r ها یک تابع پارشی کاننیک می نویسیم و کلام را با ضرب Z^{N_r} می نویسیم و این است که Q_{N_r} باید یک باشد (همچون Q_N در حالت N می نویسیم)

$$Q_0 = 1$$

با یکسختی می توانیم D را بصورت D بنویسیم و D را بصورت آورد.

مثلاً P که به Z ، T ، V وابسته است (Z به μ وابسته است) از رابطه (۷) می نویسیم:

$$P(Z, V, T) = \frac{KT \ln D}{V}$$

$$p = \frac{PV}{KT} = q \text{ است و } q \text{ هم } D \text{ را می نویسیم}$$

تعداد ذرات بصورت زیر می نویسیم:

$$N = \frac{\partial q}{\partial Z} = KT \frac{\partial q}{\partial \mu}$$

به همین ترتیب انرژی می نویسیم u را نیز می توانیم بنویسیم:

$$u = -\frac{\partial q}{\partial \beta} = KT^2 \frac{\partial q}{\partial T}$$

$$u = -\frac{\partial q}{\partial \beta} = -\frac{\partial T}{\partial \beta} \frac{\partial q}{\partial T}$$

پس اینها را در روابط فوق می نویسیم $\frac{\partial q}{\partial \mu}$ و $\frac{\partial q}{\partial T}$ می نویسیم که بصورت T و μ باشند. با صرف M می توانیم روابط بالا

معادلات مختلفه را می توانیم در اینجا بدست می آوریم. رابطه بین μ , N , T را که پیدا کنیم، می گوئیم رابطه انرژی را پیدا کرده ایم. گفتیم که قبلاً از این استفاده می کردیم انرژی آزاد هلمهولتز است:

$$A = \mu N - PV$$

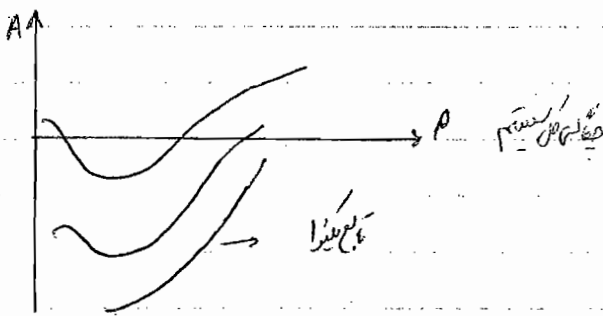
دو کمیت مهم از ترمودینامیک A و G است که البته بعضی به اشتباه می گویند که داریم، دارد. بیشتر برای جاهایی که سیستم مخلوط داشته باشیم، معمولاً از G استفاده می کنیم چون یک جور می باشد به بیشترین تعداد درجات ربط پیدا می کند. جاهایی که می خواهیم در مورد گذار فازها صحبت کنیم، A بدر ما می خورد.

$A = \mu N - PV$ است و وقتی که در مورد گذار فاز صحبت می کنیم یعنی سیستمی داریم که مخلوطی از مایع و گاز است، در شرایطی سیستم می تواند هم از حالت مایع باشد و هم از حالت گاز. تغییر فاز و در نتیجه می تواند تبدیل از حالت مایع به گاز رخ دهد که به این یک تغییر فاز می گوئیم.

شرایطی معین است بسیار خوب که از آن به بعد سیستم فقط در یک فاز باشد، یک نقطه بحرانی وجود دارد (در یک نمودار P vs T) که در آن است هم مایع و هم گاز تبدیل شوند.

در ترمودینامیک می توانیم نشان داد ما داریم که انرژی آزاد هلمهولتز یک جور سیستمی (اکتتر پلازی) داشته باشد، سیستم می تواند در دو فاز با هم وجود داشته باشد.

اگر A اکتتریم داشته باشد و یک مایع (صاف و یکنواخت) بر حسب چگالی باشد، سیستم فقط در یک فاز قرار می گیرد و این را از ترمودینامیک می دانیم. به همین خاطر ما می بینیم که A در صحنه ها یک جور می خورد که A را می بینیم و می بینیم که سیستم ما در یک فاز ضعیف شده صحبت می کند!!



اگر در داریم که بعضی از کمیتها را حساب کنیم، مثلاً اگر A را حساب کنیم، فراهم می دانیم:

$$A = \mu N - PV = NKT \ln Z - KTq$$

$$P(\mu, T) = \frac{KT}{V} \ln D$$

برای نوشتن این جمله از استفاده کردیم.

$$\Rightarrow A = NKT \ln Z - KTq = KT \ln Z^N - KTq$$

از KT (عبارت با q فاکتور می گیریم)

$$\Rightarrow A = -KT \ln \frac{D}{Z^N} \quad ; \quad q = \ln D$$

رابطه فوق بر اساس grand Canonical است. این رابطه را با رابطه $A = -KT \ln Q$ که برای Canonical است مقایسه می کنیم. در اینجا $\frac{D}{Z^N}$ نقش Q را بازی می کند.

اگر N را طریقی از هم جدا کنیم (مثلاً ما می بینیم که N در این تعریفها، انجام می دهد)

یکی در سوال در این مورد می‌کنیم یا ببینیم چگونه کسالت را حساب می‌کنیم!

حالت‌های سیستم‌های Grand Canonic استفاده از q بیشتر حاکی بر کاربرد دارد که یک جرمی همگن بین ذرات وجود داشته باشد یا اینکه سیستمی داشته باشیم که آثار آنها کوآرتیوم باشد. در این موارد حالت Grand Canonic بیشتر مورد استفاده قرار می‌گیرد. و کمتر در حالت q استفاده می‌کنیم.
ولی آنها برای اینکه ببینیم که حالت در این مورد چگونه است، از این سیستم استفاده می‌کنیم و نشان می‌دهیم که حالت در مورد سیستم‌های Grand Canonic چگونه صورت می‌گیرد و چه چیزهایی را باید حساب کنیم.
طبق معمول از طریق متغیری که می‌خواهیم را به ذرات آزادیت:

مثال: ذرات آزاد

یک سری ذره در نظر می‌گیریم که هاسیتونی آنها بصورت H_i باشد. وقتی می‌گوییم H_i یعنی ذرات مختلف با هم برهم‌کنش ندارند و حالت‌ها از این نوع وجود ندارند و برای هر کدام از ذرات یک هاسیتونی کامل جداگانه داریم. مثلاً اگر ذرات با هم آزاد باشند هر کدام از H_i ها برآیند است:

$$H = \sum H_i \quad \xrightarrow{\text{ذرات آزاد}} \quad H_i = \frac{p_i^2}{2m}$$

نکته ما به این صورت است یعنی می‌تواند در حالت آزاد آتری هم داشته باشد ولی هر کدام فقط در یک جهت ذره.
 $H_i = \frac{p_i^2}{2m}$ هاسیتونی ذرات آزاد است که فقط حرکت انتقالی دارند ولی ممکن است این ذرات آزاد را به عنوان گلوله‌هایی در فضا در نظر بگیریم که این گلوله‌ها با هم برهم‌کنش ندارند. (زره نامی بازه را هم هیچ‌کدام نداشته باشد) ولی عوزره سواهی است که حرکت دورانی هم داشته باشد. یعنی در H_i جمله $\frac{L^2}{2I}$ را هم وارد کنیم (Angular momentum نقش مستقیم و جان اینوی) نقش جرم را بازی می‌کند)

در تابع پارتیشن Grand Canonic که به حساب می‌کنیم، کسالت $Q_N(T, V)$ را داریم است که حساب کنیم (رابطه ۸) یعنی برای هر N ذره در فضا باید بتوانیم Q را حساب کنیم.
قبلاً دیدیم که Q برای هر N از رابطه زیر بدست می‌آید:

$$Q_N = \frac{Q_1^N}{N!}$$

Q_1 ظاهر است بود که اینجا از هم جدا می‌شوند و $N!$ هم به این خاطر بود که اینجا در جغای مستطینی فضا (localized) می‌تواند که بتوانیم برای هر ذره در فضا یک مثال با هم متفاوت است. چون ذرات در جغای هم قرار می‌گیرند و ذرات کامل از هم جدا می‌نمایند. یعنی هر گاهی که هر کدام از یک نقطه از فضا را می‌خواهیم بر حسب بزرگنمایی و غیره فاکتور $\frac{1}{N!}$ را داریم.

در این ذرات آزاد می‌تواند در نقطه از فضا باشد localized یعنی در یک $\frac{1}{N!}$ ظاهر می‌شود.
 $Q_1 = \sum e^{-\beta E_s}$ این است که برای سیستم ذرات آزاد باید بدانیم که استفاده می‌کنیم.

$$Q_1 = \sum e^{-\beta E_s}$$

اینجا E_s را می‌تواند با یک سسته بگیریم.

Q_1 برای سیستم پیوسته بصورت زیر نوشته شود:

$$Q_1 = \frac{1}{h^3} \int e^{-\beta H} d^3p d^3x$$

چون در H ، x و p ندارد (از آنجا که رابطه فوق را هم برای آن بصورت زیر نوشتیم):

$$Q_1 = V \frac{1}{h^3} \int e^{-\beta H} d^3p$$

اگر H تنها برابر $\frac{p^2}{2m}$ باشد، انتگرال فوق در آن فرمتها تابعی از T می شود که در درجه بصورت T می شود و در $T^{\frac{3}{2}}$ و در T به تبع $T^{\frac{5}{2}}$ می شود. چون انتگرال گوسی ساده است.

اگر علاوه بر $\frac{p^2}{2m}$ بجای H در H و H وابسته به x ، حالات دیگر نیز ظاهر خواهند شد و باید روی x هم تعریف ما داشته باشیم که این تعریف و x وابسته به T می شود و در T به $T^{\frac{3}{2}}$ و در T به $T^{\frac{5}{2}}$ و در T به $T^{\frac{5}{2}}$ می شود. این وابسته به T از آنجا ظاهر می شود که در T به $T^{\frac{3}{2}}$ و در T به $T^{\frac{5}{2}}$ می شود.

$$Q_1 = V \frac{1}{h^3} \int e^{-\beta H} d^3p = V f(T) \quad \text{①}$$

بنابراین Q_N بصورت زیر می شود:

$$Q_N = \frac{Q_1^N}{N!} = \frac{V^N f(T)^N}{N!} \quad \text{②}$$

رابطه Q_N به V^N قابل انتظاریست. برای ذرات آزاد احتمال آنست که هر کدام در این حجم وجود داشته باشند $\frac{1}{V}$ است. برای N این احتمال $\frac{1}{V^N}$ را داریم. تابع پارتیشن هم گفته بودیم که یک بخش بر آن است، اینها احتمال را می دهد. تابع پارتیشن تعداد روشهای است که می توانیم سیستم را بنویسیم.

تابع پارتیشن کاننیک بزرگ (D) را بصورت می آوریم.

در اینجا ذرات آزاد در نقطه λ هستند که هم می توانند با خودشان در دو دریاها با بیرون انرژی میانه کنند به شرطی که در حالت باره داشته باشند. λ ها هم که اینجا وجود دارند، λ ها هم نفوذ می کنند یعنی ذرات می توانند وارد یا خارج شوند. البته در صورتی که ما چنان است که N خیلی بزرگ است. N هم از N می تواند از صفر تا بی نهایت برود.

$$D = \sum_{N=0}^{\infty} \frac{(Z V f(T))^N}{N!} = e^{Z V f(T)} \quad \text{③}$$

که \exp تعریف است.

$$q = \ln D = \ln(e^{Z V f(T)}) \Rightarrow q = Z V f(T) \quad \text{④}$$

$$\bar{N} = -\frac{\partial q}{\partial \alpha} = \frac{\partial q}{\partial Z} Z = Z V f(T) \quad \text{⑤}$$

از تعریف fugacity $z = e^{-\alpha}$ می نویسیم:

$$\frac{\partial q}{\partial \alpha} = \frac{\partial q}{\partial Z} \frac{\partial Z}{\partial \alpha} \xrightarrow{e^{-\alpha} = z} \frac{\partial q}{\partial \alpha} = -z \frac{\partial q}{\partial z}$$

$$P = \frac{KT}{V} q \stackrel{VII}{=} \frac{KT}{V} \cdot Z V f(T) = KT Z f(T) \quad VII$$

حال اگر طرف رابط P و N را بر هم تقسیم کنیم، در طرف راست $Z f(T)$ ها با هم ساده می شوند

$$\frac{P}{N} = \frac{KT}{V} \Rightarrow PV = NKT \quad VII$$

نکته مهم این است که ما برائش وابسته آید و انتی تا کیه نریم و بطور رسمی $f(T)$ نرستیم، یعنی کانتی انتی bulk که داریم با هم بر هم کنش نداشته باشند.

اگر $H_i = \frac{P_i^2}{2m}$ هر نرستیم یعنی ذرات آزاد استانی! اما حتی اگر طول هایش داشته باشیم که در فرکانس برخورد و بر هم کنش نداشته باشند، Q ایس که پیدا می کردیم، $f(T)$ را مشخص می کرد و پس نهایتاً در رابط $PV = NKT$ وارد می شد.

حاله $PV = NKT$ فقط وقتی عوض می شود که ذرات با هم بر هم کنش داشته باشند، تا وقتی بر هم کنش نداشته باشیم این حالت برای طول هایش همین است.

توجه کنیم که در محاسبه حالت N متوسط (\bar{N}) داریم، چون باید یک فیلد ماکرو سکوپ باشد P و N ماکرو سکوپ هستند و N هم باید یک کسیت ماکرو سکوپ باشد و نه N در هر لحظه. در زمانهای ضعیف طولانی که نگاه کنیم این سیستم که حاصل ذرات در دینامیک N زود دارد.

چیزی که بدست آوردیم دقیقاً چیزی است که در حالت ماکرو سکوپ بدست آورده بودیم و همچنین (رابطه ماکرو سکوپ بدست آوردیم). چون در ماکرو سکوپ هم N و هم E ثابت بودند. در ماکرو سکوپ N ثابت بود ولی E ثابت نبود و در اینجا نه E ثابت است و نه N !

حالت چیست؟ حالت همان چیزی است که در مورد ماکرو سکوپ و میکرو سکوپ بدست آمد، یعنی این توزیع نسبت به N های مختلف باید حول این N یک قدر بهار تیر داشته باشد، یعنی N هالی که حول N میباشند باید احتمالشان (P_N) تقریباً هم باشد و احتمال فقط وقتی صدق می کند که حول و حوش N میباشند ماکرو سکوپ باشیم. در اینجا چون سیستم Grand Canonic است و هم E و هم N تغییر می کنند، توزیع را هم نسبت به E باید بنویسیم و هم نسبت به N و باید حول E متوسط هم باید یک داشته باشد (مغزله آنرا افزایش نرست). البته $PV = NKT$ باید در شرایط ترمودینامیک بوجود می آید یعنی وقتی N نسبت به E بی نهایت برود و چگالی ثابت باشد.

را بر کسیت را هم از آن بدست آورد:

$$u = - \frac{\partial q}{\partial \beta} = - \frac{\partial q}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial \beta}$$

$q = \ln D = Z V f(T)$ این در وقت q نسبت به آنجا متن $f(T)$ حساب می شود و این به نسبت از این رابطه سیستم $\frac{\partial q}{\partial \beta}$ در رابط $u = - \frac{\partial q}{\partial \beta}$ است.

$$u = - \frac{\partial q}{\partial \beta} = - \frac{\partial q}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial \beta} = Z V K T^2 f'(T) = N K T^2 \frac{f'(T)}{f(T)} \quad VII$$

کتاب

ما یک کسیت ماکروسیک اپت این لایه که در آن ظاهر شود، N عرفان بین نسبت N میان نسبت، در رابطه (VII) استفاده از رابطه (V) را حذف کنیم.

چون هم رابطه برای ذرات آزاد، انرژی داخلی به تعداد ذرات و در رابطه است، در رابطه این هم که ما برای u نسبت اوربم می گویند انرژی سیستم به در N مربوط است، البته این u یک جورایی به شکل Q وابسته است که این H در آن صی باشد.

(VIII) انتگرال است که در رابطه (I) ظاهر شده است این انتگرال به تعداد ذرات N در آن مربوط است، شد که در N در H در آن ثابت باشد این انتگرال بصورت $T^{3/2}$ می شود.

انتگرال رابطه (I) را بصورت زیر می نویسیم:

$$\text{(I)}: \frac{1}{h^3} \int e^{-\beta H} d^3p = \frac{4\pi}{h^3} \int e^{-\frac{\beta}{2m} p^2} p^2 dp$$

$$= \frac{4\pi}{h^3} \frac{\partial}{\partial \delta} \int_0^\infty e^{-\delta p^2} dp$$

پس در انتگرال از δ استفاده می کنیم $\rightarrow \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{\delta}}$

$$\Rightarrow \frac{1}{h^3} \int e^{-\beta H} d^3p = \frac{2\pi^{3/2}}{h^3} \frac{\partial}{\partial \delta} \delta^{-1/2} = \frac{\pi^{3/2}}{h^3} \delta^{-3/2}$$

$$\delta = \frac{\beta}{2m} \rightarrow \delta^{-1} = \frac{2m}{\beta} = 2mKT$$

پس δ را $\frac{\beta}{2m}$ می نویسیم. که برابر بود:

$$\Rightarrow \frac{1}{h^3} \int e^{-\beta H} d^3p = \frac{\pi^{3/2}}{h^3} (2mK)^{3/2} T^{3/2}$$

پس انتگرال N در H در آن ثابت باشد، N برابر بود که $T^{3/2}$ است.

$$f(T) = \text{const. } T^{3/2} \quad \text{(IX)}$$

تقریباً $f(T)$ می نویسیم، $f(T)$ تقریباً $T^{3/2}$ است، چون T در N در آن ثابت است، H در آن ثابت است، N در آن ثابت است، T در آن ثابت است.

فرض کنیم $f(T)$ متناسب با T^α است، که α را در رابطه (IX) برابر $3/2$ است.

$$f(T) \propto T^\alpha \quad \text{(X)}$$

u را می نویسیم، $f(T)$ را $\frac{f(T)}{f(T)}$ می نویسیم، N در آن ثابت است، T در آن ثابت است، N در آن ثابت است، T در آن ثابت است.

$$\text{(VIII)}: u = NKT^2 \frac{f(T)}{f(T)} \quad \text{(X)} \quad NKT^2 \gamma T^{\alpha-1} T^{-\alpha} = \gamma NKT$$

نتیجه این است که u با T متناسب است، در رابطه NKT در N در آن ثابت است، T در آن ثابت است، N در آن ثابت است، T در آن ثابت است.

نتیجه این (Equipartition Theorem)

نتیجه این است که u برابر با $3/2 NKT$ می شود، چون تعداد درجات آزادی u در آن ثابت است، N در آن ثابت است، T در آن ثابت است.

گردد باشند، $\frac{3}{2}NKT$ برای درجه آزادی انتقال و NKT برای درجه آزادی دوران فراهم است که مجزاً $3NKT$ باشد.

به همین ترتیب می توانیم نسبت مهم دیگری مثل ظرفیت گرمایی ویژه در حجم ثابت را حساب کنیم. باید در این از رابطه (۱۸۸) نسبت به T مشتق بگیریم که به مقدار دیگری خواهد بود چون در Z هم T داریم. بنابراین ضرایب در رابطه ای که بدست می آوریم Z و C_V وابسته باشند و هم ضرایب T و V در کلمات ماکروسکوپیک بدست می آوریم.

$$C_V = \frac{\partial u}{\partial T} \Big|_V = Nk \left\{ 2Tf(T)f'(T) + T^2 [f(T)f''(T) - (f'(T))^2] \right\} / f^2(T)$$

توجه کنیم $f(T)$ عمده اصول تعبیرت توانایی از T ، به T وابسته است یعنی $f(T) \propto T^\alpha$ است، رابطه فوق تعبیرت این روش

$$\Rightarrow C_V = \frac{3}{2}Nk$$

می توانیم کلمات دیگری مثل A و انرژی را بدست می آوریم و ببینیم که در حد ترمودینامیکی با روابطی که قبلاً برای گاز ایده آل بدست آورده بودیم یکجاست. و در این وقت کمتر در این به شکل سابق که بدست آورده بودیم، بدست می آید چون کمتر در این شکل دارد که چه طور بدست می آید. در این وقت $PV = NKT$ را می بینیم که در حد ترمودینامیکی با روابطی که قبلاً بدست آورده بودیم یکی است. و در این وقت $PV = NKT$ را می بینیم که در حد ترمودینامیکی با روابطی که قبلاً بدست آورده بودیم یکی است. و در این وقت $PV = NKT$ را می بینیم که در حد ترمودینامیکی با روابطی که قبلاً بدست آورده بودیم یکی است.

مثال: سیستم های حبابی

مثال دیگری که می توانیم بر روی آن کار کنیم و می توانیم برای ما اهمیت داشته باشد، سیستمی هستند که حبابی در آنند. سیستمی که حبابی در آنند. سیستمی که حبابی در آنند. سیستمی که حبابی در آنند. سیستمی که حبابی در آنند. سیستمی که حبابی در آنند.

برای سیستمی که در این شکل عقده هستند و البته بر هم کنش ندارند، هر Q_N آنها بصورت Q_N^N است و تغییرات $\frac{1}{N}$ را می تواند

$$Q_N = Q_1^N$$

برای پیدا کردن Q_1 باید اشتغال رابطه (۱) را بگیریم، بنابراین Q_1 باید تابعی از T باشد:

$$Q_1 = \Phi(T)$$

مثلاً سیستم می تواند متشکل از ذراتی باشد که در حبابها قرار دارند، و ذراتی که در حبابها قرار دارند، و ذراتی که در حبابها قرار دارند، و ذراتی که در حبابها قرار دارند، و ذراتی که در حبابها قرار دارند.

$$Q_1 = \frac{kT}{h\nu} \quad (1)$$

مقدار Q_1 کوچک

سیستم متصل از ذرات هائیکه با یکدیگر در تماس هستند

$$Q_1 = (2\delta h k \frac{\beta h \omega}{2})^{-1} \quad (2)$$

سیستم در حالت یک تریبل از این ذرات که در یک بعد خاص قرار گرفته باشد، Q_1 برابر این سیستم قبل از حساب کردیم:

$$Q_1 = \frac{4\pi \delta h k \beta M H}{\beta M H} \quad (3)$$

H: میان نقطه‌ها
M: میان نقاط و کلا از ذرات

اینها نشان می‌دهد که سیستم Q_1 localized شده است و در نتیجه سیستم را می‌توانیم به Q_1 تقسیم کنیم و می‌تواند آنرا به سیستمی مختلف از آن تقسیم کرد.

هرگاه از این سیستم را که در نظر داریم، D مربوطه از این سیستم را داشته باشیم، با این که بتواند در هر سطحی که می‌خواهد قرار بگیرد، این ذرات تفاوت نکند، با این که توان اینها را می‌توانیم تغییر ندهیم (اصورت زیر می‌شود)

$$D = \sum_N Z^N \Phi^N(T) \quad (4)$$

نمایی از تغییر توان ذرات در سیستم، نشان می‌دهد در این یک سری گازهای آلوده باشد.

از این تقسیم که سیستم Q_1 Grand Canonical بیشتر در جاهایی می‌خورد که یک سری گازها را داشته باشیم، اینها را می‌توانیم به سیستم گازها تقسیم کنیم، این گازها را بصورت bulk گازها در نظر بگیریم که پس از آن آنها را فرض کنیم، بعد از این چه لایه‌ها روی دیواره می‌نشینند و یا در این حالت، اتفاق می‌افتد.

وقتی می‌خواهیم از این سیستم را در نظر بگیریم، می‌توانیم آنها را بصورت Q_1 در نظر بگیریم. تقویم که برای سیستمی می‌خواهیم، می‌توانیم از این سیستم را در نظر بگیریم و در واقع اتفاقی که در این مورد interface ها می‌افتد، همین است.

با این که در مورد (3) شرایط بر وجهه می‌باشد که یک سری از اینها می‌تواند اینها را داشته باشد، اگر اینها را می‌تواند.

$$D = \sum_N Z^N \Phi^N(T) = \sum_{N=0}^{\infty} (Z\Phi(T))^N \quad (5)$$

این تابع پارتیشن می‌تواند که در خروج رابط اتصال قرار گرفته است. P_{NS} برابر بود با یک $e^{-\beta P V}$ تقسیم بر این D. می‌توانیم این D را به این صورت بنویسیم و باید یک چیز محدودی شود، اگر D بخواند محدود باشد یا به عبارتی یعنی که در این از صفر تا بی‌نهایت می‌توانیم بخوانیم و باید اندازه $Z\Phi$ کوچکتر از یک باشد.

در رابط (5) باید سری توانی را حساب می‌کنیم که برای این سری توانی $Z\Phi$ کوچکتر از یک باشد. اگر $Z\Phi$ کوچکتر از یک باشد، رابط (5) یک سری هندسی می‌شود و آن را می‌توانیم به این صورت $\sum_{N=0}^{\infty} (Z\Phi)^N$ بنویسیم و در نهایت به این صورت می‌رسیم:

$$D = \frac{1}{1 - Z\Phi} \quad (6) \quad \text{قدرت: } Z\Phi$$

وقتی D پیدا شد یعنی همه چیز حساب می‌شود.

$$q = \ln D = -\ln(1 - Z\Phi)$$

$$p = -\frac{KT}{V} \ln(1 - Z\Phi)$$

چون دما برابر است $T_g = T_s$ ، پس باید در این شرایط تعادل برقرار باشد:

$$Z_g = Z_s$$

$$\textcircled{II}: \bar{N}_g = Z_g V_g f(T) \quad \textcircled{III} \quad Z_s = \frac{1}{\Phi(T)} \rightarrow \bar{N}_g = \frac{f(T)}{\Phi(T)} V_g \quad \textcircled{IV}$$

$$P V_g = \bar{N}_g K T \quad \textcircled{V}$$

عبارت فوق را در رابطه (IV) قرار می‌دهیم:

برای P, T, V_g که همگی برابرند، چون باید در صورت تعادل قرار دارند، $T_g = T_s$ و چون تعداد مول‌ها برابر است $P_g = P_s$ ،

با استفاده از روابط \textcircled{IV} ، \textcircled{V} ، \textcircled{VI} ، \textcircled{VII} به صورت زیر نوشت:

$$\textcircled{IV}, \textcircled{V} \Rightarrow P = K T \frac{f(T)}{\Phi(T)} \quad \textcircled{VI}$$

$$\Phi(T) = Q_1 = \left(\frac{2\pi m k T}{h^2} \right)^{3/2} f(T) \quad \textcircled{VII}$$

استفاده می‌کنیم و می‌توانیم $\frac{1}{\Phi(T)} = \left[\frac{2\pi m k T}{h^2} \right]^{-3/2}$ قرار دهیم. بنابراین:

$$P = K T \left(\frac{2\pi m k T}{h^2} \right)^{3/2} \left[\frac{2\pi m k T}{h^2} \right]^{-3/2} \quad \textcircled{VIII}$$

این رابطه بر رابطه (I) تماماً صحیح است.

در اینجا صرفاً این نکته را می‌گوئیم که منظور از این رابطه واضح کنیم که در این صورت ضمیمه به رابطه واقعی نزدیک تر می‌شود. در اینجا ما نوبت گرهای آزاد را در نظر گرفتیم و این مطلب که اینها روی نقاطی از شبکه هستند را در نظر گرفتیم. ولی همانطور که می‌دانیم اینها تماماً روی شبکه پدید می‌آیند، برای گذشت آنها به مانع کار نیاز داریم و به یک انرژی نیاز داریم برابر انرژی که این اتمها را به شبکه وارد کرده است.

در رسیدن به رابطه $E_n = \left[\frac{2\pi m k T}{h^2} \right]^{3/2} (n + \frac{1}{2}) h \omega$ ، ولی اگر حرکت اتمها را در نظر بگیریم باید به این نکته توجه کنیم که آنها از شبکه پدید می‌آیند و به کار تبدیل کنیم و یک مقدار انرژی لازم داریم، یعنی انرژی ایضا باید منفی E_r ها باشند. کافی است حرکت اتمها E_r ها را که $\left[\frac{2\pi m k T}{h^2} \right]^{3/2}$ حساب کنیم رابطه $E_r - \epsilon$ تبدیل کنیم:

$$E_r \rightarrow E_r - \epsilon$$

که این ϵ انرژی ایست که لازم است حرکت اتمها را از این حالتی که در شبکه هستند بپسند و به کار تبدیل شوند. در اینصورت Q_N اتمی که برای جامه می‌نویسیم بصورت زیر می‌شود:

$$(Q_N)_s = \sum_r e^{-\beta(E_r - \epsilon)} = e^{\beta\epsilon} Q_N$$

که Q_N قبلی که نوشتیم را می‌گیریم.

بنابراین کافی است Q_N قبلی را در یک جمله $e^{\beta\epsilon}$ ضرب کنیم یعنی چیزی که در صورت ثابت است $Q_N e^{\beta\epsilon}$ است. ϵ زوایای همان مانع کاری است که لازم است صرف کنیم تا این اتمها را که در شبکه هستند را بتوانیم به کار تبدیل کنیم. این به مقدار واقعی نزدیک است.

سند دیگری که در اینجا وجود دارد این است که ما \bar{N}_g را بصورت زیر می آوریم

$$\bar{N}_g = \frac{f(T)}{\Phi(T)} V_g$$

گفتم که N را با V و N_{tot} در نظر بگیریم، خواهیم داشت:

$$\bar{N}_g = V \frac{f(T)}{\Phi(T)} < N_{tot}$$

یعنی N_g از N_{tot} کوچکتر است. N_{tot} تعداد کل ذراتی است که در اینجا وجود دارد. تا هر کدام را بصورت Grand Canonic در نظر گرفتیم و رابطه (۷) را به دست آوردیم. هم کار در هم دارد را بصورت Grand Canonic در نظر گرفتیم.

لاصق این موضوع N این ثابت است، N کل ثابت است. یعنی این تعدادی از گازها به چند تبدیل شود و بالعکس آن اتفاق نیفتد، اما تعداد کل در صورتی ثابت است و این N معرّف از $V \frac{f(T)}{\Phi(T)}$ صریحاً غیر از ثابت است.

$$N \gg V \frac{f(T)}{\Phi(T)}$$

این یعنی این شرایطی پیش می آید که N بسیار بزرگتر از $V \frac{f(T)}{\Phi(T)}$ است. (یعنی کل سیستم) N_g به نسبت N بسیار کوچک است. آنگاه این N را می توانیم از $T = T_c$ که در اینجا به کار تبدیل می شوند.

این را ما برای N نوشتیم و آن وقت است که این رابطه بصورت یک تساوی برقرار شود.

بنابراین اگر N را با $V \frac{f(T_c)}{\Phi(T_c)}$ برابری T این که از این رابطه پیدا می کنیم، در اینجا است که گفته ایم به کار تبدیل می شوند.

$$T = T_c \rightarrow N = V \frac{f(T_c)}{\Phi(T_c)}$$

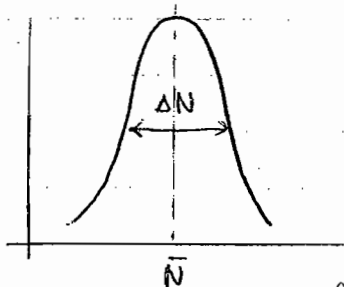
بعداً T دیگر کوچکتر از T_c است. (T این که ما در رابطه کار می بریم) چون از این بعد سیستم یک فاز بیشتر ندارد و N کل آن ثابت می ماند و دیگر سیستم Grand Canonic نیست و سیستم یکدوره کوانتوم است. تا کل ثابت است چون ما کل سیستم را در نظر گرفتیم و N کل هم ثابت است.

این روابطی که نوشتیم برای ما حاصل می شود که در اینجا $N = V \frac{f(T_c)}{\Phi(T_c)}$ به دست می آید، کوچکتر می آید.

تفاوتی که می ماند که باید آنرا ثابت کنیم این است که این توزیع خطی که به دست می آوریم N با N بیشتر می آید.

$$\Delta N = \sqrt{\langle N^2 \rangle - \langle N \rangle^2}$$

ΔN در واقع همان ثابت که در توزیع بر حسب N ها وجود دارد و بعد نشان می دهیم این همان $\frac{1}{N}$ است و N با N بیشتر است که به دست می آوریم. باید به توزیع حول N یک تابع گوسی باشد باید چنانچه که در N به نسبت بسطی بسیار دور نگاه می کنیم و آن وقت N را می بینیم.



$$\Delta N \propto \frac{1}{N}$$

بعد از بررسی این مطلب، مطلب خلاصه تقریباً تا آخر شود و وارد آمار کوانتومی می‌شویم.

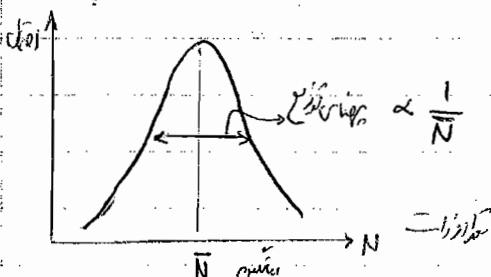
جلسه سیزدهم: ۲، ۱، ۸، ۸۵

جلسه گذشته در مورد سیستم‌های Grand Canonical صحبت کردیم و دیدیم برای جایی که سیستم‌های خطوط داریم یا در واقع گدازها داریم، این تعداد آزادی آن پس می‌آید و باید باشد و دیدیم وقتی برای یک سیستم خاص مثل ذرات آزاد حساب کردیم دیدیم نتایج همان نتیجه است که در آن سیستم دیده می‌شود و کارهای بدست آورده می‌شود و برای آنکه در واقع سیستم می‌خواهیم آنقدر گفتیم باید یک چیزی توزیع ذرات را پیدا کنیم و سیستم این توزیع ذرات کجا می‌نشیند است (و ما به همان کاری که برای آن سیستم کار می‌کنیم)

اقتال آنکه هر سیستم در N_r و E_r قرار می‌گیرد برای آن سیستم P_{rs} بیان شکل داده شد:

$$P_{rs} = \frac{Z^{N_r} e^{-\beta E_r}}{D(\beta, V, T)} \quad (1)$$

موردی که در آنجا می‌بینیم، در این توزیع چیزی که برای ما مهم است این است که اگر N را داشته باشیم، با این توزیع می‌توانیم بدانیم چقدر از این توزیع حول می‌مانیم که بهینه دارد را حساب کنیم و باید نشان دهیم که این بهینه توزیع حول N است چقدر با N رابطه دارد، که هر چه N زیاد شود، به حدی که در نهایت نزدیک می‌شود به این بهینه باید برسد و نتواند و به نتایج دیگر کارهای نزدیک می‌شود.



بنابراین $\langle N \rangle$ و $\langle N^2 \rangle$ را می‌خواهیم

کنیم، چون ΔN نسبت به N چقدر کوچک است:

$$\langle \Delta N^2 \rangle = \langle N^2 \rangle - \langle N \rangle^2 \quad (2)$$

گفتیم $\langle N \rangle$ را می‌خواهیم:

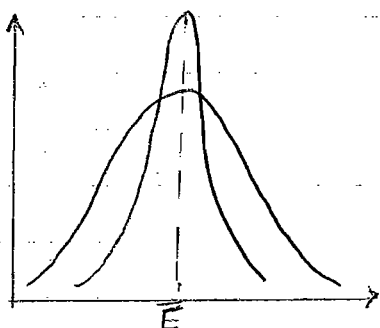
$$\langle N \rangle = \sum N_r P_{rs} \stackrel{(1)}{=} \frac{1}{D} \sum_{r,s} N_r Z^{N_r} e^{-\beta E_r} = \frac{1}{D} Z \frac{\partial D}{\partial Z} = Z \frac{\partial \ln D}{\partial Z} \quad (3)$$

$$D = \sum_{r,s} e^{-\beta E_r} Z^{N_r} \rightarrow \frac{\partial D}{\partial Z} = \sum_{r,s} N_r Z^{N_r-1} e^{-\beta E_r}$$

پس نسبت داریم

$$\textcircled{3}: \langle N \rangle = Z \frac{\partial \ln D}{\partial Z}$$

کمیت $(\Delta N)^2$ را که حساب کنیم به اینها حول N می‌نویسیم. انتظار داریم که اینها را که حساب کردیم بصورت یک چیزی تقسیم بر N شود. در سیستم غیر کاننیک و کاننیک هر دو در نهایت این بود که N خیلی بزرگ باشد، پس وقتی N خیلی بزرگ باشد در اینجا، کمتر و کمتر شود، یعنی توزیع حول این N بسیار تنگ‌تر باشد و از این هم جهت است که می‌گوییم مثل این است که احتمالاً در حیطه آیراسته اهدت ندارد و برای همین است که همان سنج قبلی را می‌گیریم و همان نتیجه را می‌گیریم که N تقریباً ثابت است.



مثلاً به همین کار را در کاننیک برای انرژی انجام داریم و توزیع انرژی را که حساب کردیم داریم چنین توزیعی حول E شد! صدم تعداد ذرات زیادتری شد این توزیع تنگ‌تر و تیزتر می‌شود و در واقع به ما می‌گفت که در سیستم کاننیک در هر دو سیستم احتمال حضور انرژی‌های اطراف خیلی کم است و احتمال حضور انرژی‌های N بیشتر است. پس زود فرود نیافت سیستم کاننیک همان سیستم غیر کاننیک می‌شود. حال می‌خواهیم $\langle N^2 \rangle$ دهیم که سیستم Grand Canonic هم داریم در سیستم کاننیک یا غیر کاننیک می‌باشد.

بر همین ترتیب اگر بخواهیم $\langle N^2 \rangle$ را حساب کنیم برای N^2 دوباره همان عمل $Z \frac{\partial}{\partial Z}$ از $\ln D$ را می‌کنیم و باید چون $\frac{1}{D}$ ثابت است این $Z \frac{\partial}{\partial Z}$ را D دوباره بگیریم پس خواهیم داشت

$$\langle N^2 \rangle = \frac{1}{D} \left(Z \frac{\partial}{\partial Z} \right) \left(Z \frac{\partial}{\partial Z} \right) D = \frac{1}{D} \left(Z \frac{\partial}{\partial Z} + Z^2 \frac{\partial^2}{\partial Z^2} \right) D = Z \frac{\partial \ln D}{\partial Z} + \frac{Z^2}{D} \frac{\partial^2 D}{\partial Z^2} \quad \textcircled{4}$$

پس این توزیع را می‌خواهیم پس این است که $\textcircled{2}$ را حساب کنیم $\frac{1}{D} \left(Z \frac{\partial}{\partial Z} \right)^2 D$

$$\langle \Delta N^2 \rangle = \langle N^2 \rangle - \langle N \rangle^2 = Z \frac{\partial \ln D}{\partial Z} + \frac{Z^2}{D} \frac{\partial^2 D}{\partial Z^2} - \left(Z \frac{\partial \ln D}{\partial Z} \right)^2$$

$$\Rightarrow \langle \Delta N^2 \rangle = \frac{1}{D} \left(Z \frac{\partial}{\partial Z} \right) \left(D Z \frac{\partial \ln D}{\partial Z} \right) - Z^2 \left(\frac{\partial \ln D}{\partial Z} \right)^2 = \frac{1}{D} \left[Z \frac{\partial D}{\partial Z} \frac{\partial \ln D}{\partial Z} + D \frac{\partial \ln D}{\partial Z} + Z D \frac{\partial^2 \ln D}{\partial Z^2} \right]$$

$$\Rightarrow \langle \Delta N^2 \rangle = Z^2 \frac{(\partial \ln D)^2}{\partial Z^2} + Z \frac{\ln D}{\partial Z} + Z^2 \frac{\partial^2 \ln D}{\partial Z^2} - Z^2 \left(\frac{\partial \ln D}{\partial Z} \right)^2 - \frac{D (\partial \ln D)^2}{\partial Z} - Z^2 \frac{(\partial \ln D)^2}{\partial Z}$$

$$\Rightarrow \langle \Delta N^2 \rangle = Z \frac{\partial \ln D}{\partial Z} + Z^2 \frac{\partial}{\partial Z} \left(\frac{\partial \ln D}{\partial Z} \right) = Z \frac{\partial}{\partial Z} \ln D + Z \left(Z \frac{\partial}{\partial Z} \right) \left(\frac{\partial \ln D}{\partial Z} \right) = Z \frac{\partial}{\partial Z} \ln D$$

$$\Rightarrow \langle \Delta N^2 \rangle = \left(Z \frac{\partial}{\partial Z} \right)^2 \ln D \quad \textcircled{5}$$

$$\langle \Delta N^2 \rangle = Z \frac{\partial}{\partial Z} \left(Z \frac{\partial}{\partial Z} \ln D \right) \Rightarrow \langle \Delta N^2 \rangle = Z \frac{\partial}{\partial Z} \langle N \rangle \quad \textcircled{6}$$

$\textcircled{3}: \langle N \rangle$

$$(16) + (10) \Rightarrow \sum_r (1 + \ln P_r + \beta E_r + \alpha) \delta P_r = 0$$

$$\Rightarrow \ln P_r = -\frac{e}{(1+\alpha)} - \beta E_r \Rightarrow P_r = e^{\frac{c}{1+\alpha}} e^{-\beta E_r}$$

مربوط در P_r این زنده و ظاهر شده است و در نهایت قید اضافه اضافه می کنیم. P_r تناسب با $e^{-\beta E_r}$ می شود. حال اینکه β با چه چیزی تناسب است بر می گردد به قضیه ای که قبلاً داشتیم و می بینیم انرژی با چه کسی تناسب دارد. قید داریم β با $\frac{1}{kT}$ باشد به شرطی که E انرژی باشد. چون رقیه با E مترادف می شود و هم این است که می بینیم یک کسی ثابت باشد.

حال می توانیم یک قید دیگر هم اضافه کنیم:

$$\bar{E} = \sum E_r P_r = e t e$$

۲. این بعضی است

$$N = \sum N_r P_r = c t e$$

$$\sum_r P_r = 1$$

نرخ ثابت با e عمل کنیم داریم:

$$P_r = P_0 e^{-\beta E_r - \alpha N_r}$$

کسی گفته این سیستم، احتمالاً فقط با این در رابطه دارد. می تواند گفت های مختلفی در آن باشد و می توانیم قید های دیگری داشته باشیم یعنی:

$$P_r = P_0 e^{-\sum \alpha_x y_x}$$

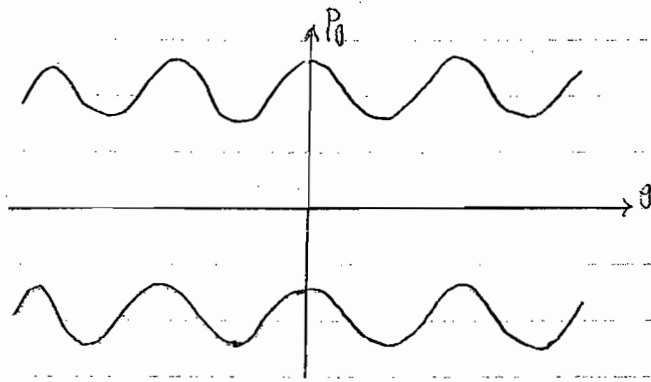
\downarrow intensive extensive extensive و intensive و extensive است
 ثابت (نسبت) است (۰.۵)

extensive ها را با این بعضی کنیم که چه چیزی هستند. یعنی نسبت انرژی یا تعداد ذرات باشد، ممکن است یک کار مورد تنظیم شدگی هست کنیم یا کسب یا ... زود کارام با این ها را با این بعضی کنیم. به راجع به این طوری بعضی کنیم که اگر این در انرژی قرار دهیم و انرژی را با α نسبت می دهیم و بعد از رابطه تر می بینیم که در این بعضی تغییرات انرژی را هم می بینیم.

$$dE = dQ + M dN - dW$$

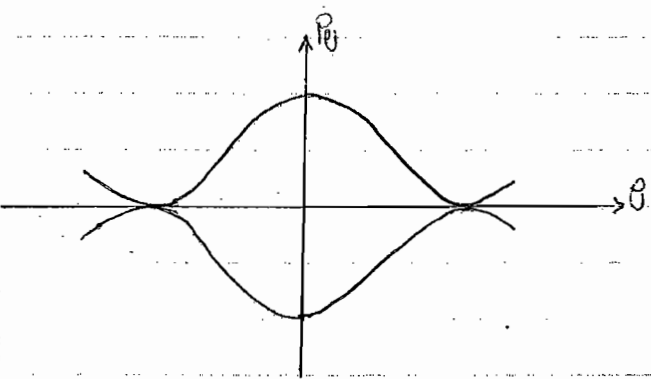
$$dE = T dS + M dN - \sum \alpha_x dy_x$$

یعنی در dW هم فقط $P dV$ می گذاریم روی $T dS$ و $M dN$ در این است که $T dS$ extensive است. $T dS$ و $M dN$ و $\sum \alpha_x dy_x$ هم با هم سیستم ها را می بینیم. $P dV$ هم در این است. $M dH$ باشد (مفهومش در تغییرات می آید) و $T dS$ و $M dH$ و $\sum \alpha_x dy_x$ را می بینیم. $P dE$ را می بینیم و بعد از این بعضی ها را می بینیم که در سیستم بعضی است و بعضی را می بینیم.



په این باکریم وینیم دارد و بسته به شرایط اولیه
یا می تواند در سطح بالا یا پایین باشد و در آنجا می باشد.

$$|E| > mgl$$



رابطه می تواند به این شکل باشد
در این حالت که در سطحی که $P_0 = 0$
در آنجا می باشد.

با در نظر گرفتن این است که چون مسئله یک بُعدی است باید حجم فضای فاز را حساب کنیم و بتوانیم برای تعداد حالتها معادل
است ولی اینجا هم فضای فاز به معنی سطح است، این باید سطح را حساب کنیم
از آنجا که سطح را حساب کنیم باید این اشتباه را حساب کنیم.

$$\text{سطح} : \int dp d\theta$$

برای آنهایی که بسته است، برای این صورت می نویسیم:

$$\text{سطح فضای فاز} : A = \int P_0 d\theta$$

هر کلام از اینها نسبت به یک کمیت است، مثلاً تغییرات آنرا نسبت به انرژی می کنیم
چون آنرا در مان می باشد، مثلاً فضای فاز به معنی سطح است، از طرفی اگر حجم را حساب می کنیم و تغییرات نسبت به انرژی
می کنیم، سطح را در دست می آوریم.

در اینجا هم سطح فاز فضای فاز است و تغییرات آنرا نسبت به انرژی می کنیم که می شود همان تغییرات باشد. این

$$\frac{dA}{dE} \text{ را حساب کنیم}$$

$$\frac{dA}{dE} = \frac{d}{dE} \int P_0 d\theta \quad (1)$$

برای این رابطه آخر، صورت از معادلات حرکت استفاده می کنیم.

$$\text{معادله حرکت} : q = \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{dq}{dt}$$

$$\rightarrow dt = \frac{dq}{\frac{\partial q}{\partial E}} \quad (2)$$

$$\frac{\partial H}{\partial E} = \frac{\partial H}{\partial p} \cdot \frac{\partial p}{\partial E}$$

این dt برای این مسئله همان یعنی پرده حرکتی، چون حرکتی که آن متناوب است، پرده حرکتی هم درون آن متناوب است.

حال آنکه در رابطه آخر اجاب کنیم.

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{G(\tau) - G(0)}{\tau} \rightarrow 0$$

آنچه برآید اینست که محدود باشد و در آن صورت $\langle \frac{dG}{dt} \rangle$ غیر صفر خواهد بود
از طرفی آنکه $\tau \rightarrow 0$ بود یعنی در یک بازه زمانی بزرگ به آن نگاه کنیم، این در صفر خواهد بود.

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{G(\tau) - G(0)}{\tau} \rightarrow 0$$

حال آنکه بخواهیم در یک بازه زمانی معین این نسبت را نگاه کنیم، در یک بازه زمانی معین، خروجی τ که در آن در آن
برای $G(t)$ در $G(t+\tau)$ به $G(t)$ برسد و با τ نسبت $\sum q_i p_i$ بعد از مدت τ در آن که در آن است
قیمت که τ کریم

فقط برای τ که در آن این رابطه برقرار است که $G(t+\tau)$ نسبت به زمان محدود باشد و بعد از مدت τ زمانی همان $G(t)$ شود که آن
در آن برود نسبت به τ اجاب کنیم، برای τ صفر شود.

پس که نسبت $\sum q_i p_i = G$ نسبت به زمان محدود و τ در آن است $G(t)$ برسد، در آن صورت نسبت
 $\langle \frac{dG}{dt} \rangle$ صفر می شود، در این صورت در رابطه (IV)، طرف راست در جمله برابر می شوند.

پس وقتی این صورت برقرار می شود که $G(t+\tau)$ بعد از τ زمان مشخص همان $G(t)$ شود. البته این به معنی نسبت که τ
یا P برود است باشد، بلکه باید حاصل ضرب آنها برود است باشد.

$$G(t+\tau) = G(t) \quad (IV)$$

عروضه که چنین چیزی در آن دریم (یعنی این اتفاق با (V) برای τ صفر P اتفاق افتاد)، مطمئن هستیم که قضیه در آن
برقرار است.

مسئله ۱۲ فصل دوم:

این مسئله یک مثال است که قبلاً

آنکه $u = ar^n$ باشد برای بیان بین ذرات، τ در آن را در مورد این مسئله اجاب کنیم.

$$u(r) = ar^n$$

برای بیان و بیان را برای این اجاب کنیم، τ در آن در آن معنی حرکت را بنویسیم و اجاب کنیم که τ در آن $\sum q_i p_i = G$
را بنویسیم، τ در آن در آن اجاب کنیم.

$$\langle \frac{dG}{dt} \rangle = \underbrace{\langle \sum q_i \cdot p_i \rangle}_{\langle 2K \rangle} + \underbrace{\langle \sum q_i \cdot p_i \rangle}_F = 0$$
$$F = -\nabla u = -\frac{n}{r} ar^n = -\frac{n}{r} u$$

$$\Rightarrow \langle \frac{dG}{dt} \rangle = \langle 2K \rangle - n \langle u \rangle = 0$$

در رابط آخری می‌توانیم $E = K$ را بنویسیم - انرژی جنبشی اتم‌ها در هم

$$V_0 = -3PV$$

دسته ذراتی که در یک جایی محبوس هستند، یک وسیله فشرده می‌باشند. چون n اتری می‌باشد، ذرات است، یک جمله ترمیم باید باشد برای وقتی که این ذرات به دیواره‌ها برخورد می‌کنند، یعنی $\sum q_i \cdot p_i$ است. این دو سمت است یک سمت بیان می‌کند این ذرات است و یک سمت برای وقتی است که بر دیواره‌ها فشرده می‌شوند. پس:

$$\left\langle \frac{dG}{dt} \right\rangle = \langle 2K \rangle - n \langle u \rangle - 3PV = 0$$

\downarrow
 $E = K$

$$\Rightarrow 2\langle K \rangle - n\langle E \rangle + n\langle K \rangle - 3PV = 0$$

پس توانیم اتری جنبشی بر اساس E و PV بدست آوریم:

$$K = \frac{1}{2+n} (3PV + nE)$$

توجه کنید که در این فرآیند ما فرض می‌کنیم که هیچ نیروی بیرونی وجود ندارد، یعنی هیچ نیروی بیرونی وجود ندارد. پس می‌توانیم فرض کنیم که هیچ نیروی بیرونی وجود ندارد، یعنی هیچ نیروی بیرونی وجود ندارد. پس می‌توانیم فرض کنیم که هیچ نیروی بیرونی وجود ندارد، یعنی هیچ نیروی بیرونی وجود ندارد.

رابطه‌ای که بدست آمد فقط برای نیروهای مرکزی می‌باشد. $u(r) = ar^n$ بیان نیروهای مرکزی

کتاب چهارم: ۸۵، ۸، ۲۲

حل سائل

سائل این فصل، مسائل استنادی در کتاب است اما می‌تواند وسیله آزمایشی که بعد از اتمام در همین پایه‌ها است. بعضی از این مسائل، مثل مسئله ۱ و ۲ است که در این فصل کتاب است.

مسئله ۳ فصل سوم:

اگر n جزی بر $n!$ شروع کنید و با روش قطب‌زنی برای $n!$ تقریب بگیریم. وقتی بخواهیم از روش قطب‌زنی استفاده کنیم، باید آنرا بصورت یک سطح تقریب و تقریب برای ضرایب بگیریم. این کار را می‌توانیم:

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \xrightarrow{\text{میانگین تقریب}} e^z = \sum_n F(n) z^n \quad (1)$$

وقتی این را بصورت یک سطح نگاه کنیم، $F(n)$ برابر می‌شود:

$$F(n) = \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{e^z}{z^{n+1}} dz \quad (2)$$

تقریباً $F(n)$ کے رابطنے پر حسب اظہار کنیم $F(n) \approx \frac{1}{n!}$ است پس یک رابطنے برای $\frac{1}{n!}$ بر حسب اظہار کنیم
 که در روش نقطه زنی همگرم این بود که اشتراک در وسط اصول یک نقطه $z = \alpha_0$ (که ما زنی بود) بطور رابطنے

صفت اشتراک را به این شکل میزنیم

$$\frac{e^z}{z^{n+1}} = e^{ng(z)} \quad \text{که } g(z) = \frac{1}{n} \ln \frac{e^z}{z^{n+1}} \quad (3)$$

بعد از آن که ما گرم این بود که این $g(z)$ را اول $z = \alpha_0$ که فرض می کنیم یک نقطه زنی باشد بطور رابطنے
 جدا کنیم که یک جمله است که در $z = \alpha_0$ مشتق اول هست، منفرجه بود، این بهترین حد است که در آن
 به شدت نقطه $z = \alpha_0$ میزنیم $g'(\alpha_0) = 0$ تا با این بین از این اشتراک نقطه α_0 که یک نقطه زنی است، را حساب کنیم یعنی:

$$g'(\alpha_0) = 0 \rightarrow \frac{1}{n} (1 - \frac{n+1}{\alpha_0}) = 0 \Rightarrow \alpha_0 = n+1 \quad (4)$$

بنابراین $g(z)$ در $z = \alpha_0$ میزنیم

$$g(z) = g(\alpha_0) + \frac{1}{2!} g''(\alpha_0) (z - \alpha_0)^2 + \dots \quad (5)$$

در $z = \alpha_0$ اشتراک $\frac{e^z}{z^{n+1}}$ را در $g(z)$ قرار می دهیم و این $F(n)$ بود

$$F(n) = \frac{1}{2\pi} e^{ng(\alpha_0)} \int_{-\sqrt{\frac{\pi}{2g''(\alpha_0)}}}^{\sqrt{\frac{\pi}{2g''(\alpha_0)}}} e^{-\frac{1}{2} g''(\alpha_0) y^2} dy = \frac{1}{\sqrt{2\pi n g''(\alpha_0)}} e^{ng(\alpha_0)}$$

بنابراین $\ln F(n)$ میزنیم

$$\frac{\ln F(n)}{n} = g(\alpha_0) - \frac{1}{2n} \ln(2\pi n g''(\alpha_0))$$

تقریباً $n \rightarrow \infty$ بود، جمله دوم صفت رابطنے از نوع $\ln n$ است و با خروج n در $\frac{\ln n}{n}$ است $\ln n$ صفت
 کند که بینهایت می رود پس کل آن به صفت منفرجه رود

$$\Rightarrow \frac{\ln F(n)}{n} \approx g(\alpha_0) \quad (6)$$

(3): $g(z) = \frac{1}{n} \ln \frac{e^z}{z^{n+1}} \xrightarrow{\alpha_0 = n+1} g(\alpha_0) = \frac{1}{n} \ln \frac{e^{n+1}}{(n+1)^{n+1}} \quad (7)$

(6), (7) $\Rightarrow \frac{\ln F(n)}{n} \approx \frac{1}{n} \ln \frac{e^{n+1}}{(n+1)^{n+1}} \rightarrow \ln F(n) \approx \ln \frac{e^{n+1}}{(n+1)^{n+1}} \quad (8)$

پس $F(n) = \frac{1}{n!} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \ln n! \approx n \ln n - n$

این نتیجه به این در n مورد که n به n نزدیک می شود و n به n نزدیک است که n به n نزدیک است

و تغییرات را بصورت گفته شده حساب می کنیم.
 حال از این به بعد مسئله را از این جهت می بینیم که در مورد این مسئله که می بینیم
 به صورت $\frac{\partial A}{\partial v}$ هم برابر است با $-P$.
 این M و P در فرجه نمی کند که $\frac{\partial A(N)}{\partial(N)}$ و $\frac{\partial A(v)}{\partial(v)}$ باشد و این M و P ها یک intensive است
 و G یک extensive است.

$$A = N \left(\frac{\partial A}{\partial N} \right)_{v,T} + v \left(\frac{\partial A}{\partial v} \right)_{N,T} \Rightarrow A + Pv = MN = G$$

مسئله ۱ فصل سوزا (توضیح)
 ظاهر این مسئله یک مسئله آماری است اما در اصل یک مسئله ترمودینامیکی است.

از این فرایند که رابطه بین C_p و C_v را می بینیم صورت ثابت کنیم

$$C_p - C_v = -k \frac{\left[\frac{\partial}{\partial T} \left\{ T \left(\frac{\partial \ln Q}{\partial v} \right) \right\} \right]_T}{\left(\frac{\partial^2 \ln Q}{\partial v^2} \right)_T} > 0$$

آنگاه تغییرات را در رابطه بر حسب P و T حساب می کنیم، رابطه با T و P است:

$$C_p - C_v = \frac{\left(\frac{\partial P}{\partial T} \right)_v}{\left(\frac{\partial P}{\partial v} \right)_T}$$

این رابطه را به این دلیل نوشتیم که چون در صورت مسئله، رابطه بر حسب Q است.
 ابتدا صورت مسئله را نگاه می کنیم که بینیم صورت و فرج رابطه اول با یک نسبت ترمودینامیکی متناسب است. نسبت ترمودینامیکی که
 به صورت رابطه اول متناسب است، P است و نسبت ترمودینامیکی که فرج رابطه متناسب است، $\left(\frac{\partial P}{\partial v} \right)_T$ است. پس می گوئیم
 باید اول تغییرات را در رابطه در P و T حساب می کنیم.
 نسبت آماری مسئله این است که $T \frac{\partial \ln Q}{\partial v}$ برابر P می شود و وقتی به ترمودینامیکی بر می گردیم باید تغییرات را در رابطه
 با T و P حساب می کنیم.

مسئله ۲ فصل سوزا که این نسبت را می بینیم که برای این صورت است.

مسئله ۱ فصل سوزا (توضیح)
 این مسئله، صرفاً یک مسئله آماری است و صورت نسبت
 گفته شده را در رابطه با Q می بینیم که برای این صورت است.

$$\frac{S}{Nk} = \ln \left(\frac{Q_1}{N} \right) + T \left(\frac{\partial \ln Q_1}{\partial T} \right)_P \quad \text{I}$$

حالت Q_1 را با Q می بینیم که برای این صورت است.

$$Q_1 = \frac{V}{h^3} \int e^{-\beta p^2 / 2m} dp = \frac{NkT}{P} \left(\frac{2\pi m kT}{h^2} \right)^{3/2} \quad \text{II}$$

شود. این با توجه به رابطه ای که برای Q_N داریم می توانیم Q_N را بنویسیم:

$$Q_N = \frac{Q_1^N}{N!}$$

از روی Q_N می توانیم A را بدست بیاوریم و بعد از رد A به حرکت خاص می توانیم رابطه ای را بدست آوریم:

$$A = -KT \ln Q_N \rightarrow S = NK \left[\ln \left\{ \frac{V}{N} \left(\frac{2\pi m KT}{h^2} \right)^{3/2} \right\} + \frac{5}{2} \right]$$

یک سر در میان هم این مسئله وقتی است که ذرات در میان گراش می توانند باشند یعنی یک گاز ایده آل است که در یک سیلندر گراشی قرار دارد. میان گراشی هم یعنی اینکه خود ذرات با هم برهم خوردن ندارند و به ذرات یک نیروی ثابت وارد نمی شود و در این صورت چون $U(y) = mgy$ است روی $dq_x dq_y dq_z$ انتگرال می گیریم و بعد روی dq با توجه به $U(y) = mgy$ انتگرال می گیریم. در این صورت $U(y)$ را قرار دهیم می بینیم که انتگرال حاصل می شود $\int_0^L e^{-\beta mgy} dy$ که این $\int_0^L e^{-\beta mgy} dy = \frac{1}{-\beta mg} (e^{-\beta mgL} - 1)$ می شود. حالا $\frac{1}{-\beta mg} (e^{-\beta mgL} - 1)$ را با هم ضرب می کنیم و بعد $\int_0^L e^{-\beta mgy} dy$ را با هم ضرب می کنیم. حالا $\frac{1}{-\beta mg} (e^{-\beta mgL} - 1)$ را با هم ضرب می کنیم. حالا $\frac{1}{-\beta mg} (e^{-\beta mgL} - 1)$ را با هم ضرب می کنیم.

البته در اینجا می توانیم نشان دهیم که $PV = NKT$ برقرار است!

باید توجه داشته باشیم که نمی توانیم در PV رابطه ای برای T داشته باشیم چون در اینجا T را به صورتی که باید نسبت به T مشتق کنیم و می توانیم که باید تغییرات نسبت به T را حساب کنیم. اما در T تا نسبت و مشتق $\frac{\partial A}{\partial V}$ و $\frac{\partial A}{\partial T}$ می نسبت در این می نویسیم $\frac{\partial A}{\partial T} = \frac{\partial A}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial T}$ ، که باعث می شود $\frac{\partial A}{\partial T} = -S$ که در اینجا به ما نشان می دهد که $S = -\left(\frac{\partial A}{\partial T}\right)_V$.

حالا می بینیم مسئله در اینجا آنکه آمده بود و گفته بود که اگر میان گراشی وجود داشته باشد می توانیم در اینجا مسئله را به صورت دیگری گفته شده بود، یعنی یک گاز ایده آل فرانتسی که $P = \frac{2}{3} P_{cm}$ باشد P_{cm} فکر می کنیم. یک میان گراشی قرار گرفته باشد در این مسئله جهت انتگرال حساب می شود. حالا $\int_0^L e^{-\beta mgy} dy = \frac{1}{-\beta mg} (e^{-\beta mgL} - 1)$ می شود. حالا $\frac{1}{-\beta mg} (e^{-\beta mgL} - 1)$ را با هم ضرب می کنیم. حالا $\frac{1}{-\beta mg} (e^{-\beta mgL} - 1)$ را با هم ضرب می کنیم.

مسئله ۱۱ فصل سوم:

تبدیل این مسئله را در شرایط سیر کانونیک حل کرده بودیم. اینجا یک گاز ایده آل مخلوط از ذره N_1 و N_2 داریم که $N = N_1 + N_2$ است. یعنی N_1 ذره با جرم m_1 و N_2 ذره با جرم m_2 باشد.

$$N_1 \rightarrow m_1 \quad N_2 \rightarrow m_2 \quad N = N_1 + N_2$$

وقتی بخوایم این مسئله را حل کنیم، این N_1 ذره تمیز نمی کنیم و N_2 ذره هم تمیز نمی کنیم و می توانیم از توزیع $\frac{1}{N!}$ استفاده کنیم. یعنی $Q_N(V, T) = \frac{Q_1^{N_1}(V, T)}{N_1!} \frac{Q_2^{N_2}(V, T)}{N_2!}$ می شود. حالا T نسبت به T مشتق می کنیم و T را به دست می آوریم.

$$Q_N(V, T) = \frac{Q_1^{N_1}(V, T)}{N_1!} \frac{Q_2^{N_2}(V, T)}{N_2!} \quad \text{Partition Function}$$

موقعی که N_1 و N_2 را یک جور داریم ولی N_1 با N_2 تمیز نکرده‌اند. در این صورت ذرات از هم جدا می‌شوند فقط جرم‌ها دارد و نمی‌تواند از نوع بارها مثبت و منفی باشند ولی ما از یک جهت می‌کنیم آنها هم برایش می‌کنیم یا منفی می‌شوند ولی از جهت می‌کنیم. این یعنی آنها هم برایش می‌کنیم. در این صورت تمیز نکرده‌اند.

$Q_1^{N_1}, Q_2^{N_2}$ رو با هم ربط بدیم که بعد از این که می‌توانیم حساب کنیم. Q_N را بدیم که بعد از این:

$$A = -KT \ln Q_N$$

در کیفیت تمیز نکرده‌اند، این کاران از آن بدست آوردند:

$$P = -\frac{\partial A}{\partial V} \Big|_{N,T} = (N_1 + N_2) \frac{KT}{V}$$

$$\mu = \frac{\partial A}{\partial N} \Big|_{U,T} = KT \left[\ln \left(P_1 \left(\frac{h^2}{2\pi m_1 KT} \right)^{3/2} \right) + \ln \left(P_2 \left(\frac{h^2}{2\pi m_2 KT} \right)^{3/2} \right) \right]$$

این یعنی ترتیب هم را هم از آن گرفته‌اند (این بدست می‌آوریم)

$$U = \frac{3}{2} (N_1 + N_2) KT$$

ولی چون آن‌ها ترتیب ذره از آن بدست می‌آورند

$$S = NK \left[\ln \left\{ \frac{V}{N} \left(\frac{2\pi m KT}{h^2} \right)^{3/2} \right\} + \frac{5}{2} \right]$$

این یعنی N و m و N_1 و N_2 و m_1 و m_2 را هم در نظر گرفته‌اند.

فصلت بعدی می‌شود m_1 و m_2 را برابر در نظر گرفته‌اند، این یعنی آنها را برابر می‌کنیم و می‌بینیم که

که $\ln Q'$ برابر $\ln Q$ است. شگفتی که $N_1 \rightarrow 0$ و $N_2 \rightarrow 0$ بود!

$$\ln Q' = \ln Q \quad \text{if } N_1 \rightarrow 0 \text{ or } N_2 \rightarrow 0$$

یعنی اگر یکی از آنها به صفر برسد، مثل حالت است و آن‌ها را تمیز نکرده‌اند.

مثله 14 فصل 10:

این مسئله هم یک مسئله ترکیب است و باید مقدار اطلاعات ترکیبش مثل فریب (درجه) و آنش را بدیم.

$$AB \rightleftharpoons A + B$$

و آنش فعال را در نظر بگیریم:

N_A, N_B, N_{AB} غلظت‌های آنها هستند (غلظت نسبی).

این هم که:

$$\frac{N_{AB}}{N_A N_B} = \frac{F_{AB}}{F_A F_B} = K(T)$$

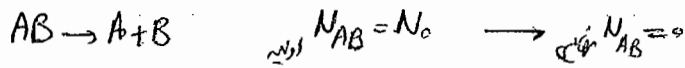
که F فعالیت است که در آن T دما است.

توجه داشته باشید که $K(T) = e^{-\Delta G^\circ / RT}$ و ΔG° تغییر انرژی آزاد گیبس استاندارد است.

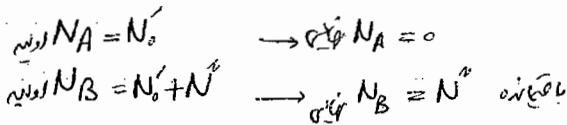
$K(T)$ یک تابع از T است که اگر ایده آل باشد همان $K(T)$ خواهد بود. چیزی که داریم که برای ذرات آزاد وقتی نسبت $\frac{K(T)}{T}$ نسبتاً یک فیزیکی و نسبت T بدست می آید.
وکنش که داریم یک واکنش در طرف راست، برای هر واکنش در طرف ما معول یک فیزیکی به عنوان درج واکنش تولید می کنیم

$$\varepsilon = \frac{N_{AB(max)} - N_{AB}}{N_{AB(max)} - N_{AB(min)}} \quad \text{I}$$

این یعنی اینکه واکنش فقط به طرف راست انجام شود، اگر N_{AB} اولیه برابر N_0 باشد، N_{AB} هیچ تغییری نشود و این N_0 بین A و B تقسیم می شود



اگر واکنش فقط به سمت چپ باشد و اگر N_A برابر N_0 باشد در این صورت N_B اولیه برابر $N_0 + N'$ است که N' قسمتی از اجزای B است که با خود باقی می ماند.



حال فرض کنیم واکنش فقط به سمت راست باشد، در این صورت داریم:



$$\left. \begin{aligned} N_{AB(min)} &= 0 \\ N_A(max) &= N_0 + N_0' \\ N_B(max) &= N_0 + N_0' + N'' \end{aligned} \right\} \text{II}$$

یعنی AB ها هم شکسته و به همان اندازه هم A و هم B تولید می کنند



$$\left. \begin{aligned} N_{AB(max)} &= N_0 + N_0' \\ N_A(min) &= 0 \\ N_B(min) &= N'' \end{aligned} \right\} \text{III}$$

اگر واکنش به سمت چپ باشد:
یعنی مقدار اولیه واکنش و به اندازه یک A یا B ها که کنش است به آن اضافه می شود
یعنی همان است تعداد B ها صافه صافه را دارند و A ها کمتر باشند و وقتی واکنش به سمت چپ باشد هم A ها با B ها جمع می شوند و AB هم شوند و یک مقدار B باقی می ماند

اگر بخواهیم واکنش در حال تعادل باشد باید ε (I) که برای AB می نویسیم باید برابر همانی باشد که برای A و B می نویسیم، یعنی هم فرض می کنیم در حال تعادل باشد و بنویسیم:

$$\text{I} \Rightarrow \left. \begin{aligned} N_{AB} &= (N_0 + N_0') (1 - \varepsilon) \\ N_A &= N_A(max) - N_{AB} = (N_0 + N_0') \varepsilon \\ N_B &= N_B(max) - N_{AB} = (N_0 + N_0') \varepsilon + N'' \end{aligned} \right\} \text{IV}$$

رابطه (V) معادلات تعادل است.

$$G = \mu_A N_A + \mu_B N_B + \mu_{AB} N_{AB} \quad \textcircled{V}$$

میشود داریم

در حالت تعادل $dG = 0$

$$dN = 0$$

$$\textcircled{IV}, \textcircled{V} \Rightarrow dG = (N_A + N_B)(\mu_A + \mu_B - \mu_{AB}) d\varepsilon = 0$$

این رابطه برای N_A, N_B در دو طرف برقرار است، پس $N_A + N_B$ نیز در آن طرف باید باشد.

$$\mu_A + \mu_B - \mu_{AB} = 0 \rightarrow \mu_A + \mu_B = \mu_{AB} \quad \textcircled{VI}$$

این روابط همان روابط تعادل است که در حالت تعادل برقرار است. می‌توانیم این روابط را به این صورت بنویسیم: $\mu_A + \mu_B = \mu_{AB}$ که نشان می‌دهد انرژی هر مول از A و B در مجموع برابر با انرژی هر مول از AB است.

حال می‌خواهیم از μ ها با استفاده از Partition function بدست آوریم:

3.5.11 \rightarrow

$$\textcircled{VII} \begin{cases} \mu_A = KT \ln \frac{N_A}{f_A} \\ \mu_B = KT \ln \frac{N_B}{f_B} \\ \mu_{AB} = KT \ln \frac{N_{AB}}{f_{AB}} \end{cases}$$

این روابط فقط در حالت تعادل برقرار است. اگر در این روابط f را از حالت تعادل خارج کنیم، این روابط دیگر برقرار نیستند. این روابط فقط در حالت تعادل برقرار است.

در رابطه \textcircled{VII} را در \textcircled{VI} قرار می‌دهیم و می‌بینیم که $\frac{N_A}{f_A} \times \frac{N_B}{f_B} = \frac{N_{AB}}{f_{AB}}$

$\textcircled{VII} \rightarrow \textcircled{VI} \Rightarrow$

$$KT \ln \frac{N_A}{f_A} + KT \ln \frac{N_B}{f_B} = KT \ln \frac{N_{AB}}{f_{AB}}$$

$$\Rightarrow \frac{N_A}{f_A} \times \frac{N_B}{f_B} = \frac{N_{AB}}{f_{AB}} \Rightarrow \frac{N_A N_B}{f_A f_B} = \frac{1}{V} \frac{N_{AB}}{f_{AB}}$$

$$\Rightarrow \frac{N_{AB}}{N_A N_B} = V \frac{f_{AB}}{f_A f_B} = K(T) \quad \text{The law of mass action}$$

مثال 15 فصل 10:

مثال 15 و 16 در مسئله 10 فصل 10

گفته که این فرآیند را در نظر بگیرید و معادلات تعادل را بدست آورید.

فرآیند تعادل $\varepsilon = PC$ است، غیر نسبتی $\varepsilon = \frac{P^2}{2m}$ است و حالت نسبتی که در آن $\varepsilon = \sqrt{PC^2 + m^2 c^4}$ است.

جلسه پانزدهم: ۸، ۲۷، ۸۵۵

حل سائل

مسئله ۱۲ فصل سوم:

دوره تعدادی انرژی یک فوتون‌ها رو بنویس که بعد از این که برای اولین بار در این صورت تولید می‌شود.

$$E_j = (j + \frac{1}{2}) h \omega$$

فوتون در همین زمان ترازی انرژی را برای تولید می‌کند. $\frac{(j+1/2) h \omega}{(j-1/2) h \omega}$ است و همچنین انرژی را در یک کسوفی ترورد می‌کند. SN ترازی انرژی بعدی مقابله کنیم.

این مسئله یک فوتون که بعد از آن است و طریقه آنرا با N که ترازی انرژی بعدی مقابله کنیم. فوتون بعدی که از هم متن باشد در واقع متن به ترازی انرژی بعدی هم باشد. حال آنکه N ترازی انرژی بعدی باشد متن $3N$ ترازی انرژی بعدی است. حال آنکه که بعد از N که ترازی انرژی بعدی است.

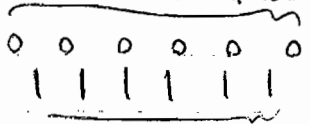
برای فوتون که بعد از انرژی مهم انرژی را حساب کنیم کاری که باید بکنیم این است که انرژی هر کلام از این متن بعدی ها را بصورت مقابل در نظر بگیریم.

$$E_j = (j + \frac{1}{2}) h \omega$$

آنرا که بعد از آن باید جمع آنها را در نظر بگیریم. طریقه که وقتیکه بعد از $(j + \frac{1}{2}) h \omega$ چه ترازی و وقتیکه در وقت فراسهم آنرا بصورت $(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2}) h \omega$ ترازی می‌شود.

$$E = \sum_{j=1}^{\infty} (j + \frac{1}{2}) h \omega$$

زیرا این که در مسئله نوشته متن این هم مانند که در خواهم. $h \omega (j + \frac{1}{2})$ برای هر ترازی j تمام تولید می‌شود. هر کلام از فاصله j انرژی به اندازه $h \omega$ است و اتفاقاً این گفته این است که به اندازه $h \omega$ و تا از این بسته های انرژی داریم که باید بین که تا آنجا که ترازی j شود. طریقه که قبلاً گفتیم این تقسیم بندی متن این است که $1 - \frac{1}{2}$ که در دوره را این متن و تا به ترازی مهم که فرق بین که انرژی به هم بصورت متن این است.



$$g_j = \binom{j+1/2}{j} = \frac{(j+1/2)!}{j! (1/2)!} \quad (*)$$

این برای هر ترازی j تمام تولید می‌شود g_j را بنویسیم.

$$Q_1(\beta) = \sum_{j=0}^{\infty} g_j e^{-\beta E_j}$$

۱۰۰ را انرژی خواهم متن

در این صورت که بعد از آن ترازی را به این صورت قسمت بندی کردیم که هر ترازی را E_j است که تا آنجا که j صحت داشته باشد (تولید می‌شود).

$j=0$ یعنی در حالت پایه باشد $1 = j$ یعنی در این از ابتدا یک باشد و در وقت بعدی صفر باشد و در آن $j=5$

بارد، به این صورت است که می‌تواند در 5 تا از جعبه‌ها دارای $n=1$ باشد و بقیه صفر و یا بیش از 2 تا از جعبه‌ها $n=2$ باشد و بقیه از جعبه‌ها $n=1$ باشد و بقیه صفر و ترکیب‌های متعددی که می‌تواند وجود داشته باشد.

با Q_1 را فقط توزیع یعنی برای هیچ از آنها فقط در اینجا هر ذره که بگذرد است، در سلاخ N تا از آنها می‌تواند همین Q_1 شود. Q_1 را N تا از آنها می‌تواند بگذرد و بقیه را بسته می‌کنیم، برای هر کدام از این ذرات با بقیه می‌کنیم و بعد به N برسانیم، اینجا هر کدام از ذرات را که بگذرد، همین رو واقع Q_1 برای یک ذره است.

$$Q_1(\beta) = \left(\sum_{j=0}^{\infty} \frac{(j+\delta-1)!}{j!(\delta-1)!} e^{-\beta(j+\delta_2)h\omega} \right) = \left(\sum_{j=0}^{\infty} \frac{(j+\delta-1)!}{j!(\delta-1)!} e^{-\beta h\omega j} \right) e^{-\beta h\omega \delta_2}$$

سلسله جبری است $(1 - e^{-\beta h\omega})^{-\delta}$

$$\Rightarrow Q_1(\beta) = (1 - e^{-\beta h\omega})^{-\delta} e^{-\beta h\omega \delta_2}$$

لذا Q_1 می‌توانیم سادگی‌های ترمودینامیکی را بدست آوریم.

$$Q_N = (Q_1)^N$$

از N تا از این ذرات را که بگذرد و وجود داشته باشد Q_1 می‌تواند.

بیشتر $\frac{1}{N!}$ هم نمی‌خواهد چون این ذرات را در عوض در شبکه فکس شده اند و مکان‌های آنها با هم تعیین است.

همه این کار را می‌توانیم انجام دهیم که Q را بدست می‌آوریم چون اینجا مسئله بود و می‌توانیم آنها را با هم کار می‌کنیم اما راه مستقیم این است که Q را به نوبت می‌آوریم و بعد از روی تبدیل Q به Q و اشتغال به Q را بدست می‌آوریم. Q را دقیقاً به همین صورت است.

تا این سلسله را برای انرژی E در نظر گرفتیم، انرژی هر کدام از ذرات بقیه‌ها بصورت $(n_j + \frac{1}{2})h\omega$ است، انرژی کل می‌توانیم به این صورت است:

$$E = \sum_{j=1}^S (n_j + \frac{1}{2})h\omega = (n_1 + n_2 + \dots + n_S + \delta_2)h\omega$$

$\delta_2 \rightarrow \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2}$

انرژی صافی میانی که در اینجا وجود دارد، برابرند با:

$$E_0 = \delta_2 h\omega \rightarrow \text{فقط } \frac{1}{2} \text{ است} \rightarrow \text{همه ذرات در پایه باشند}$$

$$E_1 = (\delta_2 + 1)h\omega \rightarrow \text{در رابطه } (*) \text{، } j=1 \text{ باید بلنداریم} \rightarrow \text{تعداد ذراتی که می‌توانیم به هم برابر با این ذره و بقیه ذرات پایه و ...}$$

$$E_2 = (\delta_2 + 2)h\omega \rightarrow \text{در رابطه } (*) \text{، } j=2 \text{ باید بلنداریم}$$

$$E_j = (j + \delta_2)h\omega = jh\omega + \delta_2 h\omega$$

یعنی برای Q را حساب می‌کنیم، یعنی برای E که گسسته تغییر می‌کند، چون در این انرژی‌ها تقسیم شده است که بصورت کوانتای $h\omega$ است، می‌توانیم این Q را حساب کنیم، یعنی برای E که در این Q کوانتای $h\omega$ داریم و این تقسیم شده قابل شمارش است. $\delta_2 h\omega$ با $h\omega$ می‌تواند آنرا به E تبدیل کند، E می‌تواند $h\omega$ یا به صورت $h\omega$ می‌تواند به E تبدیل کند.

قسمت، تقسیم کنیم، این برای Q است.

روش قبل به این صورت بود که برای Q را به این صورت بدست آوریم:

$$Q_N(\beta) = e^{-N\beta\hbar\omega/2} (1 - e^{-\beta\hbar\omega})^{-N}$$

این N یک عددی بود، اگر تئوری که براساس آن N یک ثابت بود. حال اگر Q را به این روش قبل بدست آوریم، رابطه N براساس β به صورت $N = \frac{E}{\hbar\omega}$ می شود.

سؤال ۲۲ فصل سوم:

گفته شد $g(E)$ را برای سیستم N بازنشانه ها در صورتی که انرژی از تئوری کلاسیک از E پس روی $Q(\beta)$ بدست آید

برای N تئوری کلاسیک بدست آورده بودیم:

$$Q_N(\beta) = e^{-N\beta\hbar\omega/2} (1 - e^{-\beta\hbar\omega})^{-N}$$

حال که از این Q_N و روشی دیگر $g(E)$ می شود:

$$g(E) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} e^{\beta E} Q(\beta) d\beta$$

اینجا می بینیم که این E را واقعاً می توانیم بصورت β بنویسیم یا نه! می فهمیم این E را از این Q بدست می آوریم.

این اشتباه را حساب کنیم یعنی Q را در آن قرار دهیم و حساب کنیم. معمولاً حساب کردن این اشتباه کار ساده ای نیست، کاری که معمولاً انجام می دهیم این است که این قسمت اشتباه را حذف کنیم β یعنی $(\beta \hbar\omega)$ را به β تغییر می دهیم و β را $\beta \hbar\omega$ می نویسیم.

$$\left. \frac{\partial \ln Q}{\partial \beta} \right|_{\beta=\beta^*} = E \rightarrow \beta^* E$$

پس Q را مثل $\beta^* \hbar\omega$ بنویسیم.

حالا اگر $\ln Q$ را مشتق بگیریم به این رابطه می رسیم:

$$\beta^* = \frac{1}{\hbar\omega} \left[\ln \left(\frac{E}{\hbar\omega} + \frac{1}{2} \right) - \ln \left(\frac{E}{\hbar\omega} - \frac{1}{2} \right) \right]$$

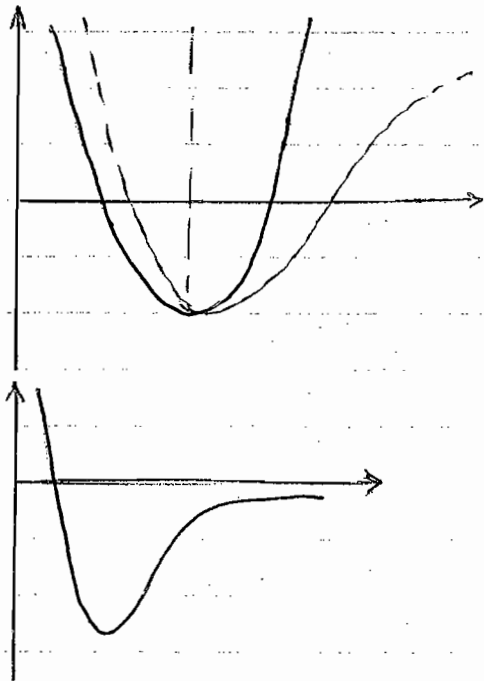
یعنی از $\ln Q$ مشتق کنیم و برابر E قرار دهیم β^* پیدا شود.

بعد قسمت اشتباه را حذف β^* بنویسیم، وقتی مثل β^* بنویسیم E همان انرژی است که می فهمیم را بنویسیم. بعد حذف آن یک جمله تیز دارد این E است طبقه بالاتر را تقریباً ضمیمه کنیم و اشتباه آن را هم بگیریم. پس $g(E)$ بدست می آید.

$$g(E) = \frac{1}{2\pi} \int e^{(\beta^* E + \ln Q_N(\beta^*) - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \ln Q_N}{\partial \beta^2} \Big|_{\beta^*} \beta^2 + \dots)} d\beta$$

صورت می آید

در قسمت اشتباه بالا، رابطه اشتباه $Q(\beta)$ را بنویسیم $e^{\ln Q(\beta)}$ چون $\frac{\partial \ln Q}{\partial \beta}$ را می دانیم، پس بعد از آن Q را با رابطه β^* بنویسیم. β^* را در $\ln Q$ بنویسیم و β^* را در $\frac{\partial^2 \ln Q}{\partial \beta^2}$ بنویسیم. β^* را در $\frac{\partial \ln Q}{\partial \beta}$ بنویسیم.



که از Cq^2 یک مقدار بیشتر می شود.
 ولی بیشتر بیندیشید هاش طبعی که ما داریم به این نظر هستند
 یعنی وقتی شش چهارم را حساب می کنیم از یک طرف که
 ششیم نزدیک به ششیم عدت آن نیست و از طرف دیگر که
 نزدیک به ششیم عدت آن کمتر می شود.

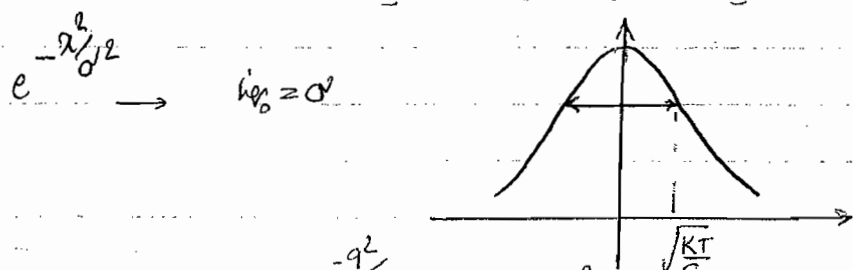
یعنی بیندیشید هاش مثل شش معادل، در واقع به همین نظر هستند
 ولی نظریه های دیگر که ما داریم از یک طرف که در می شود و طرف دیگر
 در واقع آن قرار می گیرد ولی طوری است که از سمت چپ مانع از
 این می شود که به سمت نزدیک شود و یک نیروی دفعی بر آن وارد
 دارد و از طرف دیگر که آن را شش و صد و بیست و یک آن نزدیک به ششیم
 فاصله ششیم بیشتر و بیشتر می شود و بیشتر نزدیک تر هاش ما داریم
 یک هستند. یعنی عدت q و R تعیین کننده این هستند که

کدام یک از این شکل ها را انتخاب می کنیم و این عدت هاش از نوع شش است یا شش است و یا نوع دیگر!

در صورتی که این تابع با این شرط $V(q)$ را حساب کنیم به این صورت $V(q) = Cq^2 - gq^3 - fq^4$

$$Q_1(U, T) = \int e^{-\beta P_{2m}^2} dp \int e^{-\beta Cq^2 - (gq^3 + fq^4) / kT} dq \quad (*)$$

فقط شش دوم q فقط همان اول را داشت
 برای این که q و k کوئیک هستند بیشتر به هم اشتراک داریم باز مربوط به $e^{-\beta Cq^2}$ برای این که در تعیین
 کنیم این طور می گوئیم که عدت $e^{-\beta Cq^2}$ یک اشتراک گیر است و هاش آن به این صورت است:



این عدد هاش که به ما است دارد $\sqrt{\frac{KT}{C}}$ است. عدت $e^{-\beta Cq^2}$ را عدت $e^{-\frac{q^2}{KT/C}}$ می نویسیم در آن صورت $\sqrt{\frac{KT}{C}}$ عدت
 شش σ که هاش ما را می دهد

بنابراین می فهمیم q و k هاش را تعیین کنیم که به این از جمله دوم در اشتراک داریم $(*)$ می نویسیم کنیم، یعنی این q و k
 تا صد و بیست و یک اشتراک داریم، اشتراک در نظر می گیریم و یک مقدار کوئیک q و k می دهیم اعتبار شش را تعیین کنیم

پس این طور می‌نویسیم:

$$\frac{g q^3}{KT} \ll \frac{g}{KT} \left(\frac{KT}{2c}\right)^{3/2} \rightarrow g \sqrt{KT} (2c)^{-3/2} \ll 1$$

شماره رابطه با g برابر است، در آن صورت در رابطه (*) توان $e^{-gq^3/KT}$ ضمیمه کوچک می‌شود و $e^{gq^3/KT}$ تقریباً برابر یک می‌شود. این محدوده ای است که توان g را در صلب KT می‌نویسیم و در این محدوده می‌توانیم از $\exp(gq^3/KT)$ ضمیمه برش کنیم یا آنرا بکار نبریم.

به همین ترتیب برای f می‌توانیم بنویسیم:

$$\frac{f q^4}{KT} \ll \frac{f}{KT} \left(\frac{KT}{2c}\right)^{4/2} \rightarrow \frac{f \cdot KT}{(2c)^2} \ll 1$$

پس محدوده ای که ما این عبارت را در صلب انجام دهیم (روان صلب) برای g و f است و آنرا این شرط برقرار باشد می‌توانیم $\exp(gq^3 + fq^4/KT)$ را بکار نبریم:

$$\int e^{-\beta c q^2} e^{\frac{g q^3 + f q^4}{KT}} dq \approx \int e^{-\beta c q^2} \left(1 + \frac{g}{KT} q^3 + \frac{f}{KT} q^4 + \dots\right) dq$$

استدلال در رابطه به $\frac{g}{KT} q^3$ ضمیمه می‌شود چون یک تابع فرد است. بنابراین آنرا می‌توانیم نادیده بگیریم (تقریب غیر صفر و صفر بود). با f هم همین (q^4) را هم بنویسیم، این تقریب اول به g وابسته نیست! اگر عبارت بعدی را حساب کنیم که یک سری استدلال‌های گویس می‌شود، که در نهایت تا اولین تقریب غیر صفر برای f و g بعدی زیر می‌شود که برای f توان یک ظاهر شده برای g توان در آن ظاهر شد.

$$Q_1 = \sqrt{\frac{\pi KT}{c}} \left(1 + \frac{3}{4} \frac{fKT}{c^2} + \frac{15}{16} \frac{g^2 KT}{c^3} + \dots\right) \int \exp\left(-\beta P \frac{p^2}{2m}\right) dp$$

Q_1 که بدست می‌آید، تقریباً چیزهایی را حساب می‌شود:

$$u = -\frac{\partial}{\partial \beta} \ln Q$$

$$C_v = \frac{\partial u}{\partial T}$$

برای برآورد u می‌توانیم از قضیه همبندی استفاده کنیم و بنویسیم تا آنجا که بر حسب q^2 است (بعد اول) و در اینجا این صورت $\frac{1}{2} KT$ است و $\frac{1}{2} KT$ را می‌توانیم از جمله مربوط به p^2 بویستیم تا آنجا که KT می‌شود، عبارت غیر صفری هم عبارت مربوط به Q می‌باشد و این اثر C_v را حساب کنیم می‌شود:

$$C_v = K + \frac{3}{2} KT \left(\frac{f}{c^2} + \frac{5}{4} \frac{g^2}{c^3}\right) + \dots$$

این رابطه تا اولین مرتبه بر حسب T می‌باشد که مربوط به N است و در برای N آنرا می‌توانیم به N نزدیک کنیم.

h^5 برای P_x ، P_y و P_z ، P_ϕ برای P_ϕ ، P_θ برای P_θ ، P_φ برای P_φ است، یعنی h برای q و P مربوط به آن است (معادله فضا-زمان h هم خواهد بود)، در رابطه نوشته شده h^3 برای انتگرال روی $d\varphi$ است یعنی برای $d\varphi d\theta d\phi$ و h^5 برای $d\theta d\phi d\theta$ است.

انتگرال انتگرال روی $dP_x dP_y dP_z$ را بگیریم که بصورت $\sqrt{\frac{\pi}{2}}$ می شود که ضریب δh^2 (یعنی h که بعد از انتگرال روی θ را به دست می آید)

بعد از انتگرال گیری داریم:

$$Q_1 = \frac{\pi^{7/2} (8M)^{3/2} V I}{h^5 M E \beta^{7/2}} \delta h h (\beta M E) \quad * \text{الله صوابه و ما در دست می آید}$$

وقتی Q_1 را بخواهیم Q_2 را به آن N برسیم. وقتی Q_2 بدست آید Q_3 را بگیریم Q_3 را بگیریم. اگر Q_3 را در h را خواهم، فقط رابطه h دارد چون E در رابطه Q_3 است. (شما همان کاری که برای نقاطی نوشته ایم)

$$P_3 = \langle \sum_i M_i \ln Q_i \rangle = \frac{1}{\beta} \frac{\partial}{\partial E} \ln Q_1$$

$$\sigma_0 P = N P_3$$

یکه از کلمات مهم که می بینیم E است، که به این صورت باید بنویسیم:

$$D = E + 4\pi D = \epsilon E$$

* انتگرال: δh^2 ظاهر شده در رابطه Q_1 از کجا آمده؟
 L را برای محاسبات کردی، برای این صورت بنویسیم:

$$L = \frac{1}{2} M (r^2 \dot{\theta}^2 + r^2 \delta h^2 \dot{\varphi}^2) - V(q)$$

همه ضرایب از معادله را از روی $\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}$ بدست می آید:

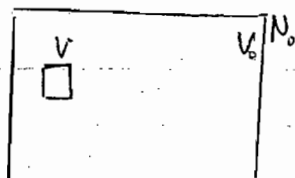
$$P_\theta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = M r^2 \dot{\theta} \rightarrow \dot{\theta} = \frac{P_\theta}{M r^2}$$

$$P_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = M r^2 \delta h^2 \dot{\varphi} \rightarrow \dot{\varphi} = \frac{P_\varphi}{M r^2 \delta h^2} \rightarrow \text{از این جا می آید!}$$

همه ضرایب روی h را از h بدست می آید. h را h می آید، h را h می آید، h را h می آید.

* نکته مهمی که در فصل 4 در صحنه که تعداد ذرات تغییر می کند و چون دارد h است که ضریب h در معادله Q_1 را تغییر می دهد. h را h می آید، h را h می آید، h را h می آید.

مثلاً $\frac{1}{2}$ احتمال دارد که یک ذره در هر یک از دو طرف قرار گیرد. اگر N ذره وجود داشته باشد، احتمال آن که N ذره در هر یک از دو طرف قرار گیرد $\frac{1}{2^N}$ است. اگر N ذره وجود داشته باشد، احتمال آن که N ذره در هر یک از دو طرف قرار گیرد $\frac{1}{2^N}$ است.



اگر N ذره در هر یک از دو طرف قرار گیرد، این احتمال $\frac{V}{V_0}$ است. برای یک ذره $P(1, V) = \frac{V}{V_0}$

یعنی هر چه V بزرگتر باشد، این احتمال بیشتر است و هر چه V کوچکتر باشد، این احتمال کمتر است.

اگر N ذره در هر یک از دو طرف قرار گیرد، این احتمال $\frac{V}{V_0}$ است و اگر N ذره در هر یک از دو طرف قرار گیرد، این احتمال $(1 - \frac{V}{V_0})$ است. اگر N ذره در هر یک از دو طرف قرار گیرد، این احتمال $\frac{V}{V_0}$ است و اگر N ذره در هر یک از دو طرف قرار گیرد، این احتمال $(1 - \frac{V}{V_0})$ است. اگر N ذره در هر یک از دو طرف قرار گیرد، این احتمال $\frac{V}{V_0}$ است و اگر N ذره در هر یک از دو طرف قرار گیرد، این احتمال $(1 - \frac{V}{V_0})$ است.

$$P(N, V) = \binom{N_0}{N} \left(\frac{V}{V_0}\right)^N \left(1 - \frac{V}{V_0}\right)^{N_0 - N} \quad (1)$$

این احتمال را می‌توانیم به صورت $\binom{N_0}{N}$ و $\frac{V}{V_0}$ و $1 - \frac{V}{V_0}$ بنویسیم و آنرا از خواص ترکیب می‌توانیم بدست بیاوریم که مطمئن باشید:

$$\sum_{N=0}^{N_0} P(N, V) = 1$$

که می‌توانیم به کمک $\binom{N_0}{N}$ این رابطه را اثبات کنیم.

اگر N ذره در هر یک از دو طرف قرار گیرد، این احتمال $\frac{V}{V_0}$ است و اگر N ذره در هر یک از دو طرف قرار گیرد، این احتمال $(1 - \frac{V}{V_0})$ است. اگر N ذره در هر یک از دو طرف قرار گیرد، این احتمال $\frac{V}{V_0}$ است و اگر N ذره در هر یک از دو طرف قرار گیرد، این احتمال $(1 - \frac{V}{V_0})$ است.

$$\Delta N = (\langle N^2 \rangle - \langle N \rangle^2)^{1/2}$$

$$\langle N \rangle = \sum_{N=0}^{N_0} N P(N, V) = P N_0 \quad (2)$$

$$P = \frac{V}{V_0}$$

$$q = 1 - \frac{V}{V_0}$$

پس داریم:

$$\Delta N = (P N_0 (1 - P))^{1/2} \quad (3)$$

اگر N ذره در هر یک از دو طرف قرار گیرد، این احتمال $\frac{V}{V_0}$ است و اگر N ذره در هر یک از دو طرف قرار گیرد، این احتمال $(1 - \frac{V}{V_0})$ است. اگر N ذره در هر یک از دو طرف قرار گیرد، این احتمال $\frac{V}{V_0}$ است و اگر N ذره در هر یک از دو طرف قرار گیرد، این احتمال $(1 - \frac{V}{V_0})$ است.

برای تعیین توان این موضوع، از رابطه $P(N, V)$ ، \ln میگیریم و در صورت نیاز از جدول انتگرال استفاده میکنیم:
 $\ln N! = N \ln N - N$

$$f(N) \equiv \ln P(N, V) = \ln N_0! - \ln N! - \ln(N_0 - N)! + N \ln p + (N_0 - N) \ln q$$

انتگرال: $f(N) = N_0 \ln N_0 - N_0 - N \ln N + N - (N_0 - N) \ln(N_0 - N) + (N_0 - N) + N \ln p + (N_0 - N) \ln q$

انتگرال را به نثر این حالت که از نتایج جدول استفاده میکنیم و $f(N)$ را به این صورت بنویسیم:
 $f(N) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n P(n)$

بر $f(N)$ ، $\langle N \rangle$ را به N نگاه داریم:
 $f(N) = f(\langle N \rangle) + \frac{\partial f}{\partial N} \bigg|_{N=\langle N \rangle} (N - \langle N \rangle) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial N^2} (N - \langle N \rangle)^2 + \dots$

$$\Rightarrow f(N) \approx f(\langle N \rangle) - \frac{1}{2p^2qN_0} (N - \langle N \rangle)^2$$

در نتیجه $\ln P = f(N) \rightarrow P(N, V) = e^{f(N)}$

$$\Rightarrow P(N, V) = C e^{-\frac{(N - \langle N \rangle)^2}{2p^2qN_0}} \quad (3) \quad (pN_0(1-p))^{\frac{1}{2}} = (pN_0q)^{\frac{1}{2}} = \Delta N$$

بنابراین $C = e^{f(\langle N \rangle)}$
 $\Rightarrow P(N, V) = C e^{-\frac{(N - \langle N \rangle)^2}{\Delta N^2}}$

بنابراین $P(N, V) = C e^{-\frac{(N - \langle N \rangle)^2}{\Delta N^2}}$

این P در N توزیع گوسی با ΔN است!

اما در همان حالت $N \rightarrow \infty$ و $p \rightarrow 0$ درود، ΔN محدود نمیگردد و در این حالت $P(N_0)$ باید یک تقارن باشد:

$$P(N_0) = \langle N \rangle \rightarrow \text{تقارن} \Rightarrow N_0 = \frac{\langle N \rangle}{p} \quad (4)$$

N_0 ضریب ضربه است و به استیلا می رود و بنابراین در این حالت از N نسبت به N_0 صرفاً تقارن است:

$$(1-p)^{N_0 - N} \approx (1-p)^{N_0} \stackrel{(4)}{=} (1-p)^{\frac{\langle N \rangle}{p}} \stackrel{p \rightarrow 0}{=} e^{-\langle N \rangle}$$

تعریف e^x

بسیستم

$$P(N, V) = \binom{N_0}{N} \left(\frac{V}{V_0}\right)^N \left(1 - \frac{V}{V_0}\right)^{N_0 - N}$$

عدد $\frac{N_0!}{N!(N_0 - N)!}$ را از رابطه استرلینگ استفاده می‌کنیم که به این صورت است:

$$n! = \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n$$

از همین جا رابطه استرلینگ $\ln n!$ بدست می‌آید (معنی):

$$\ln n! \approx n \ln n - n$$

حال اگر از این رابطه استفاده کنیم، می‌شود

$$P(N, V) = \frac{\langle N \rangle^N e^{-\langle N \rangle}}{N!} \rightarrow \text{که به توزیع پواسون است}$$

رابطه‌هایی که با تابع Grand Canonic داریم و در آن پارامترها هم ثابت هستند، در حدی که $N_0 \rightarrow \infty$ و $V_0 \rightarrow \infty$ برود، بیشتر از توزیع پواسون است. برعکس حالتی که هم از نوع گوسی هم باشد، چون N ها در آنجا فیکس بود.

جایزه ۲۹، ۸، ۸۵

Chapter 5:

از این جمله می‌خواهیم بدانیم که تا چقدر می‌توانیم در آنجا کار کنیم یا تا چه حد می‌توانیم آنجا کار کنیم. استفاده از سیستم را همان تابع درجه‌ای سیستم را می‌گویند.

بعد از آن که در سیستم درجه‌ای داریم، می‌توانیم از آنجا استفاده کنیم. این فرمول‌ها را می‌توانیم به همان فرمول‌ها تبدیل کنیم.

در اینجا هم همان تابع آن سیستم را می‌گویند. این طور سیستم را در نظر می‌گیریم که هم گوییم N سیستم یک را در نظر می‌گیریم. می‌توانیم N سیستم یک از حالت کوآنتی یعنی حالتی که سیستم را تعریف می‌کنند برای هر اینها می‌تواند H برای آنهاست $\rightarrow N$ سیستم یک

فقط چیزی را در مورد حالتی که می‌گویند که آیا در رابطه است، یا در رابطه N در حالت سیستم یا یک چنین حالتی دارد. از جمله سیستم یک نوع (۱۴) داده می‌شود که از معادله زیر بدست می‌آید:

$$H\psi = i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t}$$

این قسمت زمان آن جدا شود یعنی است ψ باید بر حسب تغییر مشخص شود به غیر حسب طول زمان، که آن بر حسب است. گسسته باشد یا پیوسته، که ما به آن اعداد کوآنتی می‌گوئیم که بعد از مشخص می‌کند. مثلاً برای حالت کوآنتی بر حسب و بر حسب پیوسته (مختوم) است، برای زمان آن بر حسب همان N ها هستند برای آن هم در آن دو

هم $\frac{d}{dt} \langle \psi^k | \psi^k \rangle = \frac{d}{dt} \langle \psi^k | \psi^k \rangle$ است. یعنی اینکه $\langle \psi^k | \psi^k \rangle$ نسبت به سیستم برابر صفت ψ^k که توصیف کنیم، آنرا بر صفت a_n^k که توصیف کنیم، از تعریف a_n^k که $|a_n^k(t)|^2$ یعنی احتمال اینکه سیستم K - n (ψ^k) تغییر احتمالاتی دارد، ψ^k تابع موج حالت K با عضو n آن صفت است که داریم، چون K هم تواند از n برود (در صفت ϕ_n باقی است)

احتمال آنکه عضو K - n آن صفت ϕ_n صفت شود $|a_n^k(t)|^2 =$
 توجه کنید که در اینجا ما روی مفهوم احتمالاتی داریم. یک مفهوم احتمالاتی داریم که می‌توانیم آن صفت را صفت کنیم (برای هر صفت یک می‌توانیم آن صفت را صفت کنیم) یک مفهوم احتمالاتی هم اینجا وجود دارد که هر کدام از اعضای آن صفت با یک احتمالی در یک حالت صفت ϕ_n قرار گرفته‌اند.
 پس اینجا روی مفهوم احتمال وجود دارد، در صورتی که قبلاً برای اعضای آن صفت می‌گفتیم این حالت صفت است و با یک تابع صفت ψ^k و فقط یک می‌توانیم آن صفت را صفت کنیم و اینها دو تا مفهوم احتمالاتی دارد.

یعنی که $a_n^k(t)$ را پیدا می‌کنیم و به حالتی علاقه داریم که چیزی که به عنوان صفتی صفت می‌دهیم، صفت می‌دهیم.

نمادگذاری برای $a_n^k(t) = \langle \phi_n | \psi^k \rangle$
 اگر از طرفین رابطه $i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi^k$ بگیریم ϕ_n ها را که سفت از زمان گرفتیم و به رابطه بر می‌گردیم

$$i\hbar \frac{\partial a_n^k}{\partial t} = \langle \phi_n | i\hbar \frac{\partial}{\partial t} | \psi^k \rangle$$

یعنی $i\hbar \frac{\partial}{\partial t} | \psi^k \rangle$ و $H | \psi^k \rangle$ را بر می‌گردانیم

$$i\hbar \frac{\partial a_n^k}{\partial t} = \langle \phi_n | H | \psi^k \rangle = \sum_m \underbrace{\langle \phi_n | H | \phi_m \rangle}_{H_{nm}} \langle \phi_m | \psi^k \rangle$$

$$\Rightarrow i\hbar \frac{\partial a_n^k}{\partial t} = \sum_m H_{nm} a_m^k(t) \quad \textcircled{1}$$

یعنی $\langle \phi_n | H | \phi_m \rangle$ عناصر ماتریس H است که به عنوان H_{nm} می‌نویسند. $a_m^k(t)$ هم که صفت $a_n^k(t)$ است.

یعنی هر سیستم را به سیستم یعنی ψ^k می‌نویسند. رابطه $i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi^k = H \psi^k$ را می‌نویسند. a_n^k ها را به صورت a_n^k می‌نویسند. H_{nm} به صورت یک به صورت H_{nm} می‌نویسند. a_n^k ها را به صورت a_n^k می‌نویسند.

$$\hat{\rho} = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^n | \psi_k \rangle \langle \psi_k | \quad \textcircled{2}$$

یعنی $\hat{\rho}$ به عنوان $\hat{\rho}$ می‌نویسند.

به زودی خواهیم گفت که این عنصر قطری نیست
 بلکه به دلیل عناصر مترسبی برابر صفت Φ_n ها می باشد.

$$\rho_{nm} = \langle \Phi_n | \hat{\rho} | \Phi_m \rangle$$

$$\rho_{nm} = \langle \Phi_n | \hat{\rho} | \Phi_m \rangle \stackrel{②}{=} \frac{1}{n} \sum_K \underbrace{\langle \Phi_n | \Psi_K \rangle}_{a_n^K(\Psi)} \underbrace{\langle \Psi_K | \Phi_m \rangle}_{a_m^{*K}(\Psi)} = \frac{1}{n} \sum_K a_n^K(\Psi) a_m^{*K}(\Psi) \quad (*)$$

در $\hat{\rho}$ Trace را حساب می کنیم یعنی n بار روی n بار روی m قرار می دهیم و روی n جمع می کنیم:

$$\text{Tr } \hat{\rho} = \sum_n \frac{1}{n} \sum_K |a_n^K|^2 = \frac{1}{n} \sum_K \left(\sum_n |a_n^K|^2 \right) \quad (3)$$

$\sum_n |a_n^K|^2$ برابر است با جمع این دو صفت که سیستم K در حالت n باشد و چون K از بین
 n مورد بود پس $\frac{1}{K}$ برابر n است و $\frac{1}{n} \sum_K 1$ مساوی یک می شود پس داریم:

$$\boxed{\text{Tr } \hat{\rho} = 1}$$

بنابراین ρ_{nn} یعنی احتمال آنکه سیستم در این سیستم می تواند در هر کدام از حالتها Ψ_K ها باشد و تابع جمع می تواند
 هر کدام از آنها باشد بطور رندوم پس از اینها را انتخاب کند احتمال اینکه در حالت Φ_n باشد ρ_{nn} می شود. البته رندوم
 انتخاب شده با فرض درستی از آنها هست که جمع آن برابر یک می شود.
 با گذر از آن طرف نگاه کنیم، با فرض این فرضیه های سیستم باید احتمال در حالت Φ_n قرار گیرد، چون گفتم بطور رندوم انتخاب
 کنیم، حال جمع تمام این n ها برابر یک باشد چون با فرض هر کدام از سیستمها در بین n ها قرار گرفته اند و ما آنرا حساب
 Φ_n ها با یک داریم.

پس در اینجا بدین روش مفهوم احتمال رو می بینیم، یعنی مفهوم احتمال اینکه هر کدام از اعضا Φ_n آن بین در حالت Φ_n باشد و جمع می
 کنیم بطور رندوم بولیم سیستم در کدام یک از این Ψ^K ها قرار گرفته است.
 این Ψ^K ها که بطور رندوم انتخاب می کنیم، خصوصاً باید احتمالی در حالت Φ_n قرار گرفته است. ρ_{nn} به معنای احتمال این
 است که هیچ از تمام Ψ^K ها را انتخاب می کنیم بطور رندوم، و این Ψ^K رندوم در حالت Φ_n باشد.

* در هر کدام از Ψ^K ها اگر بخواهیم مقدار یک نوسون را حساب کنیم باید مقدار چند است؟ البته به Ψ^K ها حساب کنیم یعنی
 به علاوه آن نوسون ضرب در هر کدام از $|a_n^K|^2$ ها که یک کسری می شود، حال این کسرت در زمانها مختلف یا در K های
 مختلف با هم تفاوت هستند، با فرضی از اینها را دوباره می کنیم این به معنای بیاضی آنست که می شود
 اگر برای یک کسرت کوآنتومی معمولی، مثلاً اگر بخواهیم بولیم مشخصه چند است یا چندم چند است یا هر کدام از این نوسون است
 اندازه پذیر چند هسته کاری که می کنیم این است که آنرا احتمالاً در نظر می گیریم و می گوئیم آنچه که انتظار داریم و می توانست
 باشد، چند است؟ این است: اصفه است.

$$\langle G \rangle = \langle \Psi^K | G | \Psi^K \rangle = \sum G_n |a_n^K|^2$$

توجه کنید $\langle \Psi^K | \Psi^K \rangle = 1$ و G در حالت کلی

این یک مورد است و اگر G یک عملگر باشد، Ψ^K یک حالت ویژه از G باشد، یعنی $G \Psi^K = \lambda \Psi^K$ ، آنگاه $\langle G \rangle = \lambda$.
 یعنی $\langle G \rangle$ برابر با مقدار ویژه λ است. $\sum_n G_n |a_n^K|^2$ را می‌توانیم به صورت $\text{Tr}(\hat{\rho} G)$ بنویسیم و برای محاسبه آن می‌توانیم از رابطه $\rho_{nm} = \langle a_n^K | \rho | a_m^K \rangle$ استفاده کنیم. به عنوان مثال اگر $G = a_n^\dagger a_n$ باشد، $\langle G \rangle = \rho_{nn}$ خواهد بود.

حال که ρ_{nm} به معنی این است که ρ یک عملگر در فضای n بعدی است، ρ_{nm} را می‌توانیم به صورت $\rho_{nm} = \langle a_n^K | \rho | a_m^K \rangle$ بنویسیم. در اینجا ρ یک عملگر در فضای n بعدی است. ρ_{nm} را می‌توانیم به صورت $\rho_{nm} = \langle a_n^K | \rho | a_m^K \rangle$ بنویسیم.

$$\textcircled{*}: \quad i\hbar \dot{\rho}_{nm} = \frac{1}{n} \sum_K i\hbar (a_n^K a_m^{*K} + a_n^K a_m^{*K}) \quad (4)$$

توجه کنید $i\hbar \dot{a}_n^K$ به معنی این است که a_n^K یک عملگر در فضای n بعدی است.

$$\textcircled{1}: \quad i\hbar \frac{\partial a_n^K}{\partial t} = \sum_m H_{nm} a_m^K(t)$$

$$\Rightarrow i\hbar \dot{\rho}_{nm} = \frac{1}{n} \sum_K \left\{ \sum_l H_{nl} a_l^K a_m^{*K} - \sum_l a_n^K H_{ml}^* a_l^{*K} \right\} \quad (5)$$

برای نوشتن عبارت اول رابطه فوق از معادله (4) استفاده می‌کنیم:

$$i\hbar \dot{a}_n^K = \sum_l H_{nl} a_l^K$$

برای نوشتن عبارت دوم رابطه فوق از معادله (4) استفاده می‌کنیم:

$$-i\hbar \dot{a}_m^{*K} = \sum_l H_{ml}^* a_l^{*K}$$

ملاحظه کنید که $H_{ml}^* = H_{lm}$ است.

$$H_{ml}^* = (H^\dagger)_{lm} = H_{lm}$$

با استفاده از معادله (5) و (4) می‌توانیم $i\hbar \dot{\rho}_{nm}$ را به صورت زیر بنویسیم:

$$i\hbar \dot{\rho}_{nm} = \sum_l \left\{ H_{nl} \frac{1}{n} \sum_K a_l^K a_m^{*K} - \frac{1}{n} \sum_K a_n^K a_l^{*K} H_{ml}^* \right\} = \sum_l H_{nl} \rho_{lm} - \rho_{nl} H_{lm}$$

$$\Rightarrow i\hbar \dot{\rho}_{nm} = (H\rho)_{nm} - (\rho H)_{nm} = [H, \rho]_{nm} \Rightarrow i\hbar \dot{\rho}_{nm} = [H, \rho]_{nm}$$

از جمله p_{nm} شروع کرده و به جمله $[H, p]_{nm}$ رسیدیم، پس:

$$\dot{p} = \frac{1}{i\hbar} [H, p] \quad (6)$$

معادله فوق نسبت به معادله \dot{q} است، چون معادله \dot{q} هم به این صورت بود:

$$\frac{dq}{dt} = [H, q]_{P.B.}$$

که تعریف پواسون براکت به این صورت بود:

$$[H, p]_{P.B.} = \sum_i \frac{\partial H}{\partial q_i} \frac{\partial p}{\partial p_i} - \frac{\partial H}{\partial p_i} \frac{\partial p}{\partial q_i}$$

که در معادله (6) تنها پواسون براکت به $\frac{1}{i\hbar}$ جایگزین شده است.

این نکته فیزیکی است که نه فقط در اینجا بلکه در ضمیمه چهارم نیز به کار بریم. در این سیستم ψ کوانتومی را به کوانتومی تبدیل کنیم. این مطلب را در مکانیک کوانتومی دیده بودیم:

$$[\dots]_{P.B.} \rightarrow \frac{1}{i\hbar} [\dots]$$

آنگاه این کار را برای معادلات حرکت انجام دهیم، از معادله کوانتومی در تصویر هایزنبرگ به همان معادلات کلاسیکی می‌رسیم.

بنابراین ψ به طور صریح وابسته به زمان باشد، است راست معادله کوانتومی یک جمله $\frac{\partial \psi}{\partial t}$ خواهد داشت. ψ در بدست آوردن رابطه (6) ما را بطور صریح وابسته به زمان نمی‌کنیم، در این مورد هم داریم ψ^k می‌گذاریم.

حال بررسی می‌کنیم ψ را به گونه‌ای که تعریف کردیم چه فایده‌ای دارد.

همان طور که گفتیم سیستم در زمان t مختلف در ψ^k های مختلف قرار دارد، در یک زمان در ψ^k ، در زمان بعدی در ψ^k و ... است:

$$|\psi^1\rangle, |\psi^2\rangle, \dots, |\psi^k\rangle$$

گفته شد ψ داریم که هر کدام متوسط آن به حساب می‌کنیم. شرط آن سه گانه است ψ را بصورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\langle G \rangle = \frac{1}{n} \sum_k \langle \psi^k | G | \psi^k \rangle \quad (7)$$

تعداد ψ^k های ψ را برای هر کدام از حالتها حساب کرده، همه را با هم جمع می‌کنیم و بر تعداد کل حالتها تقسیم می‌کنیم و این یعنی متوسط آن سه این سیستم.

$\langle G \rangle$ چیزی نیست که معمولاً در آماره از آن استفاده می‌کنیم، سیستم در لحظه در یکی از این حالتها است، همه اینها را با هم جمع کرده و بر تعداد حالتها تقسیم می‌کنیم.

همانطور که

$$E^k = E$$

$$H\psi^k = E\psi^k = \sum a_n^k E_n |\phi_n\rangle$$

این E را از یکجا بدست می آوریم ؟
E را از رابطه زیر بدست می آوریم ، در واقع طرفین رابطه فوق را در یک ψ^k ضرب می کنیم و چون ϕ_n ها بر یکدیگر عمود هستند پس $\langle \phi_m | \phi_n \rangle$ برابر δ_{nm} می شود :

$$\Rightarrow E = \sum E_n |a_n^k|^2$$

همانطور که از این معادله E را بدست می آوریم ، چون آن مثل یک عدد ثابت است و البته لزوماً بزرگتر از a_n ها در E وجود داشته باشد ، ممکن است بعضی از آنها صفر باشند و پس آنرا وجود داشته باشد ، عبارات هم اینها با احتمال یک قرار گرفته باشند .

این مقدار صفر است که بعد از معادله فوق وجود داشته باشد را Γ گذاشتیم و حاصله حاصله یعنی اینها چند تا از اینها وجود دارند ، و از این Γ چندتا در E ضمیمه هستند ، در واقع δ_{nm} در Γ

این δ_{nm} ها حاصله حاصله سیستم هستند که بیانگر آنرا این است که اینها در واقع احتمال است $\frac{1}{\Gamma}$ از اینها ضمیمه هستند پس احتمال هر یک $\frac{1}{\Gamma}$ چون این احتمال این بود که در یک سیستم را با ϕ_n بگیریم

تعریف ρ_{mn} این بود که اینطور بدست می آید از این سیستم را با ϕ_n بگیریم ، حاله می گیریم که تعداد اینها Γ باشد ، این احتمال $\frac{1}{\Gamma}$ می شود . ممکن است بعضی از آنها وجود نداشته باشند که می گوئیم امکان آن صفر است .

توجه کنید تمام اینها فقط و فقط به Γ از اینها وجود داشته باشد ، یعنی از این تمام اینها فقط به Γ از اینها وجود داشته باشد ، به آن آن پس حاصله می گیریم .

$$\rho_n = \begin{cases} 1 & n=m \\ 0 & n \neq m \end{cases} \quad * \text{ آن پس خاص}$$

$$\rho_n = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma} & n \in \Gamma \\ 0 & n \notin \Gamma \end{cases} \quad * \text{ آن پس آمیخته}$$

اینکه بدانیم این خاص در حالت $n=m$ ، $\rho_{nn} = 1$ ، به این علت است که فقط به Γ از اینها قابل دسترسی است . حرکات از حالت تمام اینها حاصله حاصله در دسترس نباشد ، جز این ، به آن آن پس آمیخته می گوئیم .
توان این خاص باشد ، برای ρ یک شرط ویژه ای هم پیدا می شود . در آن پس خاص ρ به این صورت است :

$$\hat{\rho} = |\phi_m\rangle \langle \phi_m| \quad \text{توان این پس خاص باشد}$$

ρ_n یعنی اثرگذار بودن یعنی از اعضای آن بین (انتی-سکیم) این عنصر در حالت Φ_n قرار گرفته است و که Φ_n یعنی:

$$H|\Phi_n\rangle = E_n|\Phi_n\rangle$$

یعنی Φ_n ویژه تابع انرژی باشد و انرژی سیستم E_n باشد. در حالت کلیتاً احتمال انرژی یک سیستم E_n است $e^{-\beta E_n}$ در T است بود.

از $C e^{-\beta E_n}$ این است ρ_n یعنی اثر سیستم بطور دقیق انتخاب بود بیان احتمال سیستم در حالت Φ_n قرار گرفته است یا اینکه انرژی آن E_n است. این ρ_n را بصورت زیر می نویسیم (ضرب C هم از این بدست می آید که می گوئیم با فرود سیستم انرژی از انرژی صاف است.)

$$\rho_n = C e^{-\beta E_n} = \frac{e^{-\beta E_n}}{\sum_n e^{-\beta E_n}} = \frac{1}{Q_N} e^{-\beta E_n} \quad \text{I}$$

بنابراین عنصر ρ (ماتریس) بصورت زیر می شود:

$$\hat{\rho} = \sum_n |\Phi_n\rangle \langle \Phi_n| \rho_n \quad \text{II}$$

$\hat{\rho}$ را بصورت ماتریس می بینیم چون هم فضا هم فضا قطره باشد. ρ_{nm} ها $\hat{\rho}$ با اعداد یکم فضا هم به قطره می شود.

$$\text{I, II} \Rightarrow \hat{\rho} = \sum_n \frac{1}{Q_N} e^{-\beta E_n} |\Phi_n\rangle \langle \Phi_n| = \frac{e^{-\beta H}}{Q_N} \sum_n |\Phi_n\rangle \langle \Phi_n| \quad \text{III}$$

به طبع اگر عنصر A روی $|\alpha\rangle$ اثر کند و به طور ویژه مقدار در همان $|\alpha\rangle$ قرار می آید از A هم روی $|\alpha\rangle$ اثر کند، به این صورت می توان نوشت:

$$A|\alpha\rangle = a|\alpha\rangle$$

$$f(A)|\alpha\rangle = f(a)|\alpha\rangle$$

$$H|\Phi_n\rangle = E_n|\Phi_n\rangle \xrightarrow{\text{توان گرفتن}} e^{-\beta H} |\Phi_n\rangle = e^{-\beta E_n} |\Phi_n\rangle \quad \text{این عمل را هم می توانیم کرد (برعکس)}$$

از رابطه I

$$Q_N = \sum_n e^{-\beta E_n} = \sum_n \langle \Phi_n | e^{-\beta H} | \Phi_n \rangle = \text{Tr} e^{-\beta H} \quad \text{IV}$$

$$\hat{\rho} = \frac{e^{-\beta \hat{H}}}{Q_N} = \frac{e^{-\beta \hat{H}}}{\text{Tr} e^{-\beta \hat{H}}} \quad \text{V}$$

$\sum_n |\Phi_n\rangle \langle \Phi_n|$ عملگر است این $\hat{\rho}$ می شود:

پس $\langle B \rangle = \text{Tr}(\hat{\rho} B)$ $\langle B \rangle = \frac{\text{Tr}(B e^{-\beta H})}{\text{Tr} e^{-\beta H}}$

این سؤال در مورد ذرات است چون ممکن است درجه آزادی a و a^\dagger را تعیین کنیم و ببینیم که در کجا می توانیم استفاده کنیم.

$$\hat{\rho} = \frac{e^{-\beta(\hat{H} - \mu\hat{N})}}{D(\mu, V, T)}$$

بنابراین $\hat{\rho}$ برایتان به کار می آید که قبلاً در مورد آن صحبت کرده ایم.

که D به صورت زیر است:

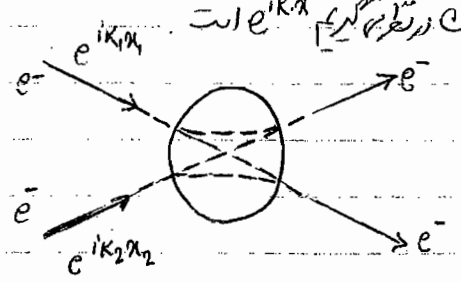
$$D = \sum_{r,s} e^{-\beta(E_r - \mu N_s)} = \text{Tr } e^{-\beta(\hat{H} - \mu\hat{N})}$$

فردا می بینیم که می توانیم به این صورت است که می توانیم یک ذره را از بین بگیریم و یک ذره هم برآوریم این Ψ_k را داشته باشیم و می توانیم آنرا بر حسب یک سری توابع حالت بنویسیم.

$$\Psi_k = \sum a_n |\Phi_n\rangle$$

حالت Φ_n فعلی یک ذره نیست بلکه می توانیم این است که وقتی Ψ_k را بر حسب یک سری a_n و Φ_n بنویسیم (همه Φ_n ها ذره $(1, 2, \dots, k)$ هر کدام از اینها می توانند Φ ای داشته باشند، آن موقع Φ_n ما اینها می کشیم که در یک ذره است. از دو ذره در حالت ذره نه در حالت ذرات و با یکدیگر، ممکن است تفاوت باشد.

بنابراین معروف آن هم این سؤال است که دو ذره در یک حالت می آیند و یک بر هم کشش با هم انجام دهند (یعنی برایشان بگویند) هر دو



این حالتها ذره k_1 می باشند، اگر اینها ذره k_2 باشند، تابع موجی که برایشان در نظر می گیریم e^{ik_1x} است (تابع موجی که تابع موج را بنویسیم) و برای ذره k_2 است e^{ik_2x} است. این دو ذره با هم بر هم کشش می کنند و بنابراین در حالت ذرات می بینیم و حالت Ψ_k را داریم.

از کجا می بینیم که کدام از دو حالت با رخ داده است؟

چون اگر ذره k_1 و k_2 در یک حالت باشند و در یک حالت باشند و در یک حالت باشند و در یک حالت باشند (با هم هم در یک حالت باشند) می بینیم.

ما هم می بینیم که k_1 که با k_2 از کجا می بینیم بعد از بر هم کشش هم k_1 است یا نه، ممکن است داشته باشیم e^{ik_2x} یعنی اگر ذره k_1 با k_2 باشد (در فرج) و اگر ذره k_1 با k_2 باشد، چون این برای ما قابل تشخیص نیست می گوئیم ترکیب خطی از اینها می توانیم داشته باشیم.

$$e^{ik_1x} e^{ik_2x} \xrightarrow{\text{ترکیب خطی}} |12\rangle = C_1 e^{ik_1x} e^{ik_2x} + C_2 e^{ik_2x} e^{ik_1x}$$

یعنی $|12\rangle$ این تابع موج خطی از اینها می بینیم، چون این دو تابع موج با هم می آیند.

این طبیعت هم وجود ترکیب خطی را نشان می دهد که ما می بینیم. در واقع به عنوان تابع موج می بینیم.

بکار می‌بریم، که طبیعت ازین تا ترکیب‌های خطر که ممکن است ناشی بکند، فقط دو وجه را انتخاب می‌کند، یا اینکه بقدرتند یا با بقدرت و عقبتند. این همان چیز است که همیشه وقتها به عنوان اصل طرد بکار می‌بریم. بعد از آن خواهیم دید که این چه جور است به اصل طرد دیگرش شود.

به نوعی ازین تا ترکیب‌های مختلف، این شکل وجود دارد:

$$\frac{1}{\sqrt{2}} (|K_1\rangle_1 |K_2\rangle_2 \pm |K_1\rangle_2 |K_2\rangle_1)$$

بالتر از این بر حسب ترتیب: $|K_1\rangle_1 |K_2\rangle_2$ ← K_1 مال زره یک و K_2 مال زره دو

یا $|K_1\rangle_2 |K_2\rangle_1$ ← K_1 مال زره دو و K_2 مال زره یک

که ترکیب فوق خواهد بود، ترکیب فوق یک حالت ساده است و برای زره است.

اگر تولا فرات بگذریم، مثل این عبارت پیچیده تر می‌شود، در واقع باید عکس‌ها هم پیدا کنیم که حالتها متعادل یا حالتها هم با هم متعادل باشد (عکس تعویض) که در حقیقت آنکه به آن خواهیم پرداخت.

در حالتی که فقط می‌زنیم برای اینکه از این بگذریم که عکس‌ها برعکس کنیم، فقط یک زره را در نظر می‌گیریم، هر چند این مسئله یک مسئله آماده نمی‌شود (چون در مسئله آماده تعداد ذرات ما باید همیشه صاف زیاد باشد) ولی در آن این فرمول بندی را برای آن بکار برد، که حالتی که ما معمولاً می‌زنیم زره آزاد و سازه است، از این به بعد یک شکل دیگر را هم می‌توانیم به راحتی زد و آن هم شکل اسپین است (سیستمی که دو حالت) این شکل ما به دو حالت می‌تواند و می‌توانیم این شکل را هم وارد کرد یعنی از این به بعد حالتی که می‌زنیم یا برای سیستمی اسپین است یا ذرات آزاد یا توانا.

جلسه هفدهم: ۱۴، ۹، ۸۵

جلسه گذشته در مورد آمار کوانتومی صحبت کردیم و ما در آن (عکس) خطی را معرفی کردیم و دیدیم که عناصر قطری عکس خطی مفهوم اسپین پیدا می‌کند و می‌توانیم حرکتی را هم در این صورت trace حاصل می‌شود آن عکس در عکس خطی نسبت به ما داریم.

در این جلسه چند سؤال در این مورد می‌زنیم. این سئالی که می‌خواهیم بزنیم یک آنکه در یک مدار مغناطیسی است که بعداً که خواهیم دید که اینها را زیاد کنیم آن موقع اینکه این آنکه باشد یا ذره دیگری باشد، تفاوت خواهد کرد، در این مورد بعداً توضیح خواهیم داد.

سؤال: آنکه در مدار این مغناطیسی

وقتیکه ذره با اسپین در یک مدار مغناطیسی قرار گیرد، عکس خطی آن به صورت زیر است که M مکان مغناطیسی این ذره است که با رابطه زیر داده می‌شود:

$$H = -\vec{M} \cdot \vec{B}$$

$$\vec{M} = e\vec{g} \vec{S}$$

بسیار به این دلیل است که این حاصلی از این است که به صورت $S = \frac{1}{2} \hbar \sigma$ به نظر می آید. برای این $\frac{1}{2}$ می توانیم یک سیستم دو حالتی داشته باشیم.

این حالتی را در نظر بگیریم که در صورت $S = \frac{1}{2} \hbar \sigma$ به نظر می آید که $\mu_B = \frac{e \hbar}{2mc}$ است که برای این حالتی نوشته شود.

حالت: $S = \frac{1}{2} \hbar \sigma$

$$H = -\mu_B B \cdot \sigma, \quad \mu_B = \frac{e \hbar}{2mc}$$

در این حالت $S = \frac{1}{2} \hbar \sigma$ به نظر می آید که این حالتی را در نظر بگیریم که $\mu_B = \frac{e \hbar}{2mc}$ است.

اگر فرض کنیم میدان مغناطیسی در جهت \hat{K} باشد در H فقط σ_z ظاهر می شود.

$$\text{if } \vec{B} = BK \rightarrow H = -\mu_B B \sigma_z$$

در این حالت $\mu_B = \frac{e \hbar}{2mc}$ به نظر می آید.

$$\rho = \frac{e^{-\beta H}}{\text{Tr} e^{-\beta H}}$$

با توجه به این که ρ یک عملگر است باید به هر دو حالتی $| \pm \rangle$ اعمال کنیم. در این حالت ρ یک عملگر است باید به هر دو حالتی $| \pm \rangle$ اعمال کنیم. در این حالت ρ یک عملگر است باید به هر دو حالتی $| \pm \rangle$ اعمال کنیم.

$$\sigma_z | \pm \rangle = \pm | \pm \rangle$$

بنابراین که باید به این عملگر ρ اعمال کنیم. این عملگر ρ را می توانیم به این شکل بنویسیم:

$$\langle n | e^{-\beta H} | m \rangle \quad (1)$$

$$| n, m \rangle = | \pm \rangle$$

در این حالت ρ یک عملگر است باید به هر دو حالتی $| \pm \rangle$ اعمال کنیم.

$$e^{-\beta H} | \pm \rangle = e^{\mp \beta (-\mu_B B)} | \pm \rangle$$

بنابراین که باید به این عملگر ρ اعمال کنیم. این عملگر ρ را می توانیم به این شکل بنویسیم:

$$e^{-\beta H} = \begin{pmatrix} e^{\beta \mu_B B} & 0 \\ 0 & e^{-\beta \mu_B B} \end{pmatrix}$$

این یک مورد ویژه است که در آن جفت‌های مترسک با یکدیگر با هم می‌زنند که اینها شد 2x2 نو. مترسک 4x4. 5x3
و به ایند که هر دو وقت هم های مربوط به آنرا را با هم ترکیب.

در مثال دیگر خواهیم دید که در صورتی که مترسک‌ها با هم می‌زنند به طوری که در مثال بالا داریم گستره نیستند. مثلاً 12
13. و نیست، بلکه trace را با به صورت پورته حساب کنیم.

مثال: ذره در جعبه

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2$$

بزرگ‌نمایی که در اینجا L ذره داریم، یک ذره داریم در جعبه L به اندازه L .

$$\rho = \frac{e^{-\beta H}}{\text{Tr } e^{-\beta H}}$$

در مثال قبل چون H به صورت یک مترسک بود، اما اینجا H به صورت ∇^2 به صورت یک مترسک
نمی‌باشد.

اینجا در جعبه قرار می‌دهیم و از این به بعد فضای معین می‌کنیم. $H \Phi_E$ را در جعبه های انرژی می‌کنیم، $E \Phi_E$
مانند که $E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$ و $\Phi_E = \frac{1}{L^{3/2}} e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}}$ است.

$$H \Phi_E = E \Phi_E \quad ; \quad E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} \quad , \quad \Phi_E = \frac{1}{L^{3/2}} e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} \quad \textcircled{I}$$

\vec{k} هم از اینهاست گستره است، بردار \vec{k} به صورت زیر است،

$$\vec{k} = \frac{2\pi}{L} (n_x, n_y, n_z)$$

هر کدام از Φ_E ها را می‌توانیم با K_x, K_y, K_z حساب کنیم:

$$|\Phi_E\rangle = |K_x, K_y, K_z\rangle$$

که در مثال مکان به صورت $\Phi_E = \frac{1}{L^{3/2}} e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}}$ نوشته می‌شود. و وقتی می‌خواهیم در مثال مکان به این صورت نوشته شود یعنی
جای هر ذره را مشخص است که \vec{r} چیست. این \vec{r} بر چه است که هر ذره در این فضای L^3 را می‌تواند قرار
گیرد (گستره است)

اما برای یک ذره آزاد یعنی ذره ای که در یک جعبه قرار گرفته است بدون برهم‌کنش، برای ما ضمیمه ثابت است که هر ذره در
جعبه ای قرار گرفته است و احتمال این را پیدا کنیم که هر ذره در چه انرژی‌های قرار گرفته است، یعنی این مورد را ما حساب می‌کنیم
است که بدانیم احتمال اینکه هر ذره در صرفه \vec{r} باشد، چقدر است.

یعنی اگر m برابر با n انرژی داریم، عناصر قطری آن یعنی $\langle n | H | n \rangle$ احتمال است این ذره در هر کدام از این انرژی‌ها هست یا
 n_x, n_y, n_z ها در حالت مختلف باشند چقدر است. اگر m برابر با n است، عناصر قطری آن می‌شود احتمال اینکه این

ذره در صرفه \vec{r} باشد چقدر است

پس $\langle n | e^{-\beta H} | n \rangle$ را حساب می‌کنیم این در واقع یعنی عناصر مترسک مترسک جفتی صرف نظر از این است که این ثابت

این $\text{Tr } e^{-\beta H}$ است و باید حساب کنیم.

از آنجایی که تابع زوج، فقط می‌توانیم از $\langle r | e^{-\beta H} | r' \rangle$ (برای r و r' هم‌نام) حساب کنیم.

$$\langle r | e^{-\beta H} | r' \rangle = \sum_{E, E'} \underbrace{\langle r | E \rangle}_{\phi_E(r)} \underbrace{\langle E | e^{-\beta H} | E' \rangle}_{\phi_{E'}^*(r')} \quad \text{بنا بر نسبت ابرنمایی}$$

$$H | E \rangle = E | E \rangle$$

$$\Rightarrow \langle r | e^{-\beta H} | r' \rangle = \sum_{E, E'} \phi_E(r) e^{-\beta E} \underbrace{\langle E | E' \rangle}_{\delta_{E, E'}} \phi_{E'}^*(r') = \sum_E \phi_E(r) \phi_E^*(r') e^{-\beta E} \quad \text{II}$$

I - II

$$\Rightarrow \langle r | e^{-\beta H} | r' \rangle = \frac{1}{L^3} \sum_K e^{-\beta \frac{\hbar^2 k^2}{2m}} e^{iK \cdot (r-r')} \quad \text{III}$$

$\frac{1}{3}$ یعنی عکس کل جسمی که اشغال می‌شود.

کار سنتی نیست که $\frac{1}{L}$ به اندازه کافی بزرگ باشد، در رابطه بالا می‌توانیم Δn قرار دهیم چون K ها n رابطه دارند و می‌توانیم Δn را ΔK بنویسیم.

$$\lim_{V \rightarrow \infty} \frac{1}{V} \sum_K \xrightarrow{\text{تبدیل به انتگرال}} \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3K$$

برای بدست آوردن رابطه فوق باید از $\vec{K} = \frac{2\pi}{L} (n_x, n_y, n_z)$ شروع کنیم، ΔK یا $\frac{2\pi}{L} \Delta n$ می‌توانیم بنویسیم. Δn می‌تواند $\frac{L}{2\pi} \Delta K$ باشد، یعنی در حد هم به نسبت $\Delta K_x, \Delta K_y, \Delta K_z$ می‌توانیم بنویسیم.

$$V \rightarrow \infty \text{ در III} \rightarrow \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3K e^{-\beta \frac{\hbar^2 k^2}{2m}} e^{i\vec{K} \cdot (\vec{r}-\vec{r}')} \quad \text{IV}$$

حساب این انتگرال ضمیمه کار سختی نیست. $\vec{K} \cdot (\vec{r}-\vec{r}')$ را می‌توانیم $K(r-r) \cos \theta$ و روی θ آن هم انتگرال بگیریم.

$$\Rightarrow \langle r | e^{-\beta H} | r' \rangle = \frac{1}{(2\pi)^2} \int K^2 dK e^{-\beta \frac{\hbar^2 K^2}{2m}} e^{iK(r-r) \cos \theta} d\cos \theta$$

انتگرال روی θ آسان است، انتگرال روی K هم به نسبت آسان است، چون K هم $\frac{2\pi}{L} n$ است و می‌توانیم Δn را ΔK بنویسیم.

$$\langle r | e^{-\beta H} | r' \rangle = \left(\frac{m}{2\pi\beta\hbar^2} \right)^{3/2} e^{-\frac{m}{2\beta\hbar^2} |r-r'|^2} \quad \text{V}$$

به یک نکته باید توجه کنیم اگر $\beta = \frac{t}{\hbar}$ می‌گذاریم و $\langle r | e^{-\frac{i\hbar}{\hbar} H} | r' \rangle$ را حساب کنیم، این به رابطه $\langle r | e^{-iHt/\hbar} | r' \rangle = K(r, r'; t)$ می‌انجامد.

$$\langle r | e^{-\frac{i\hbar}{\hbar} H} | r' \rangle = K(r, r'; t)$$

این $K(r, r'; t)$ همان تابع گرین است.

این کار به دست خنثی میسر می آید. در واقع انظار فقط می آید β نوشته می شود. ضمیر از حساب می که در این اینجا
 به رسم این من را دارد که این اثر الهی، اثر الطبی، حقیقت هستند. در وقت بدست می آید ولی در مکانیک کوانتوم نیست
 باید مراقب آن اثر الی گیری که با اینم و ضعیف است به خصوص ضعیف رابطه ای که در بیان بدست آوریم و اینم و اینم و اینم
 فقط ضعیف کفایت، بنا بر این ضعیف از روشی که در مکانیک کوانتوم یکا در رسم β روشی است که در مکانیک کوانتوم
 استفاده می کنیم. در واقع این روش در مکانیک کوانتوم که اینها گرفته شده اند.

حال اگر $\text{Tr}(e^{-\beta H})$ را بنویسیم، یعنی عناصر روی خط $e^{-\beta H}$ را حساب کنیم ($r=r'$) و در روش r
 جمع می کنیم و در این r پیوسته است. جمع در آن بصورت یک اثر الی ظاهر می شود.

$$\text{Tr} e^{-\beta H} = \int d^3 r \langle r | e^{-\beta H} | r \rangle$$

اگر در رابطه (۱۰) $r=r'$ قرار دهیم، \exp برابر یک می شود و $\left(\frac{m}{2\pi\beta\hbar^2}\right)^{3/2}$ هم به دست می آید و از اثر الی خارج می شود
 و $\int d^3 r$ هم یعنی کل همین است که این ذره در آن قرار گرفته است.

(۱۰)

$$\langle r | e^{-\beta H} | r' \rangle = \left(\frac{m}{2\pi\beta\hbar^2}\right)^{3/2} e^{-\frac{m}{2\beta\hbar^2} |r-r'|^2} \underset{r=r'}{=} \left(\frac{m}{2\pi\beta\hbar^2}\right)^{3/2}$$

$$\Rightarrow \text{Tr} e^{-\beta H} = \int d^3 r \langle r | e^{-\beta H} | r \rangle = \left(\frac{m}{2\pi\beta\hbar^2}\right)^{3/2} \int d^3 r = V \left(\frac{m}{2\pi\beta\hbar^2}\right)^{3/2} \quad (۱۱)$$

$\langle r | p | r \rangle$ یعنی حرکت از عناصر ماتریس $e^{-\beta H}$ است که حساب می کنیم، $\langle r | p | r \rangle$ یعنی
 حساب می کنیم (۱۱) که اگر $r=r'$ قرار دهیم، فقط $\left(\frac{m}{2\pi\beta\hbar^2}\right)^{3/2}$ باقی می ماند که باید آنرا تقسیم بر $\text{Tr}(e^{-\beta H})$ کنیم
 که در این صورت $\left(\frac{m}{2\pi\beta\hbar^2}\right)^{3/2}$ ها در صورت و خارج با هم می نزنند و فقط $\frac{1}{V}$ باقی می ماند.

(۱۰)، (۱۱)

$$\langle r | p | r \rangle = \frac{1}{V} \quad (۱۲) \rightarrow \text{مقدار اتمال}$$

و به لحاظ مفهومی این یعنی اثر از این آن است که اینها قرار گرفته است، این ذره در مکانهای مختلف، در مکانهای مختلف قرار گرفته است
 (اینها را بصورت transparency می نامیم)، در مکان (در نقطه ارتعاش) ذره باید احتمالاً قرار گرفته
 است که این احتمال $\langle r | p | r \rangle$ است. و یعنی احتمال اینکه در مکان r قرار بگیرد $\frac{1}{V}$ است که باید
 است و در اصل احتمال قرار گرفته است و بیشتر به هم دارد. اثر روی تمام مکانها هم داریم، (ذره بلاغوه یک جایی قرار گرفته است)
 یک می شود و این همان چیزی است که قبلاً هم یکبار در رسم β ، احتمال اینکه ذره آزاد در نقطه ای قرار بگیرد
 برای هر ذره $\frac{1}{V}$ است و احتمالاً $\frac{1}{V}$ را یک بر هم می نزنیم پس $\langle r | p | r \rangle = \frac{1}{V}$ باقی می ماند که قبلاً در تقسیم
 استفاده کردیم.

تخمین صواب ترش جمله $\langle r | \rho | r' \rangle$ است. چنین چیزی از حد سبب و ظهور نداشت. این جمله بصورت زیر است:

$$\langle r | \rho | r' \rangle = \frac{1}{V} e^{-\frac{m}{2\beta \hbar^2} (r-r')^2} \quad \text{(گوشه است)} \quad \text{VII}$$

$\langle r | \rho | r' \rangle$ را احتمال گذار از r' به r در یک لحظه t تعبیر می‌کنیم. چنین چیزی در مکانیک کلاسیک نداریم و از این نقطه به نقطه دیگر در یک لحظه t نمی‌توانیم برویم، ولی در مکانیک کوانتوم می‌توانیم (راشته باشیم). در مکانیک کوانتوم باید احتمال در هر جایی می‌تواند قرار بگیرد که این احتمال با تابع گوسی فوق داده می‌شود.

در T به سمت بی نهایت برود، باید اثرات کلاسیک ظهور بیابند و اثرات کوانتوم نماند. اگر $T \rightarrow \infty$ برود، یعنی $\beta \rightarrow 0$ یا هم‌توان گفت $\hbar \rightarrow 0$ برود. برای حذف اثرات کوانتوم هم‌توان گفت \hbar به سمت صفر برود، در این صورت $(r-r')^2$ برابر $-\infty$ می‌شود و \exp به توان $-\infty$ برابر صفر می‌شود البته $\frac{-m}{2\beta \hbar^2} (r-r')^2$ به سمت بی نهایت می‌شود و هم‌توان \hbar را در آنجا که رابط VII را با \hbar در آنجا که $\hbar \rightarrow 0$ می‌شود.

$$T \rightarrow \infty \quad \beta \rightarrow 0 \quad \hbar \rightarrow 0 \quad \Rightarrow \langle r | \rho | r' \rangle = \frac{1}{V} e^{-\frac{m}{2\beta \hbar^2} (r-r')^2} = \delta(r-r') \quad \text{VII}$$

یعنی در هر لحظه t می‌تواند فقط در همان مکان r باشد یعنی کاملاً جایز نباشد. اما رابط VII می‌گوید این احتمال کاملاً گوسی توزیع شده است، هر چند فاصله r و r' بیشتر باشد (فاصله دو نقطه بیشتر باشد) احتمال اینکه در یک لحظه در r و r' باشد، کمتر و کمتر می‌شود. این یک پیام کلیدی کوانتوم مکانیک است و اصلاً طبع سبب نیست و تعبیر صحیح برای آن نمی‌توانیم داشته باشیم.

$\langle r | \rho | r' \rangle$ مورد جدیدی است که فقط در تعبیر کوانتوم و ظهور دارد و نکته آن هم این است که این در یک لحظه است نه اینکه زمان بگذرد.

گفتند که باید بدانیم چرا صواب کردن انرژی است. باید از این $\text{Tr}(H\rho)$ حساب کنیم. یک راه کرد که گویان این است که نود و نه برآید. البته از این $\text{Tr}(H\rho)$ حساب کنیم یا به $\text{Tr}(H\rho)$ حساب کنیم. این $\langle r | \rho | r' \rangle$ را حساب کنیم و ρ را حساب کنیم. یعنی بصورت زیر حساب کنیم.

$$\bar{E} = \langle H \rangle = \text{Tr}(H\rho) \stackrel{\text{راه کرد گویان}}{=} \int d^3r \langle r | H \rho | r \rangle = \iint d^3r d^3r' \underbrace{\langle r | H | r' \rangle}_{\rho_{rr'}} \underbrace{\langle r' | \rho | r \rangle}_{\frac{\hbar^2}{2m} \sigma^2}$$

$$\Rightarrow \bar{E} = \iint d^3r d^3r' \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \sigma^2 \right) \delta(r-r') \rho_{rr'}$$

برای $\rho_{rr'}$ رابط فوق باید از ρ به $\rho_{rr'}$ تبدیل کنیم.

$$\langle H \rangle = \frac{\text{Tr} (H e^{-\beta H})}{\text{Tr} e^{-\beta H}} = - \frac{\partial}{\partial \beta} \ln (\text{Tr} e^{-\beta H}) = \frac{3}{2} kT \quad \text{X}$$

(VII) $V \left(\frac{m}{2\pi\beta\hbar^2} \right)^{3/2}$

چیزی که اینجا هست این است که وقتی میبینیم انرژی را حساب می‌کنیم، همان تعدادی بدست می‌آید که از روابط کلاسیکی بدست می‌آید. در روابط کلاسیکی برای یک ذره همین $\frac{3}{2} kT$ بدست می‌آید. اما جایی که در روابط کلاسیکی می‌بینیم، یعنی آنهایی که اثرات کوانتومی ظاهر می‌شود، دیگر لزوماً این اتفاق نمی‌افتد. حتی اگر کوانتومی مثل انرژی و... باشد می‌توانیم واحد کلاسیکی را بدست آوریم و ببینیم آیا در هر کلاسیکی همان ظاهر می‌شود یا نه. یکی از این دسته از مسائل، مسئله نوسانگر هارمونیک است که وقتی آنرا کوانتومی در نظر بگیریم، همان نوسانگر کلاسیکی و ظهور ندارد یعنی $\hbar \omega$ برای یک نوسانگر هارمونیک یک وجه کاملاً کوانتومی است.

$$E_n = (n + \frac{1}{2}) \hbar \omega$$

همه توان گفت در حد n های خیلی بزرگ همین است همان حد کلاسیکی بود و باید که $n \hbar$ مقادیر خیلی بزرگ $\hbar \omega$ یا $\frac{1}{2} \hbar \omega$ هیچ کاری نمی‌توانیم بکنیم، یعنی $\hbar \omega$ در رابطه E_n یک وجه کاملاً کوانتومی در سیستم ما است.

زیر ذره آزاد چنین چیزی وجود ندارد و $H = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2$ همان $\frac{p^2}{2m}$ است که فقط در $H = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2$ آنرا کوانتومی می‌توانیم دید چیزی اضافه کوانتومی در آن وجود ندارد.

نوسانگر هارمونیک از یک جهت دیگر هم برای ما مهم است و آن اینکه بسیاری از مدل‌هایی که برای حالتات، فوتون‌ها و انواع دیگر ذرات در نظر می‌گیریم، مدل نوسانگر هارمونیک است و در آن است که یک بار هم که رفته آنرا بصورت کوانتومی برآیند ذره ببینیم و بعد ببینیم وقتی تعداد ذرات زیاد شود، چه می‌شود در آن بود و خواهد آمد.

دوباره در همین مسئله این نکته را خاطر نشان کنیم که وقتی آنرا در رابطه با مکانیک کوانتومی می‌براییم ذره هم جایی پیدا می‌کند و ظهور آنرا در این گذار پیدا می‌شود، چیزی که در حالت کلاسیکی وجود ندارد.

مثال: نوسانگر هارمونیک
 اگر بخواهیم نوسانگر هارمونیک را بر سر می‌کنیم، می‌توانیم نوسانگر هارمونیک را بر این صورت با

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1}{2} m \omega^2 x^2$$

البته می‌توانیم چون می‌توانیم نوسانگر هارمونیک بصورت $\frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} m \omega^2 x^2$ نوشته می‌شود، وقتی می‌کنیم چه در فضای مختصات پوزی و چه در فضای مختصات کوانتومی.

$$H = \frac{p^2}{2m} - \frac{1}{\hbar^2} \frac{m \omega^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial p^2}$$

این دوین می‌توانیم بر این می‌کنیم، و می‌توانیم که می‌توانیم با $|n\rangle$ رابطه می‌شود که

$$H|n\rangle = (n + \frac{1}{2}) \hbar \omega |n\rangle$$

بنابراین:

$$\hat{\rho} = \frac{e^{-\beta H}}{\text{Tr } e^{-\beta H}}$$

این به این معنی است که در میان پایه‌های هم‌بندی شده است.

$$\rho_{nn'} = \frac{\langle n | e^{-\beta H} | n' \rangle}{\text{Tr } e^{-\beta H}} \quad (1)$$

$$\text{Tr } e^{-\beta H} = \sum_n \langle n | e^{-\beta H} | n \rangle$$

این از آن مورد استفاده است که در این مورد به صورت یک سیمای تعدادی است (n از صورت سیمای تبدیل کننده)

$$\text{Tr } e^{-\beta H} = \sum_n \langle n | e^{-\beta H} | n \rangle = \sum_n e^{-\beta \hbar \omega} e^{-\beta \hbar \omega / 2}$$

از آنجا که $\beta \hbar \omega$ و ω همگی مثبت هستند بنابراین $e^{-\beta \hbar \omega}$ همواره کوچکتر از یک است و رابطه $e^{-\beta \hbar \omega} < 1$ برقرار است. همچنین می‌توانیم جمع بگیریم که $\sum_n e^{-\beta \hbar \omega} = 1$ است و مقدار $e^{-\beta \hbar \omega}$ آن هم قدر نسبت آن هم $e^{-\beta \hbar \omega}$ است و این به این معنی است که $\sum_n e^{-\beta \hbar \omega} = 1$ است.

$$\text{Tr } e^{-\beta H} = \frac{e^{-\beta \hbar \omega / 2}}{1 - e^{-\beta \hbar \omega}} = \frac{1}{e^{\beta \hbar \omega / 2} - e^{-\beta \hbar \omega / 2}} = \frac{1}{2 \delta \hbar h (\beta \hbar \omega / 2)} \quad (2)$$

$$\text{②} \rightarrow \text{①} : \rho_{nn'} = \frac{\langle n | e^{-\beta H} | n' \rangle}{\text{Tr } e^{-\beta H}} = 2 \delta \hbar h \left(\frac{\beta \hbar \omega}{2} \right) e^{-\beta \hbar \omega (n + \frac{1}{2})} \delta_{nn'} \quad (3)$$

اینکه ρ_{nn} و δ_{nn} دارد یعنی ماتریس فقط عناصر قطری دارد یعنی احتمال اینکه در یک زمان بتوانیم هم در انرژی n باشد و هم در انرژی n صرفیات و نمی‌تواند هم در انرژی n باشد و هم در انرژی n' . فقط در یک انرژی می‌تواند در یک لحظه باشد که احتمال آن با $2 \delta \hbar h \left(\frac{\beta \hbar \omega}{2} \right) \exp(-\beta \hbar \omega (n + \frac{1}{2}))$ برابر می‌شود. این احتمال این است که در n حالت باشد.

البته می‌توانیم بسنجیم انرژی را حساب کرد. می‌توانیم حساب کرد که در هر انرژی با چندین احتمال می‌توانیم بسنجیم انرژی چیست، که این هم یعنی $\text{Tr}(H\rho)$ را حساب کنیم.

$$\bar{E} = \text{Tr}(H\rho)$$

البته به نظر می‌رسد که در اینجا برای حساب توانسته‌ایم بسنجیم، این باشد که این توانسته‌ایم در آن انرژی هم می‌توانیم بسنجیم. البته این احتمال این است که در n باشد و هم در n' باشد. اما در هر لحظه ρ با δ_{nn} و $\delta_{nn'}$ است. چقدر است؟ بسنجیم احتمال اینکه در n باشد و هم در n' باشد. اما در هر لحظه ρ با δ_{nn} و $\delta_{nn'}$ است. چقدر است؟

اگر بخواهیم این را حساب کنیم، ρ_{nn} می‌تواند با انرژی بسنجیم. در این صورت باید ماتریس H را در فضای n یا فضای n' بسنجیم. یعنی برای هر فضای n یا n' بسنجیم چقدر $\langle n | H | n \rangle$ را حساب کنیم. که این به معنی احتمال گذار از

به α و α' هم می‌تواند داشته باشد. $\langle \alpha | \rho | \alpha' \rangle$ را هم می‌توانیم به این شکل بنویسیم: $\langle \alpha | \rho | \alpha' \rangle = \text{Tr}(\rho |\alpha\rangle\langle\alpha'|)$ که از صحت آن می‌توانیم اطمینان حاصل کنیم. ρ هم می‌تواند به صورت $\rho = \sum_n P_n |\alpha_n\rangle\langle\alpha_n|$ باشد. $\langle \alpha | \rho | \alpha' \rangle = \sum_n P_n \langle \alpha | \alpha_n \rangle \langle \alpha_n | \alpha' \rangle$ که از صحت آن می‌توانیم اطمینان حاصل کنیم.

trace را در فضای نوسان فرقی نمی‌کند. $\text{Tr} \rho = \text{Tr} \rho^\dagger$ است. $\text{Tr} \rho = \sum_n \langle n | \rho | n \rangle$ است. $\text{Tr} \rho = \sum_n \langle n | \rho | n \rangle = \sum_n P_n$ که از صحت آن می‌توانیم اطمینان حاصل کنیم.

$$\langle \alpha | \rho | \alpha' \rangle = \frac{1}{\text{Tr} \rho} \langle \alpha | e^{-\beta H} | \alpha' \rangle$$

$$\langle \alpha | \rho | \alpha' \rangle = 2 \sinh \frac{\beta \hbar \omega}{2} \sum_{n, n'} \langle \alpha | n \rangle \langle n | e^{-\beta H} | n' \rangle \langle n' | \alpha' \rangle$$

$$\frac{\phi_n(\alpha)}{\delta_{nn'} e^{-\beta \hbar \omega (n + \frac{1}{2})}} \frac{\phi_{n'}^*(\alpha')}{\delta_{nn'}} \Rightarrow \langle \alpha | \rho | \alpha' \rangle = 2 \sinh \frac{\beta \hbar \omega}{2} e^{-\beta \hbar \omega \frac{1}{2}} \sum_n \phi_n(\alpha) \phi_n^*(\alpha') e^{-\beta \hbar \omega n}$$

اینجا $\phi_n(\alpha)$ همان $\phi_n(x)$ است که در فصل ۲ دیدیم. $\phi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2^n n!}} \left(\frac{m\omega}{\pi \hbar} \right)^{1/4} H_n(\xi) e^{-\frac{1}{2} \xi^2}$ که $\xi = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} x$ است. $\langle \alpha | H | n \rangle = (n + \frac{1}{2}) \hbar \omega \langle \alpha | n \rangle$ است. $\langle \alpha | H | n \rangle = \int \phi_n^*(\alpha) \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{2} m \omega^2 x^2 \right) \phi_n(\alpha) dx = (n + \frac{1}{2}) \hbar \omega \langle \alpha | n \rangle$ است.

$$\langle \alpha | H | n \rangle = (n + \frac{1}{2}) \hbar \omega \langle \alpha | n \rangle$$

$$\Rightarrow -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} \phi_n + \frac{1}{2} m \omega^2 x^2 \phi_n = (n + \frac{1}{2}) \hbar \omega \phi_n$$

$$\Rightarrow \phi_n(\alpha) = \left(\frac{m\omega}{\pi \hbar} \right)^{1/4} \frac{H_n(\xi)}{(2^n n!)^{1/2}} e^{-\frac{1}{2} \xi^2} \quad ; \quad \xi = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} x$$

$$\sum_n \frac{H_n(\xi) H_n(\xi')}{2^n n!} e^{-\beta \hbar \omega n} \quad (6)$$

اینجا $\phi_n(\alpha)$ همان $\phi_n(x)$ است که در فصل ۲ دیدیم. $\phi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2^n n!}} \left(\frac{m\omega}{\pi \hbar} \right)^{1/4} H_n(\xi) e^{-\frac{1}{2} \xi^2}$ که $\xi = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} x$ است. $\langle \alpha | H | n \rangle = (n + \frac{1}{2}) \hbar \omega \langle \alpha | n \rangle$ است. $\langle \alpha | H | n \rangle = \int \phi_n^*(\alpha) \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{2} m \omega^2 x^2 \right) \phi_n(\alpha) dx = (n + \frac{1}{2}) \hbar \omega \langle \alpha | n \rangle$ است.

$H_n(x)$ می‌تواند به صورت زیر باشد:

$$H_n(x) = \frac{2^n}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2} (x+iu)^n du \quad (7)$$

برای \sum های مختلف که در H هست، از این فرمول استفاده می‌کنیم:

$$\sum_n \frac{t^n}{2^n n!} H_n(x) \stackrel{(7)}{=} \sum_n \frac{t^n 2^n}{2^n n! \sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2} (x+iu)^n du$$

$$\sum_n \frac{t^n}{2^n n!} H_n(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2} du \sum_n \frac{(x+iu)^n}{n!} = e^{(xt - t^2/4)} \quad (8)$$

$e^{(x+iu)t}$

در این روش، فقط H ظاهر شده است، اگر فقط H ظاهر باشد، می‌توانیم این اشتباه را برطرف کنیم. t را برابر یک قرار دهیم.

در رابطه (6) یک جمع از این جمع‌ها داریم، در واقع به این صورت است:

$$\sum_n \frac{t^n}{2^n n!} H_n(x) H_n(y)$$

بسیار می‌توانیم از H_n ها عبارت (7) را قرار دهیم که چون در H داریم باید در آنجا قرار دهیم.

یک خطی هم باید در رابطه (8) اول به جای x از $H_n(x)$ استفاده کنیم، از رابطه (7) قرار دهیم، بعد وقتی اشتباه را مرتب می‌کنیم، دوباره \sum بصورت (8) ظاهر می‌شود و \sum یک چیز جدید است که t های آن صرفاً t نیستند و t های دیگر هم هستند. هر کدام از این جمع‌ها صاف می‌شوند که از (8) بدست می‌آوریم را می‌توانیم.

$$\begin{aligned} \sum_n \frac{t^n}{2^n n!} H_n(x) H_n(y) &= \sum_n \frac{t^n}{2^n n!} H_n(y) \frac{2^n}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2} (x+iu)^n du \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2} \sum_n \frac{t^n (x+iu)^n}{n!} H_n(y) \end{aligned}$$

e^{-u^2} را $t(x+iu)$ با t جمع می‌کنیم. در واقع در رابطه (8) t به جای $t(x+iu)$ و t را t می‌گذاریم. $t(x+iu)$ را t می‌گذاریم و در آن اشتباه می‌کنیم:

$$\text{جواب نهایی} = \frac{e^{\frac{x^2+y^2}{2} - (\frac{x^2+y^2}{2} - 2xyt)}}{\sqrt{1-t^2}}$$

در رابطه (4) می‌توانیم جمع صاف است، ϕ_n ها آن (5) را قرار دهیم، $H_n(x)$ می‌تواند به صورت $H_n(x)$ باشد. $H_n(x)$ می‌تواند به صورت $H_n(x)$ باشد. 2^n و $n!$ در این دو فرمول مثل $H_n(x)$ است. y و x را یکی قرار دهیم. $e^{-\beta H_n}$ می‌تواند که t به شکل $e^{-\beta H_n}$ در این است، ما می‌توانیم که در آن t را یکی قرار دهیم. $e^{-\beta H_n}$ ظاهر می‌شود که آنجا را می‌توانیم و می‌توانیم که t را یکی قرار دهیم. $\frac{m\omega}{\hbar} x$ را یکی قرار دهیم و در آن صورت t می‌شود.

در این شرایط که $\langle \alpha | p | \alpha \rangle$ را با استفاده از رابطه (۹) حساب کنیم، ضمیمه‌ها را به هم می‌زنیم و δh ها را به هم می‌زنیم، $\langle h \rangle$ را با $\beta h \omega$ ها کوپل می‌کنیم و در نهایت اول $\beta h \omega$ را در می‌آوریم، (در نتیجه):

$$\beta h \omega \ll 1 \Rightarrow \langle \alpha | p | \alpha \rangle \approx \left(\frac{m \omega^2}{2\pi \hbar K T} \right)^{1/2} e^{-m \omega^2 x^2 / 2 K T} \quad (11)$$

که مستقل از h است و نشان h در وجود ندارد و در واقع یک تابع گاوسی است که حول $x=0$ متمرکز شده است و این همان نظر اول می‌باشد که ما داریم. $\beta h \omega$ ضمیمه‌ها را بزرگتر از یک باشد که این در حالت کوآنتوم است.

$$\beta h \omega \gg 1 \Rightarrow \langle \alpha | p | \alpha \rangle \approx \left(\frac{m \omega}{\pi \hbar} \right)^{1/2} e^{-m \omega x^2 / \hbar} \quad (12)$$

که این هم گاوسی است و این هم گاوسی است که چنانچه آن را با $\left(\frac{\hbar}{2m\omega} \right)^{1/2}$ است: $\eta_0 = \left(\frac{\hbar}{2m\omega} \right)^{1/2}$

ضمیمه‌ها است که اصلاح می‌کنیم رابطه‌ها که نسبت آوردیم را از رابطه (۹) بدست می‌آوریم، α را مادی α قرار دهیم و فقط برای حالت $n=0$ حساب کنیم یعنی n ها α را با α در آورده کنیم. $n=0$ ضمیمه است که حالت کوآنتوم است یعنی $n=0$ حالت $n=0$ قرار دهیم پس این است که $\beta h \omega \gg 1$ را بدست آورده ایم.

سؤال: در رابطه (۹) که اصلاح n داریم ۱۲

نارسی n ها جمع زدیم، این از رابطه $\beta h \omega$ و در نتیجه که زدیم فقط $n=0$ را در نظر می‌گیریم. این ضمیمه را جمع است. $n=0$ را که در نظر می‌گیریم، H_0 مادی است و \exp برهان $x^2 - \frac{1}{2}$ فقط $n=0$ است.

$$\Phi_n(x) = \left(\frac{m\omega}{\pi \hbar} \right)^{1/4} \frac{H_n(\xi)}{(2^n n!)^{1/2}} e^{-\frac{1}{2} \xi^2} \quad ; \quad \xi = \frac{m\omega}{\hbar} x$$

$$\Phi_0(x) = \left(\frac{m\omega}{\pi \hbar} \right)^{1/4} \frac{H_0(\xi)}{1} e^{-\frac{1}{2} \xi^2}$$

نظر به $n=0$ را در نظر می‌گیریم، همان x^2 با x می‌زنیم و به هم می‌زنیم که فقط $n=0$ و وجود دارد، یعنی چیزی که حالت کوآنتوم است. پس این است که تمام حالات دیگر یک جور می‌مانند و با هم می‌زنند و $n=0$ باقی می‌ماند.

در حد $\beta h \omega \gg 1$ که اصلاح $n=0$ بود و به هم می‌زنیم که $\beta h \omega$ را حساب کنیم و داریم:

$$\langle H \rangle = -\frac{\partial}{\partial \beta} \ln \text{Tr} e^{-\beta H}$$

برای $\langle H \rangle$ متوال از رابطه (۹) که در رابطه (۹) حساب کردیم، استفاده کنیم و $\alpha = \alpha$ را گرفت و trace

حاصل کردیم تا یک trace را حساب کرده بودیم که $\delta h h$ شده بود. از همان $\delta h h$ استفاده کنیم و از \ln آن نسبت به β مشتق بگیریم.

$$\langle H \rangle = -\frac{\partial}{\partial \beta} \ln \text{Tr} e^{-\beta H} = \frac{1}{2} \hbar \omega \coth \left(\frac{1}{2} \beta \hbar \omega \right) \quad (13)$$

از آنجایی که ما $\langle H \rangle$ را بصورت $\frac{1}{2} \hbar \omega \coth \left(\frac{1}{2} \beta \hbar \omega \right)$ بدست آوردیم، می‌توانیم α را از معادله (9) برای $\langle \alpha | \rho | \alpha \rangle$ داریم را بصورت زیر بنویسیم:

$$(9), (13) \Rightarrow \langle \alpha | \rho | \alpha \rangle = \left(\frac{m \omega^2}{2\pi \langle H \rangle} \right)^{1/2} e^{-\frac{m \omega^2 \alpha^2}{2 \langle H \rangle}} \quad (14)$$

رابطه فوق صفر را هم می‌توانستیم، این هم در حد صحت قرار است و هم در کوانتوم مکانیک، یعنی نسبت دارد که ما $\langle H \rangle$ را به چیزی می‌گیریم، هم در کوانتوم کلاسیک و در $\frac{1}{2} K T$ می‌گیریم چون انرژی متوسطی را بصورت $\frac{1}{2} m \omega^2 \alpha^2 + \frac{p^2}{2m}$ است. بصورت کلاسیک ما α را از طریق قضیه Equipartition که می‌گوید هر جمله درجه $\frac{1}{2} K T$ را می‌توانیم $2 \times \frac{1}{2} K T$ بنویسیم که به همان رابطه (14) می‌رسیم.

حیثاً در کوانتوم $K T$ را به $\langle H \rangle$ بنویسیم که همان معادله که بدست آوردیم می‌شود (11).
هم می‌توانیم حد کوانتوم (کلاسیک) را قرار دهیم (13) و به همان رابطه (12) می‌رسیم.

رابطه (14) یک رابطه کلاسیک است که می‌گوید نسبت به اینکه $\langle H \rangle$ را به چیزی می‌گیریم، هم در کوانتوم می‌گیریم یا کوانتوم می‌گیریم.

از این به راه می‌توانیم قضیه ویدال را هم ثابت کنیم. $\frac{1}{2} m \omega^2 \alpha^2$ انرژی میانگین است که می‌توانیم میانگین بگیریم و نسبت به α مشتق می‌گیریم، آن را از رابطه (14) استفاده کنیم، کوانتوم کنیم و ثابت ثابت می‌شود.
به نظر اینکه α روی α می‌تواند از α شود.

$$\hat{\alpha} f(\alpha) = \alpha f(\alpha)$$

بنابراین می‌توانیم α و α^2 بنویسیم، چون وقتی $\langle \alpha^2 \rangle$ را می‌گیریم حاصل کنیم، باید $\text{Tr}(\alpha^2 \rho)$ را حساب کنیم، چون کوانتوم $\text{Tr}(\alpha^2 \rho)$ باید $\int d^3 \alpha \langle \alpha | \alpha^2 | \alpha \rangle \langle \alpha | \rho | \alpha \rangle$ قرار دهیم.

$$\langle \alpha^2 \rangle = \text{Tr}(\alpha^2 \rho) = \int d\alpha \langle \alpha | \alpha^2 | \alpha \rangle \langle \alpha | \rho | \alpha \rangle = \iint d\alpha \underbrace{\langle \alpha | \alpha^2 | \alpha \rangle}_{\alpha^2 \delta(\alpha - \alpha)} \langle \alpha | \rho | \alpha \rangle d^3 \alpha$$

اینرا می‌توانیم که این α^2 هم تابعی از α است، از $\langle \alpha | \alpha^2 | \alpha \rangle$ خارج می‌شود و می‌ماند از $\int d^3 \alpha \langle \alpha | \rho | \alpha \rangle$ چون یک تابع δ داریم.

و پس آنرا از رابطه (14) استفاده کنیم، فرض می‌کنیم α شده و نسبت $\langle \alpha | \rho | \alpha \rangle$ بنویسیم که همان $\langle \alpha | \rho | \alpha \rangle$ را (رابطه (14)) را به همان $\int d^3 \alpha \langle \alpha | \rho | \alpha \rangle$ در α^2 حساب کنیم، و آنرا $\langle \alpha | \rho | \alpha \rangle$ را به همان $\int d^3 \alpha \langle \alpha | \rho | \alpha \rangle$ حساب کنیم، و آنرا $\langle \alpha | \rho | \alpha \rangle$ را به همان $\int d^3 \alpha \langle \alpha | \rho | \alpha \rangle$ حساب کنیم.

طول این حالت P (6) و ۱۴ (5) اثر کند. همشکل این طرز که ذره 3 را به بیرون ببرد، ذره 4 را به بیرون ببرد، ذره 2 را به بیرون ببرد و ذره 1 را به بیرون ببرد.

$$P_1 N_1 = U_1(r_3) U_2(r_4) U_3(r_2) U_4(r_1) U_5(r_5) \dots U_N(r_N) \quad (7)$$

این حالت است. قابلیت های متفاوتی است و هیچ راهی نیست که هم این همزمان به بیرون ببرد و ذره 2 را به بیرون ببرد. قابلیت ها و تابع های مختلف وجود داشته باشد که هم به بیرون ببرد. مثلاً فرض کنیم $U_2(r_4)$ را در وسط ذره آزاد باشد، ذره 4 را در این حالت بر حسب $U_2(r_4)$ یعنی $U_2(r_4) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} e^{-K_2 r_4}$

یعنی وقتی این حالت بر حسب $e^{-K_1 r_1}$ یعنی ذره اول را K_1 است، $e^{-K_2 r_2}$ یعنی ذره 2 را K_2 است. برای K_2 است $e^{-K_3 r_3}$ یعنی ذره سوم K_3 است. انرژی کل هم برابر با $\frac{K_1^2}{2m} + \frac{K_2^2}{2m} + \frac{K_3^2}{2m}$ یعنی $U_2(r_4)$ است یعنی ذره سوم را K_3 است. $U_2(r_4)$ است یعنی ذره چهارم را K_4 است.

در این حالت چون انرژی ها فقط با K ها بر حسب r دارند و با r هم m دارند. $\frac{K_1^2}{2m}$ $\frac{K_2^2}{2m}$ $\frac{K_3^2}{2m}$ $\frac{K_4^2}{2m}$ $\frac{K_5^2}{2m}$ $\frac{K_6^2}{2m}$ $\frac{K_7^2}{2m}$ $\frac{K_8^2}{2m}$ $\frac{K_9^2}{2m}$ $\frac{K_{10}^2}{2m}$ $\frac{K_{11}^2}{2m}$ $\frac{K_{12}^2}{2m}$ $\frac{K_{13}^2}{2m}$ $\frac{K_{14}^2}{2m}$ $\frac{K_{15}^2}{2m}$ $\frac{K_{16}^2}{2m}$ $\frac{K_{17}^2}{2m}$ $\frac{K_{18}^2}{2m}$ $\frac{K_{19}^2}{2m}$ $\frac{K_{20}^2}{2m}$ $\frac{K_{21}^2}{2m}$ $\frac{K_{22}^2}{2m}$ $\frac{K_{23}^2}{2m}$ $\frac{K_{24}^2}{2m}$ $\frac{K_{25}^2}{2m}$ $\frac{K_{26}^2}{2m}$ $\frac{K_{27}^2}{2m}$ $\frac{K_{28}^2}{2m}$ $\frac{K_{29}^2}{2m}$ $\frac{K_{30}^2}{2m}$ $\frac{K_{31}^2}{2m}$ $\frac{K_{32}^2}{2m}$ $\frac{K_{33}^2}{2m}$ $\frac{K_{34}^2}{2m}$ $\frac{K_{35}^2}{2m}$ $\frac{K_{36}^2}{2m}$ $\frac{K_{37}^2}{2m}$ $\frac{K_{38}^2}{2m}$ $\frac{K_{39}^2}{2m}$ $\frac{K_{40}^2}{2m}$ $\frac{K_{41}^2}{2m}$ $\frac{K_{42}^2}{2m}$ $\frac{K_{43}^2}{2m}$ $\frac{K_{44}^2}{2m}$ $\frac{K_{45}^2}{2m}$ $\frac{K_{46}^2}{2m}$ $\frac{K_{47}^2}{2m}$ $\frac{K_{48}^2}{2m}$ $\frac{K_{49}^2}{2m}$ $\frac{K_{50}^2}{2m}$ $\frac{K_{51}^2}{2m}$ $\frac{K_{52}^2}{2m}$ $\frac{K_{53}^2}{2m}$ $\frac{K_{54}^2}{2m}$ $\frac{K_{55}^2}{2m}$ $\frac{K_{56}^2}{2m}$ $\frac{K_{57}^2}{2m}$ $\frac{K_{58}^2}{2m}$ $\frac{K_{59}^2}{2m}$ $\frac{K_{60}^2}{2m}$ $\frac{K_{61}^2}{2m}$ $\frac{K_{62}^2}{2m}$ $\frac{K_{63}^2}{2m}$ $\frac{K_{64}^2}{2m}$ $\frac{K_{65}^2}{2m}$ $\frac{K_{66}^2}{2m}$ $\frac{K_{67}^2}{2m}$ $\frac{K_{68}^2}{2m}$ $\frac{K_{69}^2}{2m}$ $\frac{K_{70}^2}{2m}$ $\frac{K_{71}^2}{2m}$ $\frac{K_{72}^2}{2m}$ $\frac{K_{73}^2}{2m}$ $\frac{K_{74}^2}{2m}$ $\frac{K_{75}^2}{2m}$ $\frac{K_{76}^2}{2m}$ $\frac{K_{77}^2}{2m}$ $\frac{K_{78}^2}{2m}$ $\frac{K_{79}^2}{2m}$ $\frac{K_{80}^2}{2m}$ $\frac{K_{81}^2}{2m}$ $\frac{K_{82}^2}{2m}$ $\frac{K_{83}^2}{2m}$ $\frac{K_{84}^2}{2m}$ $\frac{K_{85}^2}{2m}$ $\frac{K_{86}^2}{2m}$ $\frac{K_{87}^2}{2m}$ $\frac{K_{88}^2}{2m}$ $\frac{K_{89}^2}{2m}$ $\frac{K_{90}^2}{2m}$ $\frac{K_{91}^2}{2m}$ $\frac{K_{92}^2}{2m}$ $\frac{K_{93}^2}{2m}$ $\frac{K_{94}^2}{2m}$ $\frac{K_{95}^2}{2m}$ $\frac{K_{96}^2}{2m}$ $\frac{K_{97}^2}{2m}$ $\frac{K_{98}^2}{2m}$ $\frac{K_{99}^2}{2m}$ $\frac{K_{100}^2}{2m}$

مثلاً $E = 2(E_1 + E_2)$ $N=4$ E_1 E_2 $E = 2(E_1 + E_2)$ $N=4$

$$N_E = U_1(r_1) U_1(r_2) U_2(r_3) U_2(r_4) \quad (I)$$

دو تا ذره در تراز اول $U_1(r_1)$ و $U_1(r_2)$ و دو تا ذره در تراز دوم $U_2(r_3)$ و $U_2(r_4)$.

N_E را به لحاظ گروهی می توانیم به صورت $N_E = U_1(r_1) U_1(r_2) U_2(r_3) U_2(r_4)$ بنویسیم که ذره 1، 2 در تراز 1، ذره 3، 4 در تراز 2.

$$N_E = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

یعنی این حالت های به صورت زیر هم بنویسیم، هیچ چیز فرقی نمی کند چون فقط دو ذره است که در تراز اول هستند و دو ذره هم که در تراز دوم هستند. یعنی حالت های به صورت $N_E = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ و $N_E = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

$$N_E = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \quad N_E = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

این سه این نه Ψ_E ها، یک حالت هستند

اما در این حالت را در نظر بگیریم که ذره 3 به ترتیب اول بیاید، ذره 2 در ترتیب اول بیاید و ذره 1 به ترتیب دوم برود و ذره 4 هم در ترتیب اول بیاید. در این حالت اگر ذرات بر حسب فاصله باشند، یعنی تبیی از ذرات از ترتیب دوم به ترتیب اول آمده است و تبیی از ذرات از ترتیب اول به ترتیب دوم آمده است. البته اگر 3 و 4 جابجا همان اثری است چون باز هم دوزخ در ترتیب اول داریم، دوزخ در ترتیب دوم داریم.

$$\Psi_E = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \text{حالتین چهار تایییم} \\ \text{ذره 3 و 4 را عوض کنیم} \\ \text{ذره 2 و 3 را عوض کنیم} \end{matrix} \quad \Psi_E = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

حالت دیگری که می تواند وجود داشته باشد بصورت زیر می تواند باشد یعنی حالت ذرات 3 و 4 را بگذاریم در ترتیب اول و حالت ذرات 1 و 2 را در ترتیب دوم بگذاریم و یا سه را کنیم نسبت به حالت بیان صورت بگیریم که 3 و 4 ذره 1 را با ذره 2 عوض کنیم و 3 و 4 ذره 2 را با ذره 1 عوض کنیم.

$$\Psi_E = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \text{حالت بیان در این هم چهار تایییم} \\ \text{ذره 3 و 4 را با 1 و 2 عوض کنیم} \\ \text{ذره 3 و 4 را با 2 و 1 عوض کنیم} \end{matrix} \quad \Psi_E = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

حالت دیگری است که می توانیم نسبت به حالت اولی که در 3 و 4 ذره 1 و 2 را با ذره 3 و 4 عوض کنیم و بعد 3 و 4 ذره 1 و 2 را با ذره 3 و 4 عوض کنیم.

$$\Psi_E = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \text{حالت بیان چهار تایییم در اینجا هم} \\ \text{نسبت به حالت اولی می توانیم} \end{matrix}$$

اما بعضی از این Ψ_E ها شبیه دیگری می شوند اگر تبیی کنیم جای ذرات را کنار بگذاریم و در 1 و 2 را با 3 و 4 عوض کنیم. 6 حالت تبیی نسبت به تبیی 6 حالت داریم که ممکن است به لحاظ تابع موجی که می نویسیم شکل های شان متفاوت باشند یعنی مثلا برای Ψ_E که در ① داریم، این دو حالت تبیی هستند

$$\Psi_E = \begin{matrix} U_1(r_1) U_1(r_2) U_2(r_3) U_2(r_4) \\ U_1(r_2) U_1(r_1) U_2(r_3) U_2(r_4) \end{matrix} \left. \begin{matrix} \text{این دو حالت تبیییم هیچ فرق نمی کنند} \end{matrix} \right\}$$

اما مثلا اگر به این صورت بود، شکل هم تابع موجی عوض شده است و در واقع به حالت ② می آید.

$$\Psi_E = \begin{matrix} U_1(r_2) U_1(r_3) U_2(r_1) U_2(r_4) \\ U_1(r_3) U_1(r_2) U_2(r_1) U_2(r_4) \end{matrix} \left. \begin{matrix} \text{این دو حالت تبیی هستند} \end{matrix} \right\}$$

یعنی مثلا اگر U_1 بصورت $\delta(x)$ باشد حالت ① و ② با هم متفاوت هستند تبیی $\delta(x)$ است و تبیی $\delta(x)$ است.

در واقع این طور می گوئیم که اینها تبیی در یک ترتیب هستند هر چند با تبیی تبیی آنها تبیی می آید (یعنی تبیی تبیی این 4 ذره برابر 4! است) اما دوزخ که در ترتیب اول و 2 دوزخ که در ترتیب دوم هستند تبیی تبیی آنها تبیی می آید (یعنی تبیی تبیی آنها تبیی می آید) و یا اگر تبیی کنیم

$$4! = \frac{4!}{1!1!1!1!} = \frac{4 \times 3 \times 2 \times 1}{1 \times 1 \times 1 \times 1} = 6$$

یعنی دوزخ 2!

سوال: برای ذرات میانی که داشته باشیم، مثلاً برای حالتی که دو تراز اول و دو تراز دوم و این (n_1, n_2) برابر ۴ باشد، این ۴ حالت یعنی چه؟

باید در نظر بگیریم که (n_1, n_2) ضربی است که با دو تابع پارتیشن قرار می‌دهیم، یعنی تابع وزنی است که با دو تابع پارتیشن قرار می‌دهیم، البته این ضرب باید همگونی داشته باشد، این طور می‌بینیم که می‌توانیم حالت‌های ما در حالت میانی است که n_1, n_2 می‌توانیم هم ببینیم که ۶ حالت وجود دارد که هم یک انرژی دارند، این g در Q (تابع پارتیشن) ظاهر می‌شود که به این صورت بود:

$$Q = \sum_i g_i e^{-\beta E_i}$$

این g_i به این صورت دارد که g_i می‌تواند در واقع چند حالت به انرژی E_i می‌تواند باشد و ضرب وزنی است که به E_i می‌تواند باشد مثلاً برای همین مسئله که داشته‌ایم g_i تابعی که می‌تواند در صورت وجود داشته باشد، مثلاً برای $E = 4\epsilon_1$ ذره n_1 تراز باشد، در این صورت انرژی هر یک که برای این حالت وجود دارد برابر $4\epsilon_1$ است. حال برای این انرژی $4\epsilon_1$ فقط یک حالت وجود دارد در آن هم این است که ۴ ذره در تراز اول باشند، این g برابر یک می‌شود اگر بخواهیم:

E_1

۱	۲	۳	۴
۰	۰	۰	۰

حالتی که در آن یک ذره در تراز اول و سه ذره در تراز دوم باشند

حالت ① $E = 4\epsilon_1 \Rightarrow g = 1 \rightarrow e^{-\beta E_i} = Q$

حالت میانی است که مثلاً ۳ ذره در تراز اول باشند و ۱ ذره در تراز دوم که در ذرات در تراز اول با هم صاف شوند، حالت میانی را می‌توانیم گفت و می‌توانیم ذرات تراز اول با ذره تراز دوم صاف شوند، می‌توانیم یک می‌توانیم را می‌توانیم

۱	۲	۳	۴
۰	۰	۰	۰

۱	۳	۴
۰	۰	۰

۱	۲	۴
۰	۰	۰

۱	۲	۳
۰	۰	۰

حالتی که در آن دو ذره در تراز اول و دو ذره در تراز دوم باشند

حالت ②

در حالت ① انرژی ذرات میانی باشند، N برابر ۴ است، n_1 برابر ۴ است و n_2 برابر صفر است

حالت ① (میانی): $\frac{N!}{n_1! n_2!} = \frac{4!}{4!} = 1$

در حالت ② هم انرژی ذرات میانی باشند، باز N برابر ۴، n_1 برابر ۳ و n_2 برابر یک است، یعنی:

حالت ② (میانی): $\frac{N!}{n_1! n_2!} = \frac{4!}{3! \times 1!} = 4$

حالت ذرات در حالت ① میانی باشند، انرژی:

حالت ① (میانی): $\frac{1}{n_1! n_2!} = \frac{1}{4!}$

۴ یعنی اینکه، این ذرات که می‌توانیم در حالت میانی با هم صاف شوند، یعنی در حالت ① ترتیب ۱، ۲، ۳، ۴ یا ۴، ۳، ۲، ۱ می‌تواند فرق کند.

در حالت ② که در آن در تراز اول ۳ ذره و در تراز دوم ۱ ذره داریم، اگر می‌خواهیم که در آن حالت $N!$

بسیاریم، اینها را در دست آید. در اینجا این مجبور شدیم که ضرب $\frac{1}{N!}$ (ضرب گسیل) را در دستیار کنیم و نه از راه دیگر، چون از روی شکر این 4 حالت همگی یک حالت هستند و نه $\frac{1}{4!}$! به عنوان توضیح بیشتر، اگر در حالت ①، ذرات یک باشند، آن صورت هر کدام از حالتها را بر ما نشانده این دو حالت می هستند یعنی یک حالت بیشتر داریم و ضرب را بصورت $\frac{N!}{n_1! n_2!}$ باید بنویسیم این امر این طور است که اگر در هر یک از این دو حالت 4 سیستم 4 سیستم extensive یعنی این مجبور شدیم که این ضرب را در دستیار کنیم.

ذرات یک باشند	$\frac{1}{2} \frac{2}{2} \frac{3}{2} \frac{4}{2}$	$\frac{2}{2} \frac{1}{2} \frac{3}{2} \frac{4}{2}$
---------------	---	---

که extensive نمی شود! $\frac{1}{N!} \frac{N!}{n_1! n_2!} = \frac{1}{n_1! n_2!}$

چون می بینیم که این 9 حالت تعداد را در دستیار ضرب 9، ضرب است که باید گذاشته شود تا آنکه extensive شود. در غیر این صورت برای حالتها که ذرات یک هستند، آنرا می توان extensive نوشت. حال ما هم می بینیم که این 9 حالتها این ضرب را پیدا کنیم، در این صورت دستیار کردیم.

پس سوال آیا انرژی (تراش انرژی) است که باعث شود این حالتها با هم برابر شوند، و این تعیین کننده این است که اینها در دستیار شوند.

$$E = (3\epsilon_1 + \epsilon_2)$$

تعداد حالتها که ممکن است این انرژی را بوجود بیاورد را باید شماریم و اگر این ها را مختلف (مخصوصاً اگر تراش بیشتر باشد) می بینیم و وجود داشته باشد که این E را با هم می بینیم، یعنی همانطور که قبلاً گفتیم در این حالتها می توانیم وجود داشته باشد که هم به یک انرژی می شوند، و می بینیم که با هم در دستیار عمل آنها را از دستیار می توانیم. این حالتها می توانند یک حالت هستند این اتفاق افتاد که آنرا می توان extensive نوشت.

این بخاطر این است که واقعاً یک سری از این حالتها از هم مستقل نیستند و ما فرض کنیم که از هم مستقل هستند در حقیقت داریم (فرض می کنیم) و یک ضربی باید وارد شود که گوییم $\frac{1}{N!}$ باشد.

حال ما فرض کنیم این ضرب $\frac{1}{N!}$ را اینها درست می دانیم. اگر فرض کنیم که اینها را درست می دانیم، ما اینها را می بینیم. ما اینها را می بینیم و می بینیم که با هم می توانیم یک E را با هم در دستیار می بینیم.

$$\sum_i n_i \epsilon_i = E$$

فرض کنیم می بینیم که چندتا از این حالتها در دستیار داریم تعداد $g(n_i)$ از روی اینها می توانیم حساب کنیم و می توانیم

$$g(n_i) = \frac{N!}{n_1! n_2!} \quad \text{②}$$

یعنی در دستیار اول (بار اول) هستند و می بینیم که با هم می بینیم. ما اینها را می بینیم و می بینیم که با هم می توانیم. اینها را می بینیم و می بینیم که با هم می توانیم. اینها را می بینیم و می بینیم که با هم می توانیم.

بصورت جامعیت بکار می‌بریم و تابع موج را این‌گونه می‌نویسیم:

$$\psi' = e^{ik_1 \cdot r_3} e^{ik_1 \cdot r_2} e^{ik_3 \cdot r_1} e^{ik_3 \cdot r_4} e^{ik_3 \cdot r_5} \quad (2)$$

$$E = \frac{1}{2m} (2K_1^2 + 3K_3^2)$$

فصل نامی ① و ② کامل با هم تفاوت دارند، در ① داریم $e^{ik_1 \cdot r_1}$ ، $e^{ik_3 \cdot r_3}$ در ② داریم $e^{ik_3 \cdot r_1}$ ، $e^{ik_1 \cdot r_3}$ یعنی اینها به لحاظ فصل نامی با هم تفاوت ندارند ولی از روی حالتشان می‌توان است

اما اگر از لحاظ کوانتوم نگاه کنیم می‌بینیم که جامعیت این ذرات رسلاً از هم افترون نوبت فرق نمی‌کند که اگر است از این افترون حالت K_1 باشد و اگر است از حالت K_3 اینها اثر از لحاظ ظاهر فرق کنند ولی از نظر کوانتوم در سهم فیزیکی نباید فرق کنند و این بدان معنی است که صرفاً اینها را یک عامل فاز باید با هم فرق کنیم یعنی اگر تابع موج آنها با هم فرق کنند ولی کوانتوم سهم فیزیکی عوض نشود، این تفاوت فقط باید در یک عامل فاز باشد، یعنی ψ (2) که یک جامعیت روی ψ (1) است و می‌توانیم به یک سهم فیزیکی بینظیر نگاه کنیم.

$$\psi' = P \psi \xrightarrow{\text{یک}} |\psi'|^2 = |P \psi|^2$$

جامعیت
 $P = e^{i\alpha}$ یعنی P ضرایب پاره‌ها در صورت است

یعنی P باید بصورت یک فاز باشد

اینکه اگر دو جامعیت عین هم را یک سهم فیزیکی بکار ببریم، یعنی سهم پاره در حالت اول بگیرد، یعنی:

$$\psi = P(P\psi) \rightarrow P^2 = 1 \quad \text{و در نتیجه } P = \pm 1$$

در عبارتی که می‌خواهیم معادله ویژه قدری را بنویسیم و P هم یک عامل حقیقی باشد، یعنی:

$$P\psi = \pm \psi$$

مثبت
 پاره‌ها

آنهایی که با ویژه مقدار مثبت هستند را مقادیر می‌گوئیم و آنهایی که با ویژه مقدار منفی هستند را پاره‌ها می‌گوئیم، یعنی:

$$P\psi_s = \psi_s \quad (IV)$$

$$P\psi_A = \begin{cases} -\psi_A \\ +\psi_A \end{cases} \quad (V)$$

P جامعیت فرد
 P جامعیت زوج

یعنی اگر دو تا از P ها بر روی ψ_A اثر کنند باید نسبت به هم و با اثر بصورت فرد اثر کنند یا به هم

اگر ψ تابعی را به این صورت تعریف کنیم:

$$\psi_B = \psi_1(r_1) \dots \psi_n(r_n) \quad (VI)$$

مثال ۲

فرض کنیم سه ذره داشته باشیم، تابعیست Ψ_B که داریم به این صورت است که می‌بینیم که فزونی می‌یابد.

$$\left. \begin{aligned} \Psi_B &= U_1(r_1) U_2(r_2) U_3(r_3) \\ P_{12} \Psi_B &= U_1(r_2) U_2(r_1) U_3(r_3) \\ P_{13} \Psi_B &= U_1(r_3) U_2(r_2) U_3(r_1) \\ P_{23} \Psi_B &= U_1(r_1) U_2(r_3) U_3(r_2) \\ P_{12} P_{13} \Psi_B &= U_1(r_2) U_2(r_3) U_3(r_1) \\ P_{12} P_{23} \Psi_B &= U_1(r_3) U_2(r_1) U_3(r_2) \end{aligned} \right\} \text{فزون} \quad (*)$$

۱، ۲، ۳ را عوض کنیم
۱، ۳، ۲ را عوض کنیم
۲، ۳، ۱ را عوض کنیم
ابتدا ۱، ۲، ۳ و بعد ۲، ۳، ۱ را عوض کنیم
ابتدا ۱، ۳، ۲ و بعد ۲، ۳، ۱ را عوض کنیم
و این‌ها را داشته باشیم که تکرار می‌شوند. جزو تابع Ψ_B است.

حالت کیهانیم و عرضیم جز آن را حساب کنیم باز می‌آید از آنجا که در حد است.

کدام قبلیست $P_{13} P_{23} \Psi_B = U_1(r_2) U_2(r_3) U_3(r_1) = P_{12} P_{13} \Psi_B$

صورتیکه اینها به غیر از $(*)$ یک داریم، سه می‌بینیم که دوباره یکی از $(*)$ داریم که خود بین به غیر از این ۶ حالت است.

بنابراین Ψ_B می‌شود جمع همه حالات $(*)$ با ضرب Ψ_B ، یعنی:

$$\Psi_B = \text{const.} \left[U_1(r_1) U_2(r_2) U_3(r_3) + U_1(r_2) U_2(r_1) U_3(r_3) + U_1(r_3) U_2(r_2) U_3(r_1) + U_1(r_1) U_2(r_3) U_3(r_2) \right. \\ \left. + U_1(r_2) U_2(r_3) U_3(r_1) + U_1(r_3) U_2(r_1) U_3(r_2) \right]$$

Ψ_A با آنکه می‌خواهیم بنویسیم به روش دیگر

$$\Psi_A = \text{const.} \left[U_1(r_1) U_2(r_2) U_3(r_3) - U_1(r_2) U_2(r_1) U_3(r_3) - U_1(r_3) U_2(r_2) U_3(r_1) - U_1(r_1) U_2(r_3) U_3(r_2) \right. \\ \left. + U_1(r_2) U_2(r_3) U_3(r_1) + U_1(r_3) U_2(r_1) U_3(r_2) \right]$$

P_{12} : Ψ_A حالت است
 P_{13} : Ψ_A حالت است
 P_{23} : Ψ_A حالت است
 $P_{12} P_{13}$: Ψ_A حالت است
 $P_{12} P_{23}$: Ψ_A حالت است

نظریه می‌بینیم که P تغییر روی اینها اثر دهیم، این حالات سه فزون می‌شود و در آن فزون یک تغییر می‌دهد که اینها به نسبت، یعنی با فزون Ψ_B که در حد است.

Ψ_A ، یعنی هر یک تابعیست که اینها تغییر می‌دهند، از طرف تعریف در میان هم هست، البته این در میان وقتی است که ما تعداد ذرات و تعداد ترازها (اینها) می‌بینیم و هیچ کدام از آنها نمی‌توانند چون اینها هستند. در میان آن فزون Ψ_B .

$$\Psi_A = \text{const.} \sum_p \delta_p P \Psi_B \rightarrow \text{هر ترازیم بصورت در میان بنویسیم}$$

یعنی Ψ_A را بر این صورت می‌نویسیم که مطابق جدول بالاست و شرطی بود که نسبت به آن ثابت می‌ماند.

$$\Psi_A = \text{const.} \begin{vmatrix} U_1(r_1) & \dots & U_1(r_N) \\ U_2(r_1) & \dots & U_2(r_N) \\ \vdots & & \vdots \\ U_n(r_1) & \dots & U_n(r_N) \end{vmatrix} = \text{Slater determinant}$$

نوعی از جدول است!

$$\Psi_A = \text{const.} \begin{vmatrix} U_1(r_1) & U_1(r_2) \\ U_2(r_1) & U_2(r_2) \end{vmatrix}$$

که برای هر حالتی که در آن قرار می‌گیریم و r_1, r_2, r_3, \dots را مشخص می‌کنیم.

یک بار نتیجه خلاصه می‌کنیم، ما از آنجا می‌رویم که برای ذرات یکسان، اصلیت ندارد که کدام ذره در کدام ترازی باشد و فقط اصلیت دارد که چند ذره در هر ترازی هستند و توابع موجی که بصورت Ψ و Ψ' (مثلاً Ψ و Ψ') نوشته می‌شوند. هر دو یکسانند و هم‌بندی است که فقط از K_1 و K_2 و K_3 وابسته به شیم و فرق نمی‌کند ذره ۱ در آن نوشته باشد یا ذره ۲. اما آنجا می‌گویند که با هم اشتباه می‌کنند، چون تعدادی از آن بنا به عوض شود و تعداد آن‌ها در یک فاز است.

این فاز هم به این صورت است که اگر بخواهیم یک سازه ویژه تعریف کنیم، $P = \pm 1$ و دیگره تعریف این فاز فقط می‌تواند ± 1 باشد و یا $P = e^{i\alpha}$ باشد یا $P = 1$ و $P = -1$ و غیره تعریف می‌کنیم.

در حقیقت این اتفاق افتاده است که دیدیم همیشه ذرات یکسان همیشه دارند که تابع موج آنها متقارن است و آنجا می‌گویند که همیشه نتیجه داریم تابع موج آنها متقارن قرار می‌گیرد. البته دلیل این را نمی‌دانیم و فقط آنرا می‌گوییم که ذرات یکسان همیشه دارای تابع موج متقارن و ذرات با اسپین نیمه و ایزاسپین تابع موج پارتیکل هستند که به آنرا بوزون می‌گویند و تابع موج آنها همواره متقارن است. اما اصل این طوری می‌باشد که در صورتی که نسبت به آن نوشته می‌شوند، تابع موج متقارن است و یا متقارن است. اسم آنجا می‌گویند که متقارن هستند و بوزون می‌گویند، اسم آنجا می‌گویند که پارتیکل هستند و فونون می‌گویند. اینها هم ذرات بوزون هستند و هم ذرات فونون و این را فقط تجربه به ما می‌گوید.

آماره فرمی-دیراک $\rightarrow e, p, n, {}^3\text{He}$: فونون \rightarrow نیمه صحیح

آماره بوزن-اینشتین $\rightarrow d, {}^4\text{He}$, فونون : بوزون \rightarrow صحیح

آنجا که برای بوزون می‌نویسیم را آماره بوزن-اینشتین می‌گویند و آنجا که برای فونون می‌نویسیم را آماره فرمی-دیراک می‌گویند.

البته بوزون همان‌طور که می‌گویند، برای بوزون‌ها یک جمع همه می‌شود و برای فونون هم می‌شود و اصلیت متغیر را نگاه می‌کنیم برای هر یک یک جمع می‌شود نمی‌نویسیم، هر دو واحد در صورتی باشد (12، 13 و ...). یعنی برای هر n که می‌خواهیم تابع موج Ψ را بنویسیم نسبت به اصلیت است، هر دو ظاهر 10 تا در یک اندازه قرار گرفته باشد و 2 تا 1 را هم در نظر بگیریم که نسبت به آن نوشته می‌شود.

وزن ها : $g(\{n_i\}) = 1$
B.E.

اما در فرمول ها ، چون N بعد از یک در میان نوشته شده است ، آنرا در از وسط ها یا در آن لنگه ها یکی باشد ، این در میان صفرها شود یعنی هیچ روایی از آنجا نمی آید در یک حالت قرار نگیرد ، در یک حالت قرار گرفتن یعنی $n_1 = 2$ ، $n_2 = 1$ ، $n_3 = 1$ و $n_4 = 0$ ، یعنی در آن این لحاظ می آید که در میان آن صفرها شود .
پس $g(\{n_i\})$ با صوابت N ، N صفر باشد یعنی این ترکیب خطی است صوابت بیشتر نیست

یعنی در صورتی که فقط و فقط N در حالتی : $g_{F.D.}(\{n_i\}) = \begin{cases} 1 & \sum_{i=1}^N n_i^2 = N \\ 0 & \sum_{i=1}^N n_i^2 > N \end{cases}$ وقتیکه

$\sum_{i=1}^N n_i^2$ را به این دلیل نوشتیم که چون قید $\sum_{i=1}^N n_i = N$ را داریم ، $N = \sum_{i=1}^N n_i^2$ و وقتی برقرار شود که همه n_i ها یک باشد یعنی $n_i = 1$ برای همه i ، n_i بزرگتر از یک باشد در آن صورت $\sum_{i=1}^N n_i^2 > N$ می شود یعنی غیر قابل حالتی و غیر درستی باشد که در یک تراز ، n_i برابر 1 باشد و در یک تراز دیگر برابر 1 در این حالت با هم $\sum_{i=1}^N n_i = N$ برقرار است ، در هر شرط $\sum_{i=1}^N n_i^2 = N$ برقرار نیست ، یعنی این شرط می گوید که تعداد بعضی از n_i ها صفر باشد و بعضی ها 2 و 3

آنچه خواهد عزیزان در شرط $\sum_{i=1}^N n_i = N$ و $\sum_{i=1}^N n_i^2 = N$ برقرار باشد ، n_i ها برابر یک باشد ، یعنی در هر کدام از این ترازها فقط یک ذره جای گرفته باشد .

این شرایط ضعیف تر و با هم چیز است ، اصل U_1 ، U_2 ، ... تقسیم که به آنجا در حال اتفاق است ، یعنی ترازها که در نظر می گیریم با هم برابر است ، یعنی موقعی که می گویم روای اینها می تواند در یک تراز قرار نگیرد ، در دو تراز یا غیر آن باشد . صوابت اینها را نوشته شده ، یعنی U_1 ، U_2 ، ... ، یعنی بر حسب حال که می تواند تفاوت است .

شرط صوابت باشد اصل $g_{B.E.}$ و $g_{F.D.}$ و صوابت است g به این صورت است :
 $g(\{n_i\}) = \frac{N!}{n_1! n_2! \dots}$ تجزیه نپذیر

$g(\{n_i\}) = \frac{1}{n_1! n_2! \dots}$ تجزیه نپذیر \rightarrow $\frac{1}{N!}$ از آنجا در نظر می گیریم

حال در اینجا ما ذرات را که در نظر می گیریم و از این که ، همان تفاوت می کنیم و آن هم در هم حالت تجزیه نپذیر و ضعیف است .

تجزیه نپذیر باشد که U ها هم به یک همند و به U ها همند یعنی فرض می کنیم همه U ها همند باشد در آن صورت تجزیه نپذیر است ، U برابر $\frac{1}{N!}$ می شود ، چون از حالت های طبیعت ها مختلف به اندازه $N!$ داریم یعنی تعداد طبیعت ها مختلف آن ، از آنجا $N!$ هم بنا بر این است که $N!$ باید برابر یک شود .

$N! = 1 \rightarrow N = \frac{1}{N!} (U_1 + U_2 + \dots + U_N + \dots)$

مسئله:

فرض کنیم سه ذره هم اندازه کوانتومی مجزا را در نظر بگیریم و این ذرات بدون برهمکنش در یک محفظه به حجم V هستند، یعنی حالتی را برایتان بیاورم:

$$H = \sum_i \frac{p_i^2}{2m}$$

فشار این حالت را برایتان بیاورم:

$$\hat{\rho} = \frac{e^{-\beta H}}{Q}$$

عناصر این ماتریس $\hat{\rho}$ را در فضای کوانتومی در نظر بگیرید:

$$\langle r_1 \dots r_N | \rho | r'_1 \dots r'_N \rangle = \frac{1}{Q_N} \langle r_1 \dots r_N | e^{-\beta H} | r'_1 \dots r'_N \rangle$$

$$\text{که: } Q_N = \text{Tr} e^{-\beta H} = \int \langle r_1 \dots r_N | e^{-\beta H} | r_1 \dots r_N \rangle d^3r$$

همینطور در اینجا متغیر r و متغیر r' را کنار هم می‌نویسیم و این عبارت را در یک محفظه V و همچنین تابع ρ در یک محفظه V می‌نویسیم. چون ρ یک تابع متغیر است که متغیر r و متغیر r' را در نظر می‌گیرد.

تابع موج تک ذره ای هم بدین صورت است:

$$U_{K_i}(r_i) = \frac{1}{V^{1/2}} e^{i\vec{K}_i \cdot \vec{r}_i}$$

$$E = \frac{\hbar^2}{2m} \sum_{i=1}^N n_i^2, \quad \text{که: } K_i = \frac{2\pi}{V^{1/2}} n_i$$

در کوانتوم n_i می‌تواند هر عدد صحیح باشد (مثلاً $(1, 2, 3)$ ، $(1, 5, 6)$ ، ...) رابطه n_i هم که در کوانتوم K_i ها مختلف دارند.

تابع موج را بدین صورت بنویسیم که آن فرض کنیم هم n_i ها با هم جدا هستند پس ضرب $\frac{1}{V^{1/2}}$ باید در نظر بگیریم و بعد باید تابعیت n_i ها مختلف را در نظر بگیریم (یعنی حالت ذره 1 در K_1 ، ذره 2 در K_2 ، ... قرار می‌گیرد).

$$\Psi = \frac{1}{(N!)^{1/2}} \sum_P \delta_P P [U_{K_1}(r_1) \dots U_{K_N}(r_N)] \quad \text{و} \quad \delta_P = \begin{cases} 1 \\ (-1)^P \end{cases}$$

که δ_P را یک P می‌گذاریم (بزرگ یا - متغیرها) و یا $(-1)^P$ (متغیرها - یا متغیرها) که البته بطور کلی می‌توانیم بنویسیم:

$$\delta_P = (\pm 1)^P$$

البته برای ذرات آزاد در اینجا یک جسمی وجود دارد که K و r (یعنی یک شکل ظاهر می‌شوند، مثلاً (n_x, n_y, n_z) یا (تغییر ذره i) در مختصات K یا r را در نظر می‌گیریم، جابجایی آن فرق نمی‌کند که چه روی n ها یا r ها بنویسیم و چه روی K ها یا r ها بنویسیم. K و r کاملاً متساوی (میکانیک) است.

$$U_{K_i}(r_i) = \frac{1}{V^{1/2}} e^{i\vec{K}_i \cdot \vec{r}_i}$$

دو بار شماریم و عملی که بر طبق 2.1 است را یک بار شماریم و این برای این است که بتوانیم آنجا را حساب کنیم. نکته دیگر اینست که صورت $A_i B_j$ باید در این دو بار هم حساب شود، در این حالت باید این ترتیب بین آنها را رعایت کنیم. یعنی این عملها را سه بار حساب کنیم و هم وصله داشته باشد.

معمولاً تا عملهای دوزدهای بیشتر داریم و بیشتر از سه دوزده معمولاً وصله ندارد و آنجا را بصورت اصلی حساب میکنیم.

$$H = \sum_i \frac{P_i^2}{2m} + \sum_{i < j} V_{ij} \quad (1)$$

حالا که ذرات آزاد داشته باشیم، به این سیستم چه نوع روابط را در یک مکان باید لحاظ کنیم. در حالتی که عملها تک دوزده ای باشند مثل ذرات آزاد بدون برهم کنش، حاصلگیری برابر است با:

$$H = \frac{1}{2m} \sum P_i^2$$

و عملها هم برابر است با:

$$\hat{\rho} = \frac{e^{-\beta H}}{Q_N}$$

عملها

با دنبال این کسیت هستیم:

$$\langle r_1 \dots r_N | \hat{\rho} | r'_1 \dots r'_N \rangle = \frac{\langle r_1 \dots r_N | e^{-\beta H} | r'_1 \dots r'_N \rangle}{Q_N} \quad (2)$$

این $r'_1 \dots r'_N$ برای همان $r_1 \dots r_N$ باشند یعنی احتمال این است که در r_1 دوزده r_1 در r_2 دوزده r_2 و ... قرار گرفته باشند.

در رابطه بالا Q_N هم برابر است با:

$$Q_N = \text{Tr} e^{-\beta H} = \int \langle r_1 \dots r_N | e^{-\beta H} | r_1 \dots r_N \rangle d^3N r \quad (3)$$

برای نتیجه 2.1 را حساب کنیم، باید به تابع توزیع را بنویسیم و چون معمولاً مفروضه $e^{-\beta H}$ را حساب کنیم باید تابع توزیع را در برابر همان بنویسیم که حاصلگیری را قطعاً کند. یعنی برای N دوزده ای:

$$H \Psi_E(r_1 \dots r_N) = E \Psi_E(r_1 \dots r_N) \quad (4)$$

در اینجا Ψ_E و E روی تابع توزیع بنا شده باشد، برای هر عمل دوزده ای این بر حسب می تواند در واقع هر چند دوزده ای باشد، مثل آنکه این عملها دوزده ای را بنویسیم و E کسیت نیز باشد و یا چند باشد که غیر دوزده ای باشد. برای هر عمل دوزده ای $\Psi \in A$ با این صورت در معادله ویژه بنویسیم:

$$A \Psi_\alpha(r_1, r_2, \dots, r_N) = \alpha \Psi_\alpha(r_1, r_2, \dots, r_N)$$

این Ψ_α که در معادله بالا است، این در رابطه عملها است.

در رابطه 4.1 چون عملها هم حاصلگیری است، پس بر حسب آن عملها است. ولی در صورت هم لزوماً اینطور نیست.

همانطور که قبلاً گفتیم، این ψ ها را باید بصورت تابع موج تک ذره ای بنویسیم، که اگر بخواهیم بنویسیم بر حسب

$$\psi_E^{(B)} = \sum U_{E_i}(r_i) \quad (5)$$

که هر کدام از U ها، چون حالتی بصورت $\frac{p^2}{2m}$ است، آنها را با عدد موج K بر حسب می‌نویسیم، این:

$$U_K(r) = \frac{1}{V^{1/2}} e^{iK \cdot r} \quad (6)$$

در ψ ها، که می‌خواهیم بر حسب K بنویسیم، K طی به این صورت است:

$$K^2 = K_1^2 + \dots + K_N^2$$

در واقع این چیزی که E می‌گذاریم، در رابطه تک ذره ای E نیست، یعنی یکسانی α در حالت K_1, K_2, \dots, K_N بنویسیم بطوریکه در رابطه با E صدق کنند، این ψ_K می‌شود:

$$\psi_K = \frac{1}{(N!)^{1/2}} \sum_P \delta_P P [U_{K_1}(r_1) \dots U_{K_N}(r_N)] \quad (7)$$

اگر سیستم نذرین باشد، بعضی از این K ها می‌توانند با هم مساوی باشند، اما اگر سیستم غیر نذرین باشد، هر کدام از آنها می‌توانند با هم مساوی باشند چون اگر بصورت در میان گرفته شود، صحت می‌شود.

$$\delta_P = (\pm)^P$$

یعنی در رابطه با E می‌نویسیم که δ_P برابر است با:

$$\langle \psi_{K_1} | \psi_{K_2} \rangle = \delta_{\alpha\beta}$$

حسب گذشته نشان داریم که:

اما در رابطه (7) P در $[U_{K_1}(r_1) \dots U_{K_N}(r_N)]$ را می‌توانیم دو جور بنویسیم، هم می‌توانیم این P را روی r_1, r_2, \dots, r_N بنویسیم هم می‌توانیم روی K_1, K_2, \dots, K_N بنویسیم، می‌توانیم بین آن حالت دو ذره ای، رابطه (6) به این صورت می‌شود:

$$U = \frac{1}{V} e^{iK_1 \cdot r_1} e^{iK_2 \cdot r_2}$$

توجه کنید مولف در این حالت این است که جای او 2 را عوض کنیم و این یعنی اینکه یکسانی r_1, r_2 بنویسیم و یکسانی K_1, K_2 بنویسیم و این فرضیه می‌کنند یا اینکه K_1, K_2 بنویسیم و بعکس آن. این یعنی طریقی است که K, K در رابطه (6) همان طریقی بودند و البته باید اصولاً حالتیست ذرات را تمام می‌نویسیم.

پس اگر P در U ها در رابطه (7) را می‌توانیم بر این دو صورت بنویسیم که هر دو یکجمله هستند:

$$P [U_{K_1}(r_1) \dots U_{K_N}(r_N)] = U_{K_1}(P_1) \dots U_{K_N}(P_N)$$

$$P [U_{K_1}(r_1) \dots U_{K_N}(r_N)] = U_{PK_1}(1) \dots U_{PK_N}(N)$$

مانند همواره می‌باشد (۲) (صورت) را می‌توانیم بنویسیم و این روابط آن جمع روی E, E' (در حالت کلی) داریم

$$\langle r_1 \dots r_N | e^{-\beta H} | r'_1 \dots r'_N \rangle = \int \frac{\sum_E \langle r_1 \dots r_N | E \rangle \langle E | e^{-\beta H} | E' \rangle \langle E' | r'_1 \dots r'_N \rangle}{E'} \\ \Rightarrow \langle r_1 \dots r_N | e^{-\beta H} | r'_1 \dots r'_N \rangle = \sum_{K_1 \dots K_N} e^{-\beta (K_1^2 + K_2^2 + \dots + K_N^2) \frac{\hbar^2}{2m}} \psi_E^*(r_1 \dots r_N) \psi_E(r'_1 \dots r'_N)$$

که در نظر می‌گیریم، فقط باید همان رابطه (۵) را بنویسیم و هیچ جا نیست. زیرا هم کار نمی‌کند و کار نمی‌کند باید یک کتب معتبر از آنجا برداشت کنیم و آنرا فراموش نکنیم باید یک ترکیب یادداشت فرماییم که این طور بنویسیم:

$$\langle r_1 \dots r_N | e^{-\beta H} | r'_1 \dots r'_N \rangle = \frac{1}{N!} \sum_{K_1 \dots K_N} e^{-\beta (K_1^2 + \dots + K_N^2) \frac{\hbar^2}{2m}} \int \delta_p (U_{PK_1}^*(1) U_{PK_2}^*(2) \dots U_{PK_N}^*(N)) \\ \times \int \delta_q (U_{qK_1}(1) U_{qK_2}(2) \dots U_{qK_N}(N)) \quad (8)$$

آخرین باید trace رابطه (۲) (۸) را حساب کنیم یعنی r, r' را با هم قرار دهیم و اشتراک روی dr را حساب کنیم و \sum_p که r برابر r' باشد، \sum_q را با هم کنیم و یک اشتراک می‌ماند و این اشتراک را δ_p و δ_q که برابر $(1)^q$ و $(1)^p$ هستند، این برداشت \pm به ما می‌دهند، در نتیجه اشتراک روی r_i برای $U_{qK_i}^*(1)$ و $U_{qK_i}(1)$ می‌ماند:

$$\int e^{(-PK_1 + QK_1)r_i} dr_i^3 = \delta_{PK_1, QK_1} \quad (9)$$

بنابراین فقط وقتی جا نیست این وقت می‌ماند این اشتراک باید دارد، در غیر این صورت صفر می‌شود، مثلاً فرض کنیم K_1 را با K_2 می‌توانیم K_2 برابر K_1 باشد، این اشتراک وقتی برابر Q هم K_1 را به K_2 می‌دهد، یا اینکه اگر در P یک جا نیستی و در Q یک جا نیستی، که K_1 را به K_2 می‌دهد، اما در Q یک جا نیستی و در P یک جا نیستی، این دو صورت اشتراک حاصل می‌شود.

در عبارت ψ_E^* باید رابطه (۸) ضرب در جمع را داریم که جمله اول بدون جا نیستی است. در جمله دوم یک جا نیستی است که در انتهای ψ_E است. \sum_p و \sum_q که برابر $(1)^q = (1)^p$ هستند، این برداشت \pm به ما می‌دهند، در نتیجه اشتراک روی r_i برای $U_{qK_i}^*(1)$ و $U_{qK_i}(1)$ می‌ماند:

$$(e^{iK_1 \cdot r_1} e^{iK_2 \cdot r_2} \dots e^{iK_N \cdot r_N} + \dots) (e^{-iK_1 \cdot r_1} e^{-iK_2 \cdot r_2} \dots e^{-iK_N \cdot r_N} + \dots) \quad (10)$$

مثلاً اشتراک روی r_1 در جمله اول در جمله دوم اشتراک می‌ماند، صفر می‌شود، مثلاً $K_1 = K_2$ باشد، یعنی از این تمام جمله‌ها یک فقط باقی می‌ماند، انتخاب می‌کنیم که $K_1 = K_2$ باشد، در غیر این صورت اشتراک صفر می‌ماند، این اشتراک آن صفر می‌شود. این این برداشت است که در تمام این جا نیستی‌ها، فقط آن جا نیستی‌هاست که با هم می‌مانند و این اشتراک حاصل می‌شود.

بنابراین رابطه (۱۰) را می‌نویسیم:

$$\langle r_1 \dots r_N | e^{-\beta H} | r'_1 \dots r'_N \rangle = \frac{1}{N!} \sum_{K_1 \dots K_N} e^{-\beta \hbar^2 / 2m (K_1^2 + \dots + K_N^2)} \int_P \delta_P U_{PK_1}^{(1)} \dots U_{PK_N}^{(N)} U_{PK_1}^{*(1)} \dots U_{PK_N}^{*(N)} \quad (10)$$

اگر هم‌ها ضمیمه بزرگ باشند، می‌توانیم این تبدیل را قرار دهیم (با فرضی که در زمان آزادی می‌توانیم این ضمیمه را نادیده بگیریم)

$$\frac{1}{V} \sum_K \rightarrow \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3K \quad (11)$$

* مثلاً اگر در رابطه (۱۰) جرم فقط δ_P بماند و بقیه نادیده گرفته شود، δ_P هم در سیستم P در نظر گرفته می‌شود (δ_P) بزرگیم، در این صورت مقدار آن که یک است و حذف می‌شود، پس با δ_P بنا بر این چون وقتی برای δ_P ضمیمه داریم می‌توانیم نادیده بگیریم تا تابع نوع را برآورد می‌دهند.

مثلاً در جرم به رابطه (۱۰) اوجی را فرض می‌کنیم که بعد از آن اما فرضی در رابطه δ_{K_1, K_2} را می‌توانیم نادیده بگیریم (یعنی جمع روی K_1 و K_2 می‌توانیم که برای K_1 و K_2 را می‌توانیم و فقط K_1 بگذاریم و به علاوه علامت δ_{K_1, K_2} می‌ماند چون فقط یک حالت است در هر نقطه در P صورت گرفته است. مثلاً در مورد دو ذره می‌توانیم:

$$\int (e^{iK_1 \cdot r_1} e^{iK_2 \cdot r_2} e^{iK_2 \cdot r_1} e^{iK_1 \cdot r_2}) (e^{-iK_1 \cdot r_1} e^{-iK_2 \cdot r_2} e^{-iK_2 \cdot r_1} e^{-iK_1 \cdot r_2}) d^3r_1 d^3r_2$$

$$= \int (1) d^3r_1 d^3r_2 - \int e^{i(K_2 - K_1) \cdot r_1} \int e^{i(K_1 - K_2) \cdot r_2} d^3r_2 + \dots$$

$\delta_{K_1, K_2} \quad \delta_{K_1, K_2}$

که در این دو عبارت جمع روی K_1 و K_2 هم هست، پس با فرض این δ_{K_1, K_2} ها باید $K_1 = K_2$ را در نظر بگیریم و به این ترتیب از جمع ها را هم نادیده می‌گیریم اما نکته این است که عبارت δ_{K_1, K_2} را نادیده می‌گیریم و به وجود نماند که پس جمع را حذف کند چون بقیه عبارت \sum_{K_1, K_2} ظاهر می‌شوند، پس حذف نمی‌کنند!

پس در واقع در رابطه (۱۰) باید یک δ_P را نادیده بگیریم که آن عبارت می‌شود δ_{K_1, K_2} است نسبت به δ_{K_1, K_2} و بنا به وقتی از رابطه (۱۰) به (۱۱) می‌رسیم δ_P را به صورت $\delta_P \delta_{K_1, K_2}$ می‌نویسیم چون δ_{K_1, K_2} نسبت به δ_P و δ_{K_1, K_2} را نسبت می‌دهیم.

حال که تبدیل (۱۱) را در رابطه (۱۰) قرار دهیم

$$\langle r_1 \dots r_N | e^{-\beta H} | r'_1 \dots r'_N \rangle = \frac{1}{N! (2\pi)^{3N}} \sum_P \delta_P \left\{ \int e^{-\beta \hbar^2 / 2m K_1^2} e^{iK_1 \cdot (P_1 - r'_1)} d^3K_1 \right. \quad (12)$$

$$\left. \times \left(\int e^{-\beta \hbar^2 / 2m K_2^2} e^{iK_2 \cdot (P_2 - r'_2)} d^3K_2 \right) \dots \left(\int e^{-\beta \hbar^2 / 2m K_N^2} e^{iK_N \cdot (P_N - r'_N)} d^3K_N \right) \right\}$$

ببینیم که در این رابطه δ_P را به چه صورت می‌نویسیم که هم یک شکل هندسی چون $(P_1 - r'_1)$ یک تابع است از r_1 و P_1 است P_1 از δ و δ نسبت به $(P_1 - r'_1)$ می‌شود $(\delta - 1)$ یا $(r'_1 - r_1)$.

همانطور که رابطه (12) از نوع $(r_i - r_j)$ هستند یعنی:

$$f(r_i - r_j) = \int e^{-\beta \hbar^2 k^2 / 2m + i k \cdot (r_i - r_j)} d^3 k$$

این انتگرالها، انتگرالها آکوسی هستند و سمت راست

$$\Rightarrow f(r_i - r_j) = \int e^{-\beta \hbar^2 k^2 / 2m + i k \cdot (r_i - r_j) - \frac{m}{2\beta \hbar^2} |r_i - r_j|^2} d^3 k = e^{-\frac{m}{2\beta \hbar^2} |r_i - r_j|^2} \quad \text{ضرب } \times \quad (13)$$

ضریبی که در \exp وجود دارد باید در انتگرال $\frac{1}{\text{طول}^3}$ داشته باشد

$$\left[\frac{m}{2\beta \hbar^2} \right] = \frac{1}{4(\text{طول})}$$

این نوع کوئید را در اینجا فراموش نکنیم

$$\lambda \equiv \hbar \left(\frac{2\pi\beta}{m} \right)^{1/2} \quad (14) \quad \text{طول موج آکوسی سینوس}$$

برای این موضوع از همان طول موج دوری درجه اول:

$$\lambda = \frac{h}{p}$$

بعد در λ یا v مقدار p مقدار $\sqrt{2mE}$ را میزنیم و میسر E هم یکسانی از KT قرار دهیم (تقریباً $E = \frac{3}{2}KT$)

* در نهایت مقدار عددی λ را برای سینما و سینما درم بدست میآوریم! پس e ، d (دورنگ) و یک مانع هستند که در آن order کم باشد و یک دورنگ و در سینما مختلف که e در مانع چنان به عنوان یک صیقلی از طول در نظر گرفته شود.

پس رابطه (13) شود:

$$f(r_i - r_j) = e^{-\pi r^2 / \lambda^2} \quad \text{ضرب } \times$$

که برای هم صلاحت رابطه (12) یک شکل ظاهر شود: فقط صلیبیت حاصلست و در درجه اول β داریم:

$$\langle r_1 \dots r_N | e^{-\beta H} | r_1 \dots r_N \rangle = \frac{1}{N! \lambda^{3N}} \int \prod \delta_p f(p r_1 - r_1) \dots f(p r_N - r_N) \quad (15)$$

طول تابع پارتیشن را میزنیم:

$$Q_N(\beta) = \text{Tr} e^{-\beta H} = \langle r_1 \dots r_N | e^{-\beta H} | r_1 \dots r_N \rangle = \int d^3 r \frac{1}{N! \lambda^{3N}} \int \prod \delta_p f(p r_1 - r_1) \dots f(p r_N - r_N) \quad (16)$$

تدریقات δ را میزنیم و در اینجا اصله δ میزنیم که صلیبیتی در نظر بگیریم و باید فقط هر رشته δ را در $\frac{1}{2}$ و برای δ میزنیم هر رشته δ را $\frac{1}{2}$ و $\frac{1}{2}$ یعنی:

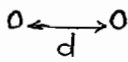
یعنی صلیبیت تابع موج و متغیر δ و β را میزنیم و یک تابع موج بسته داریم:

$$p r_i = r_i$$

$$N = U(r_1) \dots U(r_N)$$

پس هیچ صلیبیتی در اینجا وجود ندارد

فرض کنیم هم‌طور سیستم λ است و فاصله متوسط بین ذرات d باشد.



حال هم‌فراهمی یک را طبق برای d پیدا کنیم.
تقریباً λ باشد، انرژی ذرات را بدون نگرانی از λ می‌توانیم، چنانچه که به عودده هم‌رسان تقریباً $\frac{V}{N}$ است.

$$\frac{V}{N} \approx \frac{V}{N}$$

بنابراین این فاصله d از نوع این می‌باشد که به عودده هم‌رسان نزدیک است:

$$\Rightarrow d \approx \left(\frac{V}{N}\right)^{\frac{1}{3}}$$

این ذرات درجه بزرگی است:

این برآیند λ است عودده هم‌رسان فاصله d که ذرات هم‌رسان را هم می‌تواند بزرگتر و بزرگتر می‌شود.

بنابراین فاصله بین ذرات $|r_i - r_j|$ از جنس $d, 2d, \dots$ است.

$$|r_i - r_j| \sim d, 2d, \dots$$

عودده فاصله بین ذرات r می‌تواند $f(r)$ که از طریق این ذرات است، گفته می‌شود، این با توجه به این است
عودده r می‌تواند $f(r)$ بصورت \exp بیان شود عدد بزرگ می‌شود، این کوچکتر می‌شود

$$f(r) = e^{-\pi r^2 \lambda^2} \quad \rightarrow \quad r \uparrow \Rightarrow f(r) \downarrow$$

این آنگاه می‌تواند هم‌بسته انرژی ذرات که فاصله d به هم نزدیک تر باشند.

حال این d (به نسبت به λ) کمین زنده شود و به نسبت به λ بزرگ باشد. این روایع اند فاصله متوسط این
ذرات (d) ضعیف بزرگتر از λ باشد، در آن صورت به ازای هر کلام از حالتی که در نظر داریم، باقی می‌ماند.

$$\text{if } d \gg \lambda \Rightarrow f(|r_i - r_j|) \approx 1$$

چون λ که نسبت است و $|r_i - r_j|$ با λ هم از جنس $d, 2d, 3d, \dots$ است این نزدیکترین حالتی است که
بین d است، این انرژی بزرگترین حالتی است $d \gg \lambda$ است، در نتیجه بهینه معلوم است و بهینه صافاً همگام
می‌شوند.

این بین معیار ضعیف فاصله است بین جگانه و طول موج گرانی λ ، جگانه را برای این گفتیم که چون d است که ما
در نظر می‌گیریم برابر $\left(\frac{V}{N}\right)^{\frac{1}{3}}$ است که $\frac{V}{N}$ طول موج عکس جگانه است.

این بین جگانه و طول موج گرانی λ است که به نسبت کوچک می‌شود است برای اینکه اصلاً ضعیف جگانه را که انرژی در نظر
می‌گیریم و می‌توانیم λ

انرژی گرانی فزاینده و جگانه ضعیف با طول موج λ کمین بزرگتر است که عودده جگانه بزرگتر است و این در واقع معمولی
معلوم است این d نسبت به λ قابل بیان است و ما نیز می‌توانیم که در واقع این حالتی است که در نظر می‌گیریم.

برای $d \gg \lambda$ که ضعیف جگانه بزرگتر است، این حالتی است که به نسبت کوچک می‌شود است و جگانه معمولی ضعیف بزرگتر

انرژی E کینم (یعنی) بیفتند از نظر کینم چون در فرکانس ω آزاد داریم) و دمای معمولی $k_B T \approx 273$ را در نظر بگیریم و بایستد
 بگیریم، در این صورت $\hbar \omega$ از $k_B T$ بسیار بزرگتر است و در این $k_B T$ مقایسه کنیم. $\hbar \omega$ بازه $\hbar \omega$ ثابت $\hbar \omega$ از $k_B T$ بسیار بزرگتر است
 داریم که $\hbar \omega$ $k_B T$ بسیار بزرگتر است. $\hbar \omega$ $k_B T$ بسیار بزرگتر است. $\hbar \omega$ $k_B T$ بسیار بزرگتر است. $\hbar \omega$ $k_B T$ بسیار بزرگتر است.
 زرات معمولی با آن برقرار داریم، بنا بر این است که $\hbar \omega$ $k_B T$ بسیار بزرگتر است. $\hbar \omega$ $k_B T$ بسیار بزرگتر است. $\hbar \omega$ $k_B T$ بسیار بزرگتر است.
 آن نگاریم، $\hbar \omega$ $k_B T$ بسیار بزرگتر است. $\hbar \omega$ $k_B T$ بسیار بزرگتر است. $\hbar \omega$ $k_B T$ بسیار بزرگتر است. $\hbar \omega$ $k_B T$ بسیار بزرگتر است.
 برای $\hbar \omega$ $k_B T$ بسیار بزرگتر است. $\hbar \omega$ $k_B T$ بسیار بزرگتر است. $\hbar \omega$ $k_B T$ بسیار بزرگتر است. $\hbar \omega$ $k_B T$ بسیار بزرگتر است.
 این اثرات کوانتومی از همین جا ناشی می شود، برای همین یک تقسیم عددی از $\hbar \omega$ $k_B T$ را حساب می کنند.

مانند $\hbar \omega$ و $k_B T$ $\hbar \omega$ $k_B T$ بسیار بزرگتر است. $\hbar \omega$ $k_B T$ بسیار بزرگتر است. $\hbar \omega$ $k_B T$ بسیار بزرگتر است. $\hbar \omega$ $k_B T$ بسیار بزرگتر است.

تابع کوانتومی منظور $\hbar \omega$ $k_B T$ بسیار بزرگتر است. $\hbar \omega$ $k_B T$ بسیار بزرگتر است. $\hbar \omega$ $k_B T$ بسیار بزرگتر است. $\hbar \omega$ $k_B T$ بسیار بزرگتر است.
 بگیریم، در این صورت $\hbar \omega$ $k_B T$ بسیار بزرگتر است. $\hbar \omega$ $k_B T$ بسیار بزرگتر است. $\hbar \omega$ $k_B T$ بسیار بزرگتر است. $\hbar \omega$ $k_B T$ بسیار بزرگتر است.
 در دمای $k_B T$ $\hbar \omega$ $k_B T$ بسیار بزرگتر است. $\hbar \omega$ $k_B T$ بسیار بزرگتر است. $\hbar \omega$ $k_B T$ بسیار بزرگتر است. $\hbar \omega$ $k_B T$ بسیار بزرگتر است.
 $\hbar \omega$ $k_B T$ بسیار بزرگتر است. $\hbar \omega$ $k_B T$ بسیار بزرگتر است. $\hbar \omega$ $k_B T$ بسیار بزرگتر است. $\hbar \omega$ $k_B T$ بسیار بزرگتر است.
 $\hbar \omega$ $k_B T$ بسیار بزرگتر است. $\hbar \omega$ $k_B T$ بسیار بزرگتر است. $\hbar \omega$ $k_B T$ بسیار بزرگتر است. $\hbar \omega$ $k_B T$ بسیار بزرگتر است.

وقتی $\hbar \omega$ $k_B T$ بسیار بزرگتر است، $\hbar \omega$ $k_B T$ بسیار بزرگتر است. $\hbar \omega$ $k_B T$ بسیار بزرگتر است. $\hbar \omega$ $k_B T$ بسیار بزرگتر است.
 جاها بر هم کشی که با هم در این طور تصور می کنیم که $\hbar \omega$ $k_B T$ بسیار بزرگتر است. $\hbar \omega$ $k_B T$ بسیار بزرگتر است. $\hbar \omega$ $k_B T$ بسیار بزرگتر است.
 می شوند که اینها براندیشه شوند و به $\hbar \omega$ $k_B T$ بسیار بزرگتر است. $\hbar \omega$ $k_B T$ بسیار بزرگتر است. $\hbar \omega$ $k_B T$ بسیار بزرگتر است.

بد نیست این را هم حساب کنیم که انرژی های Mev معادل $\hbar \omega$ $k_B T$ بسیار بزرگتر است!

ببینیم این شرایط برقرارند، اثرات کوانتومی $\hbar \omega$ $k_B T$ بسیار بزرگتر است. $\hbar \omega$ $k_B T$ بسیار بزرگتر است. $\hbar \omega$ $k_B T$ بسیار بزرگتر است.
 فرض کنیم $N=2$ باشد، انرژی های $\langle n_1, n_2 | \rho | n_1, n_2 \rangle$ را حساب کنیم، یعنی احتمال اینکه ذره اول در n_1 ، ذره دوم در
 n_2 باشد، یعنی:

$$\langle n_1, n_2 | \rho | n_1, n_2 \rangle = \frac{1}{Q_2} \langle n_1, n_2 | e^{-\beta(P_1^2 + P_2^2)/2m} | n_1, n_2 \rangle \quad (I)$$

Q_2 را می توانیم حساب کنیم (یعنی از رابطه n_1 و n_2 $\hbar \omega$ $k_B T$ بسیار بزرگتر است).
 رابطه (16) را برای دو ذره می نویسیم. باید بینیم $f(p_1 - n_1)$ و $f(p_2 - n_2)$ $\hbar \omega$ $k_B T$ بسیار بزرگتر است. $\hbar \omega$ $k_B T$ بسیار بزرگتر است.
 یعنی هیچ تغییری در $\hbar \omega$ $k_B T$ بسیار بزرگتر است. $\hbar \omega$ $k_B T$ بسیار بزرگتر است. $\hbar \omega$ $k_B T$ بسیار بزرگتر است.
 بنابراین اینها عین هم ظاهر می شوند، فقط عدت بین این دو (چند اول و n_2) باشد. و اینها است. $\hbar \omega$ $k_B T$ بسیار بزرگتر است.
 و اگر $\hbar \omega$ $k_B T$ بسیار بزرگتر است. $\hbar \omega$ $k_B T$ بسیار بزرگتر است. $\hbar \omega$ $k_B T$ بسیار بزرگتر است. $\hbar \omega$ $k_B T$ بسیار بزرگتر است.

$$Q_2 = \frac{1}{916} \int (1 \pm e^{-2\beta n_2^2 / \lambda^2}) d^3 r_1 d^3 r_2$$

این اشکال، اشکال سینتر نسبت به مرکز آنرا ساخته کرد. اشکال عمود (۱) یک گوی (ماده) بود که در حال حرکت است که بر زمین
اشکال بزرگ با یک مرکز جرم و یک نقطه مرکز جرم بود. نقطه مرکز جرم آن یک جسم به نام ماده و نقطه مرکز جرم آن $\frac{4\pi}{3} r^3 \rho$ به نام ماده
صورت اشکال ده فقط به r وابسته است و یک اشکال در $r^2 e^{-\alpha r^2}$ داریم که اشکال گوی است که باقی بماند آن رابطه زیر بدست
آید:

$$Q_2 = \frac{1}{2} \left(\frac{V}{\lambda^3} \right)^2 \left(1 \pm \frac{1}{2^{3/2}} \left(\frac{\lambda^3}{V} \right) \right)$$

صورت $d \ll \lambda$ باشد:

$$Q_2 = \frac{1}{2} \left(\frac{V}{\lambda^3} \right)^2 \left(1 \pm \frac{1}{2^{3/2}} \left(\frac{\lambda^3}{V} \right) \right) \approx \frac{1}{2} \left(\frac{V}{\lambda^3} \right)^2 \quad \text{II}$$

صورت $\langle n_2 | p | n_2 \rangle$ توپا d در صورت $d \ll \lambda$:

I, II

$$\langle n_2 | p | n_2 \rangle = \frac{1}{Q} \langle n_2 | e^{-\beta(P_1^2 + P_2^2)/2m} | n_2 \rangle \approx (1 \pm e^{-2\pi n_2^2 / \lambda^2}) \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{III}$$

در رابطه I، یک λ ظاهر شود که این λ با λ در صورت Q_2 ظاهر شود و حاصل صورت رابطه فوق $d \ll \lambda$ است
اگر توپ $d \ll \lambda$ را بگیریم.

رابطه II احتمال این است که ذره n_1 و ذره n_2 در n_2 باشد.

در رابطه III، اگر فرض کنیم ما نسبت به n_2 (یعنی $-$) را می‌خواهیم بگیریم، n_2 اگر ما در صورت $\langle n_2 | p | n_2 \rangle$
در n_2 (یعنی $+$) صورت شود یعنی احتمال اینکه این دو ذره یک مکان باشند، صورت
آنها که بزرگ باشد، یک احتمال معینی هم دارند در یک مکان باشند که این احتمال $\frac{2}{\sqrt{2}}$ است.
حرف n_2 بیشتر و بیشتر شود، جمله $\exp(-2\pi n_2^2 / \lambda^2)$ کوچکتر شود.
اگر n_2 به سمت بی‌نهایت برود $\exp(-2\pi n_2^2 / \lambda^2)$ صورت شود و $\langle n_2 | p | n_2 \rangle$ به $\frac{1}{\sqrt{2}}$ میل می‌کند.

مهر n_2 از $\langle n_2 | p | n_2 \rangle$ یعنی رابطه III (هم برای حالت مثبت و هم حالت منفی)، نتایج زیر را می‌دهد:
صورت کنیم تا خود را بکنیم که این مقدار به مقدار حدی بدست می‌آید.

چیزی که در فضا هم رسم کنیم A می‌نامیم:

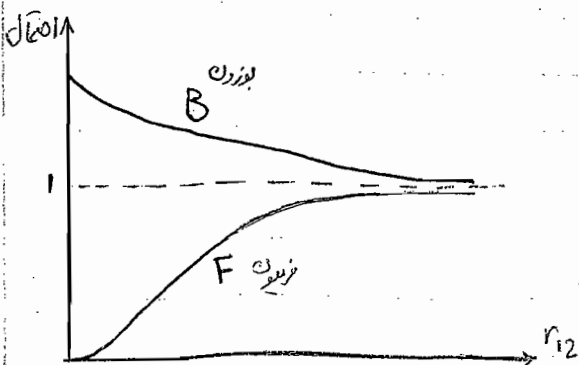
$$A_B = V^2 P_B = 1 + e^{-\alpha r^2}$$

برای فضا:

$$A_F = V^2 P_F = 1 - e^{-\alpha r^2}$$

برای فضا:

اگر نتوانیم راهی کنیم برای A_B یعنی A_F نسبت به n_2



یعنی این آثار است که می گویند که برای پوزیترونها چقدر آنها به لیدر نزدیک شوند، آنتنشن بیشتر شود. یعنی گویا یک جوهری این آثار را تولید میکند و جذب بین پوزیترونها وجود دارد و اینها سعی میکنند که یکدیگر قرار بگیرند و برای فریب دادن بعضی است. گویا یک نیروی دافع برای فریب دادن وجود دارد.

زود کنیم که ما به هم نرسیم و... او را در نظر می آوریم، این آثار آنقدر کم این را به ما می دهد که برای یک ذره، بلکه باید بین این ذره باشد.

در رابطه ①، هامیلتونی بصورت $(P_1^2 + P_2^2)_{2m}$ یک حالت ساده بود، فقط برای عملگرهای یک ذره ای ما به راحتی توانستیم آنها را حساب کنیم و $(p_1 - p_2)$ نیز هم و این آخر. چون عملگرهای یک ذره ای بودند این کار به راحتی انجام شد.

اما اگر عملگرهای یک ذره ای نباشند، آنرا با هم حرکتی را می خواهیم حساب کنیم باید عبارت زیر را حساب کنیم:

$$\langle G \rangle = \frac{1}{Q_N} \text{Tr} (G e^{-\beta H})$$

خوب وقتیکه H نرمه شده در رابطه بالا، عملگرهای پوزیترون و یک ذره ای پیدا می شوند و باید ترنفره های معمولی می توانیم $e^{-\beta H}$ را یک جوابی را بدیم و مثلاً بنویسیم: $\sum_i (e^{-\beta H})^i$. حال اینکه اینجا جای می شود بماند و... اینها این نکات را فراموش کنیم بعد از بیان اصول، عملیات یک ذره ای بود و باید یک سری عملیات پوزیترونها، یک ذره ای و...

یعنی اصولاً trace کیست به این صورت بروکار داریم. trace عملگرهای بروکار داریم که باید بصورت زیر بنویسیم:

$$\text{Tr} (O) = \sum_{\alpha} \langle \Psi_{\alpha} | O | \Psi_{\alpha} \rangle$$

معنی است این عملگر یک ذره ای باشد مثل P_{2m}^2 یا $e^{-\beta H}$ که کاره های دیگری باشند. ولی معنی است 0 از همین (r_{ij}) و $V = \sum_{i,j} V_{ij}$ است:

$$V = \sum_{i,j} V_{ij} (r_{ij})$$

مثلاً می خواهیم بسازیم اصل را حساب کنیم (بصورت اصل P_{2m}^2 را حساب می کنیم و می توانیم بسازیم اصل را حساب کنیم.

معمولاً می توانیم حساب دو ذره ای $(V_{ij}(r_{ij}))$ با عملگرهای پوزیترونها، عملگرهای هسته که حساب می شود و با عملگرهای دیگر می کنند.

حالا به شکل r_1, r_2 با هم میزنیم این انتگرال را سه تریبل میزنیم تا به این

فرم این ها را اندر محققات مرکز جرم میزنیم، از هر کدام یک ψ خارج می شود فقط به این جهت که این ها را با هم میزنیم و البته با یک ψ این انتگرال را میزنیم:

$$\langle PK_1 PK_2 | U_{12} | K_1 K_2 \rangle = \frac{1}{V^2} \int d^3 r_1 d^3 r_2 e^{-iPK_1 \cdot r_1} e^{-iPK_2 \cdot r_2} V(r_{12}) e^{iK_1 \cdot r_1} e^{iK_2 \cdot r_2}$$

$$= \frac{1}{V^2} \int d^3 r_1 d^3 r_2 e^{-i(PK_1 - K_1) \cdot r_1} V(r_{12}) e^{-i(PK_2 - K_2) \cdot r_2} \quad (\text{X})$$

محققات نیز در مرکز جرم:

$$\begin{cases} R = \frac{1}{2} (r_1 + r_2) \\ r = r_1 - r_2 \end{cases} \quad (\text{X})$$

در اینجا R را به این خاطر میزنیم که چون در جرم مساوی هستند، مرکز جرم از این رابطه بدست می آید

$$R = \frac{mr_1 + mr_2}{2m} = \frac{1}{2} (r_1 + r_2)$$

انتگرال روی $d^3 r_1$ و $d^3 r_2$ را هم به این صورت میزنیم:

$$d^3 r_1 d^3 r_2 = J d^3 r d^3 R$$

$\frac{1}{8} \cdot 8 \cdot 8$

به این ترتیب انتگرال روی $d^3 R$ کلاً حذف می شود

$$(\text{X}) = \frac{1}{V^2} \int d^3 R e^{R \cdot (PK_1 - K_1)} \int V(r) e^{-i(PK_2 - K_2) \cdot r} d^3 r$$

انتگرال $d^3 R$ دارد که نسبت (X) صاف میزنیم نوعی به ازای هر طاقست که تصور می کنیم وقتی K_1, K_2, r_1, r_2 از رابطه (X) بر حسب R, r قرار می دهیم به عنوان PK_1, PK_2, K_1, K_2 است یا در K_1, K_2, PK_1, PK_2 است یا در K_2, K_1 می توانیم نشان دهیم که عبارت (X) صاف میزنیم و بنابراین انتگرال روی $d^3 R$ یک δ میماند و این عبارت را با δ این صورت میزنیم:

$$(\text{X}) = \frac{1}{V} \int V(r) e^{-i(PK - K) \cdot r} d^3 r$$

$$\Rightarrow \langle PK_1 PK_2 | U_{12} | K_1 K_2 \rangle = \frac{1}{V} \int V(r) e^{-i(PK - K) \cdot r} d^3 r$$

همین استیم این وقتی K_1 و K_2 صاف باشند یک انتگرال $V(r_{12})$ (به شکل بیان کنیم) را میماند (بعد از این که δ نسبت به R را میزنیم) K_1, K_2 است، یک انتگرال میزنیم به نام δ و این $V(r_{12})$ میزنیم

حالات را هم (X) (همه با هم) در نامه طاقی ضمیمه است طابقاً، خصوصاً اینده میزنیم که در اینجا، فرقی نیست

از جمله بعد مدافع فصل 6، می رویم که کاربرد است از این چیزهایی که خوانیم!

* سوال: چرا در رابطه 7، ψ_{12} را نوشتیم؟
در رابطه 7، $\frac{N(N-1)}{2}$ را در پیش از آنکه نوشتیم، دلیل ما این بود که آن $(\psi_{12} + \psi_{21} + \dots + \psi_{N-1,N})$ را نگاه کنیم، باید آنرا به این صورت بنویسیم:

$$\int d^3r \psi_{\alpha}^*(r_1 \dots r_N) \psi_{12} \psi_{\alpha}(r_1 \dots r_N) + \int d^3r \psi_{\alpha}^*(r_1 \dots r_N) \psi_{13} \psi_{\alpha}(r_1 \dots r_N) + \dots$$

آنرا که اول میانی است که در نظر گرفتیم و آن را نوشتیم و پس برای ψ_{13} می آید می خوانیم؟
از این تمام شبیهت ها، یک جانشینی وجود دارد که در آن ψ_{12} را ψ_{13} می نویسیم و هم شبیهت که ما این را به چه ترتیب می خوانیم
پس آنرا که صورت آنرا هم کند، همین طور برای ψ_{14} و ψ_{15} و ...

Chapter 6:

عظیم بنیم : ۱۸، ۱۹، ۱۵

حسب گذشته در مورد سیستم های آماری که آنرا می گویند و همچنین از لحاظ کوانتومی هم صحبت کردیم که در واقع هم آنرا می خوانند
و نکته این بود که در شرایط کوانتومی ما این فرایع نوع را که به عنوان حالتها و روابط بین سیستم می خوانیم را باید یک جور خاص نوشتیم
شود (البته برای حالت های مختلف، آنرا در حالت های مختلف می توان نوشت)

از این به بعد آماده هستیم که هر نوع سیستمی که به ما بدهند می خوانیم و می خوانیم، بنابراین آنها را بررسی کنیم. معجزه این سیستمها
آنقدر می باشد که حتی حل آنها آنگاه که وقتی ضمیمه می شود و جز چند سیستم ساده را با ما می خوانیم، ما این مدارات که
داریم، حل کنیم

معجزه ما سیستم ها را با سیستم های ساده اما در نظر می گیریم و موارد واقعی را به قدرت شایع و برگردانیم به سیستم ساده بررسی کنیم
نکته وقتی یک گاز ایده آل در نظر می گیریم و در مورد گاز که صحبت می کنیم حتی آنرا در حالتی که داخل رست ها هستند را بصورت گاز در نظر می گیریم
اینکه بصورت گاز در نظر می گیریم به این معنی نیست که آنرا از نظر یک کوشش بدانیم، بلکه می گوئیم هر کوشش متقابل آنرا در وضعیت ما شود
بعد این هر کوشش ها را بصورت توابع اصلی به سیستم ما وارد می کنیم، مثلاً در یکی از روشها یعنی روش رله فرض می آید این کار
را می کنند که صحبت می نمایند، این جور صحبت بعد از آن در مدارات ما وارد می کنند.

همین طور این سیستم ها را، گاهی وقتها می توانند مدلی دقیق تر از سیستم های ما را بررسی می کنیم، ما می بینیم
یک بحث درست است که هر کوشش ضمیمه خود را آن وجود دارد و ما در ضمیمه از موارد آنرا را بصورت یک گاز (با سیستم بصورت گاز)
اندازات فرض می کنیم و به ترتیب خطها صحت می دهند و بعداً این خطها را اصلاح می کنیم با هر کوشش که وارد می کنیم

بنابراین به عنوان یک پایه ای که بر این وجود داشته باشد (برای همه مسائل)، می آیم گاز ایده آل را در مورد حالت می خوانیم

کاربره آن در واقع یعنی سیستمی که در آن با هم برهم کنش نداشته باشد که می توانیم به روشی مختلف اینها را بررسی کنیم، یکی به صورت آنالیز کوانتومی است نگاه کنیم یا کوانتیت و یا Grand Canonic!
 کاری که می خواهیم بکنیم این است که سیستم را کامل کوانتومی نگاه کنیم، در فصل ۱ و ۲ و ۳ و ۴ تا این کار را با فرض صحت بودن آن انجام داده ایم.

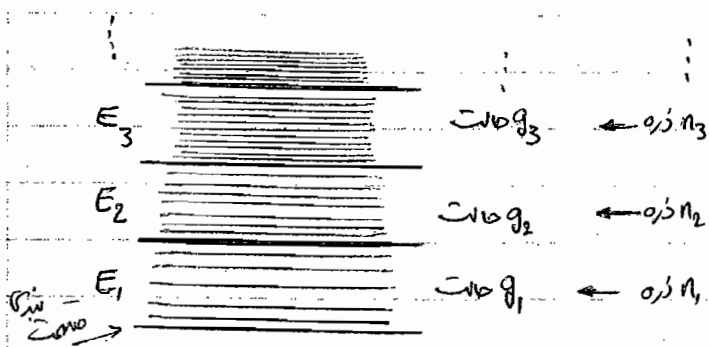
MicroCanonic:

برای این سیستم کوانتومی می توانیم نگاه کنیم، E و N و Ω آن مشخص است.
 بین یک $\Omega(E, N, V)$ که تعداد ترازهای آن است که سیستم با E و N و V را برای ما درست می کند، در نظر بگیریم.
 E ها نظیر که در جاها بارها گفتیم بستگی به مکانی دارد که ما برای سیستم انتخاب می کنیم. اگر مکانی که انتخاب می کنیم استوار کنیم، ذات درجه آزادی هم Ω مشخص می کنیم و بعد می گوئیم یک سری ترازهای انرژی دارند.

ترازهای انرژی که برای آن در نظر می گیریم بصورت زیر هستند، تعداد این ترازهای انرژی (یعنی عددی که به آن نسبت می دهیم) به شرایط فیزیکی وابسته است. می دانیم برای یک گاز ایدئال این انرژی ها با $\frac{1}{V}$ تناسب هستند و حجم هم نزدیکتر باشد اختلاف این ترازها کمتر می شود و برای حجم زیاد می توانیم یک حالت را از حالت کناری آن جدا کنیم. حجم با افزایش رویم (انرژی افزایش یابد) این ترازها به هم نزدیکتر می شوند.

برای همین ما این ترازها را به قسمت های مختلف تقسیم می کنیم، یک قسمت را می توانیم انرژی E داشته باشد یک قسمت انرژی E_2 و یک قسمت انرژی E_3 و ...

البته ما می صدی را E_1 و ما می صدی را E_2 و ... بگیریم، به ما بستگی دارد که بخواهیم اینها را به چه بازه هایی تقسیم کنیم. همچنین فرض می کنیم در قسمت مربوط به E_1 ، E_2 و ... حالت وجود داشته باشد، در قسمت مربوط به E_2 ، E_3 و ... حالت وجود دارد. از N ذره می توانیم n_1 تا در انرژی E_1 ، n_2 تا در انرژی E_2 ، n_3 تا در انرژی E_3 و ...



بنابراین دو وجه زیر را داریم:

$$\left. \begin{aligned} \sum_i n_i &= N \\ \sum_i E_i n_i &= E \end{aligned} \right\} \text{۱}$$

n_i تعداد ذرات در هر سطح است.

می توانیم g_1 و g_2 و ... را به سبب فرض کنیم یعنی در هر بازه انرژی یک حالت بیشتر باشد.

بعد ما دنبال این هستیم که W پیدا کنیم، که W تعداد حالت های ممکن است که باید آرایش n_i که اند و در وقت ما

برای واکسل - بوتلین

$$\omega_{M.B.}^{(1)} = \frac{3^2}{2!} = 3 \xrightarrow{\frac{1}{n!} \omega_{M.B.}^{(1)}} \omega_{M.B.}^{(1)} = 3^2 = 9$$

$\frac{1}{n!}$ یک عامل وزن است که به ترتیب از آن در انتزاع قرار دهیم، یعنی تابع وزنی صافها به این صورت در نظر گرفته شود:

$$\frac{1}{n_1! n_2! \dots} = \text{تابع وزنی صافها} \rightarrow \text{بندار صافها}$$

که در این صورت n_1, n_2, \dots جمع برابر N دارند:

$$\sum n_i = N$$

$$(\alpha_0 + \alpha_1 + \dots + \alpha_n)^N = \sum \frac{N!}{n_0! n_1! \dots n_n!} \alpha_0^{n_0} \alpha_1^{n_1} \dots \alpha_n^{n_n}$$

این رابطه را داریم:

این $\frac{1}{n!}$ یک تابع وزن است، یعنی در این شکل در حالت باکسول - بوتلین ما q حالت داریم، اما q حالت را باید با یک تابع وزن $\frac{1}{2!}$ قرار دهیم، چون فوق گفته که کلاس از نرات که m حالت قرار می گیرند.

این باید که راضی کنیم و آنرا که تم کنیم:

$$S = K \ln \Omega = K \ln \sum W\{n_i\}$$

$$\begin{cases} \sum n_i = N \rightarrow \sum \delta n_i = 0 \\ \sum \epsilon_i n_i = E \rightarrow \sum \epsilon_i \delta n_i = 0 \end{cases}$$

ضرب در ϵ_i و δn_i و δn_i

$$\delta \ln W - \left\{ \alpha \sum \delta n_i + \beta \sum \epsilon_i \delta n_i \right\} = 0$$

حالا برای هر کدام از حالت گفته شده این δ راضی می کنیم

$$1) W_{B.E.} = \prod_i \frac{(g_i + n_i - 1)!}{n_i! (g_i - 1)!}$$

$$\delta \ln W_{B.E.} = \delta \sum \ln \omega_{B.E.} = \delta \sum (\ln (g_i + n_i - 1)! - \ln n_i! - \ln (g_i - 1)!)$$

همه g_i و n_i هستند بنابراین در این یک درجه آزادی صرف نظر کنیم (همان $\ln n!$ را با $\ln n!$ در رابطه داریم)

$$\Rightarrow \delta \ln W_{B.E.} = \delta \sum ((g_i + n_i - 1) \ln (g_i + n_i - 1) - (g_i + n_i - 1) \ln n_i - (g_i - 1) \ln (g_i - 1) + (g_i - 1))$$

از $(g_i - 1)$ صرف نظر کنیم

$$\delta \ln W_{B.E.} = \delta \sum (n_i (\ln (g_i + n_i) - \ln n_i) + g_i (\ln (g_i + n_i) - \ln g_i))$$

$$\rightarrow \delta \ln W_{B.E.} = \delta \sum_i \left[n_i \ln \left(1 + \frac{g_i}{n_i} \right) + g_i \ln \left(1 + \frac{n_i}{g_i} \right) \right] \quad (6)$$

$$2) W_{F.D.} = \prod_i \frac{g_i!}{n_i! (g_i - n_i)!}$$

رابطه استیوارت (استیوارت) کنیم

$$\delta \ln W_{F.D.} = \delta \sum_i (g_i \ln g_i - g_i - n_i \ln n_i + n_i - (g_i - n_i) \ln (g_i - n_i) + (g_i - n_i))$$

$$\Rightarrow \delta \ln W_{F.D.} = \delta \sum_i (g_i (\ln g_i - \ln (g_i - n_i)) - n_i (\ln n_i - \ln (g_i - n_i)))$$

$$\Rightarrow \delta \ln W_{F.D.} = \delta \sum_i \left[n_i \left(\ln \frac{g_i}{n_i} - 1 \right) - g_i \ln \left(1 - \frac{n_i}{g_i} \right) \right] \quad (7)$$

تبدیل رابطه (6) و (7) را به صورتی انجام دهیم که در این صورت بتوانیم

$$\delta \ln W = \delta \sum_i \left[n_i \ln \left(\frac{g_i}{n_i} - a \right) - \frac{g_i}{a} \ln \left(1 - \frac{a n_i}{g_i} \right) \right] \quad (8) \quad \begin{cases} a_{F.D.} = 1 \\ a_{B.E.} = -1 \end{cases}$$

در این صورت می‌توانیم رابطه را به این صورت بنویسیم:

$$3) W_{M.B.} = \prod_i \frac{g_i^{n_i}}{n_i!}$$

$$\delta \ln W_{M.B.} = \delta \sum_i (n_i \ln g_i - n_i \ln n_i + n_i) = \delta \sum_i n_i (\ln \frac{g_i}{n_i} + 1)$$

$$\Rightarrow \delta \ln W_{M.B.} = \delta \sum_i \left[n_i \left(\ln \frac{g_i}{n_i} + 1 \right) \right] \quad (9)$$

برای رابطه (9) همان رابطه (8) است، فقط a برابر صفر است. اگر $a_{M.B.} = 0$ در رابطه (8) باشد، همان رابطه اول رابطه (8) همان جمله اول رابطه (9) می‌شود، اما در جمله دوم رابطه (8) اگر $a_{M.B.} = 0$ باشد، $\frac{g_i}{0} \ln 1$ ترکیبی می‌شود یعنی $\frac{0}{0}$!

حال اگر فرض کنیم که a برابر صفر است، آن وقت

$$\frac{-g_i \left(-\frac{n_i}{g_i} \right)}{n_i} = n_i \rightarrow \text{که همان جمله دوم رابطه (9) است}$$

$$\text{همین‌طور } a \rightarrow 1 - \frac{a n_i}{g_i}$$

بنابراین می‌توانیم در آنجا a را برابر صفر بگیریم و به شکل رابطه (9) در آوریم. W را به این صورت می‌توانیم بنویسیم که این صفت را دارد که جمع بر روی آن صفر می‌شود:

$$\ln W = \sum_i n_i \ln \left(\frac{g_i}{n_i} - a \right) - \frac{g_i}{a} \ln \left(1 - \frac{a n_i}{g_i} \right) \quad \begin{cases} a_{F.D.} = 1 \\ a_{B.E.} = -1 \\ a_{M.B.} = 0 \end{cases} \quad (10)$$

۲۵۷

این باید از رابطه (۱۰) استفاده کنیم و با دو قید جمع کنیم و ببینیم چه نتیجه‌ای هست که از آنجا می‌آید (همان‌طور که در رابطه (۱۰) ذکر کردیم).
 در رابطه (۱۰) $a=1$ فرض کنیم، $a=1$ بزرگ‌تر است و $a=0$ از آن کوچکتر است.
 از رابطه (۱۰) داریم که $a=0$ است.

$$\delta \ln W = \sum_i \delta n_i \ln \left(\frac{g_i}{n_i} - a \right) + n_i \frac{-\frac{g_i}{n_i^2} \delta n_i}{\frac{g_i}{n_i} - a} - \frac{g_i}{a} \frac{-a \frac{\delta n_i}{g_i}}{1 - \frac{a n_i}{g_i}}$$

$$\frac{-\frac{g_i}{n_i^2} \delta n_i}{\frac{g_i}{n_i} - a} = \frac{-\frac{g_i}{n_i^2} \delta n_i}{\frac{1}{n_i} (g_i - a n_i)} = \frac{-\frac{g_i}{n_i} \delta n_i}{g_i - a n_i}$$

$$\frac{-a \frac{\delta n_i}{g_i}}{1 - \frac{a n_i}{g_i}} = \frac{-a \delta n_i}{g_i - a n_i}$$

$$\Rightarrow \delta \ln W = \sum_i \delta n_i \ln \left(\frac{g_i}{n_i} - a \right) - \frac{g_i \delta n_i}{g_i - a n_i} + \frac{g_i \delta n_i}{g_i - a n_i}$$

از رابطه (۱۰) استفاده می‌کنیم و با دو قید جمع کنیم و ببینیم چه نتیجه‌ای هست که از آنجا می‌آید (همان‌طور که در رابطه (۱۰) ذکر کردیم).
 در رابطه (۱۰) $a=1$ فرض کنیم، $a=1$ بزرگ‌تر است و $a=0$ از آن کوچکتر است.
 از رابطه (۱۰) داریم که $a=0$ است.

$$\sigma_{n_i}: \delta \ln W = \sum_i \delta n_i \ln \left(\frac{g_i}{n_i} - a \right) \quad (11)$$

بنابراین با رابطه (۱۱) و (۱۲) داریم:

$$\left. \begin{aligned} \sum_i n_i &= N \rightarrow \alpha \sum_i \delta n_i = 0 \\ \sum_i n_i \varepsilon_i &= E \rightarrow \beta \sum_i \varepsilon_i \delta n_i = 0 \end{aligned} \right\} (12)$$

$$(11) + (12) \Rightarrow \delta \ln W - \alpha \sum_i \delta n_i - \beta \sum_i \varepsilon_i \delta n_i = 0$$

$$\Rightarrow \sum_i \delta n_i \left[\ln \left(\frac{g_i}{n_i} - a \right) - \alpha - \beta \varepsilon_i \right] = 0$$

این معادله را می‌توانیم به صورت زیر بنویسیم: $\ln \left(\frac{g_i}{n_i} - a \right) - \alpha - \beta \varepsilon_i = 0$
 از معادله (۱۳) می‌توانیم نتیجه بگیریم که این معادله را می‌توانیم به صورت زیر بنویسیم:

$$\ln \left(\frac{g_i}{n_i^*} - a \right) - \alpha - \beta \varepsilon_i = 0 \rightarrow \frac{g_i}{n_i^*} - a = e^{\alpha + \beta \varepsilon_i} \quad (13)$$

$$\Rightarrow n_i^* = \frac{g_i}{e^{\alpha + \beta \varepsilon_i} + a} \quad (14)$$

بنابراین می‌توانیم از رابطه (۱۴) استفاده کنیم و با دو قید جمع کنیم و ببینیم چه نتیجه‌ای هست که از آنجا می‌آید (همان‌طور که در رابطه (۱۰) ذکر کردیم).

بنابراین می‌توانیم از رابطه (۱۴) استفاده کنیم و با دو قید جمع کنیم و ببینیم چه نتیجه‌ای هست که از آنجا می‌آید (همان‌طور که در رابطه (۱۰) ذکر کردیم).
 در رابطه (۱۰) $a=1$ فرض کنیم، $a=1$ بزرگ‌تر است و $a=0$ از آن کوچکتر است.
 از رابطه (۱۰) داریم که $a=0$ است.

$$b: \frac{S}{K} \approx \ln W_f \{n_i^*\} \stackrel{(10)}{=} \sum_i \left[n_i^* \ln \left(\frac{g_i}{n_i^*} - a \right) - \frac{g_i}{a} \ln \left(1 - a \frac{n_i^*}{g_i} \right) \right]$$

(13) $\ln \left(\frac{g_i}{n_i^*} - a \right) = \alpha + \beta \epsilon_i$ از طرفی از رابطه (13) می توانیم بنویسیم:

$$b: \frac{S}{K} \approx \sum_i \left[n_i^* (\alpha + \beta \epsilon_i) - \frac{g_i}{a} \ln \left(1 - a \frac{n_i^*}{g_i} \right) \right] \quad (*)$$

$$\rightarrow \frac{S}{K} \approx \sum_i \left[n_i^* (\alpha + \beta \epsilon_i) - g_i \ln \left[a \left(\frac{1}{a} - \frac{n_i^*}{g_i} \right) \right] \right]$$

(14) $n_i^* = \frac{g_i}{e^{\alpha + \beta \epsilon_i} + a} \rightarrow a \frac{n_i^*}{g_i} = \frac{a}{e^{\alpha + \beta \epsilon_i} + a} \Rightarrow 1 - a \frac{n_i^*}{g_i} = \frac{e^{\alpha + \beta \epsilon_i}}{e^{\alpha + \beta \epsilon_i} + a}$

$$\Rightarrow 1 - \frac{a n_i^*}{g_i} = \left(1 + \frac{e^{\alpha + \beta \epsilon_i}}{a} \right)^{-1} = \left(1 + \frac{a}{e^{\alpha + \beta \epsilon_i}} \right)^{-1} = \left(1 + a e^{-\alpha - \beta \epsilon_i} \right)^{-1} \quad (**)$$

(*) , (**) $\Rightarrow \frac{S}{K} \approx \sum_i \left[n_i^* (\alpha + \beta \epsilon_i) + \frac{g_i}{a} \ln (1 + a e^{-\alpha - \beta \epsilon_i}) \right]$

$$\Rightarrow \frac{S}{K} = \underbrace{\sum_i n_i^* \alpha}_N + \underbrace{\sum_i n_i^* \epsilon_i \beta}_E + \frac{1}{a} \sum_i g_i \ln (1 + a e^{-\alpha - \beta \epsilon_i})$$

صورت فرقی نمی کند که نام آن را N و E بنویسیم
 اگر استیسی می بینیم جمع $n_i \epsilon_i$ ها برابر E می شود

$$\Rightarrow \frac{S}{K} - \alpha N - \beta E = \frac{1}{a} \sum_i g_i \ln (1 + a e^{-\alpha - \beta \epsilon_i}) \quad (15)$$

حال برای این رابطه را بازنویسی می کنیم تا به این برسیم

$$\alpha = -\frac{\mu}{KT}, \quad \beta = \frac{1}{KT}$$

اگر $\alpha = -\frac{\mu}{KT}$ و $\beta = \frac{1}{KT}$ باشد، عبارت سمت چپ رابطه (15) برابر $\frac{PV}{KT}$ است (یعنی)

$$\frac{S}{K} - \alpha N - \beta E = \frac{PV}{KT} \quad (16)$$

بنابراین معادله سمت راست می آید:

$$(16), (15) \Rightarrow PV = \frac{KT}{a} \sum_i g_i \ln (1 + a e^{-\alpha - \beta \epsilon_i}) \quad (17)$$

معادله سمت

در رابطه (17) هر آنکه با a کار کنیم، با K هم و T هم و N هم و E هم و μ هم و ϵ_i هم و g_i هم و g_i هم و g_i هم

بنابراین می توانیم رابطه (17) را به صورت $PV = NKT$ بنویسیم (که البته در صورتی که a بسیار بزرگ باشد)

۱۷) رابطه (۱۷) را برای $a \rightarrow 0$ میل کند. آنرا با معین طوری بنویسید که بر رابطه بصورت $\frac{0}{0}$ منتهی شود:

M.B.: $a \rightarrow 0$ (۱۷) $\frac{PV}{KT} = \lim_{a \rightarrow 0} \sum_i g_i \frac{e^{-\alpha - \beta \epsilon_i}}{1 + a e^{-\alpha - \beta \epsilon_i}} = \sum_i g_i e^{-\alpha - \beta \epsilon_i}$ (۱۸)

از طرفی از رابطه (۱۴) داریم:

$$n_i^* = \frac{g_i}{e^{\alpha + \beta \epsilon_i} + a}$$

حال آنرا این نسبت را برای $a \rightarrow 0$ بنویسید. نتیجه کنیم و $a \rightarrow 0$:

$$(n_i^*)_{M.B.} = g_i e^{-\alpha - \beta \epsilon_i} \quad (19)$$

$$(18), (19) \Rightarrow \frac{PV}{KT} = \sum_i \underbrace{g_i e^{-\alpha - \beta \epsilon_i}}_{(n_i^*)_{M.B.}} = \sum_i \underbrace{(n_i^*)_{M.B.}}_N = N \Rightarrow \boxed{PV = NKT}$$

این نتیجه فقط برای ماکول-بولتزمن حالت، کلاسیک دریاک یا چیز دیگر باشد، این نتیجه فرق می‌کند و اثرات کوانتومی پدید می‌آید و a ضرورتاً در صورت اثرات کوانتومی وارد می‌کند.

اما این کمالات مربوط به حالتی بود که ما می‌گوییم در نظر گرفتن یعنی E ثابت، N ثابت و V ثابت بود. در آن حالت آن بود که در بقیه آن سطح هم همین اتفاق می‌افتد، مثلاً در حالت کوانتومی:

Canonical:

رابطه کانتین داریم:

$$Q_N(V, T) = \sum_E e^{-\beta E} \quad \begin{cases} E = \sum_\epsilon n_\epsilon \epsilon \\ N = \sum_\epsilon n_\epsilon \end{cases} \text{ با این شرط که}$$

اما آنقدر قرار می‌دهیم که برای هر کدام از حالتها E و N که وجود دارد یک حالت انرژی وجود داشته باشد یعنی یک عدد صحیح برای آن باشد. پس حالت قبل وجود داشته باشد در این صورت:

$$Q_N = \sum_{\{n_\epsilon\}} g(n_\epsilon) e^{-\beta \sum_\epsilon n_\epsilon \epsilon}$$

$\underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{\text{حالت انرژی}}$

در $g(n_\epsilon)$ حالت انرژی است که برای هر کدام از حالتها n_ϵ که این حالت انرژی

برای آن وجود داشته باشد. یعنی هر کدام از n_ϵ می‌تواند در صورت داشته باشد و این در واقع روی هر کدام از n_ϵ حالتها n_ϵ عدد صحیح می‌تواند باشد. این برای هر حالت این می‌تواند است:

$$g_{B.E.}(n_\epsilon) = 1$$

برای فرقی دریاک کلاسیک هرگز در این اثرات کوانتومی وجود ندارد. فقط اثرات کوانتومی در حالتها

برای آن و همانند که با نظریه‌ها دیگر فرق نمی‌کند و این:

$$g_{F.D.}(n_\epsilon) = \begin{cases} 0 & n_\epsilon > 1 \\ 1 & n_\epsilon = 1 \end{cases}$$

و برای آن که در این حالت که قبلاً نوشته بودیم عامل وینز آنجا بصورت حاصل ضرب $\frac{1}{n_\epsilon!}$ است.

$$g_{M.B.}(n_\epsilon) = \prod_i \frac{1}{n_\epsilon!} = \frac{1}{n_0! n_1! n_2! \dots}$$

یعنی آنطوری که در توزیع ماکسول-بولتزمن فرق نمی‌کند که کدام یک را با کدام یک در نظر بگیریم و این در واقع تفاوت هستند.

حال این Q_N کاننیک را برای هر کدام از آنها حساب می‌کنیم:

1) Maxwell-Boltzmann

در این حالت Q_N را می‌توانیم به این صورت باز کنیم:

$$g_{M.B.}(n_\epsilon) = \prod_i \frac{1}{n_\epsilon!}$$

$$Q_N = \sum_{\{n_\epsilon\}}' g(n_\epsilon) e^{-\beta \sum_\epsilon n_\epsilon \epsilon} = \sum_{\{n_\epsilon\}}' \frac{e^{-\beta n_0 \epsilon_0}}{n_0!} \frac{e^{-\beta n_1 \epsilon_1}}{n_1!} \dots \frac{e^{-\beta n_n \epsilon_n}}{n_n!} \quad \text{I}$$

در اینجا این شرط داریم:

$$N = \sum_\epsilon n_\epsilon \quad \xrightarrow{\text{یعنی}} \quad n_0 + n_1 + n_2 + \dots = N$$

که این تعریف این رابطه است:

$$(x_0 + x_1 + \dots + x_n)^N = \sum_{n_0, n_1, \dots} N! \frac{x_0^{n_0}}{n_0!} \frac{x_1^{n_1}}{n_1!} \dots \quad \text{II}$$

اما در اینجا رابطه I نسبت به رابطه II یک چیزی کم دارد، یک $N!$ پس برای اینکه رابطه I را بصورت رابطه II بنویسیم، $N!$ در آن ضرب و تقسیم می‌کنیم و Q_N را بدین شکل

$$\Rightarrow Q_N = \frac{1}{N!} \sum_{\{n_\epsilon\}}' N! \frac{e^{-\beta n_0 \epsilon_0}}{n_0!} \frac{e^{-\beta n_1 \epsilon_1}}{n_1!} \dots = \frac{1}{N!} \sum_{\{n_\epsilon\}}' N! \frac{(e^{-\beta \epsilon_0})^{n_0}}{n_0!} \frac{(e^{-\beta \epsilon_1})^{n_1}}{n_1!} \dots \quad \text{III}$$

* سؤال: ا. قید دوم (قید انرژی) برای ما در رابطه III چه اهمیتی دارد؟
 ب. این قید دومی $e^{-\beta \epsilon_i}$ ها قفس دارد، ما باید به هر یک از $(e^{-\beta \epsilon_0})^{n_0}$ ها $e^{-\beta \epsilon_0}$ ها را ضرب کنیم و به هر یک از $(e^{-\beta \epsilon_1})^{n_1}$ ها $e^{-\beta \epsilon_1}$ ها را ضرب کنیم و به هر یک از $(e^{-\beta \epsilon_n})^{n_n}$ ها $e^{-\beta \epsilon_n}$ ها را ضرب کنیم. اینها تنها قیدها هستند که در این حالت که جمع N را برآورده می‌کنند.

بعضی از اینها قید انرژی را ارضا نمی‌کنند (رابطه III)، یعنی ممکن است بعضی از ϵ_i ها وجود داشته باشند و یا در این حالت نباشند. اینها در واقع همان N هستند که این اتفاق می‌افتد. حال فرض کنیم که اینها در واقع N باشند.

در اینجا در رابطه $(e^{-\beta \epsilon_0})^n$ به $e^{-\beta \epsilon_0}$ نگاه کنیم و می بینیم که آن یک بار و نه روز n جا

این باقی در رابطه (II) می آید و در رابطه (III) را به این صورت بنویسیم:

$$Q_N = \frac{1}{N!} \sum_{\{n_i\}} \frac{(e^{-\beta \epsilon_0})^{n_0}}{n_0!} \frac{(e^{-\beta \epsilon_1})^{n_1}}{n_1!} \dots = \frac{1}{N!} (e^{-\beta \epsilon_0} + e^{-\beta \epsilon_1} + e^{-\beta \epsilon_2} + \dots)^N$$

$$\Rightarrow Q_N = \frac{1}{N!} \left(\sum_E e^{-\beta E} \right)^N \quad (IV)$$

اینجا \sum_E از جمله انرژی ها

نمی بینیم که اینها چه دردی در رابطه $E = \sum_i n_i \epsilon_i$ ثابت نیست! درست است که E که می بینیم برابر است با حاصل جمع انرژی ها است که در اینجا اما این E ثابت نیست چون سیستم کانونیک است و می تواند ثابت نیست. این موضوع را می توانیم اینگونه نگاه کنیم که اگر انرژی را به توانیم بنویسیم که E به هر چیزی شود و می توانیم بنویسیم که این E ثابت نیست، یعنی آن E ثابت است اما می توانیم آنرا به عنوان یک مقدار در نظر بگیریم، اما در اینجا این E تمام مقادیر ممکن را می تواند از صفر تا بی نهایت بگیرد. حال فکر است که E می تواند بعضی از این n_i ها و صفر باشد و می تواند در یک حالتی که E یک مقدار ثابت است و می تواند صورت دیگری بتواند باشد.

$$E = \sum_i n_i \epsilon_i, \quad 0 \leq E < \infty$$

رابطه (IV) که پیدا کردیم این است که $\sum_i e^{-\beta \epsilon_i}$ یعنی جمع همه انرژی ها است که در اینجا $e^{-\beta \epsilon}$ می بینیم. این Q_N می تواند بنویسیم:

$$(IV) \quad Q_N = \frac{Q_1^N}{N!}$$

در اینجا یک نکته در مورد جمع روی E می گوئیم چون بعد از آن زیاد شده می بینیم (البته یک E در اینجا یک جا است که با هم فرقی ندارند)

در فضای فاز $dpdq$ می بینیم که $\frac{1}{h^3}$ است هر $dpdq$ یک $\frac{1}{h^3}$ است که $d^3p d^3q$ بصورت $\frac{1}{h^3}$ می توانیم بنویسیم و در $e^{-\beta E}$ حساب می کنیم، جمع روی E می توانیم بنویسیم p, q را به ما می دهد

$$\frac{1}{h^3} \int d^3p d^3q e^{-\beta E} \rightarrow \text{جمع روی فضای فاز}$$

$$\frac{1}{h^3} \int d^3p d^3q \sum_E e^{-\beta E} \rightarrow \sum_E e^{-\beta E}$$

گاز اتمی ذرات آزاد را می‌کنیم، در این حالت $E = \frac{p^2}{2m}$ است. در این صورت $e^{-\beta E}$ چون در آن q وجود ندارد می‌توانیم روی آن جمع بگیریم و بس:

$$\sum_E \frac{e^{-\beta E} \Omega(E)}{\Omega} \rightarrow \frac{V}{h^3} \int d^3p$$

چون ذرات آزاد را می‌کنیم
از مختصات پهنه (شش ضلعی آزاد)

این را از این جهت می‌کنیم که صورتی از فرانتی هم کار کنیم (مثلاً برای فونون) $E = pc$ است و باید در آنجا هم نسبتی با کار کنیم $E = \sqrt{p^2 c^2 + m^2 c^4}$ است که در آن q وجود ندارد و تابعی از p است.
حال اگر فقط به اندازه مستطی را بسازیم باید بداییم:

$$\sum_E \frac{e^{-\beta E} \Omega(E)}{\Omega} \rightarrow \frac{V}{h^3} \int d^3p = \frac{4\pi V}{h^3} \int_0^\infty dp p^2 \quad (1)$$

مثلاً اگر $E = \frac{p^2}{2m}$ باشد، می‌توانیم رابطه dp را با dE بر حسب E بنویسیم یعنی:

$$E = \frac{p^2}{2m} \rightarrow dE = \frac{dE}{dp} dp = \frac{2p}{2m} dp \Rightarrow dp = \frac{m}{p} dE$$

$$\Rightarrow p^2 dp = mp dE = m\sqrt{2mE} dE \quad (2)$$

$$(2) \rightarrow (1) \Rightarrow \sum_E = \frac{4\pi V}{h^3} \int_0^\infty p^2 dp = m\sqrt{2m} \times \frac{4\pi V}{h^3} \int_0^\infty E^{\frac{1}{2}} dE = \frac{2\pi V (2m)^{\frac{3}{2}}}{h^3} \int_0^\infty E^{\frac{1}{2}} dE \quad (3)$$

چون در شکل $E(p)$ رابطه dE بر حسب dp بر حسب dE قرار دهیم

جایگاری می‌دهیم حاصل می‌شود است که در شرایط خاص می‌توانیم این تقریب را بنویسیم:

$$\sum_E \leftrightarrow \frac{1}{h^3} \int d^3p d^3q$$

در اینجا هر چند V بزرگ است، این تقریب صحیح نیست، چون تراکم انرژی بسیار کم
تقریب dE بر حسب dp تقریبی است
مثلاً اگر کاری که در بالا کردیم را برای ذرات آزاد انجام دهیم، پس Q_1 می‌شود:

$$Q_1 = \sum_E e^{-\beta E} \xrightarrow{(3)} Q_1 = \frac{2\pi V (2m)^{\frac{3}{2}}}{h^3} \int_0^\infty E^{\frac{1}{2}} e^{-\beta E} dE = \frac{V}{\lambda^3}$$

$$\lambda = \frac{h}{\sqrt{2\pi m kT}}$$

طول موج ترمی

بنابراین Q_1 می‌شود:

$$Q_N = \frac{1}{N!} Q_1^N = \frac{1}{N!} \left(\frac{V}{\lambda^3} \right)^N$$

Grand Canonic:

این حالت Grand Canonic را می نامیم، تفاوت Grand Canonic و Canonic در تابع پارتیشن آن بود که برای حالت اول

$$D = \sum_{N=0}^{\infty} Z^N Q_N \quad \text{که} \quad Z = e^{-\mu/KT}$$

این سری صریح نیست، ما در فصل ۳

کار به کار این بود که Q_N را به صورت بیاری نام و در فصل ۴ از آن استفاده کردیم و نویسنده رابطه با Z تابع پارتیشن را بدست آوردیم

حال همین کارها را می توانیم برای Canonic و Grand Canonic انجام دهیم و به نتیجه تابع توزیع مهم برسیم.

در اینجا هدف ما از گفتن تمام این ها این است که می بینیم $\langle n_{\epsilon} \rangle$ را حساب کنیم، $\langle n_{\epsilon} \rangle$ یعنی میانگین تعداد ذراتی که در حالت ϵ قرار گرفته اند، مستقلاً برای انرژی هر یک باید یک چیز می بینیم صفر تا یک باشد چون تعداد ذرات در هر حالت در این حالت یا صفر

است یا یک، برای آن کسول بزرگترین و بزرگترین اینها می توانند تا بینهایت بشوند و هر چه در توزیع مهم شوند!!
 کیفیت $\langle n_{\epsilon} \rangle$ به این درسی خود که اگر آنرا پیدا کنیم، در این صورت برای تمام کسولها می که متناسب با صورتها از سری است (در اینجا می بینیم) اگر نخواهیم یک رابطه صحیح پیدا کنیم برای میانگین آن، باید میانگین ذراتی که در هر حالت است را در کیفیت رابطه می بینیم و با هم جمع کنیم، یعنی:

$$\langle 0 \rangle = \sum_{\epsilon} Q_{\epsilon} \langle n_{\epsilon} \rangle$$

این کار صریح مهم است، بنا بر این نتیجه ما را می نیازمند تعدادی تفاوت سازی در رابطه سازی ها. هم را یک بار انجام دادیم و گفتیم با توجه به رابطه ای که سیستم دارد، بطور مستقیم در هر حالت چند ذره می تواند باشد.

جلسه بیست و نهم : ۱۵، ۹، ۲۰

برای سیستم های ترمودینامیک داریم:

$$PV = \frac{KT}{a} \sum_i g_i \ln(1 + a e^{-\alpha - \beta \epsilon_i}) \quad (1)$$

توجه داریم این رابطه را بصورت کانونیک برده ایم، در مورد کانونیک تابع پارتیشن را بصورت زیر می بینیم:

$$Q_N = \sum_{\{n_{\epsilon}\}} g(n_{\epsilon}) e^{-\beta \sum n_{\epsilon} \epsilon} \quad (2)$$

$\sum n_{\epsilon} \epsilon = E$ → انرژی سیستم
 $\sum n_{\epsilon} = N$

$g(n_\epsilon)$ که در رابطه ② نوشتیم با g این که در رابطه ① نوشتیم تفاوت است.
 g در رابطه ② تابع انرژی است که برای حالت‌های مختلف ϵ در نظر گرفته می‌شود که صد مترتاز ϵ اثر نخواهد که کنار n_ϵ و چون
 رابطه با n_ϵ این تابع تابع انرژی است. تابع پارتیشن باید حساب شود. شرط ثابت بودن است که $N = \sum n_\epsilon$ و $E = \sum \epsilon n_\epsilon$
 تعدادی از صفرها بی‌نهایت می‌گیرد و در واقع برابر $\sum n_\epsilon$ است که ثابت مهم باشد.

در مورد g هم طبق گذشته صحبت کردیم، g برای انرژی‌های مساوی یک بوده یعنی برای همه مترتازهای یک و در مترتازی
 هر تعداد ذره که می‌خواهد می‌تواند بیفتد.

$$g_{B.E.}(n_\epsilon) = 1 \quad (3)$$

برای فرقی دیگر اگر مترتازی n_ϵ اش ۰ و ۱ بود، g برای همه مترتازهای n_ϵ بود (یعنی یعنی از یک ذره در
 مترتاز بی‌نهایت سهم g صرفه‌مند).

$$g_{F.D.}(n_\epsilon) = \begin{cases} 1 & n_\epsilon = 0, 1 \\ 0 & n_\epsilon > 1 \end{cases} \quad (4)$$

برای ماکول بولتزمن بصورت زیر بدست آوردیم،

$$g_{M.B.}(n_\epsilon) = \prod_{\epsilon} \frac{1}{n_\epsilon!} \quad (5)$$

برای ماکول بولتزمن شده با حساب کردیم و بدست آوردیم:

$$Q_N^{M.B.}(T) = \frac{1}{N!} \left(\frac{V}{\lambda^3} \right)^N \quad (6)$$

اگر $Grand\ Canonical$ آنرا هم می‌فرستیم بنویسیم، تابع پارتیشن $Grand\ Canonical$ در مورد ماکول بولتزمن برای این صورت
 بود که برای هر کدام از N ها (N از صفر تا بی‌نهایت) Q_N وجود داشت و Z^N هم در آن ضرب می‌شد.

$$D^{M.B.} = \sum_{N=0}^{\infty} Z^N Q_N \quad (7)$$

الان می‌خواهیم این تابع پارتیشن را برای توزیع حالت‌های $g_{B.E.}$ و $g_{F.D.}$ بدست بیاوریم.

صاحب کردن \sum رابطه ① در حالت ماکول بولتزمن سخت نبود چون ما این $\frac{1}{n_\epsilon!}$ داشتیم که عبارت می‌شد که عبارت می‌شد که در
 می‌شد به شکل یک N جمله‌ای به توان N در برابر یک شکل به عبارتی آن می‌توانیم

و جمع در رابطه ① را می‌توانست $F.D.$ که g برای بعضی‌ها صفر و برای بعضی‌ها ۱ است کار می‌کند و این را می‌توانیم تابع
 پارتیشن $Grand\ Canonical$ را حساب کنیم و آن در معنی‌ش فرق می‌کند.

تابع پارتیشن
Grand Canonical : $D = \sum_{N=0}^{\infty} \sum_{\{n_i\}} Z^N e^{-\beta \sum_i n_i \epsilon_i}$

تقریباً صاف این دو \sum را عوض کنیم

چیزی که در واقع اینجا وجود دارد، برای هر ذره که در اینجا در نظر بگیریم این \sum ، بالا فرستاده برای $N=e$ یک چیز نیست
می آید، برای $N=1$ یک چیز دیگر نیست می آید... و چون N تا بی نهایت می رود، بنابراین تمام ترکیبات مختلف در رابطه ①
هم قرار داده وجود داشته باشد چون تقریباً هم روی N داریم (شرط $N = \sum_i n_i$) و N هم آنرا از صفر شروع می شود

این موقعی است که N یک مقدار معینی بود ولی این \sum تا صفر تا بی نهایت می رود این جمع زین تقریباً
نیست و می توانیم D را بصورت زیر بنویسیم:

$$D = \sum_{\{n_i\}} Z^{(n_0+n_1+\dots)} e^{-\beta(n_0 \epsilon_0 + n_1 \epsilon_1 + \dots)} \quad (B.E.) \quad (8)$$

این این توزیع هر چیزی باشد، این n_i ها (n_0, n_1, \dots) این می توانند صاف می آیند چون N از صفر شروع می شود
تا بی نهایت می رود... فقط این طور نبود و می بایست جمع روی n_i ها فقط یک مقدار خاص باشد $(N = \sum_i n_i)$
این یک مقدار خاص نیست، این جمع هم آنرا از صفر تا بی نهایت می رود.

$$(8) \Rightarrow D = \sum_{\{n_i\}} (Z e^{-\beta \epsilon_0})^{n_0} (Z e^{-\beta \epsilon_1})^{n_1} \dots$$

البته این روابط را داریم برای توزیع اینستین می توانیم، البته می گوئیم n_i ها هر تعدادی می توانند بگیرند، روابط بین اینستین
راست.

جمع روی $\{n_i\}$ ها یعنی جمع روی n_0 ، جمع روی n_1 ، جمع روی n_2 ... یعنی:

$$D = \sum_{n_0} (Z e^{-\beta \epsilon_0})^{n_0} \sum_{n_1} (Z e^{-\beta \epsilon_1})^{n_1} \dots \quad (9)$$

هر کدام از این \sum ها را نگاه کنیم، به این صورت هستند:

$$\sum_{n_i} (Z e^{-\beta \epsilon_i})^{n_i}$$

چون n_i ها برای توزیع اینستین از صفر تا بی نهایت می توانند بروند، $Z e^{-\beta \epsilon_i}$ MKT
راست، پس می توان آنرا به این صورت نوشت:

$$\sum_{n_i} (Z e^{-\beta \epsilon_i})^{n_i} = \frac{1}{1 - Z e^{-\beta \epsilon_i}} \quad \text{که } Z = e^{MKT} \quad (10)$$

$$\text{چون } \frac{1}{1-x} = \sum_n x^n$$

پس رابطه (۹) به این صورت می شود:

$$D = \underbrace{\sum_{n_0} (ze^{-\beta \epsilon_0})^{n_0}}_{\frac{1}{1 - ze^{-\beta \epsilon_0}}} \underbrace{\sum_{n_1} (ze^{-\beta \epsilon_1})^{n_1}}_{\frac{1}{1 - ze^{-\beta \epsilon_1}}} \dots$$

$$D = \frac{1}{1 - ze^{-\beta \epsilon_0}} \cdot \frac{1}{1 - ze^{-\beta \epsilon_1}} \dots = \prod_i \frac{1}{1 - ze^{-\beta \epsilon_i}} \quad (B.E.) \quad (11)$$

(۱) حاصل ضرب روی همه حالتها

و رابطه را یک گزینیم $(g_{B.E}(n_i) = 1)$

توجه فرمایید که منظور استیم این کار را انجام دهیم اهمیت است که در رابطه (۸) می گوئیم n_0, n_1, \dots حتماً برای هر یک از n_i و رابطه آنها غیر از صفر است باشد، یعنی $n_i > 0$ و در غیر این صورت یک می شود. پس هم برای این n_i از این مورد فرار می شود جز آنهایی که در واقع امکان یا صفر باشد یا یک باشد، بقدریک g این در رابطه (۸) کارند که ضرب می شود، این g برای آنهایی که $n_i = 0$ باشد، صفر می شود.

$$(8) \sum_{\{n_i\}} g z^{(n_0 + n_1 + \dots) - \beta(\epsilon_0 n_0 + \epsilon_1 n_1 + \dots)}$$

پس $\sum_{n_i} (ze^{-\beta \epsilon_i})^{n_i}$ را می توانیم برای هر یک از n_i حساب کنیم، این \sum فقط برای n_i های برابر صفر و یک و صفر دارد چون در غیر این صورت برای حالت های غیر از n_i برابر صفر و یک، g برابر صفر می شود که حاصل صفر می کند. پس این جمع را برای دو حالت $n_i = 0$ و $n_i = 1$ باید بنویسیم.

$$\sum_{n_i=0,1} (ze^{-\beta \epsilon_i})^{n_i} = 1 + ze^{-\beta \epsilon_i} \quad (9)$$

پس در نهایت صفر در آنجا ضرب می شود. پس D رابطه می شود:

$$D = \underbrace{\sum_{n_0} (ze^{-\beta \epsilon_0})^{n_0}}_{(1 + ze^{-\beta \epsilon_0})} \underbrace{\sum_{n_1} (ze^{-\beta \epsilon_1})^{n_1}}_{(1 + ze^{-\beta \epsilon_1})} \dots$$

$$\Rightarrow D = \prod_i (1 + ze^{-\beta \epsilon_i}) \quad (F.D.) \quad (12)$$

توجه فرمایید که داریم رابطه تقابلی می کنیم یعنی تابع پارتیشن های مربوط به بزرگترین (۱۱) و فرمی در (۱۲) را مقایسه کنیم، البته داریم $q = \ln D$ آنرا رابطه تقابلی می کنیم. q را برای بزرگترین $q = \ln D$ می کنیم، \ln حاصل (۱۲) می شود حاصل \ln ها.

حاصل $\frac{1}{1 - ze^{-\beta \epsilon_i}}$ را هم صورت $(1 - ze^{-\beta \epsilon_i})^{-1}$ می نویسند.

$$q_{B.E} = \ln D_{B.E} \stackrel{(11)}{=} \ln \left(\prod_i \frac{1}{1 - ze^{-\beta \epsilon_i}} \right) = \ln \left(\prod_i (1 - ze^{-\beta \epsilon_i})^{-1} \right)$$

$$\Rightarrow q_{B.E} = - \sum_i \ln(1 - ze^{-\beta \epsilon_i})$$

تقسیم برای فرمی در یک هم در نیم:

$$q_{F.D.} = \ln D_{F.D.} \stackrel{(12)}{=} \ln \left(\prod_i (1 + ze^{-\beta \epsilon_i}) \right) = \sum_i \ln(1 + ze^{-\beta \epsilon_i})$$

$$\Rightarrow q_{F.D.} = \sum_i \ln(1 + ze^{-\beta \epsilon_i})$$

این بطور خاص می توانیم بنویسیم:

$$q = \frac{1}{a} \sum_i \ln(1 + aze^{-\beta \epsilon_i}) \quad ; \quad a_{B.E.} = -1 \quad (13)$$

$$a_{F.D.} = 1$$

که اگر $a=1$ باشد، نیز این تقسیم می شود و اگر $a=1$ باشد، فرمی در یک.

* سؤال: دو کس حالتی که در روابط (10) و (11) نوشته شده، این عبارات شبیه به یکدیگر است اما هم فرق می کنند. در (10) n_i ها عددی می توانند داشته باشند، از صفر تا بی نهایت و در (11) n_i ها عددی نمی توانند داشته باشند و فقط صفر یا یک می توانند. یعنی برای این دو روابط g می توانیم این g را برابر n_i درای تقارن بود که برای حالت فرمی در یک این تقسیم را می توانیم بنویسیم. برای حالت فرمی در یک فقط برای n_i برابر صفر و یک برابر می شود، در غیر این صورت صفر بود.

$$\sum_{n_i} (gze^{-\beta \epsilon_i})^{n_i}$$

$$B.E: \sum_{n_i=0}^{\infty} (gze^{-\beta \epsilon_i})^{n_i} = 1 + ze^{-\beta \epsilon_i} + (ze^{-\beta \epsilon_i})^2 + \dots = (1 - ze^{-\beta \epsilon_i})^{-1}$$

$$F.D.: \sum_{n_i=0,1} (gze^{-\beta \epsilon_i})^{n_i} = 1 + ze^{-\beta \epsilon_i}$$

برای حالت فرمی در یک \sum حالت فرمی در یک، g را برابر n_i می توانیم بنویسیم که در حالت فرمی در یک $g=1$ است. در حالت فرمی در یک $g=1$ است. در حالت فرمی در یک $g=1$ است. در حالت فرمی در یک $g=1$ است.

این روابط (7) که در مطالب ماکسول-بولتزمن است، می توانیم بنویسیم:

$$D^{M.B.} = \sum_{N=0}^{\infty} Z^N Q_N = \sum_{N=0}^{\infty} \sum_i (ze^{-\beta \epsilon_i})^N$$

$$q_{M.B.} = \sum_i ze^{-\beta \epsilon_i} \quad (14)$$

رابطه (13) که a به سمت صفر میل کند، عبارت بصورت $\frac{0}{0}$ می آید که لیمیت قاعده هسپیتال استفاده کنیم داریم:

$$\lim_{a \rightarrow 0} q = \lim_{a \rightarrow 0} \frac{1}{a} \sum_i \ln(1 + a z e^{-\beta \epsilon_i}) = \lim_{a \rightarrow 0} \frac{\sum_i \frac{z e^{-\beta \epsilon_i}}{1 + a z e^{-\beta \epsilon_i}}}{1} = \sum_i z e^{-\beta \epsilon_i}$$

که همان $q^{M.B.}$ رابطه (14) است.

بنابراین q را در صورت حالت عمومی به این صورت می نویسیم:

$$q = \frac{1}{a} \sum_i \ln(1 + a z e^{-\beta \epsilon_i}) \quad \begin{matrix} a=1 \rightarrow F.D. \\ a=0 \rightarrow M.B. \\ a=-1 \rightarrow B.E. \end{matrix} \quad (15)$$

اگر می‌توانیم تعداد ذرات را بنویسیم:

$$\bar{N} = z \frac{\partial q}{\partial z} \stackrel{(15)}{=} \sum_i \frac{\alpha e^{-\beta \epsilon_i} z}{a(1 + a z e^{-\beta \epsilon_i})} = \sum_i \frac{1}{a + z^{-1} e^{\beta \epsilon_i}} = \sum_i \langle n_{\epsilon_i} \rangle \quad (I)$$

می‌توانیم تصور داریم که در هر تراز i α ام وار گرفته اند را برابر $\alpha e^{-\beta \epsilon_i}$ ترازها جمع کرده ایم و می‌توانیم تعداد ذرات شده است.

از روی میانه‌های عمومی نویسیم:

$$\bar{U} = \frac{\partial q}{\partial \beta} \stackrel{(15)}{=} \sum_i \frac{-\epsilon_i \alpha z e^{-\beta \epsilon_i}}{a(1 + a z e^{-\beta \epsilon_i})} = \sum_i \frac{\epsilon_i}{z^{-1} e^{\beta \epsilon_i} + a} = \sum_i \epsilon_i \langle n_{\epsilon_i} \rangle \quad (II)$$

تعداد ذرات که در تراز i قرار دارند $\alpha e^{-\beta \epsilon_i}$ است. این کسری که در اینجا به دست آوریم:

$$(I), (II) \Rightarrow \langle n_{\epsilon} \rangle = \frac{1}{a + z^{-1} e^{\beta \epsilon}} \quad (III)$$

که نسبت به a و z وابسته است.

کاربردی به این صورت است که اگر کسری که داریم بنویسیم به حالتی که ما مربوط هستند و آن می‌توانیم آن کسری را که می‌خواهیم آن کسری را بنویسیم $\langle n_{\epsilon} \rangle$ می‌کنیم و در صورتی که a و z را بنویسیم.

از روی $\langle n_{\epsilon} \rangle = \frac{1}{a + z^{-1} e^{\beta \epsilon}}$ با توجه اطلاعات فنیکس در مورد ذرات به دست می‌آوریم.

با فرض کنیم می‌توانیم که کسری $\langle n_{\epsilon} \rangle$ کسری بسیار کار برده است یعنی ضریب آنها از این به بعد از a و z استفاده می‌کنیم.

$\langle n_{\epsilon} \rangle$ را به شکل زیر می‌نویسیم:

$$z = c e^{M/KT} \rightarrow z^{-1} = e^{-M/KT}$$

$$(III) \rightarrow \langle n_{\epsilon} \rangle = \frac{1}{a + e^{(\epsilon - M)/KT}} \Rightarrow \langle n_{\epsilon} \rangle = \frac{1}{e^{(\epsilon - M)/KT} + a} \quad (IV)$$

گفت α را به این صورت تعریف می‌کنیم:

$$\alpha = (\epsilon - \mu) / kT \quad \text{III} \Rightarrow \langle n_{\epsilon} \rangle = \frac{1}{e^{\alpha} + a} \quad \text{IV}$$

Fermi - Dirac

$$\text{IV} \Rightarrow \langle n_{\epsilon} \rangle_{F.D.} = \frac{1}{e^{\alpha} + 1}$$

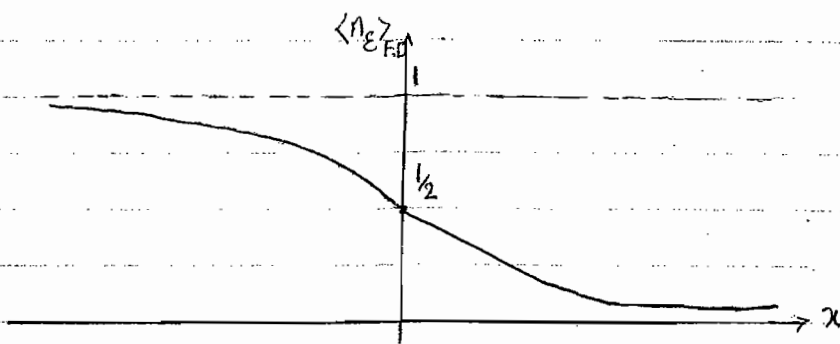
$\langle n_{\epsilon} \rangle$ برای فرس در یک با وابستگی $a=1$ در رابطه بالا بدست می‌آید:

این تابع توزیع را نسبت به α رسم کنیم:

نبر $\alpha=0$ باشد $\langle n_{\epsilon} \rangle_{F.D.} = \frac{1}{2}$

نبر α به سمت بی‌نهایت برود، e^{α} هم بی‌نهایت می‌شود؛ پس $\frac{1}{e^{\alpha} + 1}$ صفر می‌شود.

نبر α به سمت بی‌نهایت می‌رود، e^{α} صفر می‌شود و $\langle n_{\epsilon} \rangle$ به سمت یک می‌رود.



این به عبارتی می‌گوید که می‌توانیم تعداد در هر تراز $\langle n_{\epsilon} \rangle_{F.D.}$ بین صفر تا یک است که می‌توانیم بصورت بی‌نهایت با افزایش α این مقدار را تغییر دهیم. اما از آنجایی که تعداد در هر تراز

از تغییر این تابع ثابت است.

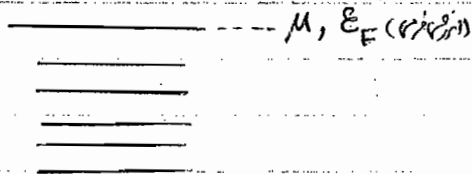
α که به سمت بی‌نهایت می‌رود یعنی در هر تراز کمترین انرژی قرار می‌گیرد. یعنی در هر تراز کمترین انرژی وجود دارد. حال آنکه α به سمت بی‌نهایت می‌رود، kT که نمی‌تواند به سمت $-\infty$ برود و kT حداقل می‌تواند صفر باشد که $\epsilon - \mu$ را بی‌نهایت کند. پس نتیجه این یعنی $T \rightarrow 0$ برود، برای اینکه $\alpha \rightarrow \infty$ برود علاوه بر اینکه $T \rightarrow 0$ باشد، باید μ هم بزرگتر از ϵ باشد.

$$\text{if } \epsilon < \mu \quad \Rightarrow \quad \alpha = \frac{\epsilon - \mu}{kT} \rightarrow -\infty$$

پس برای درجه $T \rightarrow 0$ ، نخواهد بود تمام ترازها پر شوند. یعنی اینکه این انرژی‌ها در مقادیر کم‌ترین انرژی باشند و باید بتوانند بعضی ϵ نمی‌تواند در مقادیر بالا برود و تا حدی که μ برسد می‌تواند بالا برود.

در چه صورت تمام ترازها می‌توانند پر شوند؟ بطور تقریبی می‌توانیم بگوییم که اگر μ بزرگتر از ϵ باشد، آنوقت تمام ترازها می‌توانند پر شوند، بلکه تا حدی که μ برسد می‌تواند بالا برود.

یعنی انرژی فریبی می‌گذاریم (در $T=0$)

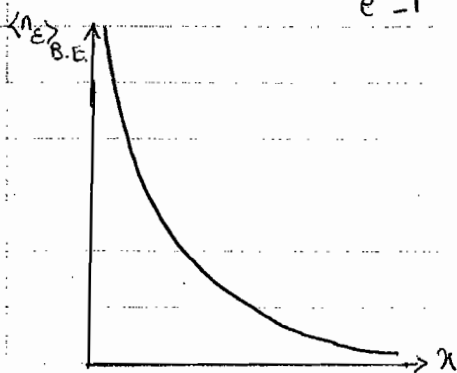


آنرا این اتفاق نیفتد یعنی T صفر باشد که $\frac{\epsilon - \mu}{kT}$ بسطی بی‌نهایت شود، ذرات می‌توانند به ترازهای بالاتر بمانند شوند و می‌توان تعداد این ذرات یک مقدار خاص بود، وقتی این ترازهای بالاتر بمانند می‌شوند، به طوری که در هر کلاس از ترازها هم برسد کویته از یک می‌شود.

پس چیزی که ما به عنوان انرژی فریبی در اینجا مطرح می‌کنیم چیزی نیست فریبی بی‌نهایت می‌ماند که در اینجا داریم.

Bose-Einstein

⑦ $\alpha = -1 \rightarrow \langle n_{\epsilon} \rangle_{B.E.} = \frac{1}{e^{\alpha} - 1}$



آنرا $\alpha = 0$ شود $\langle n_{\epsilon} \rangle_{B.E.}$ بی‌نهایت می‌شود
آنرا α به بی‌نهایت میل کند $\langle n_{\epsilon} \rangle_{B.E.}$ به سمت صفر می‌رود.

آنرا اصلاً بخواند کویته از صفر باشد، این بدان معنی است که e^{α} کویته از یک باشد، در نتیجه $e^{\alpha} - 1$ هم تقریباً به صفر می‌رسد، پس $\langle n_{\epsilon} \rangle$ هم تقریباً به صفر می‌رسد که این بی‌معنی است. یعنی برای این سیستم‌ها از بزرگ‌ترین اوج وقت α نمی‌تواند کویته از صفر باشد، این یعنی $\epsilon - \mu$ همواره باید بزرگتر از صفر باشد.

$\alpha > 0 \rightarrow \frac{\epsilon - \mu}{kT} > 0 \Rightarrow \epsilon > \mu$

یعنی برای سیستم‌های نوزنی بی‌نهایت می‌ماند برای هر تراز صفاً کویته از صفر است، در صورتیکه در سیستم‌های فریبی چنین اتفاقی نمی‌افتد یا به عبارتی صلی و وقتها این طور می‌گوئیم که چون ϵ می‌تواند بی‌نهایت برود، بی‌نهایت می‌ماند هم در سیستم‌های نوزنی می‌تواند بی‌نهایت برود، که همان تعبیر معمولی است که برای بی‌نهایت داریم قابلیت گرفتن یا دالک ذرات در مورد سیستم‌های نوزنی می‌تواند بی‌نهایت باشد یعنی یک سیستم نوزنی می‌تواند بی‌نهایت ذره در فریبی طایر باشد.

تا آنکه اتفاق خاصی (ویژه‌ها) نیفتد که μ یا ϵ فسیل شود.
یعنی اینکه انرژی‌ها را ما هیچ‌کدام نمی‌تواند کمتر از ϵ ببرد، این به این معناست که اینها پس بی‌نهایت می‌ماند تا یک حد ϵ بیشتر نمی‌تواند پس بی‌نهایت.

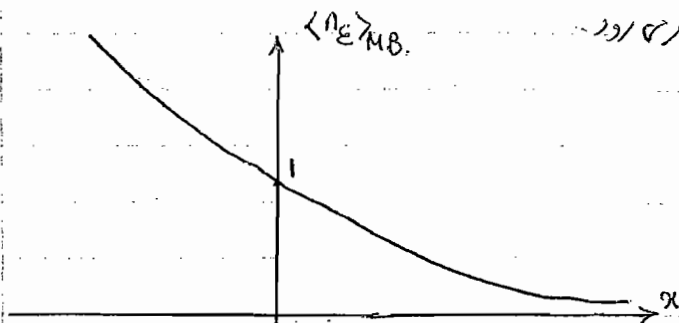
این اتفاق بیفتد (بطوریکه بعد) یعنی انرژی مساوی μ شود، اتفاقی که می افتد این است که α منفی شود. بعد از آنکه این حالت زیادتر می شود، به این شرایط ویژه Bose-Einstein condensation (حالت کوانتوم بوز-اینشتین) می گویند. یک شرایط ویژه ای می تواند اتفاق بیفتد که تمام اینها تعداد زیادی از ذرات در تراز ϵ_0 قرار می گیرند که این موضوع فصل ۷ است و قضیه ای از فصل ۷ در این مورد صحبت می کند که در این شرایط چه اتفاقی می افتد.

Maxwell-Boltzmann

اینها کول بولتزمن را می خوانیم رسم کنیم باید در رابطه ۷ را هفت بند داریم.

$$\text{⑦ } \alpha \rightarrow 0 \rightarrow \langle n_{\epsilon} \rangle_{MB} = e^{-\alpha}$$

در α به سمت منفی بی نهایت، $\langle n_{\epsilon} \rangle_{MB}$ به سمت مثبت می رود.
در α به سمت مثبت بی نهایت، $\langle n_{\epsilon} \rangle_{MB}$ به سمت صفر می رود.



این رابطه که داشتیم بطور کلی به این صورت بود:

$$\text{⑦ } \langle n_{\epsilon} \rangle = \frac{1}{e^{\alpha} + a} = \frac{1}{e^{(\epsilon - \mu)/kT} + a} \quad \begin{cases} a_{F,D} = 1 \\ a_{M.B.} = 0 \\ a_{B,E} = -1 \end{cases}$$

تقریباً α ضمیمه بزرگ باشد، به عبارتی e^{α} ضمیمه بزرگتر از a است، بنابراین a نسبت به e^{α} چشم پوشی کنیم، وقتی a و e^{α} نزدیک باشند یعنی اثرات کوانتومی وجود ندارد، به عبارتی آن چیزی که موجب اثرات کوانتومی می شود همان a است.

پس وقتی α ضمیمه بزرگتر از یک شود، این بدان معنیست که اثرات کوانتومی در حال از بین رفتن است. در حالت اول $\langle n_{\epsilon} \rangle$ (تعداد ذرات) که بطور میانگین در هر تراز جای گرفته اند، ضمیمه کوچکی از a می شود.

$$\alpha \gg 1 \rightarrow \langle n_{\epsilon} \rangle \ll 1$$

α بصورت $\frac{\epsilon - \mu}{kT}$ است، ما معمولاً انتظار داریم که در دماهای ضمیمه به این شرایط ضمیمه به وسیله و درجات کوانتومی وجود ندارد.

وقتی دما بالا برود، انتظار داریم که اثرات کوانتومی را بینیم و می بینیم وقتی α به سمت مثبت بی نهایت می رود یعنی آن ضمیمه کوچک باشد، اما انتظار داریم که دما را که در دماهای زیاد ما می بینیم، ما را که μ بتواند مقدار بسیار کمی بگیرد، یعنی برای هر انرژی ϵ

M جبران تعداد بسیار نفی به فرودین بگرد باید عبارتی $Z = \exp(\frac{M}{kT})$ برای هر آستین (هسته) آها بزرگ و هم آها کوچک
صنیه صنیه کوچکتر از M شود.

$$M \rightarrow \infty \rightsquigarrow Z = e^{\frac{M}{kT}} \ll 1 \quad (VI)$$

اینکه Z صنیه صنیه کوچکتر از M باشد، مهندسی معادلات مربوط به آن را حل کنیم و نشان دهیم که $\frac{N}{V} \lambda^3$ هم کوچکتر از M شود (Z را از تابع پارتیشن حساب کنیم و هم بینیم این اتفاق می افتد)

$$\Rightarrow \frac{N}{V} \lambda^3 \ll 1 \quad (VII) \quad \text{طول موج گرایی}$$

این λ همان طول موج گرایی است که قبلاً گفتیم
که صنیه صنیه کوچکتر از M باشد یعنی $\frac{N}{V} \lambda^3$ (چگالی) صنیه صنیه کوچک باشد یا ماده بسیار رقیق باشد (مانند
فکال باشد)

در Z های صنیه صنیه کوچکتر از M که در محاسبات و کوانتوم را مشخص می کند در واقع رابطه (VII) است نه رابطه (VI)
یعنی آنچه که تعیین کننده است رابطه (VII) نه (VI).
تدریسهای بزرگ هم با هم ولی بزرگ (VII) برقرار شود باید اثرات کوانتومی را در نظر بگیریم.

اینکه ماده بسیار رقیق باشد، صفر را هم صنیه زیاد باشد مهندسی از اثرات کوانتومی چشم پوشی کنیم و باید اثرات کوانتومی
را در نظر بگیریم.
آنجا که اثرات کوانتومی چشم پوشی می شود همانی است که شرط (VII) برقرار شود، در این شرط رقیق بودن و نبودن ماده و
صنیه طور جدا وجود دارد!

نظرات دیگری که در مورد صفر $\langle n_E \rangle$ وجود دارد این است که لغت و فرجهای $\langle n_E \rangle$ برای n کمین با ورود صفر است، $P_E(n)$
(احتمال یافتن n ذره در تراز E) را حساب کنیم.

$$P_E(n) = \text{احتمال یافتن } n \text{ ذره در تراز } E$$

این را می توانیم این طور هم تعبیر کنیم که $\langle n_E \rangle$ (میانگین تعداد ذراتی که در تراز E وجود دارند) را بصورت زیر بنویسیم یعنی
 $P_E(n)$ (احتمال اینکه n ذره در تراز E باشد) را در n ضرب کنیم به خود میانگین تعداد ذراتی که در تراز E قرار گرفته اند.

$$\langle n_E \rangle = \sum_n n P_E(n) \quad (VIII)$$

این احتمال را برای موارد مختلف حساب می کنیم!

1) Fermi-Dirac

(فرمی دیراک از همه ساده تر است)

در عدد فرمی دیراک تعداد ذراتی که در هر تراز می تواند باشند بسیار است یا یک! یعنی $\langle n_E \rangle_{FD}$ بصورت زیر می شود:

$$n = 0 \text{ یا } 1$$

$$\langle n_E \rangle_{FD} = 0 \times P_E(0) + 1 \times P_E(1) \quad (IX)$$

$P_{\epsilon(0)}$ یعنی احتمال اینکه در تراز ϵ هیچ ذره ای نباشد، $P_{\epsilon(1)}$ یعنی احتمال اینکه در تراز ϵ یک ذره وجود داشته باشد

$a=1$ (۱۷)

$$\Rightarrow P_{\epsilon(1)} = \langle n_{\epsilon} \rangle_{F.D.} = \frac{1}{e^{-(\mu - \epsilon)/kT} + 1} \quad (18)$$

$$\Rightarrow P_{\epsilon(0)} = 1 - \langle n_{\epsilon} \rangle_{F.D.} \quad (19)$$

2) Bose - Einstein

برای بوز-اینستین تقریباً هیچ محدودیتی در تعداد ذرات نیست چون در این حالت n می تواند صفر یا از صفر بزرگتر باشد

$$\langle n_{\epsilon} \rangle = \sum_n n P_{\epsilon(n)}$$

ما از این استفاده می کنیم که P_{iS} (احتمال اینکه سیستم N_r ذره داشته باشد و انرژی آن ϵ_S باشد) سیستم S Grand Canonic از رابطه زیر بدست می آید:

$$P_{iS} = \frac{e^{-\alpha N_r - \beta \epsilon_S}}{D}$$

الان در واقع باید $P_{\epsilon(n)}$ را حساب کنیم

(N_r) یعنی در تراز ϵ تا n ذره وجود داشته باشد، انرژی آن هم $n\epsilon$ است چون ذرات از هم بی اثرند و انرژی آن ها هم بی اثر است (انرژی آن ها $n\epsilon$ است)

$$\Rightarrow P_{\epsilon(n)} = \frac{e^{-\alpha n - n\epsilon\beta}}{D} \quad (20)$$

بنابراین $\alpha = \frac{\mu}{kT}$ می گذاریم که یعنی $\exp(\frac{\mu}{kT})$ و D بر حسب آن تراز را هم در مجموع قرار می دهیم. D (۱۷) می شود D که قبلاً حساب کرده بودیم به صورت $D = \sum_n e^{-\alpha n - n\epsilon\beta}$ (۱۷) را می توانیم با قبلاً D این که حساب کرده بودیم D را به صورتی بازنویسی کنیم فقط D تراز ϵ را حساب می کنیم

(۱۷) $D_{B.E} = \sum_n e^{-\alpha n - n\epsilon\beta} \xrightarrow{\text{دنباله هندسی}} D_{B.E} = \frac{1}{1 - ze^{-\beta\epsilon}}$

$$(21) \quad P_{\epsilon(n)} = \frac{(e^{+\frac{\mu}{kT}})^n e^{-\beta \epsilon n}}{\frac{1}{1 - ze^{-\beta\epsilon}}} = \frac{z^n e^{-\beta \epsilon n}}{1 - ze^{-\beta\epsilon}}$$

$$\Rightarrow P_{\epsilon(n)} = (ze^{-\beta\epsilon})^n (1 - ze^{-\beta\epsilon}) \quad (22)$$

از طرفی $\langle n_{\epsilon} \rangle$ بصورت زیر است:

(۱۷) $a=-1$

$$\langle n_{\epsilon} \rangle_{B.E} = \frac{1}{ze^{-\beta\epsilon} - 1}$$

در فرآیند و تقسیم انرژی...

$$(Ze^{-\beta\epsilon})^{-1} \langle n_{\epsilon} \rangle_{B.E.} = 1 + \langle n_{\epsilon} \rangle_{B.E.}$$

$$\Rightarrow Ze^{-\beta\epsilon} = \frac{\langle n_{\epsilon} \rangle_{B.E.}}{1 + \langle n_{\epsilon} \rangle_{B.E.}} \quad (XII)$$

بنابراین رابطه (XII) را داریم:

$$P_{\epsilon}(n) = (Ze^{-\beta\epsilon})^n (1 - Ze^{-\beta\epsilon}) \stackrel{(XII)}{=} \left(\frac{\langle n_{\epsilon} \rangle}{1 + \langle n_{\epsilon} \rangle} \right)^n \left(1 - \frac{\langle n_{\epsilon} \rangle}{1 + \langle n_{\epsilon} \rangle} \right)$$

$$\Rightarrow P_{\epsilon}(n) = \frac{\langle n_{\epsilon} \rangle^n}{(1 + \langle n_{\epsilon} \rangle)^{n+1}} \quad (XIV) \quad \text{نوز اینستین}$$

میبینیم که در رابطه (XIV) و (XIII) (فرس-بریک) احتمال به فرس n وابسته نیست و برای n و $n-1$ همفرات است. وقتی n به این صورت باشد و همفرات باشد، دوتا احتمال بیسند و فرس ندارد $(P_{\epsilon}(n), P_{\epsilon}(n-1))$ یا ذره در تراز n نشیند یا احتمال $P_{\epsilon}(n)$ و یا ذره در تراز $n-1$ نشیند یا احتمال $P_{\epsilon}(n-1)$.

$$\left. \begin{aligned} (IX) \quad P_{\epsilon}(n) &= \langle n_{\epsilon} \rangle_{F.D.} = \frac{1}{e^{(n+1)\epsilon/kT} + 1} \\ (X) \quad P_{\epsilon}(n-1) &= 1 - \langle n_{\epsilon} \rangle_{F.D.} \end{aligned} \right\} \text{فرس-بریک}$$

اما رابطه (XIV) به n وابسته است، یعنی احتمال نشیند به این دارد که چند ذره در تراز نشینند. گشت زیر یعنی احتمال نشیند در تراز انرژی n ذره بیسند یا $(n-1)$ ذره را نسبت میگرد. این احتمال به فرس وابسته است. بین احتمال نشیند در تراز n با انرژی ϵ ، n ذره بیسند تقسیم بر احتمال نشیند $(n-1)$ ذره بیسند همفرات.

$$\frac{P_{\epsilon}(n)}{P_{\epsilon}(n-1)} \stackrel{(XIV)}{=} \frac{\langle n_{\epsilon} \rangle^n}{(1 + \langle n_{\epsilon} \rangle)^{n+1}} \cdot \frac{(1 + \langle n_{\epsilon} \rangle)^n}{\langle n_{\epsilon} \rangle^{n-1}} = \frac{\langle n_{\epsilon} \rangle}{1 + \langle n_{\epsilon} \rangle} \quad (XV) \quad \text{نوز اینستین}$$

یعنی احتمال به n ربط ندارد که در تراز n ذره بیسند یا $(n-1)$ ذره. نسبت این دو احتمال ثابت است.

3) Maxwell-Boltzmann

$P_{\epsilon}(n)$ با n رابطه به این صورت است: $P_{\epsilon}(n) = \frac{(Ze^{-\beta\epsilon})^n}{n!}$

$$P_{\epsilon}(n) = \frac{(Ze^{-\beta\epsilon})^n / n!}{Ze^{-\beta\epsilon}} \quad (XVI) \quad a_{\infty} \quad \langle n_{\epsilon} \rangle_{MB} = \frac{1}{e^{(\epsilon - \mu)/kT}} = Ze^{-\beta\epsilon} \quad (XVII)$$

(14) $\frac{1}{e^{(\epsilon - \mu)/kT}} \rightarrow$

(XVI), (XVII) $\Rightarrow P_E(n) = \frac{\langle n_E \rangle^n}{n!} e^{-\langle n_E \rangle}$ (XVIII)

این توزیع بواسون است و قویاً با پواسون گره یو.ج. رابطه (XVI) این که نسبتیم، از رابطه (XV) استخراج کردیم و D ربط را از D مربوط به ماکول-بولتزمن گذاشتیم.

رابطه (XVIII) یک توزیع بواسون است و هر گوی برای هر تراز صاف تعداد n ها را ببیند کنیم با توزیع بواسون اشتراک کند و $\frac{P_E(n)}{P_E(n-1)}$ (احتمال اینکه n ذره در این تراز باشند به احتمال اینکه (n-1) ذره باشند) بصورت زیر است:

$$\frac{P_E(n)}{P_E(n-1)} = \frac{\frac{\langle n_E \rangle^n}{n!} e^{-\langle n_E \rangle}}{\frac{\langle n_E \rangle^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\langle n_E \rangle}} \Rightarrow \frac{P_E(n)}{P_E(n-1)} = \frac{\langle n_E \rangle}{n}$$

ماکول-بولتزمن (XIX)

این رابطه می گوید اگر تعداد ذرات را زیاد کنیم، این احتمال از نسبت n که در آن بود تغییر به احتمال کند و تعداد بیشتر ذره در تراز می بیند

ماکول-بولتزمن $P_E(n) = P_E(n-1) \frac{\langle n_E \rangle}{n}$

$P_E(n-1)$ یک مقدار عددی است، مثلاً با احتمال 0.1 (n-1) ذره در تراز نسبت (مثلاً 100 ذره) احتمال آن بخواهیم 100+ ذره در این تراز باشند، احتمال آن 0.001 = $\frac{0.1}{100}$ خواهد شد، یعنی این احتمال کمتر و کمتر می شود.

اما در توزیع بزرگ انیشتین فرقی نمی کند یعنی هر چه ذره در تراز بزرگ ما در احتمال که 10 ذره می نشست، با همان احتمال 50 ذره می نشیند، یعنی اینها به ندرت گنجه تر هستند. پس در مورد بزرگ انیشتین هر تعداد ذره بخواهیم در تراز بزرگ، به لحاظ احتمال فرقی نمی کند، چه بخواهیم 100 ذره بنشینیم و چه بخواهیم 150 ذره بنشینیم، فرقی نمی کند. در صورتیکه در ماکول-بولتزمن این اتفاق نمی افتد. اگر بخواهیم در یک تراز تعداد بیشتری ذره بنشینیم، احتمالش نسبت به تعداد کمتر ذره کمتر خواهد بود.

در فرس-دیراک که اصلاً وضعیت فرق می کند، با صفوات یا یک واحد بیش از یک ذره در تراز نمی نشیند که بخواهیم چنین احتمالی را برای آن حساب کنیم. برای بزرگ انیشتین این نسبت برابر بصورت یو.ج.:

$$\frac{P_E(n)}{P_E(n-1)} = \frac{\langle n_E \rangle}{1 + \langle n_E \rangle} \rightarrow \text{یعنی از } n! \text{ بزرگ انیشتین}$$

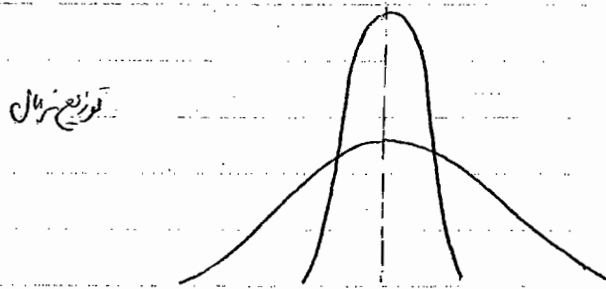
فقط به عدد 1 ها تغییر دارد

حال می خواهیم انت و قویاً $\langle n_E \rangle$ ها را بررسی کنیم. برای این کار به صورت زیر اصلاً کنیم

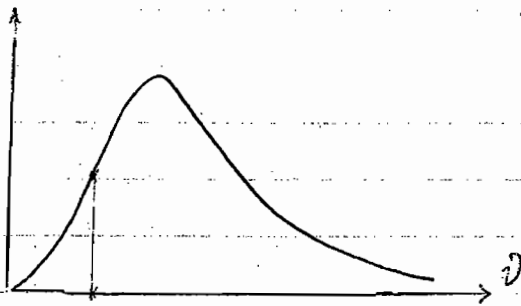
$$\frac{\langle n_E^2 \rangle - \langle n_E \rangle^2}{\langle n_E \rangle^2} \quad \text{(XX)}$$

یعنی چقدر انحراف از مقدار میانگین پیدا کرده (طول یک نوار میانه و زاویه گرفتن) تقسیم بر قدری که میانگین دارد به ما افت و غیر از این است

نیز این نسبت را می توانیم برای توزیع های گوسی حساب کنیم، این عبارت ها همیشه با ضریب $\frac{1}{\sigma}$ تناسب هستند، به خاطر همین بود که ضریب σ زیادتر می شود، شکل طول مقدار میانگین نیز و نیز می شود، توزیع های نرمال $\langle n \rangle$ به این صورت هستند. اگر توزیع های نرمال هر توزیع داشته باشیم نسبت به هر چیزی اگر میانگین n^2 را از میانگین n به توان دو، تقسیم بر ضریب میانگین به توان دو کنیم، این اتفاق به ندرت افتد و غیره طول مقدار میانگین را هم دهد. که تابع توزیع کامل متغیر باشد این افت و غیره تناسب با $\frac{1}{n}$ می شود و ضریب n بیشتر شود شکل نیز تغییر می کند.



یعنی است توزیع متغیر باشد مثل توزیع که به یک برای خود خاصی داخل یک کاراک پیدا کرده بود. اگر توزیع خود خاصی داخل کاراک برآید کنیم، اطرافیم دید نسبت به کسب که در نظر می گیریم به صورت شکل با این فاصله بود. شکل گوسی نیست، ابتدای شکل با فاصله از مرکز دیده شود. وقتیکه تغییر آن با فاصله از مرکز دیده شود. این شکل بعد از باروشن شدن نسبی قابل توضیح نبود. بیشتر شبیه بود به اوج های بیشتر می شود. راه به یک آنرا توضیح دهیم، به نیت اندازه را کوانتیده گرفته بود. از ϵ که ضریب برابر $h\nu$ بود.



$\langle n \rangle < n_{max} - \epsilon$

گوسی نیست

چیزی که به نیت به توان است حساب کند خود خاصی بود که در یک جمع و زاویه گرفتن بود. این بود فاصله های که در صیغه هستند است نسبت به $\frac{1}{\sigma}$ تقسیم (یا فاصله از σ)، آنچه می کنیم شد است. شدت را بر حسب فواصل یا طول موج می کنیم. یک شدت فاصل یعنی مقدار متوسط زائده که شدت این فواصل را دارند، یعنی در واقع ما $\langle n \rangle$ را بر حسب ϵ می کنیم، یعنی شدت زائده که انرژی ϵ را دارند (که ϵ با $h\nu$ داده می شود) را بر حسب ضریب ϵ می کنیم.

در ضرایب عبارت $\frac{\langle n \rangle^2 - \langle n \rangle}{\langle n \rangle^2}$ (رابطه XX) را برای انرژی ها حساب کنیم چون در اینم فواصل انرژی ها بزرگ هستند.

ابتدا $\langle n \rangle$ را حساب می کنیم، اگر بر حسب $\langle n \rangle$ را از روی D حساب کنیم می شود

$$\langle n \rangle = \frac{1}{D} \left[-\frac{1}{\beta} \frac{\partial D}{\partial \epsilon} \right]_{T, \mu} = -\frac{1}{\beta} \frac{\partial \ln Z}{\partial \epsilon} = \frac{1}{\epsilon^{-1} e^{\beta \epsilon} + 1} \quad (1)$$

$-\frac{1}{\beta} \frac{\partial \ln D}{\partial \epsilon}$ همان چیز است که قبلاً بدست آوردیم.

حال $\langle n_{\epsilon}^2 \rangle$ را حساب کنیم.

$$\langle n_{\epsilon}^2 \rangle = \frac{1}{D} \left[\left(-\frac{1}{\beta} \frac{\partial}{\partial \epsilon} \right)^2 D \right] \quad (1)$$

$$(1) \Rightarrow \langle n_{\epsilon}^2 \rangle - \langle n_{\epsilon} \rangle^2 = \frac{1}{D} \left[\frac{1}{\beta^2} \frac{\partial^2 D}{\partial \epsilon^2} - \frac{1}{\beta^2} \frac{\partial D}{\partial \epsilon} \right] = \frac{1}{\beta^2} \frac{\partial^2}{\partial \epsilon^2} \ln D$$

در فصل ۴ یک بار همین کار را می‌کنیم.

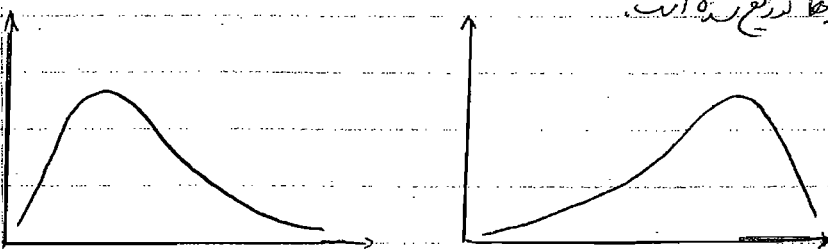
حال اگر $a = 1$ باشد، $\frac{\langle n_{\epsilon}^2 \rangle - \langle n_{\epsilon} \rangle^2}{\langle n_{\epsilon} \rangle}$ را حساب کنیم، به روش:

$$\frac{\langle n_{\epsilon}^2 \rangle - \langle n_{\epsilon} \rangle^2}{\langle n_{\epsilon} \rangle} = \frac{1}{\beta} \frac{\partial}{\partial \epsilon} \frac{1}{\langle n_{\epsilon} \rangle} = \frac{1}{\langle n_{\epsilon} \rangle} - a \quad (3)$$

صافه بالا اگر $a = 0$ باشد این است و قدرش با $\frac{1}{\langle n_{\epsilon} \rangle}$ هم‌شکل بعضی توزیع‌ها است و توزیع گیبس هم از این نوع است.

اگر $a = 1$ باشد یعنی فرسودگی باشد و a مقدار داشته باشد $(+1, 0, -1)$ این توزیع نیز گیبس نیست، یعنی حال یک نقطه، یک حالت متوازن توزیع شده است.

وقتی $a = +1$ باشد به طرف بزرگترها برده شو یعنی همان نظر که این است بوده بود.
و اگر $a = -1$ باشد به طرف کوچکترها توزیع شده است.



این این را هم از این جهت برداشت کردیم که در سیستم‌های فیزیکی و بیولوژیکی، حالت و تغییر حالت در متعادل نیست و یک توزیع متعادل نیست. حال وقتی $\langle n_{\epsilon} \rangle$ به سمت بی‌نهایت برود $\frac{1}{\langle n_{\epsilon} \rangle}$ صاف می‌شود و در نتیجه $\frac{\langle n_{\epsilon}^2 \rangle - \langle n_{\epsilon} \rangle^2}{\langle n_{\epsilon} \rangle}$ به مقدار ثابتی می‌رسد که $(+1, 0, -1)$ است.

در مورد گازها برآورد می‌کنیم که در فصل ۲، ۳، ۴، در مورد بیولوژیکی‌ها در فصل ۷ صحبت خواهیم کرد و درستی که با ما می‌اندازد، وقتی از فصل ۷ را خواهیم گفت که بیشتر کاربرد دارد، مخصوص در مورد Bose-Einstein Condensation. همین طور یک سیستمی هم از فصل ۸ که یک صورتی هم فیلتر می‌شود که به درصدها می‌آید و مورد و مستحق است که به عنوان حالتی در نظر گرفته شود و موردی هم می‌گردد و معادله حالت آن را در فصل ۸ می‌بینیم.

اما قبل از آنکه در مورد اینها صحبت کنیم، بدینست یک مقدار در مورد اینکه اینها چه چیزهایی هستند و چه هستند صحبت کنیم.

ما تمام اینها را این طرز فرض کرده ایم که اینها در یک ظرف در بسته در یک دما و در یک حجم در یک دما قرار دارند. یعنی اینها در یک ظرف در بسته در یک دما و در یک حجم در یک دما قرار دارند. یعنی اینها در یک ظرف در بسته در یک دما و در یک حجم در یک دما قرار دارند.

$$Q_N(V, T) = \frac{1}{N!} Q_1^N$$

در فرضی که اینها در یک ظرف در بسته در یک دما و در یک حجم در یک دما قرار دارند.

برای یک دما و در یک حجم در یک دما قرار دارند.

اینها در یک دما و در یک حجم در یک دما قرار دارند. یعنی اینها در یک ظرف در بسته در یک دما و در یک حجم در یک دما قرار دارند. یعنی اینها در یک ظرف در بسته در یک دما و در یک حجم در یک دما قرار دارند.

$$\frac{N}{V} \frac{h^3}{(2\pi m k T)^{3/2}} \ll 1$$

شرطی که اینها در یک دما و در یک حجم در یک دما قرار دارند.

این شرط، شرطی است که اینها در یک دما و در یک حجم در یک دما قرار دارند. یعنی اینها در یک ظرف در بسته در یک دما و در یک حجم در یک دما قرار دارند. یعنی اینها در یک ظرف در بسته در یک دما و در یک حجم در یک دما قرار دارند.

شرطی که اینها در یک دما و در یک حجم در یک دما قرار دارند. یعنی اینها در یک ظرف در بسته در یک دما و در یک حجم در یک دما قرار دارند. یعنی اینها در یک ظرف در بسته در یک دما و در یک حجم در یک دما قرار دارند.

فقط همین است که اینها در یک دما و در یک حجم در یک دما قرار دارند.

اینها در یک دما و در یک حجم در یک دما قرار دارند. یعنی اینها در یک ظرف در بسته در یک دما و در یک حجم در یک دما قرار دارند. یعنی اینها در یک ظرف در بسته در یک دما و در یک حجم در یک دما قرار دارند.

$$Q_1(T, V) = \left\{ \frac{V}{h^3} (2\pi m k T)^{3/2} \right\} g(T) \quad (4)$$

که به $\rho(T)$ آبیچ پارسه صفت دافعه به گویم و آنرا بصورت زیر می نویسیم

$$\rho(T) = \sum_i g_i e^{-\epsilon_i / kT} \quad (5)$$

انرژی دافعه سیستم

در رابطه با ρ ، یعنی انرژی دافعه سیستم است پس انرژی نورانی که این سیستم پس از اشتداد و انرژی ارتعاشی که این سیستم بخون دست داشته باشد انرژی الکتریکی که این سیستم می تواند داشته باشد که در مورد آنها بیشتر صحبت خواهیم کرد. g_i هم تبهنی است، تبهنی این که هر کولوم از ρ حاصل می تواند داشته باشد.

انرژی آزاد شده A_{int} ، انرژی دافعه سیستم، این طور می نویسیم (که مربوط به Q دافعه نور) internal

$$A_{int} = -NKT \ln j$$

$$M_{int} = -KT \ln j$$

$$S_{int} = NK (\ln j + T \frac{\partial}{\partial T} \ln j)$$

$$U_{int} = NKT^2 \frac{\partial}{\partial T} \ln j$$

$$(C_v)_{int} = NK \frac{\partial}{\partial T} (T^2 \frac{\partial}{\partial T} \ln j)$$

توجه کنیم که چون Q ، بصورت حاصل $\frac{V}{h^3} (2\pi m kT)^{3/2}$ در $\rho(T)$ نوشتیم، البته ندیدیم که Q را "دافعه" (int) گذاشتیم کار درستی است، به شرط آنکه در $\rho(T)$ این که Q را در $\rho(T)$ داریم، که می توانیم

$$\ln Q = \ln \left\{ \frac{V}{h^3} (2\pi m kT)^{3/2} \times j \right\} = \ln \left(\frac{V}{h^3} (2\pi m kT)^{3/2} \right) + \ln j$$

که ما اثر دافعه آخر برای به حسابت که در $\rho(T)$ نوشتیم، متوجه می شویم که Q را در $\rho(T)$ نوشتیم، که مربوط به دافعه است و متوجه می شویم که مربوط به دافعه است، که این هم می تواند تبهنی شود.

کسیت مهمی که می توانیم حاصل اندازه گیری است و ما در مورد آن با صحبت خواهیم کرد $(C_v)_{int}$ است C_v ، یعنی انرژی درجه آزادی به سیستم انرژی درجه آزادی و تبهنی (با عدد را در این پیدا می کنند)

از سیستم با صفت دافعه داشته باشد، یعنی است انرژی به سیستم درجه آزادی این انرژی صرف تحرک در $\rho(T)$ (دافعه نور) دارد فقط $\rho(T)$ در $\rho(T)$ دافعه نور می باشد و در $\rho(T)$ اینها را دقیقاً نسبت می نویسیم که اینها سیستم است و تبهنی می شود.

اینها را تبهنی می نویسیم این Q را که اینها داریم فقط بصورت تبهنی می کنند، یعنی در صورت Q می باشد که به صورت تبهنی می کنند فقط می تواند از انرژی و تبهنی می باشد یعنی Q را در $\rho(T)$ نوشتیم که C_v از $\ln j$ متن گرفته می شود و اینها در این حالت C_v تبهنی می شود.

در C_v تبهنی می شود که در Q تبهنی می شود.

پس میفراییم طاقتهای یک اتمی، اروتیک و چندانکه را بررسی کنیم و مخصوصاً C_v را برای آن مطالعه کنیم و این کار است که طبق بعد انجام خواهد داد:

باید توجه داشته باشیم که ما به شرایط قابل کار میگیریم:

$$J(T) = J_{elec} J_{nuc} J_{rot} J_{vib}$$

حالتیست دروسم: Q_1 را

طبق گفته در مورد سیستم های با مقدار داخلی همبست میگیریم و گفتیم که این گازها را فصل این طور در نظر میگیریم که از نوع گازها ناکول-بولتزمن باشند و از خود یک تصدیق میمانند که مثلاً اگر همه آنها را فریبی در نظر بگیریم، همه آنها هم از آنند و این معنی این طور در نظر میگیریم که اینجا ناکول-بولتزمن باشند و همه را میگیریم:

$$Q_N = \frac{Q_1^N}{N!}$$

که Q_1 عامل وضعیت است:

$$Q_1 = \left\{ \frac{V}{h^3} (2\pi mKT)^{3/2} \right\} j(T)$$

تابع پایش داخلی

گفتیم سیستمی که برای تابع پایش داخلی در نظر میگیریم شامل یک قسمت انرژی است با فرض اینکه آنها هم پویا هستند باشند (تابع درج و ربط به انرژیها با تابع درج همبسته - هم پویا ندارند) یک قسمت هسته ای است قسمت دورانی و یک قسمت نورانی هم در نظر میگیریم:

$$J(T) = J_{elec} J_{nuc} J_{rot} J_{vib} \quad (1)$$

نورانی دورانی هسته انرژی

حال ما باید قسمت داخلی A سیستم را بنویسیم. ما در واقع باید A کل را بنویسیم که چیزی نیست جز $-NKT \ln Q$ و چون Q بصورت $(Q_1)^N$ است، A برابر شود با $N \ln Q_1$ که Q_1 ها هم وضعیت دارند که $\ln Q_1$ هم بصورت جمع \ln قسمت اول و \ln قسمت دوم می شود. بنابراین ما می توانیم یک A_{int} (internal) بصورت زیر تعریف کنیم:

$$A = -NKT \ln Q$$

$$A_{int} = -NKT \ln j$$

بعد از این A_{int} را بنویسیم و گفتیم که میفراییم این طبقه از آن همبست کنیم $(C_v)_{int}$ است:

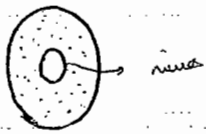
$$(C_v)_{int} = NK \frac{\partial}{\partial T} \left(T^2 \frac{\partial \ln j}{\partial T} \right) \quad (2)$$

توجه کنید چون در اینجا $\ln j$ ظاهر شده است، بنابراین $(C_v)_{int}$ را می توانیم بنویسیم $(C_v)_{elec} + (C_v)_{nuc} + (C_v)_{rot} + (C_v)_{vib}$

التهیه به شرط آنکه اینها به T وابسته نباشند، در این صورت صرفاً به عنوان یک ضرب ظاهر می شود. C_v کل هم بصورت مع (یعنی) و هم نامی از وقتی که از حرکت انتقالی بدست می آید، افراهدند.

برای الکترون حرکت از اینها را بررسی کنیم، باید ببینیم که چه نوع مولکولها داریم. سه نوع مولکولها داریم که همه ترانزیت دارند: مولکولهای تک اتمی هستند یعنی مولکولهایی که فقط از یک اتم تشکیل شده اند. اتم تک هسته دارد و الکترونهایی که در اطرافش هستند.

مولکولهای تک اتمی: Monoatomic molecules



معمولاً انرژی پرتوهای این اتم (انرژی که در T است) این اتم بریزد و سرد می شود و پس از آن در دماهای کم (order) $10^4 - 10^5$ کلوین است، که البته این دما بسیار بزرگتر از دمای است که ما بطور روزمره از آن استفاده می کنیم و در دماهایی که در حدود 10^2 کلوین است، ضمیمه با درجات (در T است).

پس در این شرایط دمای اصولاً این سیستم در دماهای پایین قرار گرفته و همه ترانزیت را می توانیم که در دماهای مختلف تغییر می دهیم.

در ضمن این را هم گفته بودیم که هر کدام از این وظایف بصورت زیر نوشته می شوند:

$$J(T) = J_{elec} J_{nuc} J_{rot} J_{vib}$$

$$j(T) = \sum_i g_i e^{-\epsilon_i / kT} \quad (3)$$

برای دماهای الکترونی اثر نگاه کنیم، باید انرژیهای حالتی در حدود $10^4 - 10^5$ k و دماهای پرتوهای تابنده دماهای کمتری دارند. ما می دانیم که ما داریم در حدود دماهای معمولی اتاق باقی می مانیم، در مرتبه بزرگتری از این دماها هستند پس کمتر $\frac{\epsilon_i}{kT}$ عدد بزرگتری شود و اصولاً می توانیم از صیغه $\exp(-\frac{\epsilon_i}{kT})$ چشم پوشی کنیم، تنها چیزی که در آن الکترونی می تواند نقش داشته باشد، فقط تپوهای g_i است که اینها دارند.

$$j(T) = \sum_i g_i e^{-\epsilon_i / kT}$$

در دماهای اتاق تنها چیزی که در آن الکترونی می تواند نقش داشته باشد.

تپوهای اینها هم به این بر می گردد که angular mom. تغییر می دهد و در این سطح سیستم تغییر می دهد. بطور کلی چند حالت برای ترانزیت تقسیم کنیم، یعنی هم چیزی بر می گردد به که L و البته J.

$$S, L, J$$

برای ضمیمه از دماهای تک اتمی معمولی که داریم پس کارهای فزاینده، علم می رود. دماهای الکترونی اینها هم پراست، وقتی که دماهای الکترونی اینها می باشد، $S=0$ است و همین طور $L=0$ است، یعنی angular mom. کل و این سطح صاف هستند.

$$\left\{ \begin{array}{l} S=0 \\ L=0 \end{array} \right.$$

وقتی دور را بیچسب $angular\ mom.$ با طور همگام می‌کنیم که از این جنبه هستی می‌کنیم. به عنوان آنرا بصورت $(2j+1)$ است یعنی تعداد حالت‌هایی که یک انرژی مشخصا $2j+1$ دارد (در سه مولودت)

$(2j+1) = 2j+1$ به عنوان (تعداد حالت)

این سیستم هست J_{rot} و J_{nuc} و هر دو زیاد، چون با هم در یک برای آن‌ها هم‌ترازیم J_{nuc} هم هست. به عنوان آنرا که برای J_{rot} در یک از مرتبه MeV هست به عنوان وقت از $\exp(-\frac{E_i}{kT})$ می‌گیریم. این 50 این (انرژی نورانی) به عنوان آنرا که این سیستم هست J_{nuc} بصورت $(2S_n+1)$ که در آن S_n این سیستم هست است.

$$J_{nuc} = (2S_n + 1)$$

اینها در حالت C_v (رابطه 2) نقش ندارند، برای آنکه در حالتی نظیر $2j+1$ و آن در 50 می‌کنند که در آنجا از آن تغییرات نمی‌گیریم.

* مشکل این است که برای J_{rot} و J_{nuc} برای J_{rot} و J_{nuc} است؟
 این رابطه برای هر دو است، هم برای انرژی و هم برای J_{rot} و J_{nuc} که برای هر دو هم $\exp(-\frac{E_i}{kT})$ است.
 نظریه J_{rot} و J_{nuc} است که از نوع J_{rot} و J_{nuc} است.

* مشکل این است که اینها در J_{rot} و J_{nuc} در $2j+1$ و $2S_n+1$ است. اینها در J_{rot} و J_{nuc} است.
 $L=0, S \neq 0$ یا $L \neq 0, S=0$ یا $L=0, S=0$ یا $L \neq 0, S \neq 0$
 $L=0, S \neq 0 \rightarrow (2S+1)(2S_n+1)$

آیا اینها در J_{rot} و J_{nuc} در $2j+1$ و $2S_n+1$ است؟ اینها در J_{rot} و J_{nuc} است که هم L مختلف است و هم S .

$$J(T) = \sum_i g_i e^{-\frac{E_i}{kT}} \rightarrow \text{با این فرمول}$$

$L \neq 0, S \neq 0$

وقتی هم L و هم S مختلف است، برای آنرا در J_{rot} و J_{nuc} است که J_{rot} و J_{nuc} است. اینها در J_{rot} و J_{nuc} است که L و S در J_{rot} و J_{nuc} است.

$$H_{elec} = H_0 + L.S$$

H_0 بصورت $\frac{p^2}{2m}$ + $L.S$ در رابطه قرار دارد

اگر L و S مختلف است، H_{elec} در $L.S$ بصورت آنرا که آنرا معمولاً به عنوان (اصول) در J_{rot} و J_{nuc} است. اینها در J_{rot} و J_{nuc} است.

اینها را در اینجا می بینیم، ϵ_{elec} در رابطه با L را بصورت زیر می نویسیم:

$$j_{elec} = C \sum_J (2J+1) e^{-\epsilon_J/KT} \quad (4)$$

↓
سختی ثابت

$(2J+1)$ در اینجا چون وقتی $L \neq 0$ و $K \neq 0$ باشد، از معیار انرژی ای J استفاده می کنیم و تقارن ϵ_{elec} با J ظاهر می شود. ϵ_J ، ϵ این است که در این J وابسته است، البته ϵ_J به J وابسته است از جمله L ثابتی را در آن می نویسیم.

تقریباً $KT \gg \epsilon_J$ در آن صورت جمله $e^{-\epsilon_J/KT}$ یک می شود:

$$KT \gg \epsilon_J \Rightarrow e^{-\epsilon_J/KT} \rightarrow 1$$

در این KT کوچکتر از ϵ_J همانند آنکه صورت معکوس جمله $J=0$ خواهد بود.

$$KT \ll \epsilon_J \rightarrow J=0 \text{ تنها جمله است}$$

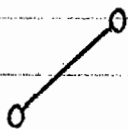
وقتی $J=0$ از جمله معکوس می شود، j_{elec} را می توانیم بصورت زیر تقریب می نویسیم:

$$j_{elec} \approx C_0 (2J_0+1) e^{-\epsilon_0/KT}$$

در اینجا C_0 در نهایت در $(2J_0+1)$ در رابطه با L باید در نظر گرفته شود.

C_v این مورد را بیست درصد $3/2 NKT$ است، چون در اینجا ϵ_{elec} و ϵ_{trans} یا ϵ_{rot} (در اینجا) در نظر گرفته می شود. در اینجا $\epsilon_{elec} = NK \frac{\partial}{\partial T} (T^2 \ln \frac{2}{\pi})$ یعنی ϵ_{elec} در اینجا T بستگی ندارد، در حالی که $\exp(-\frac{\epsilon_J}{KT})$ قابل اغماض نیستند که این اتفاق در دمای اتاق معمولاً نمی افتد.

مولکولهای دو اتمی، Diatomic molecules



برای مولکولهای دو اتمی وضع کمی فرق می کند.

اصولاً ما دو دسته مولکول دو اتمی را بررسی می کنیم: یک دسته مولکولهای AA و دسته دیگر مولکولهای AB هستند.

مولکولهای AA مثل H_2 ، O_2 و مولکولهای AB مثل مولکولهای CO و ...

در مولکولهای AA تقارن وجود دارد و هر دو اتم در مرکز جرم قرار می گیرند و تقارن در جهت حرکت می بینیم. همچنین اولیها ما در مورد مولکولهای AB است.

برای مولکولهای AB را از هم جدا کنیم، انرژی لازم است که به این انرژی، انرژی ϵ_{elec} می نویسیم. انرژی ϵ_{elec} اینها از مرتبه 10^{-3} تا 10^{-5} است که نسبت به مولکولهای مختلف متفاوت است.

این کمترین مقدار فاصله جاذبه را می توانیم ببینیم، علاوه بر این می توانیم این مولکولهای را ترکیب کنیم.

ابتدا ما می بینیم که در صورتی که در صورتی که در اینجا MeV است و ϵ_{elec} در اینجا 10^{-3} تا 10^{-5} است. بنابراین از آنجا بصورت $(2J_0+1)(2J_0+1)$ ظاهر می شود. جمله A است که در اینجا B است که اینها بصورت ϵ_{elec} می نویسیم.

* در تمام حساب‌ها که در این راه برآورد می‌کنیم
 صاف می‌کنیم : $(2S_A + 1)(2S_B + 1)$

انرژی الکترونی :

برای حالت‌های الکترونی هم سه حالت عمده در نظر می‌گیریم :

این‌ها ψ angular mom

$S = 0, L \neq 0$

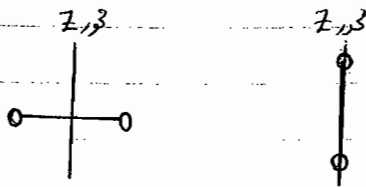
$S \neq 0, L = 0$

$S \neq 0, L \neq 0$

ملاحظه کنید که در اینجا وجود دارد، مثلاً برای $L \neq 0, S = 0$ ، $2L + 1$ ظاهر می‌شود. برای $L = 0$ و $S \neq 0$ ، $2S + 1$ ظاهر می‌شود و برای $L \neq 0, S \neq 0$ ، جمله‌ای که ظاهر می‌شود از جنس مقابل است :

$$\sum (2J+1) e^{-\epsilon_J/kT} \quad (5)$$

حالتی که در سه حالت بالا نوشتیم، L کل اینهاست یعنی باید یک L_1 برای A و یک L_2 برای B در نظر بگیریم. برای چنین ترکیب‌هایی هم داریم. L کل اینها را می‌گیریم که در تمام حالت‌ها بیشتر و صاف‌تر می‌شود یعنی اثر دوزره داشته باشیم و L کل آنها را می‌گیریم اینها هم دارند به این اندوه‌ها از فراموشی گرفته باشند :



برای سیستم دوزره‌ها هم می‌توانیم L در نظر بگیریم و همین طور یک S که برای L و S کل آنها داریم :

$$|L_1 - L_2| \leq |L| \leq |L_1 + L_2|$$

$$|S_1 - S_2| \leq |S| \leq |S_1 + S_2|$$

در تمام که در رابطه (5) نوشتیم، مجموع کل اینهاست (L و S)

برای این حالت هم باید چیزی که در حالت قبول نوشتیم، هم در اینم بنویسیم. اثر kT از آنجا که این انرژی‌ها بسته دارند هم در اینم از $\exp(-\epsilon_J/kT)$ هم بویستیم کنیم و اثر kT از آنجا که این انرژی‌ها بسته دارند هم در اینم در نظر بگیریم. البته باید بگوییم که این حالت داریم را در نظر بگیریم.

مثلاً در حالت الکترونی‌ها، $\epsilon_0 = 0$ و در $\epsilon_1 = \Delta$ ، اصطلاح دوزره الکترونی Δ باشد. هم در اینم بنویسیم.

$$Z_{elec} = g_0 + g_1 e^{-\Delta/kT} \quad (6)$$

که g_0 از $(2J+1)$ است و g_1

تعدادهای الکترونی بعضی از اینها هستند. در این Δ هستند و داریم از Δ بزرگتر نخواهند شد. حالت پایه را صاف در نظر می‌گیریم. این حالت را Δ و بعداً صاف بزرگتر خواهند بودند.

هم در اینم g_0 و g_1 اینها حساب می‌کنیم یک جورایی برای Δ/kT نوشته می‌شود.

با استفاده از رابطه (۲) C_p الکترونی را حساب می‌کنیم (باید از آن استراحت \ln بگیریم و همچنین آنرا نسبت به T حساب می‌کنیم و در T^2 ضرب می‌کنیم و آن را در عبارت $(C_v)_{elec}$ قرار می‌دهیم و عبارت نهایی را می‌گیریم):

$$(C_v)_{elec} = NK \frac{\partial}{\partial T} \left(T^2 \frac{\partial}{\partial T} \ln Z'_{elec} \right) \stackrel{(6)}{=} NK \frac{\left(\frac{\Delta}{KT} \right)^2}{\left(1 + \frac{g_0}{g_1} e^{\Delta/KT} \right) \left(1 + \frac{g_1}{g_0} e^{-\Delta/KT} \right)} \quad (7)$$

اگر Δ ضمیمه بزرگتر از KT باشد، یعنی فقط فاصله بین دو انرژی اول (یعنی هم‌حالدهایی) را در نظر بگیریم $\exp(-\frac{\Delta}{KT})$ نسبت به $\exp(\frac{\Delta}{KT})$ کوچک است و $\Delta \gg KT$ باشد، $\exp(\frac{\Delta}{KT})$ ضمیمه بزرگتر از $\left(\frac{\Delta}{KT} \right)^2$ نسبت به $\left(\frac{\Delta}{KT} \right)^2$ است پس فرجه زودتر می‌شود و $(C_v)_{elec}$ نسبت به صفر می‌رود.

$$\Delta \gg KT \stackrel{(7)}{\Rightarrow} (C_v)_{elec} \rightarrow 0$$

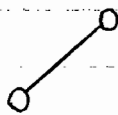
اما اگر Δ ضمیمه کوچکتر از KT باشد، در این صورت C_p الکترونی را می‌توانیم بصورت زیر بنویسیم (\exp ها را جمع می‌کنیم و $\frac{\Delta}{KT}$ است):

$$\Delta \ll KT \stackrel{(7)}{\Rightarrow} (C_v)_{elec} \approx \frac{NK}{\left(1 + \frac{g_0}{g_1} \right) \left(1 + \frac{g_1}{g_0} \right)} \left(\frac{\Delta}{KT} \right)^2$$

یعنی داریم تقریباً که اینها وجود دارد بر حسب $\frac{1}{T^2}$ است.

حالت بعدی که می‌توانیم در آن دیدیم Δ ها بزرگتر و بزرگتر می‌شوند پس باید بدانیم بعد از آن چه می‌شود.

البته در اینجا می‌توانیم بگوییم که این قسمت از حالتی است که اینها را در نظر می‌گیریم و می‌توانیم بگوییم:



$$H = \frac{P_A^2}{2m_A} + \frac{P_B^2}{2m_B} + H_{elec} + H_{A-B}$$

یک قسمت از انرژی H_{elec} است که در آن رابطه که در اینجا گرفته می‌شود.

قسمت دیگر از انرژی H_{A-B} و برهم کنش خود روتاسیون است (H_{A-B}) .

(برهم کنش روتاسیون هم می‌توانیم بنویسیم $H_{A-B} + \frac{P_B^2}{2m_B} + \frac{P_A^2}{2m_A}$ را بصورت زیر بنویسیم):

$$H = \frac{P_{cm}^2}{2M} + H_{elec} + \left(\frac{P_r^2}{2\mu} + \frac{P_\theta^2}{2I_1 \sin^2 \theta} + \frac{P_\phi^2}{2I_2} + \frac{1}{2} K |r_1 - r_2|^2 + \dots \right) \quad (8)$$

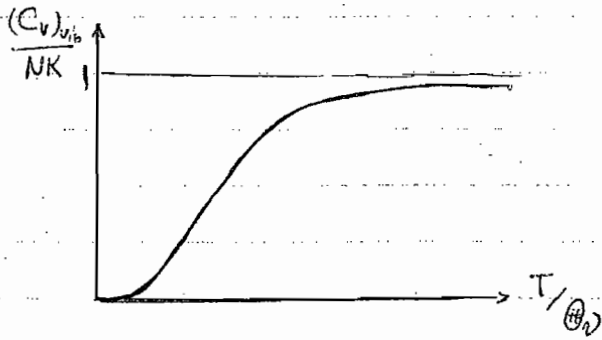
پایین هم کنش روتاسیون

فقط قسمت از انرژی جنبشی خود روتاسیون است $\frac{P_{cm}^2}{2M}$ ، $\frac{P_r^2}{2\mu}$ ، $\frac{P_\theta^2}{2I_1 \sin^2 \theta}$ ، $\frac{P_\phi^2}{2I_2}$ را در نظر

قسمت روتاسیون است بر مرکز جرم

این شکل فقط قسمت Vibration است

رابطه $(C_v)_{vib} / NK$ را رسم می‌کنیم. شکل این نمودار را می‌توانیم در T و Θ_r مشاهده کنیم.



این شکل فقط قسمت Vibration است

این قسمت دورانی را می‌توانیم در Θ_r مشاهده کنیم. بعد از آن نوع رابطه را می‌توانیم مشاهده کنیم:

$$E_{rot} = l(l+1) \frac{\hbar^2}{2I}$$

یک جمله صاف در نظر می‌گیریم، فقط $\frac{L^2}{2I}$ برای آن می‌توانیم و می‌توانیم که $\frac{\hbar^2}{2IK}$ را در نظر بگیریم.

$$j_{rot} = \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) e^{-l(l+1) \left(\frac{\hbar^2}{2IK} \right) / T} \quad (IV)$$

مگر $\frac{\hbar^2}{2IK} (2l+1)$ در نظر می‌گیریم.

$$\Theta_r = \frac{\hbar^2}{2IK} \quad (V)$$

رابطه $\Theta_r = \frac{\hbar^2}{2IK}$ را می‌توانیم در نظر بگیریم. در این حالت Θ_r را می‌توانیم مشاهده کنیم. $\Theta_r = \frac{\hbar^2}{2IK}$ را می‌توانیم مشاهده کنیم.

$$\Theta_{r, HCl} \approx 15^\circ K$$

$$\Theta_{r, NO} \approx 3^\circ K$$

$$\Theta_{r, H_2} \approx 85^\circ K$$

$$\Theta_{r, O_2} \approx 2^\circ K$$

برای H_2 که Θ_r این ضمیمه را می‌توانیم مشاهده کنیم.

یعنی بیشتر Θ_r را می‌توانیم مشاهده کنیم. $100^\circ K$ هم می‌توانیم این در رابطه Θ_r را مشاهده کنیم. Θ_r را می‌توانیم مشاهده کنیم. Θ_r را می‌توانیم مشاهده کنیم. Θ_r را می‌توانیم مشاهده کنیم.

در رابطه $(-l(l+1) \frac{\hbar^2}{2IK}) / T$ را می‌توانیم مشاهده کنیم. Θ_r را می‌توانیم مشاهده کنیم. Θ_r را می‌توانیم مشاهده کنیم. Θ_r را می‌توانیم مشاهده کنیم.

که به فرایند ما کنیم

۱۱) l فریب Θ_r نقش انرژی حرکتی را دارد. اما در دماهایی که ما کار می‌کنیم ضریب کوئیب است، بنابراین می‌توانیم $\sum_{n=0}^{\infty} f(n)$ را با $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$ تقریب بزنیم. البته اگر Θ_r نسبت به انرژی برای آن بزرگ است، اثر به فصل ۵ آرفسین را صعبه کنیم، داریم:

$$\sum_{n=0}^{\infty} f(n) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx + \frac{1}{2} f(0) + \frac{1}{12} f'(0) + \frac{1}{720} f'''(0) + \dots$$

این تقریب به ترتیب اولی، تک لرون معروف است.

$$\int_0^{\infty} (2l+1) e^{-l(l+1)\Theta_r/T} dl = \frac{T}{\Theta_r}$$

با یک تغییر متغیر ساده $l^2 + l = C$ را به دست می‌آوریم
 کامل کنیم می‌کنیم و آنرا به $\frac{1}{4} - \frac{1}{4} = l + \frac{1}{4}$ که آنست که می‌خواهیم

بنابراین

$$J_{rot} = \frac{T}{\Theta_r} + \frac{1}{3} + \frac{1}{15} \frac{\Theta_r}{T} + \dots$$

C_v آنرا می‌توانیم از عبارت فوق با \ln بگیریم بعد از آن مشتق گرفته در T^2 ضرب کنیم و بعد دوباره از آن مشتق بگیریم و در آن فرود NK ضرب کنیم.

$$(C_v)_{rot} = NK \left[1 + \frac{1}{45} \left(\frac{\Theta_r}{T} \right)^2 + \frac{16}{945} \left(\frac{\Theta_r}{T} \right)^3 + \dots \right] \quad \text{VII}$$

می‌بینیم که اگر T به سمت بی‌نهایت برود، $(C_v)_{rot}$ به سمت NK می‌رود.

$$T \rightarrow \infty, (C_v)_{rot} \rightarrow NK$$

چرا این اتفاق می‌افتد؟

فقط دورانی را نگاه کنید. چون یک مولکول در حالت دورانی دور یک مرکز دورانی دارد، همچنین یک مولکول دوگانه دورانی کامل خلاف جهت دارد (مثل خوردن ...). هر کدام $\frac{1}{2} KT$ ، بنابراین کلش KT می‌شود. پس انرژی رابطه این می‌شود NKT و C_v در برهه آن NK می‌شود.

تصورتی که می‌بینیم که برای هر دو C_v مثل NK است. این به اضافه $\frac{3}{2} NK$ می‌شود و در رابطه دقیق آن رابطه VII است.

می‌بینیم رابطه VII که رابطه دقیق است، به واقع هم قابل اندازه گیری است. در رابطه قابل مشاهده است چون ما می‌توانیم آنجا لانژیم است تا این حد حرکت شود ضریب دماهای بزرگی نیست. مثلاً برای مولکول هیدروژن در دما $90^\circ K$ است.

$90^\circ K$ دما بالا نیست یعنی به راحتی می‌توانیم این قسمت $\frac{1}{45} \left(\frac{\Theta_r}{T} \right)^2$ را بیابیم.
 و در آن T می‌خواهد به سمت صفر برود، اصلاً در رابطه VII نباید استفاده کنیم. در صورت رابطه VII استفاده کنیم T که به سمت صفر برود، در رابطه VII عملی که می‌خواهیم می‌شود.

در $T \rightarrow 0$ جمله $(l+1) \left(\frac{h^2}{2Ik}\right) / 4$ ضرایب به سمت بی نهایت برود یعنی افزایش $\exp(-l(l+1) \left(\frac{h^2}{2Ik}\right) / 4)$ حاصل می شود بین جمله های $l=0$ و جمله بعدی اصابت پیدا می کند.

$$T \rightarrow 0$$

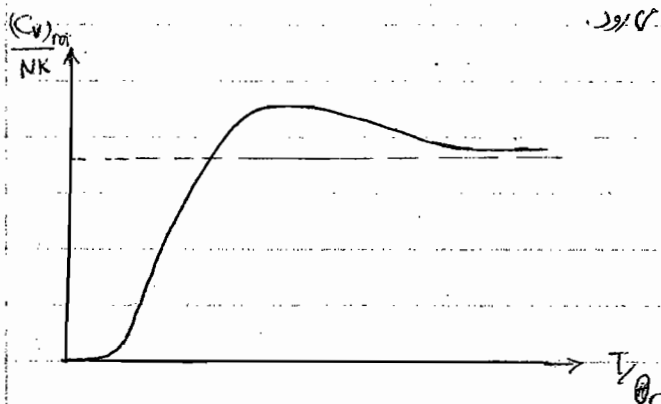
$$T \ll \Theta_r \quad j_{rot} \approx 1 + 3e^{-2\Theta_r/T} + \dots$$

بعضی است که چرا جمله j بعدی نیز برود نمی فهمند، چون عموماً l بالا تر برود، جمله $(l+1) \left(\frac{h^2}{2Ik}\right)$ بزرگ تر می شود. این جمله ضریب بزرگ است و مانع می شود از جمله های بزرگ تر از آن.

از روی j_{rot} ، C_v را حساب می کنیم:

$$(C_v)_{rot} \approx 12 NK \left(\frac{\Theta_r}{T}\right)^2 e^{-2\Theta_r/T}$$

شکل $(C_v)_{rot}$ را رسم می کنیم، در بی نهایت به سمت 0 برود.



در T پایین به بعد $(C_v)_{rot}$ در $(C_v)_{vib}$ است و آنرا هم باید اضافه کنیم. یعنی آن جا هایی که C_v ضریب ضمیمه به بی نهایت C_v است که داریم فقط $3/2 NK$ است، یعنی فقط انتقالی ها را در نظر گرفته ایم.

$$T \rightarrow 0 \rightarrow C_v \approx 3/2 NK$$

وقتی T بالا می آید C_v تقریباً $5/2 NK$ می شود، و با افزایش T به سمت بی نهایت می آید، این را هم باید اضافه کنیم.

$$\Theta_r \ll T \ll \Theta_v \rightarrow C_v \approx 5/2 NK$$

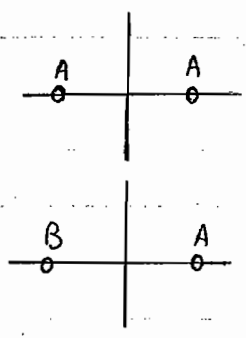
اگر T بزرگ تر از Θ_v شود آن وقت $(C_v)_{rot}$ را هم باید اضافه کنیم و جمله اول آنرا هم باید اضافه کنیم. NK ضریب آن عبارت است از C_v می شود.

$$T > \Theta_v \rightarrow C_v \approx 7/2 NK$$

البته اینجا دقیق نیستند و مانع از جمله بعدی را هم باید اضافه کنیم. این همان چیزی است که قبلاً گفتیم که در آنجا هم باید اضافه کنیم. $3/2 NK$ را هم باید اضافه کنیم، و در آنجا هم باید اضافه کنیم. $1/2 NK$ که بعد از آنجا هم NK می شود. NK می شود.

حالتی است و طول: $2\pi, 9, 27, 81$

حالتی که در آن تمام درجه‌های دایره صحبت می‌کنیم. در مورد مولکول‌های دایره‌ای (دایره‌ای) که در دماهای بالا می‌توانیم آنها را به یک سیال در نظر بگیریم و در یک range مناسب باقی‌مانده و در واقع در تمام دماها طیف آن برای ما اهمیت دارد. تا آنجا که گفتیم که این مولکول‌ها در دایره از نوع AB بودند، یعنی از نوعی اتم مختلف تشکیل شده بودند. گفتیم که از مولکول‌های یک نوع تشکیل شده باشند نوعی از نوع AA باشند. مد نظرت بعد می‌آید. داریم که باید در مورد آن صحبت کنیم. اگر مولکول‌های ما از نوع AA باشند، در این شرایط در دماهای که این مولکول‌ها می‌توانند در آن باشند، همانند قبل نیستند. اگر یک محوره دوران در نظر بگیریم دقت جانی را در نظر بگیریم که مولکول هم فزاید حول محور خاصی دوران کند.



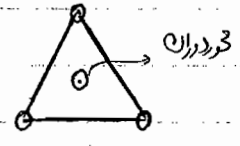
اگر مولکول از نوع AB باشد، برای اینکه این سیستم دوباره روی خودش برگردد، حتماً باید به اندازه 2π دوران کند. باید حول محور دوران 2π دوران کند تا سیستم به روی خودش برگردد. اگر مولکول AB باشد، خواهد بود روی خودش برگردد با ϕ آن متعلق به بازه $[0, 2\pi]$ باشد.

$$\phi \in [0, 2\pi]$$

اما اگر مولکول از نوع AA باشد، به اندازه π که دوران کنند، دوباره همین سیستم ای را زده است. بنابراین حالت بعدی هم با نوع اول یعنی آن 2π دوران کنند، باز در واقع داریم این را دو حالت می‌شماریم. بنابراین در J_{rot} می‌کنیم که می‌شود از آنجا که می‌خواهیم بنویسیم، باید بنویسیم:

$$J_{rot} = \frac{1}{h^2} \int e^{-E_{rot}/kT} dp_\theta dp_\phi d\theta d\phi \quad (1)$$

در اینجا فقط روی θ متوجه می‌شویم که اینها اشتباه می‌شود، θ که عضان بین صفر تا π است. فقط ϕ هم بین صفر تا 2π بود و این θ باید آنرا صفر تا π بگیریم. این کار را در وقت کوانتوم می‌کنیم و در وقت کوانتوم می‌کنیم که مثلاً اگر یک ذره ای داشته باشیم که این سه ذره یک باشند و بخواهند حول محوری دوران کنند. سیستم بعد از 2π روی خودش برگردد، بلکه بعد از $\frac{\pi}{3}$ روی خودش برگردد. یعنی در دماهای به اندازه $\frac{\pi}{3}$ ، سیستم روی خودش برگردد. حالا چون اینجا دوزره ای است سیستم بعد از دوران به اندازه π روی خودش برگردد.



این کار را در کوانتوم می‌کنیم، با فرض اینکه این را که می‌توانیم در نظر بگیریم، یعنی E_{rot} را بنویسیم:

$$E_{rot} = \frac{p_\theta^2}{2I} + \frac{p_\phi^2}{2I \sin^2 \theta} \quad (2)$$

$$J_{rot} = \frac{1}{h^2} \int e^{-E_{rot}/kT} dp_\theta dp_\phi d\theta d\phi = \frac{I}{2\theta_r} \quad (3) \quad ; \quad \theta_r = \frac{h^2}{2Ik}$$

که البته در این شرایط که سیستم 2 در خروجی را طبق بیان فقط در آن دما می‌توانیم که در واقع چون نسبت به دما

در دما بالا $T \gg \Theta_r$

$$\Rightarrow \frac{j_{rot}^{even}}{j_{rot}^{odd}} \approx 1$$

و η_{H_2} که از نوع فرس-دری است، هر کدام از این حالت که در آن

8)
$$\eta_{H_2}^{F.D.} = \frac{(S_A+1)}{S_A} \frac{j_{rot}^{add}}{j_{rot}^{even}} \approx \frac{S_A+1}{S_A} \frac{S_A=1/2}{1/2} = \frac{3/2}{1/2} = 3 \Rightarrow \eta_{H_2}^{F.D.} = 3$$

نسبت اوربیتال
به آرایش ترمینال
در برابر است.

9)
$$\eta_{D_2}^{B.E.} = \frac{(S_A+1)}{S_A} \frac{j_{rot}^{even}}{j_{rot}^{odd}} = \frac{S_A+1}{S_A} \frac{S_A=1}{1} = \frac{2}{1} = 2 \Rightarrow \eta_{D_2}^{B.E.} = 2$$

η_{D_2} ترمینال است.

اما در دما پایین $T \ll \Theta_r$ به صورتی می شود؟
در دماهای پایین از آن جهت دارند که اها کوچکتر باشند، و اها بزرگ، و این یعنی برای j_{rot}^{even}
که از نوع حتی است پس اول، این صورت و جمله بعدی (برای 2) است، در نتیجه:

$$j_{rot}^{even} \approx 1 + 5e^{-6 \Theta_r/T}$$

$$j_{rot}^{odd} \approx 3e^{-2 \Theta_r/T}$$

$$\frac{j_{rot}^{odd}}{j_{rot}^{even}} \approx \frac{3e^{-2 \Theta_r/T}}{1 + 5e^{-6 \Theta_r/T}}$$

$$\frac{j_{rot}^{add}}{j_{rot}^{even}} \approx \frac{3e^{-2 \Theta_r/T}}{1 + 5e^{-6 \Theta_r/T}} \approx 3e^{-2 \Theta_r/T} \quad (10)$$

8)
$$\eta_{H_2}^{F.D.} = \frac{(S_A+1)}{S_A} \frac{j_{rot}^{add}}{j_{rot}^{even}} \approx 3 \times 3e^{-2 \Theta_r/T} \quad T \ll \Theta_r$$

چون در آن e ضریب کوچک است یعنی در دماهای منفی، همواره با بیشترین دما (برای 2) و این است که در صورت ارتداد
و در نتیجه ضریب کم اند.
در η_{D_2} صورتی است که e ضریب کوچک است، بنابراین η_{D_2} ضریب بزرگ است و آن $\rightarrow T$ در آن این ضریب است

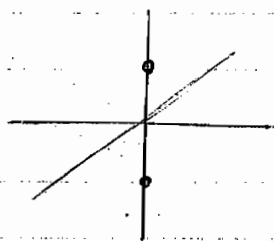
9)
$$\eta_{D_2}^{B.E.} = \frac{(S_A+1)}{S_A} \frac{j_{rot}^{even}}{j_{rot}^{odd}} \approx \frac{2}{3e^{-2 \Theta_r/T}} \quad T \ll \Theta_r \rightarrow \infty$$

فرض می‌کنیم حالاتی آنتروپی آنها تقریباً در حالت پهن هستند و دانستیم که وابستگی این حالاتی آنتروپی را تقریباً فقط به انرژی می‌توانیم در صورت تقریبی‌ها این‌ها را در $10^4 - 10^5$ order در نظر بگیریم.

تقریبی که برای روابطها وجود دارد این است که تقریباً همگی به آن نگاه کنیم، E_{rot} چه تقریبی می‌شود؟
 اگر فرض کنیم دانه‌ها را به گونه‌ای که یک تعدادی از دانه‌ها را به یک مرکز جرم می‌زنیم آن‌ها را به یک مرکز جرم می‌زنیم اینها را بعداً صفت در نظر می‌گیریم چون صفتها را در نظر می‌گیریم آنها را هم در نظر می‌گیریم.



برای اینها معمولاً از فرمول استفاده می‌کنیم، برای اینکه دوران آنها را در نظر بگیریم، یعنی به سه یا چهار دانه‌ها داریم تا دوران یک جسم صلب را بیان کنیم و گوییم که برای آن باید بنویسیم E_{rot} است.



برای جسم صلب سه تا محور اصلی در نظر می‌گیریم در صورتی که برای مولکولهای دانه‌ای
 محورهای اصلی را بصورت زیر می‌نویسیم. بنابراین (I_1, I_2, I_3) ماکزیمومهای
 محورهای اصلی نامیده می‌شوند. (فردی که این محورها را شکل می‌دهد که همان اینها هستند تا در این فضا
 بتواند حول این محورها بچرخد اینها را می‌نامیم که با هم برابرند).

در این برای مولکول می‌توانیم از فرمولی که می‌شود در دوران استفاده کنیم I_1, I_2, I_3 دارد که از حساب می‌توانیم آن را بنویسیم.

$$E_{rot} = \frac{1}{2I_1 \sin^2 \theta} (P_\phi - \cos \theta P_\psi)^2 - \sin \theta \cos \theta P_\theta P_\psi + \frac{1}{2I_2 \sin^2 \theta} (P_\phi + \cos \theta P_\psi)^2 + \frac{1}{2I_3} P_\psi^2 \quad (14)$$

θ, ϕ, ψ زاویه‌های اولی که هستند که نسبت به محورها اصلی می‌شوند (فصل ۱۰ کتاب - س ۱۰۰)

$$j_{rot} = \frac{1}{h^3} \int e^{-E_{rot}/kT} dP_\theta dP_\phi dP_\psi d\theta d\phi d\psi \quad (15)$$

این انتگرال فوق را حساب می‌کنیم که می‌توانیم آن را در کتاب فیزیک ریاضی پیدا کنیم (البته باید سری تغییر متغیرها را نسبت به آن انجام دهیم) (۱۴) را بصورت زیر می‌نویسیم:

$$E_{rot} = \frac{L_1^2}{2I_1} + \frac{L_2^2}{2I_2} + \frac{L_3^2}{2I_3} \quad (16)$$

برای دوران علی‌الاصول می‌توانیم به روشی مختصاتی رفت که هر جسم گوییم در صورت بی‌نهایت حرکت می‌کنیم (این تغییر متغیرها را)
 پس باید تغییر متغیرها را در این رابطه (۱۶) را به این شکل (۱۵) تبدیل کنیم. البته حساب انتگرال (۱۵) در این حالت ضعیف
 محبت نیست چون این L ها هم در آن ۲ دارند، وقتی به آن ۲ برسیم هم کارها را با هم می‌کنیم و اینها بصورت جداگانه می‌توانیم
 آن‌ها را در نظر بگیریم که آنها را هم در نظر بگیریم:

$$j_{rot} = \pi \left(\frac{2I_1 kT}{h^2} \right)^{1/2} \left(\frac{2I_2 kT}{h^2} \right)^{1/2} \left(\frac{2I_3 kT}{h^2} \right)^{1/2} \quad (17)$$

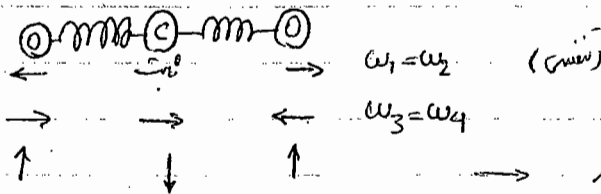
دیگر در بوطه با یک کیم، می شود:

$$C_{rot} = \frac{3}{2} NK$$

توجه کنیم که رابط (۱۵) رابطه نرنستیم، اگر بخواهیم این را اگر از آنجایی که برای یک جسم صلب نسبت در دمای اتاق $C_{rot} = \frac{3}{2} NK$ تقریب بدین نیست. بنا بر این نکته مشخصی که این حالت های rotation هستند صلب صلب می بینند. برای روابطها بیشتر این ها کار در حدود $85^\circ K$ بود، برای چنداتی ها که به مراتب کمتر خواهد شد.

اما برای ذراتی که در دمای پایین می توانیم به یک کیم یا کوانتومی، این کار را می توان انجام داد چون به هر حال می دانیم چه سیستمی از ذرات علی الاصول است سری مد های ذراتی ویژه دارند.

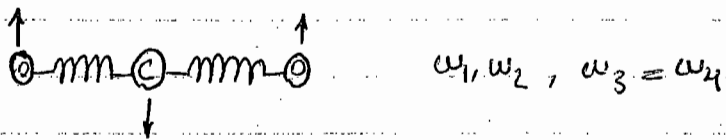
مثلاً کربن دی اکسید CO_2 را نگاه کنیم، این یک ذره غیر مستقل را دارد. یعنی این است که C ساکن باشد و O ها حرکت رفت و برگشت انجام دهند که به این ω_1 و ω_2 و ω_3 می گویند. البته این سیستم یک $\omega = 0$ دارد که آنرا ارتعاشی در طول می گویند، این مدار جز ارتعاشی های این سیستم در نظر نمی گیریم، این خود را می توان به این صورت در نظر گرفت:



برای این حالت بود می توانیم بپسرا کنیم که آنها می هستند

برای مولکول هایی که روی خط قرار گرفته اند (مثل آب) می توان آن را در دو به اندازه $3n - 5$ تا مد طبیعی ارتعاشی وجود دارد که البته لزوماً ندارد همه آنها از هم مستقل باشند یعنی ممکن است همه آنها تفاوت باشند و بعضی از آنها مستقل باشند.

مثلاً برای مولکول CO_2 که 3 تا اتم داریم تعداد مد های طبیعی ارتعاشی $4 = 3 \times 3 - 5$ است. ۹ تا مد ذراتی دارد که ω_1 و ω_2 مختلف هستند و $\omega_3 = \omega_4$ است که مربوط به حالت زیر است.



مولکول های پیچیده تر می توانند مد های ذراتی مختلفی داشته باشند.

برای آنرا نسبت حفظ می باشند و طبیعتاً هیچ پیچیده تر می شود و باید به خط (فوتون های ویژه ذراتی) آنها را بپسرا کنیم. ولی به هر حال وقتی فوتون های ذراتی ویژه صواب شد، آن موقع می توانیم از ذراتی را بصورت زیر بنویسیم (وقتی ما ذراتی ویژه را بپسرا کنیم، هر قدر گویا مستقل از ذرات ذراتی می کنند، نورانی کل ترکیب خطی از همه آنها هست. وقتی مد های ویژه را بپسرا کنیم، اگر چه کوانتوم دارند مستقل از هم می کنند).

$$J_{vib} = \prod_i \frac{e^{-\Theta_i/2T}}{1 - e^{-\Theta_i/T}}, \quad \Theta_i = \frac{h \omega_i}{k} \approx 10^3 \text{ } ^\circ K$$

در دمای اتاق با هر کوانتوم از یک حالت که از نوع $10^3 \text{ } ^\circ K$ است.

