

# مقاومت مصالح

دکتر محمد علی برخورداری

تدوین : فائزه رواز دژ  
علی مع الحق



- نیرو : عاملی است که وقتی به اجسام وارد شود یا ایجاد حرکت می‌کند و یا تغییر شکل.
- انواع نیروها :
  - (۱) نیروهای حجمی و جرمی : نیروهایی که به ذرات جرم وارد می‌شوند مانند نیروی وزن و نیروی مغناطیسی.
  - (۲) نیروهای سطحی : نیرو به یک سطح مشخص نیرو وارد می‌کند.
- نیروهای داخلی : هر جسم از ذرات ریزی تشکیل شده که نسبت به قطر ذرات در فاصله‌ی بزرگی نسبت به هم قرار گرفته‌اند و جاذبه‌ی قوی بین ملکولی باعث حفظ این ذرات در کنار هم می‌شود که این فاصله مقدار ثابتی است. هرگاه به جسمی نیروی خارجی وارد شود الزاماً در آن نیروهای داخلی ایجاد می‌شود که باعث تغییر شکل اجسام می‌شود.

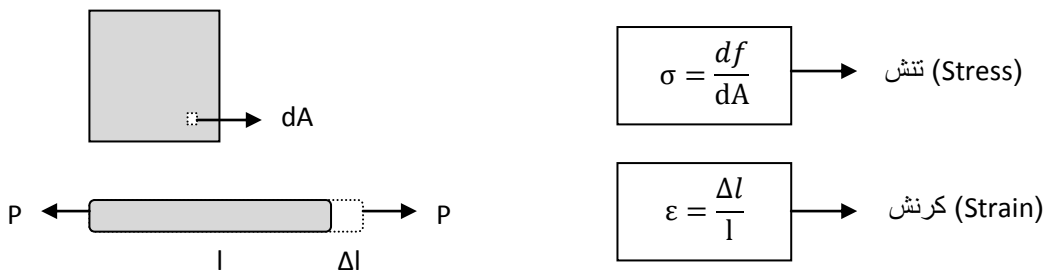
تأثیر نیرو بر روی اجسام

الف) تغییر در اندازه و جهت سرعت جسم

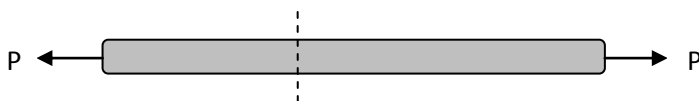
$$F = ma \quad \text{یا} \quad F = \frac{dP}{dt}$$

ب) تغییر در شکل جسم

df مقدار نیروی داخلی وارد بر جزء سطح dA است



- **جسم صلب** : جسمی را که در برابر نیرو تغییر شکل ندهد جسم صلب می‌نامند. در طبیعت جسم صلب نداریم. میله زیر را در نظر بگیرید که در حالت تعادل است و بار خارجی P بر آن وارد می‌شود.



میله را از محل نشان داده شده برش می‌زنیم تا نیروهای داخلی آن را تعیین کنیم.



N نیروی داخلی است و از نظر مقدار با بار خارجی وارده برابر است. این نیروی داخلی برآیند کلیه نیروهای است که ذرات جسم به هم وارد می کنند. نیروهایی که ذرات به هم وارد می کنند با هم برابر نیست و N که برآیند این نیروهاست در حالات خاصی به طور یکنواخت توزیع می شود.

مقدار  $\Delta l$  بستگی دارد به :

(۱) جنس  
(۲) مقدار نیروی P  
(۳) طول  
(۴) سطح مقطع

$\varepsilon = f(\sigma, \text{جنس})$  ←

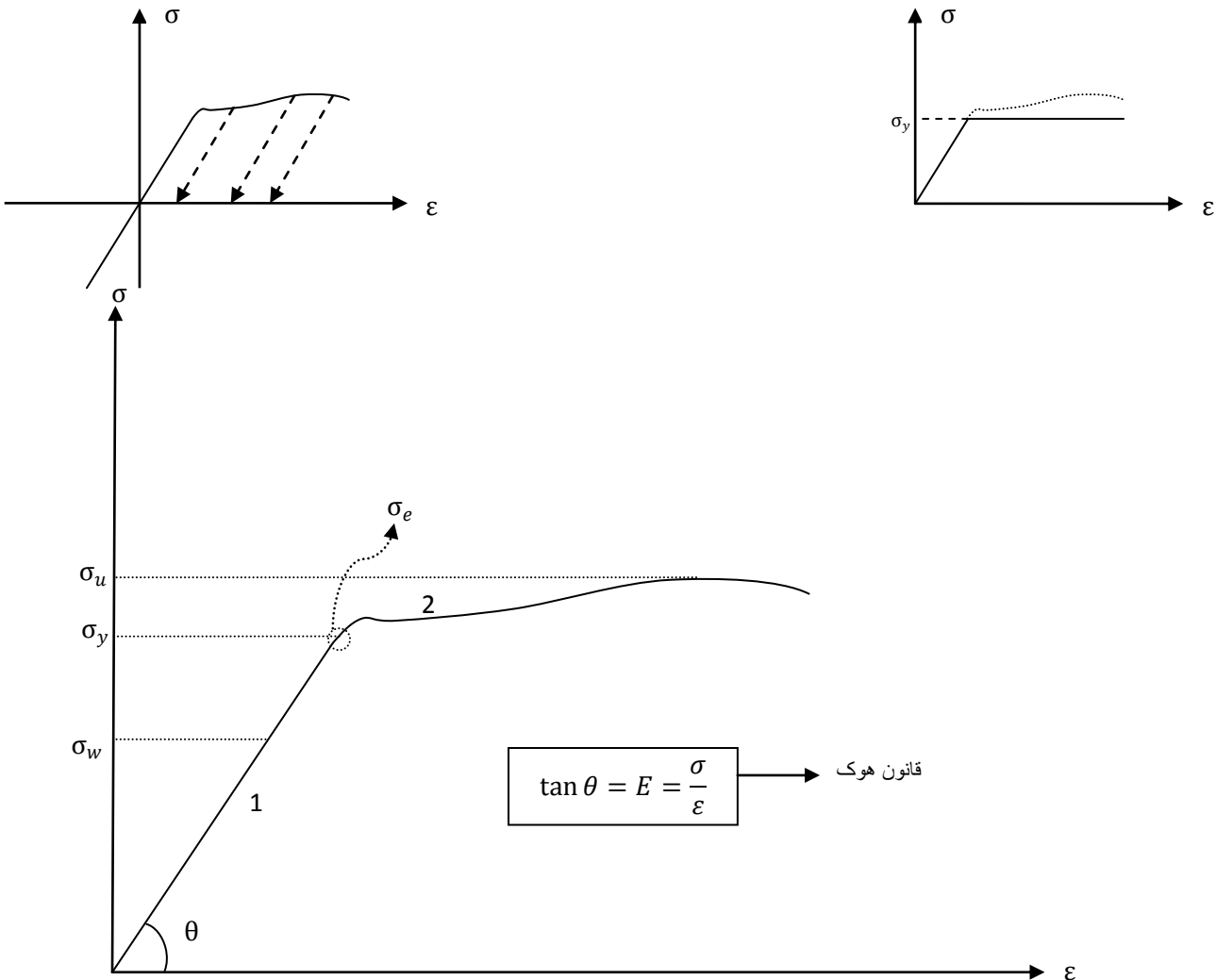
- نکته : برای بررسی تعادل نیروهای خارجی را در نظر می گیریم و برای تغییر شکل ها نیروهای داخلی ایجاد شده را.
- تذکر مهم : در تمام طول مسئله واحدهایی که استفاده می کنیم باید ثابت باشد.



## نمودار تنش - کرنش فولاد

در این آزمایش فولاد را تحت بارگذاری قرار می‌دهند و کرنش آن را ثبت می‌کنند. این آزمایش تا زمانی که فولاد گسیخته شود ادامه خواهد داشت. در مورد نمودار زیر باید به نکات زیر توجه داشت:


- این منحنی برای جنس فولاد است و به اندازه، نیرو و سطح مقطع بستگی ندارد چون در هر صورت مقدار  $\sigma$  و  $\epsilon$  ثابت می‌ماند.
- تنش کششی را تنش مثبت و تنش فشاری را منفی در نظر می‌گیریم.
- اگر در حین آزمایش نیرو را کم کنیم، کرنش فولاد همواره به موازات ناحیه خطی (الاستیک) کاهش می‌یابد.
- اگر نیرو فشاری باشد نمودار تنش - کرنش امتداد ناحیه خطی است.
- نمودار واقعی به صورت منحنی نشان داده شده است، اما معمولاً از نمودار تقریبی که در زیر می‌بینید استفاده می‌کنیم.



- ۱  $\triangleleft$  ناحیه الاستیک (کشسان، خطی)
- ۲  $\triangleleft$  مرحله سخت‌شوندگی (strain hardening)، فولاد در این مرحله با اعمال نیروی بسیار کمی طولش افزایش می‌یابد
- $\sigma_y$   $\triangleleft$  تنش تسلیم (ورود به مرحله پلاستیک یا مومسان)
- $\sigma_u$   $\triangleleft$  تنش نهایی (حداکثر تنش قابل تحمل برای فولاد قبل از گسیختگی، تنش نهایی یکی از مشخصه‌های مهم است)
- $\sigma_w$   $\triangleleft$  تنش مجاز (معمولاً ۰.۶۶ تنش تسلیم است)
- $\sigma_e$   $\triangleleft$  حد الاستیک

برای بررسی رفتار هر ماده به نمودار آن نیاز داریم . ضریب زاویه ناحیه الاستیک را با  $E$  نمایش می‌دهیم و آن را مدول الاستیسیته می‌نامیم.  $E$  معرف جنس جسم است که رابطه‌ی بین نیرو و تغییر شکل را نشان می‌دهد. از آنجا که کرنش دیمانسیون ندارد، واحد  $E$  همان واحد تنش است.

❖ مثال

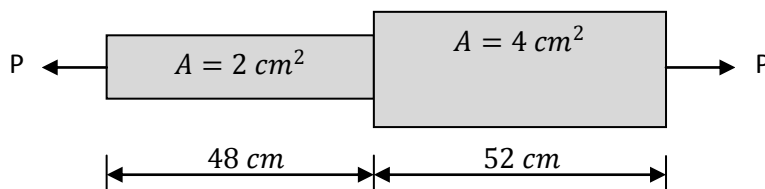
$$\left\{ \begin{array}{l} E = 2 \times 10^6 \frac{kg}{cm^2} \\ P = 800 kg \\ l = 10 cm \\ A = 1 cm^2 \end{array} \right. \rightarrow \Delta l = ?$$


$$\sigma = E\varepsilon$$

$$\frac{P}{A} = E \frac{\Delta l}{l} \rightarrow 800 = 2 \times 10^6 \times \frac{\Delta l}{10} \rightarrow \Delta l = 4 \times 10^{-3} cm$$

- نکته: قانون هوک  $\sigma = E\varepsilon$  همواره و برای همه‌ی سطوح صادق است اما رابطه‌ی  $\Delta l = \frac{Nl}{EA}$  که از قانون هوک نتیجه می‌شود و حالت ماکروسکوپی آن است برای طولی از  $l$  که در آن  $N$  و  $A$  ثابت است کاربرد دارد.

❖ مثال. اگر  $E = 200 Gpa$  و  $P = 20 \times 10^3 N$  تغییر طول کل میله را محاسبه کنید. همچنین تعیین کنید در کدام ناحیه تنش ماکسیمم است.



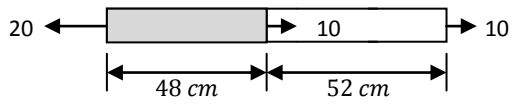
$$\Delta l_1 = \frac{Nl}{EA} = \frac{20 \times 10^3 \times 48 \times 10^{-2}}{200 \times 10^9 \times 2 \times 10^{-4}} \quad , \quad \Delta l_2 = \frac{Nl}{EA} = \frac{20 \times 10^3 \times 52 \times 10^{-2}}{200 \times 10^9 \times 4 \times 10^{-4}}$$

$$\Delta l = \Delta l_1 + \Delta l_2 = 37 \times 10^{-5} m$$

$$\uparrow \sigma = \frac{P}{A} \downarrow \leftarrow \text{در میله نازک تنش بیشتر است}$$



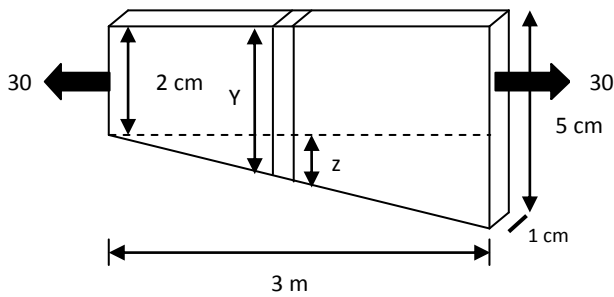
❖ مثال. تعیین کنید در کدام ناحیه تنش ماکسیمم است.



$$\text{[Segment 1]} \rightarrow N - 20 = 0 \rightarrow N = 20 \rightarrow \text{max}$$

$$\text{[Segment 2]} \rightarrow N - 20 + 10 = 0 \rightarrow N = 10$$

❖ مثال. تغییر طول قطعه ناشی از تنش وارده را محاسبه کنید.



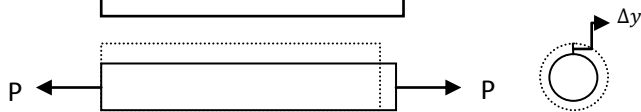
$$\begin{cases} A = 1 \times y \\ y = 2 + z \end{cases} \rightarrow A = 2 + z$$

$$\frac{z}{3} = \frac{x}{300} \rightarrow z = \frac{x}{100} \quad \text{تشابه مثلثاتی}$$

$$\Delta l = \frac{Nl}{EA} \rightarrow \Delta l = \int_0^3 \frac{30dx}{E \times A} = \int_0^3 \frac{30dx}{E(2+z)} = \int_0^3 \frac{30dx}{E\left(2+\frac{x}{100}\right)} = \frac{3 \times 10^3 \ln \frac{203}{200}}{E}$$

- **تأثیر بارگذاری محوری بر تغییر طول ابعاد جسم :** اگر بار گذاری در راستای محور  $x$  باشد و کرنش  $\epsilon_x$  را ایجاد کند تمام ابعاد عمود بر راستای  $x$  جسم مانند  $y$  و  $z$  با رابطه‌ی زیر دچار کرنش می‌شوند.  $\nu$  ضریب پواسون برای هر ماده با آزمایش به دست می‌آید.

$$\epsilon_z = \epsilon_y = -\nu\epsilon_x$$



- **تأثیر حرارت بر تغییر طول :** حرارت عامل دیگری است که سبب تغییر شکل جسم می‌شود اما بر خلاف نیرو حرارت در همه ابعاد و به یک نسبت باعث افزایش طول می‌شود.

$$\delta_T = \alpha \Delta T$$

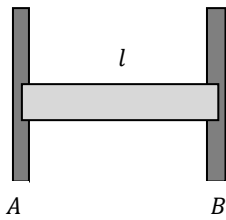
در رابطه‌ی بالا  $\epsilon_T$  کرنش حرارتی،  $\alpha$  ضریب ثابت حرارتی که برای هر ماده با آزمایش به دست می‌آید و  $\Delta T$  تغییر درجه حرارت است.

- **اصل جمع آثار (Superposition) :** اگر چند عامل بر جسمی اثری با ماهیت یکسان داشته باشند – مثلاً همه موجب تغییر طول جسم شوند – می‌توان جداگانه اثر هر یک از عوامل را محاسبه کرد و سپس آنها را با هم جمع نمود. بنابراین هنگامی که عامل نیرو و حرارت را با هم داریم اثر هر یک را جداگانه محاسبه می‌کنیم، سپس مجموع را محاسبه می‌کنیم.
- **نکته :** برای سادگی بیشتر در تمام طول مسئله با طول اولیه کار می‌کنیم. بنابراین اگر ابتدا کرنش حرارتی را محاسبه کردیم، برای محاسبه‌ی کرنش ناشی از نیرو از تغییر طول حرارتی صرف نظر می‌کنیم.

#### برای حل هر مسئله:

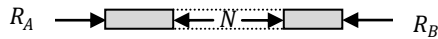
- (۱) مرزها را مشخص می‌کنیم
- (۲) تمامی اتصالات خارج از مرزها را جدا می‌کنیم و به جای آنها نیروهای وارد از سوی آنها را جاگذاری می‌کنیم
- (۳) نیروهای خارجی معلوم (بارها) را اعمال می‌کنیم
- (۴) معادلات تعادل را می‌نویسیم.  
الف) اگر دستگاه معین بود آن را حل می‌کنیم  
ب) اگر دستگاه نامعین بود به تعداد درجات نا معینی (تعداد معادلات مورد نیاز) از روی هندسه مسئله معادلات مورد نیاز را به دست می‌آوریم. (براساس اصل سازگاری یا **compatibility** همواره معادلات مورد نیاز از طریق هندسی بدست خواهد آمد)

❖ مثال. در شکل زیر میله بین دو تکیه‌گاه گیردار قرار دارد. دمای محیط را افزایش می‌دهیم. تنش ایجاد شده در میله را محاسبه کنید. فرض کنید میله خم نمی‌شود و تکیه‌گاه‌ها صلب هستند.  $(\vartheta, \alpha, E, A)$



$$\sum F_x = 0 \rightarrow R_A - R_B = 0$$

$$R_A = R_B = N$$

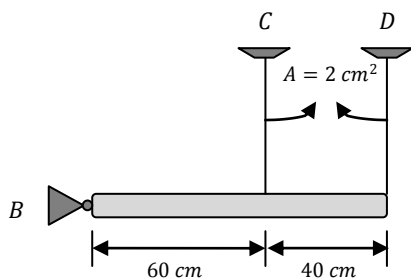


برای حل مسئله به یک معادله دیگر نیاز داریم اما از روابط تعادل معادله دیگری بدست نمی‌آید. بنابراین از هندسه مسئله استفاده می‌کنیم.

$$\Delta l = 0 \rightarrow \frac{Nl}{EA} + \alpha l \Delta T = 0 \rightarrow R_A = R_B = EA \alpha \Delta T$$

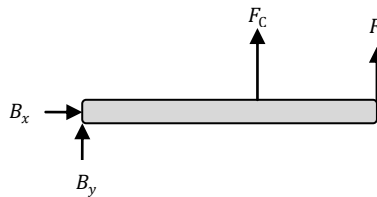
$$\sigma = \frac{N}{A} = E \alpha \Delta T$$

❖ مثال. در مسئله شکل زیر میله افقی را صلب فرض کنید. دمای محیط را افزایش می‌دهیم. تغییر قطر میله‌های عمودی را محاسبه کنید.



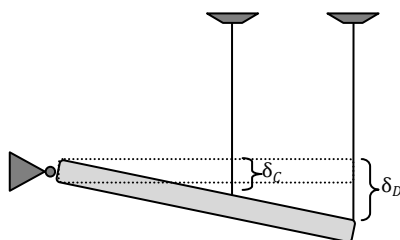
$$\begin{cases} E = 200 \text{ Gpa} \\ \alpha = 11 \times 10^{-6} \text{ } 1/^{\circ}\text{C} \\ \vartheta = 0.3 \\ \Delta T = 80^{\circ}\text{C} \end{cases}$$

می‌دانیم که میله‌ها تحت حرارت دچار افزایش قطر می‌شوند. اما برای بدست آوردن جواب نهایی باید احتمال وجود نیروهایی را نیز که سبب کرنش می‌شوند بررسی کنیم.



$$\begin{aligned} \sum M_B = 0 &\rightarrow F_C \times 60 + F_D \times 100 = 0 \\ \sum F_y = 0 &\rightarrow B_y + F_D + F_C = 0 \end{aligned}$$

دستگاه بالا یک درجه نامعینی دارد پس با تکیه بر اصل سازگاری (از طریق هندسی) یک رابطه دیگر پیدا می‌کنیم. طبق تشابه داریم:



$$\delta_D = \frac{5}{3} \delta_C$$

$$\frac{F_D l}{EA} + \alpha l \Delta T = \frac{5}{3} \left[ \frac{F_C l}{EA} + \alpha l \Delta T \right]$$

$$\begin{cases} F_C = -6.18 \text{ kN} \\ F_D = +10.3 \text{ kN} \end{cases}$$





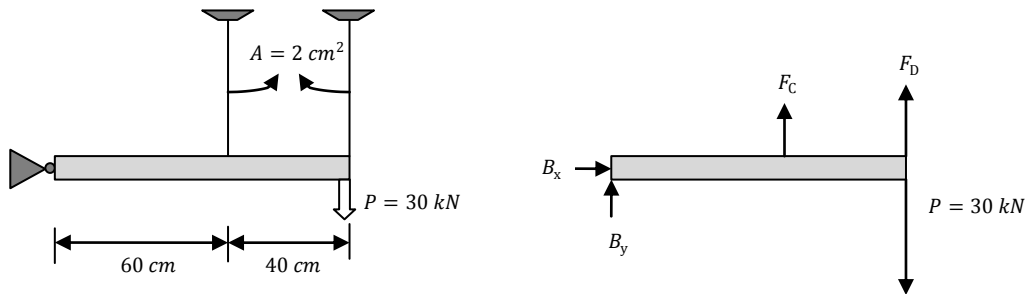
علامت منفی نیروی  $F_C$  بیانگر این است که تنش آن فشاری است نه کششی (بر خلاف فرض).

$$\Delta_C = \Delta_{C_T} + \Delta_{C_F} = \alpha \Delta T + (-\nu \varepsilon_x) l$$

با جاگذاری مقدار تغییر قطر ( $\Delta_C$ ) بدست می‌آید. تغییر قطر  $D$  نیز به همین طریق قابل محاسبه است.

توجه: چنانچه یکی از میله‌ها نبود از آنجا که از وزن‌ها صرف نظر کرده‌ایم، میله‌ی دیگر تنها دچار کرنش حرارتی می‌شد.

❖ مثال: در مسئله شکل زیر میله افقی را صلب فرض کنید. دمای محیط تغییر نمی‌کند. تغییر قطر میله‌های عمودی را محاسبه کنید.

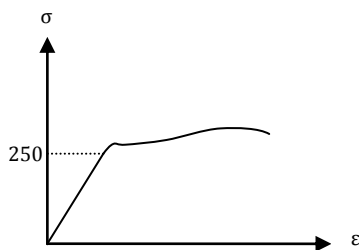


$$\left\{ \begin{array}{l} \sum M_B = 0 \rightarrow 60F_C + 100F_D = 30 \times 100 \times 10^3 \\ \text{تشابه: } \delta_D = \frac{5}{3} \delta_C \rightarrow \frac{F_D l}{EA} = \frac{5}{3} \times \frac{F_C l}{EA} \rightarrow F_C = 0.6F_D \end{array} \right. \xrightarrow{\text{yields}} \left\{ \begin{array}{l} F_D = 22.06 \text{ kN} \\ F_C = 13.2 \text{ kN} \end{array} \right.$$

$$\sigma_C = \frac{F_C}{A} = 66 \text{ Mpa} , \quad \sigma_D = \frac{F_D}{A} = 110 \text{ Mpa}$$

حال که مقدار تنش‌ها را داریم می‌توانیم به سادگی کرنش‌ها و تغییر قطر‌ها را محاسبه کنیم.

- نکته: از آنجا که تا نقطه تسلیم هر چقدر نیروها را زیاد کنیم به همان نسبت تنش هم زیاد می‌شود برای باری که در این مثال میله‌ی  $D$  را پلاستیک می‌کند از تناسب استفاده می‌کنیم.

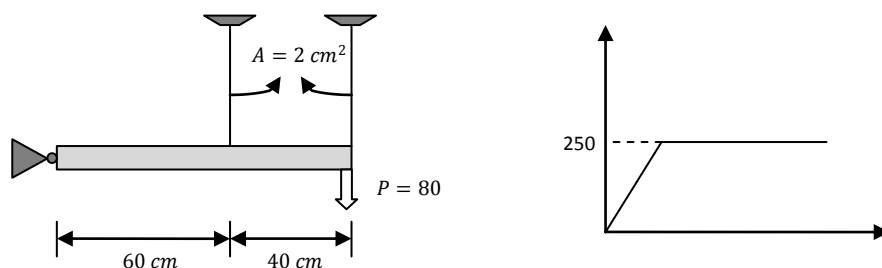


$$\frac{30}{P_{Pl}} = \frac{110}{250} \rightarrow P_{Pl} = 68.2 \text{ MPa}$$

یعنی میله‌ی  $D$  بعد از  $۶۸.۲$  کیلو نیوتون وارد مرحله پلاستیک می‌شود.

❖ مثال. در مثال قبل اگر به جای بار  $30 \text{ kN}$  ، بار  $80 \text{ kN}$  وارد شود چه روی می‌دهد؟

در مثال قبل محاسبه کردیم که میله‌ی D در صورت اعمال بار  $68.2 \text{ kN}$  وارد مرحله پلاستیک می‌شود.



$$\sum M_B = 0 \rightarrow 60F_C + 100F_D = 80 \times 100 \times 10^3$$

$$\delta_D = \frac{5}{3}\delta_C \rightarrow F_C = 0.6F_D$$

$$\begin{cases} 0.6F_C + F_D = 8 \times 10^4 \\ 0.6F_D - F_C = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} F_D = 59.2 \text{ kN} \\ F_C = 35.2 \text{ kN} \end{cases}$$

$$\sigma_D = \frac{F_D}{A} = \frac{59.2 \times 10^3}{2 \times 10^{-4}} = 294 \text{ Mpa} > 250 \text{ Mpa}$$

$$\sigma_C = \frac{F_C}{A} = \frac{35.2 \times 10^3}{2 \times 10^{-4}} = 176 \text{ Mpa}$$

میله‌ی D وارد مرحله مومسان شده است، بنابراین طبق نمودار تقریبی تنش آن را برابر با  $250 \text{ Mpa}$  در نظر می‌گیریم و نیروی  $F_D$  را نیز بر همین اساس محاسبه می‌کنیم:

$$\sigma_D = \frac{F_D}{A} \rightarrow 250 = \frac{F_D}{2 \times 10^{-4}} \rightarrow F_D = 50 \text{ kN}$$

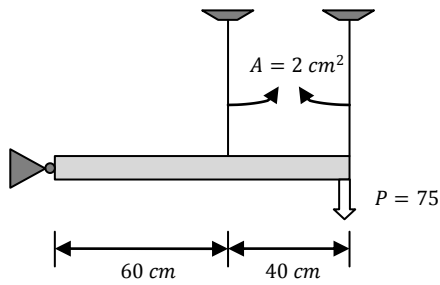
$$\sum M_B = 0 \rightarrow 0.6F_C + F_D = 8 \times 10^4 \rightarrow F_C = 50 \text{ kN}$$

$$\sigma_C = \frac{50 \times 10^3}{2 \times 10^{-4}} = 250 \text{ Mpa}$$

$$\delta_C = \frac{\sigma_C \times l}{E} = \frac{250 \times 10^6 \times 30 \times 10^{-2}}{200 \times 10^9} = 37.5 \times 10^{-5} \text{ m}$$

همان طور که مشاهده می‌شود میله‌ی C نیز در آستانه‌ی پلاستیک شدن قرار دارد. در این حالت با اعمال کوچکترین نیرویی دستگاه منهدم خواهد شد.

❖ مثال. مثال قبل را برای بار 75 kN حل کنید.



از مثال قبل می‌دانیم که میله‌ی D از حد تسلیم عبور کرده است چون نیروی وارده  $P=75$  kN است و از 68.2 kN بیشتر است

$$\sigma_D = 250 = \frac{F_D}{A} = \frac{F_D}{2 \times 10^{-4}}$$

$$F_D = 50 \text{ kN}$$

$$\sum M_B = 0 \rightarrow 0.6F_C + F_D = 7.5 \times 10^4 \rightarrow F_C = 41.7 \text{ kN}$$

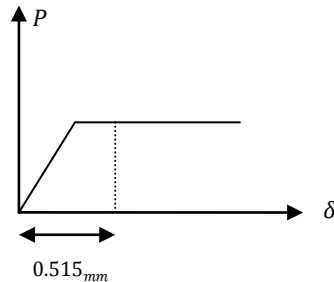
$$\sigma_C = \frac{41.7 \times 10^3}{2 \times 10^{-4}} = 208.5 \text{ Mpa}$$

چون D وارد مرحله پلاستیک شده بدون افزایش تنش آنقدر افزایش طول پیدا می‌کند تا گسیخته شود. ولی چون میله‌ی C هنوز پلاستیک نشده تا حد خاصی افزایش طول دارد و بنابراین D را هم متوقف می‌کند.

$$\delta_C = \frac{F_C l}{EA} = \frac{41.7 \times 10^3 \times 30 \times 10^{-2}}{2 \times 10^{-4} \times 200 \times 10^9} = 31.3 \times 10^{-5} \text{ m}$$

برای بدست آوردن تغییر طول میله‌ی D از همان رابطه‌ی تناسب بین میله‌ها می‌رویم :

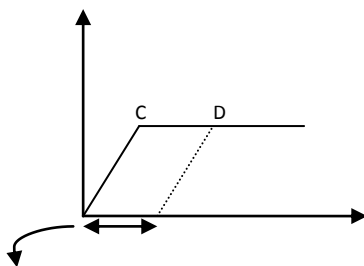
$$\delta_C = 0.6\delta_D \rightarrow \delta_D = 0.515 \text{ mm}$$



تغییر طول بخشی الاستیک و بخشی پلاستیک است

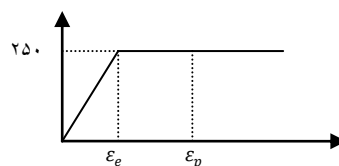
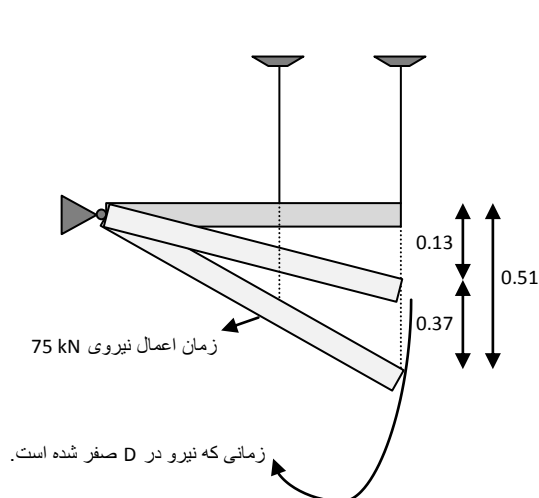
- بار تسلیم : میزان نیرویی که اگر وارد شود یکی از نقاط دستگاه ما به نقطه تسلیم می‌رسد.
- بار نهایی : میزان نیرویی که اگر وارد شود تمام از نقاط دستگاه ما از نقطه تسلیم می‌گذرد و موجب انهدام دستگاه می‌شود.
- تذکر : در مرحله‌ی پلاستیک، بدون افزایش نیرو شاهد افزایش طول هستیم.

❖ مثال. در مثال قبل اگر پس از اعمال بار 75 kN نیرو را به صفر برسانیم چه رخ می‌دهد؟



تغییر شکل در D در حالی که تحت نیرو نیست

می‌دانیم که هر دو میله کاهش طول خواهند داشت. میله‌ی C چون در مرحله‌ی کشسان است می‌خواهد به طول اولیه‌اش بازگردد، ولی میله‌ی D چون مومسان شده است نمی‌تواند به طول اولیه‌اش بازگردد و تنها می‌تواند بخشی از تغییر طول را جبران کند. بنابراین باید با هم به تعادل برسند. مسئله را در دو بخش حل می‌کنیم. ابتدا زمانی که نیرو در میله‌ی D صفر می‌شود و سپس وقتی که در میله‌ی D نیروی فشاری به وجود می‌آید.



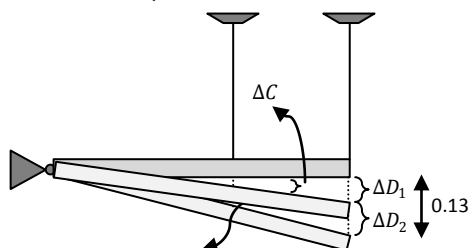
$$\delta_D = \delta_e + \delta_p = 0.515 \text{ mm}$$

$$\sigma = E \varepsilon_e \rightarrow \delta_e = \frac{\sigma l}{E} = \frac{250 \times 10^6 \times 30 \times 10^{-2}}{200 \times 10^9}$$

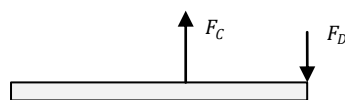
$$\delta_e = 0.375 \text{ mm}$$

$$\delta_p = 0.13 \text{ mm}$$

اینجا مرحله‌ایست که میله‌ی D تغییر شکل الاستیک خود را جبران کرده و نیرو در آن صفر شده ولی میله‌ی C هنوز تغییر شکل الاستیک خود را به طور کامل جبران نکرده و هنوز می‌خواهد بالاتر برود و به طول اولیه‌اش برسد، پس نیروی فشاری به میله‌ی D وارد می‌کند و باعث کاهش طول آن می‌شود.



مرحله نهایی : C نمی‌تواند به طول اولیه‌اش بازگردد، D هم تحت تنش فشاری قرار می‌گیرد و این‌گونه به تعادل می‌رسند.



$$\begin{cases} \sum M_B = 0 \rightarrow 0.6F_C - F_D = 0 \\ \Delta C = 0.6\Delta D_1 \\ \Delta D_1 = 0.13 - \Delta D_2 \end{cases}$$

تذکر: نیروی  $F_D$  سبب تغییر  $\Delta D_2$  است نه  $\Delta D_1$ . بنابراین:

$$\Delta C = 0.6[0.13 - \Delta D_2]$$

$$\frac{F_C l}{EA} = 0.6 \left[ 0.13 - \frac{F_D l}{EA} \right]$$

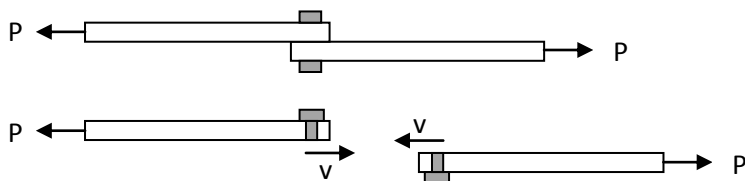
از رابطه‌ی بالا نیروها بدست می‌آیند و از طریق آنها تنش‌ها و کرنش‌ها و در نهایت تغییر طول‌ها محاسبه می‌شوند.

پس ما در آخرین مرحله با این که بار نداریم شاهد نیروی کششی  $F_C$  و نیروی فشاری  $F_D$  هستیم، که ایجاد تنش می‌کنند. به این تنش، **تنش پسماند** می‌گویند. که یکی از دلایل آن تنش‌های پلاستیک است که باعث می‌شود حتی با برداشتن بارها نیروها صفر نشود.

- **نکته:** تعداد رابطه‌های سازگاری همیشه برابر با تعداد درجات نامعینی است. بنابراین اگر دستگاه معین باشد نمی‌توان رابطه‌ای بین تغییر شکل‌ها از نظر هندسی پیدا کرد.
- **تذکر:** هر گاه جسمی را برش دهیم قسمت جدا شده از جسم نقش **تکیه‌گاه گیردار** را برای قسمت مورد بررسی دارد. بنابراین دارای عکس‌العمل‌های زیر است:



- **نکته:** در مساله‌های پیچ و مهره تنش‌ی که پیچ به میله‌ها وارد می‌کند گاهی باعث لهیدگی می‌شود که به آن **تنش لهیدگی** گفته می‌شود.

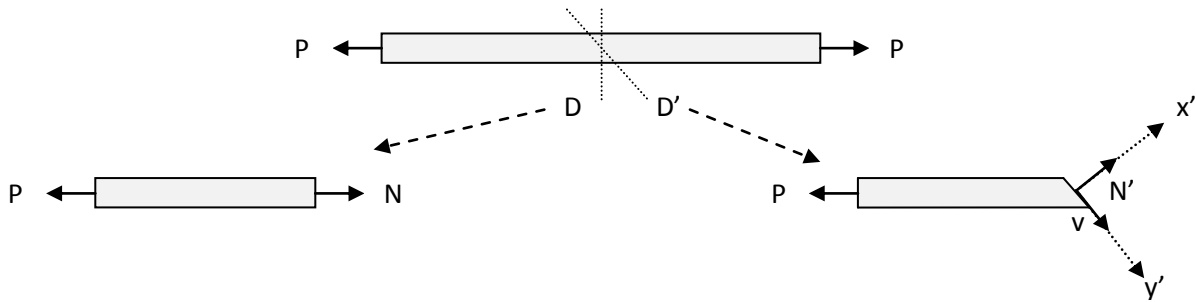


- **نکته:** تنش برای یک نقطه‌ی معین از سطح تعریف می‌شود، اما در حالت ماکروسکوپی یک بردار عمود بر سطح به عنوان تنش میانگین در نظر می‌گیریم.

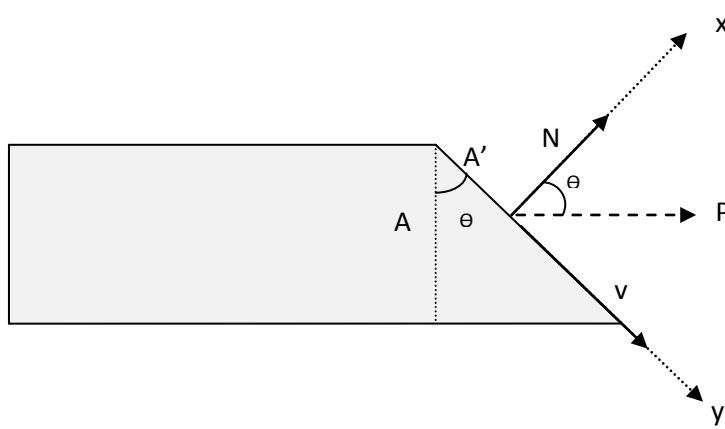
- **تائسور:** به کمیتی گفته می‌شود که در دستگاه‌های مختلف متفاوت است ولی ماهیت آن یکسان است.

کمیت‌های اسکالر تنش‌های درجه صفر هستند. تنش‌های درجه یک مانند بردارها. مولفه‌های نیرو در دستگاه‌های مختلف متفاوتند ولی ماهیت یکسانی دارند. **تنش** که حاصل تقسیم دو بردار است، تنش درجه دو می‌باشد که علاوه بر بردار نیرو باید بردار سطح مورد نظر هم تعریف شود. بنابراین هنگامی که جسمی را برش می‌دهیم پس از تعیین نیروها در آن مقطع، برای یافتن تنش باید سطح مورد نظر را نیز تعیین کنیم.

تنش روی هر سطح سه مولفه دارد: یکی در امتداد محور عمود بر سطح (در جهت بردار نرمال سطح) و دوتای دیگر مماس بر سطح و عمود بر هم هستند. حال میله‌ی زیر را در نظر بگیرید که آن را از مقطع  $D$  و  $D'$  برش می‌زنیم وضعیت نیروها به شکلی به می‌بینید است:



در برش سمت راست  $N'$  که بر سطح عمود است تنش نرمال ایجاد می‌کند و  $V$  که بر سطح مماس است تنش برشی. در برش سمت راست تنها تنش نرمال داریم



$$\cos \theta = \frac{N'}{P} = \frac{A}{A'}$$

$$\sigma_x = \frac{N}{A} = \frac{P}{A}$$

$$\sigma_{x'} = \frac{P \cos \theta}{A / \cos \theta} = \frac{N'}{A'}$$

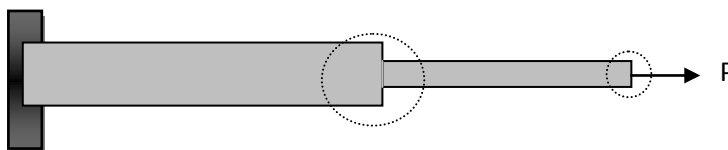
$$\sigma_{x'} = \frac{P \cos^2 \theta}{A}$$

$$\sigma_{x'} = \sigma_x \cos^2 \theta$$

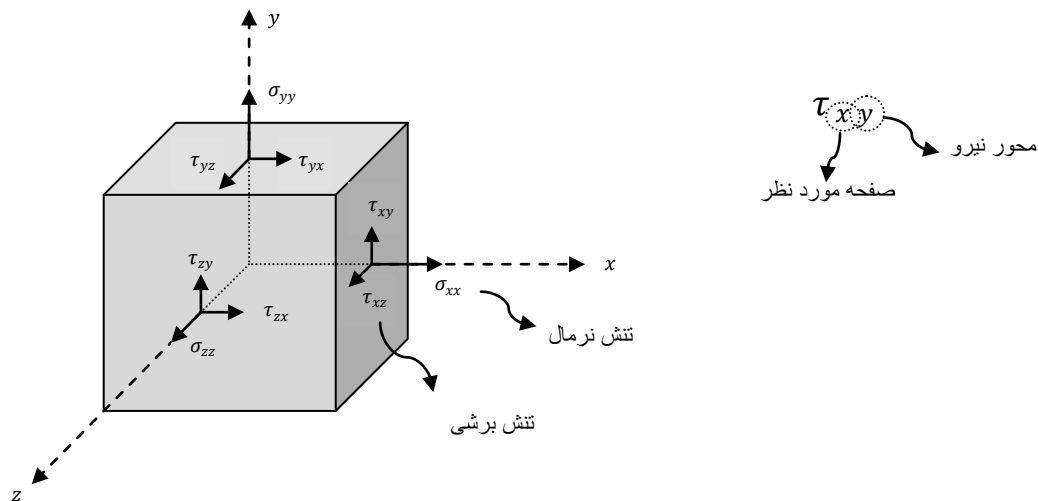
با استفاده از این رابطه اگر تنش نرمال روی یک سطح را داشته باشیم، می‌توانیم تنش نرمال در سطح دیگر را به دست آوریم.

- **تذکر:** مساحت و سطح دو مفهوم جداگانه‌اند. مساحت یکی از مشخصه‌های سطح است، همانطور که بردار نرمال یکی از این مشخصه‌هاست.
- **خستگی:** اگر در جسمی تغییرات نیرویی مکرر داشته باشیم، خستگی در آن ایجاد می‌شود. مانند نیروی وارد بر پل که باعث خستگی فولاد خواهد شد. خستگی به میزان **تغییرات نیرو** و **تناوب آن** بستگی دارد.

تنش را می‌توان جریان نیرویی که ذرات مجاور به هم وارد می‌کنند در نظر گرفت. گاهی نظم این جریان به هم می‌خورد، مانند جایی که تغییر شکل ناگهانی داریم. گاهی هم تمرکز تنش داریم مانند نقطه اثر نیرو.



اگر یک المان بسیار کوچک از جسم را جدا کنیم و مورد بررسی قرار دهیم وضعیت تنشهای آن به شکل زیر خواهد بود:



$\sigma_{xx}$  ،  $\sigma_{yy}$  ،  $\sigma_{zz}$  را به اختصار به ترتیب با  $\sigma_x$  ،  $\sigma_y$  و  $\sigma_z$  نشان می‌دهیم.

با توجه به جهت نیرو و جهت بردار صفحه ای که تنش به آن وارد می‌شود تنش‌ها را علامت گذاری می‌کنیم، مانند  $\tau_{x+y}$  که بردار نرمال صفحه ی مورد نظر در جهت  $+x$  و جهت نیروی برشی  $-y$  است. علامت تنش حاصلضرب این دو علامت است. برای تنش‌های نرمال علامت  $+$  برای نیروهای کششی و علامت  $-$  برای نیروهای فشاری در نظر گرفته می‌شود.

- **تذکر:** تنش در دو نقطه را تنها می‌توان با هم مقایسه کرد و قابل جمع و تفریق کردن نیستند.
- اگر تنش‌ها همزمان اثر کنند، مثلاً در هر سه جهت  $x$  و  $y$  و  $z$  نیرو داشته باشیم، تغییر حرارت هم داشته باشیم، کرنش در راستای  $x$  به صورت زیر خواهد بود:

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} - \theta \frac{\sigma_y}{E} - \theta \frac{\sigma_z}{E} + \alpha \Delta T \quad (\text{قانون هوک})$$

- اگر بخواهیم تغییر حجم را محاسبه کنیم از روش تقریبی زیر استفاده می‌کنیم:

$$V + dV = (x + x\varepsilon_x)(y + y\varepsilon_y)(z + z\varepsilon_z) \approx V + V\varepsilon_z + V\varepsilon_y + V\varepsilon_x$$

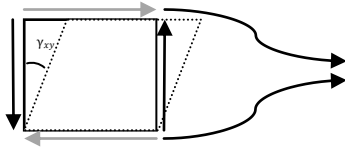
$$dV = (\varepsilon_z + \varepsilon_y + \varepsilon_x)V$$

$$\frac{dV}{V} = \varepsilon_z + \varepsilon_y + \varepsilon_x \quad (\text{تغییر حجم نسبی})$$

## تنش‌های برشی :

وقتی تنش برشی داریم تغییر طول نداریم اما تغییر زاویه داریم . تغییر نسبی در زاویه ۹۰ درجه را کرنش برشی می‌نامند و آن را با  $\gamma$  نمایش می‌دهند.

اگر المان کوچکی از میله‌ای در آن نیروهای برشی داریم در نظر بگیریم :



چون نیروهای برشی گشتاور ایجاد می‌کنند نیروهای افقی به وجود می‌آیند تا از چرخش جلوگیری کنند

بر خلاف تنش نرمال که علاوه بر محور خود سبب کرنش در جهات دیگر نیز می‌شود، تنش برشی تنها در یک راستا ایجاد کرنش می‌کند.

$\tan \gamma \approx \gamma$  به دلیل کوچکی زاویه

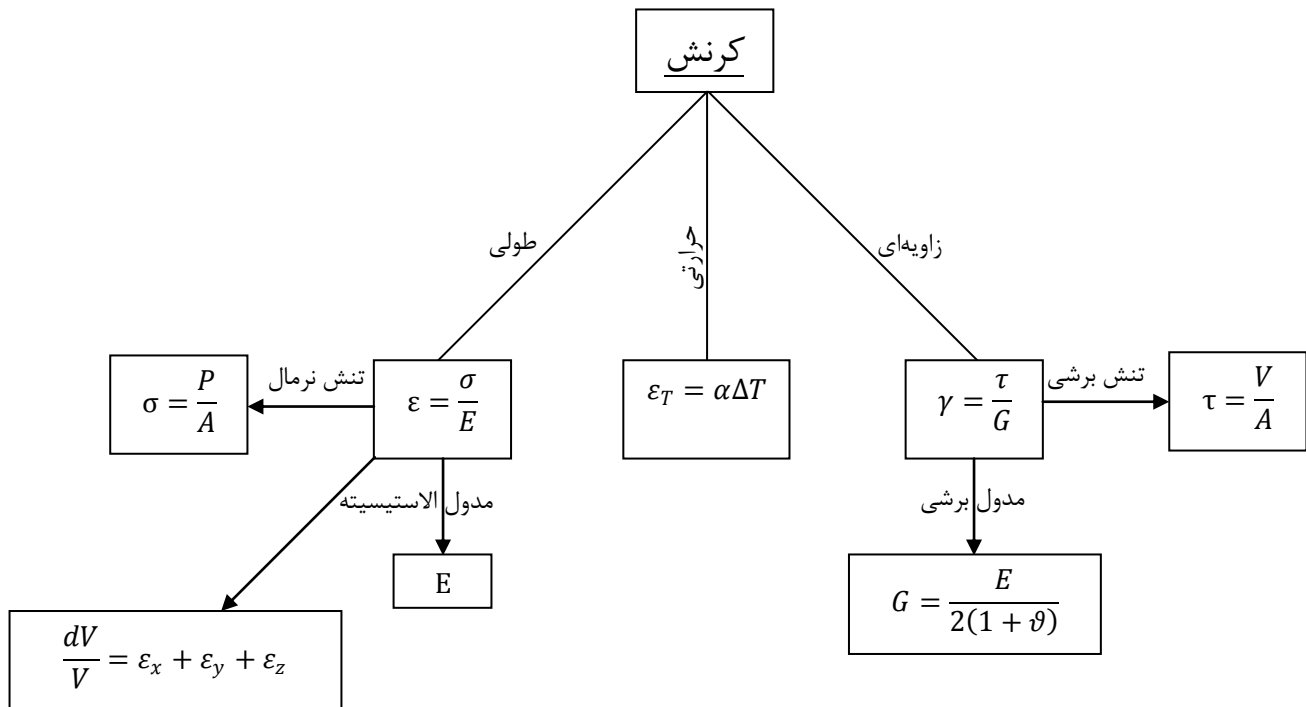
$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G}, \quad \gamma_{xz} = \frac{\tau_{xz}}{G}, \quad \gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G}$$

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)}$$

مدول برشی







$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} - \nu \frac{\sigma_y}{E} - \nu \frac{\sigma_z}{E} + \alpha \Delta T$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G}$$

$$\varepsilon_y = \frac{\sigma_y}{E} - \nu \frac{\sigma_x}{E} - \nu \frac{\sigma_z}{E} + \alpha \Delta T$$

$$\gamma_{xz} = \frac{\tau_{xz}}{G}$$

$$\varepsilon_z = \frac{\sigma_z}{E} - \nu \frac{\sigma_y}{E} - \nu \frac{\sigma_x}{E} + \alpha \Delta T$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G}$$

هوکا

تحلیل تنش‌ها در صفحه:

تنش حاصل از کشش، فشار و پیچش را بررسی کردیم. باید دقت کنیم که برای طراحی‌ها تنش در هر سطحی که ماکسیمم است نباید از حد مجاز بیشتر شود. بین تنش‌ها در سطوح مختلف روابط ریاضی برقرار است که به کمک آنها می‌توان تنش در هر سطح و مقدار ماکسیمم آن‌ها را پیدا کرد.



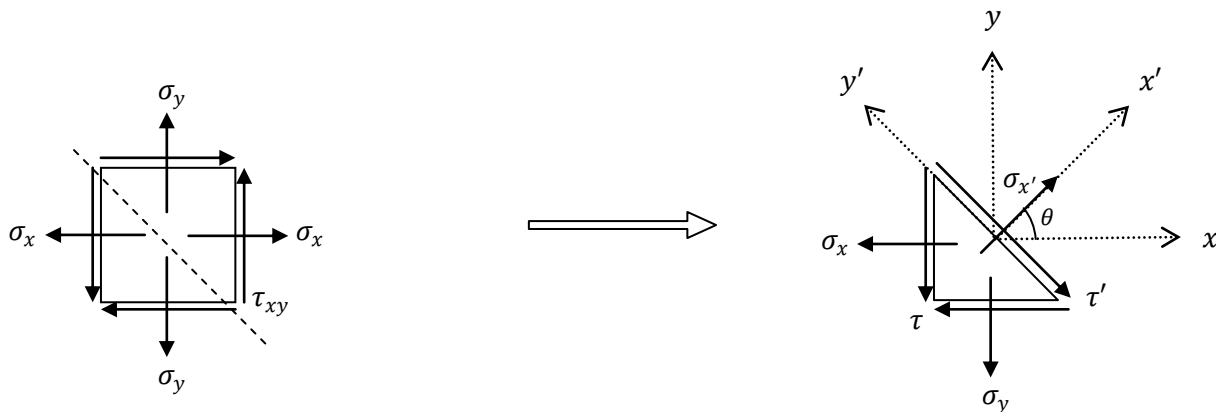
$$\sigma'_x = \sigma_x \cos^2 \theta \xrightarrow{\max} \cos \theta = 1 \rightarrow \theta = 0$$

$$\sigma'_x = \frac{\sigma_x}{2}$$

$$\tau' = \frac{P'}{A'} = \frac{P \sin \theta}{A / \cos \theta} = \frac{P}{A} \sin \theta \cos \theta \xrightarrow{\max} \theta = \frac{\pi}{4}$$

$$\tau'_{\max} = \frac{\sigma_x}{2}$$

بررسی تنش‌های مسطحه به کمک دایره مور:



$$\sum F_{x'} = 0 \rightarrow \sigma_{x'} A - \sigma_x (A \cos \theta) \cos \theta - \sigma_y (A \cos \theta) \sin \theta - \tau_{xy} (A \cos \theta) \sin \theta - \tau_{xy} (A \sin \theta) \cos \theta = 0$$

$$\xrightarrow{\text{yields}} \sigma_{x'} = \sigma_x \cos^2 \theta + \sigma_y \sin^2 \theta + 2\tau_{xy} \sin \theta \cos \theta$$

$$\sum F_{y'} = 0 \rightarrow \tau' A - \sigma_x (A \cos \theta) \sin \theta + \sigma_y (A \sin \theta) \cos \theta + \tau_{xy} (A \cos \theta) \sin \theta - \tau_{xy} (A \sin \theta) \cos \theta = 0$$

$$\xrightarrow{\text{yields}} \tau' = (\sigma_x - \sigma_y) \cos \theta \sin \theta - \tau_{xy} (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta)$$



با استفاده از روابط مثلثاتی روابط را به صورت زیر بازنویسی می‌کنیم:

$$\sigma_{x'} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\theta + \tau_{xy} \sin 2\theta$$

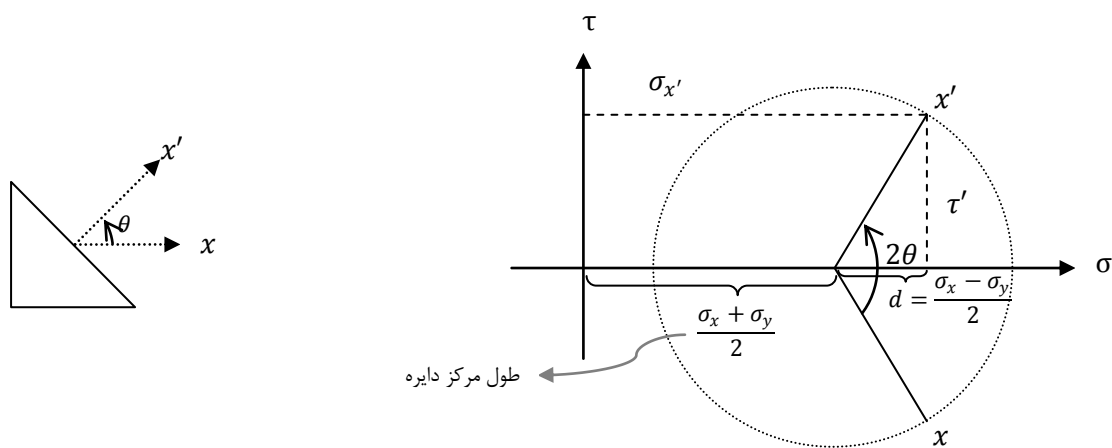
$$\tau' = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\theta - \tau_{xy} \cos 2\theta$$

برای حالتی که  $\tau_{xy} = 0$  است:

$$\sigma' = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\theta$$

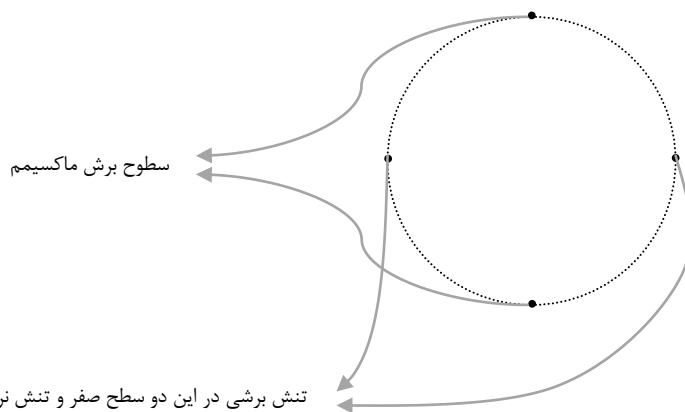
$$\tau' = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\theta$$

با مقایسه با معادلات  $\begin{cases} X = X_c + R \cos \alpha \\ Y = Y_c + R \sin \alpha \end{cases}$  می‌توان  $\sigma'$  و  $\tau'$  را روی دایره نظیر کرد.



دقت شود که هر نقطه روی دایره نظیر یک سطح است و عرض از مبدأ مرکز دایره همواره صفر است.

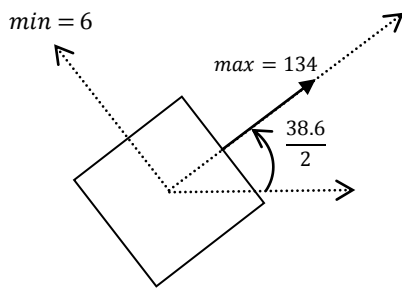
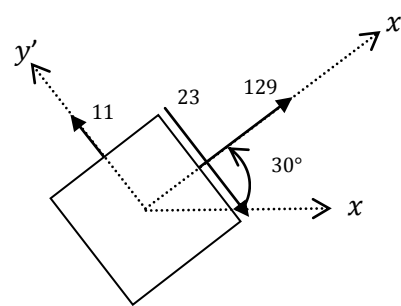
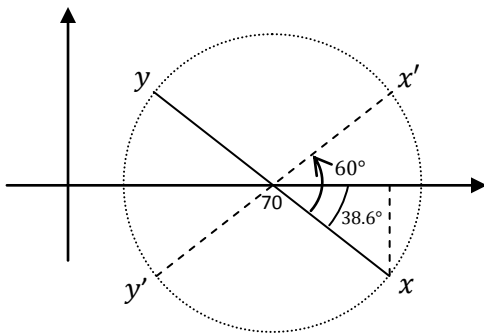
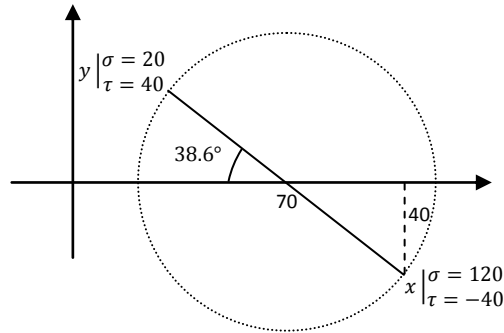
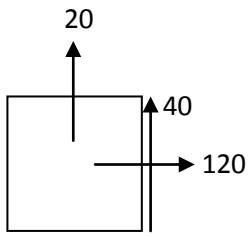
نکته: سطوح و محورهای اصلی:



تنش برشی در این دو سطح صفر و تنش نرمال مقدار  $\max$  و  $\min$  را دارد.

❖ مثال. اگر سطوح را  $30^\circ$  درجه دوران دهیم تنش و کرنش‌های جدید را محاسبه کنید.

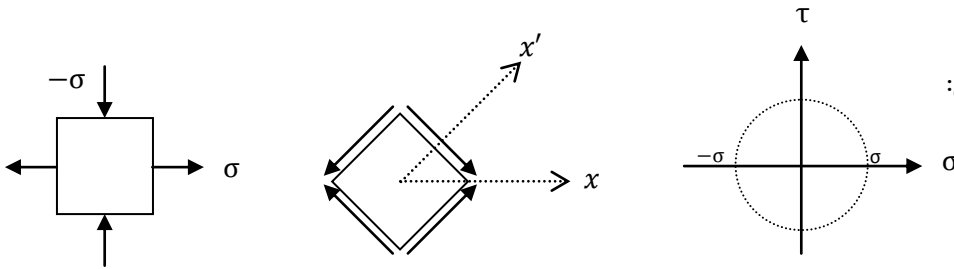
نکته: برای تعیین علامت  $\tau$  دقت شود که پادساعت‌گرد نظیر عدد منفی در دایره است و برعکس.



در این مثال سطوح اصلی و تنش‌هایشان:

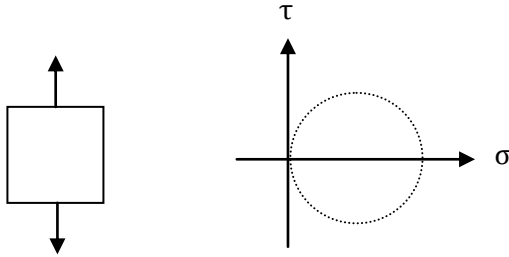
بررسی دایره‌های خاص:

(۱) برش خالص:

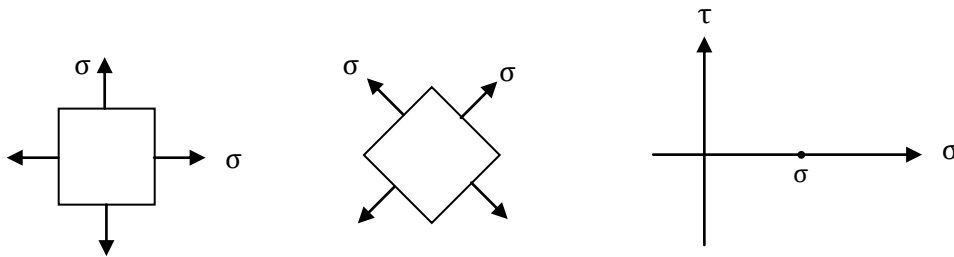


در حالت برش خالص هیچ تنش نرمالی وجود ندارد.

(۲) تنش یک‌محوری:



(۳) تنش هیدرواستاتیکی:

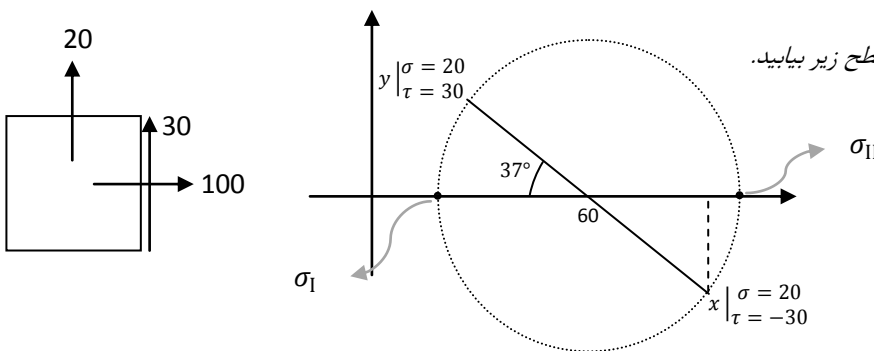


• هرگاه تنش‌ها در همه سطوح با هم برابر و تنش برشی صفر باشد در این حالت تغییر زاویه تأثیری بر مقدار تنش ندارد.

$$d = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} = 0 \rightarrow \sigma_x = \sigma_y$$

$$\begin{cases} d = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \\ 2\sigma_c = \sigma_x + \sigma_y \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \sigma_x = \sigma_c + d \cos 2\theta \\ \sigma_y = \sigma_c - d \sin 2\theta \end{cases}$$

❖ مثال: تنش‌های اصلی را برای سطح زیر بیابید.



$$\sigma_{II} = 110, \sigma_I = 10$$

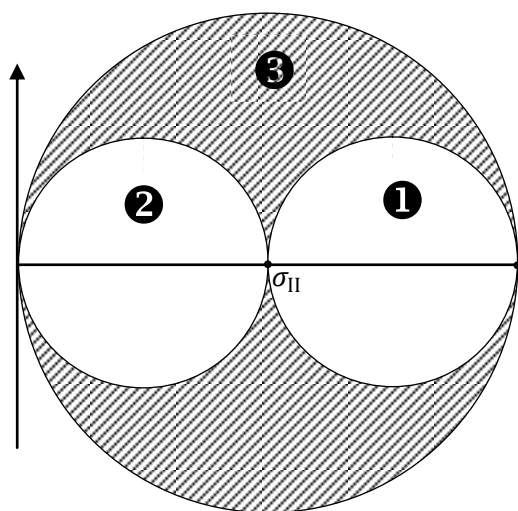


برای پاسخ به این پرسش که اگر تنش های چندمحوری داشته باشیم یا تنش های عمودی و برشی هم زمان اعمال شوند چه زمانی تسلیم رخ می دهد، فرضیه های زیادی وجود دارد:

- فرضیه تنش اصلی ماکسیمم: هرگاه تنش اصلی به میزان تنش مجاز برسد تسلیم رخ می دهد.
- فرضیه تنش برشی ماکسیمم: هرگاه تنش برشی به میزان تنش مجاز برسد تسلیم رخ می دهد.
- فرضیه ماکسیمم انرژی: هرگاه انرژی ذخیره شده به حد معینی برسد تسلیم رخ می دهد.
- فرضیه انرژی هیدرواستاتیکی

معمولاً برای مصاح ترد از فرضیه تنش برشی ماکسیمم و برای مصالح نرم از فرضیه انرژی استفاده می شود.

شکل کامل دایره مور برای بررسی تنش های ماکسیمم:

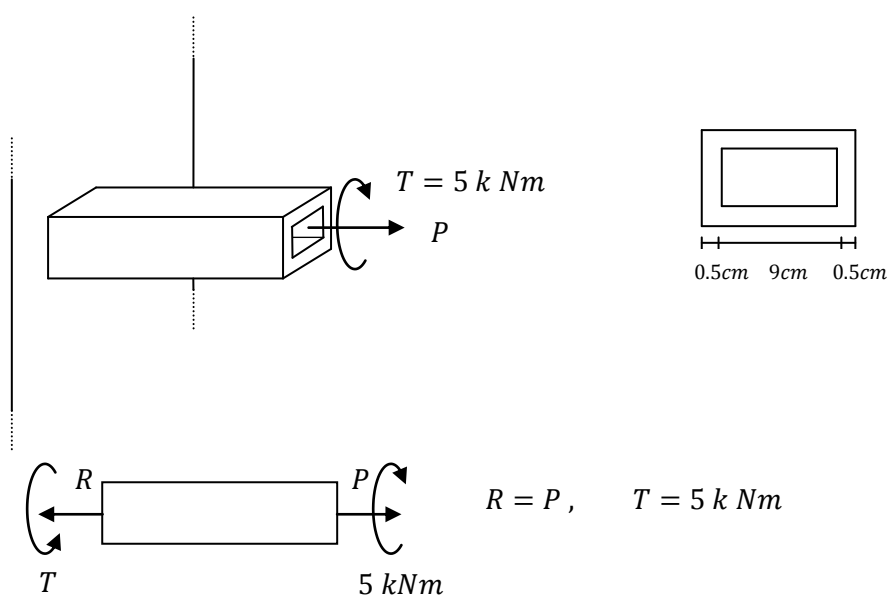


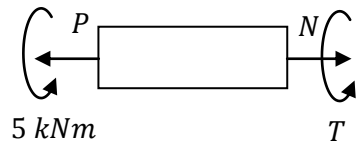
دایره 1 دایره اصلی، دایره 2 دایره بین نقطه صفر و  $\sigma_{II}$  و دایره 3 دایره بین نقطه صفر و  $\sigma_I$  است.

طبق این دایره، هرگاه سطح مورد نظر موازی محورها باشد، روی دایره حرکت می کنیم ولی نقاط هاشورخورده بیان گر مکان هندسی تمام سطوح مورب ممکن که بتوان برش زد می باشد.

نکته: دو دایره 2 و 3 حاصل از دوران حول دو سطح اصلی دیگر است.

❖ مثال. بار  $P$  را طوری تعیین کنید که بر اساس فرضیه برش ماکسیمم تنش برشی ماکسیمم از  $80 \text{ MPa}$  تجاوز نکند.

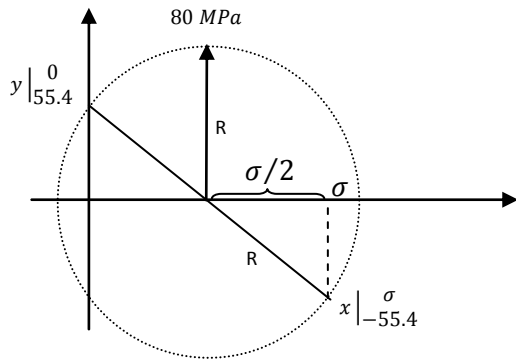
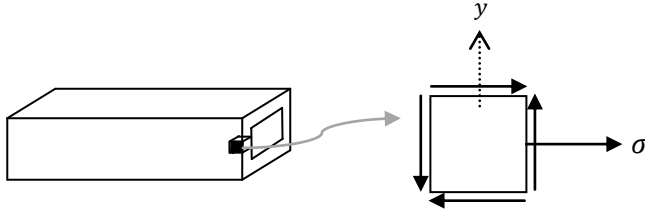




$$N = P, \quad T = -5 \text{ kNm}$$

$$\sigma = \frac{P}{A} \rightarrow \sigma = \frac{P}{19 \times 10^{-4}}$$

$$f = \tau t \rightarrow \tau = \frac{T}{2A_m t} = \frac{5 \times 10^3}{2(9.5 \times 9.5) \times 10^{-4} \times 0.5} = 55.4 \text{ MPa}$$

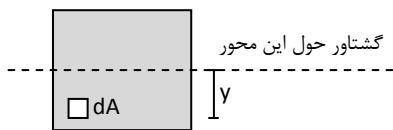
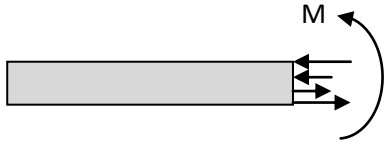


$$R = \sqrt{\left(\frac{\sigma}{2}\right)^2 + (55.4)^2} \rightarrow R = \tau_{max} = 80 \text{ MPa} \rightarrow \sigma = 115.43 \text{ MPa}$$

$$\sigma = \frac{P}{A} \rightarrow P = 219 \text{ kN}$$

خمش

در تیر تحت خمش خالص تنش وجود دارد ولی برآیند این تنش‌ها روی سطح مقطع صفر است.

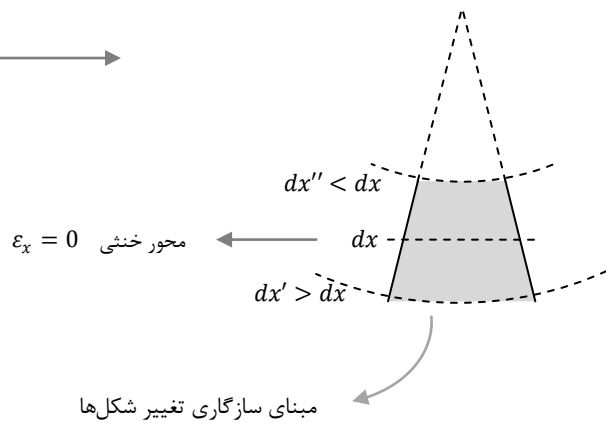
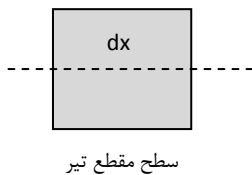


$$N = \int_A \sigma dA = 0$$

معادلات تعادل:

$$M = \int_A (\sigma dA)y$$

بر اثر خمش، تیر همواره شکل منحنی به خود می‌گیرد که در  $dx$  طول خیلی کوچک می‌توان آن را قسمتی از دایره در نظر گرفت.

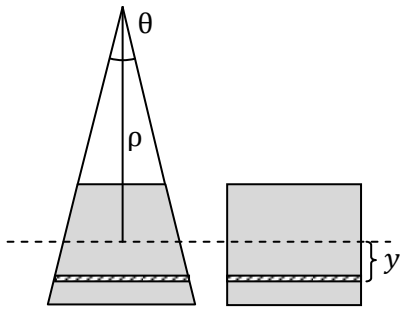


فرضیات:

- (۱) هر سطح مقطعی که مسطح بوده بعد از اعمال خمش مسطح باقی می‌ماند
- (۲) هر مقطعی که قبل از تغییر شکل بر محور تیر عمود بوده بعد از آن هم عمود باقی می‌ماند.







$$\epsilon_x = \frac{\Delta l}{l} = \frac{(\rho - y)d\theta - \rho d\theta}{\rho d\theta} = -\frac{y}{\rho} \rightarrow$$

میزان کرنش که در آن  $y$  فاصله تا محور خنثی و  $\rho$  شعاع خمیدگی است.

$$\sigma_x = E\epsilon_x = -\frac{Ey}{\rho}$$

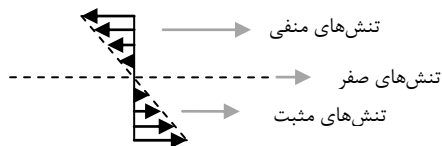
$$N = \int_A \sigma dA = \int_A -\frac{Ey}{\rho} dA = 0 \rightarrow -\frac{E}{\rho} \int y dA = 0$$

$\int y dA$  بیان گر گشتاور اول سطح است که وقتی صفر شود نشان می‌دهد محور از مرکز سطح گذشته است.

$$M = \int_A (\sigma dA)y = \int_A -\frac{E}{\rho} y^2 dA = -\frac{E}{\rho} \int y^2 dA \rightarrow M = -\frac{EI}{\rho} \rightarrow \sigma_x = -\frac{yM}{I}$$

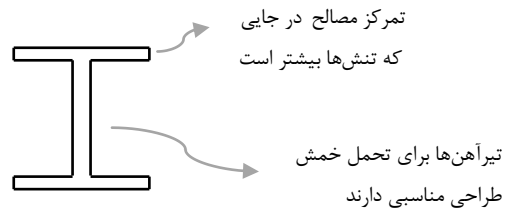
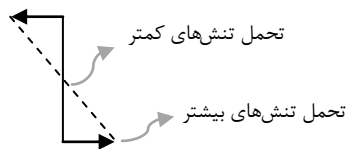
ممان اینرسی

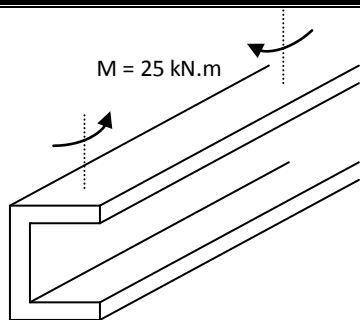
تنش در هر نقطه از سطح مقطع که به فاصله  $y$  از محور قرار دارد از این رابطه محاسبه می‌شود که با فاصله از محور رابطه خطی دارد.



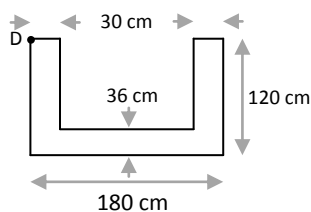
$$\sigma_{max} = \frac{M_{max} C}{I} = \frac{M_{max}}{I/C} = \frac{M_{max}}{S}$$

S: مدول خمشی مقطع





❖ مثال. تنش نقطه  $D$  را در تیر مقابل بیابید.



$$Ay_c = \int ydA$$

$$y_c = \frac{(180 \times 36 \times \frac{36}{2}) + 2 \left( 30 \times 84 \times \left[ \frac{84}{2} + 36 \right] \right)}{(180 \times 120) - (120 \times 84)} = 44.25 \text{ mm} \rightarrow \text{محل محور خنشی}$$

$$I = \frac{180 \times 36^3}{12} + 180 \times 36 \times (26.25)^2 + 2 \left[ \frac{30 \times 84^3}{12} + 30 \times 84 \times 33.75^2 \right]$$

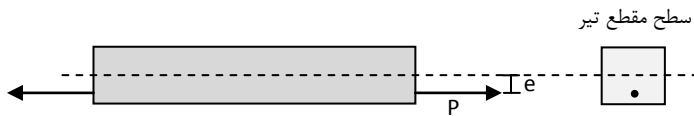
$$I = 13869000 \text{ mm}^4$$

$$\sigma_D = \frac{25 \times 10^3 \times 10^3 \times 75.75}{13869000} = 136.5 \frac{N}{\text{mm}^2} \rightarrow \sigma_D = 136.5 \text{ MPa}$$

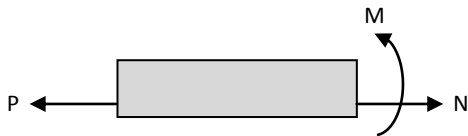


### بارگذاری محوری خارج از مرکز:

بار محوری گذرنده از مرکز جرم تنها ایجاد کشش یا فشار می کند. در صورتی که بار محوری خارج از مرکز از مرکز که گذرنده از مرکز جرم نباشد، علاوه بر تنش نرمال، ایجاد خمش نیز می کند.



برای تحلیل تیر فوق :



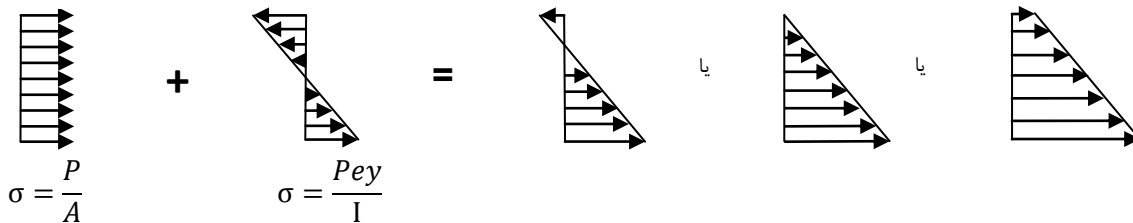
معادلات تعادل:  $N = P$

$$M = P \times e \rightarrow \sigma = \frac{P}{A}$$

از آنجا که  $\sigma = \frac{My}{I}$  داریم:

$$\sigma = \frac{Pe y}{I}$$

تنش حاصل از گشتاور خمشی      تنش حاصل از نیروی محوری



بسته به مقدار عددی تنش‌ها، یکی از سه حالت زیر حاصل می‌شود.

### خمش عضوهایی که از چند ماده ساخته شده‌اند:

رابطه  $\epsilon_x = -\frac{y}{\rho}$  از اصل سازگاری بدست آمده و به جنس جسم بستگی ندارد.



$$E_2 \sigma_x = E \epsilon_x \rightarrow \begin{cases} \sigma_1 = E \epsilon_1 \\ \sigma_2 = E \epsilon_2 \end{cases} \rightarrow \text{بسته به اینکه المان مورد نظر در کدام قسمت جسم واقع است.}$$

$$N = \int_A \sigma_T dA = 0 \rightarrow \int_{A_1} -\frac{E_1 y_1}{\rho} dA + \int_{A_2} -\frac{E_2 y_2}{\rho} dA = 0$$

$$-\frac{E_1}{\rho} \int y_1 dA - \frac{E_2}{\rho} \int y_2 dA = 0 \quad (\int y dA = Q)$$

$$E_1 Q_1 + E_2 Q_2 = 0 \rightarrow \text{از حل این معادله، مکان محور خنثی جسم به دست می‌آید.}$$

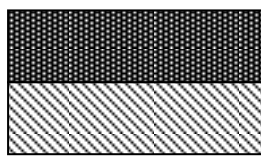


$$M = \int_{A_1} \sigma_1 y_1 dA + \int_{A_2} \sigma_2 y_2 dA = -\frac{E_1}{\rho} \int y_1^2 dA - \frac{E_2}{\rho} \int y_2^2 dA$$

$$M = -\frac{E_1}{\rho} I_1 - \frac{E_2}{\rho} I_2 \rightarrow I_1: \text{گشتاور دوم سطح اول نسبت به محور خنثی که در بالا مکان آن محاسبه شد.}$$

### روش مقطع معادل:

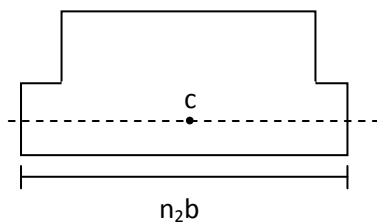
هرگاه مقطع تیر ما از چند جنس مختلف باشد، یکی از مقاطع را مبنا قرار می‌دهیم و طول بقیه را به نسبت E هایشان تغییر می‌دهیم. مقطع بدست آمده را مقطع معادل می‌گوییم. پس از آن کافیسیت محور خنثی و ممان اینرسی مقطع معادل را بدست آوریم.



$$E_1 Q_1 + E_2 Q_2 = 0 \rightarrow E_1 Q_1 + \frac{E_2}{E_1} E_1 Q_2 = 0, \quad \frac{E_2}{E_1} = n_2$$

$$Q_1 + n_2 Q_2 = 0 \rightarrow Q'_1 + Q'_2 = 0 \rightarrow Q'' = 0$$

رابطه بالا نشان‌دهنده همان محور خنثی گذرنده از مرکز جرم مقطع جدید است.

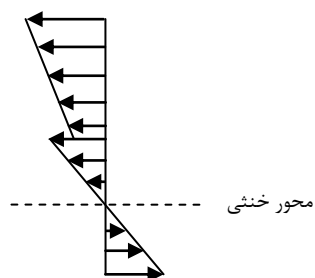


$$\frac{E_1}{E_1} = n_1 = 1, \quad \frac{E_2}{E_1} = n_2, \quad \frac{E_3}{E_1} = n_3, \quad \dots$$

$$\sigma = \frac{My}{I} \rightarrow \begin{cases} \sigma_1 = \frac{My}{I'} \\ \sigma_2 = n_2 \frac{My}{I'} \end{cases}$$

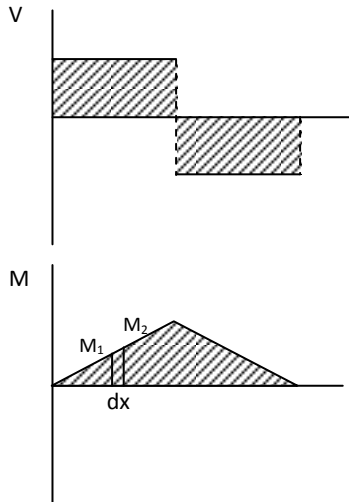
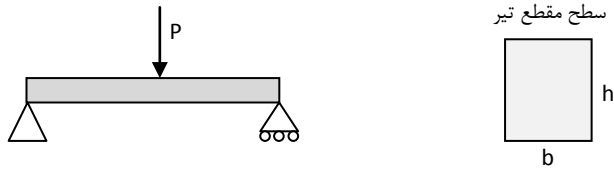
$I'$  ممان اینرسی مقطع جدید است

نحوه توزیع تنش در عضوهای چند ماده‌ای (در قسمت فصل مشترک برش ایجاد می‌شود):



### تنش‌های برشی در تیرها:

تیر زیر به سطح مقطع مستطیل را در نظر می‌گیریم که بار  $P$  بر آن وارد می‌شود:

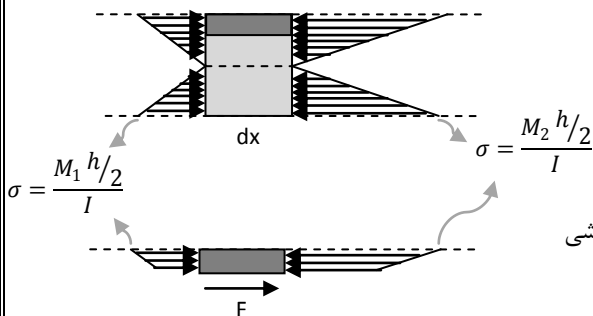


اگر طول کوچک  $dx$  را بررسی کنیم توزیع تنش‌ها به صورت زیر خواهد بود:

با توجه به نمودار خمش  $M_1 \neq M_2$  و  $M_2 > M_1$  است:

$$M_2 = M_1 + dM$$

اگر یک جزء از المان فوق را جدا کنیم دارای توزیع تنش به شکل زیر می‌شود:



چون کل جسم در تعادل است هر جزء از آن هم باید در تعادل باشد. نیروی برشی  $F$  به همین دلیل وجود دارد.

نیروی  $F$  از المان جداشده به سطح زیرین المان وارد می‌شود.

$$\sum F_x = 0 \rightarrow + \int_A \sigma_1 dA - \int_A \sigma_2 dA + F = 0$$

$$\rightarrow \int_A \frac{My}{I} dA - \int_A \frac{(M + dM)y}{I} dA + F = 0 \rightarrow F = \int_A \frac{dM y}{I} dA$$

$Q$ : گشتاور اول سطح جداشده نسبت به محور خنثی:

$$F = \frac{dM}{I} \int y dA = \frac{dM}{I} Q$$

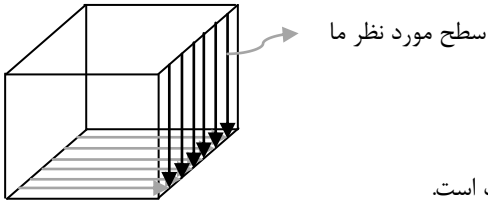


از طرفی این نیروی  $F$  حاصل از تنش برشی موجود در سطح زیرین است :

$$F = \tau A = \tau(bdx)$$

$$\rightarrow \tau = \frac{dMQ}{dxbl} \quad \text{با توجه اینکه } Vdx = dM \rightarrow \frac{dM}{dx} = V$$

تنش برشی موجود در سطح زیرین که در سطح عمود بر آن نیز به همین مقدار  $\tau = \frac{VQ}{bl}$  جریان دارد:



با توجه به رابطه  $\tau$  و  $Q$  نتیجه می‌شود که  $\tau$  و  $y$  رابطه سهمی دارد ولی در عرض ثابت است.

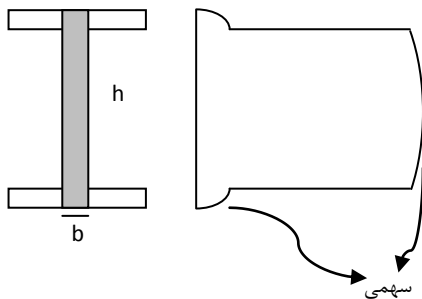
نکته: در تمام بارگذاری‌ها به جز در خمش خالص هم نیروی برشی وجود دارد و هم گشتاور خمشی؛ بنابراین دقت کنید که برای تحلیل تیرها هم  $\sigma_y$  و هم  $\tau_y$  بررسی شود.

برای مثال در مستطیل  $\tau_{max}$  برابر است با :

$$\tau_{max} = \frac{VQ_{max}}{bl} = \frac{V(b \cdot h/2)(h/4)}{\frac{bh^3}{12} \cdot b}$$

$$\tau_{max} = \frac{3V}{2A}$$

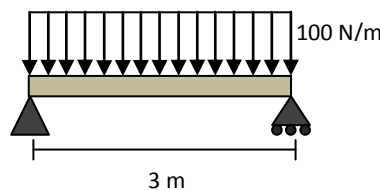
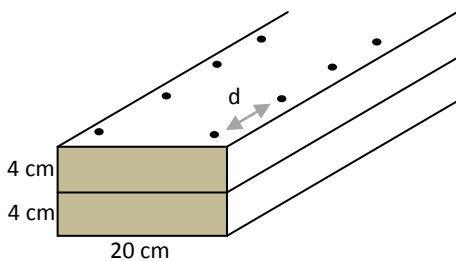
یا مثلاً در سطح مقطع تیر آهن‌ها :



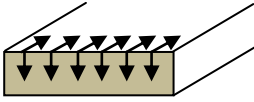
$$\tau_{ave} = \frac{V}{bh}$$

❖ مثال. دو قطعه الوار توسط میخ‌هایی به یکدیگر متصل شده‌اند. اگر مقاومت مجاز برشی هر میخ ۳۰۰ مگاپاسکال باشد، فاصله

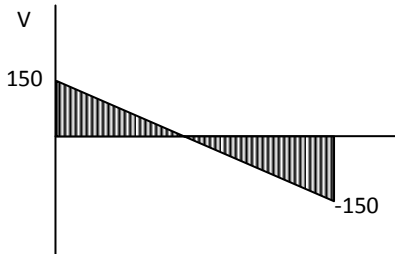
$d$  چقدر است؟



میخ‌ها در سطح مشترک دو الوار تحت نیروی برشی قرار می‌گیرند :



$$\tau = \frac{VQ}{bI}, \quad I = \frac{bh^3}{12} = 850 \text{ cm}^4$$



$$\rightarrow V_{max} = 150 \text{ N}$$

$$Q = \int_A y dA = 2 \times 8 \times 20 = 160$$

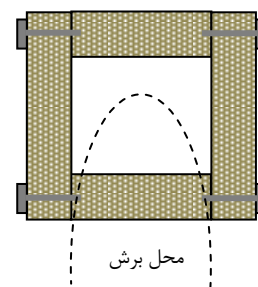
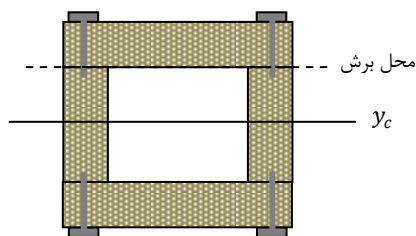
$$\tau = \frac{150 \times 160}{850 \times 20} = 1.4 \frac{\text{N}}{\text{cm}^2}, \quad F = \tau A$$

$$2 \times F = \tau \times b \times d$$

$$2 \times 300 = 1.4 \times 20 \times d \rightarrow d = 21.4 \text{ cm}$$

**نکته:** برای بدست آوردن تنش یا نیروی برشی، همواره به گونه ای برش می‌زنیم که سطح ما به دو قسمت مجزا تقسیم شود و قسمتی را که نیروی برشی‌اش را می‌خواهیم نیز قطع کند.

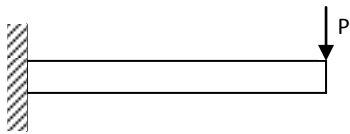
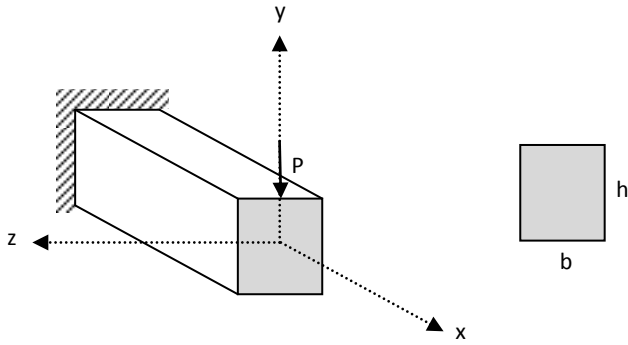
برای مثال برای بدست آوردن نیروی برشی در میخ‌ها می‌توان به شیوه‌های زیر برش زد :



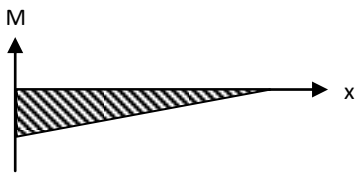
دقت شود که در فرمول  $\tau = \frac{VQ}{Ib}$ ،  $Q$  گشتاور اول سطح جدا شده نسبت به مرکز جرم کل است.  $I$  ممان اینرسی کل سطح مقطع است و  $b$  عرضی است که برش زده‌ایم.

### خمش دومجوری:

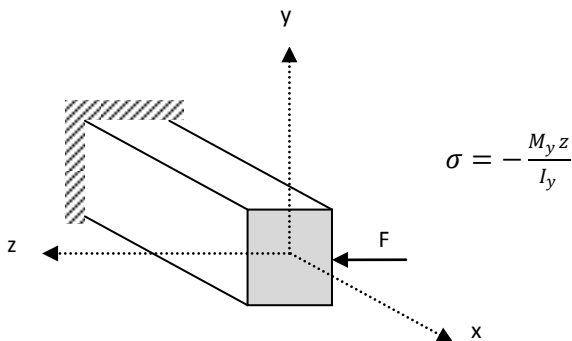
الف) اگر نیروی P مطابق شکل بر تیر اثر کند:



$$\rightarrow \sigma = -\frac{My}{I} \xrightarrow{M < 0} \begin{cases} \sigma > 0 \\ \sigma < 0 \end{cases}$$



ب) اگر نیروی F به صورت زیر به تیر وارد شود:



$$\sigma = -\frac{M_y z}{I_y}$$

ج) اگر F و P همزمان عمل کنند:

$$\sigma = -\frac{M_z y}{I_z} + \frac{M_y z}{I_y}$$

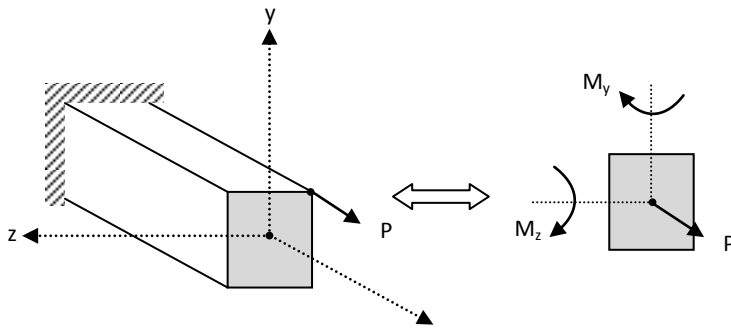
نکته: در مرکز مختصات که  $y = 0$  و  $z = 0$  تنش صفر است.

نکته: برای بدست آوردن محور خنثی کافیه رابطه تنش را مساوی صفر قرار دهیم

$$\sigma = -\frac{M_z y}{I_z} + \frac{M_y z}{I_y} = 0 \rightarrow y = \frac{M_y}{M_z} \cdot \frac{I_z}{I_y} z \quad \text{معادله خط:}$$



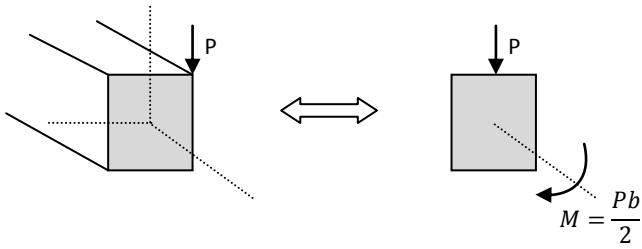




(د) اگر نیرو از مرکز جرم نگذشته باشد :

$$M_y = -\frac{Ph}{2}, \quad M_z = -\frac{Ph}{2}$$

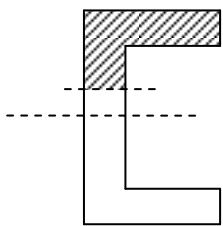
$$\sigma = \frac{P}{A} + \frac{M_y z}{I_y} + \frac{M_z y}{I_z}$$



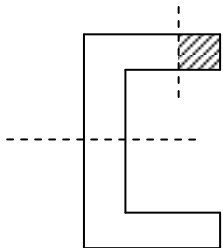
(ه) گشتاور حول  $x$  که باعث پیچش می شود :

### جریان برش در جدارنازکها:

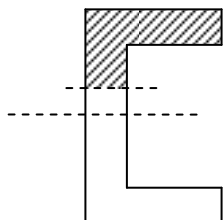
هرگاه عرض برش زده کم بود (مانند جدارنازکها) فرض می شود که تنش برشی روی سطح یکنواخت است.



$$f = \frac{VQ}{lb} \times b = \frac{VQ}{l} \quad \text{جریان برش}$$



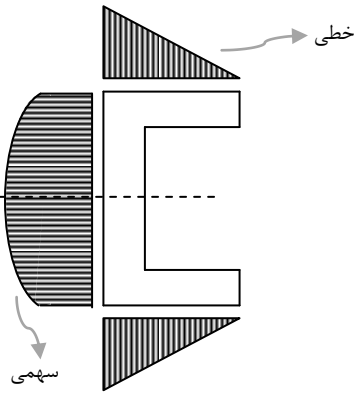
$$\tau = \frac{VQ}{lb} \rightarrow \text{متناسب با } Q \text{ به صورت خطی در طول تغییر می کند.}$$



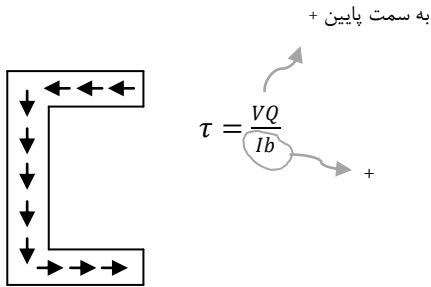
$$\tau = \frac{VQ}{lb} \rightarrow \text{متناسب با } Q \text{ به صورت سهمی در ارتفاع تغییر می کند.}$$



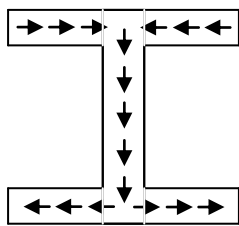
- نمایش تغییرات تنش برشی در طول و ارتفاع :



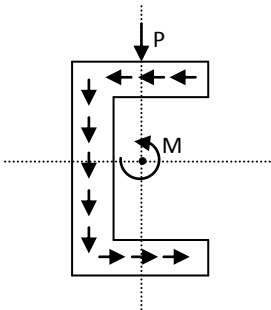
- نمایش جهت تنش برشی در طول و ارتفاع :



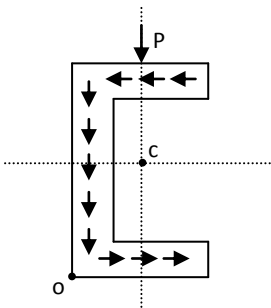
- در خمش جریان برش به گونه ایست که از یک طرف وارد و از طرف دیگر خارج می شود. بر خلاف جریان برش در پیچش که همواره دوران وار بود.



در جدارنازکها باید دقت شود که تعادل حول مرکز سطح بررسی شود و بار به جایی وارد شود که سطح جدارنازک ما تحت پیچش قرار نگیرد :

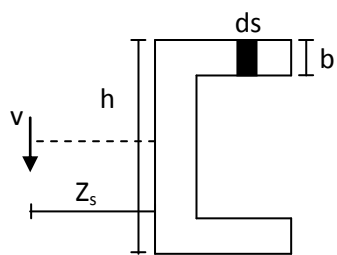


برای پیدا کردن محل وارد کردن با بدون ایندنا پیچش :



نقطه‌ای را انتخاب می‌کنیم که حداقل امتداد دو جریان برشمان از آن نقطه بگذرد تا گشتاورشان صفر شود.





$$\int_0^d \tau (bds)h = VZ_s$$

$$\int_0^d \frac{VQ}{IB} \cdot bh \cdot ds = VZ_s \quad \rightarrow \quad \frac{h}{I} \int_0^d Q ds = Z_s$$

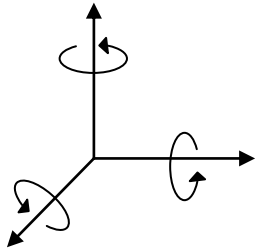
$$\text{از طرفی: } Q = b \times S \times \frac{h}{2} \quad \rightarrow \quad \frac{h^2 b}{2I} \int_0^d S dS = Z_s \quad \rightarrow \quad Z_s = \frac{h^2 b d^2}{4I}$$

( $Z_s$ : مرکز برش)

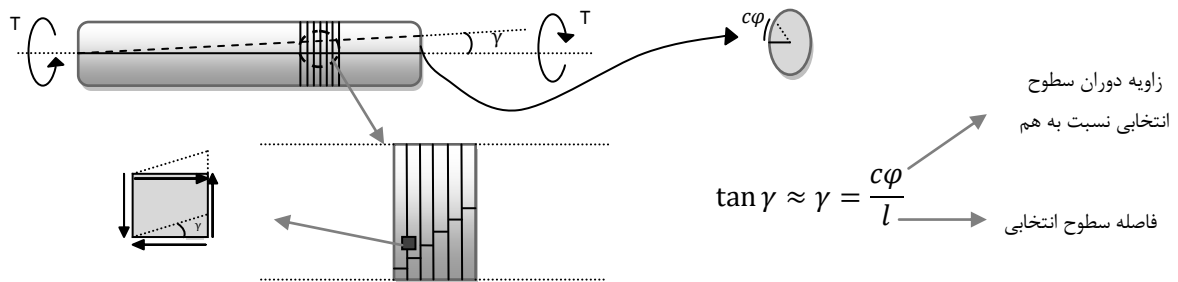


پیچش:

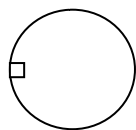
چنانچه میله‌ای در راستای محور X داشته باشیم، گشتاور حول محورهای Y و Z باعث خمیدگی و گشتاور حول محور X باعث پیچش می‌شود.



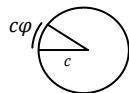
در پدیده‌ی پیچش طول‌ها و سطح مقطع‌ها تغییری نمی‌کنند، هر سطح نسبت به سطح مجاور می‌چرخد.



در المان مورد نظر تغییر زاویه مشاهده می‌شود پس کرنش برشی داریم که نشان از تنش برشی است.



$$\gamma = \frac{c\phi}{l}$$



هر المان دیگری را در نظر بگیریم به این میزان دوران دارد:

۱. برای حالتی که المان روی سطح قرار دارد

$$\gamma = \frac{\rho\phi}{l}$$



۲. برای حالتی که المان به مرکز نزدیک‌تر باشد

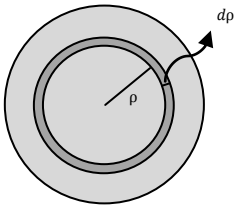
تنش برشی در هر نقطه عمود بر شعاع است، در همه جا وجود دارد و با شعاع رابطه ی خطی دارد (از مرکز به سمت بیرون افزایش می‌یابد).

$$\tau = G\gamma$$

$$\tau = \frac{\rho\phi}{l}$$



برآیند این نیروهای برشی، گشتاور  $T$  حول محور میله را نتیجه می‌دهد. برای یافتن  $T$  از انتگرال استفاده می‌کنیم.



$$\int (\tau dA) \rho = T$$

نیروی داخلی جزئی
بازوی گشتاور

$$\int \underbrace{\left(\frac{G\phi}{l}\rho\right)}_{\tau} \cdot \rho \cdot dA = \int \frac{G\phi}{l} \rho^2 \cdot \underbrace{(2\pi\rho)}_{dA} d\rho$$

$$T = \frac{G\phi \cdot 2\pi}{l} \int_0^c \rho^3 d\rho = \frac{G\phi}{l} \cdot \left(\frac{\pi c^4}{2}\right) \rightarrow \text{ممان اینرسی قطبی دایره (J)}$$

$$T = \frac{G\phi}{l} \cdot J$$

• اگر استوانه توخالی باشد، حدود انتگرال را حدود شعاع‌ها در نظر می‌گیریم.

عامل مولد  $\rightarrow$

$$\phi = \frac{Tl}{GJ}$$

عامل مقاوم  $\rightarrow$

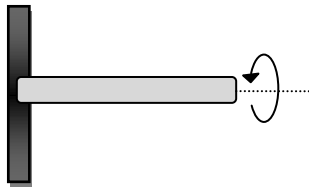
برای طولی از  $l$  که  $T$  و  $J$  ثابت باشند

عامل مولد  $\rightarrow$

$$\Delta l = \frac{Nl}{EA}$$

عامل مقاوم  $\rightarrow$

برای طولی از  $l$  که  $N$  و  $A$  ثابت باشند

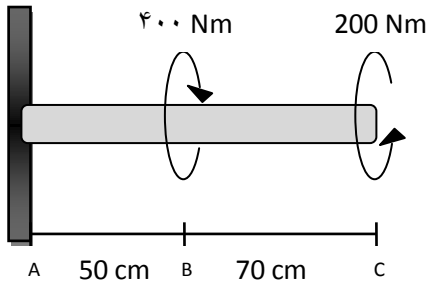


مثال. در شکل مقابل زاویه پیچش میله را بیابید.  $\tau_{max}$  را نیز محاسبه کنید.

$$\left\{ \begin{array}{l} T = 300 \text{ kNm}, \quad E = 200 \text{ GPa}, \quad J = 0.25 \text{ kg.m}^2 \\ c = 2 \text{ cm}, \quad l = 120 \text{ cm} \end{array} \right.$$

$$\phi = \frac{Tl}{GJ} = 0.018 \text{ rad}, \quad \tau_{max} = G\gamma_{max} = G \frac{c\phi}{l} = G \frac{c}{l} \cdot \frac{Tl}{GJ} \Rightarrow \tau_{max} = \frac{Tc}{J}$$



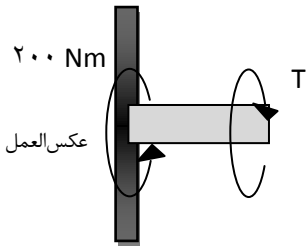


❖ مثال. زاویه پیچش سطح C را نسبت به سطح A بدست آورید.

$$\varphi_{C-A} = \varphi_{B-A} + \varphi_{C-B}$$

$$\begin{cases} c = 2 \text{ cm} \\ G = 80 \text{ GPa} \end{cases}$$

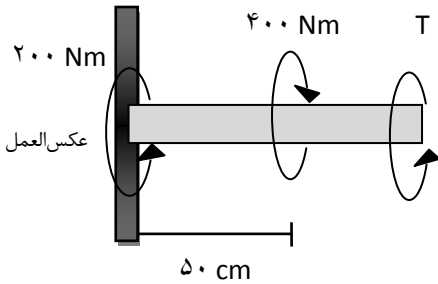
ابتدا زاویه پیچش B نسبت به A را محاسبه می‌کنیم:



$$T + 200 = 0 \Rightarrow T = -200 \text{ Nm}$$

$$\varphi_{B-A} = \frac{-200 \times 50 \times 10^{-2}}{80 \times 10^9 \times 25 \times 10^{-8}} = -0.005 \text{ rad}$$

حال زاویه پیچش C نسبت به B را محاسبه می‌کنیم:



$$T + 200 - 400 = 0 \Rightarrow T = 200 \text{ Nm}$$

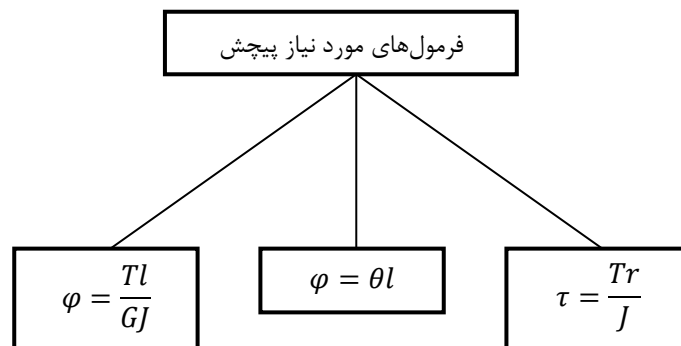
$$\varphi_{C-B} = \frac{200 \times 70 \times 10^{-2}}{80 \times 10^9 \times 25 \times 10^{-8}} = 0.007 \text{ rad}$$

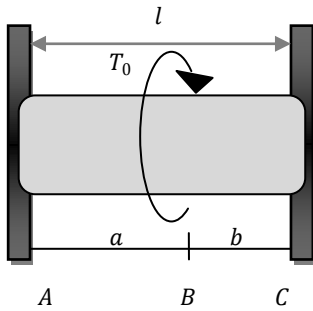
$$\varphi_{C-A} = 0.002 \text{ rad}$$

سوال. در کجا  $\tau_{max}$  قرار دارد؟ برای تعیین مقدار ماکسیمم جهت برش مهم نیست، مقدار آن مهم است که در همه جا 200 Nm است.

نرخ پیچش:  $\theta$  زاویه پیچش نسبی در واحد طول است که در این واحد کوچک بقیه پارامترها ثابت است.  $\theta$  را نرخ پیچش نیز می‌نامند.

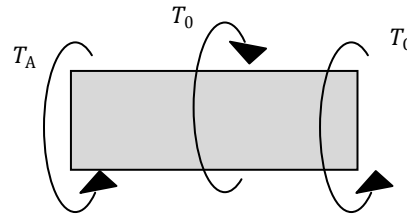
$$\theta = \frac{\varphi}{l} \rightarrow \theta = \frac{T}{GJ}$$





❖ مثال. میزان پیچش را حساب کنید. در کجا برش ماکسیمم است؟ مقدار آن را محاسبه کنید.

ابتدا دیاگرام آزاد را رسم می کنیم و روابط تعادل را می نویسیم.



$$T_C + T_A = T_0 \quad \text{یک درجه نامعین}$$

طبق اصل سازگاری چون هر دو طرف میله فیکس است پیچش A نسبت به C صفر است.

$$\varphi_{C-A} = \varphi_{B-A} + \varphi_{C-B} = 0$$

$$\varphi_{B-A} = \frac{Tl}{GJ} \rightarrow \begin{array}{c} \text{---} \\ \uparrow T_A \quad \downarrow T \end{array} \rightarrow T = T_A$$

$$\varphi_{B-A} = -\frac{T_A a}{GJ}$$

$$\varphi_{C-B} = -\frac{Tl}{GJ} \rightarrow \begin{array}{c} \text{---} \\ \uparrow T \quad \downarrow T_C \end{array} \rightarrow T = T_C$$

$$\varphi_{C-B} = -\frac{T_C b}{GJ}$$

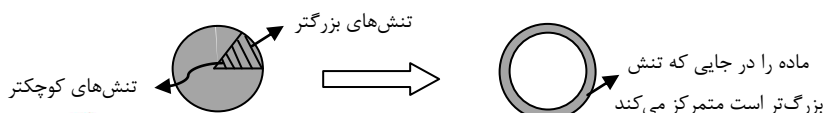
دقت شود که برای محاسبه  $\varphi_{C-B}$  برش را از چپ زدیم بنابراین با این که  $T$  هم جهت  $T$  است جهت تغییر زاویه ها خلاف هم است. از این رو یکی را منفی و دیگری را مثبت در نظر گرفتیم.

$$\varphi_{B-A} + \varphi_{C-B} = 0 \Rightarrow T_C b - T_A a = 0 \Rightarrow T_A = \frac{b}{a} T_C$$

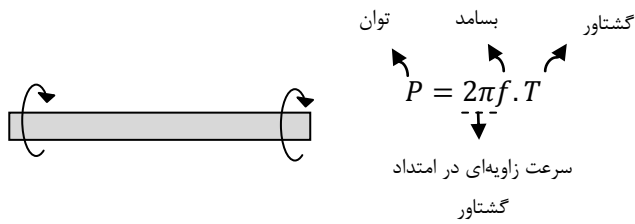
$$\begin{cases} T_A = \frac{b}{a} T_C \\ T_C + T_A = T_0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} T_A = \frac{b T_0}{l} \\ T_B = \frac{a T_0}{l} \end{cases}$$

$$\text{if } a > b \rightarrow \tau_{max} = \frac{T_B c}{l} = \frac{a T_0 c}{l^2}$$

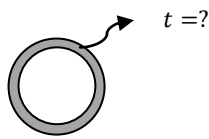
- نکته: با جرم یکسان لوله ای توخالی شعاع بیشتری نسبت به لوله ای توپر دارد، بنابراین  $J$  آن بزرگتر است و بر اساس رابطه ی موجود، تنش برشی آن کمتر است. همچنین برای داشتن  $J$  یکسان با لوله ای توخالی جرم کمتری نیاز است. از این رو لوله های توخالی برای تحمل پیچش مناسب ترند.



- تذکر: چنانچه میله تحت گشتاور خالص باشد، در این حالت دوران داریم، نه پیچش. در این حالت میله شتاب زاویه ای خواهد داشت. چنانچه میله تحت گشتاور باشد اما گشتاور خالص نداشته باشیم، یعنی عامل مقاوم داشته باشیم اما میله تکیه گاه نداشته باشد، در این حالت میله با سرعت ثابت دوران می کند. در این حالت میله شتاب ندارد یعنی در حالت تعادل است اما تعادل استاتیکی نیست.



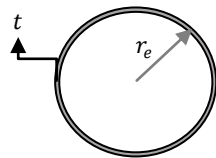
- ❖ مثال. اگر  $\tau_w = 60 \text{ MPa}$  ، قطر خارجی لوله ،  $f = 20 \text{ Hz}$  ،  $P = 100 \text{ kW}$  ضخامت لوله را طوری بیابید که تنش مجاز  $60 \text{ MPa}$  شود.



$$P = 2\pi f T \rightarrow T = 796 \text{ Nm}$$

$$\tau_{\max} = \frac{Tc}{J} \rightarrow 60 \times 10^6 = \frac{796 \times 0.025}{\frac{\pi}{2}((50 \times 10^{-3})^4 - r^4)}$$

$$t = 4.4 \text{ mm}$$

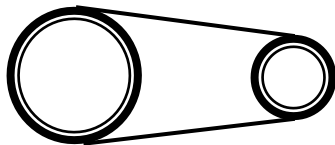
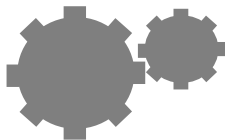


- نکته: در میله‌های جدارنازک شعاع را  $r_e$  که میانگین شعاع خارجی و داخلی است می گیریم.

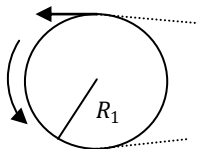
$$J = 2\pi r_e t \cdot r_e^2$$

### مسائل چرخ دنده و زنجیر و تسمه متصل به قرقره:

نکته کلیدی در این مسایل این است که نیرویی که از طریق دنده یا زنجیر به هرکدام از چرخ دنده‌ها یا قرقره‌ها وارد می‌شود بر اساس قانون سوم نیوتن یکسان است.

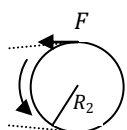


مثلاً در قرقره و تسمه :



$$T_1 = FR_1$$

$$\rightarrow \frac{T_1}{T_2} = \frac{R_1}{R_2}$$

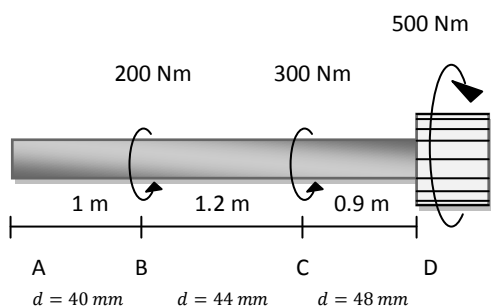


$$T_2 = FR_2$$





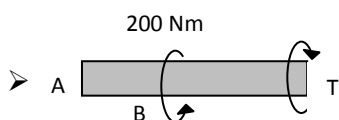
تذکر: در این مسایل چنانچه حرکت داشته باشیم باید توجه کنیم که سرعت و شتاب خطی فرقه‌هایی که به هم متصلند برابر است.



❖ مثال. مقدار  $\varphi_{D-B}$  و  $\varphi_{C-B}$  را محاسبه کنید. ( $G = 27 \text{ GPa}$ )



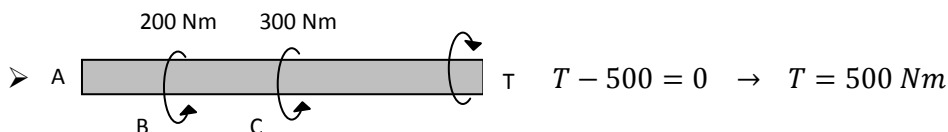
$$T = 0$$



$$T - 200 = 0 \rightarrow T = 200 \text{ Nm}$$

$$\varphi_{C-B} = \frac{Tl}{GJ}, \quad J = \frac{\pi r^4}{2} = \frac{\pi(22)^4 \times 10^{-12}}{2} = 3.68 \times 10^{-7} \text{ m}^4$$

$$\varphi_{C-B} = \frac{200 \times 1.2}{27 \times 10^9 \times 3.68 \times 10^{-7}} = 0.024 \text{ rad}$$



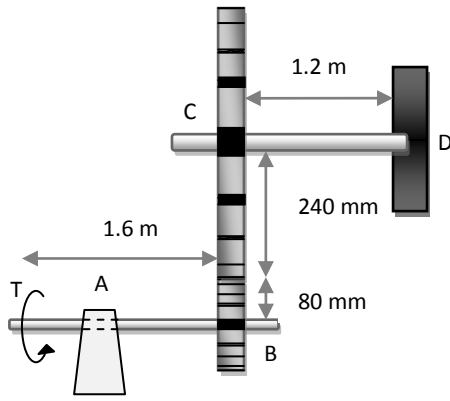
$$T - 500 = 0 \rightarrow T = 500 \text{ Nm}$$

$$\varphi_{D-C} = \frac{Tl}{GJ}, \quad J = \frac{\pi r^4}{2} = \frac{\pi(24)^4 \times 10^{-12}}{2} = 5.21 \times 10^{-7} \text{ m}^4$$

$$\varphi_{D-C} = \frac{500 \times 0.9}{27 \times 10^9 \times 5.2 \times 10^{-7}} = 0.032 \text{ rad}$$

$$\varphi_{D-B} = \varphi_{D-C} + \varphi_{C-B} = 0.024 + 0.032 = 0.056 \text{ rad}$$



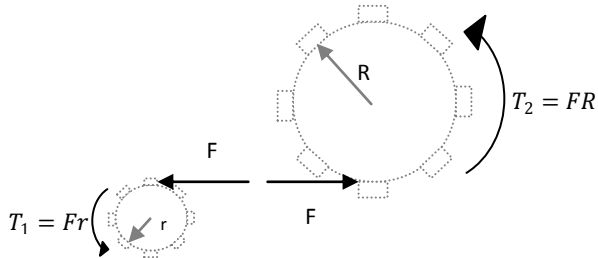


❖ مثال. در دستگاه روبرو میله ی پایینی در نقطه  $A$  آزاد و در نقطه  $D$  گیردار است. قطر میله ی بالایی  $60\text{mm}$  و قطر میله ی پایینی  $42\text{mm}$  است. اگر  $T_A = 1.2\text{ kNm}$  و  $G = 77.2\text{ GPa}$  باشد،  $\varphi_{A-D}$  را حساب کنید.

ابتدا  $\varphi_{A-B}$  را حساب می کنیم، اگر جهت اعمال گشتاور را مثبت بگیریم:

$$\varphi_{A-B} = \frac{+1200 \times 1.6}{77.2 \times 10^9 \times \frac{\pi}{2} \times 21^4 \times 10^{-12}} = 0.081\text{ rad}$$

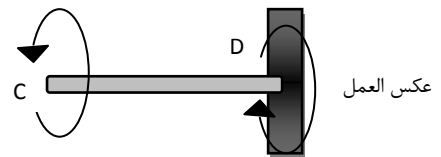
حال  $\varphi_{C-D}$  را حساب می کنیم. برای این کار باید گشتاور وارد بر چرخ دنده  $C$  را بدست آوریم. همان طور که پیش تر اشاره کردیم، نیرویی که چرخ دنده ها در محل تماس به هم وارد می کنند بر اساس قانون سوم نیوتن با هم برابرند. از طرفی چون دستگاه در حالت تعادل است گشتاوری که به چرخ دنده  $B$  از طریق این نیرو وارد می شود باید برابر با  $T$  باشد. دستگاه را از زاویه  $A$  بررسی می کنیم:



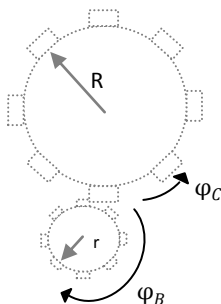
$$T_1 = F \times 0.08 = 1200 \rightarrow F = 15\text{ kN}$$

$$T_2 = 15000 \times 0.24 = 3600\text{ Nm}$$

$$\varphi_{C-D} = \frac{-3600 \times 1.2}{77.2 \times 10^9 \times \frac{\pi}{2} \times 30^4 \times 10^{-12}} = -0.044\text{ rad}$$



برای محاسبه  $\varphi_{A-D}$  باید به نکته دیگری نیز توجه کنیم که چرخ دنده  $C$  با چرخیدن، چرخ دنده  $B$  را نیز می چرخاند. برای محاسبه  $\varphi_B$  میزان چرخش  $B$  از روی  $\varphi_{C-D}$  که میزان چرخش  $C$  است باید توجه کنیم که بخشی از محیط چرخ دنده ها که در تماس با هم حرکت می کند (S) در هر دو یکسان است. دقت داشته باشید که جهت چرخش چرخ دنده ها مخالف است.

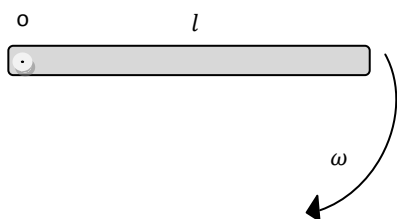


$$s = R\varphi_C = -r\varphi_B \rightarrow 0.24 \times -0.044 = -0.08 \times \varphi_B$$

$$\varphi_B = 0.132\text{ rad}$$

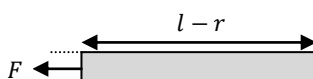
$$\varphi_{A-D} = \varphi_{A-B} + \varphi_B = 0.213\text{ rad}$$

❖ مثال. میله‌ای به طول  $l$  حول یک سر خود با سرعت زاویه‌ای  $\omega$  دوران می‌کند. در لحظه نشان داده شده تغییر طول میله چقدر است؟



هر جسم برای این که با سرعت زاویه ای ثابت  $\omega$  حول نقطه‌ای دوران کند باید نیرویی معادل  $F = ma$  که  $a = r\omega^2$  شتاب مرکزگراست به آن وارد شود. در اینجا این نیرو در طول میله متغیر است چون  $r$  متغیر است.

برای محاسبه تغییر طول میله المان بسیار کوچکی در نظر می‌گیریم به طوری که بتوان نیروی دو طرف آن را برابر در نظر گرفت و به این طریق تنش را محاسبه نمود. با محاسبه تنش، کرنش را بدست می‌آوریم و با انتگرال‌گیری تغییر طول میله را محاسبه می‌کنیم.



ابتدا نیرو را در فاصله  $r$  حساب می‌کنیم:

$$dF = dm \cdot x\omega^2 = (\rho A dx) \cdot x\omega^2$$

$$F = \int_r^l \rho A \omega^2 x dx = \frac{\rho A \omega^2}{2} (l^2 - r^2)$$

$$\sigma = \frac{F}{A} = \frac{\rho \omega^2}{2} (l^2 - r^2)$$

حال که تنش را در المان مورد نظر بدست آوردیم، برای هر المان تغییر طول  $dl$  را در نظر می‌گیریم:

$$dl = \frac{\sigma dr}{E}$$

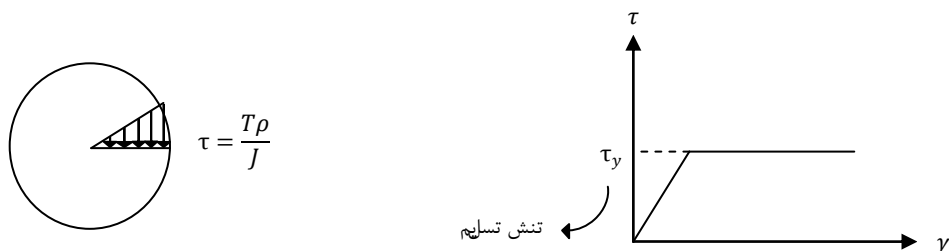
$$\Delta l = \int dl = \int_0^l \frac{\rho \omega^2}{2E} (l^2 - r^2) dr$$

$$\Delta l = \frac{\rho \omega^2 l^3}{3E}$$

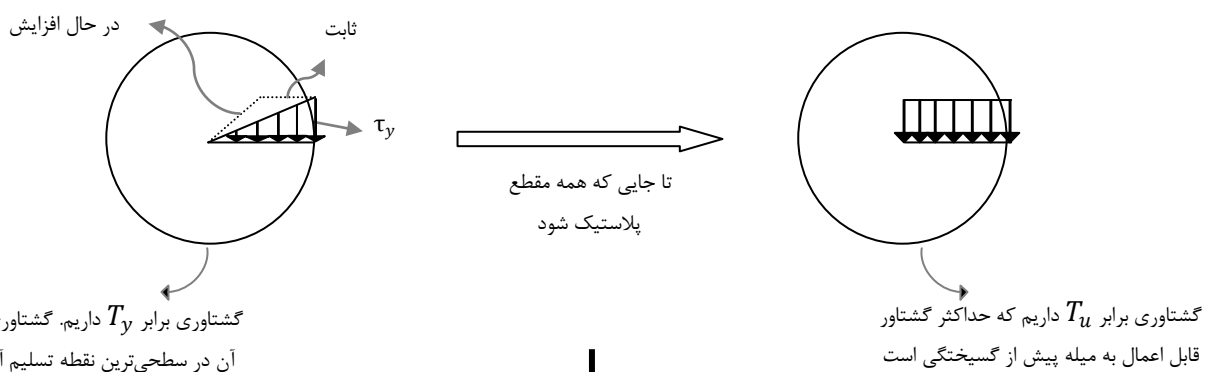


در ادامه مبحث پیچش حالت‌هایی را بررسی می‌کنیم که میله بر اثر تنش‌های برشی وارد مرحله پلاستیک می‌شود.

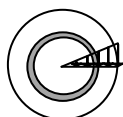
**یادآوری:** سیستم‌های نامعین تغییر طول‌های وابسته دارند که می‌توان ارتباط آن‌ها را از روی هندسه شکل بدست آورد. اگر این سیستم‌ها وارد مرحله پلاستیک شوند هنگام باربرداری باید قسمت‌های پلاستیک و الاستیک با هم به تعادل برسند. در این موارد اغلب تنش پسماند داریم.



اگر سطحی‌ترین تنش برشی میله به تنش تسلیم برسد، میله از سطح به مرکز شروع به پلاستیک شدن می‌کند. از آنجا که تنش برشی سطح نمی‌تواند بیش از این مقدار شود، برای تولید گشتاور اعمال شده تنش‌های داخلی‌تر به ترتیب به تنش تسلیم می‌رسند. هنگامی که مرکزی‌ترین تنش به این مقدار رسید میله منهدم خواهد شد.



$$dT = \tau dA \cdot r = \tau(2\pi r dr) \cdot r$$

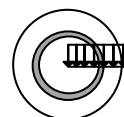


$$\tau = \frac{r}{c} \tau_y$$

$$T_y = \int_0^c 2\pi \left(\frac{r}{c} \tau_y\right) r^2 dr$$

$$T_u = \frac{\pi c^3}{2} \tau_y$$

$$dT = \tau_y dA \cdot r = \tau_y(2\pi r dr) \cdot r$$

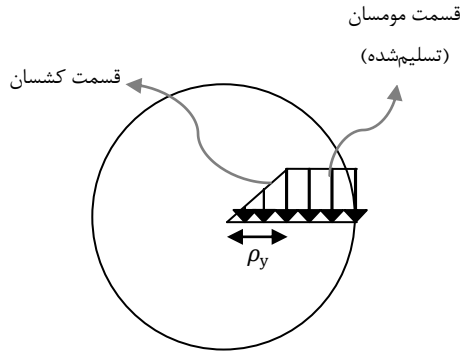


$$T_u = \int_0^c 2\pi \tau_y r^2 dr$$

$$T_u = \frac{2\pi c^3}{3} \tau_y$$

• در حالتی که  $T_y < T < T_u$  باشد بخشی از مقطع، الاستیک و بخش دیگر وارد مرحله پلاستیک شده است.

بررسی حالت  $T_y < T < T_u$ :



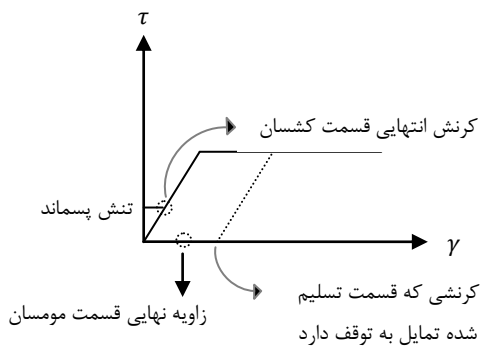
$$T = T_e + T_p$$

$$T_e = \frac{\pi \rho_y^3}{2} \tau_y$$

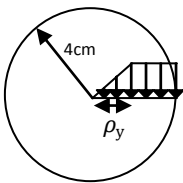
$$T_p = \int_{\rho_y}^c (2\pi r dr) \tau_y r = \frac{2\pi}{3} (c^3 - \rho_y^3) \tau_y$$

$$T = \left( \frac{2\pi}{3} c^3 - \frac{\pi}{6} \rho_y^3 \right) \tau_y$$

حال اگر  $T$  را دوباره صفر کنیم بازگشت تغییر شکل‌های وابسته را خواهیم داشت. بخش الاستیک تمایل به جبران کامل تغییر شکل خود را دارد در حالی که بخش الاستیک دچار تغییر شکل دائمی شده است. در این حالت بخش مومسان قسمتی از تغییر شکل دائمی را تحت تنش جبران می‌کند و بخش کشسان نمی‌تواند کاملاً به حالت اولیه بازگردد بنابراین تنش آن صفر نمی‌شود. بنابراین با این که بار نداریم اما تنش داریم که همان تنش پسماند است.



❖ مثال. اگر  $T = 14 \text{ kNm}$  و  $\tau_y = 120 \text{ MPa}$ ، شعاعی از میله را که هنوز تسلیم نشده بیابید.



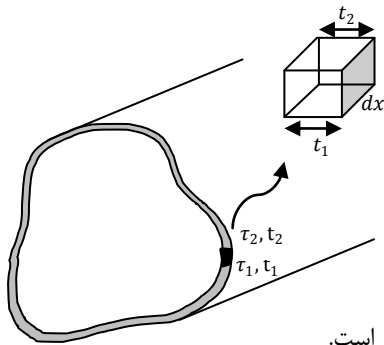
$$T = \left( \frac{2\pi}{3} c^3 - \frac{\pi}{6} \rho_y^3 \right) \tau_y$$

$$14 \times 10^3 = \left( \frac{2\pi}{3} (4 \times 10^{-2})^3 - \frac{\pi}{6} \rho_y^3 \right) \times 120 \times 10^6$$

با حل معادله بالا که بر اساس رابطه‌ای که پیش‌تر آوردیم، بدست آمد، جواب مسئله را خواهیم یافت.



بیچش در لوله‌های جدارنازک:



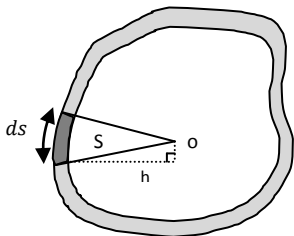
$$\Sigma F_x = 0 \rightarrow \tau_2(t_2 dx) - \tau_1(t_1 dx) = 0$$

$$\tau_1 t_1 = \tau_2 t_2 = \dots = \tau_n t_n$$

به حاصل ضرب برش در ضخامت، جریان برش می‌گوییم که در کل جداره مقدار آن ثابت و برابر با  $f$  است.

$$f = \tau t$$

برای بدست آوردن گشتاور در لوله‌های جدارنازک:



$$dT = dF \cdot h = (\tau dA) \cdot h = (t ds) \cdot \tau h \rightarrow dT = \tau t h ds$$

$$dS = \frac{1}{2} h ds \rightarrow h ds = 2 dS$$

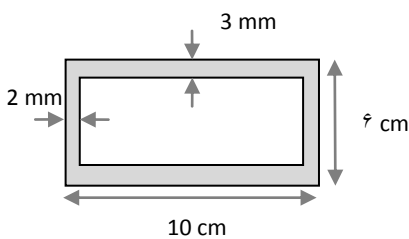
$$dT = 2 \tau t dS = 2 f dS \rightarrow T = 2 A_m f$$

$$f = \frac{T}{2 A_m}$$

$$\tau = \frac{T}{2 A_m t}$$

بنابراین با داشتن مساحت کل جداره ( $A_m$ ) و گشتاور، تنش برشی را در هر نقطه بدست آوریم.

❖ مثال. اگر  $T = 10 \text{ Nm}$  باشد،  $\tau_{max}$  را بدست آورید.



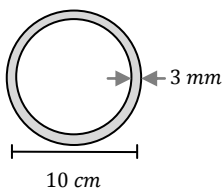
$$A_m \cong 10 \times 6 = 60 \text{ cm}^2$$

$$f = \frac{T}{2 A_m} = \frac{10}{2 \times 60 \times 10^{-4}} = 833 \frac{\text{N}}{\text{m}}$$

$$f = \tau t \rightarrow 833 = \tau_{max} t_{min} = \tau_{max} \times 2 \times 10^{-3}$$

$$\tau_{max} = 416 \times 10^3 \text{ Pa}$$

❖ مثال. اگر  $\tau_y = 80 \text{ MPa}$  باشد،  $T_y$  را حساب کنید.



$$f = \tau t \rightarrow f = 80 \times 10^6 \times 3 \times 10^{-3} = 24 \times 10^4$$

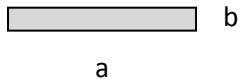
$$f = \frac{T}{2 A_m}, \quad A_m \cong 25 \times 10^{-4} \pi$$

$$T = 1200 \pi \text{ Nm}$$



### بررسی دیگر مقاطع:

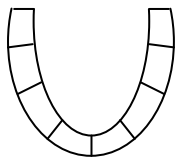
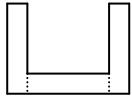
اگر مقطع به صورت مستطیل رانک باشد :



$$\tau_{max} = \frac{T}{c_1 ab^2}, \quad a > b$$

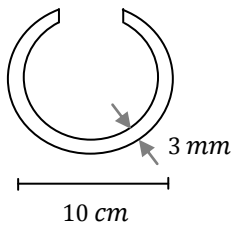
• بستگی به نسبت  $\frac{a}{b}$  دارد که جز معلومات مسئله است.

اشکال زیر را می‌توان به صورت مجموعه‌ای از مستطیل‌ها در نظر گرفت :



$$\rightarrow \tau_{max} = \frac{T}{\sum c_1 ab^2}$$

❖ مثال. اگر  $\tau_y = 80 \text{ MPa}$ ،  $c_1 = \frac{1}{3}$  باشد،  $T_y = ?$



$$\tau_{max} = \frac{T}{1/3 ab^2} \rightarrow 80 \times 10^6 = \frac{T}{1/3 (3 \times 10^{-3})^2 \times 10\pi} \rightarrow T = 73 \text{ Nm}$$

• نکته: با مقایسه دو مثال قبل می‌بینیم تنش تسلیم در لوله جدارنازک در حالت بسته حدود ۳۸۰۰ و در حالت باز ۷۳ نیوتن‌متر است. یعنی لوله‌های جدارنازک بسته در برابر پیچش مقاومت بسیار بیشتری نشان می‌دهند و اغلب از آنها استفاده می‌شود.



نحوه محاسبه زاویه پیچش در لوله‌های جدارنازک:

$$\varphi = \frac{Tl}{c_2 ab^3 G}$$

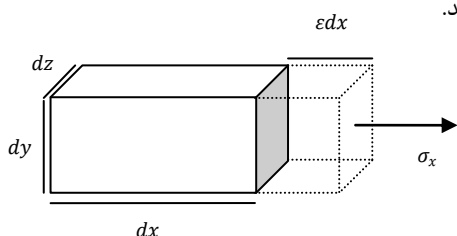
(۱) جدارنازک باز ( $c_2$  جز معلومات مسئله است):

این  $\varphi$  برای طولی از  $l$  است، که در آن ضخامت  $t$  تغییر نمی‌کند

(۲) جدارنازک بسته:

برای بدست آوردن  $\varphi$  در این حالت از قضیه کار و انرژی کمک می‌گیریم. می‌دانیم در بخش الاستیک تنها انرژی مکانیکی از جنس پتانسیل است نه جنبشی چون مسئله را در حال تعادل بررسی می‌کنیم و حرکتی نداریم. به دلیل وجود نیرو و جابجایی در خود جسم کار داریم که به صورت انرژی پتانسیل در جسم ذخیره می‌شود.

نکته: به ازای کرنش‌های داخل جسم کار انجام می‌شود که به آن کار داخلی می‌گویند.



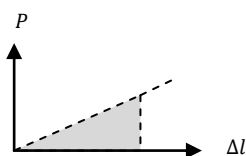
جابجایی  $F = \text{کار داخلی در این المان}$

$$dW = \sigma_x A \cdot \epsilon_x dx = \sigma_x (dydz) \epsilon_x dx = \sigma_x \epsilon_x dx dy dz$$

برای بدست آوردن کار داخلی از این عبارت روی حجم کل انتگرال می‌گیریم. این انتگرال باید برابر با کار خارجی باشد.

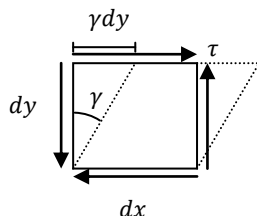
$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_V \sigma_x \epsilon_x dx dy dz &= \frac{\sigma_x^2}{2E} \int_V dx dy dz = \frac{\sigma_x^2}{2E} Al \\ &= \frac{1}{2} \frac{N^2 Al}{A^2 E} = \frac{1}{2} \frac{P^2 l}{EA} = \frac{1}{2} P \Delta l \end{aligned}$$

چون نیرو همیشه به صورت تدریجی وارد می‌شود، نمودارش به صورت زیر است:



$$W = \frac{1}{2} P \Delta l$$

اما تنش موثر در پیچش تنش برشی است:



کار انجام شده در این المان = جابجایی  $F \cdot \frac{1}{2}$

$$\frac{1}{2} \tau (dx dz) \cdot \gamma dy$$

$$\frac{1}{2} \tau \gamma dx dy dz = \frac{1}{2} \frac{1}{G} \tau^2 dx dy dz$$



$$u = \frac{1}{2} \frac{1}{G} l \int \tau^2 dy dz = \frac{l f^2}{2G} \int_A \frac{dy dz}{t^2} = \frac{l f^2}{2G} \int_S \frac{t ds}{t^2}$$

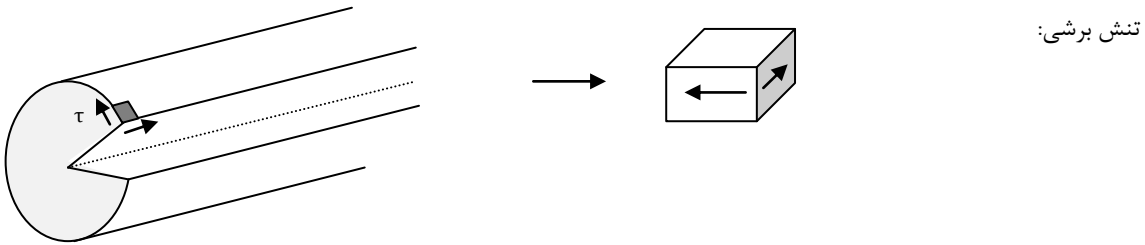
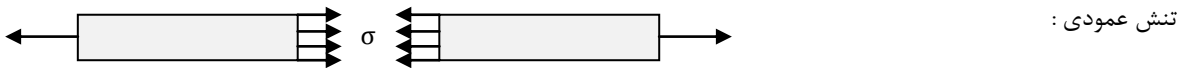




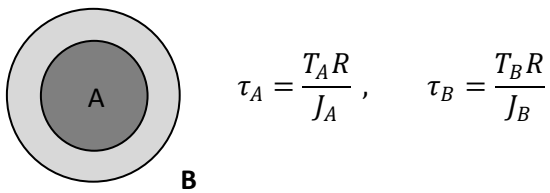
مقدار کار داخلی باید برابر با کار خارجی باشد:

$$\frac{lT^2}{8A_m^2G} \int_S \frac{ds}{t} = \frac{1}{2} T\varphi \quad \longrightarrow \quad \text{کار خارجی} = \text{گشتاور} \times \text{زاویه دوران در امتداد گشتاور}$$

- نکته: اگر  $t$  ثابت باشد از انتگرال بیرون آمده و  $\int_S ds$  برابر محیط جداره است.
- نکته: در هر سطحی که تنش برشی داشته باشیم حتماً تنش روی سطح عمود بر آن هم تنش وجود دارد که از نظر اندازه این دو تنش برشی با هم برابرند. در حالی که در تنش‌های عمودی این گونه نیست.



- نکته: رفتار برخی از مصالح در جهت برشی و طولی یکسان است مانند فولاد و در برخی متفاوت است مانند چوب که در جهت طولی ضعیف‌تر است. این رفتار بستگی به میزان تنش مجاز طولی و تنش مجاز برشی دارد.
- نکته: به طور کلی در بحث پیچش فرض همیشه بر این است که سطح مقطع ما تغییر شکل نمی‌دهد، یعنی اگر دایره است، بعد از پیچش هم دایره باقی می‌ماند.
- نکته: در میله‌های توپر با جنس متفاوت باید دقت کنیم که  $\varphi$  زاویه پیچش در هر دو برابر است ولی  $T$ ها متفاوت است.

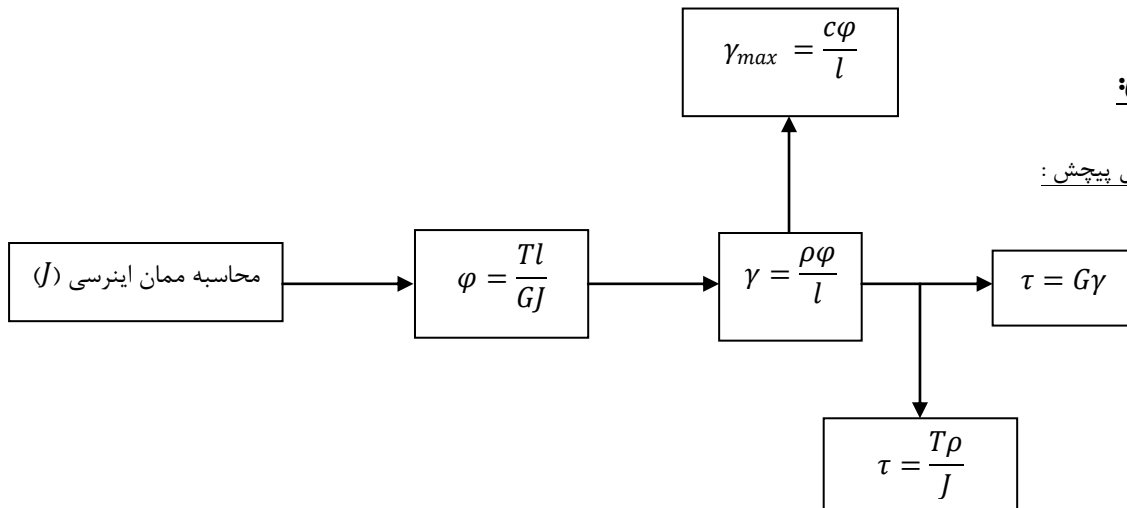


- نکته: دقت شود که در رابطه‌ی  $\tau = G\gamma$  فقط در حالت الاستیک قابل استفاده است.



## خلاصه فصل:

روند کلی حل مسائل پیچش:



نکته: ممان اینرسی مقاطع دایره‌ای توپر برابر با  $J = \frac{\pi c^4}{2}$  است.

در مسائل چرخ و دنده:

$$\begin{cases} T_1 = FR_1 \\ T_2 = FR_2 \end{cases} \rightarrow \frac{T_1}{T_2} = \frac{\varphi_2}{\varphi_1} = \frac{R_1}{R_2}$$

در مسائلی که وارد مرحله مومسان می‌شویم:

$$\begin{cases} T_y = \frac{\pi c^3}{2} \tau_y & \text{میزان گشتاور هنگام شروع به تسلیم} \\ T_u = \frac{2\pi c^3}{3} \tau_y & \text{ماکسیمم میزان گشتاور پیش از انهدام} \end{cases}, \quad T = \frac{4}{3} T_y \left( 1 - \frac{1}{4} \left( \frac{\rho_y}{c} \right)^3 \right)$$

پیچش در عضوهای جدارنازک:

(۱) بسته:

$$f = \tau t \rightarrow \text{جریان برش در طول کل جداره است} \rightarrow f = \frac{T}{2A_m}, \quad \tau = \frac{T}{2A_m t}, \quad \varphi = \frac{lT}{4A_m^2 G} \int \frac{ds}{t}$$

(۲) باز (مجموعه‌ای از مستطیل‌ها):

$$\tau_{max} = \frac{T}{\sum c_1 ab^2}, \quad \varphi = \frac{Tl}{c_2 ab^3 G}$$

