Subject ۹۲,۱۱,۲۷
Date

$$\left(\frac{1+\sqrt{3}}{1+i}\right)^{\frac{5}{4}}$$

$1+i\sqrt{3} \Rightarrow r=2 \quad , \quad tg\,\theta=\sqrt{3} \quad , \quad \theta=\frac{\pi}{3}$

$x+iy$

$e = 2e^{\frac{\pi}{3}i}$

$1+i \Rightarrow r=\sqrt{2} \quad , \quad \theta=\frac{\pi}{4} \quad , \quad e\sqrt{2}\,e^{\frac{\pi}{4}i}$

$$\left(\frac{2e^{\frac{\pi}{3}i}}{\sqrt{2}\,e^{\frac{\pi}{4}i}}\right)^{5} = \frac{2^{5}e^{\frac{5\pi}{3}i}}{2^{\frac{5}{2}}e^{\frac{5\pi}{4}}} = \frac{4\sqrt{2}}{1}\quad e^{\frac{5\pi}{12}i}$$

$$Z^{\frac{1}{4}} = r^{\frac{1}{4}}e^{\frac{2k\pi+\theta}{4}}$$

$$k=0 \Rightarrow (4\sqrt{2})^{\frac{1}{4}} = \frac{5\pi}{48} =$$

$$k=1 \Rightarrow (4\sqrt{2})^{\frac{1}{4}}\,e^{\frac{2\pi+\frac{5\pi}{12}}{4}} = \sqrt[4]{4\sqrt{2}}\,e^{\left(\frac{\pi}{2}+\frac{5\pi}{48}\right)i}$$

$$= \sqrt[4]{4\sqrt{2}}\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}+\frac{5\pi}{48}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{5\pi}{48}\right)\right) = \sqrt[4]{4\sqrt{2}}\left(-\sin\frac{5\pi}{48}+i\cos\frac{5\pi}{48}\right)$$

$$k=2 \Rightarrow (4\sqrt{2})^{\frac{1}{4}}\,e^{\frac{4\pi+\frac{5\pi}{12}}{4}} = \sqrt[4]{4\sqrt{2}}\left(\cos\left(\pi+\frac{5\pi}{48}\right)+i\sin\left(\pi+\frac{5\pi}{48}\right)\right)$$

$$= \sqrt[4]{4\sqrt{2}}\left(-\cos\frac{5\pi}{48}-i\sin\frac{5\pi}{48}\right)$$

$$k=3 \Rightarrow (4\sqrt{2})^{\frac{1}{4}}\,e^{\frac{6\pi+\frac{5\pi}{12}}{4}} = \left(\cos\left(\frac{3\pi}{2}+\frac{5\pi}{48}\right)+i\sin\left(\frac{3\pi}{2}+\frac{5\pi}{48}\right)\right)$$

$$= \sqrt[4]{4\sqrt{2}}\left(+\sin\frac{5\pi}{48}-i\sin\frac{5\pi}{48}\right)$$

$\cos\theta + i\sin\theta$

$$Z = \frac{-\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}}{-\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}}$$

n را چنان بیابید که z^n عدد حقیقی باشد.

$$Z = \frac{\cos(\pi-\frac{\pi}{3}) + i\sin(\pi-\frac{\pi}{3})}{\cos(\pi-\frac{\pi}{4}) + i\sin(\pi-\frac{\pi}{4})}$$

$$r_1 = \sqrt{(-\cos\frac{\pi}{3})^2 + \sin^2\frac{\pi}{3}} = 1$$

$$\theta_1 = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$$

با توجه به در ربع دوم کسینوس منفی و سینوس مثبت است

$$r_2 = \sqrt{(\cos^2\frac{\pi}{4}) + \sin^2\frac{\pi}{4}} = 1 = \theta_2 = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{4}$$

$$Z = \frac{e^{\frac{2\pi}{3}i}}{e^{\frac{5\pi}{4}i}} = e^{(\frac{2\pi}{3} - \frac{5\pi}{4})i} = e^{-\frac{\pi}{4}}$$

$$Z^n = (e^{-\frac{\pi}{4}i})^n = e^{-\frac{n\pi}{4}i} = \cos\frac{-n\pi}{4} + i\sin\frac{n\pi}{4} \xrightarrow{\text{عدد حقیقی } z^n} \sin\frac{n\pi}{4} = 0$$

$$\frac{n\pi}{4} = k\pi$$

$$n = 4k$$

$$\left(\frac{1-i}{1+\sqrt{3}\,i}\right)^{10}$$

$1-i \Rightarrow r = \sqrt{2} \quad \theta = -\frac{\pi}{4}$

$1+\sqrt{3}\,i \Rightarrow r = \quad \theta = \frac{\pi}{3}$

$$\left(\frac{\sqrt{2}e^{-\frac{\pi}{4}i}}{2e^{\frac{\pi}{3}i}}\right) = \frac{2^5 e^{-10\frac{\pi}{4}i}}{2^{10} e^{-10\frac{\pi}{3}i}} = \frac{1}{2^5} e^{\frac{-70\pi}{12}} = \frac{1}{32} e^{-5\pi - \frac{10\pi}{12}} = \frac{1}{32} e^{-\pi - \frac{5\pi}{4}}$$

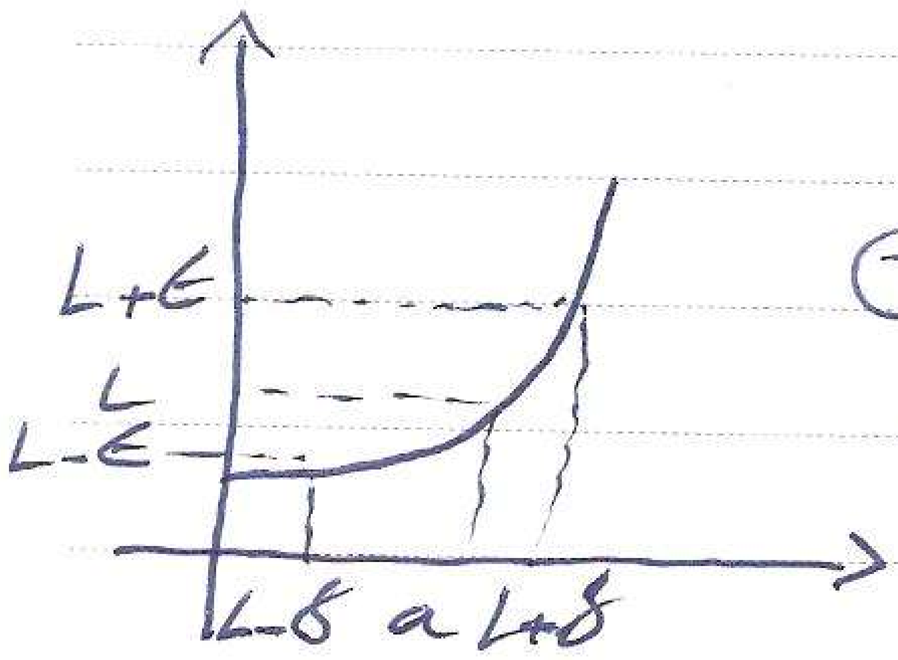
$$= \frac{1}{32}\left[\cos(-\pi - \frac{5\pi}{4}) + i\sin(-\pi - \frac{5\pi}{4})\right] = \frac{1}{32}\left[\cos(\pi + \frac{5\pi}{4}) - i\sin(\pi + \frac{5\pi}{4})\right]$$

$\pi - \frac{\pi}{4}$

$$= \frac{1}{32}\left[\cos(-\frac{\pi}{4})\, i\sin(-\frac{\pi}{4})\right] = \frac{1}{32}\left[\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2}i\right] = \frac{1}{64}(\sqrt{2} + i)$$

حد و پیوستگی: وقتی می‌گوییم $\lim_{x\to a} f(x) = L$ به این مفهوم است که می‌توان به اندازه دلخواه f را به L نزدیک کرد و بیان ریاضی این تعریف این است:

$$\forall \epsilon>0, \exists \delta>0 : 0<|x-a|<\delta \Rightarrow |f(x)-L|<\epsilon$$



کاربرد این تعریف فقط در اثبات قضایای مربوط به حد است

در اکثر موارد برای محاسبه $\lim_{x\to a} f(x)$ کافی است به جای x عدد a را قرار دهیم

مگر آن که به یکی از صورت‌های مبهم زیر برخورد کنیم: $\frac{0}{0}$ و $\frac{\infty}{\infty}$ و $0\times\infty$ و $\infty-\infty$ و 1^∞ و ∞^0 و 0^0

- برای رفع ابهام $\frac{0}{0}$ و $\frac{\infty}{\infty}$ می‌توان از قاعده هوپیتال استفاده کرد.

قضیه (قاعده هوپیتال): اگر $\lim_{x\to a}\frac{f}{g} = \frac{0}{0}$ و تابع g در یک همسایگی محذوف a مخالف صفر باشد داریم:

$$\lim_{x\to a}\frac{f}{g} = \lim \frac{f'}{g'}$$

تذکر: قضیه فوق برای ابهام $\frac{\infty}{\infty}$ نیز به کار می‌رود و همچنین برای حالتی که $x\to a^+$ یا $x\to a^-$ یا $x\to +\infty$ یا $x\to -\infty$ نیز کاربرد دارد.

Subject
Date

- برای رفع ابهام $\frac{0}{0}$ از هم ارزی نیز می‌توان استفاده کرد.

تعریف: اگر $\lim\limits_{x\to a} \frac{f}{g} = 1$ آنگاه f و g را در نقطه a هم ارز نامیده و می‌نویسیم:

$$f \sim g$$

- هم ارزی های ~~...~~ مشهور به شرح زیر اند:

$$\begin{cases} \sin x \sim x - \frac{x^3}{6} \leftarrow x \text{ از} \\ \tan x \sim x + \frac{x^3}{3} \leftarrow x \end{cases}$$

!!!

قبل از محاسبه حد همه جملات هم ارزی با هم ساده شوند مجاز به استفاده از این هم ارزی نیستیم و باید از هم ارزی های دقیق تری استفاده کنیم مثلاً اگر عبارت $\sin x - \tan x$ در حد ظاهر شد به جای هم ارزی های ... استفاده می‌کنیم. تمام هم ارزی های ذکر شده، جملات ابتدائی بسط مک لورن این توابع می‌باشند

1) $\sin u \sim u - \frac{u^3}{6}$

2) $\cos u \sim 1 - \frac{u^2}{2} \iff (1 - \cos u) \sim \frac{u^2}{2}$

3) $\tan u \sim u + \frac{u^3}{3}$

4) $\arcsin u \sim u + \frac{u^3}{6}$

Subject
Date

۵) $\arctan u \sim u - \frac{u^3}{3}$

۶) $\sinh u \sim u + \frac{u^3}{6}$

توان عبارت‌ها حتماً باید $u \to 0$ باشد

۷) $\cosh u \sim 1 + \frac{u^2}{2}$

۸) $\tanh u \sim u - \frac{u^3}{3}$

۹) $e^u \sim 1+u \iff (e^u - 1) \sim u$

۱۰) $\ln(1+u) \sim u \iff \ln u \sim (u-1)$, $u \to 1$

۱۱) $\sqrt[n]{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots} \sim \sqrt[n]{a_n}\left|x + \frac{b}{na}\right|$ (n زوج)

اگر n فرد باشد قدر مطلق به پرانتز تبدیل می‌شود

حالت خاص: $\sqrt{ax^2+bx+c} \sim \sqrt{a}\left|x + \frac{b}{2a}\right|$

مثال: حد بگیرید

1) $\lim_{x \to 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^3} = \lim_{x \to 0} \frac{\left(x + \frac{x^3}{3}\right) - \left(x - \frac{x^3}{6}\right)}{x^3}$

$= \lim_{x \to 0} \frac{\frac{x^3}{2}}{x^3} = \frac{1}{2}$

Subject
Date

۵) $\arctan u \sim u - \frac{u^3}{3}$

۶) $\sinh u \sim u + \frac{u^3}{6}$

تمامی همارزی ها حتما باید $u \to 0$ باشد

۷) $\cosh u \sim 1 + \frac{u^2}{2}$

۸) $\tanh u \sim u - \frac{u^3}{3}$

۹) $e^u \sim 1+u \iff (e^u - 1) \sim u$

۱۰) $\ln(1+u) \sim u \iff \ln u \sim (u-1)$, $u \to 1$

۱۱) $\sqrt[n]{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots} \sim \sqrt[n]{a_n}\left|x + \frac{b}{na}\right|$ (n زوج)

اگر n فرد باشد قدر مطلق به پرانتز تبدیل می‌شود

حالت خاص: $\sqrt{ax^2+bx+c} \sim \sqrt{a}\left|x + \frac{b}{2a}\right|$

مثال: حد بگیرید

1) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^3} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{\left(x + \frac{x^3}{3}\right) - \left(x - \frac{x^3}{6}\right)}{x^3}$

$= \lim\limits_{x \to 0} \frac{\frac{x^3}{2}}{x^3} = \frac{1}{2}$

Subject

Date

۲) $\dfrac{\sin 3x^2}{\ln(\cos(2x^2-x))} = \dfrac{0}{0}$ $\cancel{\lim \dfrac{\cos x + \dots}{\dots}}$

$$\lim_{x\to 0} \frac{3x^2}{\ln\left(1-\frac{(2x^2-x)^2}{2}\right)} = \lim \frac{6x^2}{-\frac{(2x^2-x^2)^2}{2}} = \lim \frac{6x^2}{-(x^2)} = -6$$

در چند جمله‌ای در صورت اگه کوچکترین درجه شود هم ارز است

۳) $$\lim \frac{e^{\sin x}-1}{\ln(x+1)} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

٤) $$\lim_{x\to +\infty} \frac{\ln\left(\frac{x^2+1}{x^2+2}\right)}{e^{1/x} - e^{1/x^2}}$$

۵) $$\lim_{x\to -\infty} \left(\sqrt{25x^2+15x-2} + 5x - 4\right) = \lim_{x\to -\infty} \left(\sqrt{25}\left|x + \frac{15}{50}\right| + 5x - 4\right)$$

$$= \lim_{x\to -\infty} -5\left(x+\frac{15}{50}\right) + 5x - 4 = -\frac{3}{2} - 4$$

$$-5\left(\frac{15}{50}\right) = -\frac{3}{2} \qquad = \frac{-3-8}{2} = -\frac{11}{2}$$

Subject
Date

- اگر در محاسبه حد $\lim u^v$ به یکی از ابهام های 1^∞ یا 0^0 یا ∞^0 برخوردیم به طریق زیر عمل می کنیم.

$$\lim_{x\to a} u^v = \lim_{x\to a} e^{v\ln u}$$

- برای رفع ابهام 1^∞ به علاوه بر روش فوق می توان به روش زیر عمل کرد:

$$\lim_{x\to a} (1+f(x))^{g(x)} = e^{\lim_{x\to a}(f(x)g(x))}$$

$$x\to a \begin{cases} f(x)\to 0 \\ g(x)\to \infty \end{cases}$$

* قرارداد: $e^x = \exp(x)$

مثال:

1) $\lim_{x\to +\infty} \left(\frac{x+1}{x+2}\right)^{\frac{x^2}{x+1}} \quad \underline{1^\infty}$

$$\lim_{x\to\infty} \left(1+\frac{x+1}{x+2}-1\right)^{\frac{x^2}{x+1}} = \lim \exp\left(\frac{x+1}{x+2}-1\right)\frac{x^2}{x+1}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \exp\left(\frac{\overset{-1}{\cancel{x+1-x-2}}}{x+2}\right)\frac{x^2}{x+1} = \lim_{x\to+\infty} \exp\left(\frac{-x^2}{x^2+3x+2}\right)$$

$$= \exp\frac{-1}{1} = e^{-1} = 1/e$$

Subject

Date

۲) $\lim\limits_{x \to 0} (1+\sin x)^{\cot x} \overset{1^\infty}{=} \lim\limits_{x \to 0} \exp(\sin x \times \cot x)$ $\quad 0 \times \infty$

$= \lim\limits_{x \to 0} \exp\left(\cancel{\sin x} \times \dfrac{\cos x}{\cancel{\sin x}}\right) = e^1 = e$

۳) $\lim\limits_{x \to 0} (1+\arctan x)^{\frac{1}{x}} \overset{1^\infty}{=} \lim\limits_{x \to 0} \exp\left(\arctan x \times \dfrac{1}{x}\right)$

$\lim\limits_{x \to 0} \exp\left(\dfrac{x}{x}\right) = e^1 = e$

۴) $A = \lim (x + e^x + e^{2x})^{\frac{1}{x}} \Rightarrow$ $\quad$ مبحث ۵ جلسه هم ارزی

$\Rightarrow \ln A = \ln(x + e^x + e^{2x})^{\frac{1}{x}} \Rightarrow \lim \ln A = \lim \frac{1}{x} \ln(x + e^x + e^{2x})$ (*)

$= \lim \dfrac{\ln(x + e^x + e^{2x})}{x} = \dfrac{\infty}{\infty} \overset{Hop}{\Longrightarrow} \lim \dfrac{1 + e^x + 2e^{2x}}{x + e^x + e^{2x}} \overset{\text{هم ارزی}}{\Longrightarrow} \lim \dfrac{2e^{2x}}{e^{2x}} = 2$

$\overset{2 \Rightarrow (*)}{\Longrightarrow} \lim \ln A = 2 \Rightarrow \lim A = e^2$

Subject $*1^{\infty} \xrightarrow{\text{فقط}} \lim_{x\to 0} u^{v} \xrightarrow{1^{\infty}} \exp(\ln(u-1)\times v)$
Date

$\lim(u^{v}) = \exp\lim v \ln u$ ... $\exp \lim_{x\to a} v \ln u$

۵) $\lim_{x\to \frac{\pi}{4}} (\tan x)^{\tan 2x} = 1^{\infty} \to u^{\tan\frac{\pi}{2}} = u^{\infty}$

$\lim u^{v} = e^{\lim_{x\to a}(u-1)v} \Rightarrow \exp(\lim(u-1)\times v) *$

$* \exp(\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}(\tan x-1)\cdot \tan 2x) \; \exp\lim \frac{\tan x-1}{\cot 2x} = \exp\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{1+\tan^2 x}{-2(1+\cot^2 2x)}$

$\exp\frac{2}{-2(1)} = \exp^{-1} = \boxed{\frac{1}{e}}$

۶) $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} (\sin x)^{\tan x}$ $\quad \lim \tan x(\sin x-1) = \lim \frac{\sin x-1}{\cot x} \xrightarrow{Hop} \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{-(1+\cot^2 x)}$

$\boxed{= 0 \Rightarrow e^{0} = 1}$

۷) $\lim_{x\to+\infty} (\cos\frac{1}{x})^{x^2} = 1^{\infty}$ $\qquad 1-\cos u \sim \frac{u^2}{2}$

$\lim x^2(\cos\frac{1}{x}-1) = \lim \frac{\cos\frac{1}{x}-1}{\frac{1}{x^2}} = \lim \frac{-\frac{(\frac{1}{x})^2}{2}}{\frac{1}{x^2}} = -\frac{1}{2}$

$e^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{e}}$

PaPCO

۵

Subject ۹۲, ۱۲, ٤
Date

۸) $\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{1/x^2} \overset{1^\infty}{=} \exp\left(\lim\left(\frac{\sin x}{x}-1\right)\frac{1}{x^2}\right)$

$\exp\left(\lim \frac{\sin x - x}{x}\times\frac{1}{x^2}\right) = \exp\left(\lim \frac{\left(x-\frac{x^3}{6}\right)-x}{x^3}\right)$

$*\ \sin x \sim x-\frac{x^3}{6}$ $\qquad = \exp\left(-\frac{1}{6}\right) = \boxed{\frac{1}{\sqrt[6]{e}}}$

۹) $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x-1}{x}\right)^{2x-1} = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-1}{x}-1\right)(2x-1)$

$=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x-1-x}{x}\times 2x-1\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{-1}{x}\times 2x-1\right)$

$=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{-2x+1}{x}\right) = -2 \Rightarrow \boxed{L=e^{-2}}$

۱۰) $\lim_{x\to\infty}\left(1+\sin\frac{3}{x}\right)^{x} = \exp\lim\left(1+\sin\frac{3}{x}-1\right)(x)$

$\lim\left(\sin\frac{3}{x}\right)(x) = \frac{\sin\frac{3}{x}}{\frac{1}{x}} = \frac{\frac{3}{x}}{\frac{1}{x}} = 3 \Rightarrow e^{3}$

۱۱) $\lim(\sin x)^{\frac{1}{\ln x}} \overset{0^0}{=} \exp\left(\lim \frac{1}{\ln x}\ln\sin x\right) = \frac{\infty}{\infty}$

$\overset{Hop}{\Longrightarrow} \exp\left(\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{\cos x}{\sin x}}{\frac{1}{x}}\right) = \exp\left(\lim_{x\to 0^+}\frac{x\cos x}{\sin x}\right) = e^1 = e$

PAPCO

Subject
Date

۱۲) $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\frac{e^x-e^{-x}}{2}\right)^{\tan x} = 0^0 \Rightarrow \lim \tan x \ln\left(\frac{e^x-e^{-x}}{2}\right)$

$\lim \frac{\ln\left(\frac{e^x-e^{-x}}{2}\right)}{\cot x} \underset{\frac{\infty}{\infty}}{\overset{Hop}{=}} \frac{\ln(\sinh x)}{\cot x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\frac{\cosh x}{\sinh x}}{\frac{-(1+\cot^2 x)}{1}}$

$= \frac{\cosh x}{(\sinh x)(-1-\cot^2 x)}$ ($-1-\cot^2 x = \frac{-1}{\sin^2 x}$) $= \frac{(\sin^2 x)(\cosh x)}{-\sinh x} = \frac{(x^2)((\cosh x))}{-x} = 0$

$= e^0 = 1$

۱۳) $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(e^{1/x}\right)^{\tan x} = \infty^0$

$\boxed{\lim\limits_{x\to 0} (\tan x \ln e^{1/x}) = \ln \frac{\tan x}{x} = \ln e = 1}$

$l = e^1 = e$

تعریف پیوستگی:

تابع f را در نقطه $x=a$ پیوسته گوییم هرگاه

$\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$

مثال: a و b را چنان بیابید که تابع زیر در $x=0$ پیوسته باشد.

$$f(x) = \begin{cases} (1+\arctan x)^{\frac{1}{x}} + a & x<0 \\ b & x=0 \\ \frac{2\tan x(1-\cos x)}{(\sqrt{x^2+x+1}-1)} & x>0 \end{cases}$$

۷

Subject

Date

$$\lim_{x\to 0^+} f = \lim \frac{2\tan x(1-\cos x)}{\sqrt{x^2+x+1}-1} \quad \frac{0}{0}$$

$$\lim \frac{2x\,\frac{x^2}{2}}{\sqrt{x^2+x+1}-1} \times \frac{\sqrt{x^2+x+1}+1}{\sqrt{x^2+x+1}+1}$$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{2x^3}{x^2+x+1-1} = \lim_{x\to 0^+} \frac{2x^3}{x(x+1)} = 0 \qquad f(0)=b \quad \boxed{b=0}$$

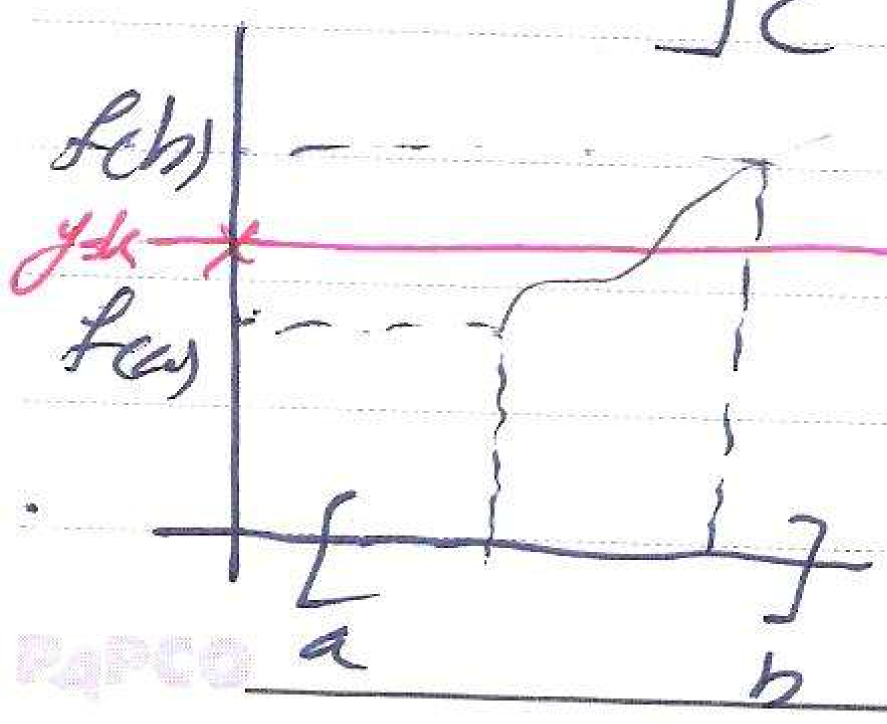
$$\lim_{x\to 0^-} f = \lim (1+\arctan x)^{1/x} + a \overset{1^\infty}{=}$$

$$\exp\left(\lim (\arctan x)\cdot \frac{1}{x}\right) + a = \exp\left(\lim \frac{x}{x}\right)$$

$$= e+a \qquad \boxed{e+a=0 \Rightarrow a=-e}$$

قضیه مقدار میانی: فرض کنید f روی $[a,b]$ پیوسته باشد و k عددی بین $f(a)$ و $f(b)$ باشد در این صورت

$\exists c \in : f(c)=k$



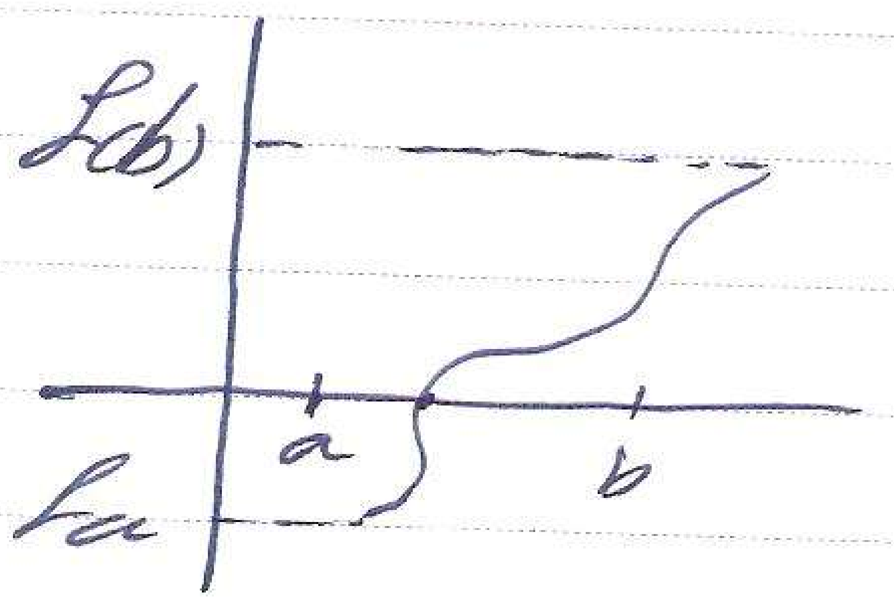
Subject
Date

قضیه بولتزانو:

فرض کنید f روی $[a,b]$ پیوسته باشد $f(a)f(b)<0$ در این صورت:

حداقل یکی موجود است ←

$$\exists c\in(a,b): f(c)=0$$



* از قضیه بولتزانو برای اثبات وجود ریشه معادلات استفاده می‌شود

مثال: نشان دهید معادله $\sin x = x^2 - x - 2$ در $[0,\pi]$ حداقل یک ریشه دارد.

حل: تابع $f(x)=\sin x - x^2 + x + 2$ در $[0,\pi]$ پیوسته است. به علاوه:

$$f(0)f(\pi) = \underbrace{(2)}_{\text{مثبت}}\underbrace{(-\pi^2-\pi+2)}_{\text{منفی}} < 0$$

$$\xRightarrow{\text{قضیه بولتزانو}} \exists c\in(0,\pi): f(c)=0$$

Subject

Date

مثال: نشان دهید معادله $8x^3-12x^2-2x+3=0$

دارای ریشه در فاصله های $[-1,0]$ و $[0,1]$ و $[1,2]$ میباشد علامت ریشه‌ها

را تعیین کنید. تابع $f(x)=8x^3-12x^2-2x+3$ روی $\mathbb{R}$ پیوسته بوده

داریم

x	-1	0	1	2
f	-9	3	-2	15

$$f(-1)f(0)<0 \Longrightarrow \exists c_1\in(-1,0): f(c_1)=0$$

$$f(0)f(1)<0 \Longrightarrow \exists c_2\in(0,1): f(c_2)=0$$

$$f(1)f(2)<0 \Longrightarrow \exists c_3\in(1,2): f(c_3)=0$$

مثال 11) $\lim_{x\to 0^+}(\sin x)^{x^2} \overset{0^0}{=} \exp(\lim x^2 \ln\sin x = \frac{\ln \sin x}{x^{-2}} =$

$= s\ln e = \boxed{-1}) = \frac{1}{e}$

Subject
Date

٢/ $\lim_{x \to 0^+} x^{\sin x} \overset{\circ}{=} \exp(\lim \sin x \ln x) = \ln \frac{\sin x}{x} = \ln e = 1$

$= e$

٣/ $\lim_{x \to +\infty} x^{1/x} \overset{\circ}{=} \lim \frac{1}{x} \ln x = \lim \ln \frac{x}{x}$

٤) $\lim_{x \to 0} \left(\frac{e^x - \cos x}{x}\right)^{1/x}$

Subject

Date

۴) $\lim\limits_{x \to 0^+} x^{x^x}$

۷) $\lim\limits_{x \to 0} (\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$

$\lim (\cos x)^{\frac{2}{\sin x}}$

Subject ۹۲,۱۲,۷
Date

انتگرال نامعین (عکس مشتق) : $\longleftarrow$

فرمول های انتگرال نامعین :

۱) $\int x^n dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1} + c \quad (n \in \mathbb{Q}, n \neq -1)$

۲) $\int \cos x \, dx = \sin x + c$

۳) $\int \sin x \, dx = -\cos x + c$

۴) $\int (1+\tan^2 x)\, dx = \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \int \sec^2 x \, dx = \tan x + c$

۵) $\int (1+\cot^2 x)\, dx = \int \frac{dx}{\sin^2 x} = \int \csc^2 x \, dx = -\cot x + c$

۶) $\int e^x dx = e^x + c$

۷) $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$

۸) $\int \frac{1}{x} dx = \int x^{-1} dx = \ln|x| + c$

۹) $\int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x + c = -\operatorname{arc}\cot x + c$

۱۰) $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + c = -\arccos x + c$

۱۱) $\int \cosh x \, dx = \sinh x + c$

۱۲) $\int \sinh x \, dx = \cosh x + c$

Subject

Date

13) $\int \sec x \tan x \, dx = \sec x + c$

14) $\int \csc x \cot x \, dx = -\csc x + c$

ویژگی های انتگرال :

$$\int a f(x)\, dx = a \int f(x)\, dx$$

$$\int \left(f(x) \pm g(x)\right) dx = \int f(x)\, dx \pm \int g(x)\, dx$$

$$\int a\, dx = ax + c$$

مواظب باشید :

$$\int x^2 \cos x \, dx \neq \frac{x^3}{3} \cdot \sin x$$

$$\int \frac{x^2}{\cos x} dx \neq \frac{\frac{x^3}{3}}{\sin x}$$

مثل بلبل زمل !

$$* \int \sqrt[3]{x^2}\, dx = \int x^{\frac{2}{3}} dx = \frac{1}{\frac{2}{3}+1} x^{\frac{2}{3}+1} + c = \frac{3}{5} x^{\frac{5}{3}} + c$$

$$* \int \frac{dx}{x^5} = \int x^{-5} dx = \frac{1}{-5+1} x^{-5+1} + c = -\frac{1}{4} x^{-4} + c$$

$$* \int \frac{dx}{x \sqrt[4]{x}} = \int x^{-\frac{5}{4}} dx = \frac{1}{-\frac{5}{4}+1} x^{-\frac{5}{4}+1} = -4x^{-\frac{1}{4}} + c$$

Subject
Date

$(a-b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab$

$$* \int \left(2x^2 - \frac{1}{x}\right)^2 dx = \int \left(4x^4 + \frac{1}{x^2} - 4x\right) dx = 4\left(\frac{x^5}{5}\right) - x^{-1} - 4\left(\frac{x^2}{2}\right) + c$$

$$\int \left(\sqrt{x} - \frac{1}{x}\right)^3 dx = \int \left(x^{\frac{3}{2}} - 3x \times \frac{1}{x} + 3\sqrt{x}\left(\frac{1}{x}\right)^2 - \left(\frac{1}{x}\right)^3\right) dx$$

$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$ $= \int \left(x^{\frac{3}{2}} - 3 + 3x^{-\frac{3}{2}} - x^{-3}\right) dx$

$$= \frac{2}{5} x^{\frac{5}{2}} - 3x + 3\left(-2x^{-\frac{1}{2}}\right) - \left(-\frac{1}{2} x^{-2}\right) + c$$

$$* \int \frac{5x\sqrt{x} - 2x^3 + 5}{x^2} dx = \int \left(5x^{-\frac{1}{2}} - 2x + 5x^{-2}\right) dx$$

کسری که صورت چند جمله‌ای و مخرج یک جمله‌ای، مخرج را به صورت تقسیم کنید

$$= 5\left(2x^{\frac{1}{2}}\right) - 2\left(\frac{x^2}{2}\right) - 5x^{-1} + c$$

روش تغییر متغیر برای انتگرال گیری از توابع مرکب:

در این روش از فرمول های زیر استفاده می کنیم:

1) $\int u' u^n dx = \frac{1}{n+1} u^{n+1} + c$ — u = عبارت زیر توان - عبارت زیر رادیکال یا عبارت زیر مخرج

2) $\int u' \cos u \, dx = \sin u + c$

u = کمان مثلثاتی ← ۲، ۳، ۴، ۵، ۱۱، ۱۲، ۱۳، ۱۴

3) $\int u' \sin u \, dx = -\cos u + c$

4) $\int u'(1 + \tan^2 u) \, dx = \dots = \tan u + c$

Subject
Date

۵) $\int u'(1+\cot^2 u)\,dx = \dots = -\cot u + c$

۶) $\int u' e^u\,dx = e^u + c$

۷) $\int u' a^u\,dx = \frac{1}{\ln a} a^u + c$

u = توان تابع نمایی

۸) $\int \frac{u'}{u}\,dx = \ln|u| + c \Longrightarrow$ u مخرج کسر

۹) $\int \frac{u'\,dx}{1+u^2} = \arctan u + c$

۱۰) $\int u' \cosh u\,dx = \sinh u + c$

۱۱) $\int \sinh u\,dx = \cosh u + c$

۱۲) $\int \frac{u'\,dx}{\sqrt{1-u^2}} = \arcsin u + c$

۱۳) $\int u' \sec u \tan u\,dx = \sec u + c$

۱۴) $\int u' \csc u \cot u\,dx = -\csc u + c$

مثال) $\int (x-1)\sqrt{4x^2-8x}\,dx = \frac{1}{8}\int 8(x-1)(4x^2-8x)^{\frac{1}{2}}\,dx$

$u = 4x^2-8x \qquad u' = 8x-8 = 8(x-1)$

تغییر متغیر $= \frac{1}{8}\int u' u^{\frac{1}{2}}\,dx \overset{1}{=} \frac{1}{8}\left(\frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}}\right) + c$

$= \frac{1}{12}(4x^2-8x)^{\frac{3}{2}} + c$

Subject

Date

مراحل کار: انتخاب u و ایجاد u'، تغییر شکل، جواب و فرمول، تغییر مجدد متغیر

$$* \int \frac{\cos x\, dx}{\sqrt[3]{(2-\sin x)^5}} = -\int \underbrace{u'}_{(-\cos x)} \underbrace{u^{-5/3}}_{(2-\sin x)^{-5/3}} dx$$

$u = 2 - \sin x$

$$= -\left(-\frac{3}{2} u^{-2/3}\right) + C$$

$u' = -\cos x$

$$= \frac{3}{2} (2-\sin x)^{-2/3} + C$$

$$= \frac{3}{2\sqrt[3]{(2-\sin x)^2}}$$

$$* \int \frac{1-\sec^2 x}{(x-\tan x)^{15}} = \int u' u^{-15} = -\frac{1}{14} u^{-14} + C$$

$$= -\frac{1}{14} (x-\tan x)^{-14} + C$$

$u = x - \tan x$

$u' = 1 - \sec^2 x$

$$* \int \frac{dx}{(\arccos x)^5 \sqrt{1-x^2}} = -\int \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} (\arccos x)^{-5} dx$$

$$u = (\arccos x)' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad = -\int u' u^{-5} dx$$

$$= \frac{1}{4} u^{-4} + C = \frac{1}{4} (\arccos x)^{-4} + C$$

Subject
Date

$$*\int \frac{(2x+1)\,dx}{(x^2+x+\sqrt{2})\sqrt{\ln(x^2+x+\sqrt{2})}}$$

از اینجا به بعد ترم ۲

$$*\int \frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx = 2\int \overbrace{\frac{1}{2\sqrt{x}}}^{u'}\ \overbrace{\sin\sqrt{x}}^{\sin u}\,dx = -2\cos u + C$$

$$= -2\cos\sqrt{x} + C$$

$u = \sqrt{x}$

$u' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

$$\int x^2\cos x^3\,dx = \frac{1}{3}\int \overbrace{3x^2\cos x^3\,dx}^{u'\cos u\,dx} \overset{②}{=} \frac{1}{3}\sin u + c$$

$u = x^3 \Rightarrow u' = 3x^2$

$$= \frac{1}{3}\sin x^3 + c$$

$$\int \frac{1+\tan^2(\ln x)}{x}\,dx = \int \overbrace{\frac{1}{x}}^{u'}\ \overbrace{(1+\tan^2(\ln x))}^{(1+\tan^2 u)}\,dx$$

$$= \tan(\ln x + c)$$

$u = \ln x$

$u' = \frac{1}{x}$

Subject
Date

$u' \qquad e^u$

* $\displaystyle\int \frac{e^{\sqrt[3]{x^2}}}{\sqrt[3]{x}}\,dx = \frac{3}{2}\int \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}\, e^{\sqrt[3]{x^2}}\,dx = \frac{3}{2}e^{u} + c$

$u = \sqrt[3]{x^2} \qquad\qquad = \frac{3}{2}e^{\sqrt[3]{x^2}} + c$

$u' = \dfrac{2}{3\sqrt[3]{x}}$

* $\displaystyle\int \overset{u'}{\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}}\, \overset{2^u}{2^{\sqrt{x^2-1}}}\,dx = \frac{1}{\ln 2}\, 2^{u} + c = \frac{1}{\ln 2}\, 2^{\sqrt{x^2-1}} + c$

$u = \sqrt{x^2-1}$

$u' = \dfrac{2x}{2\sqrt{x^2-1}}$

* $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{x^2+1} = \frac{1}{2}\int \frac{2x\,dx}{x^2+1} = \frac{1}{2}\int \frac{u'}{u}\,dx = \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + c$

$u = x^2+1$

$u = 2x$

* $\displaystyle\int \tan x\,dx = \int \frac{\sin x}{\cos x}\,dx = -\int \frac{-\sin x}{\cos x}\,dx = -\ln|\cos x| + c$

$u = \cos x$

$u' = -\sin x$

PaPCO

Subject

Date

$$\int \frac{(x-1)\,dx}{x^2-2x+2} = \frac{1}{2}\int \frac{2(x-1)\,dx}{x^2-2x+2} = \frac{1}{2}\int \frac{u'}{u}\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\ln|x^2-2x+2| + c$$

$$u = x^2-2x+1 \Rightarrow u' = 2x-2 = 2(x-1)$$

* — مسائل زیر را یک بار برای همیشه از روش تغییر متغیر حل می‌کنیم و بعد از نتایج آن به عنوان فرمول استفاده می‌کنیم : ←

۱) * $\int \cos(ax+b)\,dx = \frac{1}{a}\int \overset{u'}{a}\,\overset{\cos u}{\cos(ax+b)}\,dx = \frac{1}{a}\sin(ax+b) + c$

$\rightarrow u = ax+b$

$u' = a$

۲) * $\int \sin(ax+b)\,dx = \frac{-1}{a}\cos(ax+b) + c$

۳) * $\int e^{ax+b}\,dx = \frac{1}{a}e^{ax+b} + c$

۴) * $\int \frac{dx}{ax+b} = \frac{1}{a}\ln|ax+b| + c$

Subject
Date

5) * $\int \frac{dx}{a^2x^2+b^2} = \frac{1}{b^2}\int \frac{dx}{\frac{a^2x^2}{b^2}+1} = \frac{1}{b^2}\int \frac{dx}{(\frac{a}{b}x)^2+1}$

از b^2 فاکتور میگیریم

$u = \frac{a}{b}x \Rightarrow u' = \frac{a}{b}$

$= \frac{1}{b^2}\,\frac{b}{a}\int \frac{\frac{a}{b}\,dx}{(\frac{a}{b}x)^2+1}$

$= \frac{1}{ab}\int \frac{u'\,dx}{u^2+1} = \frac{1}{ab}\arctan\frac{a}{b}x + c$

$\int \frac{dx}{4x^2+25} = \frac{1}{10}\arctan\frac{2}{5}x + c$

$a = 2$

$b = 5$

6) * $\int \frac{dx}{\sqrt{b^2-a^2x^2}} = \frac{1}{b}\int \frac{dx}{\sqrt{1-(\frac{a}{b}x)^2}} = \frac{1}{b}\,\frac{b}{a}\int \frac{\frac{a}{b}\,dx}{\sqrt{1-(\frac{a}{b}x)^2}} = \frac{1}{a}\int \frac{u'\,dx}{\sqrt{1-u^2}}$

$= \frac{1}{a}\arcsin\frac{a}{b}x + c$

$\int \frac{dx}{\sqrt{81-36x^2}} = \frac{1}{6}\arcsin\frac{6}{9}x + c$

Subject ۹۲/۱۲/۱۸
Date

$$\int \frac{u'\,dx}{u^2+1} = \arctan u + C$$

مثال
$$\int \frac{x^2\,dx}{1+x^6} = \frac{1}{3}\int \frac{3x^2\,dx}{1+x^6} = \frac{1}{3}\int \frac{u'\,dx}{1+u^2} = \frac{1}{3}\arctan x^3 + C$$

$u = x^3$
$u' = 3x^2$

$$\int \frac{x^5\,dx}{1+x^6} = \frac{1}{6}\ln(1+x^6) + C$$

اگر مشتق مخرج در صورت باشد از فرمول ۵ استفاده می‌کنیم در مثال بالا این طور نبود

$u = 1+x^6$
$u' = 6x^5$

$$\int \frac{\sqrt{x}\,dx}{4+x^3} = \frac{1}{4}\int \frac{\sqrt{x}\,dx}{1+\left(\frac{x^{3/2}}{2}\right)^2} = \frac{1}{4}\cdot\frac{4}{3}\int \frac{\frac{3}{4}\sqrt{x}\,dx}{1+\left(\frac{x^{3/2}}{2}\right)^2} =$$

$4\left(1+\frac{x^3}{4}\right)$

$u = \frac{1}{2}x^{3/2}$

$$\Rightarrow \frac{1}{3}\arctan\left(\frac{x^{3/2}}{2}\right) + C$$

$u' = \frac{3}{4}x^{1/2}$

* دلتا منفی بود روش زیر *

مثال
$$\int \frac{dx}{x^2+4x+5} = \int \frac{dx}{(x^2+4x+4)-4+5} = \int \frac{dx}{(x+2)^2+1} = \int \frac{u'\,dx}{u^2+1}$$

$\Delta = 16-4\cdot 5<0$ $\quad \left(\frac{b}{2}\right)^2$

$u = x+2$
$u' = 1$
$$= \arctan(x+2) + C$$

Subject

Date

$$\int \frac{dx}{x^2+6x+34} = \int \frac{dx}{(x^2+6x+9)-9+34} = \int \frac{dx}{(x+3)^2+25} = \frac{1}{25}\int \frac{dx}{\left(\frac{x+3}{5}\right)^2+1}$$

$$u = \frac{x+3}{5} \qquad u' = \frac{1}{5}$$

$$= \frac{1}{5}\int \frac{\frac{1}{5}\,dx}{\left(\frac{x+3}{5}\right)^2+1} = \frac{1}{5}\arctan\frac{x+3}{5}+c$$

$$\int \frac{dx}{x^2+x+1} = \int \frac{dx}{(x^2+x+\frac{1}{4})-\frac{1}{4}+1} = \int \frac{dx}{(x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}} = \frac{4}{3}\int \frac{dx}{\left(\frac{x+\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\right)^2+1}$$

* برای تکمیل مربع ضریب x را تقسیم بر ۲ کرده به توان دو می رسانیم و اضافه و کم می کنیم

$$= \frac{4}{3}\int \frac{dx}{\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)^2+1} = \frac{4}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\int \frac{\frac{2}{\sqrt{3}}\,dx}{\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)^2+1}$$

$$= \frac{2\sqrt{3}}{3}\arctan\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+c$$

$$\int \frac{dx}{ax^2+bx+c}$$

$\to \Delta < 0$ آرک تانژانت

$\to \Delta > 0$ تجزیه کسر

$\to \Delta = 0$ [illegible] تغییر متغیر

Subject

Date

$$\int \frac{u'\,dx}{\sqrt{1-u^2}} = \arc\sin u + C$$

مثال $$\int \frac{e^x\,dx}{\sqrt{1-e^x}} = \arc\sin e^x$$

$u = e^x$

$u' = e^x$

$$\int \frac{x^3\,dx}{\sqrt{1-x^8}} = \frac{1}{4}\arc\sin x^4 + C$$

$u = x^4$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{5-x^2-4x}} = \int \frac{dx}{\sqrt{5-(x^2+4x+4-4)}} = \int \frac{dx}{\sqrt{9-(x+2)^2}}$$

$$= \frac{1}{9}\int \frac{dx}{\sqrt{1-\left(\frac{x+2}{3}\right)^2}} = \frac{1}{3}\int \frac{\frac{1}{3}\,dx}{\sqrt{1-\left(\frac{x+2}{3}\right)^2}} \qquad \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$$

$u = \frac{x+2}{3}$

$$= \frac{1}{3}\arc\sin \frac{x+2}{3} + C$$

Subject
Date

$$\int \frac{dx}{\sqrt{-2x^2+4x-1}} = \int \frac{dx}{\sqrt{-2(x^2-2x+1-1)-1}} = \int \frac{dx}{\sqrt{1-2(x-1)^2}}$$

$$= \int \frac{dx}{\sqrt{1-(\sqrt{2}(x-1))^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{\sqrt{2}\, dx}{\sqrt{1-(\sqrt{2}(x-1))^2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \arcsin \sqrt{2}(x-1) + C$$

روش جزء به جزء: این روش که معمولاً برای انتگرال گیری از حاصلضرب دو تابع بکار می رود بر فرمول زیر مبتنی است.

$$\int u\, dv = uv - \int v\, du$$

* توجه: u را تابعی انتخاب کنید که مشتق آن از خودش ساده تر باشد
dv را تابعی انتخاب کنید که بتوانید از آن انتگرال بگیرید

مثال:
$$\int x \sin x\, dx = -x\cos x + \sin x + C$$

$$\begin{cases} u = x \\ dv = \sin x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = \int \sin x\, dx = -\cos x \end{cases}$$

PAPCO

Subject
Date

مثال $\int (1-2x)\cos 3x\,dx = \frac{1}{3}(1-2x)\sin 3x + \frac{2}{3}\int \sin 3x\,dx$

$\begin{cases} u = 1-2x \\ dv = \cos 3x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = -2\,dx \\ v = \frac{1}{3}\sin 3x \end{cases}$

$= \frac{1}{3}(1-2x)\sin 3x - \frac{2}{9}\cos 3x + c$

مثال $\int (2x+4)e^{5x}\,dx =$

مثال $\int x^5 \ln x\,dx = \frac{1}{6}x^6 \ln x - \frac{1}{6}\int x^5\,dx = \frac{x^6}{6}\ln x - \frac{1}{6}\left(\frac{1}{6}x^6\right) + c$

$\begin{cases} u = \ln x \\ dv = x^5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{1}{x} \\ v = \int x^5\,dx = \frac{1}{6}x^6 \end{cases}$

مثال $\int \frac{\ln x}{x\sqrt{x}} = \int x^{-3/2}\ln x\,dx = -2x^{-1/2}\ln x + 2\int x^{-3/2}\,dx$

$= -2x^{-1/2}\ln x + 2\left(-2x^{-1/2}\right) + c$

$\begin{cases} u = \ln x \\ dv = x^{-3/2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{1}{x}\,dx \\ v = \int x^{-3/2}\,dx = -2x^{-1/2} \end{cases}$

مثال $\int \sqrt{x}\ln x\,dx$

مثال $\int \ln x \, dx = x \ln x - \int 1 \, dx = x \ln x - x + c$

$$\begin{cases} u = \ln x \\ dv = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{1}{x} dx \\ v = x \end{cases}$$

روش جدول :

برای انتگرال گیری جزء به جزء را به شکل جدول شرح می دهیم

مثال $\int (2x^3 - 3x^2 + 4x - 5) \cos 2x \, dx = \frac{1}{2}(2x^3 - 3x^2 + 4x - 5) \sin 2x$

$+ \frac{1}{4}(6x^2 - 6x + 4) \cos 2x$

$- \frac{1}{8}(12x - 6) \sin 2x - \frac{12}{16} \cos 2x + c$

u، مشتق متوالی	dv، انتگرال متوالی
$2x^3 - 3x^2 + 4x + 5$	$\cos 2x$
$6x^2 - 6x + 4$	$\frac{1}{2} \sin 2x$
$12x - 6$	$-\frac{1}{4} \cos 2x$
12	$-\frac{1}{8} \sin 2x$
0	$\frac{1}{16} \cos 2x$

Subject

Date

مثال

$$\int \arctan x \, dx = x \arctan x - \int \underbrace{\frac{x}{1+x^2}}_{}dx$$

تغییر متغیر

$$\begin{cases} u = \arctan x \\ dv = 1\,dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{1}{1+x^2}\,dx \\ v = x \end{cases}$$

$$= \int \frac{x\,dx}{1+x^2} = \frac{1}{2}\int \frac{2x}{1+x^2}\,dx$$

$u = 1+x^2$

$u' = 2x$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{u'}{u}\,dx = \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C$$

مثال

$$\int \arcsin x \, dx$$

$$\begin{cases} u = \arcsin x \\ dv = 1\,dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx \\ v = x \end{cases}$$

$u'u^{-\frac{1}{2}}$

$$= x\arcsin x - \left(-\frac{1}{2}\right)\int \frac{-2x\,dx}{\sqrt{1-x^2}} =$$

$u = 1-x^2$

$u' = -2x$

$$= x\arcsin x + \frac{1}{2}\left(2(1-x^2)^{\frac{1}{2}}\right) + C$$

Subject

Date

حل $\int e^x \cos x\,dx = e^x \sin x - \int e^x \sin x\,dx$

$\begin{cases} u = e^x \\ dv = \cos x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = e^x\,dx \\ v = \int \cos x\,dx = \sin x \end{cases}$ $\quad \begin{cases} u = e^x & du = e^x\,dx \\ dv = \sin x & v = \int \sin x\,dx = -\cos x \end{cases}$

$= e^x \sin - (-e^x \cos x + \int e^x \cos x\,dx) = e^x \sin x + e^x \cos x - I$

$\text{۲} I = e^x(\sin x + \cos x)$

$I = \frac{1}{\text{۲}} e^x(\sin x + \cos x) + c$

حل $\int \cos(\ln x)\,dx = x\cos(\ln x) + \int \sin(\ln x)\,dx$

$\begin{cases} u = \cos(\ln x) \\ dv = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} du = -\frac{1}{x}\sin(\ln x) \\ v = x \end{cases}$

$= x\cos(\ln x) + (x\sin(\ln x)) - \overbrace{\int \cos(\ln x)\,dx}^{I}$

$\begin{cases} u = \sin(\ln x) \\ dv = dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{1}{x}\cos(\ln x) \\ v = x \end{cases}$

$\text{۲} I = x(\cos(\ln x) + \sin(\ln x))$

$I = \frac{x}{\text{۲}}(\cos(\ln x) + \sin(\ln x)) + c$

Subject
Date ۹۳/۱/۱۷

روش تجزیه کسرها: این روش را که برای انتگرال گیری از توابعی به کار می رود که مخرج آن ها قابل تجزیه است، با چند مثال شرح می دهیم:

$$\int \frac{dx}{x^2-4} = \int \left(\frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+2}\right) dx = \frac{1}{4} \ln|x+2| + c = \frac{1}{4} \ln\left|\frac{x-2}{x+2}\right| + c$$

$$(x-2)(x+2) \qquad \frac{A(x+2)+B(x-2)}{x^2-4} = \frac{1}{x^2-4} \Rightarrow A(x+2)+B(x-2)=1$$

روش دوم $(A+B)x + (2A-2B) = 1$

روش اول

$x=2 \quad 4A=\frac{1}{4}$ $\begin{cases} A+B=0 \\ 2A-2B=1 \end{cases}$ $\Rightarrow -A=B=\frac{1}{4}$ = [illegible]

$x=-2 \quad -4B=\frac{1}{4}$

$$\int \frac{dx}{ax+b} = \frac{1}{a} \ln|ax+b|$$

$$\int \frac{(2x-3)\,dx}{x^2-x-6} = \int \frac{(2x-3)\,dx}{(x-3)(x+2)} = \frac{3}{5} \ln|x-3| + \frac{7}{5} \ln|x+2| + c$$

$A(x+2)+B(x-3) = 2x-3$

$x=-2 \quad -5B=-7 \quad B=\frac{7}{5}$

$x=3 \quad 5A=3 \quad A=\frac{3}{5}$

$$\int \frac{dx}{81x^2-25} = \int \left(\frac{A}{9x-5} + \frac{B}{9x+5}\right) dx$$

PAPCO

Subject

Date

$$\int \frac{dx}{6x^2-x-1} = \int \left(\frac{A}{2x-1}+\frac{B}{3x+1}\right)dx =$$

$$ax^2+bx+c = a(x-x_1)(x-x_2)$$

ریشه‌ها x_1, x_2

$$6x^2-x-1, \quad \Delta = 1+24 = 25 \Rightarrow x = \frac{1\pm 5}{12} \;<\; \begin{matrix}\frac{1}{2}\\ -\frac{1}{3}\end{matrix}$$

۲ ریشه $\quad 6\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x+\frac{1}{3}\right) = (2x-1)(3x+1)$

$$\int \frac{(3x^2+7)\,dx}{x^3+x^2+4x+4} = \int\left(\frac{A}{x+1}+\frac{Bx+C}{x^2+4}\right)dx = 2\ln|x+1| + \frac{1}{2}\int\frac{2x\,dx}{x^2+4} - \int\frac{1}{x^2+4}dx =$$

$x=\pm1$, $x=\pm2$ اعداد را

را در معادله در بسط قرار دهیم

را ریشه $x=-1$ یافتیم

$x=-1$

$x-a = x+1$

$$x^3+x^2+4x+4 \,\big/\, x+1 = x^2+4$$

$$A(x^2+4)+(x+1)(Bx+C) = 3x^2+7$$

$x=-1$: $5A = 10$, $A=2$

$x=0$: $4A+C = 7$, $C=-1$

$x=1$: $10+2(B-1) = 10$, $B-1=0$, $B=1$

$$= 2\ln|x+1| + \frac{1}{2}\ln(x^2+4) - \frac{1}{2}\arctan\frac{x}{2} + C$$

$$\int \frac{dx}{x^5+x^4-2x^3-2x^2+x+1}$$ تجزیه کنیم

$$= \int \frac{dx}{(x-1)^2(x+1)^3} = \int\left(\frac{A}{(x-1)^2}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{(x+1)^3}+\frac{D}{(x+1)^2}+\frac{E}{x+1}\right)dx$$

PaPCO

Subject
Date

_ انتگرال های مثلثاتی

توان های متعلق ازx sin و cos

توان های فرد

$n=1 \quad \int \sin x\,dx = -\cos x + C \qquad \int \cos x\,dx = \sin x + C$

$n=3 \quad \int \sin^3 x\,dx = \int \sin^2 x(\sin x\,dx) = -\int (1-\cos^2 x)(-\sin x\,dx)$

$u=\cos x$
$du=-\sin x\,dx$

$= -\int (1-u^2)\,du = -u + \frac{u^3}{3} + C = -\cos x + \frac{\cos^3 x}{3} + C$

$n=5 \quad \int \cos^5 x\,dx = \int \cos^4 x(\cos x\,dx) = \int (1-\sin^2 x)^2(\cos x\,dx)$

$u=\sin x$
$du=\cos x\,dx$

$= \int (1-u^2)^2\,du = \int (1-2u^2+u^4)\,du = u - \frac{2}{3}u^3 + \frac{1}{5}u^5 + C$

$= \sin x - \frac{2}{3}\sin^3 x + \frac{1}{5}\sin^5 x + C$

توان های زوج

* روش کاهش توان از فرمول های زیر استفاده می کنیم:

$$\begin{cases} \cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2} \\ \sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2} \end{cases}$$

(فرمول های طلایی)

Subject

Date

$$\int \sin^2 x\,dx = \frac{1}{2}\int (1-\cos 2x)\,dx = \frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{2}\sin 2x\right) + c$$

$$\int \cos^4 x\,dx = \int (\cos^2 x)^2\,dx = \frac{1}{4}\int (1+\cos 2x)^2\,dx$$

$$= \frac{1}{4}\int (1 + 2\cos 2x + \cos^2 2x)\,dx = \frac{1}{4}\left(x + \sin 2x + \int \frac{1+\cos 4x}{2}\,dx\right) =$$

$$\frac{1}{4}x + \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{8}\left(x + \frac{1}{4}\sin 4x\right) + c$$

توان های مختلف tan و cot

$$\int \tan^n x\,dx$$

$$n=1 \quad \int \tan x\,dx = \int \frac{\sin x}{\cos x}\,dx = -\int \frac{u'}{u}\,dx = -\ln|\cos x| + c$$

$$n=2 \quad \int \tan^2 x\,dx = \int (\tan^2 x + 1 - 1)\,dx = \tan x - x + c$$

$$n=3 \quad \int \tan^3 x\,dx = \int (\overbrace{\tan^3 x + \tan x}^{\tan x(\tan^2 x+1)} - \tan x)\,dx = \frac{1}{2}\tan^2 x + \ln|\cos x| + c$$

$$n=4 \quad \int \tan^4 x\,dx = \int (\underbrace{\tan^4 x + \tan^2 x - \tan^2 x - 1 + 1}_{\tan^2 x(\tan^2 x+1) - (\tan^2 x+1) + 1}) =$$

$$= \frac{1}{3}\tan^3 x - \tan x + x + c$$

Subject
Date

$$+\tan x - \tan x$$

$$n=7 \quad \int \tan^7 x\,dx = \int \tan^7 x + \tan^5 x - \tan^5 x - \tan^3 x - \tan x + \tan^3 x$$

$$= \int \underbrace{\tan^5 (\tan^2 x + 1)}_{u^5 u'} - \underbrace{\tan^3 x (\tan^2 x + 1)}_{u^3 u'} + \underbrace{\tan x (\tan^2 x + 1)}_{u u'} - \tan x$$

$u = \tan x$

$du = \tan^2 + 1 \quad = \frac{1}{6}\tan^6 x - \frac{1}{4}\tan^4 x + \frac{1}{2}\tan^2 x + \ln|\cos x| + C$

توان های مختلف sec و csc

$$\sec^2 x = 1 + \tan^2 x$$

$$\int \sec^2 x\,dx = \tan x + C$$

$$\int \sec^4 x\,dx = \int (\sec^2 x)^2\,dx = \int (1+\tan^2 x)^2 = \int (1 + 2\tan^2 x + \tan^4 x)\,dx$$

$$\tan^2 x(\tan^2 x + 1)$$

$$= x + 2\int (\tan^2 x + 1 - 1)\,dx + \int (\tan^4 x + \tan^2 x - \tan^2 x - 1 + 1)$$

$$= x + 2(\tan x - x) + \frac{1}{3}\tan^3 x - \tan x + x + C = \tan x + \frac{1}{3}\tan^3 x + C$$

* تا این فصل مسئله را به توان های مختلف تانژانت تبدیل می کنیم.

توان یک

$$\int \sec x\,dx = \int \frac{\sec x(\sec x + \tan x)}{\sec x + \tan x} = \int \frac{\sec^2 x + \sec x \tan x}{\sec x + \tan x}\,dx$$

$$= \ln|\sec x + \tan x| + C$$

Subject

Date

$$\int \sec^3 x\,dx = \int \sec x \sec^2 x\,dx = \sec x \tan x - \int \sec x(\tan^2 x)\,dx$$

$$\boxed{\begin{cases} u = \sec x \\ dv = \sec^2 x\,dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \sec x \tan x \\ v = \int \sec^2 x\,dx = \tan x \end{cases}}$$

$$= \sec x \tan x - \int \sec^3 x\,dx - \int \sec x\,dx$$

$$\Rightarrow 2\int \sec^3 x\,dx = \sec x \tan x + \ln|\sec x + \tan x|$$

$$\int \sec^3 x\,dx = \frac{1}{2}\left(\sec x \tan x + \ln|\sec x + \tan x|\right) + c$$

* برای محاسبه انتگرال حاصلضرب های سینوسی و کسینوسی از فرمول های زیر استفاده می‌کنید:

$$\sin a \cos b = \frac{1}{2}[\sin(a+b) + \sin(a-b)]$$

$$\cos a \cos b = \frac{1}{2}[\cos(a+b) + \cos(a-b)]$$

$$\sin a \sin b = -\frac{1}{2}[\cos(a+b) - \cos(a-b)]$$

مثال: $\int \sin 2x \cos 3x\,dx = \frac{1}{2}\int (\sin 5x - \sin x\,dx) = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{5}\cos 5x - \cos x\right) + c$

مثال: $\int \cos 5x \cos 7x\,dx = \frac{1}{2}\int (\cos 12x - \cos 2x)\,dx = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{12}\sin 12x - \frac{1}{2}\sin 2x\right) + c$

مثال: $\int \sin 5x \sin 3x\,dx = -\frac{1}{2}\int (\cos 8x - \cos 2x)\,dx = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{8}\sin 8x - \frac{1}{2}\cos 2x\right) + c$

Subject ۹۳,۱,۲۴ Date

۹۳,۱,۱۷ غیبت کردی گرفتم *

انتگرال گیری به کمک جانشانی مثلثاتی :

انتگرال شامل	تغییر متغیر	استفاده از اتحاد	دیفرانسیل
$\sqrt{a^2-x^2}$	$x=a\sin\theta$	$1-\sin^2\theta=\cos^2\theta$	$dx=a\cos\theta\, d\theta$
$\sqrt{a^2+x^2}$	$x=a\tan\theta$	$1+\tan^2\theta=\sec^2\theta$	$dx=a\sec^2\theta\, d\theta$
$\sqrt{x^2-a^2}$	$x=a\sec\theta$	$\sec^2\theta-1=\tan^2\theta$	$dx=a\sec\theta\tan\theta$

مثال

$$\int\frac{\sqrt{9-x^2}}{x^2}dx=\int\frac{\sqrt{9-9\sin^2\theta}}{9\sin^2\theta}3\cos\theta\, d\theta=\int\frac{3\cos\theta}{9\sin^2\theta}3\cos\theta\, d\theta$$

$x=3\sin\theta \quad dx=3\cos\theta\, d\theta$

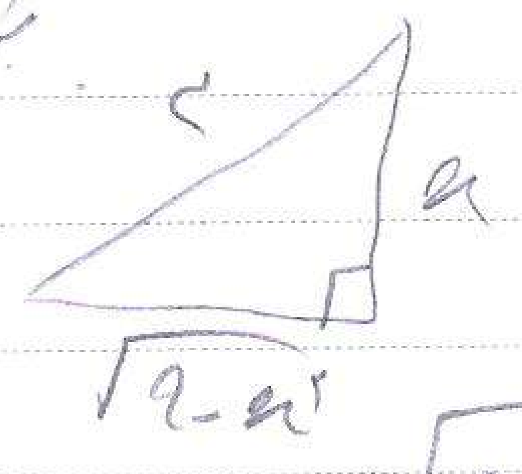
$$=\int\cot^2\theta\, d\theta=\int(\cot^2\theta+1-1)\, d\theta$$

$\sin\theta=\frac{x}{3}$

$\theta=\arcsin\frac{x}{3}$

$$=-\cot\theta-\theta+C=-\frac{\sqrt{9-x^2}}{x}-\arcsin\frac{x}{3}+C$$

برای تبدیل θ به x ← با sin کار داریم ـ بحث تشبیهی



$$\cot\theta=\frac{\text{ضلع مجاور}}{\text{ضلع مقابل}}=\frac{\sqrt{9-x^2}}{x}$$

Subject
Date

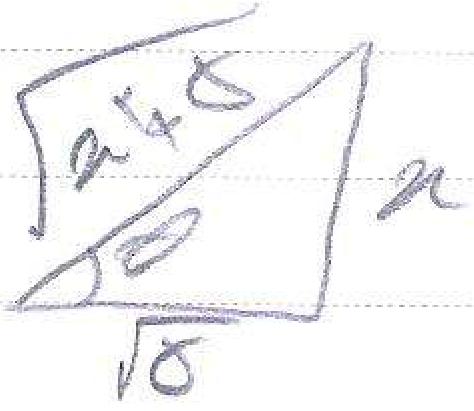
$\tan^2+1=\sec^2$

مثال $\int\sqrt{x^2+5}\,dx=\int\sqrt{5\tan^2\theta+5}\,\sqrt{5}\sec^2\theta\,d\theta$

$x=\sqrt{5}\tan\theta$

$dx=\sqrt{5}\sec^2\theta\,d\theta$

$\tan=\frac{x}{\sqrt{5}}=\frac{\text{ضلع مقابل}}{\text{ضلع مجاور}}$



$\ln|\sec\theta+\tan\theta|+c$

$=\int 5\sec^3\theta\,d\theta=5\int\sec^3\theta\,d\theta=5\left(\frac{1}{2}\sec\theta\tan\theta+\frac{1}{2}\ln|\sec\theta+\tan\theta|\right)+c$

$=\frac{5}{2}\,\frac{\sqrt{x^2+5}}{\sqrt{5}}\times\frac{x}{\sqrt{5}}+\frac{5}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{x^2+5}}{\sqrt{5}}+\frac{x}{\sqrt{5}}\right|+c$

$=\frac{x\sqrt{x^2+5}}{2}+\frac{5}{2}\ln\left|\sqrt{x^2+5}+x\right|+c'$

مثال $\int\frac{dx}{x^3\sqrt{x^2-9}}=\int\frac{3\sec\theta\tan\theta\,d\theta}{27\sec^3\theta\sqrt{9\sec^2\theta-9}}=\int\frac{\sec\theta\tan\theta\,d\theta}{9\sec^3\theta\tan\theta}$

$\sec^2\theta$

$x=3\sec\theta$

$dx=3\sec\theta\tan\theta$

$\sec\theta=\frac{1}{\cos\theta}=\frac{x}{3}$

Subject
Date

$$= \frac{1}{9}\int \cos^2\theta \, d\theta = \frac{1}{9}\int \frac{1+\cos 2\theta}{2}\, d\theta$$

$$2\sin\theta\cos\theta$$

$$= \frac{1}{18}\left(\theta + \frac{1}{2}\sin 2\theta\right) + C$$

$$= \frac{1}{18}\left(\operatorname{arcsec}\frac{x}{3} + \frac{\sqrt{x^2-9}}{x}\cdot\frac{3}{x}\right) + C$$

تمرین

الف) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-25}}$ ب) $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{4-x^2}}$

ج) $\frac{dx}{(4-x^2)^{\frac{3}{2}}}$ د) $\sqrt{1-x^2}\ \ x^3 dx$

- انتگرال گیری از توابع گویای $\sin$ و $\cos$ به کمک $\tan$ نصف کمان :

با تغییر متغیر $Z = \tan\frac{x}{2}$ خواهیم داشت :

$$dZ = \frac{1}{2}\left(1+\tan^2\frac{x}{2}\right)dx \quad \begin{cases} \cos x = \dfrac{1-\tan^2\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}} = \dfrac{1-Z^2}{1+Z^2} \\ \sin x = \dfrac{2\tan\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}} = \dfrac{2Z}{1+Z^2} \\ dx = \dfrac{2dZ}{1+Z^2} \end{cases}$$

Subject

Date

حل

$$\int \frac{dx}{1-\sin x+\cos x} = \int \frac{\frac{2dz}{1+z^2}}{1-\frac{2z}{1+z^2}+\frac{1-z^2}{1+z^2}} = \int \frac{\frac{2dz}{\cancel{1+z^2}}}{\frac{1+z^2-2z+1-z^2}{\cancel{1+z^2}}}$$

$$= \int \frac{2dz}{2-2z} = \int \frac{dz}{1-z} = -\ln|1-z|+c$$

$$= -\ln|1-\tan\tfrac{x}{2}|+c$$

حل

$$\int \frac{dx}{1+\sin x} = \int \frac{\frac{2dz}{1+z^2}}{1+\frac{2z}{1+z^2}} = \int \frac{\frac{2dz}{\cancel{1+z^2}}}{\frac{1+z^2+2z}{\cancel{1+z^2}}}$$

$$= \int \frac{2dz}{(1+z)^2} = 2\int (1+z)^{-2}\,dz = -2(1+z)^{-1}+c$$

$$= -2(1+\tan\tfrac{x}{2})^{-1}+c$$

Subject

Date

$$\int \frac{3\,dx}{7+8\cos x} = \int \frac{\frac{3(2\,dz)}{1+z^2}}{7+8\left(\frac{1-z^2}{1+z^2}\right)} = \int \frac{\frac{6\,dz}{1+z^2}}{\frac{7+7z^2+8-8z^2}{1+z^2}}$$

$$= \int \frac{6\,dz}{15-z^2}$$

$$= 6\int \left(\frac{A}{\sqrt{15}-z} + \frac{B}{\sqrt{15}+z} \right) dz = \frac{6}{2\sqrt{15}} \left(-\ln|\sqrt{15}-z| + \ln|\sqrt{15}+z| \right)$$

$$= \frac{6}{2\sqrt{15}} \ln\left| \frac{\sqrt{15}+\tan\frac{x}{2}}{\sqrt{15}-\tan\frac{x}{2}} \right| + c$$

$A(\sqrt{15}+z)+B(\sqrt{15}-z)=1$

$z=\sqrt{15} \quad 2\sqrt{15}\,A=1 \quad A=\frac{1}{2\sqrt{15}}$

$z=-\sqrt{15} \quad 2\sqrt{15}\,B=1 \quad B=\frac{1}{2\sqrt{15}}$

$$\int \frac{dx}{\sin x - \cos x + 2}$$

Subject

Date

انتگرال توابع رادیکالی

حل

$$\int \frac{\sqrt{x}\,dx}{1+\sqrt[3]{x}} = \int \frac{t^3(6t^5\,dt)}{1+t^2} = 6\int \frac{t^8\,dt}{1+t^2}$$

$x = t^6$ $\boxed{\text{فرض کنیم } \text{ک.م.م} = 6}$

$dx = 6t^5\,dt$

توان مخرج از صورت کوچکتر تقسیم می‌کنیم

$$= 6\int \left(t^6 - t^4 + t^2 - 1 + \frac{1}{1+t^2}\right) dt$$

$$\begin{array}{l|l} t^8 & t^2+1 \\ \hline -t^8 - t^6 & t^6 - t^4 + t^2 - 1 \\ -t^6 & \\ +t^6 + t^4 & \\ t^4 & \\ -t^4 - t^2 & \end{array}$$

$$6\left(\frac{t^7}{7} - \frac{t^5}{5} + \frac{t^3}{3} - t + \arctan t\right) + c$$

$$6\left(\frac{\sqrt[6]{x^7}}{7} - \frac{\sqrt[6]{x^5}}{5} + \frac{\sqrt[6]{x^3}}{3} - \sqrt[6]{x} + \arctan \sqrt[6]{x}\right) + c$$

حل

$$\int \frac{\sqrt{x}\,dx}{1+\sqrt[4]{x^3}} = \int \frac{t^2(4t^3\,dt)}{1+t^3} = 4\int \frac{t^5}{1+t^3}\,dt$$

فرض کنیم ک.م.م $= 4$

$x = t^4$

$dx = 4t^3\,dt$

$$= 4\int \left(t^2 - \frac{1}{3}\,\frac{3t^2}{1+t^3}\right) dt$$

$$= 4\left(\frac{1}{3}t^3 - \frac{1}{3}\ln|1+t^3|\right) + c$$

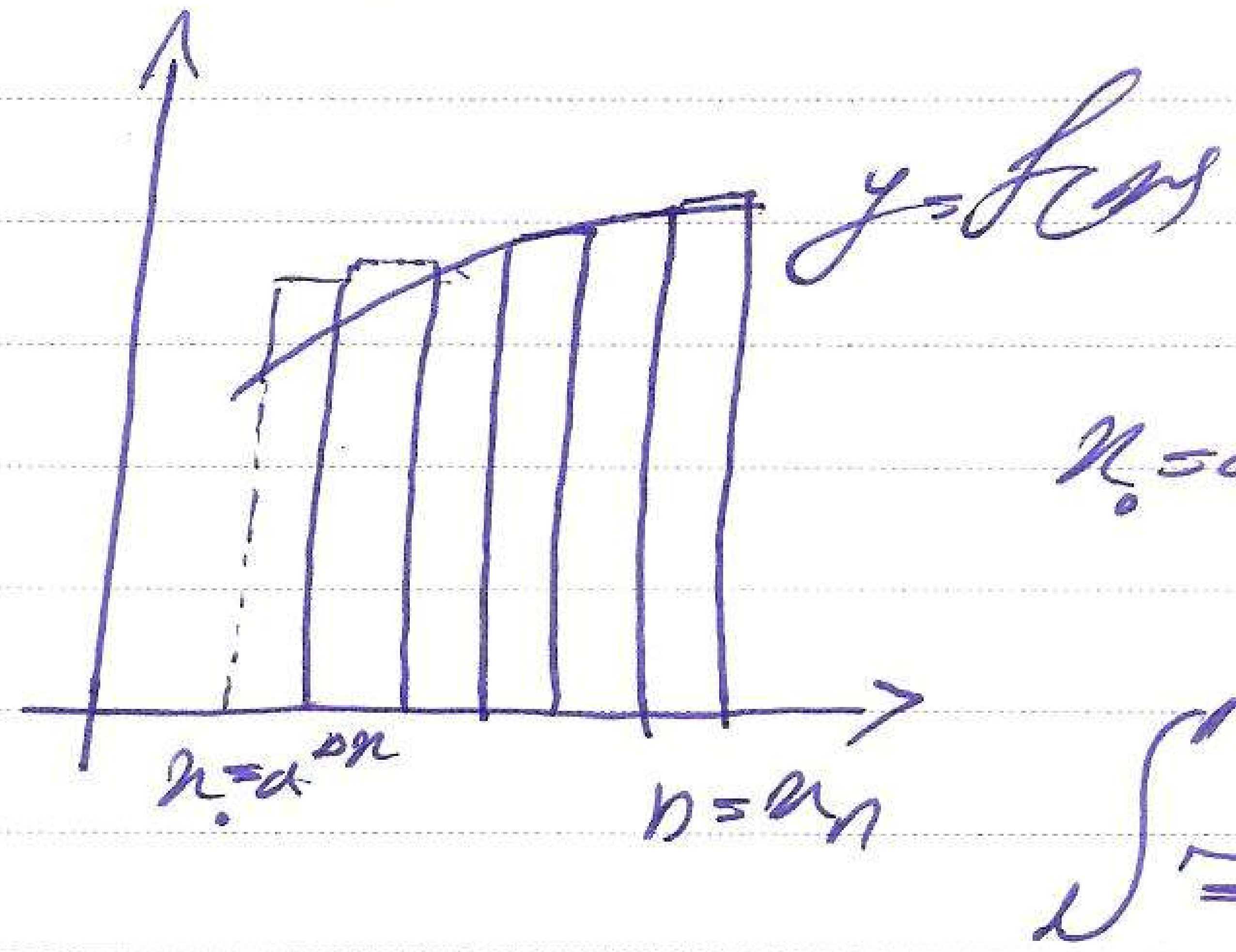
$$\begin{array}{l|l} t^5 & t^3+1 \\ \hline -t^5 - t^2 & t^2 \\ -t^2 & \end{array}$$

$$= \frac{4}{3}\sqrt[4]{x^3} - \frac{1}{3}\ln|1+\sqrt[4]{x^3}| + c$$

انتگرال معین

مجموع ریمان:

برای محاسبه سطح زیر نمودار منحنی پیوسته و مثبت $y=f(x)$ در بازه $[a,b]$ محدود به محور x این بازه را به n قسمت مساوی تقسیم کرده و n نقطه به شرح مقابل انتخاب کنیم مجموعه مساحت های مستطیل هایی که با عرض Δx و طول $f(x_i)$ رسم شده اند تقریبی است می شود که اگر n زیاد شده و به ∞ میل کند این عدد به سطح واقعی زیر نمودار تبدیل می شود



$$\Delta x = \frac{b-a}{n}$$

$$x_0 = a < \underset{x_1}{a+\Delta x} < \underset{x_2}{a+2\Delta x} < \dots = b$$

$$S \simeq \sum_{i=1}^{n} \Delta x \, f(x_i)$$

این سیگما را مجموعه ریمان مینامیم

Subject

Date

در حالتی که برای تابع پیوسته f ، $\lim\limits_{n\to\infty}\sum \Delta x f(x_i)$ متناهی باشد آن را

بر $[a,b]$ انتگرال پذیر نامیده و مقدار حد را $\int_a^b f(x)\,dx$ نمایش می دهیم

برای محاسبه $\int_a^b f(x)\,dx$ کافی است تابع اولیه برای f را بیابیم و بنویسیم

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

کاربرد در محاسبه حد :

در اینجا بازه $[a,b]$ را بازه $[0,1]$ فرض می کنیم :

$$\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{1}{n}$$

$$x_i = a + i\Delta x = \frac{i}{n}$$

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} \Delta x f(x_i) = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} f(i/n) = \int_0^1 f(x)\,dx$$

Subject

Date

مثال الف

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{(n+1)^3}+\frac{2n}{(n+2)^3}+\dots+\frac{n^2}{(n+n)^3}\right)$$

$$=\lim \frac{n^2}{n^3}\left(\frac{1/n}{(1+1/n)^3}+\frac{2/n}{(1+2/n)^3}+\dots+\frac{n/n}{(1+n/n)^3}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}f\left(\frac{i}{n}\right)\qquad f(x)=\frac{x}{(1+x)^3}$$

$$=\int_0^1\frac{x}{(1+x)^3}\,dx=\int_1^2\frac{u-1}{u^3}\,du=\int_1^2\left(u^{-2}-u^{-3}\right)du$$

$1+x=u\to x=u-1$

$dx=du$

$$=-u^{-1}+\frac{1}{2}u^{-2}\Big]_1^2$$

$$=\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{8}\right)-\left(-1+\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{8}$$

ب مثال

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\left(\frac{1}{\sqrt{n+1}}+\frac{1}{\sqrt{n+2}}+\dots+\frac{1}{\sqrt{n+n}}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\times\frac{1}{\sqrt{n}}\left(\frac{1}{\sqrt{1+1/n}}+\frac{1}{\sqrt{1+2/n}}+\dots+\frac{1}{\sqrt{1+n/n}}\right)$$

$$=\lim\frac{1}{n}\sum\frac{1}{\sqrt{1+i/n}}=\int_0^1\frac{1}{\sqrt{1+x}}\,dx=\int(1+x)^{-\frac{1}{2}}dx$$

$$=2(1+x)^{\frac{1}{2}}\Big]_0^1=2\sqrt{2}-2$$

Subject
Date

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2+1}+\frac{2}{n^2+1}+\dots+\frac{n}{n^2+n^2}\right)$$

$$=\lim\frac{n}{n^2}\lim\frac{1/n}{1+(1/n)^2}+\frac{2/n}{1+(2/n)^2}+\dots+\frac{n/n}{1+(n/n)^2}$$

$$=\lim\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{i/n}{1+(i/n)^2}=\int_0^1\frac{x}{1+x^2}dx$$

$$=\frac{1}{2}\ln(1+x^2)\Big]_0^1=\frac{1}{2}(\ln 2-\ln 1)$$

$$=\frac{1}{2}\ln 2$$

Subject ۹۳/۱/۳۱
Date

قضیه اول اساسی حساب دیفرانسیل و انتگرال:

$$\frac{d}{dx}\left(\int_{g(x)}^{h(x)} f(t)\,dt\right) = f(h(x)).h'(x) - f(g(x)).g'(x)$$

قضیه دوم اساسی حساب دیفرانسیل و انتگرال:

فرض کنید f روی $[a,b]$ پیوسته و F یک تابع اولیه f باشد در این صورت:

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

مثال/ مطلوب است محاسبه هر یک از حدهای زیر (به کمک قاعده هوپیتال)

الف)
$$\lim_{x\to 0^-}\frac{\int_0^{x^2}\sin\sqrt{t}\,dt}{x^3} \overset{\frac{0}{0}}{\underset{H}{=}} \lim_{x\to 0^-}\frac{2x\sin\sqrt{x^2}}{3x^2}$$

$$= \lim_{x\to 0^-}\frac{2x\sin|x|}{3x^2} = \lim_{x\to 0^-}\frac{2x\sin(-x)}{3x^2}$$

$$= \lim \frac{-2x^2}{-3x^2} = \frac{-2}{3}$$

Subject
Date

ب) $\lim_{x\to+\infty}\dfrac{\int_0^x(\arctan t)^2\,dt}{\sqrt{x^2+1}} \overset{0}{\underset{H}{=}} \lim_{x\to\infty}\dfrac{(\arctan x)^2}{\dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}}$

$= \lim_{x\to+\infty}\dfrac{(\frac{\pi}{2})^2\sqrt{x^2+1}}{x} = \dfrac{\pi^2}{4}\lim_{x\to+\infty}\dfrac{\overset{1}{\cancel{|x|}}}{\cancel{x}} = \pi^2/4$

ج) $\lim_{x\to0}\dfrac{\int_0^{x^3}\sin t^2\,dt}{x^9} = \lim_{x\to0}\dfrac{3x^2\sin(x^3)^2}{9x^8} = \lim_{x\to0}\dfrac{3x^2\cdot x^6}{9x^8} = 1/3$

$\sin\alpha \sim \alpha$

د) $\lim_{x\to x_1}\dfrac{x\int_{x_1}^{x}f(t)\,dt}{x-x_1} \overset{0}{=} \lim_{x\to x_1}\dfrac{(1)\int_{x_1}^{x}f(t)\,dt + x f(x)}{1}$

$(uv)' = u'v + uv'$

$= \overbrace{\int_{x_1}^{x_1}f(t)\,dt}^{0} + x_1 f(x_1) = x_1 f(x_1)$

ه) $\lim_{x\to0^+}\dfrac{\int_0^{\sin x}\sqrt{\tan t}\,dt}{\int_0^{\tan x}\sqrt{\sin t}\,dt} \overset{0}{\underset{H}{=}} \lim_{x\to0^+}\dfrac{\sqrt{\tan(\sin x)}\,\cos x}{\sqrt{\sin(\tan x)}\,(1+\tan^2 x)}$

$\sin x \sim x$

$\tan x \sim x$

$= \lim_{x\to0^+}\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\times\dfrac{1}{1+0} = 0$

مثال ۱۷) تابع مشتق پذیر و غیر صفر f در رابطه ی زیر صدق می کند تابع f را بیابید

$$(f(x))^2=\int_0^x f(t)\frac{\sin t}{2+\cos t}\,dt$$

حل: ما از طرفین رابطه مشتق می گیریم:

$$2f(x)f'(x)=f(x)\frac{\sin x}{2+\cos x}$$

$$f'(x)=\frac{1}{2}\frac{\sin x}{2+\cos x}\Rightarrow f(x)=\frac{1}{2}\int\frac{\sin x}{2+\cos x}\,dx=-\frac{1}{2}\int\frac{u'}{u}du$$

$$=-\frac{1}{2}\ln|2+\cos x|+c$$

مثال ۱۸) در تابع ضمنی زیر y' را بیابید

$$F=\int_{\frac{\pi}{2}}^{x^3}\sqrt{c-2\sin^2 t}\,dt+\int_0^{y^2}\cos t\,dt=0$$

$$y'=-\frac{F_x}{F_y}=-\frac{3x^2\sqrt{c-2\sin^2(x^3)}+0}{0+2y\cos y^2}$$

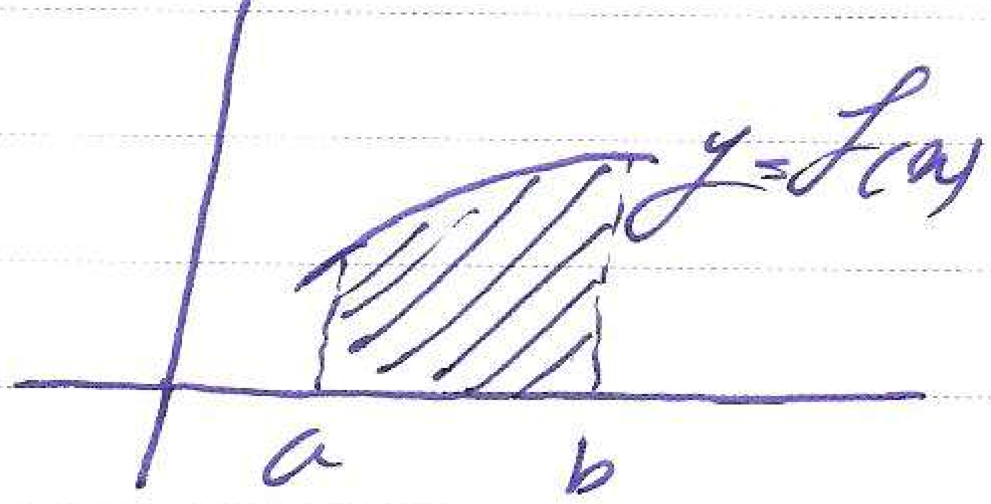
Subject

Date

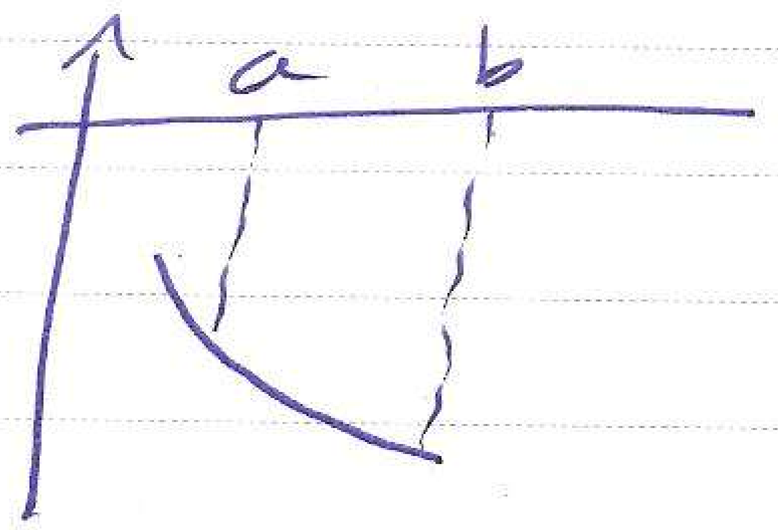
کاربرد انتگرال معین:

به طور کلی محاسبه سطح محصور بین نمودار $y=f(x)$ و محور x از رابطه زیر محاسبه می‌شود:

$$\int_a^b |f(x)|dx$$



$$S=\int_a^b f(x)dx$$



$$S=-\int_a^b f(x)dx$$

$$S=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b -f(x)dx$$

مثال/ مطلوب است مساحت ناحیه محصور بین منحنی $y=x^3-2x^2-5x+6$ و محور xها و خطوط $x=-1$ و $x=2$

حل صفحه بعد

Subject
Date

ج) $\Rightarrow y=0$

$$x=1$$

$$x^3-2x^2-5x+6 \;\Big|\; \frac{x-1}{x^2-x-6}$$

$$\begin{array}{l} -x^3+x^2 \\ \hline -x^2-5x+6 \\ x^2-x \\ \hline -6x+6 \\ \underline{6x-6} \\ 0 \end{array}$$

$$(x-1)(x^2-x-6)$$

$$(x-1)(x-3)(x+2)=0 \Longrightarrow$$

x	-2	-1	1	2	3
		$+$	0	$-$	

$$S=\int_{-1}^{1}(x^3-2x^2-5x+6)\,dx+\int_{1}^{2}(-x^3+2x^2+5x-6)\,dx$$

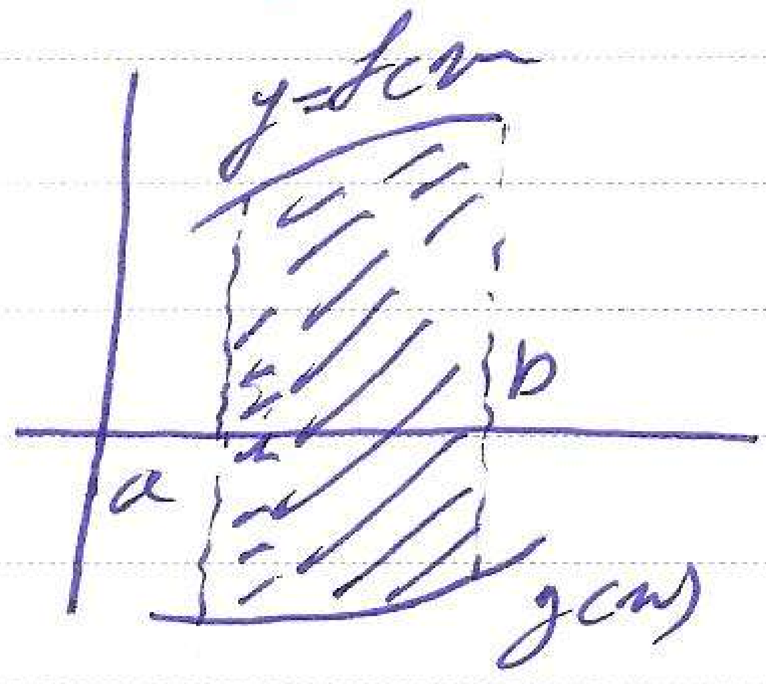
$$=\left[\frac{x^4}{4}-\frac{2x^3}{3}-\frac{5x^2}{2}+6x\right]_{-1}^{1}+\left[-\frac{x^4}{4}+\frac{2}{3}x^3+\frac{5}{2}x^2-6x\right]_{1}^{2}$$

$$S=\left(\frac{32}{3}\right)+\left(\frac{29}{12}\right)=\frac{157}{12}$$

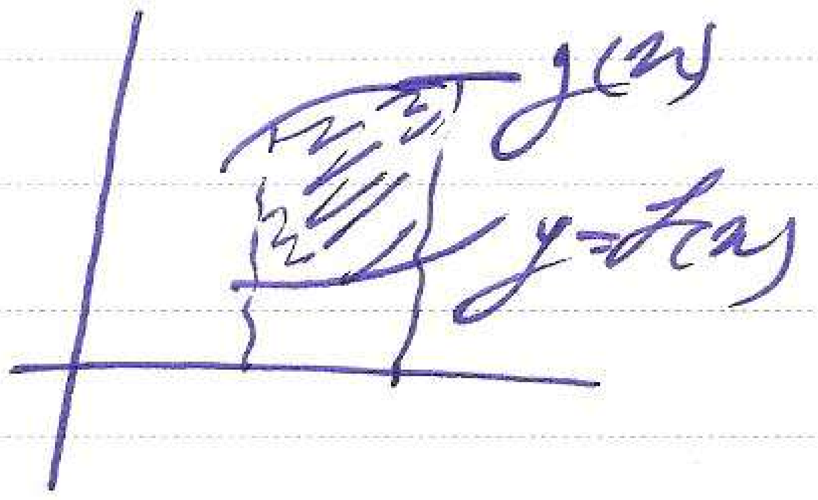
- مساحت محصور بین نمودارهای $y=f(x)$ و $y=g(x)$ ، خطوط $x=a$ و $x=b$ از فرمول زیر بدست می‌آید:

$$S=\int_a^b |f(x)-g(x)|\,dx$$

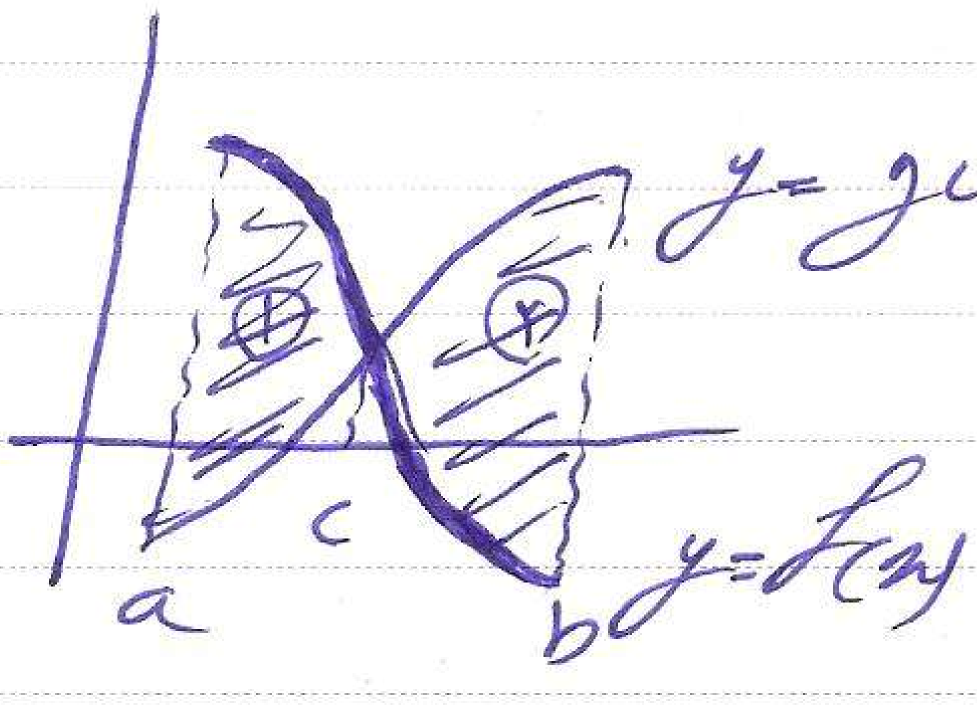
۳ حالت ممکن است:



$$S=\int_a^b (f(x)-g(x))\,dx$$



$$S=\int_a^b (g(x)-f(x))\,dx$$



$$S=\int_a^c (f-g)(x)\,dx+\int_c^d (g-f)(x)\,dx$$

Subject

Date

مثال / مطلوب است مساحت ناحیه محصور بین دو منحنی

$y_2 = x^2 - 4x \;,\; y_1 = x^3 - 6x^2 + 8x$

محل تلاقی نمودارها

$y = y_1 = y_2$

$x^3 - 6x^2 + 8x = x^2 - 4x$

$y_1 - y_2 = x^3 - 7x^2 + 12x = x(x^2 - 7x + 12)$

$x(x-3)(x-4)$

x	0		3		4
$y_1 - y_2$	0	+	0	−	0

$(y_1 - y_2)(1) = 1 - 7 + 12 = 6$

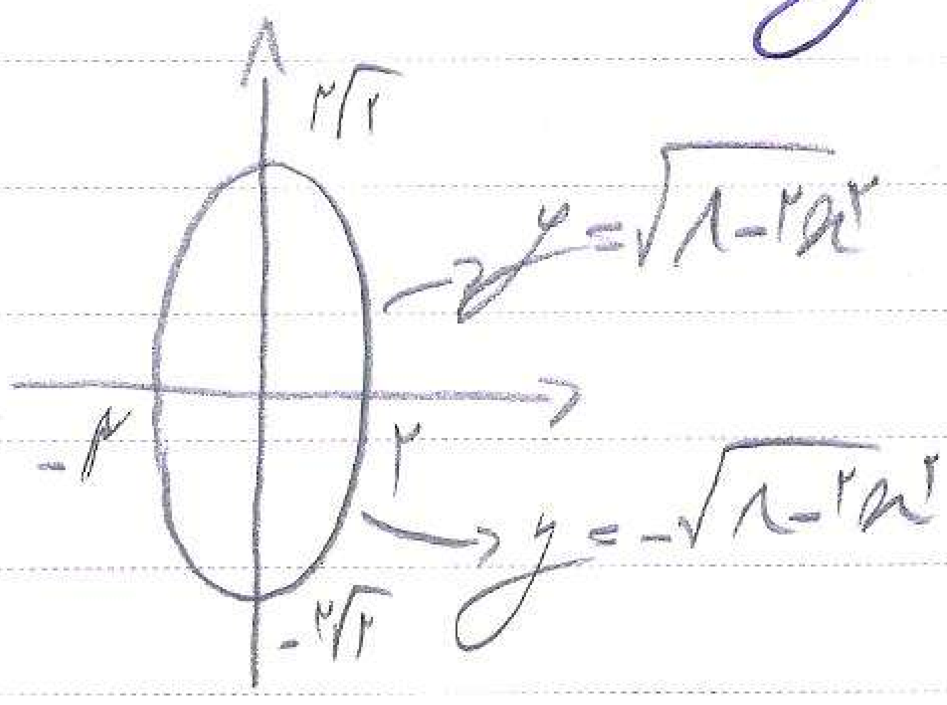
$$S = \int_0^3 (x^3 - 7x^2 + 12x)\,dx + \int_3^4 (-x^3 + 7x^2 - 12x)\,dx$$

$$= \left[\frac{x^4}{4} - \frac{7x^3}{3} + 6x^2\right]_0^3 + \left[-\frac{x^4}{4} + \frac{7x^3}{3} - 6x^2\right]_3^4 = \frac{45}{4} + \frac{7}{12} = \ldots$$

Subject

Date

مثال: مطلوب است مساحت بیضی $2x^2+y^2=8$ به کمک انتگرال.



$$S=\int_{-2}^{2}\left(\sqrt{8-2x^2}-\left(-\sqrt{8-2x^2}\right)\right)dx$$

$$=2\int_{-2}^{2}\sqrt{8-2x^2}\,dx$$

$$=2\sqrt{2}\int_{-2}^{2}\sqrt{4-x^2}\,dx$$

$$\boxed{\begin{array}{c}\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{8}=1\\ a=2\quad b=2\sqrt{2}\\ \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\\ S=\pi ab\end{array}}$$

$$\begin{cases}x=2\sin\theta\\ dx=2\cos\theta\,d\theta\end{cases}\qquad =2\sqrt{2}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\sqrt{4-4\sin^2\theta}\;2\cos\theta\,d\theta$$

$x=2 \quad \sin\theta=1 \quad \theta=\frac{\pi}{2}$

$x=-2 \quad \sin\theta=-1 \quad \theta=-\frac{\pi}{2}$

$$=8\sqrt{2}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos^2\theta\,d\theta=8\sqrt{2}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\frac{1+\cos2\theta}{2}\,d\theta$$

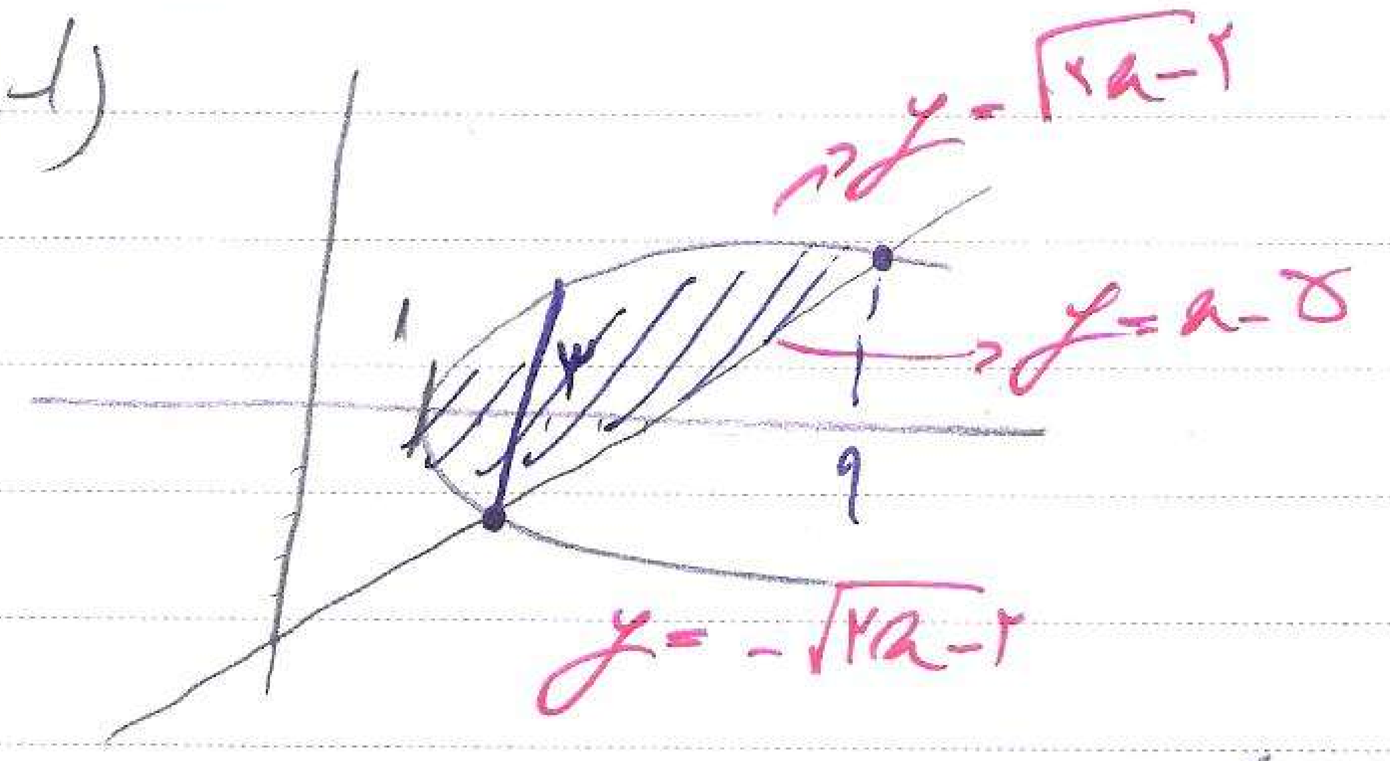
$$=4\sqrt{2}\left[\theta+\frac{1}{2}\sin2\theta\right]_{-\pi/2}^{\pi/2}=4\sqrt{2}\left[\left(\frac{\pi}{2}+\frac{1}{2}\sin\pi\right)-\left(-\frac{\pi}{2}+\frac{1}{2}\sin(-\pi)\right)\right]$$

$$=4\sqrt{2}\,\pi$$

Subject
Date

مثال/ مساحت ناحیه محصور بین $y^2=2x-2$ و خط $y=x-5$ را بدست آورید.

$y^2=2(x-1)$



محل تلاقی $\begin{cases} y^2=2x-2 \\ y=(x-5) \end{cases}$

$(x-5)^2=2x-2$

$x^2-10x+25=2x-2$

$x^2-12x+27=0$

$(x-3)(x-9)=0$

$\boxed{x=3}\quad\boxed{x=9}$

$$S=\int_1^3 \left(\sqrt{2x-2}-(-\sqrt{2x-2})\right)dx+\int_3^9\left(\sqrt{2x-2}-(x-5)\right)dx$$

$u=2x-2$
$u'=2$

$$=2\int_1^3 (2x-2)^{\frac{1}{2}}dx+\int_3^9\left((2x-2)^{\frac{1}{2}}-x+5\right)dx$$

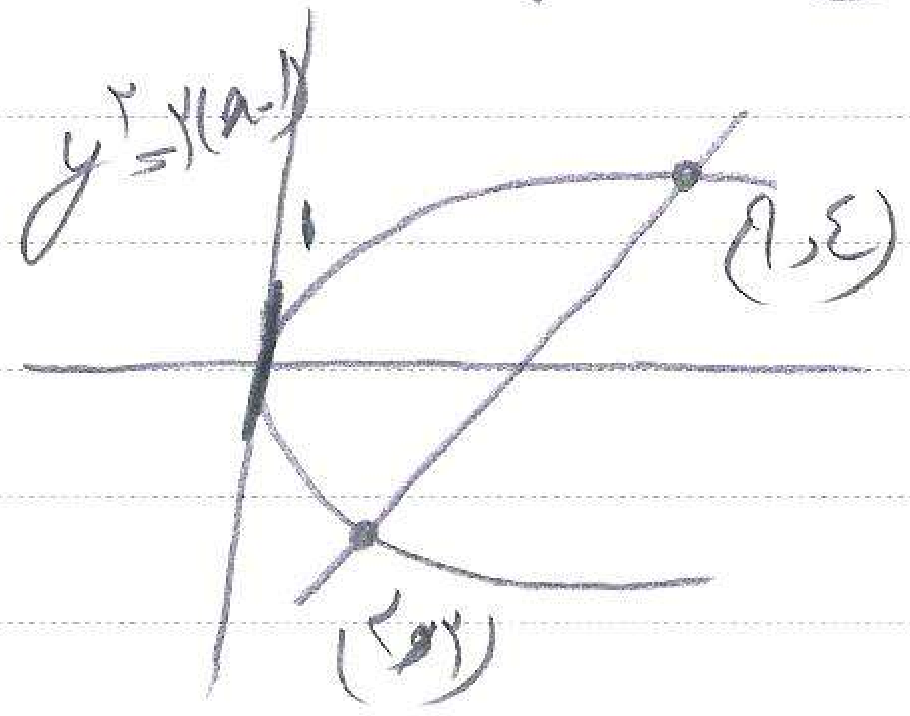
$$=\left[\frac{2}{3}(2x-2)^{\frac{3}{2}}\right]_1^3+\left[\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}(2x-2)^{\frac{3}{2}}-\frac{x^2}{2}+5x\right]_3^9$$

$$=\ldots=\frac{16}{3}+\frac{38}{3}=\frac{54}{3}=\boxed{18}$$

Subject
Date

راه دوم:

این بار ~~الان~~ الان هم مساحت را مساحت محدود می‌کنیم دیگر با یک انتگرال مسئله حل می‌شود



$$y^2 = 2x - 2 \Rightarrow x = \frac{y^2+2}{2}$$

$$y = x - 5 \Rightarrow x = y + 5$$

$$S = \int_{-2}^{4} (x_2 - x_1)\, dy$$

$$= \int_{-2}^{4} \left((y+5) - \left(\frac{y^2+2}{2}\right)\right) dy$$

تمرین ۱) مطلوبست مساحت محصور بین دو منحنی $y = x^3$ و $y = \sqrt{x}$

تمرین ۲) مطلوبست مساحت محصور بین منحنی $y = 2x^2 + 4x$ و $y = x^3 + 3x^2 + 2x$

Subject
Date

$$\int_0^{\pi/2} \frac{f(\sin x)}{f(\sin x)+f(\cos x)} \quad ! \; f(\cos x)$$

انتگرال معین زیر را محاسبه کنید به کمک تغییر متغیر:

$$I=\int_0^{\pi/2}\frac{\sin^m x}{\cos^m x+\sin^m x}\,dx$$

$u=\frac{\pi}{2}-x$

$du=-dx$

$x=\frac{\pi}{2}-u$

$$\Rightarrow \int_{\pi/2}^{0}\frac{\sin^m(\frac{\pi}{2}-u)}{\cos^m(\frac{\pi}{2}-u)+\sin^m(\frac{\pi}{2}-u)}(-du)$$

$$=\int_0^{\pi/2}\frac{\cos^m u}{\sin^m u+\cos^m u}\,du=\int_0^{\pi/2}\frac{\cos^m x\,dx}{\sin^m x+\cos^m x}$$

$$2I=I+I=\int_0^{\pi/2}1\,dx=x\Big]_0^{\pi/2}=\frac{\pi}{2}$$

$$I=\frac{\pi}{4}$$

$$\int_0^{\pi/2}\frac{\sqrt[5]{\cos x}\,dx}{\sqrt[5]{\cos x}+\sqrt[5]{\sin x}}$$

$$\int_0^{\pi/2}\frac{\ln(\cos x)\,dx}{\ln(\sin x)+\ln(\cos x)}$$

Subject
Date ۹۳,۲,۷

محاسبه حجم ~~[illegible]~~ اجسام دوار:

فرض کنیم منحنی $y=f(x)$ که در فاصله $[a,b]$ پیوسته است حول محور x دوران می‌کند (منظور سطحی است که زیر نمودار محصور به محورها و خطوط $x=a$ و $x=b$ می‌باشد.)

حجم حاصل از دوران به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$V=\int_a^b \pi y^2\,dx$$

در حقیقت در حالت کلی فرمول $\int \pi r^2\,dh$ را داریم:

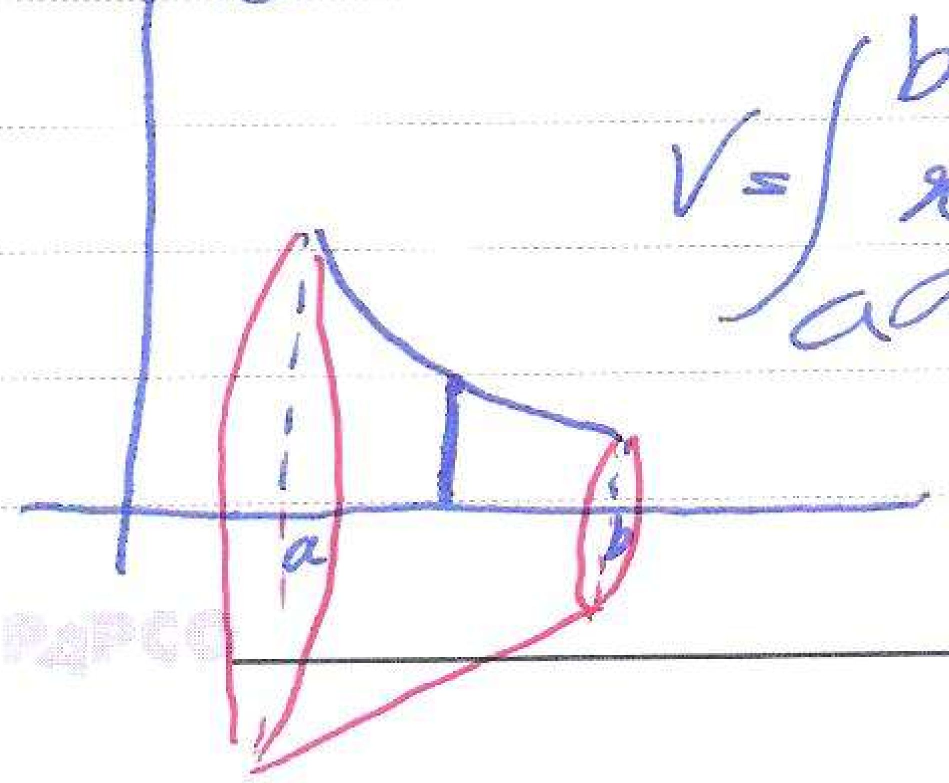
$r=$ فاصله از محور دوران

$dh=$ المان ارتفاع یا المان ضخامت

با تغییر محور دوران شکل‌ها و فرمول‌های زیر را خواهیم داشت:

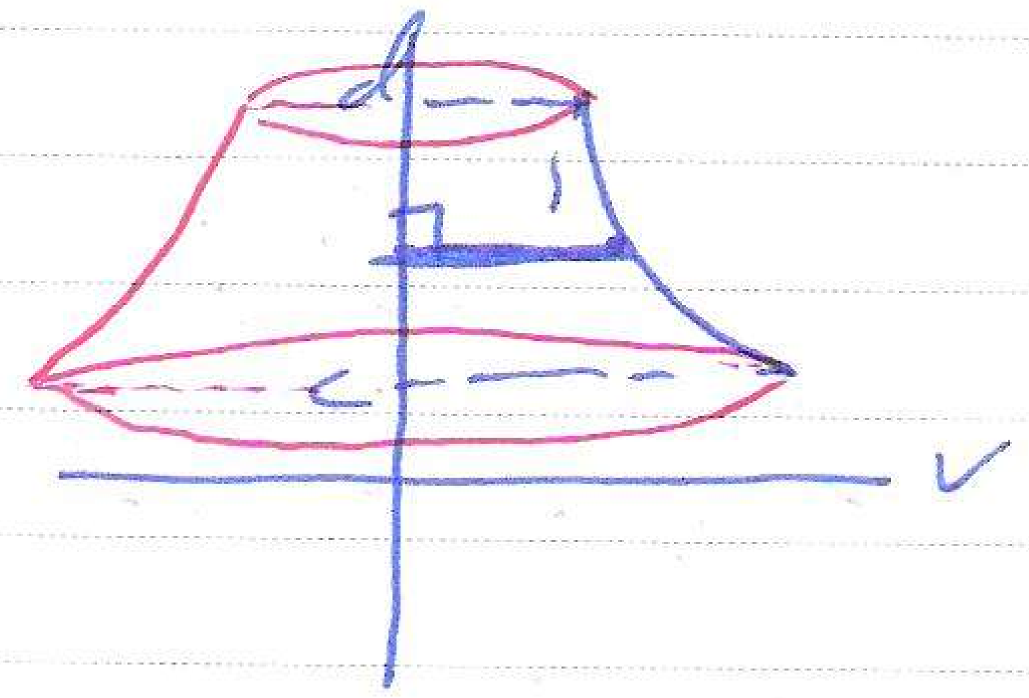
$y=f(x)$ حول محور x

$$V=\int_a^b \pi y^2\,dx$$



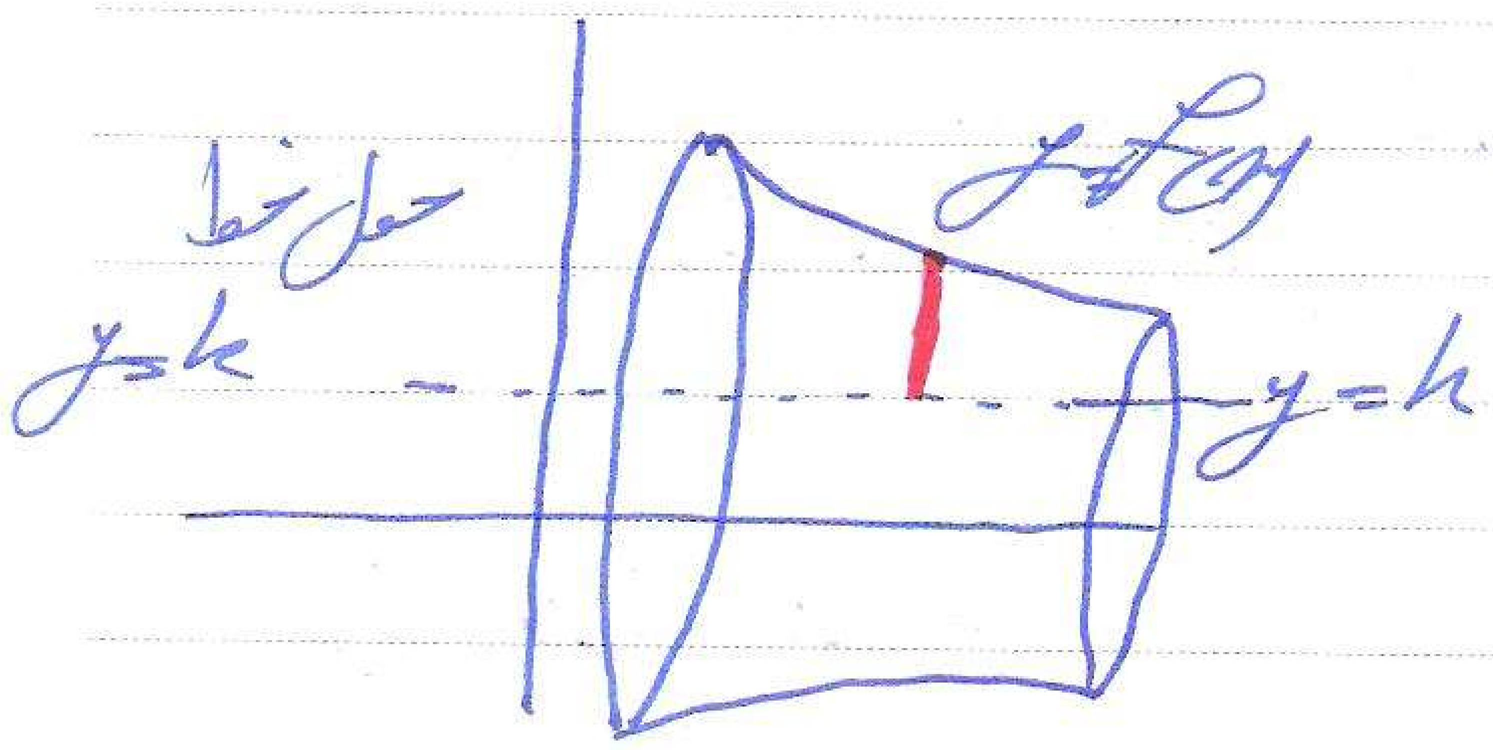
Subject

Date

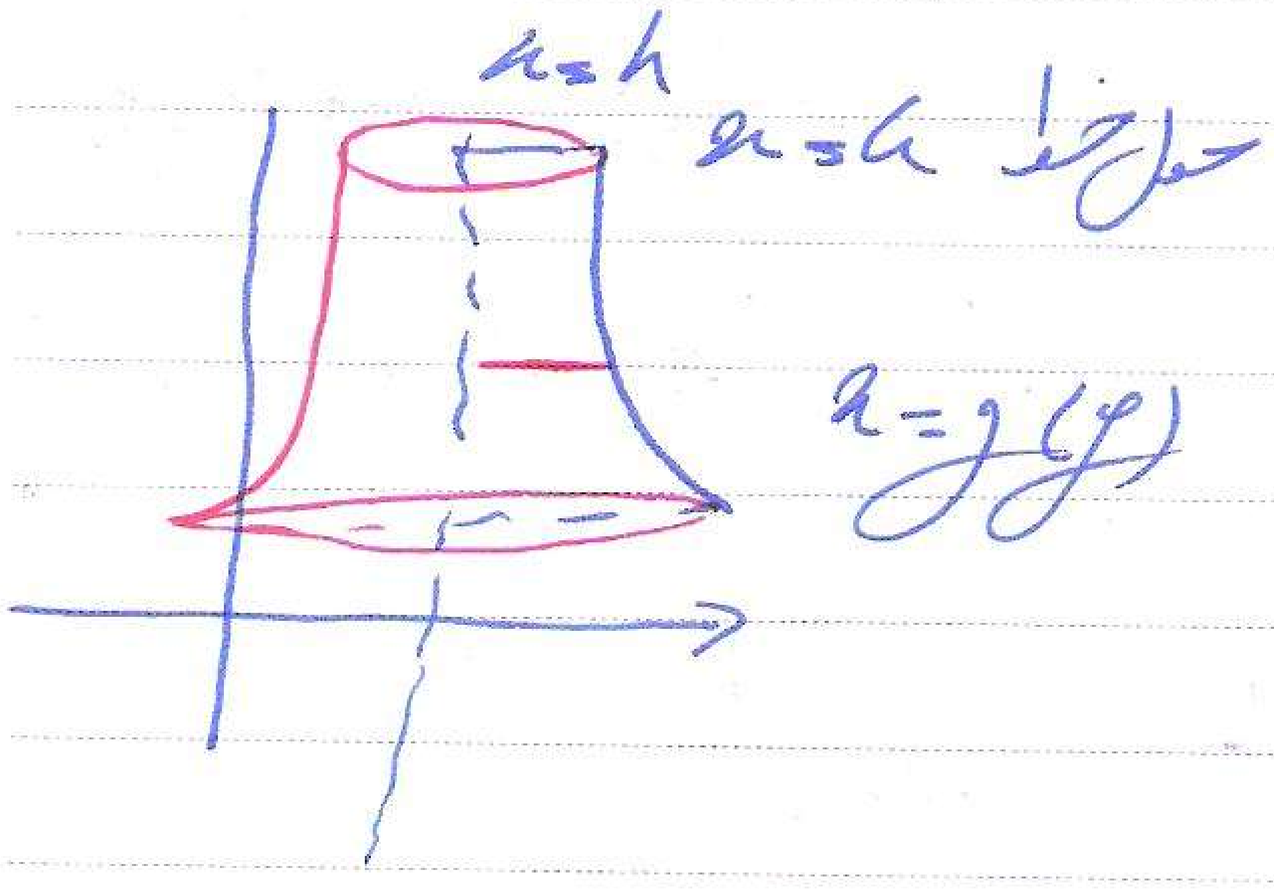


$x = g(y)$

$V = \int_c^d \pi x^2 \, dy$ حول محور

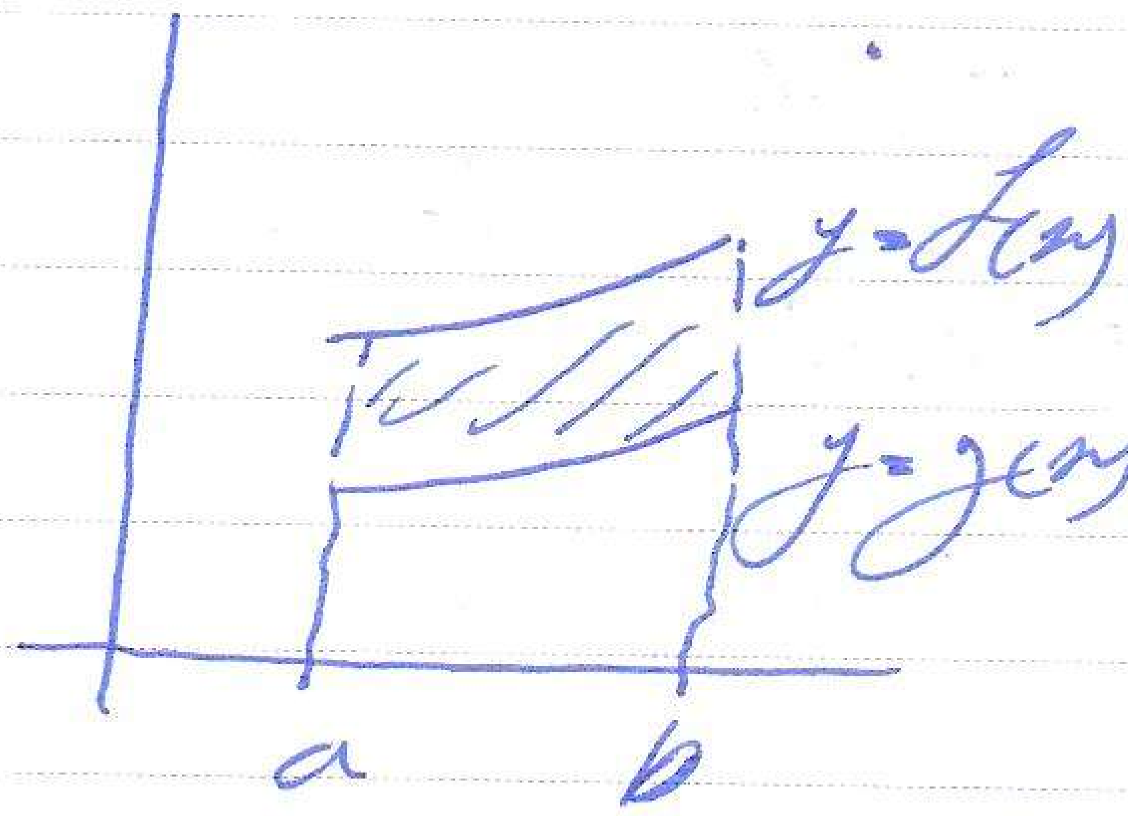


$V = \int_a^b \pi (y-k)^2 \, dx$



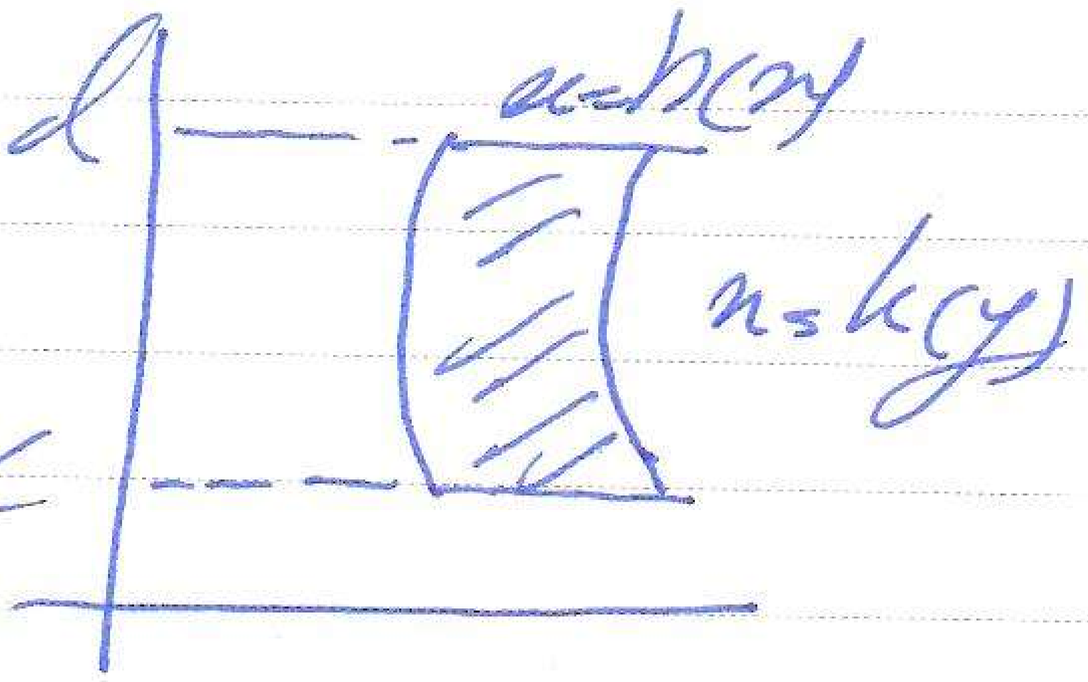
$V = \int_c^d \pi (x-k)^2 \, dy$

Subject
Date



ناحیه بین نمودارهای
$y = g(x)$, $y = f(x)$
حول محور x دوران می‌کند

* $V = \int_a^b \left((f(x))^2 - (g(x))^2 \right) dx$



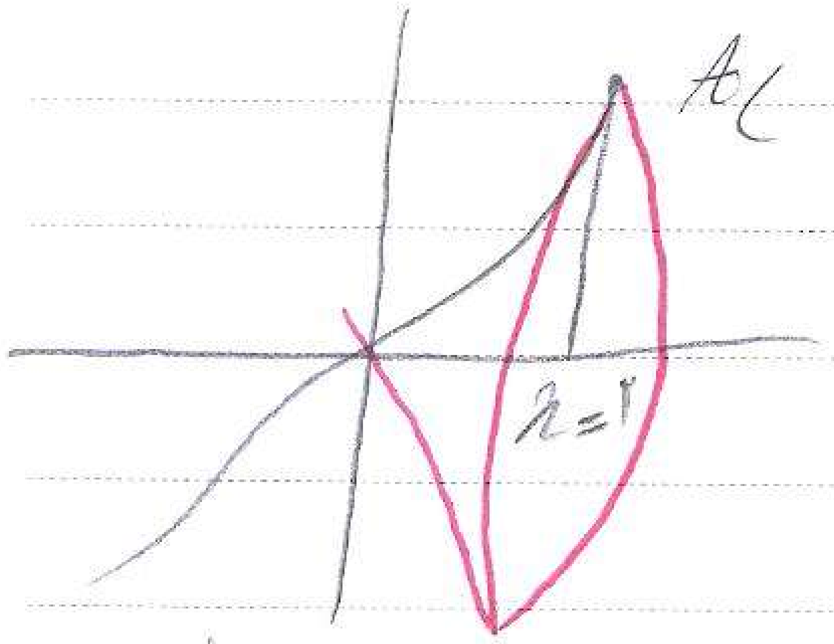
ناحیه بین ~~[illegible]~~ منحنی های
$x = k(y)$ و $x = h(y)$
حول محور y دوران می‌کند

* $V = \int_c^d \pi \left((k(y))^2 - (h(y))^2 \right) dy$

Subject
Date

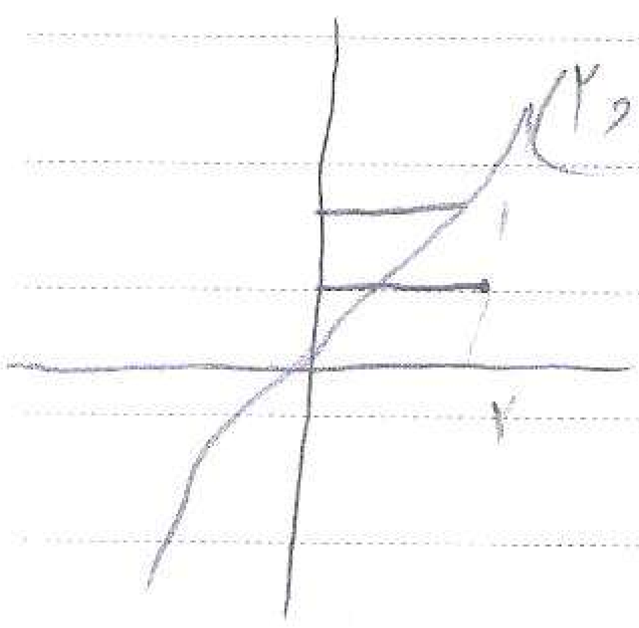
مثال / سطح محصور بین منحنی $y=x^3$ و محور x و خط $x=2$ حول محور داده شده دوران می‌کند مطلوبست حجم:

الف/ محور x ب/ محور y



$$V=\int_0^2 \pi y^2\,dx=\int_0^2 \pi x^6\,dx$$

$$=\frac{\pi x^7}{7}\Big]_0^2=\frac{128\pi}{7}$$



$(2,8)$ $y=x^3 \Rightarrow x=y^{\frac{1}{3}}$

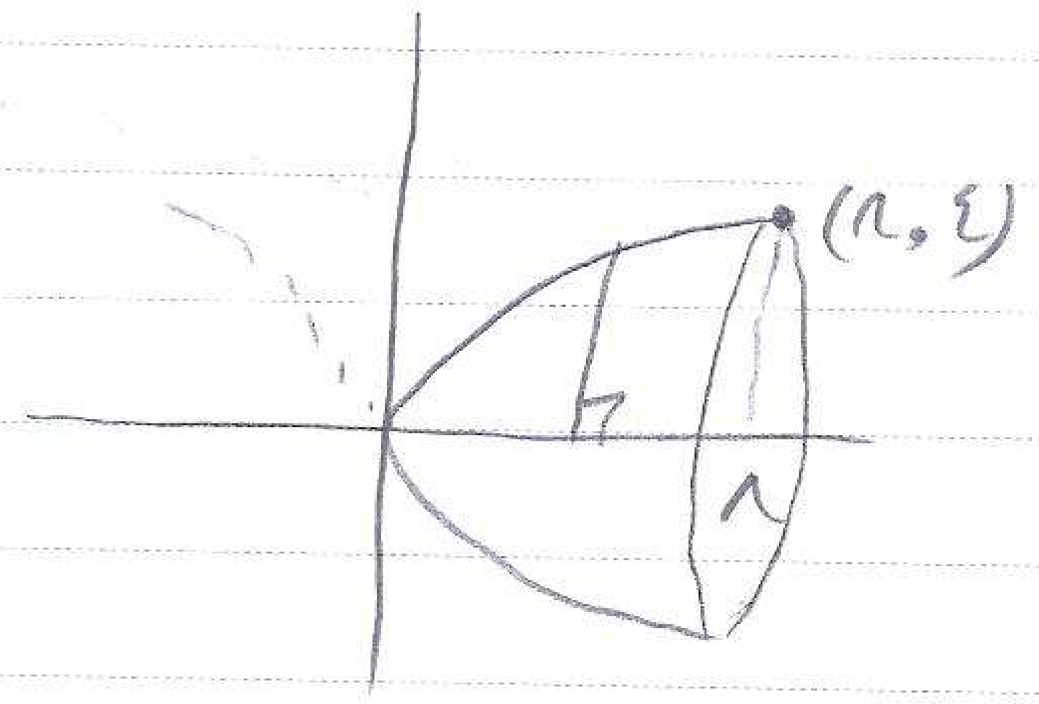
$$V=\int_0^8 \pi(2^2-x^2)\,dy$$

$$=\pi\int_0^8 \left(4-(y^{\frac{1}{3}})^2\right)dy$$

$$\pi\left[4y-\frac{3}{5}y^{\frac{5}{3}}\right]_0^8=32-\frac{96}{5}$$

$$=\frac{160-96}{5}$$

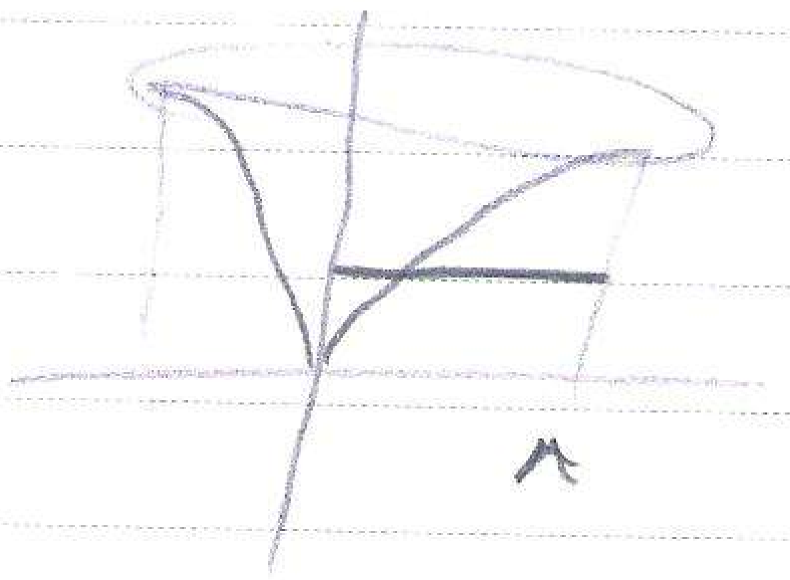
مثال / مثال کامل از تابع $y=\sqrt[3]{x^2}$



$$V=\pi\int_0^8 y^2\,dx$$

$$=\pi\int_0^8 \left(x^{\frac{2}{3}}\right)^2 dx$$

$$=\pi\left[\frac{3}{7}x^{\frac{7}{3}}\right]_0^8=\frac{3\pi(128)}{7}$$



$$V=\int_0^4 \pi\left(8^2-x^2\right)dy=\frac{274}{7}\pi$$

$$=\int_0^4 \pi\left(64-\left(y^{\frac{3}{2}}\right)^2\right)dy$$

$$=\pi\left[64y-\frac{y^4}{4}\right]_0^4=\pi(256-64)$$

$$=192\pi\ cm^3$$

Subject

Date

امتحان

حجم جسم دواری را بیابید که از دوران ناحیه R محصور بین منحنی تابع $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+x+1}}$ و خطوط $x=0$ و $x=1$ حول محورxها ایجاد می‌شود.

$$V=\int_0^1 \pi y^2\,dx=\pi\int_0^1 \frac{1}{x^2+x+1}\,dx$$

$$=\pi\int_0^1 \frac{dx}{\underbrace{x^2+x+\frac{1}{4}}_{(x+\frac{1}{2})^2}-\frac{1}{4}}=\pi\int \frac{dx}{(x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}$$

$$\frac{\pi}{\frac{3}{4}}\int_0^1 \frac{dx}{\left(\frac{x+\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\right)^2+1}\quad \int_0^1 \frac{dx}{\left(\frac{x+\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\right)^2+1}\qquad a^{\frac{3}{4}}\Rightarrow x=y^{\frac{4}{3}}$$

$$\frac{u'}{u^2+1}$$

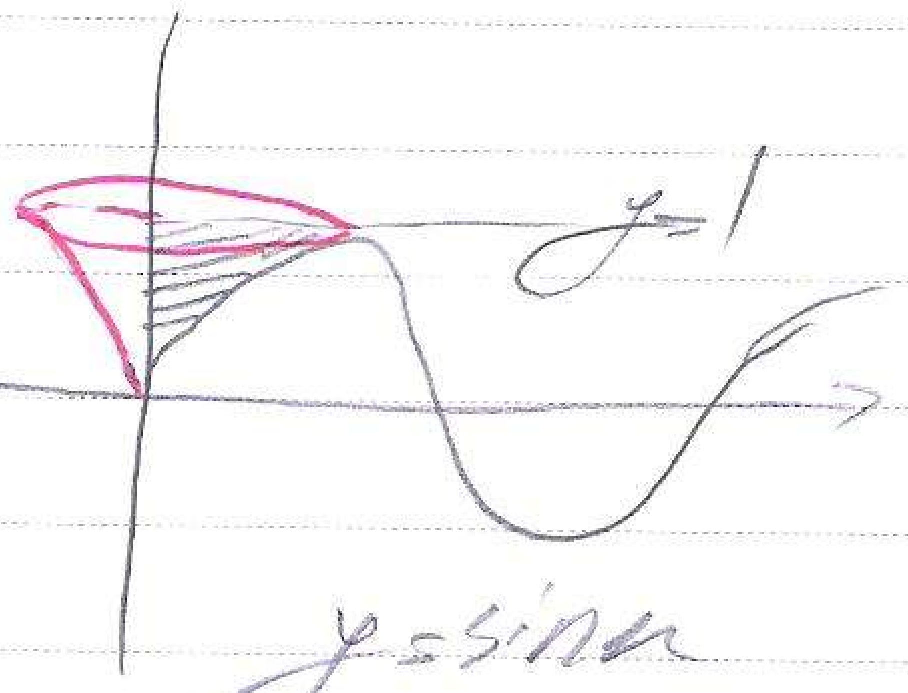
$$=\frac{4\pi}{3}\int_0^1 \frac{dx}{\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)^2+1}=\frac{2\pi}{\sqrt{3}}\int_0^1 \frac{\frac{2}{\sqrt{3}}\,dx}{\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)^2+1}$$

$$\frac{2\pi}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\Big]_0^1$$

$$\frac{2\pi}{\sqrt{3}}\left(tg^{-1}\sqrt{3}-tg^{-1}\frac{\sqrt{3}}{3}\right)=\frac{2\pi}{\sqrt{3}}\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\pi^2}{3\sqrt{3}}$$

Subject
Date

مثال / ناحیه واقع بین یک قوس منحنی $y=\sin x$ و محور ~~[illegible]~~ عرض‌ها و خط $y=1$ را حول محور ص‌ها دوران می‌دهیم حجم جسم حاصل را بیابید.



$y=\sin x$

$x=\arcsin y$

$$V=\int_0^1 \pi x^2\,dy$$

$$=\int_0^1 \pi(\arcsin y)^2\,dy \Rightarrow \text{A}$$

انتگرال $\int(\arcsin y)^2\,dy = y(\arcsin y)^2 - 2\int \frac{y}{\sqrt{1-y^2}}\arcsin y\,dy$

$$\begin{cases} u=(\arcsin y)^2\,dy \\ dv=1 \end{cases} \quad \begin{cases} du=2(\arcsin y)\frac{1}{\sqrt{1-y^2}} \\ v=\int 1\,dy = y \end{cases} \quad \begin{cases} u=\arcsin y & du=\frac{1}{\sqrt{1-y^2}} \\ dv=\frac{y}{\sqrt{1-y^2}} \end{cases}$$

$$= y(\arcsin y)^2 - 2\left(-\sqrt{1-y^2}\arcsin y - \int -dy\right)$$

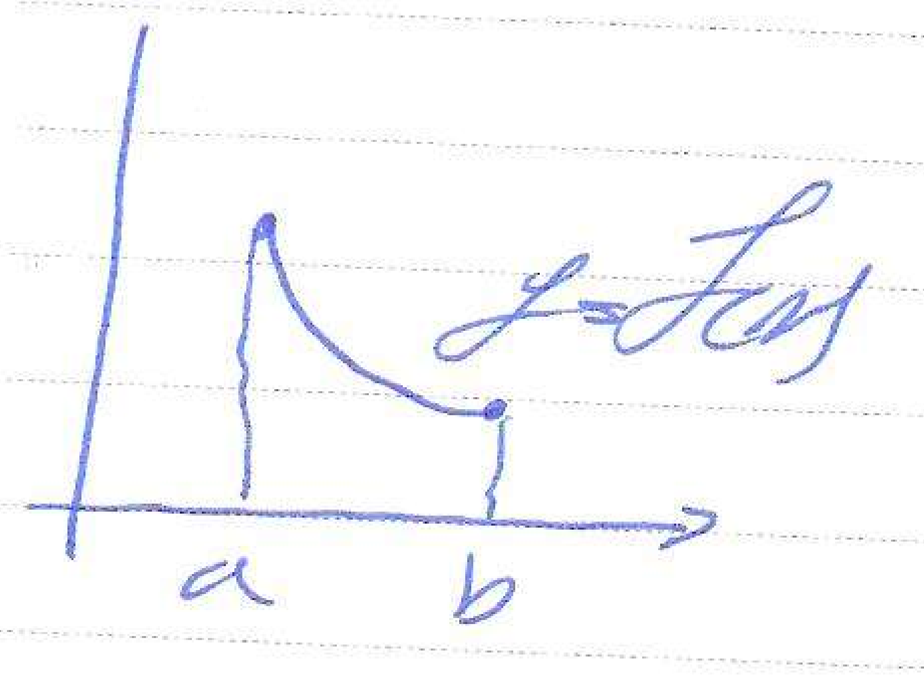
$$= y(\arcsin y)^2 + 2\sqrt{1-y^2}\arcsin y - 2y$$

$$= \pi\left[-y(\arcsin y)^2 + 2\sqrt{1-y^2}\,\arcsin y - 2y\right]_0^1$$

$$= \pi\left[-\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 + 2\right] = 2\pi - \frac{\pi^3}{4}$$

محاسبه طول قوس: طول قوس قسمتی از نمودار تابع $y=f(x)$ که در بازه $[a,b]$ پیوستگی دارد از فرمول زیر محاسبه میشود

$$L = \int_a^b \sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx$$



$x=g(y)$

$$L = \int_c^d \sqrt{1+(g'(y))^2}\,dy$$

Subject

Date

پارامتری
$$\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases} \qquad l = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{f'(t)^2 + g'(t)^2}\, dt$$

$$t_1 \leq t \leq t_2$$

مثال / مطلوب است طول قوس منحنی $y = x^{\frac{2}{3}}$ بین نقاط $A(1,1)$ و $B(8,4)$

$$l = \int_1^8 \sqrt{1 + \left(\frac{2}{3x^{\frac{1}{3}}}\right)^2}\, dx$$

$$y' = \frac{2}{3} x^{-\frac{1}{3}} \qquad = \int_1^8 \sqrt{1 + \frac{4}{9x^{\frac{2}{3}}}}\, dx$$

$$= \int_1^8 \sqrt{\frac{9x^{\frac{2}{3}} + 4}{9x^{\frac{2}{3}}}}\, dx = \int_1^8 \frac{\sqrt{9x^{\frac{2}{3}} + 4}}{3x^{\frac{1}{3}}}\, dx$$

$u = 9x^{\frac{2}{3}} + 4$ عبارت زیر رادیکال

$$u' = 6x^{-\frac{1}{3}} = \frac{6}{x^{\frac{1}{3}}} \qquad u^{\frac{1}{2}}$$

$$l = \frac{1}{6 \times 3} \int_1^8 \frac{6}{x^{\frac{1}{3}}} \left(9x^{\frac{2}{3}} + 4\right)^{\frac{1}{2}}\, dx$$

Subject

Date

$$= \frac{1}{18}\left(\frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}}\right)\Big]_{*}^{**}$$

$$= \frac{1}{27}\left(9x^{\frac{2}{3}}+4\right)^{\frac{3}{2}}\Big]_{1}^{8} = \frac{1}{27}\left((40)^{\frac{3}{2}}-(13)^{\frac{3}{2}}\right)$$

مثال) طول قوس منحنی $y=\frac{x^2}{4}-\frac{1}{2}\ln x$ از $1\le x\le e$ را بدست آورید

$$L=\int_1^e \sqrt{1+(y')^2}\,dx$$

$$=\int_1^e \sqrt{1+\left(\frac{x}{2}-\frac{1}{2x}\right)^2}\,dx$$

$$=\int_1^e \sqrt{1+\frac{x^2}{4}-\frac{1}{2}+\frac{1}{4x^2}}\,dx=\int_1^e \sqrt{\left(\frac{x}{2}+\frac{1}{2x}\right)^2}\,dx$$

$$=\int_1^e \left(\frac{x}{2}+\frac{1}{2x}\right)dx=\left[\frac{x^2}{4}+\frac{1}{2}\ln x\right]_1^e$$

$$=\left(\frac{e^2}{4}+\frac{1}{2}\right)-\left(\frac{1}{4}+0\right)=\frac{e^2}{4}+\frac{1}{4}$$

مثال / طول منحنی $y=\ln(1-x^2)$ را در فاصله $0\le x\le \frac{1}{2}$ بیابید:

$$l=\int_0^{\frac{1}{2}}\sqrt{1+(y')^2}\,dx$$

$$=\int_0^{\frac{1}{2}}\sqrt{1+\left(\frac{-2x}{1-x^2}\right)^2}\,dx$$

$$=\int_0^{\frac{1}{2}}\sqrt{\frac{1+x^4-2x^2+4x^2}{(1-x^2)^2}}\,dx=\int_0^{\frac{1}{2}}\sqrt{\frac{1+x^4+2x^2}{(1-x^2)^2}}$$

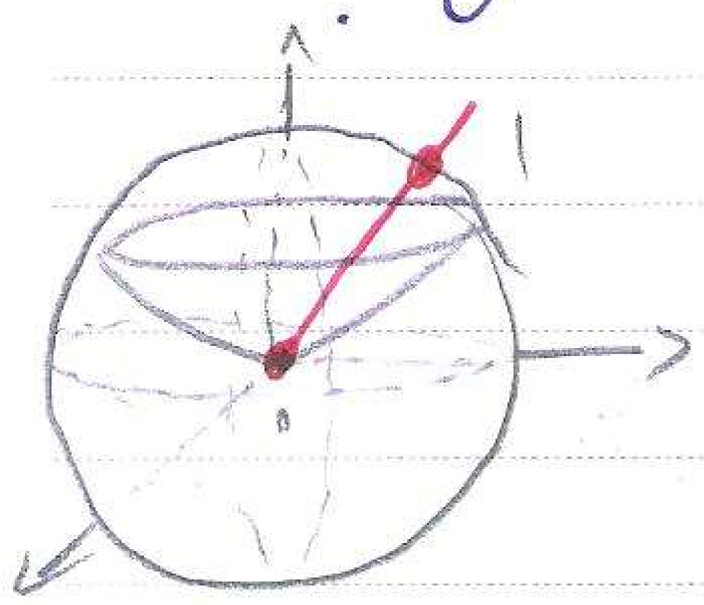
$$=\int_0^{\frac{1}{2}}\sqrt{\frac{(1+x^2)^2}{(1-x^2)^2}}=\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{1+x^2}{1-x^2}\,dx \qquad \begin{array}{r|l} x^2+1 & -x^2+1 \\ -x^2+1 & -1 \\ \hline 2 & \end{array}$$

$$=\int_0^{\frac{1}{2}}\left(-1+\frac{2}{1-x^2}\right)dx=\int_0^{\frac{1}{2}}\left(-1+\frac{1}{1-x}+\frac{1}{1+x}\right)dx$$

$$=-x+\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|\Bigg]_0^{\frac{1}{2}}=-\frac{1}{2}+\ln 3$$

Subject
Date

مثال/ مطلوب است حجم ناحیه ای که $\varphi = \frac{\pi}{4}$ از $\rho = 1$ جدا می‌کند.



$$V = \iiint_D dz\,dy\,dx$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\int_0^1 \rho^2 \sin\varphi \, d\rho\, d\varphi\, d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin\varphi}{3}\, d\varphi\, d\theta$$

$$\boxed{\int_0^{2\pi} \frac{1}{4}\, d\theta = \frac{\pi}{2}}$$

Subject
Date

فصل نوزدهم
میدان های برداری:

انتگرال خمیده خطی:

عبارت است از انتگرال توابع روی خم ها فرض کنید $f(x,y,z)$ تابع مفروض باشد که دامنه اش شامل خم زیر است:

$C: r(t) = x(t)i + y(t)j + z(t)k$

$a \le t \le b$

انتگرال خمیده محدود R از فرمول زیر استفاده می شود:

$$\int_C f(x,y,z)\,ds = \int_a^b f(x(t), y(t), z(t))\,|v(t)|\,dt$$

مثال: انتگرال $f = x - 3y^2 + z$ را روی خم $C: r(t) = i + j + tk$ به ازای $0 \le t \le 1$.

$x(t) + y(t) + z(t)$

$f(1,1,t) = 1 - 3 + t$

$v(t) = 0i + 0j + k$

$\Rightarrow |v(t)| = 1 \Rightarrow$

$\int_C f(x,y,z)\,ds$

$= \int_0^1 (-2 + t)\,dt = -2t + \frac{t^2}{2}\Big|_0^1 = -\frac{3}{2}$

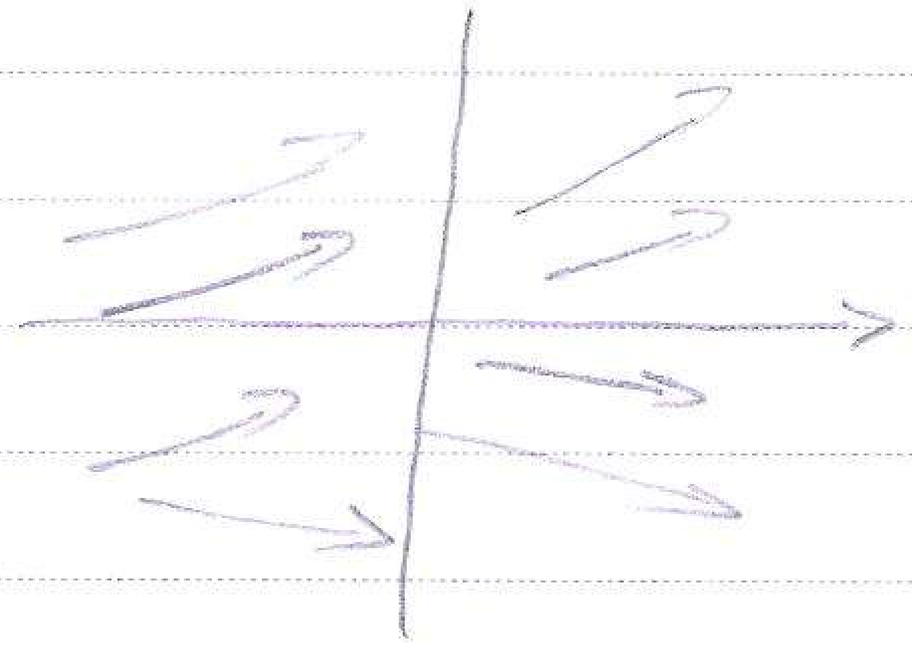
میدان برداری: به هر تابعی که به هر نقطه از فضا برداری نسبت دهد میدان برداری می‌گوییم میدان‌های برداری را معمولاً به صورت زیر نمایش می‌دهند:

$$F(x,y,z) = M(x,y,z)\,i + N(x,y,z)\,j + P(x,y,z)\,k$$

مثلاً: $\Leftarrow$

$$F = xyz\,i + e^{xy} + z^2 k$$

$$F\big|_{(1,1,1)} = i + e\,j + k = (1, e, 1)$$



میدان برداری پایستار: اگر کار انجام شده در یک میدان برداری مستقل از مسیر باشد آن میدان برداری را پایستار گویند.

شرط پایستاری میدان $\quad \nabla \times F = 0$

کار: برای محاسبه کار انجام شده توسط میدان $F = Mi + Nj + Pk$ روی خم

$C: R(t) = x(t)i + y(t)j + z(t)k \quad a \le t \le b$ به شرط اینکه میدان پایستار باشد و $\bar{F}$ تابع پتانسیل F باشد از فرمول زیر استفاده می‌شود:

$$\int_a^b F \cdot dR = \bar{F}(B) - \bar{F}(A)$$

$B = R(b)$

$A = R(a)$

Subject

Date

مثال: کار انجام شده توسط نیروی

$$\vec{F}(x,y,z) = (ze^x + e^y)i + (xe^y - e^z)j + (e^x - ye^z)k$$

بر روی منحنی C به معادله برداری $0 < t < \frac{\pi}{2}$:

$$\vec{r}(t) = (\sin t - \cos t, t, \sin t + \cos t)$$

$$\nabla \times F = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ ze^x + e^y & xe^y - e^z & e^x - ye^z \end{vmatrix}$$

$$= i(e^z - e^z) - j(e^x - e^x) + k(e^y - e^y) = 0$$ میدان پایستار

$$\int M\,dx = ze^x + xe^y$$

$$\int N\,dy = xe^y - ye^z$$

$$\int P\,dz = ze^x - ye^z$$

ج = جملات مشترک یکبار + جملات غیر مشترک

Subject
Date

$$\bar{F} = ze^{x} - ye^{z} + xe^{y}$$

$$B = R\left(\frac{\pi}{2}\right) = \left(1, \frac{\pi}{2}, 1\right)$$

$$A = R(0) = (1, 0, 1)$$

$$\int_a^b F \cdot dR = \bar{F}\left(\frac{\pi}{2}\right) - \bar{F}(0) = \left(e - \frac{\pi}{2}e + e^{\frac{\pi}{2}}\right) - \left(e^{1} + 0 - 1\right)$$

قضیه گرین: فرض کنید میدان برداری $F = Mi + Nj$ متغیر باشد:

چگالی شار $= \operatorname{div} F = \frac{\delta M}{\delta x} + \frac{\delta N}{\delta y}$

چگالی گردشی $= \operatorname{curl} F = \frac{\delta N}{\delta x} - \frac{\delta M}{\delta y}$

برای محاسبه شار و گردش از فرمول های زیر استفاده می شود

$$\oint_C M\,dy - N\,dx = \iint_R \operatorname{div} F\,dx\,dy$$ شار

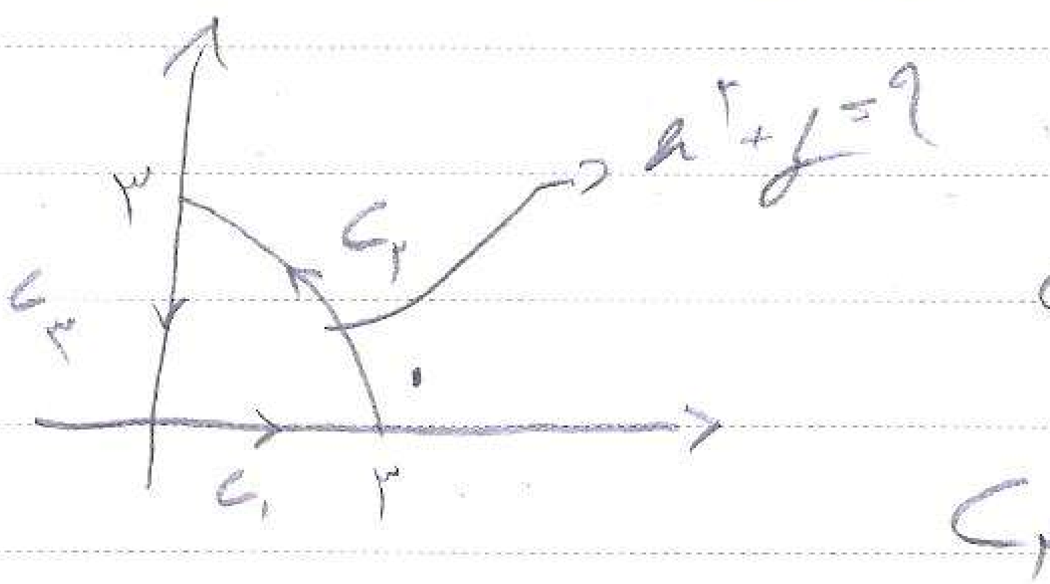
$$\oint M\,dx + N\,dy = \iint_R \operatorname{curl} F\,dx\,dy$$ گردش

که در آن C منحنی بسته ای به صورت زیر است :

$C: R(t) = x(t)i + y(t)j + z(t)k$

$a \le t \le b$ در امتداد آن وجه نقطه ها شمارش رو برای کنند

مثال: گردش کار نیرو را برای تابع $F = \overbrace{(x-2y)}^{M}\vec{i} + \overbrace{xy}^{N}\vec{j}$ روی منحنی ساده بسته C در جهت مثلثاتی که شامل مرز دایره $x^2+y^2=9$ واقع در ربع اول و پاره خطهای $0 \le y \le 3$ ، $0 \le x \le 3$ می باشد را تحقیق کنید.



$C_1: R(t) = \overset{x}{t}i + \overset{y}{0}j \qquad 0 \le t \le 3$

$C_2: R(t) = \overset{x}{3\cos t}\, i + \overset{y}{3\sin t}\, j \qquad 0 \le t \le \frac{\pi}{2}$

$C_3: R(t) = \overset{x}{0}i + \overset{y}{t}j \qquad 3 \ge t \ge 0$

Subject

Date

$$\oint_C M\,dy - N\,dx =$$

$$C_1 = \int_0^3 (t+0)0 - (0)\,dt \;+$$

$$C_2 = \int_0^{\pi/2} (3\cos t + 9\sin t)\, 3\cos t\, dt - (9\sin t\cos t)(-3\sin t)\,dt \;+$$

$$C_3 = \int_3^0 2t\,dt =$$

$$= 0 + \int_0^{\pi/2} \left(\tfrac{9}{2} + \tfrac{9}{2}\cos 2t\right) dt$$

$$+ 9\sin^2 t + 9\sin^3 t \Big|_0^{\pi/2} + t^2 \Big|_3^0$$

$$= \frac{t^2}{2}\Big|_0^3 + \frac{9}{2}t + \frac{9}{4}\sin 2t \Big|_0^{\pi/2}$$

$$+ 9\sin^2 t + 9\sin^3 t \Big|_0^{\pi/2} + t^2 \Big|_3^0$$

$$= \frac{9\pi}{4} + 0 + 9 + 9 - 9 = \boxed{\frac{27}{2}}$$

ادامه صفحه ۱۴۲ ⟹

$$\iint \left(\frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y}\right) dx\,dy =$$

$$\int_0^3 \int_0^{\sqrt{9-y^2}} (1+x)\,dx\,dy =$$

$$\int_0^3 x + \frac{x^2}{2} \Big|_0^{\sqrt{9-y^2}} dy =$$

$$\int_0^3 \left(\sqrt{9-y^2} + \frac{9}{2} - \frac{y^2}{2}\right) dy =$$

$$\int_0^3 \sqrt{9-y^2}\,dy + \frac{9}{2}y - \frac{y^3}{6}\Big|_0^3 =$$

$y = 3\sin\theta \quad dy = 3\cos\theta\,d\theta$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} 9\cos^2\theta\,d\theta + \frac{27}{2} - \frac{27}{6}$$

$\frac{9}{2} + \frac{9}{2}\cos 2\theta$

$$= \frac{9}{2}\theta + \frac{9}{4}\sin 2\theta \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + 9 = \frac{9}{2}\cdot\frac{\pi}{2} + 0 + 9 =$$

Subject
Date

$$p^2 L[y] - 4p L[y] = \frac{1}{p}$$

$$L[y](p^2 - 4p) = \frac{1}{p} \Rightarrow L[y] = \frac{1}{p} \cdot \frac{1}{p^2 - 4p}$$

$$L[y] = \frac{1}{p^2(p-4)} \Rightarrow y = L^{-1}\left[\frac{1}{p^2(p-4)}\right]$$

$$y = \frac{1}{16} L^{-1}\left[\frac{-1}{p} - \frac{4}{p^2} + \frac{1}{p-4}\right] \Rightarrow \boxed{\frac{1}{16}(-1 - 4x + e^{4x}) = y}$$

Subject ۹۳/۲/۱۴
Date

انتگرال های ناسره (ناویژه یا نامتعارف)

انتگرال معین را ناسره گوییم هرگاه به یکی از صورت های زیر باشد:

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx \overset{\text{تعریف}}{=} \lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)\,dx$$

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx = \lim_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)\,dx$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)\,dx + \int_{c}^{+\infty} f(x)\,dx$$

$$= \lim_{a\to-\infty}\int_a^{c} f(x)\,dx + \lim_{b\to+\infty}\int_c^{b} f(x)$$

اگر حد های مذکور موجود و متناهی باشند گوییم انتگرال ناسره همگرا است. در غیر این صورت آن را واگرا می نامیم.

به علاوه اگر $c\in[a,b]$ یک نقطه ناپیوستگی از نوع بینهایت برای تابع f باشد

Subject

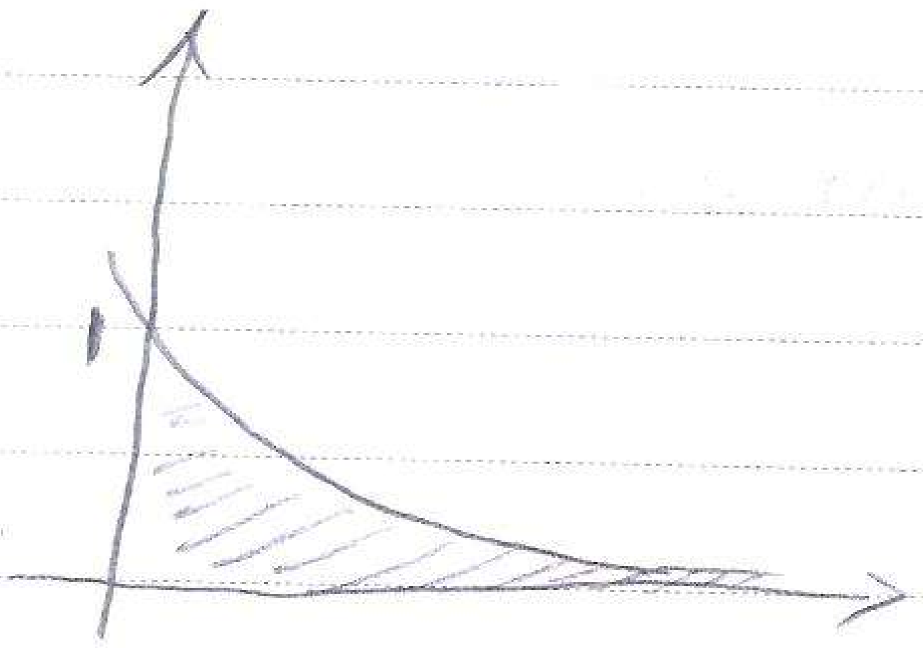
Date

انتگرال زیر را ناسره می‌نامیم:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

$$\overset{\text{تعریف}}{=} \lim_{t\to c^-} \int_a^t f(x)\,dx + \lim \int_s^b f(x)\,dx$$

مثال سطح زیر نمودار $f(x)=e^{-x}$ که بین نمودار تابع و محورهای مختصات محصور است را بیابید.



$$S = \int_0^{+\infty} e^{-x}\,dx \qquad u=-x,\ u'=-1$$

$$= \lim_{b\to+\infty} \int_0^b e^{-x}\,dx$$

$$= \lim_{b\to+\infty} \left[-e^{-x}\right]_0^b$$ [illegible]

$$\lim_{b\to\infty}\left(-e^{-b}-(-1)\right) = \lim_{b\to\infty}\left(-\frac{1}{e^b}+1\right) = 1\,cm^2$$

Subject

Date

مثال / مقدار یا واگرایی هر یک از انتگرال های ناسره زیر را تعیین کنید.

$$\int_{-\infty}^{2}\frac{dx}{(4-x)^2}=\lim_{b\to-\infty}\int_{b}^{2}\frac{dx}{(4-x)^2}\qquad u=4-x,\quad u'=-1$$

$$\lim_{b\to-\infty}\left(-\int_{b}^{2}u'u^{-2}\,dx\right)$$

$$\lim\left[\frac{1}{4-x}\right]_{b}^{2}=\lim\left(\frac{1}{2}-\cancel{\frac{1}{4-b}}^{\,0}\right)=\frac{1}{2}$$

انتگرال همگرا است

$$\int_{1}^{+\infty}\frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}}=\lim_{b\to+\infty}\int_{1}^{b}x^{-\frac{2}{3}}\,dx=\lim_{b\to+\infty}\left[3x^{\frac{1}{3}}\right]_{1}^{b}=\lim_{b\to+\infty}\left(3\sqrt[3]{b}-3\right)=+\infty$$

توجه : $\int_{a}^{+\infty}\frac{dx}{x^p}$ برای $p\le 1$ واگرا ، برای $p>1$ همگرا

$$\int_{1}^{+\infty}\frac{dx}{x\sqrt{x}}=\lim_{b\to+\infty}\int_{1}^{b}x^{-\frac{3}{2}}\,dx=\lim_{b\to+\infty}\left[-2x^{-\frac{1}{2}}\right]_{1}^{b}$$

$$=\lim\left(\cancel{\frac{-2}{\sqrt{b}}}^{\,0}+2\right)=2$$ همگرا

Subject

Date

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{x^2+4x+12}=\lim\int_{a}^{0}\frac{dx}{x^2+4x+12}+\lim\int_{0}^{b}\frac{dx}{x^2+4x+12}$$

$$=\lim\frac{1}{\sqrt{8}}\,\mathrm{arctg}\,\frac{x+2}{\sqrt{8}}\Big]_{a}^{0}+\lim\frac{1}{\sqrt{8}}\,\mathrm{arctg}\,\frac{x+2}{\sqrt{8}}\Big]_{0}^{b}$$

$$\lim_{a\to-\infty}\frac{1}{\sqrt{3}}\left(\frac{\pi}{4}-\underbrace{\mathrm{arctg}\,\frac{a+2}{\sqrt{8}}}_{\to-\frac{\pi}{2}}\right)+\lim_{b\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{3}}\left(\underbrace{\mathrm{arctg}\,\frac{b+2}{\sqrt{3}}}_{\to\frac{\pi}{2}}-\frac{\pi}{4}\right)$$

$$=\frac{1}{\sqrt{8}}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\pi}{\sqrt{8}}$$

$$\int_{-\infty}^{0}xe^{-x^2}dx \overset{\substack{u=-x^2\\ u'=-2x}}{=} \int_{-\infty}^{0}-\frac{1}{2}e^{-x^2}dx$$

$$=\left(-\frac{1}{2}e^{0}\right)-\left(-\frac{1}{2}e^{-\infty}\right)$$

$$=-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{e^{+\infty}}=-\frac{1}{2}$$

$u' = \frac{1}{1+x^2}$

$u = \arctan x$

$$\int_0^{+\infty} \frac{\arctan x}{1+x^2}\,dx = \frac{(\arctan x)^2}{2}\Bigg|_0^{+\infty} = \frac{(\arctan(+\infty))^2}{2} - \cancel{\frac{(\arctan 0)^2}{2}}$$

$$= \frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^2}{2} = \frac{\pi^2}{8}$$

$$\int_1^{\infty} \frac{e^{-2\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx = \left[-e^{-2\sqrt{x}}\right]_1^{+\infty} = -\cancel{e^{-\infty}} + e^{-2} = \frac{1}{e^2}$$ همگرا

$u = -2\sqrt{x}$

$u' = -2\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right) = \frac{-1}{\sqrt{x}}$

توجه: انتگرال‌های بالا همگرا هستند

قضیه آزمون مقایسه:

اگر در بازه $[a,b]$ داشته باشیم $f(x) \le g(x)$، در این صورت:

الف) اگر $\int_a^b g(x)\,dx$ همگرا باشد، $\int_a^b f(x)\,dx$ همگراست.

ب) اگر $\int_a^b f(x)\,dx$ واگرا باشد، $\int_a^b g(x)\,dx$ واگراست.

Subject
Date

$$I=\int_1^{\infty}\frac{1-4\sin 2x}{x^3+\sqrt{x}}\,dx \qquad \frac{1-4\sin 2x}{x^2+\sqrt{x}}\leq\frac{5}{x^3}$$

$$-1\leq \sin 2x\leq 1$$

$$-4\leq -4\sin 2x\leq 4 \qquad \int_1^{\infty}\frac{5}{x^3}\,dx$$ همگرا است بنا بر طبق قانون $p>1$

$$1-4\sin 2x\leq 5$$ پس I همگرا است.

$$x^3+\sqrt{x}\geq x^3 \Rightarrow \frac{1}{x^3+\sqrt{x}}\leq\frac{1}{x^3}$$

$$I=\int_1^{\infty}\frac{\cos 5x\,dx}{x^2+2x+1} \qquad -1\leq\cos 5x\leq 1 \qquad \frac{\cos 5x}{x^2+2x+1}\leq\frac{1}{x^2}$$

و نیز $$\frac{1}{x^2+2x+1}\leq\frac{1}{x^2}$$

می‌دانیم $\int_1^{\infty}\frac{1}{x^2}\,dx$ همگرا است

$p=2$ پس طبق قانون آزمون مقایسه I همگرا است.

Subject

Date

بسط تیلور و مک لورن :

اگر داشته باشیم :

$$f(x) = c_0 + c_1 x^1 + c_2 x^2 + \dots + c_n x^n + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

دراین صورت داریم :

$$f(0) = c_0$$

$$f'(x) = c_1 + 2c_2 x + 3c_3 x^2 + \dots + n c_n x^{n-1} + \dots$$

$$f'(0) = c_1$$

$$f''(0) = 2c_2 \qquad c_2 = \frac{f''(0)}{2}$$

با ادامه این روند خواهیم داشت :

$$c_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$$

درنهایت خواهیم داشت :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

Subject
Date

که آن را بسط مک لورن تابع f می نامیم.

مشابهاً بسط تیلور تابع f حول نقطه ی a به صورت زیر تعریف می شود:

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

مثال ۱) بسط مک لورن هر یک از توابع زیر را بنویسید:

الف) $f(x)=\sin x$

$$\sin x=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\frac{f'''(0)}{3!}x^3+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\cdots$$

$$=0+x+0-\frac{1}{3!}x^3+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\cdots$$

$f'(x)=\cos x\Big|_{x=0}=1$ $\qquad f''(x)=-\sin x\Big|_0=0$

$f'''(0)=-\cos x\Big|_0=-1$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

طبق قضیه ابل سری توانی با شعاع همگرایی R را می‌توان جمله به جمله مشتق و جمله به جمله انتگرال گرفت. این قضیه به ما کمک می‌کند که به جای روش فوق از روش دیگری برای نوشتن بسط مک لورن تعدادی از توابع استفاده کنیم. به عنوان مثال می‌دانیم که حد مجموع یک دنباله تصاعد هندسی با قدر نسبت کوچکتر از یک به صورت زیر است:

$$a + aq + aq^2 + aq^3 + \cdots = \frac{a}{1-q}$$

از این نکته برای محاسبه بسط مک لورن $\arctan x$ استفاده می‌کنیم:

Subject
Date

$$\frac{1}{1+x}=\frac{1}{1-(-x)}=1-x+x^2-x^3+x^4-\dots$$

$|x|<1$ تصاعد هندسی با $a=1$ و $q=-1$

به جای x در عبارت فوق قرار دهید x^2

$$\frac{1}{1+x^2}=1-x^2+x^4-x^6+x^8-\dots$$

از طرفین آن انتگرال بگیرید

$$\arctan x=x-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{5}x^5-\frac{1}{7}x^7+\frac{1}{9}x^9-\dots$$

برای محاسبه تقریبی از $\frac{\pi}{4}$ داریم:

$$x=1\Rightarrow\frac{\pi}{4}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\dots$$

مثال / برای محاسبه سری مک لورن $f(x)=\ln(x+1)$ از بسط $\frac{1}{1+x}$

جمله به جمله انتگرال میگیریم:

$$\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-x^3+x^4-\dots$$

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\frac{x^5}{5}-\dots$$

PAPCO

Subject

Date

مثال/ برای نوشتن بسط xe^{-x^2} بطریق زیر عمل می‌کنیم:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots$$

بجای x مقدار $-x^2$ می‌دهیم

$$e^{-x^2} = 1 - x^2 + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \frac{x^8}{4!} + \dots$$

در x ضرب می‌کنیم:

$$xe^{-x^2} = x - x^3 + \frac{x^5}{2!} - \frac{x^7}{3!} + \frac{x^9}{4!} + \dots$$

مثال: مقدار تقریبی $\int_0^1 e^{-x^2}dx$ را بدست آورید:

$$\int_0^1 e^{-x^2}dx = \int_0^1 \left(1 - x^2 + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \dots\right) dx$$

$$= x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5 \cdot 2!} - \frac{x^7}{7 \cdot 3!} + \dots \Big]_0^1$$

$$= 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5 \cdot 2!} - \frac{1}{7 \cdot 3!} + \dots$$

Subject
Date

مثال ۱۰) پس از محاسبه‌ی مک لورن $\frac{\sin x}{x}$ تقریبی برای $\int_0^1 \frac{\sin x}{x}\,dx$ بیابید:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots$$

$$\frac{\sin x}{x} = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \cdots$$

$$\int_0^1 \frac{\sin x}{x}\,dx = x - \frac{x^3}{3 \cdot 3!} + \frac{x^5}{5 \cdot 5!} - \frac{x^7}{7 \cdot 7!} + \cdots \Big]_0^1$$

$$= 1 - \frac{1}{3 \cdot 3!} + \frac{1}{5 \cdot 5!} - \frac{1}{7 \cdot 7!} + \cdots$$

Subject
Date ۹۳,۲,۳۱

سری :

تعریف : دنباله $\{a_n\}$ عبارت است از تابعی مانند $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$

$a(1), a(2), a(3), \dots, a(n), \dots$

برای سهولت کار به جای $a(n)$ می‌نویسیم a_n

و برای نمایش آن به آن می‌نویسیم $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$

پس برای معرفی دنباله دو راه داریم :

① فرمول جمله کلی $a_n = \frac{n-1}{n^2+3}$

② نمایش برد آن $\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots\}$

تعریف سری : دنباله $\{a_n\}$ مفروض است دنباله جدید $\{S_n\}$ را به صورت زیر می‌سازیم :

$S_1 = a_1$

$S_2 = a_1 + a_2$ $\qquad$ $S_n = a_1 + \dots + a_n = \sum_{i=1}^{n} a_i$

$S_3 = a_1 + a_2 + a_3$

$\{S_n\}$ را دنباله مجموعه‌های جزئی $\{a_n\}$ معلوم می‌نامیم.

PAPCO

Date: Subject:

مثال: دنباله $a_n = (\frac{1}{2})^n$ را در نظر بگیرید (دنباله هندسی)

$\{a_n\} = \{\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots\}$ $a = \frac{1}{2}$ $q = \frac{1}{2}$

$S_1 = \frac{1}{2}$

$S_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}$

$S_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + (\frac{1}{2})^n = \frac{a(1-q^n)}{1-q}$

$= \frac{\frac{1}{2}(1-(\frac{1}{2})^n)}{1-\frac{1}{2}} = 1 - (\frac{1}{2})^n$

- حد این دنباله را با $\sum_{i=1}^{n} a_n = a_n$ ... $\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n}$ یا $\lim_{n\to\infty}$ نمایش می‌دهیم

اگر این حد موجود و متناهی باشد سری را همگرا می‌نامیم و در غیر این صورت واگرا می‌نامیم.

($\sum a_n$ را دنباله مجموعه جزئی می‌نامیم)

قضیه: اگر $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ همگرا باشد آنگاه $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

نکته: از عکس نقیض این قضیه استفاده می‌کنیم

(آزمون واگرایی سری): اگر $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$ آنگاه سری $\sum a_n$ واگراست

MOBIN

مثال: هر یک از سری های زیر طبق آزمون فوق واگرا هستند

$\sum_{n=1}^{\infty} \cos\frac{1}{n}$ $\qquad \lim_{n\to\infty} \cos\frac{1}{n} = 1 \neq 0$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{3n+1}$ $\qquad \lim a_n = \frac{2}{3} \neq 0$

$\sum_{n=1}^{\infty} \tan\frac{n\pi}{2n+1}$ $\qquad \lim a_n = \tan\frac{\pi}{2} = \infty \neq 0$

$\sum_{n=1}^{\infty} (\ln n)$ $\qquad \lim a_n = +\infty \neq 0$

نکته ۲: عکس قضیه فوق لزوماً درست نیست

به مثال های زیر توجه کنید:

مثال: هر یک از سری های زیر علی رغم آن که در آن ها $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

ولی واگرا هستند

سری همساز $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ ، $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ و $\sum_{n=1}^{\infty} \sin\frac{1}{n}$

سری هارمونیک

Date: Subject:

- اگر بتوانیم به طریقی مجموع n جمله اول را بنویسیم و سپس از آن

حد گرفته و علاوه بر تعیین همگرایی یا واگرایی، مقدار سری هم مشخص است

می آوریم در دو مورد زیر این کار ممکن است.

1) سری هندسی که دنباله آن دنباله هندسی است.

$$\sum_{k=1}^{\infty} a q^{k-1}$$

$$S_n = \text{مجموع n جمله دنباله هندسی} = \frac{a(1-q^n)}{1-q}$$

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{a}{1-q} \qquad |q|<1}$$

- سری هندسی برای $|q|<1$ همگرا به $\frac{a}{1-q}$ و برای $|q|\geq 1$ واگراست.

مثال: پس از بررسی همگرایی یا واگرایی، مقدار سری هم محاسبه نمایید:

a = با قرار دادن کمترین مقدار اندیس در جمله عمومی دست می‌آید

q = عبارت زیر توان n

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\tfrac{1}{2}\right)^{n-1} \quad q=\tfrac{1}{2},\ |q|<1 \ \text{همگرا} \qquad \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2$$

Date: .... Subject: ....

۲) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2^{n-1}}{5^{n+1}} \underset{\text{هندسی}}{\overset{q=2/5<1}{=\!=}} \frac{2/5^{3}}{1-2/5} = \frac{2^{n} 2^{-1}}{5^{n} 5} \Rightarrow \left(\frac{2}{5}\right)^{n} \frac{1}{10}$

د) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{7^{n-1}}{3^{2n+1}} \overset{q=7/9<1}{=\!=} \frac{7^{-1}/3}{1-7/9} = \frac{1/21}{2/9} = \frac{9}{42}$

ه) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n}-5^{n}}{3^{2n}} = \frac{2/9}{1-2/9} - \frac{5/9}{1-5/9}$

(۳) سری تلسکوپی: (قاعده ادغام)

$\sum_{n=1}^{k} (a_n - a_{n+1}) = a_1 - a_{k+1}$

$\Rightarrow \lim_{k\to\infty} \sum_{n=1}^{k} (a_n - a_{n+1}) = \lim_{k\to\infty} (a_1 - a_{k+1})$

دلیل:

$\sum_{n=1}^{k} (a_n - a_{n+1}) = (a_1 - \cancel{a_2}) + (\cancel{a_2} - \cancel{a_3}) + (\cancel{a_3} - \cancel{a_4}) + \dots + (\cancel{a_k} - a_{k+1}) = a_1 - a_{k+1}$

مثال: همگرایی یا واگرایی هریک از سری های زیر را تعیین کرده و برای سری های همگرا مقدار را تعیین کنید

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}=\sum\frac{1}{n^2+n}=\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$$

$$\frac{1}{2}-\lim\frac{1}{n+1}=\frac{1}{2}$$

$$\sum_{n=5}^{\infty}\frac{1}{4n^2-1}=\sum\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\sum_{n=5}^{\infty}\frac{\frac{1}{2}}{2n-1}-\frac{\frac{1}{2}}{2n+1}=\frac{\frac{1}{2}}{9}-\cancel{\lim\frac{\frac{1}{2}}{2n+1}}=\frac{1}{18}$$

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(3n-1)(3n+2)}=\sum_{n=3}^{\infty}\left(\frac{\frac{1}{3}}{3n-1}-\frac{\frac{1}{3}}{3n+2}\right)=\frac{\frac{1}{3}}{8}-\cancel{\lim}=\frac{1}{24}$$

* p-سری: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ را یک p-سری می نامیم

قضیه: p-سری برای $p>1$ همگراست و اگر $p\leq 1$، p-سری واگراست.

مثال: همگرایی یا واگرایی هریک از سری های زیر را تعیین کنید:

① $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ $p=1$ واگرا

② $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n}}$ $p=\frac{3}{2}>1$ همگرا

③ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n^2}}$ $p=\frac{2}{3}<1$ واگرا

④ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n^5}}$ $p=\frac{5}{3}>1$ همگرا

آزمون همگرایی سری:

۱) آزمون مقایسه برای سری با جملات مثبت:

فرض کنید $0 \le a_n \le b_n$

① اگر $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ همگرا باشد آنگاه $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ همگراست

② اگر $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ واگرا باشد آن گاه $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ واگراست

1) $\sum_{n=1}^{\infty} \sin^2\frac{1}{n}$ $\qquad \sin^2\frac{1}{n} \le \left(\frac{1}{n}\right)^2$ (به ازای)

$\frac{1}{n^2}$ یک پی سری p- سری همگراست. پس طبق آزمون مقایسه سری مسئله همگراست.

2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^3+1}$ $\qquad \frac{1}{4n^3+1} \le \frac{1}{n^3}$

$\frac{1}{n^3}$ یک پی سری p- سری همگراست پس سری مورد مسئله طبق آزمون مقایسه همگراست.

آزمون مقایسه حدی برای سری‌ها با جملات مثبت :

الف) فرض کنیم $a_n > 0$ و $b_n > 0$ و $\lim \frac{a_n}{b_n} = A$ که $A \neq 0$ و $A \neq \infty$

در این صورت وضعیت همگرایی و واگرایی $\sum a_n$ و $\sum b_n$ یکی است.

ب) اگر $A = 0$ و $\sum b_n$ همگرا باشد آن‌گاه $\sum a_n$ همگراست.

ج) اگر $A = \infty$ و $\sum b_n$ واگرا باشد آن‌گاه $\sum a_n$ واگراست.

همگرایی یا واگرایی؟

مثال:

$\sum_{n=1}^{\infty} \sin\frac{1}{n}$ $\qquad \lim \frac{\sin\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} = 1$ $\qquad \sum \frac{1}{n}$ واگراست

پس طبق آزمون مقایسه حدی واگراست

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4n-3}{n^3-5n-7}$ $\qquad \lim \frac{\frac{4n-3}{n^3-5n-7}}{\frac{1}{n^2}} = 4$

$\sum \frac{1}{n^2}$ همگراست پس طبق آزمون مقایسه حدی همگراست.

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n+\ln n}$ $\qquad \lim \frac{\frac{1}{2n+\ln n}}{\frac{1}{n}} = \frac{1}{2}$

$\sum \frac{1}{n}$ واگراست پس طبق آزمون مقایسه حدی واگراست

Date: .... Subject: ....

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{8n^2-5n}}$$ طبق آزمون مقایسه با $\sum \frac{1}{n^{2/3}}$ واگراست

آزمون انتگرال: فرض کنید $a_n = f(n)$ و $f(x)$ روی $[1,\infty)$ تابعی پیوسته و مثبت و نزولی باشد آنگاه سری و نسبت همگرایی و واگرایی $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ و $\int_1^{\infty} f(x)\,dx$ یکسان است.

مثال: $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tan^{-1} n}{n^2+1}$$

$f(x) = \dfrac{\tan^{-1} x}{x^2+1}$ روی $[1,\infty)$ پیوسته نزولی و مثبت است.

$$\int_1^{\infty} \frac{\tan^{-1} x}{x^2+1}\,dx = \int_1^{\infty} \underbrace{\frac{1}{x^2+1}}_{u'} \underbrace{\tan^{-1} x}_{u}\,dx$$

$$= \frac{(\tan^{-1} x)^2}{2}\Big|_1^{\infty} = \frac{(\frac{\pi}{2})^2}{2} - \frac{(\frac{\pi}{4})^2}{2}$$

انتگرال ناسره همگراست، در نتیجه طبق آزمون انتگرال سری همگراست.

(۲) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n}$ چون $\frac{\ln x}{x}$ در بازه $[1,\infty)$ پیوسته و مثبت و نزولی است

$$\int_1^{\infty} \frac{\ln x}{x}\,dx = \int_1^{\infty} \frac{1}{x}\ln x\,dx$$

$$= \frac{(\ln x)^2}{2}\Big]_1^{\infty}$$

$$= \infty - 0 = \infty$$

انتگرال نامتناهی واگراست. در نتیجه سری واگراست.

آزمون لایب نیتز: برای سری های متناوب سری را متناوب گوییم اگر جملات آن یکی در میان مثبت و منفی باشد (جملات) سری متناوب به صورت $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$

اگر a_n به صورت نزولی به سمت صفر برود $\sum (-1)^n a_n$ همگراست.

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ همگرا: $a_n = \frac{1}{n}$ نزولی و همگرا به صفر است پس سری همگراست

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$: $a_n = \frac{1}{n^2}$ نزولی و همگرا به صفر است پس سری همگراست

Date: ۹۲/۲/۲۸ Subject:

تعریف (همگرایی مطلق و مشروط)

سری $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ را همگرای مطلق می‌نامیم اگر $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ همگرا باشد.

مثال ۱) سری $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2}{3^n}$ را در نظر بگیرید

این یک سری هندسی با $q = -\frac{1}{3}$ همگراست

$|q| < 1 \quad S = \frac{a}{1-q} = \frac{2/3}{1+1/3} = \frac{2/3}{4/3} = \frac{1}{2}$

بنابراین این سری همگرای مطلق است؟

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{3^n} = \frac{a}{1-q}$$

سری هندسی $q = \frac{1}{3}$

$$= \frac{2/3}{1-1/3} = 1$$

این سری همگرای مطلق است.

مثال ۲) آیا سری $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ همگرای مطلق است؟

(سری طبق آزمون لایب‌نیتز همگراست چون $a_n = \frac{1}{n}$)

سری هارمونیک واگراست $\sum |a_n| = \sum \frac{1}{n}$ لذا این سری همگرای مطلق نیست.

MOBIN

قضیه: هر سری همگرای مطلق، همگراست.

تعریف: اگر سری $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ همگرا باشد ولی $\sum |a_n|$ واگرا باشد سری اول را همگرای مشروط می‌نامیم.

مثال ۱: تعیین کنید سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos\frac{n\pi}{3}}{n^2}$ همگراست یا واگرا.

$$\frac{\frac{1}{2}}{1^2} + \frac{-\frac{1}{2}}{2^2} + \frac{-1}{3^2} + \frac{-\frac{1}{2}}{4^2} + \dots$$

$$0 \le |a_n| = \left|\frac{\cos\frac{n\pi}{3}}{n^2}\right| \le \frac{1}{n^2}$$

$\sum \frac{1}{n^2}$ یک سری همگراست پس $\sum |a_n|$ طبق آزمون مقایسه همگراست پس $\sum a_n$ همگرای مطلق و در نتیجه همگراست.

قضیه: آزمون نسبت. فرض کنید $\sum a_n$ یک سری با جملات غیر صفر باشد.

الف) اگر $\lim \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = L < 1$ آنگاه $\sum a_n$ همگرای مطلق است.

Date: .... Subject: ....

ب) اگر $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| > 1$ یا $= \infty$ در اینصورت $\sum a_n$ واگراست

ج) اگر $L = 1$ این آزمون بی‌نتیجه است.

مثال / همگرایی مطلق سری‌های زیر را بررسی کنید:

$$1/ \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}\frac{n}{2^n}$$

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{\frac{n+1}{\cancel{2^{n+1}}\,2}}{\frac{n}{\cancel{2^n}}}\right| = \frac{n+1}{2n} \longrightarrow \frac{1}{2} < 1$$

سری مطلقا همگراست

$$2/ \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}\frac{2^n}{n!}$$

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{\frac{2^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{2^n}{n!}}\right| = \frac{2}{n+1} \longrightarrow 0 < 1$$

مطلقا همگراست

$$3/ \sum n\left(\frac{3}{2}\right)^n$$

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{(n+1)\left(\frac{3}{2}\right)^{n+1}}{n\left(\frac{3}{2}\right)^n} = \frac{3}{2}\,\frac{n+1}{n} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{3}{2} > 1$$

مطلقا واگراست

۴/ $\sum \frac{n^2}{n!}$

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{\frac{(n+1)^2}{(n+1)!}}{\frac{n^2}{n!}}\right| = \frac{n+1}{n^2} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

دنباله همگرا

۵/ $\sum \frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)!}$

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{\frac{1}{(2(n+1)-1)!}}{\frac{1}{(2n-1)!}} = \frac{\frac{1}{(2n+1)!}}{\frac{1}{(2n-1)!}}$$

$$= \frac{(2n-1)!}{(2n+1)!} = \frac{\cancel{(2n-1)!}}{(2n+1)(2n)\cancel{(2n-1)!}}$$

$$= \frac{1}{(2n+1)(2n)} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 < 1$$ سری مطلقا همگرا

MOBIN

Date: Subject:

4) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!}$

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{\frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{n^n}{n!}}$$

$$\frac{\frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)\cancel{n!}}}{\frac{n^n}{\cancel{n!}}} = \frac{(n+1)^n}{n^n} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^n$$

$$= \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e > 1$$

سری واگرا

سری توانی: سری‌های $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ و $\sum_{n=1}^{\infty} a_n (x-a)^n$ را

یک سری توانی می‌نامیم.

سری توانی یک تابع است و دامنه آن شامل x هایی است که سری در آن

همگرا می‌شود.

مثال / به ازای چه مقادیری از x سری توانی زیر همگراست؟

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2^n x^n}{n\, 3^n}$$

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left| \frac{\dfrac{2^{n+1} x^{n+1}}{(n+1)\, 3^{n+1}}}{\dfrac{2^n x^n}{n\, 3^n}} \right| = \frac{2|x| n}{3(n+1)}$$

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{2}{3}|x| \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = \frac{2}{3}|x| < 1$$

بازه $|x| < \frac{3}{2}$ همگراست. $\frac{2}{3}|x| = 1$ حکمی نمی‌دهد

پس باید این موارد را جداگانه بررسی کنیم.

$|x| = \frac{3}{2} \qquad x = \pm \frac{3}{2}$

$$x = \frac{3}{2} \quad \sum (-1)^{n+1} \frac{2^n \left(\frac{3}{2}\right)^n}{n\, 3^n} = \sum \frac{(-1)^{n+1}}{n}$$

سری متناوب - طبق آزمون لایب نیتز همگراست

$x = -\frac{5}{2} \quad \sum \frac{(-1)^{n+1} 2^n (-\frac{5}{2})^n}{n\, 5^n} = \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{1}{n}$

که این سری هارمونیک و واگرا است.

$I = (-\frac{5}{2} , \frac{3}{2})$

قضیه: برای سری توانی $\sum a_n x^n$ دقیقاً یکی از سه حالت زیر اتفاق می‌افتد.

۱) سری در $\mathbb{R}$ همگراست

۲) سری فقط برای $x=0$ همگراست

۳) عدد مثبت R موجود است که آن را شعاع همگرایی نامیم و سری برای تمام نقاط بازه $(-R, R)$ همگراست.

در این صورت کلی از انواع زیر بازه همگرایی خواهد بود.

$(-R,R)$ یا $[-R,R)$ یا $(-R,R]$ یا $[-R,R]$

مثال / شعاع و بازه همگرایی را برای سری های توانی زیر را بیابید.

۱) $\sum_{n=1}^{\infty} n!\, x^n$

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{(n+1)!\, x^{n+1}}{n!\, x^n}\right| = |x|(n+1) \xrightarrow{|x|\neq 0} \infty$$

حد اخیر فقط برای $x=0$ همگراست.

شعاع همگرایی صفر است.

۲) $\sum (-1)^n \frac{x^n}{(2n-1)3^{2n-1}}$

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{x^{n+1}}{(2n+1)3^{2n+1}} \times \frac{(2n-1)3^{2n-1}}{x^n}\right|$$

$$= |x|\frac{1}{3^2} \times \frac{2n-1}{2n+1} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{|x|}{9} < 1$$

$|x| < ۹ \qquad R = ۹$

$x = ۹ \qquad \sum \frac{(-1)^n \, ۹^n}{(۲n-1)\, ۳^{۲n-1}} = \sum \frac{۳(-1)^n}{۲n-1}$ $\quad ۳^{۲n}$

سری متناوب طبق آزمون لایب نیتز همگراست.

$x = -۹ \qquad \sum \frac{(-1)^n (-۹)^n}{(۲n-1)\, ۳^{۲n-1}} = \sum \frac{۳}{۲n-1}$

طبق آزمون مقایسه حدی با سری هارمونیک واگراست / بازه همگرایی

$(-۹, ۹]$

$\sum \frac{۴^{n+1} x^{۲n}}{n+۳}$

$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \left| \frac{۴^{n+۲} x^{۲(n+1)}}{n+۴} \times \frac{n+۳}{۴^{n+1} x^{۲n}} \right|$

$= ۴x^۲ \frac{n+۳}{n+۴} \xrightarrow[n \to \infty]{} ۴x^۲ < 1$

شعاع همگرایی $R = \frac{1}{2}$ $\quad |x|^2 < \frac{1}{4} \quad |x| < \frac{1}{2}$

$$x = \frac{1}{2} \quad \sum \frac{4^{n+1}\left(\frac{1}{2}\right)^{2n}}{n+2} = \sum \frac{4^{n+1} \times \left(\frac{1}{4}\right)^{n}}{n+2} = \sum \frac{4}{n+2}$$

سری هارمونیک

$$x = -\frac{1}{2} \quad \sum \frac{4^{n+1}\left(-\frac{1}{2}\right)^{2n}}{n+2} = \sum \frac{4}{n+2}$$

مانند سری هارمونیک واگرا

$\left(-\frac{1}{2} , \frac{1}{2}\right)$ بازه همگرایی

Date: ۹۲,۳,۲ Subject:

نمونه سؤال :

۱) معادله $z^4+\sqrt{3}=i$ را حل کنید

$$z^4=-\sqrt{3}+i=2e^{\frac{5\pi}{6}i}$$

$$r=\sqrt{3+1}=2$$

$$\tan=\frac{y}{x}=\frac{1}{-\sqrt{3}}\xrightarrow{\text{ربع دوم}}\pi+\frac{\pi}{6}=\frac{5\pi}{6}$$

$$z=r^{\frac{1}{n}}e^{\frac{2k\pi+\theta}{n}i}$$

$$2^{\frac{1}{4}}e^{\frac{2k\pi+\frac{5\pi}{6}}{4}i}\qquad k=0,1,2,3$$

$$k=0\Rightarrow z_0=\sqrt[4]{2}\,e^{\frac{5\pi}{24}i}$$

$$k=1\Rightarrow z_1=\sqrt[4]{2}\,e^{\frac{\left(2\pi+\frac{5\pi}{6}\right)i}{4}}=\sqrt[4]{2}\,e^{\left(\frac{\pi}{2}+\frac{5\pi}{24}\right)i}$$

$$k=2\Rightarrow z_2=\sqrt[4]{2}\,e^{\frac{4\pi+\frac{5\pi}{6}}{4}i}=\sqrt[4]{2}\,e^{\left(\frac{\pi}{1}+\frac{5\pi}{24}\right)i}$$

$$k=3\Rightarrow z_3=\sqrt[4]{2}\,e^{\frac{6\pi+\frac{5\pi}{6}}{4}i}=\sqrt[4]{2}\,e^{\left(\frac{3\pi}{2}+\frac{5\pi}{24}\right)i}$$

۲) هر یک از حدود زیر را محاسبه کنید (هر مورد ۵ نمره)

الف) $\lim_{x \to \frac{\pi}{4}} (\tan x)^{\tan 2x} = 1^{\infty}$

$\lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \exp((\tan x - 1) \times \tan 2x) = \exp\left(\lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{\tan x - 1}{\cot 2x}\right)$

$\overset{H}{=} \exp\left(\lim \frac{1+\tan^2 x}{-2(1+\cot^2 2x)}\right) = \exp\left(\frac{2}{-2}\right) = e^{-1} = \frac{1}{e}$

ب) $\lim_{n \to \infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \left(\frac{1}{\sqrt{n+1}} + \frac{1}{\sqrt{n+2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n+n}}\right)$

این حد به صورت یک مجموع ریمان به صورت زیر است

$\lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} f\left(\frac{i}{n}\right) = \int_0^1 f(x)\,dx$

از مخرج $\sqrt{n}$ را از زیر رادیکال مخرج ها n را فاکتور می‌گیریم

$= \lim \frac{1}{n} \left(\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}} + \frac{1}{\sqrt{1+\frac{2}{n}}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{1+\frac{n}{n}}}\right)$

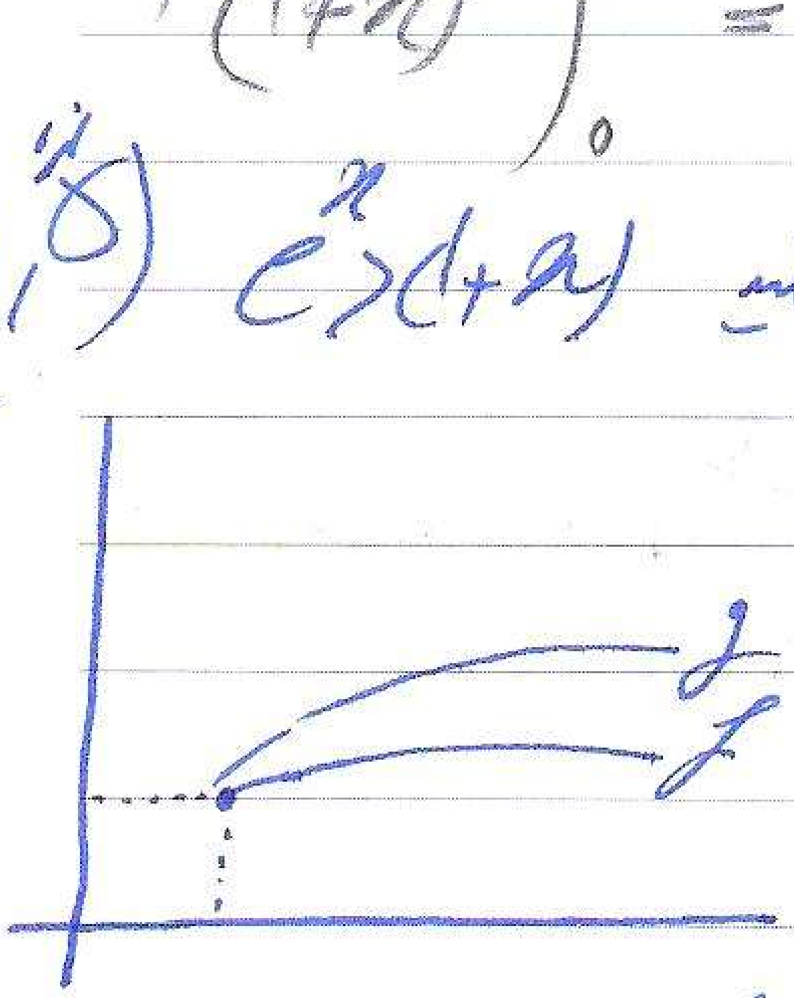
$$= \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+x}}\, dx = \int_0^1 (1+x)^{-\frac{1}{2}}\, dx$$

$u = 1+x$

$u' = 1$

$$2(1+x)^{\frac{1}{2}} \Big|_0^1 = 2\sqrt{2} - 2$$

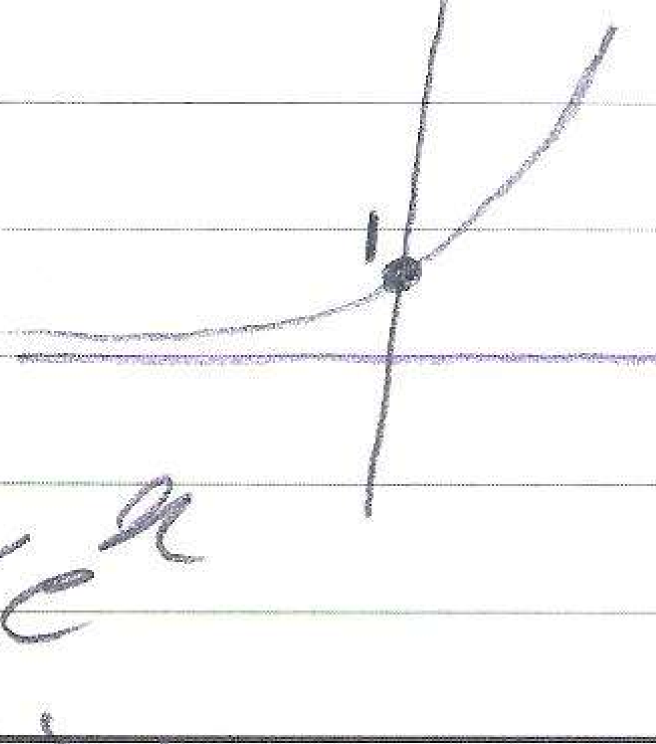
۳- به کمک قضیه مقدار میانگین برای $x>0$ ثابت کنید $e^x > (1+x)$ (۱ نمره)



قضیه اگر که $f(a)=g(a)$ و برای $x\in[a,b]$ داشته باشیم $f'(x)<g'(x)$ و بدانیم f و g روی $[a,b]$ پیوسته و روی (a,b) مشتق پذیر آنگاه: $f(x)<g(x)$

برای $f(x)=1+x$ و $g(x)=e^x$ داریم $f(0)=1=g(0)$ و به علاوه داریم

$f'(x)=1 < g'(x)=e^x \qquad x>0$



طبق قضیه $x+1 < e^x$

$x>0$

Date: .... Subject: ....

٤- سری مک لورن تابع $f(x)=x\ln(1+x^2)$ را بنویسید (۵ نمره)

برای حل این نوع سوال سری های مک لورن زیر را به خاطر بسپارید:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots$$

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \cdots$$

$$\frac{1}{1+x} = \frac{1}{1-(-x)} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - \cdots$$

سری مک لورن $\frac{1}{1+x}$ را میگیریم بعد $\xrightarrow{\int} \ln(1+x) \xrightarrow{x \to x^2} \ln(1+x^2)$

$\xrightarrow{x \times} x\ln(1+x^2)$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - \cdots$$

Date: Subject:

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots$$

$$\ln(1+x^2) = x^2 - \frac{x^4}{2} + \frac{x^6}{3} - \frac{x^8}{4} + \dots$$

$$x\ln(1+x^2) = x^3 - \frac{x^5}{2} + \frac{x^7}{3} - \frac{x^9}{4} + \dots$$

۵- هر یک از انتگرال های زیر را محاسبه کنید (هر کدام ۱/۵ نمره)

الف) $$\int_0^{\pi/4} \frac{(1+\tan^2 x)\,dx}{\sqrt[3]{4-2\tan x}} = -\frac{1}{2}\int_0^{\pi/4} \frac{-2(1+\tan^2 x)\,dx}{\sqrt[3]{4-2\tan x}}$$

$u = 4-2\tan x \qquad x=0 \Rightarrow u=4$

$u' = -2(1+\tan^2 x) \qquad x=\frac{\pi}{4} \Rightarrow u=1 \Longrightarrow -\frac{1}{2}\int_4^1 u^{-\frac{1}{3}}\,du$

$$= -\frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}u^{\frac{2}{3}}\right)\Big]_4^1$$

$$= -\frac{3}{4}\left(1-\sqrt[3]{16}\right)$$

ب) $$\int \frac{x\,dx}{1+\sqrt{x}} = \int \frac{(t^2)(2t\,dt)}{1+t}$$

$x = t^2 \rightarrow dx = 2t\,dt$

$$= 2\int \frac{t^3}{1+t}\,dt$$

$t^3 \;\big|\; t+1$

$-t^3 - t^2 \qquad t^2 - t + 1$

$-t^2$

$t^2 + t$

$$= 2\int \left(t^2 - t + 1 - \frac{1}{1+t}\right)dt$$

$$= 2\left(\frac{t^3}{3} - \frac{t^2}{2} + t - \ln|1+t|\right) + c$$

Date: .... Subject: ....

$$\xrightarrow{t=\sqrt{x}} 2\left(\frac{\sqrt{x^3}}{3}-\frac{x}{2}+\sqrt{x}-Ln\left|1+\sqrt{x}\right|\right)+c$$

2) $$\int\frac{(x+2)dx}{x^2(x-1)}=\int\left(\frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{C}{x-1}\right)dx$$

$$Ax(x-1)+B(x-1)+Cx^2=x+2$$

$x=1 \qquad C=3$

$x=0 \qquad -B=2 \Rightarrow B=-2$

$x=-1 \qquad 2A+4+3=1 \Rightarrow 2A=-6 \Rightarrow A=-3$

$$-2x^{-2}$$

$$=\int\left(\frac{-3}{x}-\frac{2}{x^2}+\frac{3}{x-1}\right)dx$$

$$-3Ln|x|+\frac{2}{x}+3Ln|x-1|+c$$

3) $$\int(e^x\sin x)^2dx=\int e^{2x}\sin^2x\,dx$$

$$=\int e^{2x}\left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)dx$$

$$=\frac{1}{2}\int e^{2x}dx-\frac{1}{2}\int e^{2x}\cos 2x\,dx$$

Date: .... Subject: $\int u\,dv = uv - \int v\,du$

$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}e^{2x}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}e^{2x}(\sin 2x + \cos 2x)\right) + C$

باید حساب کنم

$I = \int e^{2x}\cos 2x\,dx = \frac{1}{2}e^{2x}\sin 2x - \int e^{2x}\sin 2x$

$\begin{cases} u = e^{2x} \\ dv = \cos 2x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = 2e^{2x} \\ v = \int \cos 2x\,dx = \frac{1}{2}\sin 2x \end{cases}$

$\begin{cases} u = e^{2x} \\ dv = \sin 2x \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} du = 2e^{2x} \\ v = \int \sin 2x\,dx = -\frac{1}{2}\cos 2x \end{cases}$

$= \frac{1}{2}e^{2x}\sin 2x - \left(-\frac{1}{2}e^{2x}\cos 2x + \overbrace{\int e^{2x}\cos 2x}^{I}\right)$

$2I = \frac{1}{2}e^{2x}(\sin 2x + \cos 2x)$

۴- طول قوس منحنی از ۰ تا ۲

$\begin{cases} x = \frac{t^2}{2} + 1 \\ y = \frac{1}{3}(1+2t)^{\frac{3}{2}} + 2 \end{cases}$

$L = \int_a^b \sqrt{1-(y')^2}\,dx \qquad y = f(x)$

$= \int_a^b \sqrt{1+(x')^2}\,dy \qquad x = g(y)$

$= \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{x'^2 + y'^2}\, dt$ $\quad x(t)$, $y(t)$

$x' = t$

$y' = \frac{1}{3}\left(\frac{3}{2}\right)(1+2t)^{\frac{1}{2}}(2) = \sqrt{1+2t}$

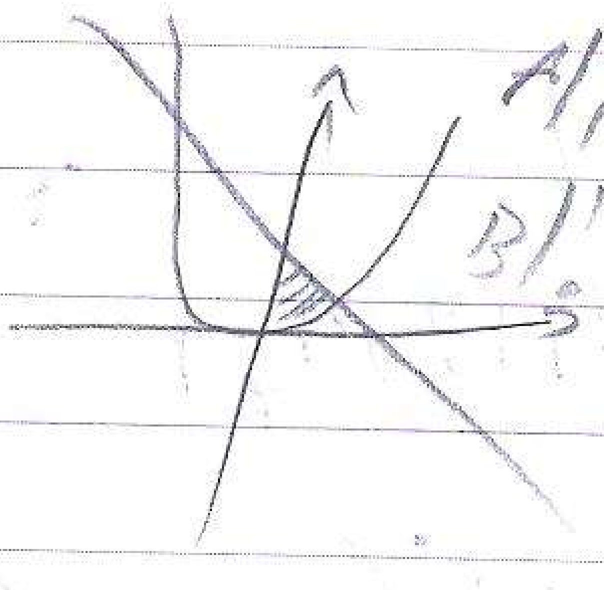
$L = \int_0^1 \sqrt{t^2 + 1 + 2t}\, dt$

$= \int_0^1 \sqrt{(1+t)^2}\, dt = \int_0^1 (1+t)\, dt$

$= t + \frac{t^2}{2}\Big|_0^1 = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$

۷- ناحیه‌ی ایجاد شده توسط منحنی های $y=x^2$ و $x+y=1$ و $x=0$

در ربع اول را حول محور x ها دوران می‌دهیم مطلوب است حجم



حجم حاصل

$V = \pi \int_0^{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}} (y_1^2 - y_2^2)\, dx$

$y = x^2$ $\quad x^2 = 1 - x$

$y = 1 - x$ $\quad x^2 + x - 1 = 0$

$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+4}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$

$$\int_{0}^{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}} \left((1-x)^2-(x^2)^2\right)dx$$

$$=\int_{0}^{\frac{\sqrt{5}-1}{2}} (1+x^2-2x-x^4)\,dx$$

$$=x+\frac{x^3}{3}-x^2-\frac{x^5}{5}\Big]_{0}^{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}$$

$$=\frac{\sqrt{5}-1}{2}+\frac{\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^3}{3}-\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^2-\left(\frac{\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^5}{5}\right)$$

۸ـ شعاع و فاصله همگرایی سری زیر را بیابید:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}(x-1)^n}{n2^n} = \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{\frac{(x-1)^{n+1}}{(n+1)2^{n+1}}}{\frac{(x-1)^n}{n2^n}}\right|$$

$$=\frac{|x-1|}{2}\,\frac{n}{n+1}\xrightarrow[n\to\infty]{}\frac{1}{2}|x-1|<1$$

$$|x-1|<2$$

$$R=2$$

$$x-1=2\quad \sum\frac{(-1)^{n+1}2^n}{n2^n}=\sum\frac{(-1)^{n+1}}{n}$$

سری متناوب طبق آزمون لایب نیتز همگراست

Date: Subject:

$x-1=-2 \quad \sum \frac{(-1)^{n+1}(-2)^n}{n\,2^n} = \sum \frac{1}{n}$

که یعنی سری هارمونیک واگرا

$(-2, 3]$ = بازه همگرایی

MOBIN